Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TACILA GOMES TEBALDI REZENDE

A ILUSÃO DA LINEARIDADE: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA NO SÉTIMO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Orientador:

Humberto José Bortolossi

NITERÓI
JUNHO/2013

Tacila Gomes Tebaldi Rezende

A Ilusão da Linearidade: Um Relato de Experiência no Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Niterói – RJ

Junho / 2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

R467 Rezende, Tacila Gomes Tebaldi

A Ilusão da Linearidade: Um Relato de Experiência no Sétimo Ano do Ensino Fundamental / Tacila Gomes Tebaldi Rezende. – Niterói: [s.n.], 2013.

63 f.

Orientador: Humberto José Bortolossi

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2013.

1. Ilusão da linearidade. 2. Ensino e aprendizagem de Matemática. 3. Razão e proporção. I. Título.

CDD: 510.7

Tacila Gomes Tebaldi Rezende

A Ilusão da Linearidade: Um Relato de Experiência no Sétimo Ano do Ensino Fundamental

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Junho / 2013

Dissertação de mestrado sob o título *“A Ilusão da Linearidade: Um Relato de Experiência no Sétimo Ano do Ensino Fundamental”*, defendida por Tacila Gomes Tebaldi Rezende e aprovada em 14 de junho de 2013, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Leonardo Tadeu Silvares Martins
Doutor em Matemática pela UFF

Mario Olivero Marques da Silva
Doutor em Matemática pela PUC-Rio

Walcy Santos
Doutora em Matemática pelo IMPA

Wanderley Moura Rezende
Doutor em Educação pela USP

Dedico este trabalho aos meus Pais que se sentem orgulhosos pela minha conquista
e ao meu marido que me compreendeu e apoiou neste período.

Agradecimentos

Agradeço aos professores e amigos que me fizeram companhia nos sábados de estudos, ao meu professor orientador Humberto José Bortolossi pela sua dedicação ímpar, à CAPES pelas bolsas concedidas e à Deus.

Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura. (Hermann Hankel)

Resumo

O termo *Ilusão da Linearidade* foi cunhado pelos pesquisadores belgas Dirk De Bock, Wim Van Dooren, Dirk Janssens e Lieven Verschaffel para designar o fenômeno da tendência dos alunos dos vários níveis de ensino em “aplicar relações lineares em qualquer lugar e, portanto, também em situações onde isto é inadequado”. Seus estudos revelam que a ilusão da linearidade é um fenômeno fortemente arraigado que resiste às várias metodologias de ensino e parâmetros de aprendizagem. A partir das causas e de algumas sugestões para a prática educacional dadas por estes pesquisadores, relatamos neste trabalho nossa experiência em preparar e conduzir aulas sobre proporcionalidade para uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no interior do município de Campos dos Goytacazes com atenção especial aos vários aspectos que permeiam a ilusão da linearidade.

Palavras-chave: ilusão da linearidade; ensino e aprendizagem de Matemática; razão e proporção.

Abstract

The term *Illusion of Linearity* was coined by the Belgian researchers Dirk De Bock, Van Dooren Win, Dirk Janssens and Lieven Verschaffel to describe the phenomenon of the tendency of students in the diverse levels of education “to apply properties of linear relations ‘anywhere’ – thus also in situations where this is inadequate”. Their studies reveal that the illusion of linearity is a deep-rooted phenomenon that resists to the various teaching methodologies and learning parameters. From the causes and suggestions for educational practice given by these researchers, we report in this work our experience in preparing and conducting classes on proportionality to K-8 students at a public school within the municipality of Campos dos Goytacazes with special attention to the several aspects that permeate the illusion of linearity.

Keywords: illusion of linearity; teaching and learning of Mathematics; ratio and proportion.

Sumário

1 *Introdução*

1.1 A ilusão da linearidade

O termo *Ilusão da Linearidade* foi cunhado pelos pesquisadores belgas Dirk De Bock, Wim Van Dooren, Dirk Janssens e Lieven Verschaffel para designar o fenômeno da tendência dos alunos dos vários níveis de ensino em “aplicar relações lineares em qualquer lugar e, portanto, também em situações onde isto é inadequado” [6, página 2] (tradução nossa), algo já alertado por Freudenthal em 1983: “Linearidade é uma propriedade tão sugestiva que prontamente somos seduzidos em tratar qualquer relação numérica como se ela fosse linear.” [8, página 267] (tradução nossa). Esses pesquisadores vêm estudando a ilusão da linearidade há vários anos e os resultados de suas pesquisas já publicados em várias revistas científicas originaram um livro destinado exclusivamente ao assunto: *The Illusion of Linearity - From Analysis to Improvement* [6]. Indicamos a seguir alguns fatos marcantes apresentados neste livro.

- A ilusão da linearidade é um fenômeno fortemente arraigado que resiste às várias metodologias de ensino e parâmetros de aprendizagem.
- Três causas principais foram identificadas para a ilusão da linearidade. A primeira é de natureza intrínseca: ela se relaciona com o fato da proporcionalidade ser intuitiva e simples e, portanto, as pessoas tendem a usá-la (“inércia dos conceitos”) até que percebam que isto não pode ser feito em determinadas situações. A segunda causa se refere a maneira como proporcionalidade é frequentemente ensinada, a saber, (a) com partes do currículo dando uma forte ênfase à proporcionalidade em comparação com as relações não lineares; (b) com o uso excessivo de problemas do tipo “dados três valores, ache o quarto valor que falta”; (c) com o enfoque quase que exclusivo nos métodos de resolução rotineiros (regra de três, tabelas de proporcionalidade) em comparação com uma análise mais significativa dos problemas propostos. A terceira causa se refere ao fato dos alunos, por não entenderem as propriedades de um conteúdo específico que estão estudando (Geometria, Funções Quadráticas, etc.), procuram então usar um modelo mais simples (e inapropriado!) para resolver os problemas propostos: proporcionalidade.

- A principal circunstância em que a ilusão da linearidade fica substancialmente enfraquecida ocorre em Geometria, quando os alunos são convidados a investigar relações[1] entre perímetros e áreas de figuras planas não através de desenhos e nem por cálculos mas, sim, com a manipulação de material concreto[2]. Mesmo neste caso, a melhoria da sensibilidade dos estudantes com relação à ilusão da linearidade não resiste substancialmente, retornando posteriormente quando questões escolares mais tradicionais são propostas.
- Avisar antes de aplicar um teste que algumas questões propostas irão envolver situações não proporcionais produz um efeito pequeno, porém significativo, no desempenho dos alunos. Contudo, a taxa de acerto das questões que envolvem proporcionalidade diminuiu: os alunos começaram a usar estratégias não proporcionais para problemas que são proporcionais.
- Sugestões concretas para a prática educacional:

  (1) Acabar com a expectativa de que qualquer problema pode ser resolvido através de uma adição, subtração, multiplicação, divisão ou por uma combinação simples destas operações.

  (2) Eliminar as falhas em livros didáticos que permitem que estratégias de solução superficiais funcionem (imerecidamente) na maioria dos casos: se um determinado contexto ou estrutura de apresentação (por exemplo, o formato "dados três valores, ache o quarto valor que falta") tende a provocar uma rotina de resolução de problemas específicos, esse comportamento pode ser questionado ao confrontar os alunos com problemas matematicamente diferentes dentro do mesmo contexto e/ou estrutura de apresentação e, também, com problemas matematicamente idênticos apresentados em um contexto e/ou estrutura diferentes.

  (3) Apresentar problemas nos quais os alunos têm que identificar quais dados usar para resolvê-los, isto é, oferecer aos alunos problemas além daqueles onde todos os dados fornecidos são exatamente todos os dados necessários para se obter a solução.

  (4) Eliminar os problemas nos quais o contexto, os números e/ou a pergunta formulada não correspondem à vida real ou para os quais o modelo matemático que os alunos devem encontrar e aplicar não se encaixa (bem) com a situação evocada pelo enunciado do problema.

  (5) Legitimar outras formas de resposta além das respostas numéricas exatas, por exemplo, estimativas, comentários, desenhos, gráficos, etc.

  (6) Incluir formas alternativas de tarefas, tais como tarefas de classificação e tarefas de problematização. Em uma tarefa de classificação, os estudantes são convidados a agrupar os problemas em categorias diferentes e, então, explicar a motivação dos seus agrupamentos. Tarefas de problematização significam que os professores devem criar oportunidades para os estudantes gerarem seus próprios problemas, complementando assim as atividades de

[1] Por exemplo, se os lados de uma figura aumentam k vezes, o seu perímetro e a sua área aumentam quantas vezes?

[2] Por exemplo, através da manipulação de peças que pavimentam uma figura em estudo.

resolução de problemas comumente já apresentadas em sala de aula.

A ilusão da linearidade é um assunto diacrônico. Platão, em sua obra *Mênon*, mostra como Sócrates, usando seu método de maiêutica, dialoga com um escravo sobre a questão da duplicação da área de um quadrado [17, página 61]. De Block et al ([6, página 1]) relatam outros três episódios históricos: o problema deliano (o problema da duplicação do volume de um cubo), o fato de Aristóteles acreditar que a velocidade de um corpo em queda ser proporcional ao seu peso e o episódio em que Cardano deu uma resposta equivocada ao Paradoxo de Méré (Cardano afirmou que, uma vez que a probabilidade de se obter um par de uns em um lançamento de dois dados é igual a $1/36$, então seriam necessários 18 lançamentos de dois dados para obter um par de uns com probabilidade $1/2$).

Mais ainda, [15] defendem que linearidade constitui um obstáculo epistemológico no sentido de [3]: "Assim, arguimos que linearidade constitui um obstáculo epistemológico para a aquisição de funções não lineares e, consequentemente, que erros acontecem por causa do obstáculo e não apenas por causa de formulações linguísticas estereotipadas." [15, página 80] (tradução nossa).

Os PCN[3] (BRASIL, 1998) consideram proporcionalidade uma ideia fundamental ([4, página 22]), um princípio geral ([4, página 37]) e um instrumento útil na interpretação de fenômenos do mundo real ([4, página 67]). Com relação à ilusão da linearidade, encontramos dois parágrafos que recomendam a exploração de situações não proporcionais:

> *Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais – os contraexemplos.*
>
> *O aluno poderá desenvolver essa noção ao analisar a natureza da interdependência de duas grandezas em situações-problema em que elas sejam diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (função afim ou quadrática).*
>
> (BRASIL, 1998, p. 84 e 85)

Por outro lado, no Guia do Livro Didático de 2011 (BRASIL, 2010) do Programa Nacional do Livro Didático[4], não encontramos nenhuma recomendação ou orientação com relação à ilusão da linearidade.

---

[3] Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), criados em 1997 pelo Governo Federal, constituem um referencial para a Educação Básica no Brasil. Sem ser impositivo, seu objetivo principal é orientar o planejamento escolar e fornecer parâmetros a partir dos quais o sistema educacional possa se organizar.

[4] Criado pelo Governo Federal, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) tem por objetivo auxiliar o trabalho pedagógico dos professores através da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da Educação Básica da rede pública de ensino. Como parte deste programa, o Ministério da Educação faz uma avaliação de diversas obras e publica as resenhas de coleções consideradas aprovadas no Guia do Livro Didático. Este guia é então encaminhado às escolas e estas decidem qual obra melhor se adapta ao seu projeto político pedagógico. Esta obra é utilizada pela escola por três anos e após este período a instituição faz uma nova escolha.

1.2 Nossa proposta de trabalho

Um dos pressupostos que adotamos no momento de definir o tema para esta dissertação de mestrado foi o de tentar incorporar efetivamente o assunto escolhido em nossa prática docente. Como íamos lecionar o assunto proporcionalidade (e isto pela primeira vez) para uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, o professor orientador nos sugeriu que isto fosse feito à luz dos estudos sobre a ilusão da linearidade realizados pelos pesquisadores belgas Dirk De Bock, Wim Van Dooren, Dirk Janssens e Lieven Verschaffel.

Assim, como proposta de trabalho, decidimos relatar nossa experiência em preparar e conduzir aulas sobre proporcionalidade com atenção especial aos vários aspectos que permeiam a Ilusão da Linearidade.

No Capítulo 2 delineamos o contexto escolar no qual o nosso trabalho foi realizado. Para preparar as aulas, fizemos uma análise no que se refere ao ensino de proporcionalidade como apresentado em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental. Nossa avaliação se concentrou nos seguintes quesitos: (1) O livro didático, ao tratar o assunto de proporcionalidade, procura estimular o senso crítico (sobre a validade ou não) do uso de modelos lineares? Em caso afirmativo, como isto é feito? (2) Quais são os exemplos de modelos lineares apresentados pelo livro? Eles são legítimos e relevantes? Os resultados de nossas avaliações são apresentados no Capítulo 3. Esta análise também serviu para selecionarmos exercícios complementares aos exercícios propostos pelo livro didático adotado oficialmente na escola. Estes exercícios são apresentados no Capítulo 4. No Capítulo 5, expomos uma análise do desempenho dos alunos na Avaliação Bimestral final do quarto bimestre. No Capítulo 6, o trabalho é finalizado com algumas observações e ponderações relevantes ao tema.

2 O Contexto Escolar

2.1 A escola

O Colégio Municipal Eloy Ornelas, situada no distrito de Vila Nova de Campos, interior do município de Campos dos Goytacazes, atende alunos da pré-escola, do Ensino Fundamental (1º e 2º segmentos) e do Ensino de Jovens e Adultos (EJA). No turno da manhã, a escola recebe alunos de distritos vizinhos, no turno da tarde, estudam os alunos da sede e, no turno da noite, os alunos do EJA. Os alunos são, em sua maioria, oriundos de famílias que trabalham no comércio, em fábricas locais, na agricultura e como operários em plataformas de extração de petróleo. Em 2012, estavam matriculados 53 alunos na Educação Infantil, 183 alunos no 1º segmento do Ensino Fundamental, 139 alunos no 2º segmento do Ensino Fundamental e 86 alunos no Ensino de Jovens e Adultos.

2.2 O conteúdo programático do quarto bimestre

De acordo com o planejamento fornecido pela Secretaria de Municipal de Campos, razão, proporção e regra de três são os últimos tópicos que devem ser trabalhados no 7º ano do Ensino Fundamental. Esses assuntos foram trabalhados ao longo de 45 aulas de 50 minutos distribuídos da seguinte maneira:

Aula	Conteúdo
1	Explicação dos conceitos de razão e resolução de exemplos no quadro.
2	Exercícios sobre razão.
3	Correção dos exercícios. Exercícios de fixação envolvendo problemas com razão.
4	Razões especiais: explicação de razão envolvendo velocidades médias e escalas.
5	Exercícios envolvendo aplicabilidade da razão em velocidades médias e escalas.
6	Correção dos exercícios.
7	Aplicação de razão: densidade de um corpo e densidade demográfica.

Aula	Conteúdo
8	Exercícios envolvendo densidade de um corpo e densidade demográfica.
9	Correção dos exercícios.
10	Razão escrita na forma percentual.
11	Exemplos resolvidos e problemas.
12	Exercícios sobre porcentagem.
13	Correção dos exercícios. Mais exercícios envolvendo porcentagem.
14	Correção dos exercícios.
15	Aplicação de probabilidade no ensino da razão.
16	Exercícios envolvendo probabilidade.
17	Correção dos exercícios.
18	Exercícios de revisão.
19	Correção dos exercícios de revisão.
20 e 21	Teste.
22	Definição de Proporção. Exemplos resolvidos.
23	Exercícios envolvendo proporcionalidade.
24	Correção dos exercícios.
25	Resolução de exemplos não lineares.
26	Exercícios que envolvem ou não proporcionalidade.
27	Correção dos exercícios.
28	Outros exercícios que envolvem ou não proporcionalidade.
29	Correção dos exercícios.
30	Regra de três simples.
31	Exemplos resolvidos e exercícios.
32	Correção dos exercícios.
33	Problemas que não envolvem proporcionalidade.
34	Correção dos problemas.
35	Revisão de conteúdo.
36	Exercícios de revisão.
37	Correção dos exercícios de revisão.
38, 39 e 40	Prova bimestral.
41	Correção da prova no quadro.
42	Exercícios de reforço e correção.
43, 44 e 45	Prova de recuperação.

2.3 O livro didático

O livro didático oficialmente adotado para o 7º ano do Ensino Fundamental na Escola Municipal Eloy Ornelas foi *A Conquista da Matemática* de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci [10]. Na época em que o livro foi escolhido, a principal qualidade que levou a sua escolha foi a grande variedade de exercícios.

O livro possui 336 páginas divididas em 10 capítulos. São eles: (1) *Potências e Raízes*, (2) *O Conjunto dos Números Inteiros*, (3) *O Conjunto dos Números Racionais*, (4) *Estudando As Equações*, (5) *Estudando As Inequações*, (6) *Estudando Os Ângulos*, (7) *Estudando Triângulos e Quadriláteros*, (8) *Razões e Proporções*, (9) *Grandezas Proporcionais* e (10) *Porcentagem*.

Cada capítulo, por sua vez, é organizado por seções. A abertura de cada seção traz curiosidades e questões matemáticas que podem ser interligadas a temas de conhecimentos gerais ou fazer uma alusão aos conteúdos matemáticos a serem explorados.

Além das seções ordinárias com a apresentação do conteúdo, existem seções especiais: *Explorando*, *Exercícios*, *Brasil Real*, *Tratando A Informação* e *Retomando O Que Aprendeu*. Segundo o Guia do Professor do livro, na Seção *Explorando*, os autores propõem atividades que objetivam a valorização do conhecimento prévio dos alunos, assim como a construção e experimentação das próprias hipóteses a partir de experiências pessoais. A Seção *Exercícios* apresenta atividades onde os alunos terão a oportunidade de aplicar os novos conhecimentos para realizar cálculos e resolver situações-problema. Os exemplos apresentados na Seção *Brasil Real* fazem conexões entre a Matemática e diversas áreas do conhecimento, como Atualidade, Cidadania, Ciências, Ecologia, Esportes, História, Geografia, Língua Portuguesa, Meio Ambiente e Saúde. Esta seção possibilita a contextualização do conhecimento e permite que o aluno perceba a utilidade e aplicabilidade de cada conteúdo, auxiliando no processo de desenvolvimento do senso crítico sobre nossa realidade. A Seção *Tratando A Informação* explora a capacidade de leitura, interpretação e organização de dados em gráficos e tabelas. Nesta seção, também são trabalhados estatística, linguagem de computador e leitura de mapas. Ao fim de cada capítulo, é apresentada a Seção *Retomando O Que Aprendeu*. Nesta seção, os exercícios visam sintetizar os temas trabalhados no capítulo.

O livro dedica dois capítulos ao estudo de Razão, Proporção e Grandezas Proporcionais (62 páginas; 18,4% do total de páginas do livro). Uma análise mais detalhada de como o livro aborda esses assuntos será feita no Capítulo 3. Contudo, apresentamos aqui os objetivos indicados pelos autores da obra para os conteúdos apresentados nas 8 seções destes dois capítulos:

Seção 48. Razão: interpretar o conceito de razão; identificar razão de dois números racionais a e b ($b \neq 0$) como o quociente de a por b; identificar os termos de uma razão; reconhecer razões entre grandezas de mesma espécie.

Seção 49. Algumas razões especiais: representar e calcular algumas razões especiais (velocidade média, escala, densidade de um corpo, densidade demográfica); representar e calcular razões na forma percentual.

Seção 50. Proporção: identificar proporção como a igualdade de duas razões; ler e representar corretamente uma proporção; identificar os extremos e os meios de uma proporção.

Seção 51. Propriedade fundamental das proporções: verificar, por meio de cálculos, que em toda proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios; verificar, aplicando a propriedade fundamental, se um par de razões dadas forma uma proporção; aplicar a propriedade fundamental das proporções.

Seção 52. Outras propriedades das proporções: estabelecer novas proporções a partir de uma dada proporção, com a aplicação das propriedades da soma ou da diferença; resolver problemas aplicando essas propriedades.

Seção 53. Números direta e inversamente proporcionais: reconhecer quando dois grupos de números são diretamente proporcionais; aplicar o conceito de números diretamente proporcionais para resolver problemas; reconhecer quando dois grupos de números são inversamente proporcionais; aplicar o conceito de números inversamente proporcionais para resolver problemas; reconhecer quando duas grandezas dependentes são diretamente proporcionais; reconhecer quando duas grandezas dependentes são inversamente proporcionais.

Seção 54. Regra de três simples: aplicar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas que envolvem a variação de duas grandezas dependentes, direta ou inversamente proporcionais.

Seção 55. Regra de três composta: aplicar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas que envolvem a variação de três ou mais grandezas dependentes, direta ou inversamente proporcionais.

2.4 A turma do 7º ano do período matutino de 2012

A turma do 7º ano do período matutino de 2012 do Colégio Municipal Eloy Ornelas contava com 15 alunos. Desta turma, um aluno foi transferido para o turno da noite no decorrer do 4º bimestre. Os 14 alunos restantes permaneceram no turno da manhã. As faixas etárias dos alunos eram: seis alunos com 12 anos de idade, dois alunos com 13 anos, dois alunos com 14 anos, um aluno com 15 anos e quatro alunos com 16 anos. Destes alunos, nove repetiram alguma série do Ensino Fundamental, sendo que sete entre os nove já tinham repetido o 7º ano. Quatro alunos destes que repetiram o 7º ano obtiveram aprovação na disciplina de Matemática, apresentando desempenho insatisfatório em outras áreas do conhecimento.

Por fim, observamos que nenhum dos alunos trabalhava.

2.5 A condução das aulas

Os tópicos do conteúdo foram trabalhados de forma tradicional, com uma explicação inicial dos conceitos no quadro, seguida de um aprofundamento com resolução de exemplos e exercícios de fixação aplicados individualmente ou em grupos. A correção dos exercícios, por sua vez, era feita na maioria das vezes no quadro (reforçando as ideias apresentadas nos exemplos) e, algumas vezes, diretamente no caderno do aluno (avaliando, assim, as dificuldades individuais). Dúvidas e erros frequentes identificados nas sessões de exercícios em uma aula eram retomados e explicados nas aulas subsequentes.

Em nossas aulas, a estratégia adotada para tentar “quebrar” a ilusão da linearidade foi a de incorporar em nossos três níveis de atuação (explicação, exemplos e exercícios) situações que promovessem uma reflexão e despertassem o senso crítico dos alunos com relação ao uso de proporcionalidade. Estas situações são tipicamente problemas sugeridos pela literatura e que foram catalogados previamente (ver o Capítulo 4).

3 Avaliações de alguns livros didáticos

Neste capítulo faremos uma análise no que se refere ao ensino de proporcionalidade como apresentado em alguns livros didáticos do Ensino Fundamental (os disponíveis na biblioteca da escola). Nossa avaliação se concentrou nos seguintes quesitos: (1) O livro didático, ao tratar o assunto de proporcionalidade, procura estimular o senso crítico (sobre a validade ou não) do uso de modelos lineares? Em caso afirmativo, como isto é feito? (2) Quais são os exemplos de modelos lineares apresentados pelo livro? Eles são legítimos e relevantes?

3.1 Matemática de Imenes e Lellis

O livro tem 304 páginas e o Capítulo 5 (com 16 páginas, 5,3% do total de páginas do livro) trata do assunto de proporcionalidade. O capítulo inicia colocando quatro situações problemas onde o aluno (junto com mais dois colegas) deve decidir se é possível ou não fazer uma previsão:

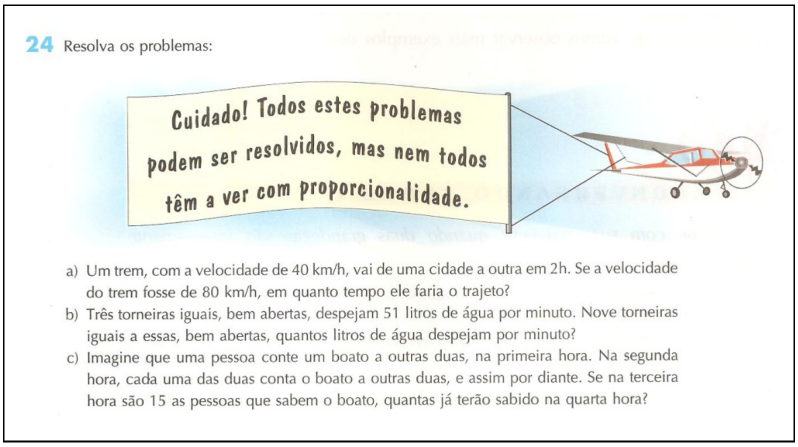
Situação 1. O Fusca 68 do meu avô gastou 1,5 h para andar 43 km. Se nós continuarmos a viagem na mesma velocidade, será possível prever quantos quilômetros o carro vai andar nas próximas 3 h? Se possível, diga quantos quilômetros serão.

Situação 2. Tânia tem 2 anos e 81 cm de altura. Será possível prever, fazendo cálculos, a altura de Tânia aos 6 anos? Se for possível, diga qual será essa altura.

Situação 3. Observe o folheto que acompanha a cafeteira de dona Marta (o folheto diz que para 8 cafezinhos são necessárias 3 colheres de pó e 0,5 ℓ de água). Com essas informações, é possível calcular quantas colheres de pó e quanta água ela precisa para fazer 24 cafezinhos? Se possível, faça os cálculos.

Situação 4. Aos 30 minutos do jogo, meu time ganha por 3×1. Como o jogo dura 90 minutos, qual será o placar final?

De fato, essa preocupação em fazer com que o aluno reflita sobre situações que podem ou não estar relacionadas com proporcionalidade que se mostra logo de início permeia o resto do capítulo, com exercícios explícitos sobre o tema (ver, por exemplo, o exercício da Figura 3.1).


24 Resolva os problemas:

a) Um trem, com a velocidade de 40 km/h, vai de uma cidade a outra em 2h. Se a velocidade do trem fosse de 80 km/h, em quanto tempo ele faria o trajeto?
b) Três torneiras iguais, bem abertas, despejam 51 litros de água por minuto. Nove torneiras iguais a essas, bem abertas, quantos litros de água despejam por minuto?
c) Imagine que uma pessoa conte um boato a outras duas, na primeira hora. Na segunda hora, cada uma das duas conta o boato a outras duas, e assim por diante. Se na terceira hora são 15 as pessoas que sabem o boato, quantas já terão sabido na quarta hora?

Figura 3.1: Desenvolvendo o senso crítico com relação ao uso da proporcionalidade em [12, p. 135].

Os exemplos de proporcionalidade são variados: a distância percorrida por um objeto em movimento retilíneo uniforme é proporcional ao tempo do percurso, o perímetro de um quadrado é proporcional à medida de seu lado, proporcionalidade em receitas de alimentos (gelatina, pão, café), ampliação de figuras e escala em plantas de casas. Os autores fazem uso intensivo de tabelas para estudar a lineariedade ou não-lineariedade em exemplos e exercícios.

Em nossa opinião, uma falha grave do texto é considerar como proporcional escalas em mapas regionais (Exemplo 2 na página 131 e Exercício 13 na página 133). Conforme apresentado no Apêndice B, mapas do globo terrestre são objetos intrinsecamente não lineares (o termo “intrínsico” está sendo usado aqui no sentido de [1, p. 91-108]).

3.2 Matemática e Realidade de Iezzi, Dolce e Machado

O livro tem 288 páginas divididas em 28 capítulos. Os Capítulos 24, 25 e 26 tratam dos assuntos de razão, proporção e grandezas proporcionais, respectivamente. Estes três capítulos foram escritos em 26 páginas (9,0% do total de páginas do livro).

Os autores motivam o conceito de razão no Capítulo 24 como um instrumento para se fazer comparações entre as quantidades de selos das coleções de três amigos, entre os consumos médios de dois veículos, entre as produtividades de dois tipos de batatas, entre os rendimentos de duas aplicações financeiras, etc. Mediante os exemplos apresentados, o autor define razão como: o quociente de dois números ou duas quantidades ou duas medidas (os autores não exigem que as medidas sejam de uma mesma grandeza). Os exercícios são, em sua maioria, algébricos, isto é, sem uma contextualização.

Enquanto razões comparam dois números (duas quantidades ou duas medidas), proporções são usadas, no Capítulo 25, para comparar elementos respectivos de duas sucessões de números (quantidades ou medidas). Assim, os números (quantidades ou medidas) a, b, c, d, e, $\ldots$ (nessa ordem) são *diretamente proporcionais* aos números (quantidades ou medidas) a', b', c', d', e', $\ldots$ (nessa ordem) quando $a/a' = b/b' = c/'c' = d/d' = e/e' = \cdots$. Em particular, dizer que dois números (quantidades ou medidas) a e b (nessa ordem) são diretamente proporcionais a outros dois números (quantidades ou medidas) a' e b' (nessa ordem) significa dizer que $a/a' = b/b'$. Os autores definem esta última igualdade como uma *proporção*. Neste mesmo capítulo os autores definem números inversamente proporcionais. Como aplicação de destaque, os autores apresentam como dividir um número (quantidade ou medida) em partes diretamente e inversamente proporcionais. Os exercícios são, como no capítulo anterior, em sua maioria, de natureza algébrica e sem contextualização.

Os autores iniciam o Capítulo 26 dando vários exemplos de correspondências entre grandezas (hora do dia na cidade de Gramado e a temperatura à sombra naquela hora; o preço de venda de cocos e o número de cocos vendidos; o tempo e a distância percorrida por um automóvel com velocidade constante; etc.). Nestes exemplos, tabelas são extensivamente usadas. Mesmo sem uma definição formal, a palavra *função* é introduzida ao final de cada correspondência entre grandezas (a temperatura à sombra é *função* da hora, o preço é *função* do número de cocos, a posição é *função* do tempo, etc.). Os valores das tabelas apresentados nestes exemplos são usados para motivar as definições de *grandezas diretamente proporcionais* ("duas grandezas variáveis são chamadas grandezas diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é sempre a mesma") e *grandezas inversamente proporcionais* ("duas grandezas variáveis são chamadas de grandezas inversamente proporcionais quando produto de cada valor da primeira grandeza pelo valor correspondente da segunda é sempre o mesmo"). Os autores mostram, entre os exemplos apresentados inicialmente, quais são diretamente proporcionais e quais são inversamente proporcionais. Contudo, os autores não chamam a atenção para os exemplos onde as grandezas não são nem diretamente proporcinais e nem inversamente proporcionais. Em seguida, regras de três são propostas como uma maneira prática de se resolver problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Os exercícios deste capítulo são mais contextualizados e com enunciados do tipo "calcule o valor que falta" . O Exercício 75 na página 237 (Figura 3.2) pede explicitamente para o aluno julgar se as grandezas apresentadas são diretamente, inversamente ou nem diretamente e nem inversamente proporcionais. Por outro lado, existem algumas situações onde os autores dizem que as grandezas envolvidas são proporcionais mas que, *strictu sensu*, não o são ou o são assumindo certas hipóteses. Por exemplo, o Exercício 90 na página 241 assume que o tempo gasto para se concluir uma certa obra é inversamente proporcional ao número de operários empregados (todos com a mesma capacidade). Esta hipótese é razoável?

Exercício

75. As tabelas a seguir indicam valores correspondentes de duas grandezas. Analise cada tabela e responda, usando os códigos abaixo:
DP — se as grandezas forem diretamente proporcionais;
IP — se as grandezas forem inversamente proporcionais;
NP — se as grandezas não forem proporcionais (nem diretamente nem inversamente).

a)

Hora do dia	0	4	8	12	16	20
Temperatura (°C)	10	5	10	15	17	13

b)

Idade de Alfredo (ano)	1	3	5	7	9	15	18	35
Peso de Alfredo (kg)	10	15	20	30	40	55	60	70

c)

Lado do quadrado (cm)	1	2	3	4	5	6
Área do quadrado (cm^2)	1	4	9	16	25	36

d)

Volume de álcool (ℓ)	1	2	5	10	20
Preço desse álcool (R$)	0,60	1,20	3,00	6,00	12,00

e)

Altura do prédio (m)	10,5	14	17,5	21	24,5	28
Nº de andares	3	4	5	6	7	8

f)

Nº de ônibus	4	6	8	10	12
Nº de passageiros transportados pelos ônibus	160	230	312	410	485

g) Num retângulo de área 48 cm^2

Comprimento (cm)	6	8	4	3	2	1	5
Largura (cm)	8	6	12	16	24	48	9,6

h) Num retângulo de largura 5 cm

Comprimento (cm)	2	1	3	6	9	80
Área (cm^2)	10	5	15	30	45	400

i) Numa caminhada de 6 km (= 6 000 m = 600 000 cm)

Metros por minuto	60	75	80	100	120	125
Tempo de caminhada (min)	100	80	75	60	50	48

Comprimento do passo (cm)	50	60	75	80	100
Número de passos	12000	10000	8000	7500	6000

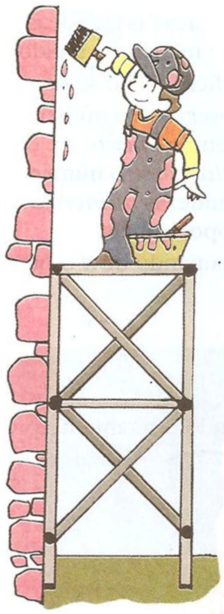


Figura 3.2: Desenvolvendo o senso crítico com relação ao uso da proporcionalidade em [11, p. 237].

3.3 Matemática de Spinelli e Souza

O livro tem 367 páginas divididas em 21 capítulos. Os Capítulos 17, 18 e 19 tratam dos assuntos de razão e proporção, porcentagem e probabilidade, respectivamente. Estes três capítulos foram escritos em 60 páginas (16,3% do total de páginas do livro).

Razões e proporções são motivadas, no Capítulo 17, como uma maneira de se fazer comparações (“Quantas vezes 10 é maior do que 0,5?”). A definição de razão é dada logo no início do capítulo: “razão de um número **a** para um número **b** diferente de zero é o quociente de **a** por **b**: **a** : **b** ou **a**/**b**”. Apesar de razões estarem sendo definidas para números, o exemplo dado logo a seguir (como também os exemplos que abrem o capítulo) comparam velocidades médias que são grandezas e não números. Aqui, como em outros livros, os autores definem os termos *antecedente* para **a** e *consequente* para **b** mas, depois de defini-los, estes nomes não são mais usados no resto do livro.

O livro dedica uma seção inteira (7 páginas do livro) do Capítulo 17 para o estudo de escalas, com ênfase em escalas em mapas. Apesar do cuidado que os autores têm em dizer que o uso de escalas em mapas produz resultados “aproximados”, usar mapas regionais não é adequado em nossa opinião, pois, conforme apresentado no Apêndice B, mapas do globo terrestre são objetos intrinsecamente não lineares.

A seção seguinte do Capítulo 17 apresenta o que são grandezas (“àquilo que podemos medir”), menciona que “de modo geral, grandezas estão relacionadas umas com as outras” para, então, definir quando duas grandezas são proporcionais: “duas grandezas são diretamente proporcionais quando, ao multiplicarmos uma delas por um número diferente de zero, a outra, correspondente, também fica multiplicada pelo mesmo número”. Nesta seção, tabelas são usadas extensivamente para ilustrar grandezas diretamente proporcionais. Os exercícios desta seção procuram estimular o senso crítico do aluno indagando se as situações apresentadas são proporcionais ou não (Figura 3.3).

Regras de três (“multiplicação em cruz”) são apresentadas na seção seguinte como um “método de resolução de problemas com grandezas proporcionais”.

O Capítulo 17 se encerra com o estudo de grandezas inversamente proporcionais: “duas grandezas são inversamente proporcionais quando, multiplicando uma delas por um número diferente de zero, a outra, correspondente, fica dividida por esse número”. Tabelas também são usadas extensivamente aqui.

No Capítulo 18, o autor trata do assunto de porcentagem como um tipo especial de razão (aquela com denominador 100). Os exemplos exploram o uso de regra de três em porcentagens. O autor propõe boa quantidade de exercícios, muitos deles contextualizados, abrangendo matérias de revistas e gráficos estatísticos.

No Capítulo 19, cujo título é *Razões e Previsões*, a razão é utilizada para ensinar probabilidade. Os exemplos e exercícios são variados e representam um modelo de atividade priorizada pelos PCN ([4]) no ensino da razão e proporção.

32. Tenho 20 anos e 1,80 m de altura.

a) Quando dobrar a minha idade, passando a ter 40 anos, terei dobrado também a minha altura?

b) As grandezas idade e altura são diretamente proporcionais?

35. A foto maior é uma ampliação da menor. Ela foi ampliada proporcionalmente? Por quê?

18 cm

13 cm

PINACOTECA DO ESTADO DE SÃO PAULO

São Paulo (1924), pintura de Tarsila do Amaral

15 cm

32 cm

37. Mané é o centroavante do nosso time. Nos primeiros 45min de jogo, ele marcou 3 gols.

a) Podemos dizer que ele marcará mais 3 gols nos próximos 45min?

b) O tempo de jogo e o número de gols são grandezas diretamente proporcionais?

65. *Ao final do espetáculo, o porteiro do teatro vê passar 40 pessoas por minuto pela porta de saída.*

a) Quantas pessoas passariam por minuto pela porta de saída se fossem dois porteiros?

b) O número de pessoas que saem depende, de alguma forma, do número de porteiros?

Figura 3.3: Desenvolvendo o senso crítico com relação ao uso da proporcionalidade em [19, p. 271, 272, 277].

3.4 Construindo O Conhecimento de Isolani, Miranda, Anzzollin e Melão

O livro tem 304 páginas divididas em 6 unidades. A Unidade 6 (Proporcionalidade) trata dos assuntos de razão de semelhança, proporcionalidade, regra de três e porcentagem. Esta unidade foi escrita em 68 páginas (22,4% do total de páginas do livro).

O livro inicia a unidade apresentando o conceito de figuras semelhantes através de vários exemplos e situações com o uso de malhas quadriculadas principalmente. Dez páginas (14,7% do número de páginas da unidade) são dedicadas ao assunto. As autoras usam muito expressões do tipo “evitar deformações”, “ampliando e reduzindo proporcionalmente”, “ampliados e reduzidos um mesmo número de vezes”, “importância de manter os lados correspondentes paralelos” mas, em momento algum, as autoras apresentam uma definição formal de figuras semelhantes. Vários exercícios desta seção estimulam o senso crítico ao questionar as condições necessárias para que haja semelhança entre figuras, analisando medidas dos lados e ângulos.

Figuras semelhantes são então usadas para motivar o conceito de *razão de semelhança*. Novamente, as autoras não definem formalmente o que é razão de semelhança entre duas figuras semelhantes. No lugar, aparecem afirmações tais como “as medidas correspondentes são proporcionais” e “entre a miniatura e a caminhonete há uma mesma relação entre as medidas correspondentes”. Como principal aplicação de razão de semelhança, as autoras apresentam o conceito de escala (“escala = (comprimento no desenho)/(comprimento real)”), com exemplos em plantas baixas, mapas cartográficos, miniaturas de objetos e maquetes. Em nossa opinião, usar mapas regionais como exemplos de escala não é adequado, pois, conforme apresentado no Apêndice B, mapas do globo terrestre são objetos intrinsecamente não lineares.

O estudo da proporcionalidade se dá na seção seguinte, de título “É ou não é proporcional?”. Várias situações cotidianas são apresentadas e indaga-se se existe alguma relação entre as grandezas envolvidas (as autoras não definem o que é uma grandeza e sugerem em uma atividade que os alunos procurem a definição matemática em um dicionário) (Figura 3.4). A definição de grandezas diretamente e indireta proporcionais é feita no Exercício 7 na página 256:

> *Quando uma grandeza dobra (triplica, quadruplica, . . .) a outra sofre a mesma variação, ou quando uma grandeza diminui pela metade (terça parte, quarta parte, . . .) e a outra também dividida por dois (três, quatro, . . .), dizemos que essas grandezas se relacionam de modo* ***diretamente proporcional****. São* ***grandezas diretamente proporcionais****.*
>
> *Quando uma grandeza dobra (triplica, quadriplica . . .) e a outra sofre variação inversa, isto é, fica divididade por dois (três, quatro . . .) ou quando uma grandeza é dividida ao meio, (terça parte, quarta parte . . .) e a outra fica multipli-*

- Hoje Marcos tem 16 anos.
  a) Quantos quilos você acha que ele pesa? Não dá para determinar.
  b) Quanto ele vai pesar quando tiver 32 anos? Não dá para determinar.
  c) Nesta situação, é possível estabelecer uma relação entre o peso do garoto e a sua idade? Não. Não há relação entre peso e idade.

Figura 3.4: Desenvolvendo o senso crítico com relação ao uso da proporcionalidade em [13, p. 252].

> *cada por dois (três, quatro, ...), dizemos que essas grandezas se relacionam de modo inversamente proporcional. São* ***grandezas inversamente proporcionais****.*

O Exercício 8 da página 256 chama a atenção (Figura 3.5): apesar de se esperar que o tempo gasto (em minutos) por n gatos para comer n ratos não seja proporcional ao valor de n, é difícil acreditar que este tempo seja constante, como indica a resposta dada no livro do professor.

8. Se um gato come um rato em 5 minutos, em quanto tempo 10 gatos comem 10 ratos? 5 minutos.

Figura 3.5: Questão duvidosa em [13].

Muitos exercícios perguntam explicitamente se as grandezas especificadas são ou não diretamente proporcionais: "O comprimento e a área de retângulos de mesma altura são grandezas diretamente proporcionais?", "O perímetro de um quadrado é diretamente proporcional à medida de seu lado? Por quê?", etc.

Nesta seção, tabelas são usadas extensivamente para estudar relações entre grandezas.

Na seção "Regra de Três", as autoras mostram como usar a propriedade fundamental das proporções para resolver problemas que envolvem proporcionalidade onde "são conhecidos 3 valores e é necessário calcular um outro valor" que falta. A propriedade fundamental das proporções é “justificada” assim:

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}\Rightarrow\frac{1}{\cancel{4}}\times\cancel{4}=\frac{2}{8}\times 4\Rightarrow 1=\frac{2}{8}\times 4\Rightarrow 1\times 8=\frac{2}{\cancel{8}}\times 4\times\cancel{8}\Rightarrow 1\times 8=2\times 4.$$

Note que, sendo um exemplo particular, este procedimento **não justifica** a propriedade fundamental das proporções, mas apresenta as ideias fundamentais para demonstrá-la.

Na última seção da unidade, “Porcentagem: uma razão muito utilizada”, as autoras mostram como as razões com denominador 100 são muito utilizadas no dia-a-dia. Os autores não definem explicitamente no texto o que é uma porcentagem mas, nas orientações no livro do professor, eles informam que trata-se de frações com denominador 100.

3.5 A Conquista da Matemática de Giovanni Jr. e Castrucci

O livro possui 336 páginas divididas em 10 capítulos. O livro dedica dois capítulos ao estudo de Razão, Proporção e Grandezas Proporcionais (62 páginas; 18,4% do total de páginas do livro).

Através de vários exemplos, a Seção 48 no início do Capítulo 8 (Razões e Proporções) motiva o conceito de razão como um método para se fazer comparações: “quando comparamos dois números, usando uma divisão, [...], o resultado obtido chama-se **razão** entre esses dois números”. Logo em seguida, os autores definem: “sendo a e b dois números racionais, com $b\neq 0$, denomina-se **razão entre *a* e *b*** ou **razão de *a* para *b*** o quociente a/b ou $a:b$”. Aqui, como em outros livros, os autores definem os termos *antecedente* para **a** e *consequente* para **b** mas, depois de defini-los, estes nomes não são mais usados no resto do livro. Apesar de razões estarem definidas inicialmente apenas quando a e b são números, no Exemplo 2 na página 235, logo a seguir, define-se razões entre grandezas de mesma espécie: “a razão entre duas grandezas de mesma espécie é o quociente dos números que exprimem as suas medidas, sempre tomadas na mesma unidade”. Contudo, no Exercício 7 na página 236 desta seção, apresenta-se o índice de produtividade de uma empresa, que não é uma razão entre números e nem uma razão entre grandezas de mesma espécie. Ainda sem dar uma definição do que consistiria uma razão entre grandezas de espécies diferentes, os conceitos de velocidade média, densidade de um corpo e densidade demográfica são apresentados na seção seguinte. Nesta seção também é apresentado o conceito de escala. Como em outros livros, uma falha grave do texto é considerar que a escala em um mapa regional é constante, isto é, que ela não depende de onde o “comprimento real” é medido na superfície do globo terrestre. Conforme apresentado no Apêndice B, mapas do globo terrestre são objetos intrinsecamente não lineares. Esta seção se encerra com a definição e aplicações do conceito de porcentagem.

Na Seção 50, os autores motivam o conceito de proporção através de dois exemplos (um sobre descontos na compra de gasolina e o outro sobre a recomendação do número de médicos por número de habitantes indicada pela Organização Mundial de Saúde) fazendo uso de tabelas. Em seguida, eles definem: "proporção é uma igualdade entre duas razões" e completam: "quatro números racionais a, b, c, e d, diferentes de zeros, tomados nessa ordem, formam uma proporção quando: $a : b = c : d$ ou $a/b = c/d$". A propriedade fundamental das proporções é enunciada mas sem justificativas. Vários exemplos e exercícios (algébricos e contextualizados) são propostos.

O Capítulo 9 (Grandezas Proporcionais) está dividido em três seções: (53) números direta e inversamente proporcionais, (54) regra de três simples e (55) regra de três composta. O livro apresenta quatro definições:

> *Os números racionais x, y e z são diretamente proporcionais aos números racionais a, b e c, quando se tem: $x/a = y/b = z/c$.*
>
> *Os números racionais x, y e z são inversamente proporcionais aos números racionais a, b e c, quando se tem: $x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c$.*
>
> *Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, dobrando uma delas, a outra também dobra; triplicando uma delas, a outra também triplica e assim por diante.*
>
> *Duas grandezas são inversamente proporcionais quando, dobrando uma delas, a outra se reduz para a metade; triplicando uma delas, a outra se reduz para a terça parte e assim por diante.*

Apesar desta separação, o livro comete o pequeno deslize de apresentar como exemplos de números diretamente e inversamente proporcionais situações que envolvem grandezas e não números. Outro deslize, agora mais grave, é o de considerar que o peso suportado por uma mola é diretamente proporcional ao seu comprimento. Como sabemos, pela Lei de Hooke (ver o Apêndice A), o peso suportado por uma mola é diretamente proporcional a sua *deformação* e não ao seu comprimento. Este erro reaparece na Seção 54 (Regra de Três).

Como já observamos na página 16 do Capítulo 2, um ponto forte do livro são as seções *Brasil Real* e *Tratando A Informação*, pois elas apresentam ao alunos temas atuais conectados com o conteúdo sendo estudado, explorando a capacidade de leitura, interpretação e organização de dados em gráficos e tabelas, permitindo assim que o aluno perceba a utilidade e aplicabilidade do conteúdo, auxiliando-o no processo de desenvolvimento do senso crítico sobre nossa realidade.

3.6 Comentários

De um modo geral, os livros têm maneiras diferentes de motivar o conteúdo de Razão e Proporção. Os livros de (Spinelli, 2003), (Iezzi, Dolce e Machado, 2005), (Giovanni Jr e Castrucci, 2009) iniciam o conteúdo motivando o conceito de razão entre números ou entre grandezas para fazer comparações. (Isolani et al, 2002), por sua vez, motiva o conceito de razão através de semelhança de figuras. (Imenes e Lellis, 1998) tratam diretamente de assunto de proporcionalidade sem passar por razões e proporções.

Uma certa inconsistência que detectamos em nossa análise se refere à separação nas definições de razões entre números e razões entre grandezas de mesma espécie. (Spinelli, 2003) e (Giovanni Jr e Castrucci, 2009), por exemplo, definem razões entre números e exemplificam estas razões com grandezas logo a seguir. (Giovanni Jr e Castrucci, 2009) ainda define razões entre grandezas de mesma espécie e, sem maiores explicações, dá exemplos de razões entre grandezas de espécies diferentes (velocidade média, densidade de um corpo e densidade demográfica).

(Imenes e Lellis, 1998), (Isolani et al, 2002), (Spinelli, 2003), (Giovanni Jr e Castrucci, 2009) apresentam escalas em mapas como uma situação que envolve proporcionalidade. Como exposto no Apêndice B, todo mapa da superfície esférica da Terra possui distorções não lineares: quanto maior a superfície representada no mapa, maior será a distorção. Desta forma, o uso de escalas em mapas como uma aplicação de proporcionalidade deve ser feito com cuidado, isto é, apenas para regiões menores (quarteirões ou bairros) e, certamente, mapas-múndi ou mapas do Brasil (como costumam aparecer nos livros), em nossa opinião, deveriam ser usados com mais cuidado.

(Spinelli, 2003) e (Giovanni Jr e Castrucci, 2009) utilizam os termos *antecedente* e *consequente* de uma razão no lugar de numerador e denominador. Contudo, estes termos não usados novamente no restante dos livros. Então, porque não usar os termos tradicionais e já conhecidos: numerador e denominador?

(Iezzi, Dolce e Machado, 2005), ao apresentar grandezas proporcionais, introduzem a palavra *função* para especificar que uma grandeza está relacionada com outra. Mesmo sem dar uma definição geral precisa, os autores, através de exemplos, já dão uma boa ideia do que uma função é: “a cada hora corresponde uma única temperatura”, “a cada instante corresponde uma única distância percorrida”, “a cada quantidade de cocos corresponde a um único preço” e “a cada altura corresponde um único preço”. Isto é um prelúdio para as funções lineares que serão estudadas posteriormente em outras séries.

Como recomendado pelos PCN do Terceiro e Quarto Ciclos ([4]), os livros analisados apresentam situações-problema envolvendo escalas, porcentagem e juros. Contudo, (Spinelli, 2003) foi o único que apresentou aplicações de razão no estudo de probabilidade.

Podemos perceber que, com exceção de (Giovanni Jr e Castrucci, 2009), todos os demais livros analisados já demonstram uma preocupação em valorizar e desenvolver o senso crítico dos alunos com relação à ilusão da linearidade. Contudo, esta preocupação é exposta apenas nos exercícios. Acreditamos que, dada a sua importância, os livros deveriam abordar o assunto no desenvolvimento da teoria e em exemplos.

4 Uma coletânea de exercícios complementares

Neste capítulo apresentamos exemplos e exercícios que foram incorporados às aulas e que são diferentes daqueles propostos no livro didático oficial. Os ítens marcados com um “*” têm por objetivo promover e despertar o senso crítico com relação ao uso da proporcionalidade.

[01] Categoria: Exemplo (usado na Aula 15). Fonte: [19, página 303].

Gabriel construiu um cubo a partir de um pedaço de cartolina: Depois pintou-o: 4 faces com cor azul, 1 com cor branca e 1 com cor vermelha. Agora Gabriel vai brincar jogando o cubo no chão.

(a) Qual das cores é mais provável aparecer na face voltada para cima após um lançamento? Por quê?

(b) Qual é o total de faces do cubo e qual é o número de faces pintadas de azul?

(c) Escreva no caderno a razão que mostra a probabilidade de sair voltada para cima uma face pintada de azul.

(d) Agora, escreva a razão que indica a probabilidade de sair voltada para cima uma face pintada de branco.

[02] Categoria: Exemplo (usado na Aula 15). Fonte: [19, página 305].

Para o lançamento de um dado, escreva no caderno as razões que mostram a probabilidade de sair:

(a) o número 2;

(b) o número 6;

(c) um número par;

(d) um número primo;

[03] Categoria: Exemplo (usado na Aula 15). Fonte: autoria própria.

Ao lançar uma moeda, não viciada, qual a probabilidade de sair coroa na face voltada para cima?

[04] Categoria: Exercício (usado na Aula 16). Fonte: [19, página 307].

Em uma urna com 50 bolas, 12 são pretas, 23 azuis, 6 brancas e o resto de cor amarela. Se retirarmos uma bola sem olhar, qual será:

(a) a cor mais provável de sair?

(b) a cor menos provável de sair?

(c) a chance, em porcentagem, de sair uma bola preta?

(d) a chance, em porcentagem, de sair uma bola amarela?

[05] Categoria: Exercício (usado na Aula 18). Fonte: [19, página 306].

Existem 8 sequências diferentes para os sexos de 3 crianças nascidas uma após a outra. Uma delas, por exemplo, é esta: menina - menino - menina.

(a) Escreva no caderno todas as 8 sequências.

(b) Vendo as sequências que você escreveu, é mais provável nascerem 3 crianças do mesmo sexo ou nascerem 2 meninas e 1 menino?

(c) Qual é a probabilidade, escrita na forma de porcentagem, de nascerem 3 meninos?

[06] Categoria: Exercício (usado na Aula 18). Fonte: autoria própria.

Numa turma de 7º ano há alunos de 11, 12, 13 e 14 anos, como mostra a tabela:

Número de alunos	Idade (em anos)
5	11
10	12
3	13
2	14

(a) Quantos alunos estudam nesta turma?

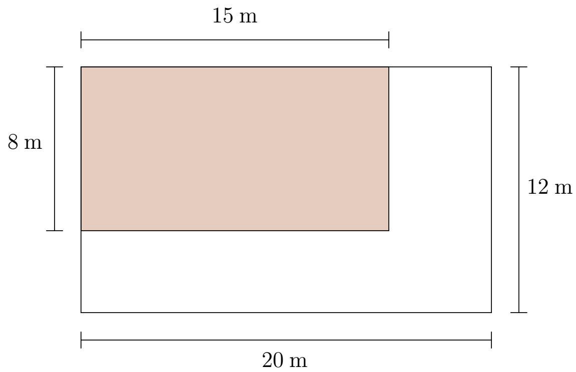
(b) Se escolhermos, ao acaso, uma criança desta turma, qual a probabilidade de ser um aluno com mais de 11 anos?

(c) Qual a probabilidade de ser sorteado um aluno de 10 anos? E de 14 anos?

(d) Qual a probabilidade de sortear, ao acaso, um aluno de 11 anos? (Responda na forma fracionária e na forma decimal.)

[07] Categoria: Teste (usado nas Aulas 20 e 21). Fonte: [13, página 278].

Esta é a representação de um terreno onde foi construída uma casa. (O retângulo menor representa a área onde foi construída a casa.)



Qual a razão entre a área da casa e a área do terreno? (Lembre-se que a área do retângulo é dada pela multiplicação da base pela altura.)

Que porcentagem a casa ocupa do terreno?

[08] Categoria: Exercício (usado na Aula 23). Fonte: [11, página 235].

Para produzir 1000 exemplares de um certo livro, uma editora gasta 360 kg de papel. Quantos quilos de papel serão necessários se as quantidades de exemplares forem outras? Copie a tabela em seu caderno e acabe de preenchê-la.

Nº de exemplares a produzir	Gasto de papel (kg)
1 000	360
1 500	?
2 000	?
?	1 080
?	1 440
?	2 160
10000	?
15000	?

[09] Categoria: Exercício e questão de prova (usado nas Aulas 18, 43, 44 e 45). Fonte: [19, página 304].

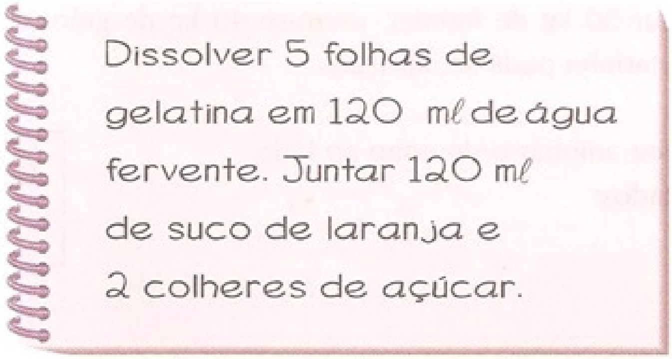
Durante a cerimônia de casamento, a noiva carrega nas mãos um buquê de flores, assim que a cerimônia termina ela, de costas, lança o buquê sobre os ombros para que uma moça o pegue. Dizem que a moça que pegar será a próxima a casar. No casamento de Cris e Paulo estavam presentes 20 moças solteiras para pegar o buquê.

(a) Escreva a probabilidade de cada uma das moças pegar o buquê.

(b) Quanto é, em porcentagem, a probabilidade que você calculou?

[10] Categoria: Exercício (usado na Aula 23). Fonte: [12, página 129].

A receita de gelatina abaixo rende 10 porções. Diga a quantidade de ingredientes necessária para:

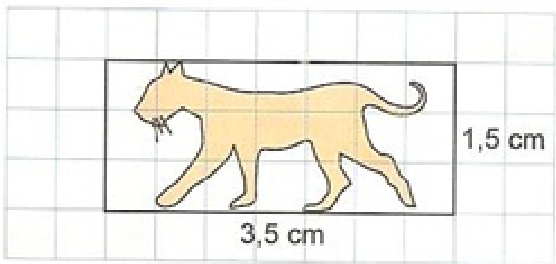


(a) 15 porções.

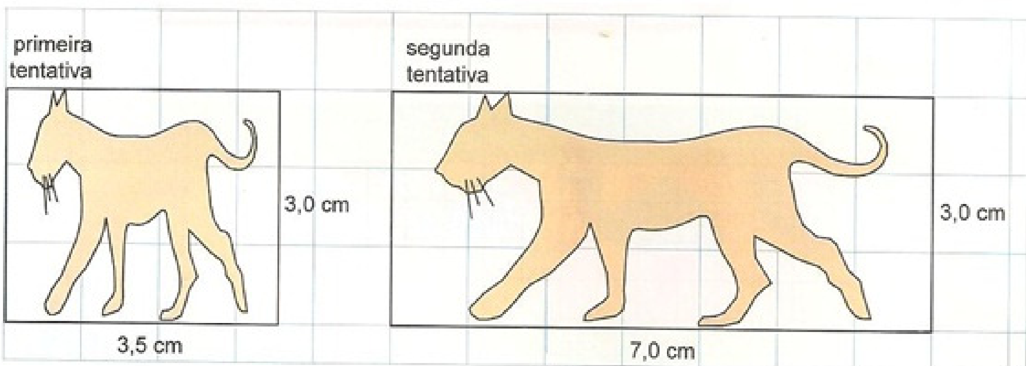
(b) 40 porções.

* [11] Categoria: Exercício (usado na Aula 23). Fonte: [12, página 130].

Cecília resolveu ampliar o desenho abaixo:



Veja os resultados:



Usando a ideia de proporcionalidade, explique porque a segunda tentativa ficou muito melhor que a primeira.

* [12] Categoria: Exemplo (usado na Aula 25). Fonte: [12, página 125].

O Fusca 68 de meu avô gastou 1,5h para andar 43 km. Se nós continuarmos a viagem na mesma velocidade, será possível prever quantos quilômetros o carro vai andar nas próximas 3 horas? Se possível, diga quantos quilômetros serão.

* [13] Categoria: Exemplo (usado na Aula 25). Fonte: [12, página 125].

Tânia tem 2 anos e 81 cm de altura. Será possível prever, fazendo cálculos, a altura de Tânia aos 6 anos? Se for possível, diga qual será essa altura.

[14] Categoria: Exemplo (usado na Aula 25). Fonte: [12, página 126].

Observe o folheto que acompanha a cafeteira de dona Marta. Com essas informações, é possível calcular quantas colheres de pó e quanta água ela precisa para fazer 24 cafezinhos? Se possível, faça os cálculos.

* [15] Categoria: Exemplo (usado na Aula 25). Fonte: [12, página 126].

Aos 30 minutos de jogo, meu time ganhava por 3×1. Como o jogo dura 90 minutos, qual será o placar final?

* [16] Categoria: Exemplo e exercício (usado nas aulas 25 e 28). Fonte: questão sugerida pelo professor Wanderley Moura Rezende.

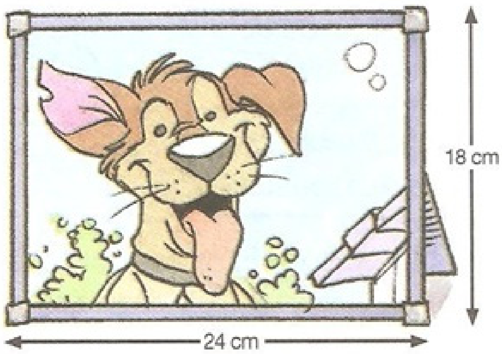
Um taxista cobra R$ 4,00 a bandeirada, mais R$ 1,00 por quilômetro percorrido. Um passageiro, ao pegar o táxi, paga R$ 10,00 pelo trajeto. Quanto ele pagaria se tivesse percorrido o dobro do trajeto?

* [17] Categoria: Exemplo e questão de prova (usado na Aula 26). Fonte: [13, página 261].

Quando tinha 8 anos, Clarisse media 1,32m. Quando tiver 16 anos vai ter o dobro dessa altura?

* [18] Exemplo e questão de prova (usado nas Aulas 26, 38, 39 e 40). Fonte: [19, página 271].

Uma fotografia foi ampliada. Ela media 6 cm de largura e 8 cm de comprimento e agora mede 18 cm de largura e 24 cm de comprimento. A ampliação foi feita proporcionalmente? Justifique.



* [19] Categoria: Exercício (usado na Aula 28). Fonte: [19, página 271].

A foto maior é uma ampliação da menor. Ela foi ampliada proporcionalmente? Por quê?

São Paulo (1924), pintura de Tarsila do Amaral

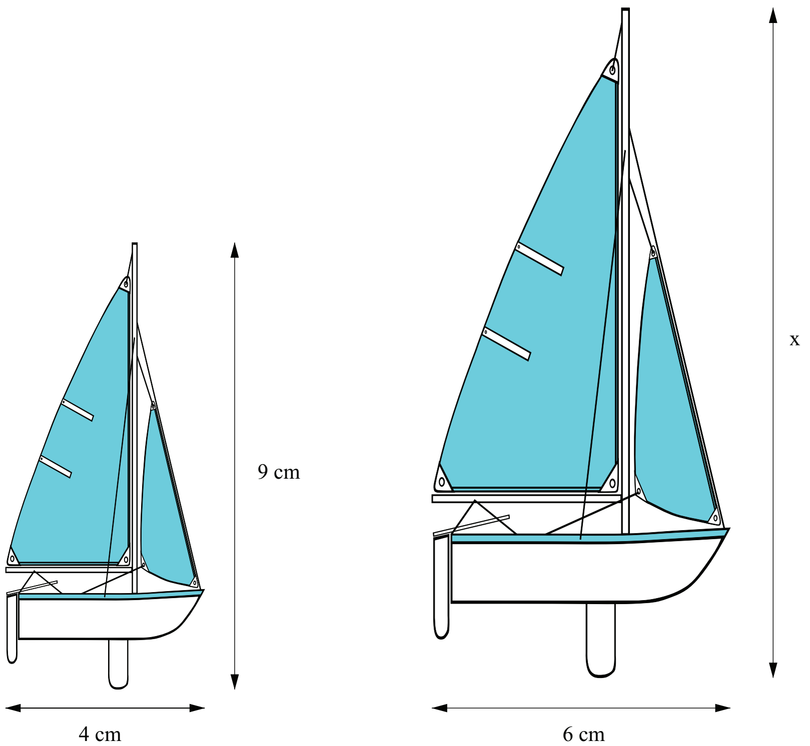
* [20] Categoria: Exemplo e questão de prova (usado nas Aula 28, 38, 39 e 40). Fonte: [12, página 130].

Se for possível, resolva o problema abaixo usando proporcionalidade. Se você acha que o problema não envolve proporcionalidade, explique o motivo:

Em certo colégio, o professor Jak dá aulas em uma classe de 24 alunos de 6ª série, recebendo 5 reais por uma hora de aula. Quanto ele receberia por uma hora de aula se a turma tivesse 36 alunos?

[21] Categoria: Exercício (usado na Aula 31). Fonte: [19, página 272].

As medidas de um desenho foram ampliadas proporcionalmente. Qual é o valor da medida x?



[22] Categoria: Questão de prova (usado nas Aulas 38, 39 e 40). Fonte: [19, página 303].

Em uma turma de 40 alunos, 24 são meninos e 16 são meninas. Dessa turma a professora vai sortear uma pessoa para ler o Hino Nacional para a classe.

(a) O que é mais provável: Ser sorteada uma menina ou um menino?

(b) Escreva, na forma de razão, a probabilidade de ser sorteada uma menina e a probabilidade de ser sorteado um menino.

(c) Agora, escreva na forma de porcentagem as probabilidades que você indicou no item anterior.

* [23] Categoria: Questão de prova (usado nas Aulas 38, 39 e 40). Fonte: [6].

(a) Um corredor consegue percorrer 100 metros em 10 segundos. Quanto tempo ele levará para percorrer 1000 metros?

(b) Uma loja vendeu 312 cartões de natal em dezembro. Quantos cartões de natal ela venderá no primeiro trimestre do ano seguinte?

(c) A locomotiva de um trem tem 12 m de comprimento. Quando 4 vagões estão conectados a locomotiva, o trem tem 52 m de comprimento. Qual é o comprimento do trem se 8 vagões estão conectados a locomotiva?

(d) Em um dia bem ensolarado, uma dona de casa colocou 3 toalhas molhadas idênticas no varal. Depois de 2 horas elas estavam secas. Se ao invés de 3 toalhas, a dona de casa tivesse colocado 6 toalhas molhadas idênticas, quanto tempo elas demorariam para secar?

5 Avaliação Bimestral

No final do quarto bimestre, como descrito no planejamento, foi aplicada a Avaliação Bimestral[1] na turma do 7º ano. Neste capítulo apresentaremos uma análise do desempenho dos alunos nesta prova.

5.1 As questões propostas na avaliação

As questões da prova foram elaboradas com o objetivo de avaliar a aprendizagem adquirida no decorrer do quarto bimestre.

A Questão 1 faz referência ao uso da razão e sua aplicação em probabilidade e porcentagem, enquanto que as Questões 2 e 3 analisam o raciocínio proporcional dos alunos, buscando relacionar razão e proporção. Na Questão 6, o objetivo é verificar se o aluno desenvolveu a habilidade de observar dados em gráficos para relacioná-los com os contextos de razão e porcentagem. A prova também busca confrontar situações lineares e não lineares, como no caso das Questões 4, 5 e 7. Nestas questões, os alunos devem ter a percepção para diagnosticar a ilusão de linearidade em cada item, deslocando o foco da computação de soluções numéricas corretas para a construção de modelos matemáticos apropriados.

A duração da avaliação foi de 3 tempos de 50 minutos. Dos 15 alunos matriculados, 13 compareceram.

Questão 1. Em uma turma de 40 alunos, 24 são meninos e 16 são meninas. Dessa turma, a professora vai sortear uma pessoa para ler o Hino Nacional para a classe.

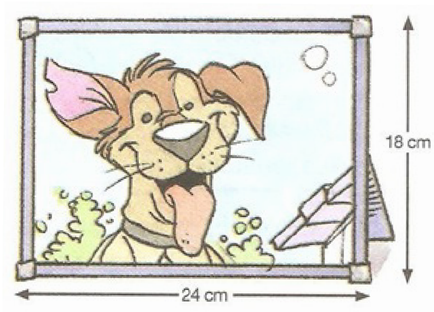
(a) O que é mais provável: ser sorteada uma menina ou um menino?

(b) Escreva, na forma de razão, a probabilidade de ser sorteada uma menina e a probabilidade de ser sorteado um menino.

[1] Também foram aplicados um teste antes (Aulas 20 e 21) e uma Prova de Recuperação depois desta Avaliação Bimestral. As questões propostas no teste e na Prova de Recuperação estão disponíveis nos Anexos A e B.

(c) Agora, escreva na forma de porcentagem, as probabilidades que você indicou no item anterior.

Questão 2. Uma fotografia foi ampliada. Ela media 6 cm de largura e 8 cm de comprimento e agora mede 18 cm de largura e 24 cm de comprimento. A ampliação foi feita proporcionalmente? Justifique.



Questão 3. Numa mistura, para cada 8 litros de água são utilizados 5 litros de tinta corante. Determine:

(a) A razão entre o número de litros de tinta corante e o número de litros de água.

(b) A quantidade de litros de água necessária para se obter a mistura, sabendo-se que foram usados 17,5 litros de tinta corante.

Questão 4. Quando tinha 8 anos, Clarisse media 1,32 m. Qual será a altura de Clarisse quando ela tiver 16 anos?

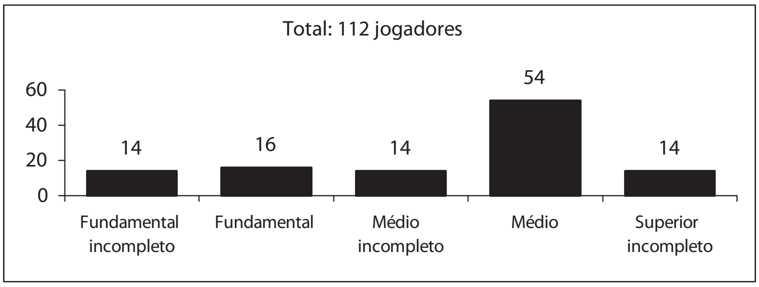
Questão 5. Se for possível, resolva os problemas abaixo usando proporcionalidade. Se você acha que o problema não envolve proporcionalidade, explique o motivo.

(a) Em certo colégio, o professor Jak dá aulas em uma classe de 24 alunos de 6ª série, recebendo 15 reais por uma hora de aula. Quanto ele receberia por uma hora de aula se a turma tivesse 36 alunos?

(b) Para fabricar 30 kg de farinha, usam-se 40 kg de grãos de trigo. Com 60 kg de grãos de trigo, quanto de farinha pode-se fabricar?

(c) Aos 30 minutos de jogo o Time A perdia o jogo por 2 a 1 para o Time B, sabendo que um jogo de futebol dura 90 minutos, qual será o placar final?

Questão 6. (ENEM 2005) A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa a seguir, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro, em 2005.



(O Globo , 24/7/2005.)

De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de aproximadamente:

(a) 14%. (b) 48%. (c) 54%. (d) 60%. (a) 68%.

Questão 7. Responda às questões abaixo. Se você acha que não é possível responder à questão, explique o motivo.

(a) Um corredor consegue percorrer 100 metros em 10 segundos. Quanto tempo ele levará para percorrer 1000 metros?

(b) Uma loja vendeu 312 cartões de natal em dezembro. Quantos cartões de natal ela venderá no primeiro trimestre do ano seguinte?

(c) A locomotiva de um trem tem 12 m de comprimento. Quando 4 vagões estão conectados a locomotiva, o trem tem 52 m de comprimento. Qual é o comprimento do trem se 8 vagões Estão conectados a locomotiva?

(d) Em um dia bem ensolarado, uma dona de casa colocou 3 toalhas molhadas idênticas no varal. Depois de 2 horas elas estavam secas. Se ao invés de 3 toalhas, a dona de casa tivesse colocado 6 toalhas.

5.2 Análise do resultado da avaliação

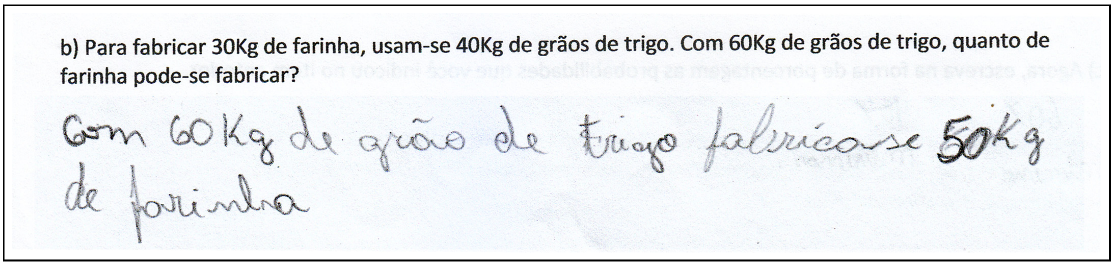
A Tabela 5.1 e as Figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9, apresentam os desempenhos individuais e coletivos dos alunos na avaliação bimestral.

As Questões 1 (a) e 5 (c) foram as que apresentaram o maior número de acertos (84,62%). Os alunos que erraram a Questão 5 (c) (15,38%) pensaram que a resposta poderia ser obtida via proporção direta, o que não era o caso.

Ninguém acertou a Questão 6: doze alunos responderam incorretamente e um aluno deixou a questão em branco. Entre os alunos que erraram a questão, seis marcaram a opção

54% (o número absoluto de jogadores que possuem apenas o ensino médio), quatro marcaram a opção 48% (esquecendo de incluir os jogadores que possuem superior incompleto) e dois marcaram a opção 68% (a soma dos números absolutos de jogadores com ensino médio).

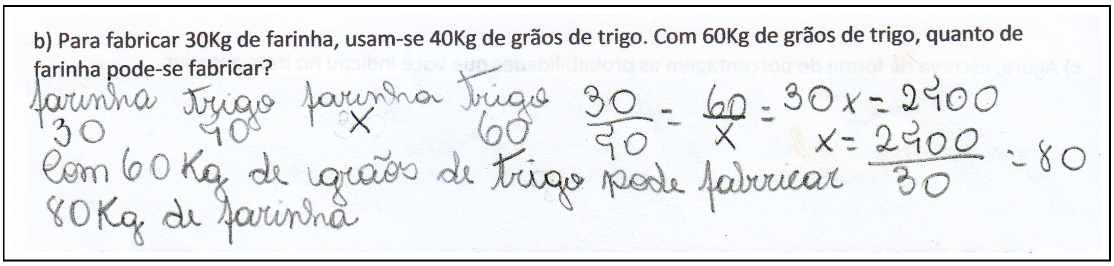
Nenhum aluno errou todas as três questões (4, 5 e 7) que testavam a percepção para diagnosticar a ilusão de linearidade. Dentre estas três questões, a que teve mais acertos foi a Questão 5 (c) (sobre o placar final de um jogo de futebol) e as que tiveram mais erros foram as Questões 7 (a) e 7 (c). A Questão 4 teve quatro erros, na qual três alunos utilizaram erroneamente a proporcionalidade direta e o outro apresentou uma resposta errada sem justificativa. A Questão 5 (b), que propõe uma situação que pode ser resolvida usando proporcionalidade direta, teve 61,54% de erro. Dos oito alunos que erraram esta questão, três deles possivelmente utilizaram o raciocínio aditivo (ou seja, que a quantidade de grãos de trigo é sempre 10 kg a mais do que a quantidade de farinha) (Figura 5.1), quatro alunos resolveram a questão usando proporcionalidade direta, mas, ao fazê-lo, armaram a equação de forma incorreta (Figura 5.2) e, por fim, um aluno escreveu uma resposta errada sem dar justificativas. As Questões 7 (a) e 7 (c) (que envolvem situações da ilusão de proporcionalidade) tiveram, ambas, 69,23% de erro. Dos nove alunos que erraram a Questão 7 (a), todos aplicaram a proporcionalidade direta. Dos nove alunos que erraram a Questão 7 (c), cinco usaram a proporcionalidade direta e os outros quatro não souberam interpretar a questão ou deram uma resposta errada sem justificativa. Cinco alunos erraram simultaneamente as Questões 7 (a) e 7 (c). Dos outros quatro alunos que erraram a Questão 7 (b), dois deram como resposta $104 = 312/3$, um respondeu $936 = 312 \times 3$ e outro escreveu simplesmente 614 sem nenhuma justificativa.



b) Para fabricar 30Kg de farinha, usam-se 40Kg de grãos de trigo. Com 60Kg de grãos de trigo, quanto de farinha pode-se fabricar?

Com 60Kg de grão de trigo fabrica-se 50Kg de farinha

Figura 5.1: Questão 5 (b) do Aluno 5.



b) Para fabricar 30Kg de farinha, usam-se 40Kg de grãos de trigo. Com 60Kg de grãos de trigo, quanto de farinha pode-se fabricar?

farinha trigo farinha trigo
30 40 x 60

$\frac{30}{40} = \frac{60}{x} = 30x = 2400 \quad x = \frac{2400}{30} = 80$

Com 60 Kg de grãos de trigo pode fabricar 80Kg de farinha

Figura 5.2: Questão 5 (b) do Aluno 2.

Na Questão 2, sete alunos fizeram as contas e deram justificativas corretas. Dos quatro alunos que erraram esta questão, um aluno errou contas de divisão, outro aluno armou a equação de forma incorreta, outro aluno copiou o dado errado do enunciado (ao invés de 18, ele usou 16) e o último aluno apresentou uma justificativa errada e sem os cálculos ("*não, porque aumentou as medidas* (sic)").

Dos dois alunos que erraram a Questão 3 (a), um escreve a razão invertida (respondeu 8/5 ao invés de 5/8) e o outro simplesmente escreveu "*não*". Dos seis alunos que erraram a Questão 3 (b), dois armaram a equação de forma incorreta, dois deram respostas erradas sem justificativas e dois não souberam interpretar a questão.

Aluno	Questões														
	1 (a)	1 (b)	1 (c)	2	3 (a)	3 (b)	4	5 (a)	5 (b)	5 (c)	6	7 (a)	7 (b)	7 (c)	7 (d)
1	certa	certa	certa	certa	certa	incompleta	certa	certa	errada	certa	errada	certa	certa	errada	certa
2	certa	errada	em branco	certa	certa	certa	errada	certa	errada	certa	errada	errada	certa	em branco	certa
3	certa	errada	errada	errada	incompleta	errada	certa	certa	errada	certa	em branco	errada	certa	certa	certa
4	certa	errada	errada	certa	certa	certa	errada	errada	errada	errada	errada	errada	certa	errada	errada
5	certa	certa	certa	errada	certa	errada	certa	certa	errada	certa	errada	errada	certa	certa	certa
6	errada	errada	em branco	incompleta	errada	errada	errada	certa	errada	certa	errada	errada	errada	errada	certa
7	certa	certa	certa	certa	certa	errada	certa	errada	errada	certa	errada	errada	errada	errada	errada
8	errada	errada	certa	certa	errada	errada	errada	errada	certa	errada	errada	certa	errada	errada	errada
9	certa	certa	certa	certa	certa	certa	certa	certa	certa	certa	errada	errada	certa	certa	certa
10	certa	certa	certa	certa	certa	incompleta	certa	errada	certa	certa	errada	certa	certa	errada	incompleta
11	certa	errada	certa	errada	incompleta	certa	certa	certa	certa	certa	errada	em branco	certa	errada	certa
12	certa	em branco	em branco	em branco	em branco	em branco	certa	certa	em branco	certa	errada	errada	errada	errada	errada
13	certa	certa	certa	errada	certa	errada	certa	certa	errada	certa	errada	errada	certa	errada	certa

Legenda: certa, errada, incompleta, em branco.

Tabela 5.1: Estatística da avaliação bimestral por aluno.

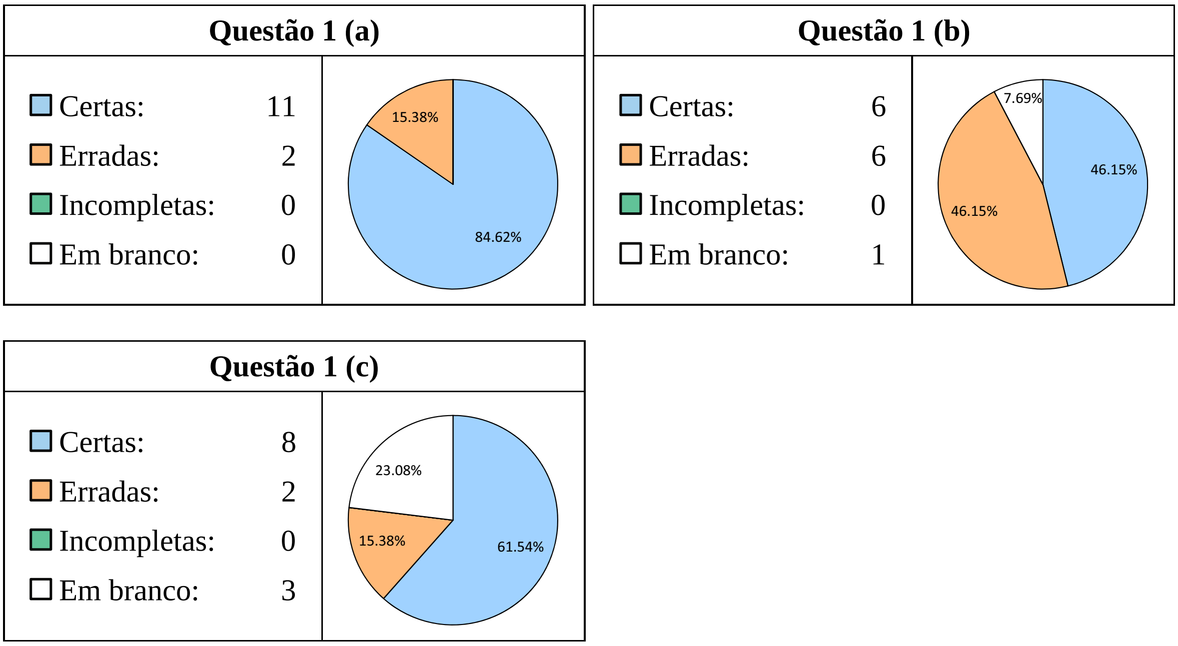


Figura 5.3: Estatística da Questão 1.

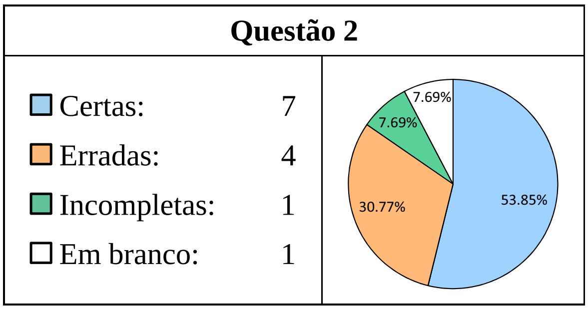


Figura 5.4: Estatística da Questão 2.

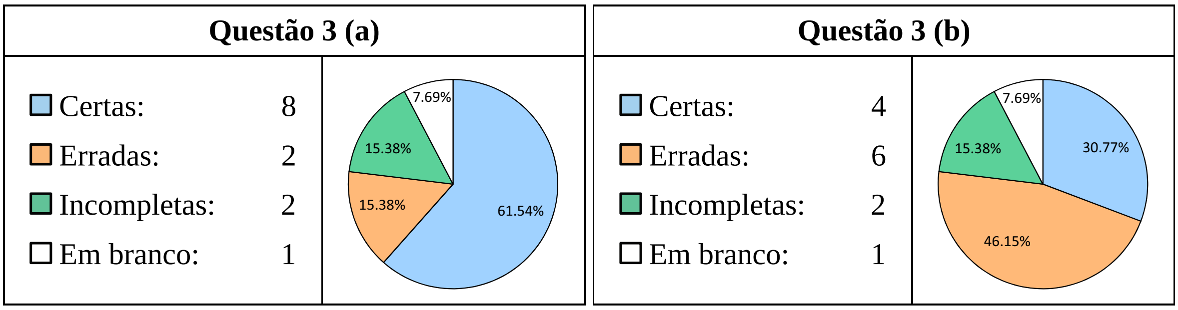


Figura 5.5: Estatística da Questão 3.

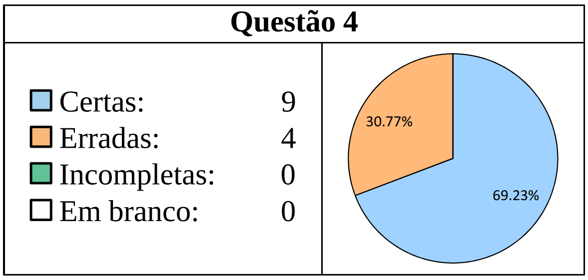


Figura 5.6: Estatística da Questão 4.

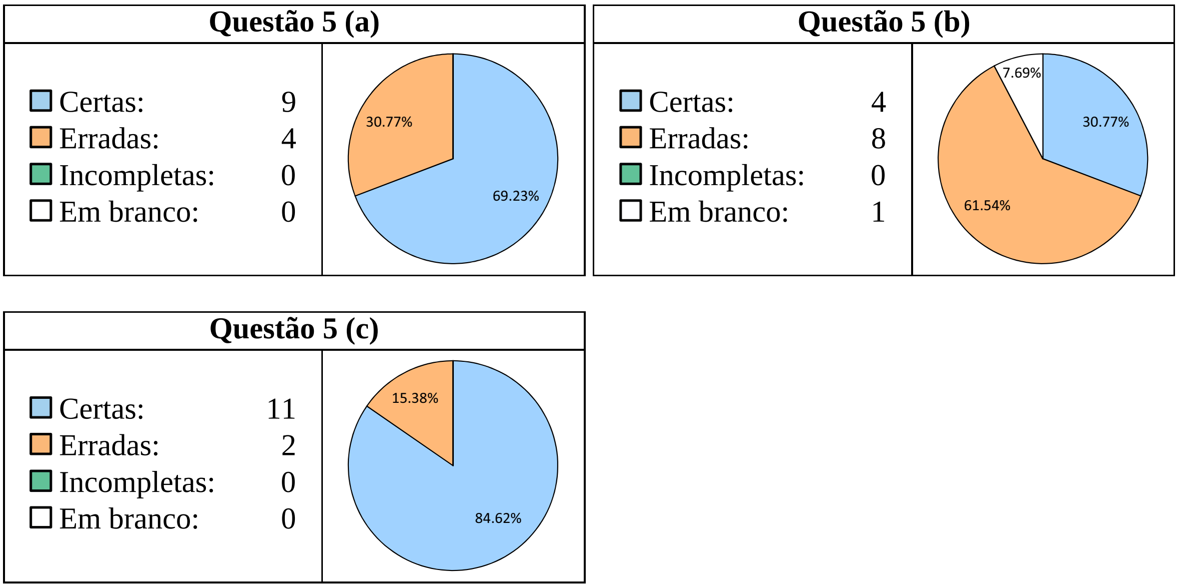


Figura 5.7: Estatística da Questão 5.

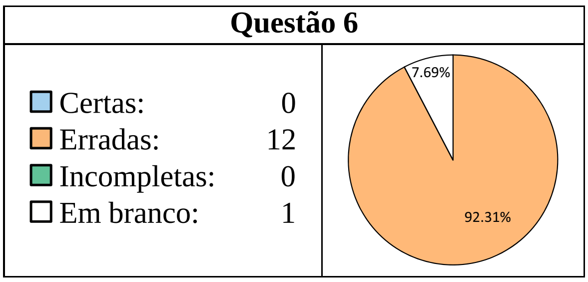


Figura 5.8: Estatística da Questão 6.

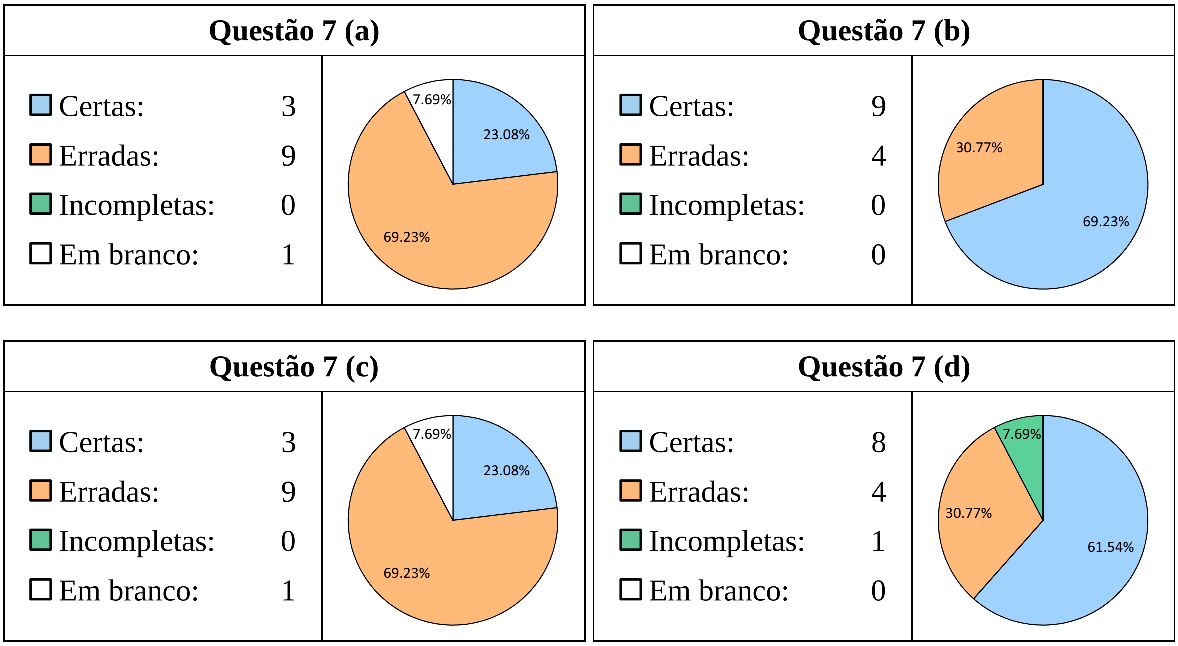


Figura 5.9: Estatística da Questão 7.

6 Considerações Finais

No livro *The Illusion of Linearity – From Analysis to Improvement* ([6]), os autores deixam claro como a ilusão da linearidade tem raízes profundas na prática escolar e quão difícil é "quebrá-la". Nosso trabalho confirma estes fatos, como relatamos a seguir.

Apesar de nossa avaliação de livros didáticos revelar a preocupação de alguns autores em estimular o senso crítico com relação à proporcionalide (Imenes e Lellis [12]; Iezzi, Dolce e Machado [11]; Spinelli e Souza [19] e Isolani, Miranda, Anzollin e Melão [13]), acreditamos que esta iniciativa ainda é muito pequena. Além disso, alguns problemas sérios permanecem. Por exemplo, alguns autores utilizam escalas em mapas cartográficos como exemplos de situações proporcionais, o que não é adequado. Sem avisar o leitor, outros continuam propondo problemas onde usar um modelo de proporcionalidade inversa entre as grandezas envolvidas é razoável apenas para valores restritos destas variáveis (por exemplo, se um pedreiro constrói uma casa em 6 meses, é razoável usar proporcionalidade inversa para calcular quantos pedreiros seriam necessários para construir a mesma casa em 1 dia?). Aconteceu também de encontrarmos um livro usando a Lei de Hooke de forma errada.

Em nossas aulas, apesar de termos incorporado de forma sistêmica situações que promovessem uma reflexão e despertassem o senso crítico com relação ao uso de proporcionalidade, ainda assim alguns alunos não tiveram um desempenho satisfatório na avaliação bimestral (ver a Tabela 5.1 na página 44). Em nossa opinião, além das causas apontadas por [6], a ilusão da linearidade persistiu por outros motivos também: a dificuldade que a maioria dos alunos têm em interpretar e resolver problemas matemáticos e a falta de dedicação ao estudo do conteúdo. Com relação a este último motivo, o Aluno 12 talvez seja um exemplo típico: como um aluno que já alcançou aprovação no terceiro bimestre deixa em branco seis e erra cinco ítens (num total de quinze ítens)? Por outro lado, alunos com muito dificuldade em Matemática, como os Alunos 7 e 11 na Tabela 5.1, mostraram grande dedicação por precisarem de nota para aprovação e tiveram, por fim, uma melhora em relação aos bimestres anteriores.

Em uma próxima oportunidade que formos lecionar proporcionalidade, pretendemos usar tabelas de forma mais acentuada e, também, usar material manipulativo para explorar as relações proporcionais e não proporcionais em Geometria. De qualquer modo, nossa opinião é a de que o problema da ilusão da linearidade não seja abordado apenas no Ensino Fundamental, quando o tópico é abordado pela primeira vez, mas, sim, que ele seja tratado de forma constante e insistente durante toda a vida escolar do aluno.

APÊNDICE A – A Lei de Hooke

A Lei de Hooke é uma lei experimental descoberta pelo cientista inglês Robert Hooke (1635–1703) que, segundo [16], a anunciou em forma de anagrama *ceiiinosssttuu* em 1660 e, posteriormente, a publicou no seu trabalho *Lectures de Potentia Restitutiva* em 1678:

Ut tensio sic vis.

Ainda segundo [16], esta frase em latim se traduz por "a potência de qualquer mola está na mesma proporção de sua tensão" (em terminologia moderna, *potência* significa *força* e *tensão* significa *extensão*[1]). Esta lei está relacionada à elasticidade dos corpos, como por exemplo, quando temos uma mola suspensa por uma de suas extremidades e a outra suportando o peso de um objeto. Nesta situação, o peso suportado pela mola é diretamente proporcional a sua deformação. Mais precisamente,

$$P = k \cdot \Delta l,$$

onde P é o peso suportado pela mola, Δl é a deformação sofrida pela mola e k é uma constante positiva que depende do material em questão. No Sistema Internacional de Unidades (SI), P é dado em Newton (N), Δl é dado em metros (m) e k em N/m.

Na Lei de Hooke, é importante observar que o peso suportado é diretamente proporcional à deformação da mola e não ao seu comprimento pois, se fosse assim, quando não houvesse um peso preso à mola, o seu comprimento seria igual a zero, o que sabemos não ser uma situação realista. Se o peso P suportado pela mola não é proporcional ao seu comprimento l, qual é a relação funcional entre P e l? Denotando-se por l_0 o comprimento inicial da mola (isto é, l_0 é o comprimento da mola quando nenhum peso está preso a ela), então $\Delta l = l - l_0$. Assim, $P = k \cdot \Delta l = k \cdot (l - l_0) = k \cdot l - k \cdot l_0$, isto é, o valor de P é uma função afim do valor de l: $P = a \cdot l + b$, com $a = k$ e $b = -k \cdot l_0$ são constantes.

Segundo a lei de Hooke, existe proporcionalidade entre força aplicada e deformação sofrida, contudo essa proporcionalidade só é válida até limite elástico da mola. O limite elástico é

[1] Aqui, *extensão* deve ser entendida como o quanto a mola se estendeu e não sua extensão (comprimento).

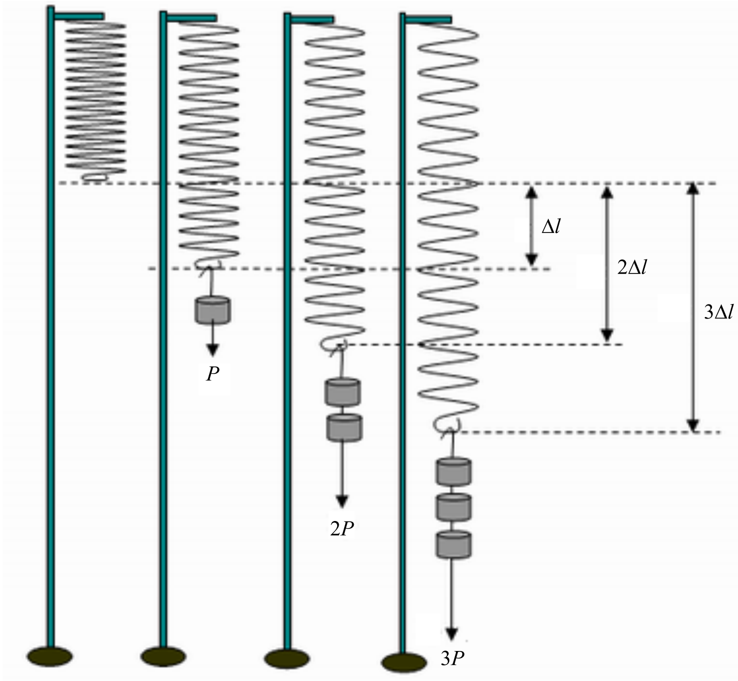


Ilustração adaptada de <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=18943>.

Figura A.1: A Lei de Hooke.

o limite até onde a mola pode ser estendida, a partir daí, quando a força for retirada a mola não mais retornará ao seu comprimento inicial ou poderá se romper.

A lei de Hooke é válida para sistemas elásticos em geral, e não apenas para molas. Um sistema é chamado elástico quando pode ser deformado com a aplicação de uma força, mas retorna ao seu estado original com a retirada da mesma. Por exemplo, quando um arqueiro exerce uma força sobre o arco, esse se deforma, mas retorna ao seu estado original com a liberação da flecha.

A Lei de Hooke tem aplicações em engenharia, no desenvolvimento da tecnologia e no lazer, sendo utilizada em várias situações do cotidiano. Por exemplo, alguns materiais (tais como vigas de concreto ou de metal) se comportam de maneira elástica, podendo sofrer pequenas deformações com a força aplicada (peso suportado), sem que haja ruptura do material. O teste de resistência de tais materiais (isto é, o cálculo da carga que eles podem suportar) emprega a Lei de Hooke.

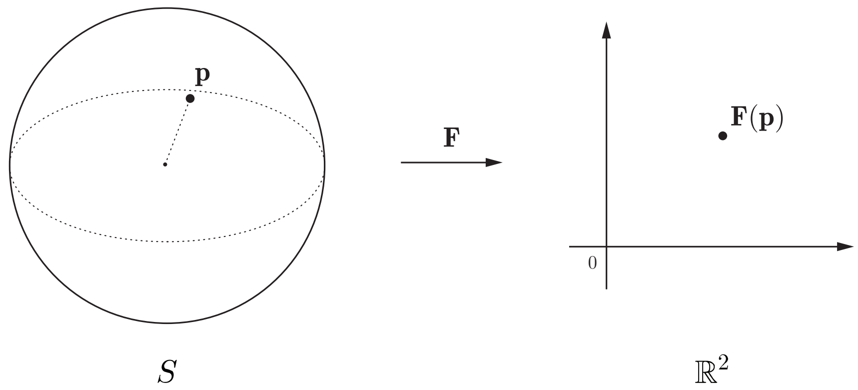
A lei de Hooke também foi útil na navegação. Entre os séculos 17 e 18, os navegantes não tinham um relógio preciso o suficiente para ser usado na determinação da longitude durante a viagem. Foi quando o relojoeiro John Harrison, baseando-se na lei de Hooke, apresentou a solução para o problema: ao invés de um pêndulo, ele construiu um relógio que funcionava usando molas. Os primeiros relógios de Harrison não eram práticos para a maioria das viagens, pois mudanças na temperatura afetavam o seu funcionamento. Ele então incorporou uma tira metálica formada por dois metais diferentes a fim de compensar as mudanças de temperatura.

A Lei de Hooke também é usada para calcular o comprimento da corda elástica para que um saltador de *bungee jumping* não colida com o chão ao fazer o seu salto.

APÊNDICE B – Uma Advertência: Escalas em Mapas

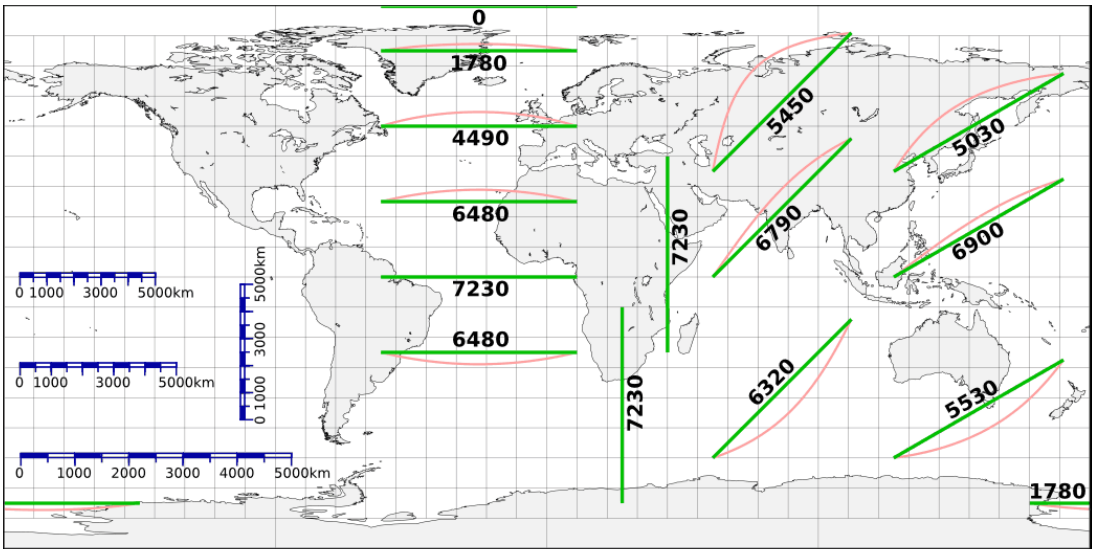
Como vimos no Capítulo 3, muitos livros costumam usar escalas em mapas regionais como um exemplo de situação que envolve proporcionalidade. Por exemplo (seguindo dados de [10]), se um mapa tem escala de $1:50\,000\,000$, então, supostamente, cada 1 cm no mapa corresponderia a $50\,000\,000$ cm $=$ 500 km na realidade. O quão preciso é este método? Será que o resultado depende da região do mapa? Por exemplo, será que 1 cm medido na região da América do Sul no mapa corresponde, na realidade, a 1 cm medido na região Ártica no mesmo mapa? Como veremos, a resposta é não: mapas regionais são objetos intrinsecamente não lineares.

Adotando-se o modelo simplificado de uma esfera para a superfície do globo terrestre, um mapa (ou uma projeção cartográfica) nada mais é do que uma função $\mathbf{F}$ de um subconjunto D de uma esfera S para o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:



É possível demonstrar ([14]) que não existem mapas sem distorções, isto é, não existem mapas tais que comprimentos, ângulos e áreas medidos sobre a superfície esférica da Terra sejam (a menos de uma constante) iguais aos comprimentos, ângulos e áreas correspondentes medidos no mapa plano.

No mapa da Figura B.1 (resultante de uma projeção cilíndrica [18, página 90]), as linhas verdes têm o mesmo comprimento no mapa plano, enquanto que cada linha vermelha representa a distância real (medida em quilômetros) entre as extremidades da respectiva linha verde na superfície da Terra. Observe que as distâncias reais são extremamente diferentes apesar de, no mapa plano, estarem representadas por segmentos todos de mesmo tamanho.



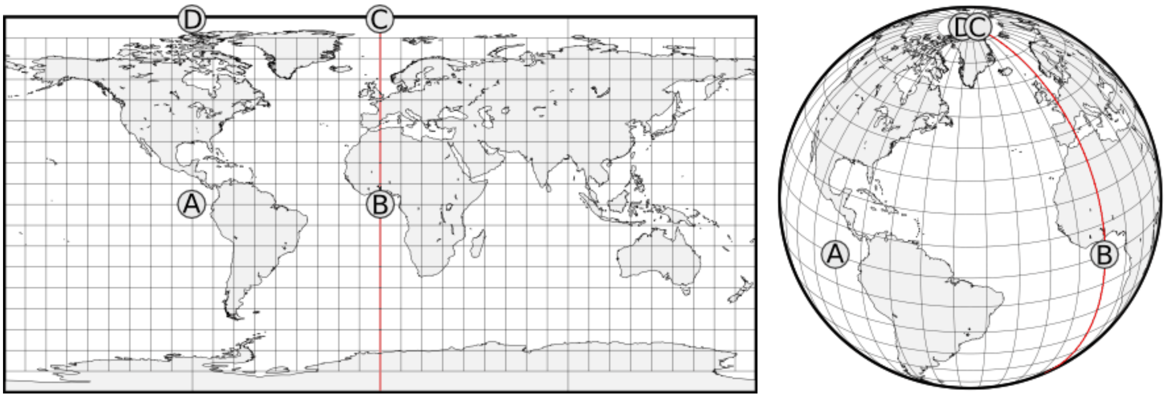
Fonte: <http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/CartProp/DistPres/distPres.html>.

Figura B.1: Exemplos de escalas e distorções em medidas em uma projeção cilíndrica.

Conforme [9], cada uma das três escalas horizontais em azul indicadas no mapa da Figura B.1 é válida apenas para o paralelo correspondente (ou para o paralelo simétrico com relação ao Equador). A escala vertical em azul é válida em qualquer região do mapa. Uma escala oblíqua neste mapa não é válida em lugar algum. Ainda, conforme [9], no mapa à esquerda na Figura B.2, o ponto A parece estar 41% mais longe do ponto C com relação ao ponto B. Contudo, todo ponto sobre o meridiano vermelho é equidistante do ponto A (sobre a superfície esférica do globo). A distância entre os pontos D e C é zero no globo, uma vez que ambos estão sobre o Pólo Norte mas, no mapa, a distância entre eles é igual a distância entre A e B.

Tudo isto mostra que mapas da superfície do globo terrestre são objetos não lineares por natureza. Usá-los como exemplos de situações que envolvem proporcionalidade é inadequado. Alguns pesquisadores apontam para este fato em Geografia (as marcações em negrito são nossas):

> *Nesse exemplo da projeção cilíndrica equidistante (Plate Carrée), nota-se que a escala cartográfica válida na linha do Equador não é a mesma nos outros paralelos. Isso numa projeção cujo nome é equidistante: distâncias iguais. O fator de redução diminui em direção aos polos. Mas, ela é a mesma em relação aos meridianos. Nos cortes diagonais haverá diversidade escalar, conforme a localização do corte no espaço do mapa. Obviamente não há uma escala gráfica única para esse mapa que possa ser indicada fora dele, sem posicionar sobre o segmento onde ela seria válida. Indicar a escala gráfica*



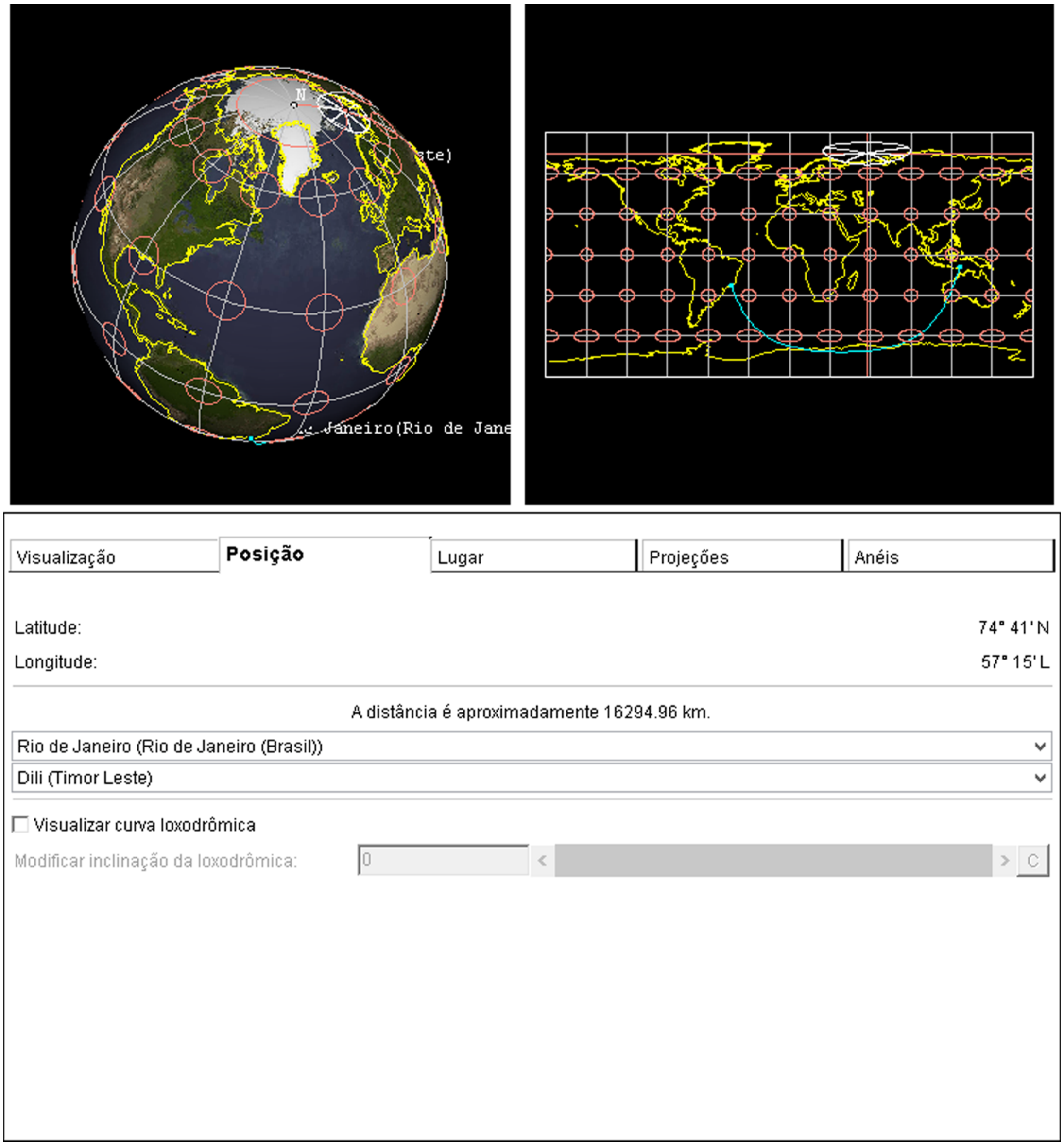
Fonte: <http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/CartProp/DistPres/distPres.html>.

Figura B.2: Exemplos de escalas e distorções em medidas em uma projeção cilíndrica.

> *como foi feito, também obriga a menção de várias escalas com a indicação localizacional de sua validade.* ***Qualquer projeção terá suas variações, que não só não aparecem na cartografia escolar, como ao contrário, se trata como se essas projeções não produzissem essa complexidade de resultados diferentes na extensão do mapa.***
>
> *O desconhecimento aqui é bastante ativo: as dificuldades para argumentar no mundo escolar, e no próprio mundo acadêmico que avalia os materiais didáticos, sobre a impertinência da menção a escala cartográfica nos termos exigidos são grandes.* ***Vale insistir, como faz Mark Monmonier (1993, p. 33), que se aplicarmos a escala cartográfica para medir a distância entre dois pontos nos mapas corremos o risco de chegar a resultados com graves erros.***
>
> (Fonseca, 2012)

Esperamos que o nosso alerta aqui atinja também os livros didáticos de Matemática.

Por fim, ao leitor interessado em experimentar e visualizar as distorções inerentes às projeções cartográficas, indicamos o *software* gratuito Projeções Cartográficas (Figura B.3) disponível em [2].



Disponível em: <http://www.uff.br/mapprojections/mp_br.html>.

Figura B.3: *Software* gratuito para estudar as deformações das projeções cartográficas.

ANEXO A – Teste Aplicado nas Aulas 20 e 21

Questão 1. Numa prova com 30 questões, acertei 21. Noutra prova com 20 questões, acertei 15.

(a) Qual é a razão entre o número acertos e o total de questões em cada prova?

(b) Em qual delas eu tive melhor rendimento?

(c) É possível escrever a resposta desta situação na forma de porcentagem? Como fica?

(d) Se cada prova tinha valor de 100 pontos e todas as questões tinham o mesmo valor, qual foi a nota em cada uma delas?

Questão 2. Uma caixa contém 3 bolas vermelhas e 1 bola branca, outra caixa contém 30 bolas vermelhas e 10 bolas brancas. Em qual das caixas eu tenho a maior probabilidade de sortear uma bola vermelha? Justifique sua resposta calculando as razões.

Questão 3. Uma televisão custa R$ 900,00 a prazo; à vista o preço tem um desconto de 20%. Comprando à vista, quanto pagarei?

Questão 4. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de sair um número ímpar na face voltada para cima?

Questão 5. Jonas e Adriano estudam em escolas diferentes. Numa conversa sobre os jogos estudantis, Jonas disse:

– A equipe da minha escola ganhou 27 das 36 partidas que jogou.

Adriano respondeu:

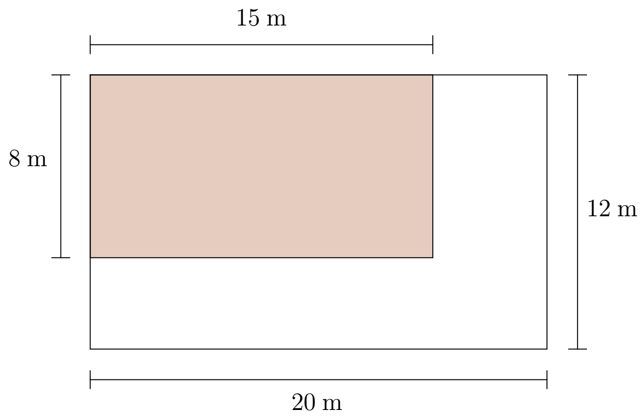
– A equipe da minha escola ganhou 24 das 30 partidas que jogou.

Qual das equipes teve melhor rendimento nos jogos estudantis?

Questão 6. A figura a seguir representa um terreno onde foi construída uma casa. (O retângulo menor representa a área onde foi construída a casa.)

Qual é a razão entre a área da casa e a área do terreno? (Lembre-se que a área do retângulo é dada pela multiplicação da base pela altura.)

Que porcentagem a casa ocupa do terreno?



Questão 7. Leia as informações e depois responda às perguntas.

> A distância entre a Terra e o Sol é de, aproximadamente, 150 000 000 km.

> A luz do Sol, para atingir a Terra, leva em torno de 500 segundos.

(a) Qual a velocidade da luz no vácuo?

(b) Quantos minutos a luz do Sol leva para chegar a Terra?

Questão 8. A densidade de uma substância é dada pela razão entre a sua massa e o seu volume. Com base nessa definição, calcule a densidade de um fragmento de gelo de 250 gramas que tem volume correspondente a 500 cm^3.

ANEXO B – Prova de Recuperação

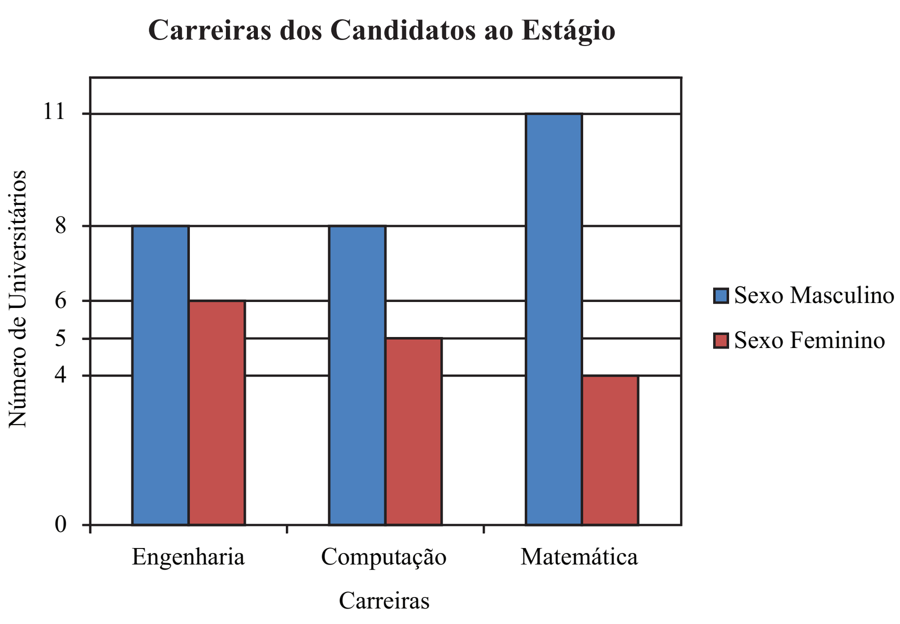
Questão 1. Durante a cerimônia de casamento, a noiva carrega nas mãos um buquê de flores, assim que a cerimônia termina ela, de costas, lança o buquê sobre os ombros para que uma moça o pegue. Dizem que a moça que pegar será a próxima a casar. No casamento de Cris e Paulo estavam presentes 20 moças solteiras para pegar o buquê.

(a) Escreva a probabilidade de cada uma das moças pegar o buquê.

(b) Quanto é, em porcentagem, a probabilidade que você calculou?

(c) Supondo que das 20 moças solteiras da festa, Alice pegou o buquê. Qual das moças solteiras será a próxima e se casar?

Questão 2. Uma empresa aceitou inscrições de estudantes universitários para estagiar em seu setor técnico. O gráfico seguinte apresenta as carreiras dos estudantes universitários, por sexo.



(a) Quantos universitários se inscreveram para fazer o estágio?

(b) O número de estudantes universitários que escolheram a carreira de matemática representa quantos por centos do total?

Questão 3. Se for possível, resolva os problemas abaixo usando proporcionalidade. Se você acha que o problema não envolve proporcionalidade, explique o motivo.

(a) Lúcia tem 32 anos de idade e sua filha tem 6 anos. Quando Lúcia tiver o dobro de sua idade, sua filha também terá o dobro de sua idade?

(b) Para fazer um refresco, mistura-se suco concentrado com água na razão de 3 copos de suco concentrado para 5 copos de água. Nestas condições, 9 copos de suco concentrado devem ser misturados a quantos copos de água?

(c) Um taxista cobra R$ 4,00 a bandeirada, mais R$ 1,00 por quilômetro percorrido. Um passageiro, ao pegar o táxi, pagou R$ 11,00 ao percorrer um determinada distância. Quanto ele pagaria, com o mesmo taxista, se tivesse percorrido o dobro da distância?

(d) Rogério tem 12 anos e 1,47 m, qual será sua altura quando completar 24 anos?

Questão 4. Você já comeu brigadeiro? É um doce muito gostoso e fácil de se fazer. Para se fazer 40 brigadeiros seguindo uma determinada receita, são necessáras as seguintes quantidades de ingredientes:

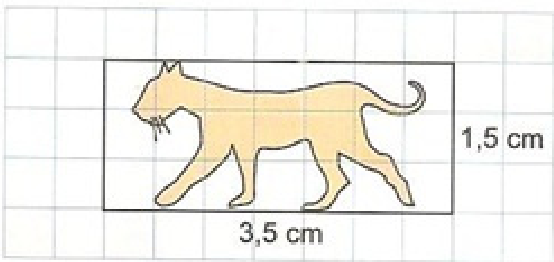
1 lata de leite condensado,

1 colher de sopa de margarina,

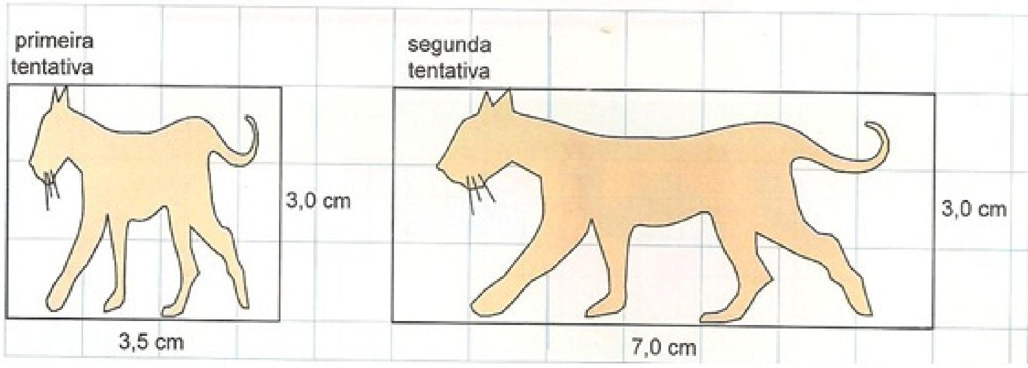
3 colheres de sopa de chocolate.

Jaqueline quer preparar 100 brigadeiros seguindo a receita. O quanto de cada ingrediente ela vai precisar?

Questão 5. Cecília resolveu ampliar o desenho abaixo:



Veja os resultados:



Usando a ideia de proporcionalidade, explique porque a segunda tentativa ficou muito melhor que a primeira.

Referências Bibliográficas

[1] ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAVRENT'EV, M. A. *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning*. Volume two. Cambridge:The MIT Press, 1963.

[2] ALMEIDA JR., R. V.; HURRELMANN, J.; POLTHIER, K.; BORTOLOSSI, H. J. *Projeções Cartográficas*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2012. Disponível em: <http://www.uff.br/mapprojections/mp_br.html>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

[3] BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Editado e traduzido por Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland e Virginia Warfield. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental)*. Brasília: MEC, 1998.

[5] BRASIL. Ministério da Educação. *Guia de Livros Didáticos: PNLD 2011: Matemática*. Secretaria de Educação Básica, Ministério da Educação Brasília, 2012.

[6] DE BOCK, D.; VAN DOOREN, W., JANSSENS, D. E., VERSCHAFFEL, L. *The Illusion of Linearity - From Analysis to Improvement.* Mathematics Education Library, Volume 41, New York: Springer-Verlag, 2007.

[7] FONSECA, F. P. *A Naturalização como Obstáculo À Inovação da Cartografia Escolar*. Revista Geográfica, n. 12, p. 175-210, 2012.

[8] FREUDENTHAL, H. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands, 1983.

[9] FURUTI, C. A. *Useful Map Properties: Distances and Scale. Can Distances be Accurately Measured?* Disponível em: <http://www.progonos.com/furuti/MapProj/Normal/CartProp/DistPres/distPres.html>. Acesso em: 31 de março de 2013.

[10] GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. *A Conquista da Matemática.* Edição renovada. Sétimo ano. São Paulo: Editora FTD, 2009.

[11] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade.* Quinta edição. Sexta série. São Paulo: Editora Atual, 2005.

[12] IMENES, L. M.; LELLIS, M. *Matemática.* Primeira Edição. Sexta série. São Paulo: Editora Scipione, 1998.

[13] ISOLANI, C. M. M.; MIRANDA, D. T. L.; ANZZOLIN, V. L. A.; MELÃO, W. S. *Construindo O Conhecimento.* Segunda Edição. Sexta série. Curitiba: Editora Módulo, 2002.

[14] MCCLEARY, J. *Geometry from A Differentiable Viewpoint*. New York: Cambridge University Press, 1994.

[15] MODESTOU, M.; GAGATSIS, A. *Students' Improper Proportional Reasoning: A Result of The Epistemological Obstacle of "Linearity"*. Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, v. 27, n. 1, p. 75-92, 2007.

[16] O'REILLY, O. M. *Engineering Dynamics. A Primer*. Second Edition, New York: Springer-Verlag, 2010.

[17] PLATÃO. *Mênon*. Texto estabelecido e anotado por John Burnet. Tradução de Maura Inglésias. Editora PUC-Rio, 2001.

[18] SNYDER, J. P. *Map Projections – A Working Manual*. Washington: United States Government Printing Office, 1987.

[19] SPINELLI, W.; SOUZA, M. H. *Matemática.* Primeira Edição. Sexta série. São Paulo: Editora Ática, 2003.