



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Sobre Semelhanças

Fabiana Pavino Pessoa

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo

Rio Claro (SP)
2019

P475s Pessoa, Fabiana Pavino
Sobre semelhanças / Fabiana Pavino Pessoa. -- Rio Claro, 2019
90 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Rawlilson de Oliveira Araújo

1. Semelhança. 2. Segmentos proporcionais. 3. Triângulo. 4.
Polígonos. 5. Transformações. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Fabiana Pavino Pessoa

SOBRE SEMELHANÇAS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo
Orientador

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Jéssyca Lange Ferreira Melo Gurjão
UFV/Viçosa (MG)

Rio Claro, 29 de agosto de 2019

Minha família e amigos.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus que me deu a vida e que sempre abençoou e iluminou meu caminho.

Aos meus pais, Maria de Lourdes e Cicero, que sempre acreditaram no meu potencial e me incentivaram a correr atrás dos meus sonhos.

Ao meu marido, Alessandro, minha irmã, Juiana, e meus amigos mais próximos que sempre estiveram ao meu lado, ouviram meus desabafos diante das dificuldades enfrentadas no curso, me deram força e assim me ajudaram a enfrentar qualquer obstáculo para continuar.

À Todos os companheiros de curso por todo apoio e pelas experiências trocadas, em especial aos colegas Alex, Cássio, Figueira, Lucas, Mariane e Paula, que estiveram comigo até o fim do curso.

A todos os professores do PROFMAT que transformaram e acrescentaram muito à minha formação acadêmica, em especial à Prof^a Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira e a Prof^a Dra. Alice Kimie Miwa Libardi que me ajudaram muito desde o início com idéias e sugestões para esta dissertação e também ao Prof. Dr. Thiago de Melo pelas orientações e indicações bibliográficas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo, que me conduziu de forma excelente e sempre muito disposto a me ajudar nos momentos de dúvidas, tornando possível a conclusão deste curso.

À banca examinadora por aceitar o convite e pelos comentários que, com certeza, aprimoraram este trabalho.

“O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.”

Muitas palavras não indicam necessariamente muita sabedoria.

Tales de Mileto

Resumo

O presente trabalho trata das semelhanças de segmentos e figuras geométricas, em especial o triângulo. Iremos demonstrar alguns teoremas “famosos” utilizados na resolução de problemas que envolvem semelhanças, e outros que são desconhecidos para os jovens do ensino básico tais como Teorema de Ceva, Triângulo medial e a linha de Euler e Triângulos Pedal mas que têm a sua importância na matemática.

Palavras-chave: Semelhança, Segmentos proporcionais, Triângulo, Polígonos, Transformações.

Abstract

The present work deals with the similarities of segments and geometric figures, especially the triangle. We will demonstrate some “famous” theorems used to solve problems involving similarities, and others that are unknown to the youngsters of elementary education such as Ceva Theorem, Medial Triangle and Euler aligns and Pedal Triangles but which have their importance in mathematics.

Keywords: Similarity, Proporcional Segments, Triangle, Polygon, Transformations.

Lista de Figuras

1.1	Caso LAL	20
1.2	Caso ALA	20
1.3	Demonstração Caso ALA	20
1.4	Triângulo isóceles	21
1.5	Caso LLL	21
1.6	Demonstração Caso LLL	22
1.7	Exemplo 1.1	22
1.8	Exemplo 1.2	23
2.1	Raios solares.	26
2.2	Pirâmide.	26
2.3	Retas paralelas	27
2.4	Deslocamento das retas transversais	27
2.5	Demonstração do Teorema de Tales	28
2.6	Triângulo obtusângulo e triângulo retângulo	28
2.7	Teorema da bissetriz	29
2.8	Prova bissetriz interna	29
2.9	Prova bissetriz externa	30
2.10	Semelhança de triângulos Caso AA	31
2.11	Demonstração semelhança de triângulos Caso AA	32
2.12	Demonstração semelhança de triângulos Caso AA	32
2.13	Semelhança de triângulos Caso LAL	33
2.14	Demonstração semelhança de triângulos Caso LAL	33
2.15	Semelhança de triângulos Caso LLL	34
2.16	Demonstração semelhança de triângulos Caso LLL	34
2.17	Exemplo 2.1	35
2.18	Exemplo 2.2	35
2.19	Teorema de Pitágoras	36
2.20	Outra demonstração do Teorema de Pitágoras	36
2.21	Demonstração Lei dos cossenos	37
2.22	Lei dos senos	38
2.23	Teorema de Ceva	39
2.24	Exemplo 2.3	40
2.25	Exemplo 2.4	41
2.26	Exemplo 2.4	41
2.27	Exemplo 2.5	42
2.28	Triângulo Medial	43
2.29	Medianas	44
2.30	Triângulo Medial	44

2.31	Triângulo Órtico	46
2.32	Triângulo Pedal	46
2.33	Triângulo Pedal	47
2.34	Terceiro Triângulo Pedal	48
3.1	Translação	49
3.2	Translação	50
3.3	Translação	50
3.4	Rotação	51
3.5	Rotação	52
3.6	Meia-volta	53
3.7	Reflexão	54
3.8	Reflexão	55
3.9	Reflexão	55
3.10	Problema de Fagnano	56
3.11	Problema dos 3 recipientes	58
3.12	Problema dos 3 recipientes	59
3.13	Problema dos 3 recipientes	60
3.14	Problema dos 3 recipientes	61
3.15	Dilatação	62
3.16	Dilatação	63
3.17	Espiral	64
3.18	Espiral	64
3.19	Espiral	66
3.20	Espiral	68
3.21	Espiral	68
3.22	Genealogia de Transformações	69
4.1	Um problema da Olimpíada de Matemática dos Balcãs de 1985	71
4.2	Exemplo 4.1	72
4.3	Exemplo 4.2	72
4.4	Exemplo 4.2	73
4.5	Exemplo 4.4	74
4.6	Exemplo 4.5	75
4.7	Exemplo 4.6	76
4.8	Exemplo 4.6	77
A.1	Reta de Simson	81
A.2	Quadrilátero inscrito 1	82
A.3	Quadrilátero inscrito 2	83
A.4	Quadrilátero inscrito 3	84
A.5	Translação T_{P_0}	85
A.6	Reflexão R_l	86
A.7	Rotação $R_{\theta,O}$	86

Sumário

Introdução	17
1 Congruência	19
1.1 Definições e Teoremas	19
1.2 Exemplos	22
2 Semelhanças em segmentos	25
2.1 Teorema de Tales	25
2.1.1 A história de Tales de Mileto	25
2.1.2 Resultados	27
2.2 Semelhança de triângulos	31
2.2.1 Critérios de semelhança de triângulos	31
2.3 Teorema de Pitágoras	36
2.4 Lei dos cossenos	37
2.5 Lei dos senos	38
2.6 Teorema de Ceva	39
2.7 O triângulo medial e a linha de Euler	43
2.7.1 A história de Euler	43
2.7.2 Resultados	43
2.8 Triângulos Pedal	46
3 Transformações	49
3.1 Translação	49
3.2 Rotação	51
3.3 Meia-volta	53
3.4 Reflexão	54
3.5 O Problema de Fagnano	56
3.6 O problema dos três recipientes	57
3.7 Dilatação	61
3.8 Semelhança espiral	63
3.9 Uma genealogia de transformações	69
4 Exercícios propostos para os alunos do ensino médio	71
5 Considerações finais	79

A	Apêndice	81
A.0.1	Reta de Simson	81
A.0.2	Quadriláteros inscritíveis	82
A.0.3	Transformações	84
	Referências	89

Introdução

Desde o início do ensino fundamental II é desenvolvida a ideia de semelhança de figuras planas, apresentando de forma simples os casos de simetria: rotação, reflexão e translação. Ainda no ensino fundamental II, mais precisamente nos 8º e 9º anos, são desenvolvidos os conceitos de congruência e semelhança de triângulos através do Teorema de Tales e dos casos de congruência e semelhança de triângulos.

Devido à importância do assunto, iremos demonstrar os Teoremas que envolvem congruência e semelhança de triângulos e lembrar os conceitos básicos sobre triângulos e proporcionalidade. Faremos alguns exemplos que utilizam os Teoremas e Axiomas apresentados neste trabalho.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos e um apêndice. O Capítulo 1 traz os casos de congruência de triângulos, suas demonstrações e termina com alguns exemplos de exercícios que abordam o assunto. Já o Capítulo 2 conta um pouco da história de Tales de Mileto e traz alguns resultados e demonstrações que são abordados no ensino fundamental II e médio, como o Teorema de Tales, a semelhança de triângulos, o Teorema de Pitágoras, a Lei dos cossenos e dos senos. Também neste capítulo veremos alguns resultados que não são abordados no ensino fundamental e médio como o Teorema de Ceva, o triângulo medial e a linha de Euler e, por último, falaremos sobre triângulos pedal.

No Capítulo 3, começaremos com os casos de transformações isométricas como a Translação, Rotação, Meia-volta e Reflexão. Para mostrar como estas transformações podem ser utilizadas, trabalharemos com dois problemas: o problema de Fagnano e o problema dos três recipientes. Em seguida, abordaremos as transformações que geram figuras semelhantes e não congruentes como no caso das quatro primeiras, sendo elas a Dilatação e a Semelhança espiral. Por fim, traremos uma genealogia de transformações.

Para concluir este trabalho, iremos apresentar no Capítulo 4 alguns exercícios em forma de exemplos que podem ser aplicados aos alunos de ensino médio a fim de despertar o interesse desses jovens sobre a semelhança em segmentos e ressaltar a sua importância e “utilidade” para resolver situações problemas.

No Apêndice, abordaremos a Reta de Simson (caso excepcional de triângulo Pedal), os quadriláteros inscritíveis que serão utilizados na demonstração de alguns resultados e exemplos e apresentaremos as definições formais de cada uma das transformações trabalhadas no Capítulo 3.

A maioria das figuras apresentadas nesta dissertação foram desenvolvidas utilizando o programa Geogebra online (<https://www.geogebra.org/classic>).

1 Congruência

Neste capítulo, vamos apresentar algumas definições, teoremas e exemplos da Teoria de Congruência de Triângulos. Utilizamos o livro “Geometria Euclidiana Plana” de João Lucas Marques Barbosa (veja [4]) como alicerce do conteúdo a seguir.

1.1 Definições e Teoremas

Definição 1.1. *Triângulo é uma figura geométrica formada por três pontos não colineares e pelos três segmentos determinados por estes três pontos. Os três pontos são chamados de vértices do triângulo e os segmentos, lados do triângulo.*

Observação 1.1. Para se construir um triângulo é necessário que um lado seja menor que a soma dos outros dois lados do triângulo e maior que o valor absoluto da diferença desses dois lados, ou seja, dado um triângulo ABC , cujos lados têm medidas $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, devemos ter $|b - c| < a < b + c$ ou $|c - a| < b < c + a$ ou $|a - b| < c < a + b$.

Os triângulos podem ser classificados quanto aos seus ângulos e quanto aos seus lados.

Classificação quanto aos ângulos:

- Triângulo *acutângulo* é o triângulo que possui todos os ângulos menores que 90° .
- Triângulo *obtusângulo* é o triângulo que possui um ângulo maior que 90° .
- Triângulo *retângulo* é o triângulo que possui um ângulo de 90° .

Classificação quanto aos lados:

- Triângulo *equilátero* é o triângulo que possui todos os lados com a mesma medida.
- Triângulo *isósceles* é o triângulo que possui dois lados com a mesma medida.
- Triângulo *escaleno* é o triângulo que possui todos os lados com medidas diferentes.

Definição 1.2. *Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando possuem a mesma medida, isto é, $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos \hat{A} e \hat{B} são congruentes se eles têm a mesma medida, ou seja, $\hat{A} = \hat{B}$.*

Definição 1.3. *Dois triângulos ABC e EFG são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes. **Notação:** $ABC = EFG$.*

Axioma 1.1 (Caso Lado, Ângulo, Lado - *LAL*). Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AC} = \overline{EG}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, então $ABC = EFG$.

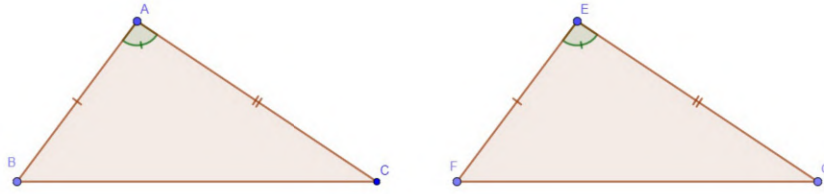


Figura 1.1: Caso *LAL*

Teorema 1.1 (Caso Ângulo, Lado, Ângulo - *ALA*). Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então $ABC = EFG$.

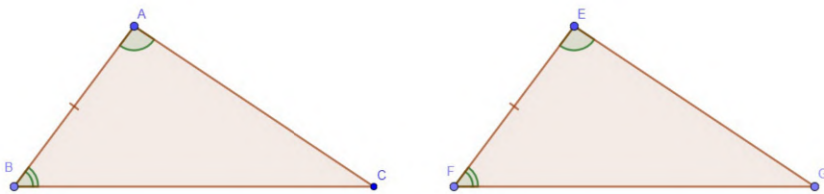


Figura 1.2: Caso *ALA*

Demonstração. Sejam dois triângulos ABC e EFG tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Seja D um ponto do segmento AC tal que D está entre A e C e $\overline{AD} = \overline{EG}$.

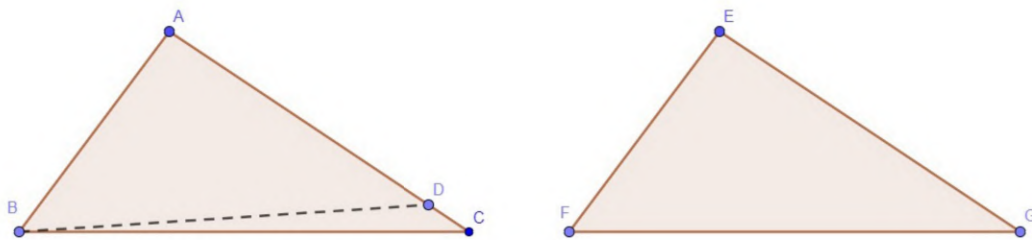


Figura 1.3: Demonstração Caso *ALA*

Comparemos os triângulos ABD e EFG . Como $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{AD} = \overline{EG}$ e $\hat{A} = \hat{E}$, pelo Axioma 1.1 temos que $ABD = EFG$. Logo $\widehat{ABD} = \hat{F}$. Mas, por hipótese, $\hat{F} = \widehat{ABC}$. Logo, $\widehat{ABD} = \widehat{ABC}$. Portanto, $\overline{AD} = \overline{AC}$ e os triângulos ABC e ABD são congruentes. Como já provamos que $ABD = EFG$, então $ABC = EFG$.

□

Proposição 1.1. *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo em que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Vamos provar que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Para isto comparemos o triângulo ABC com ele mesmo conforme a figura 1.4, sendo $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

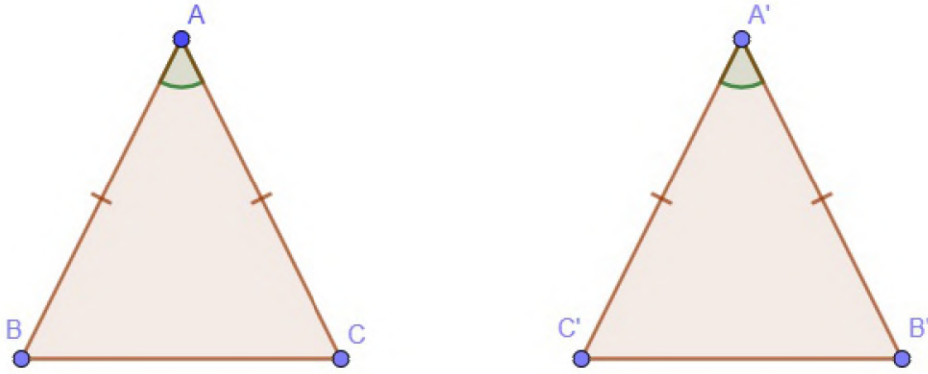


Figura 1.4: Triângulo isósceles

Fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira:

$$A \longleftrightarrow A', B \longleftrightarrow C' \text{ e } C \longleftrightarrow B'.$$

Por hipótese, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{A'C'} = \overline{A'B'}$. Como $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, então, pelo Axioma 1.1, temos que os triângulos ABC e $A'C'B'$ são congruentes e, portanto, $\widehat{B} = \widehat{C'} = \widehat{C}$. □

Teorema 1.2 (Caso Lado, Lado, Lado - *LLL*). *Se dois triângulos possuem três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

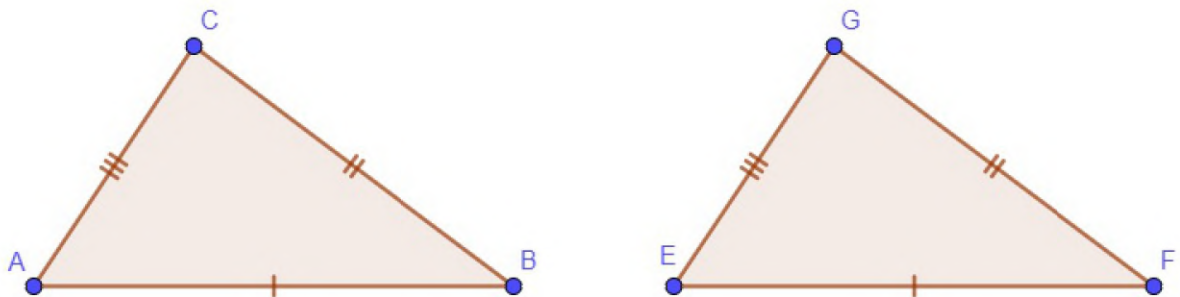


Figura 1.5: Caso *LLL*

Demonstração. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$. Vamos provar que $ABC = EFG$.

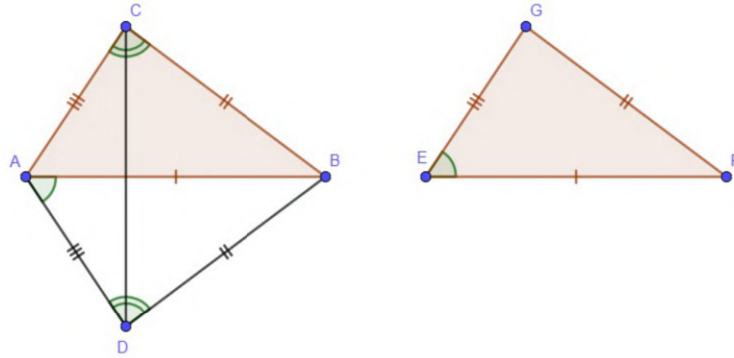


Figura 1.6: Demonstração Caso LLL

Para isto, vamos construir a partir da semirreta \overrightarrow{AB} e no semi-plano oposto ao que contém o ponto C , um ângulo igual ao ângulo \widehat{E} . No lado deste ângulo que não contém o ponto B , marquemos um ponto D tal que $\overline{AD} = \overline{EG}$ e liguemos D a B . Como $\overline{AB} = \overline{EF}$ (por hipótese), $\overline{AD} = \overline{EG}$ (por construção) e $\widehat{DAB} = \widehat{E}$ (por construção) então, pelo Caso LAL (Axioma 1.1), $ABD = EFG$. Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto tracemos CD . Como $\overline{AD} = \overline{EG} = \overline{AC}$ e $\overline{BD} = \overline{FG} = \overline{BC}$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue-se que $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$. Mas então, pelo Caso LAL (Axioma 1.1), podemos concluir que $ABD = ABC$. Como já tínhamos provado que $ABD = EFG$, então concluímos que $ABC = EFG$. □

1.2 Exemplos

Exemplo 1.1. Na figura 1.7, tem-se $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BD} = \overline{CE}$. Mostremos que os triângulos ACD e ABE são congruentes e os triângulos BCD e CBE também são congruentes.

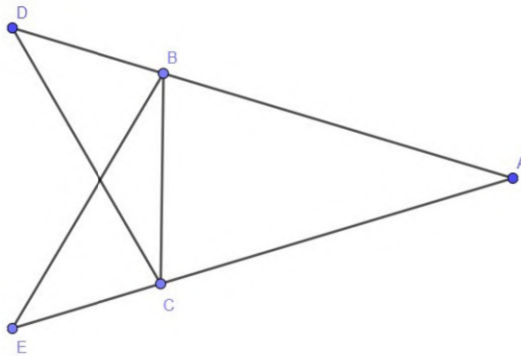


Figura 1.7: Exemplo 1.1

- Resolução:

Sabemos que $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{BD} = \overline{CE}$. Logo, temos

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AE}$$

e \widehat{A} é ângulo comum aos triângulos ABE e ACD . Portanto, pelo Caso *LAL* (Axioma 1.1), temos $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ e $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BE} = \overline{CD}$ e $\overline{AE} = \overline{AD}$.

Agora vamos mostrar que $\widehat{BCD} = \widehat{CBE}$.

Como $\overline{BE} = \overline{CD}$, $\overline{BD} = \overline{CE}$ e \overline{BC} é lado comum aos triângulos BCD e CBE , pelo Caso *LLL* (Teorema 1.2), temos $\widehat{BCD} = \widehat{CBE}$, como queríamos mostrar.

Exemplo 1.2. Na figura 1.8, os ângulos \widehat{A} e \widehat{C} são retos e o segmento DE corta CA no ponto médio B de CA . Mostremos que $\overline{DA} = \overline{CE}$.

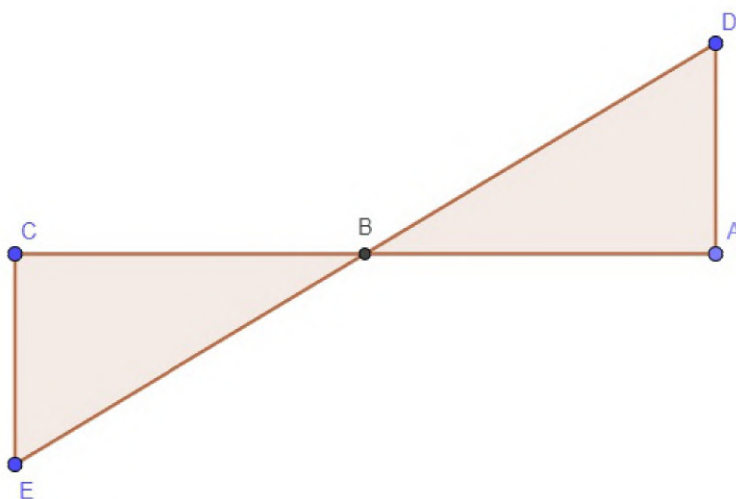


Figura 1.8: Exemplo 1.2

- Resolução:

Por hipótese temos $\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ e $\overline{CB} = \overline{BA}$, pois B é ponto médio de CA . Temos também que $\widehat{ABD} = \widehat{CBE}$, pois são ângulos opostos pelo vértice (veja em [4] na página 34). Logo, segue do Caso *ALA* (Teorema 1.1) que os triângulos ABD e CBE são congruentes e, portanto, $\overline{DA} = \overline{CE}$.

2 Semelhanças em segmentos

Semelhança é quando duas figuras possuem exatamente o mesmo formato mas, não necessariamente, as mesmas medidas. Por exemplo, duas circunferências quaisquer são semelhantes, dois quadrados quaisquer são semelhantes, dois triângulos equiláteros quaisquer são semelhantes e dois segmentos de retas quaisquer são semelhantes. Uma outra maneira de definir semelhança é quando uma figura é uma cópia da outra mas em escala diferente. Por exemplo, podemos ampliar ou reduzir uma figura sem alterar seu formato original.

Neste capítulo iremos contar um pouco da história de Tales de Mileto e apresentar alguns resultados e exemplos interessantes sobre semelhanças de triângulos.

2.1 Teorema de Tales

2.1.1 A história de Tales de Mileto

A história sobre Tales de Mileto que contaremos a seguir foi retirada do livro História da Matemática de Rubens G. Lintz.

Dentre os mais antigos pensadores da escola iônica, destaca-se a figura imponente de Tales de Mileto, um dos sete sábios da Grécia e que viveu aproximadamente de 630 a.C. a 550 a.C., sendo que a única data precisa que possuímos é sua famosa previsão do eclipse total do Sol de 28 de maio de 585 a.C. Não sabemos com certeza como realizou esse feito notável, mas deve ter sido baseado nas observações dos Babilônios e Caldeus que já tinham estabelecido de maneira bastante completa os ciclos dos eclipses do Sol e da Lua, embora O. Neugebauer seja contrário a esta hipótese.

Sobre sua vida, quase nada sabemos, mas por referências posteriores podemos inferir que deve ter viajado pelo Egito e por várias cidades e ilhas da costa iônica. Parece ter participado de questões sociais e políticas, pois, ele foi o principal responsável pela reunião de todas as cidades da Iônia para resistir ao domínio persa, o que, mais tarde, acarretou trágicas consequências para Mileto.

Infelizmente, não possuímos nenhum escrito original de Tales e tudo que sabemos sobre ele baseia-se em referências de autores posteriores; entretanto, elas são suficientes para nos evidenciar que Tales deve ter sido um homem realmente extraordinário, cuja sabedoria abarcava todo o conhecimento da época.

Além de sua importância como filósofo, Tales era também muito conhecido como engenheiro e homem de visão em assuntos da vida cotidiana. Assim é que a tradição se refere a ele como tendo auxiliado o exército de Cresos a cruzar o rio Hales, construindo um canal e desviando temporariamente o curso do rio.

Como astrônomo, ele era também justamente famoso, pois, mesmo usando de bastante ceticismo e tentando considerar como lendárias ou infundadas muitas descobertas que lhe foram atribuídas, o que sobra ainda é bastante para colocá-lo em posição proeminente entre os astrônomos da época. É muito conhecido o fato de Tales ter aconselhado os navegantes a se guiarem pela Ursa Menor em vez da Ursa Maior, como era a prática corrente da navegação. Isto se deve ao fato de a Ursa Menor conter a estrela polar que está a apenas um grau do pólo celeste.

Passando a análise do que lhe é atribuído como matemático, referímo-nos, primeiramente, à sua fama por ter introduzido métodos para calcular a altura de uma pirâmide, a largura de um rio, a distância de um barco que se aproxima, etc. Independente da veracidade destas histórias, elas mostram que, na época de Tales, já eram bem conhecidas as principais propriedades da semelhança de triângulos; pelo menos, o caso popular do triângulo retângulo.

Consideremos, então, o problema da altura de uma pirâmide. Em seus estudos, Tales observou que os raios solares que chegavam à Terra estavam na posição inclinada e eram paralelos, dessa forma, ele concluiu que havia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra e da altura dos objetos. (Veja a Figura 2.1)

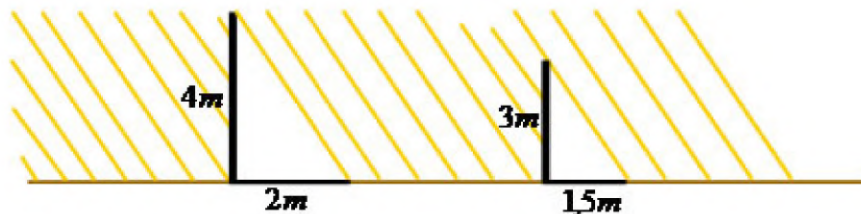


Figura 2.1: Raios solares.

Utilizando esta ideia, Tales conseguiu medir a altura de uma pirâmide observando o tamanho da sua sombra. Para tal situação, ele procedeu da seguinte forma: fincou uma estaca de medida conhecida na areia, mediu as sombras da pirâmide e da estaca e em uma determinada hora do dia ele estabeleceu a seguinte proporção:

$$\frac{\text{altura da pirâmide}}{\text{sombra da pirâmide}} = \frac{\text{altura da estaca}}{\text{sombra da estaca}} \quad (2.1)$$

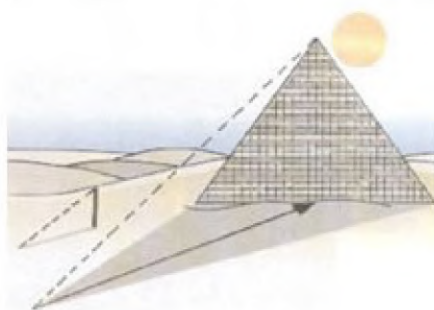


Figura 2.2: Pirâmide.

2.1.2 Resultados

O Teorema a seguir é do livro “Geometria” da coleção PROFMAT de Antônio Caminha Muniz Neto (veja [16]).

Teorema 2.1 (Teorema de Tales). *Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então,*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Para compreender melhor o Teorema de Tales observe o esquema representativo a seguir:

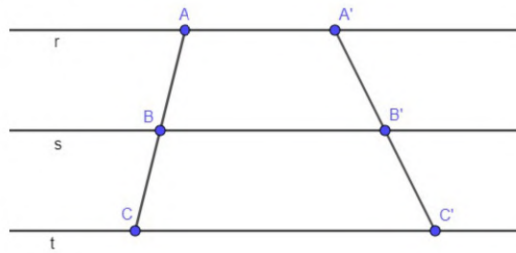


Figura 2.3: Retas paralelas

Demonstração. No esquema apresentado anteriormente, tracemos uma reta v paralela à reta que contém os pontos A', B' e C' , passando pelo ponto A . Sejam D o ponto de intersecção da reta v com a reta t e E o ponto de intersecção da reta s com a reta v .

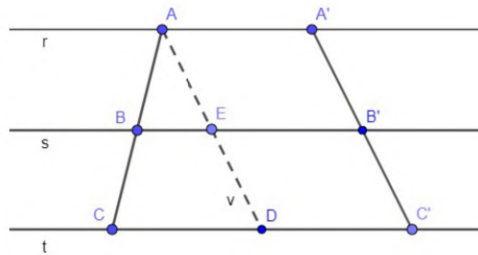


Figura 2.4: Deslocamento das retas transversais

Como as retas r e s são paralelas e, por construção, os segmentos AE e $A'B'$ também são paralelos, o quadrilátero $AEB'A'$ é um paralelogramo, então $\overline{AE} = \overline{A'B'}$. Analogamente, temos $\overline{ED} = \overline{B'C'}$.

Tomemos o triângulo ACD . Assim, basta provarmos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}$.

Consideremos o triângulo ABE . Seja F o ponto de intersecção da altura do triângulo ABE em relação à base AB e seja G o ponto de intersecção da altura do triângulo ABE em relação à base AE . A área do triângulo ABE pode ser calculada de duas maneiras:

$$\text{Área}(ABE) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{EF}}{2} \text{ ou } \text{Área}(ABE) = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BG}}{2} \quad (2.2)$$

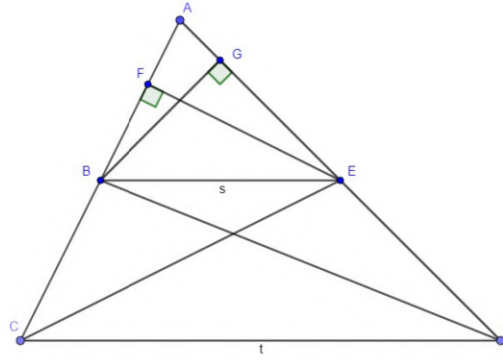


Figura 2.5: Demonstração do Teorema de Tales

Logo, temos

$$\overline{AB} \cdot \overline{EF} = \overline{AE} \cdot \overline{BG} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{EF}} \quad (2.3)$$

Note que os triângulos CBE e DEB têm áreas iguais (mesma base BE e mesma altura, pois os segmentos BE e CD são paralelos). Portanto,

$$\text{Área}(CBE) = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{EF}}{2} \text{ e } \text{Área}(DEB) = \frac{\overline{ED} \cdot \overline{BG}}{2} \quad (2.4)$$

Logo, temos

$$\overline{BC} \cdot \overline{EF} = \overline{ED} \cdot \overline{BG} \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{EF}} \quad (2.5)$$

De 2.3 e 2.5, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} \quad (2.6)$$

Portanto, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}$, como queríamos mostrar. □

Observação 2.1. Essa demonstração vale para qualquer triângulo, conforme podemos verificar na figura abaixo de um triângulo obtusângulo. O caso do triângulo retângulo é análogo à demonstração acima. Basta considerar o segmento de reta AC perpendicular às retas s e t .

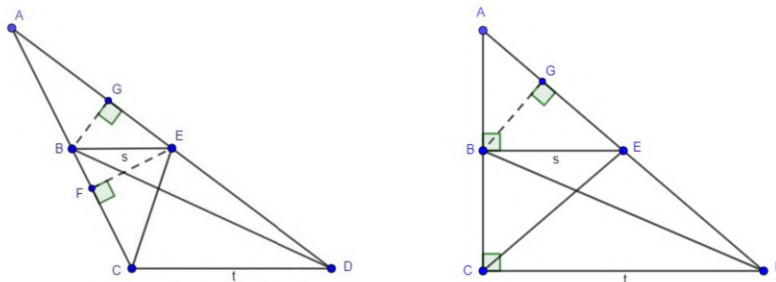


Figura 2.6: Triângulo obtusângulo e triângulo retângulo

Proposição 2.1 (Teorema da bissetriz). *Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$.*

1. *Se P é o pé da bissetriz interna e Q é o pé da bissetriz externa relativas ao lado BC , então*

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad (2.7)$$

2. *Se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, temos*

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BP} = \frac{ac}{b+c} \\ \overline{PC} = \frac{ab}{b+c} \end{array} \right. \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} \overline{BQ} = \frac{ac}{|b-c|} \\ \overline{QC} = \frac{ab}{|b-c|} \end{array} \right.$$

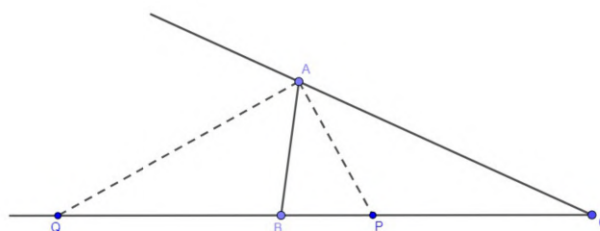


Figura 2.7: Teorema da bissetriz

Demonstração.

1. • Bissetriz interna

Vamos supor que $\overline{AB} < \overline{AC}$ (o caso $\overline{AB} > \overline{AC}$ pode ser tratado de modo análogo). Tracemos, pelo ponto B , o segmento de reta BD paralelo a PA , tal que $D \in \overrightarrow{CA}$, conforme Figura 2.8.

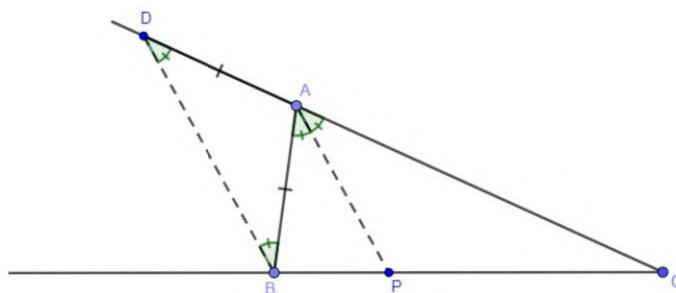


Figura 2.8: Prova bissetriz interna

Como \widehat{ABD} e \widehat{BAP} são ângulos alternos internos, \widehat{ADB} e \widehat{CAP} são ângulos correspondentes e $\widehat{CAP} = \widehat{BAP}$, então $\widehat{ABD} = \widehat{BAP} = \widehat{CAP} = \widehat{ADB}$. Logo, o triângulo ABD é isóceles e $\overline{AD} = \overline{AB}$. Pelo Teorema de Tales (2.1), temos

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad (2.8)$$

- Bissetriz externa

Novamente, vamos supor que $\overline{AB} < \overline{AC}$ (o caso $\overline{AB} > \overline{AC}$ pode ser tratado de modo análogo). Tracemos, pelo ponto B , o segmento de reta BE paralelo a QA tal que $E \in CA$, conforme Figura 2.9

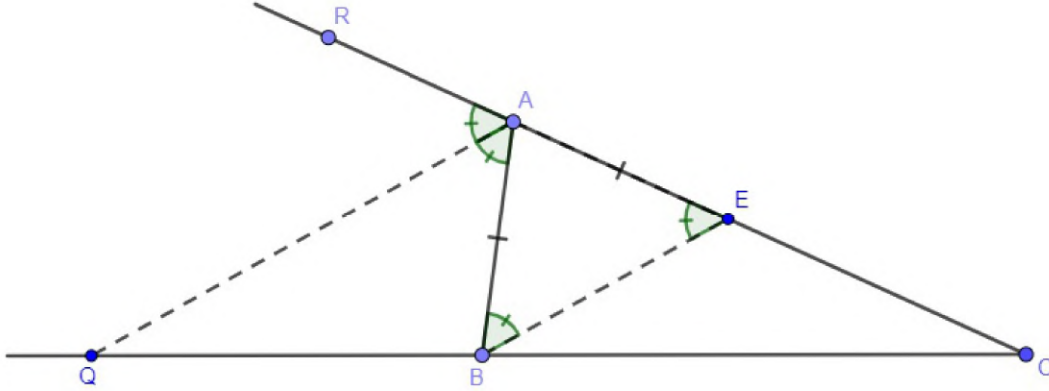


Figura 2.9: Prova bissetriz externa

Como QA é paralelo a BE e AQ é bissetriz de \widehat{BAR} , obtemos

$$\widehat{ABE} = \widehat{BAQ} = \widehat{QAR} = \widehat{BEA}. \quad (2.9)$$

Logo, o triângulo ABE é isósceles e $\overline{AB} = \overline{AE}$.

Aplicando o Teorema de Tales (2.1), temos

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad (2.10)$$

2. O item 2 segue imediatamente do item 1: Sendo $\overline{BP} = x$ e $\overline{PC} = y$, temos $x + y = a$. Pelo item 1, temos $\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$. Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = \frac{c}{b} \end{cases}$$

obtemos $x = \frac{ac}{b+c}$ e $y = \frac{ab}{b+c}$.

Analogamente, sendo $\overline{BQ} = z$ e $\overline{QC} = w$, temos $a + z = w$. Pelo item 1, temos $\frac{z}{w} = \frac{c}{b}$. Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} a + z = w \\ \frac{z}{w} = \frac{c}{b} \end{cases}$$

obtemos $z = \frac{ac}{|b-c|}$ e $w = \frac{ab}{|b-c|}$.

□

2.2 Semelhança de triângulos

As definições e teoremas que veremos nesta seção foram baseadas no livro “Geometria Euclidiana Plana” de João Lucas Marques Barbosa (veja [4]).

Definição 2.1. Diremos que dois triângulos ABC e EFG são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. **Notação:** $ABC \sim EFG$.

Com isto queremos dizer que, se ABC e EFG são dois triângulos semelhantes e se $A \leftrightarrow E, B \leftrightarrow F$ e $C \leftrightarrow G$ é a correspondência biunívoca que estabelece a semelhança, então valem simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{E}, \hat{B} = \hat{F}, \hat{C} = \hat{G} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}} = k$$

O quociente comum k entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de *razão de proporcionalidade* entre os dois triângulos.

Observação 2.2. Dois triângulos são congruentes se, e somente se, esses triângulos são semelhantes com razão de proporcionalidade um.

2.2.1 Critérios de semelhança de triângulos

Teorema 2.2 (Caso Ângulo, Ângulo - AA). Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$ então os triângulos são semelhantes.

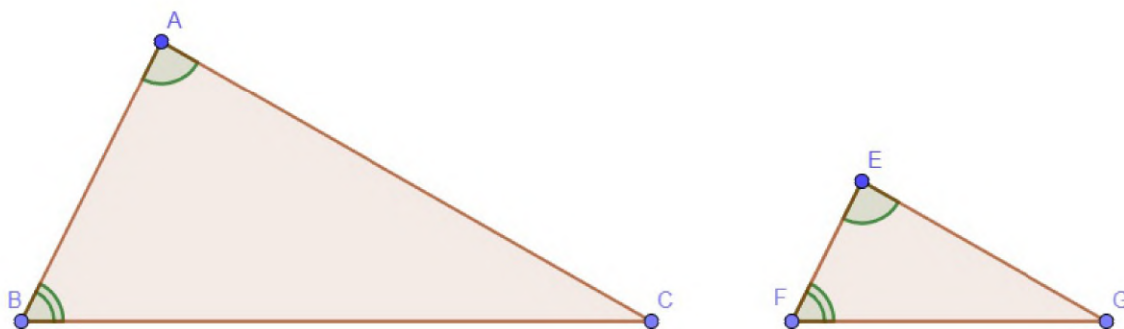


Figura 2.10: Semelhança de triângulos Caso AA

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e EFG com $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$. Vamos provar que $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AC}}$.

Tomemos um ponto F' pertencente ao segmento AB tal que $\overline{AF'} = \overline{EF}$ e um ponto G' pertencente ao segmento AC tal que $\overline{AG'} = \overline{EG}$. Pelo Axioma 1.1 (Caso LAL) temos que os triângulos $AF'G'$ e EFG são congruentes. Logo, $\widehat{AF'G'} = \hat{F} = \hat{B}$ e, portanto, os segmentos $F'G'$ e BC são paralelos. Pelo Teorema de Tales, temos $\frac{\overline{AF'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AG'}}{\overline{AC}}$, mas, como $\overline{AF'} = \overline{EF}$ e $\overline{AG'} = \overline{EG}$, então, $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AC}}$.

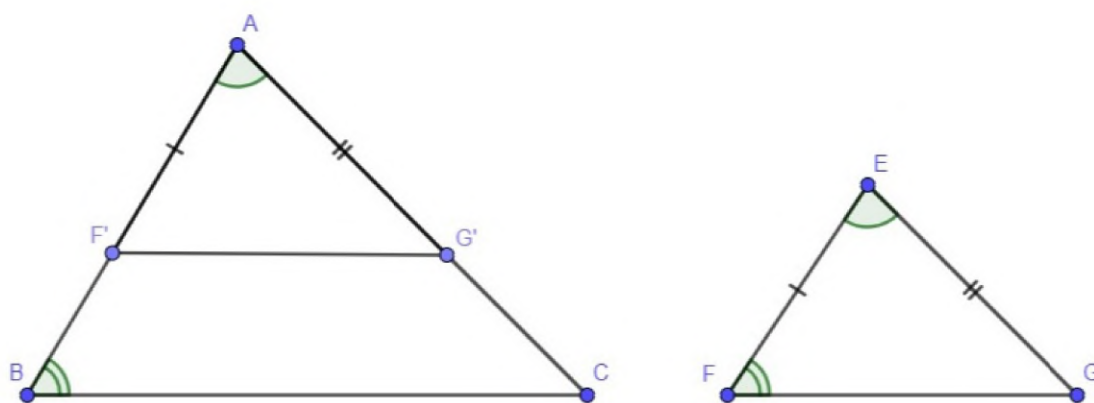


Figura 2.11: Demonstração semelhança de triângulos Caso AA

Agora, tomemos um ponto D pertencente ao segmento BC tal que $G'D$ seja paralelo a $F'B$. Mas o quadrilátero $F'G'DB$ é um paralelogramo, então $\overline{F'G'} = \overline{BD}$. Então, temos $\frac{\overline{AG'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{F'G'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}}$. Portanto, $\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BC}}$, como queríamos mostrar.

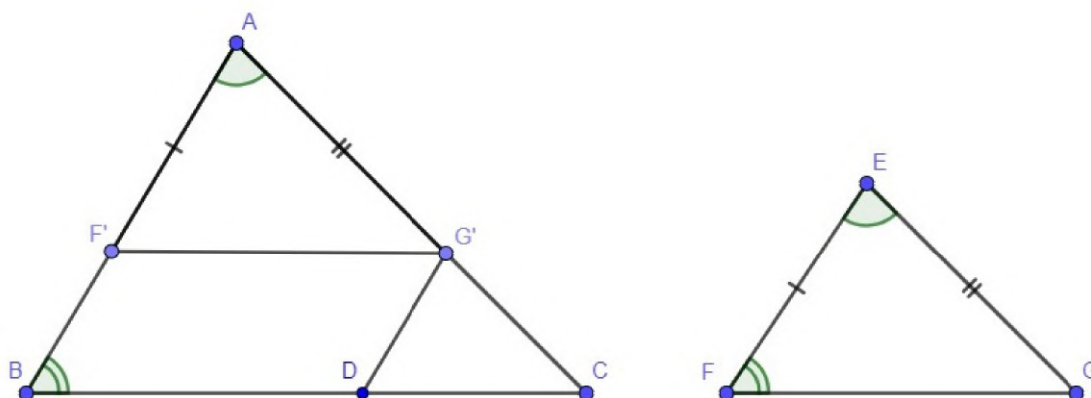


Figura 2.12: Demonstração semelhança de triângulos Caso AA

□

Teorema 2.3 (Caso Lado, Ângulo, Lado - *LAL*). Se, em dois triângulos ABC e EFG tem-se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG}$, então os triângulos são semelhantes.

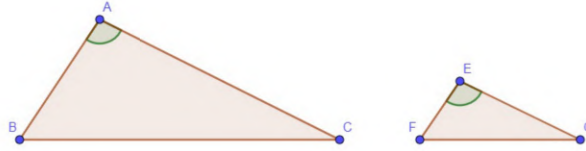


Figura 2.13: Semelhança de triângulos Caso *LAL*

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e EFG , com $\hat{A} = \hat{E}$ e $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = k$.

Vamos provar que $\hat{B} = \hat{F}$, $\hat{C} = \hat{G}$ e $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$.

Tomemos o ponto F' pertencente ao segmento AB tal que $\overline{AF'} = \overline{EF}$. Seja l a reta que passa por F' e é paralela ao segmento BC . Como AC não é paralelo a BC , então existe um ponto G' pertencente à intersecção da reta l com AC . Pelo Teorema de Tales (2.1), temos $\frac{AB}{AF'} = \frac{AC}{AG'}$, mas $\overline{AF'} = \overline{EF}$ (por construção), então $k = \frac{AB}{EF} = \frac{AC}{AG'}$.

Por hipótese, temos $\frac{AC}{EG} = k$, mas $\frac{AC}{AG'} = k$, então

$$\frac{AC}{EG} = k = \frac{AC}{AG'} \Rightarrow \frac{AC}{EG} = \frac{AC}{AG'} \Leftrightarrow \overline{EG} = \overline{AG'}.$$

Pelo Axioma 1.1 (Caso *LAL*) temos $\triangle AF'G' = \triangle EFG$ e, portanto, $\hat{AF'G'} = \hat{F}$ e $\hat{AG'F'} = \hat{G}$. Mas, como $F'G'$ e BC são paralelos, então, $\hat{B} = \hat{AF'G'} = \hat{F}$ e $\hat{C} = \hat{AG'F'} = \hat{G}$.

Agora, tracemos uma reta r paralela ao segmento AB passando pelo ponto G' . Seja D o ponto de intersecção da reta r com o segmento BC . Daí, temos $\frac{AC}{AG'} = \frac{BC}{BD}$. Mas $\overline{F'G'} = \overline{BD}$ (paralelogramo) e $\overline{F'G'} = \overline{FG}$. Portanto $\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}$, como queríamos provar.

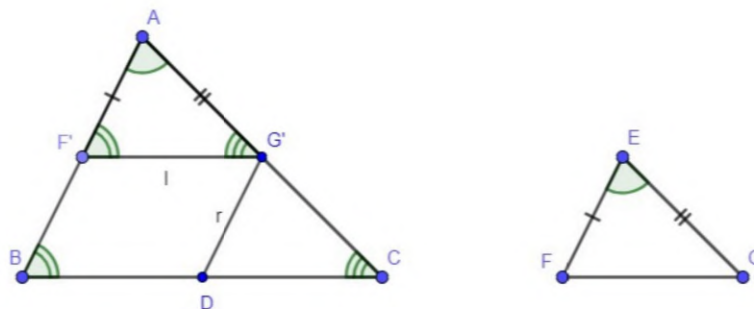


Figura 2.14: Demonstração semelhança de triângulos Caso *LAL*

□

Teorema 2.4 (Caso Lado, Lado, Lado - LLL). *Se, em dois triângulos ABC e EFG , tem-se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}},$$

então os dois triângulos são semelhantes.

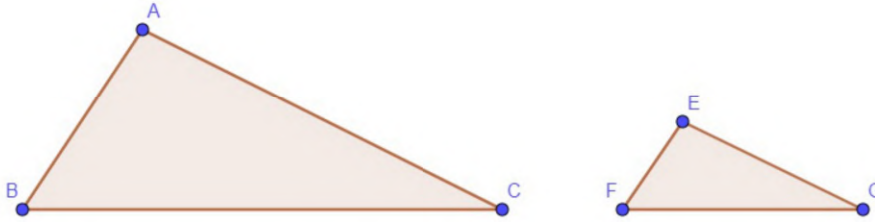


Figura 2.15: Semelhança de triângulos Caso LLL

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e EFG , tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = k, k >$

1. Assim, temos que $\overline{EF} = \overline{AB} \cdot \frac{1}{k}$, $\overline{EG} = \overline{AC} \cdot \frac{1}{k}$ e $\overline{FG} = \overline{BC} \cdot \frac{1}{k}$. Provemos que $\widehat{A} = \widehat{E}$, $\widehat{B} = \widehat{F}$ e $\widehat{C} = \widehat{G}$.

Tomemos um ponto F' pertencente ao segmento AB tal que $\overline{AF'} = \overline{EF}$ e tracemos uma reta l paralela ao segmento BC passando pelo ponto F' . Seja G' o ponto de intersecção da reta l com o segmento AC . Pelo Teorema de Tales (2.1), temos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AF'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG'}} = k$. De maneira que $\overline{AG'} = \overline{AC} \cdot \frac{1}{k} = \overline{EG}$ e $\overline{AF'} = \overline{AB} \cdot \frac{1}{k} = \overline{EF}$.

Agora, tracemos a reta r paralela a AB passando pelo ponto G' e seja D o ponto de intersecção da reta r com BC . Pelo Teorema de Tales (2.1), temos que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AG'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = k$.

De maneira que $\overline{BD} = \overline{BC} \cdot \frac{1}{k} = \overline{FG}$. Mas o quadrilátero $F'G'DB$ é um paralelogramo, então $\overline{BD} = \overline{F'G'}$. Logo, temos que $\overline{F'G'} = \overline{BD} = \overline{FG}$. Portanto, pelo Teorema 1.2 (Caso LLL), $\triangle AF'G' = \triangle EFG$ e $\widehat{E} = \widehat{A}$, $\widehat{F} = \widehat{F'} = \widehat{B}$ e $\widehat{G} = \widehat{G'} = \widehat{C}$, como queríamos provar.

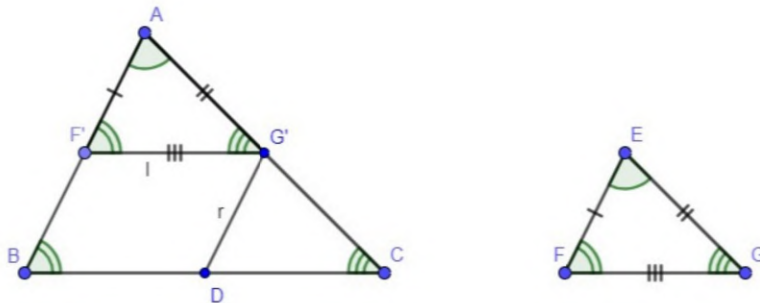


Figura 2.16: Demonstração semelhança de triângulos Caso LLL

□

Exemplo 2.1. Mostremos que se D e E são pontos médios de CA e CB , respectivamente, no triângulo ABC , então $CDE \sim CAB$.

- Resolução:

Consideremos o triângulo ABC conforme a figura 2.17.

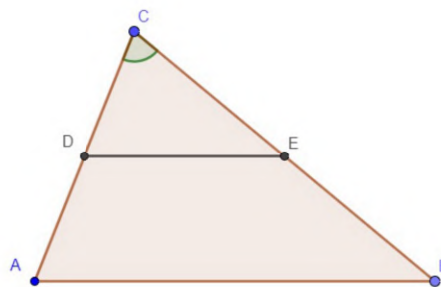


Figura 2.17: Exemplo 2.1

Como D é ponto médio de CA então $\overline{DA} = \overline{CD}$ e $\overline{CA} = \overline{CD} + \overline{DA} = 2\overline{CD} \Rightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2}$ e como E é ponto médio de CB então $\overline{EB} = \overline{CE}$ e $\overline{CB} = \overline{CE} + \overline{EB} = 2\overline{CE} \Rightarrow \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$. Pelo Teorema 2.3 (Caso LAL), temos que os triângulos CDE e CAB são semelhantes.

Exemplo 2.2. Mostremos que o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo dado, é semelhante a este.

- Resolução:

Consideremos o triângulo ABC conforme a figura 2.18.

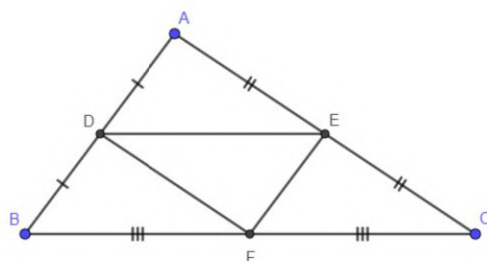


Figura 2.18: Exemplo 2.2

Seja D o ponto médio de AB , E o ponto médio de AC e F o ponto médio de BC . Igualmente ao exemplo anterior, temos que os triângulos ABC , ADE , DBF e EFC são semelhantes pelo Teorema 2.3 (Caso LAL). Logo, $\overline{DE} = \overline{BF}$, $\overline{DF} = \overline{AE}$ e $\overline{EF} = \overline{AD}$. Portanto, pelo Teorema 2.4, temos que os triângulos FED e ABC são semelhantes.

2.3 Teorema de Pitágoras

Teorema 2.5. *Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

Demonstração. Tomemos o triângulo ABC , retângulo em A , onde $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ e seja H o pé da altura relativa ao lado BC , onde $\overline{CH} = m$ e $\overline{HB} = n$, conforme figura 2.19.

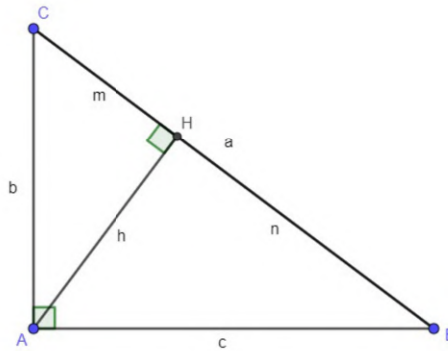


Figura 2.19: Teorema de Pitágoras

Pelo Teorema 2.2 (Caso AA) temos que os triângulos ABC e HAC são semelhantes e, portanto, temos

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m. \quad (2.11)$$

Temos também, pelo Teorema 2.2 (Caso AA), que os triângulos ABC e HBA são semelhantes. Logo, temos

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n. \quad (2.12)$$

Somando (2.11) e (2.12), temos

$$a \cdot m + a \cdot n = b^2 + c^2 \Rightarrow a(m + n) = a^2 = b^2 + c^2.$$

□

Outra sugestão de demonstração do Teorema de Pitágoras:

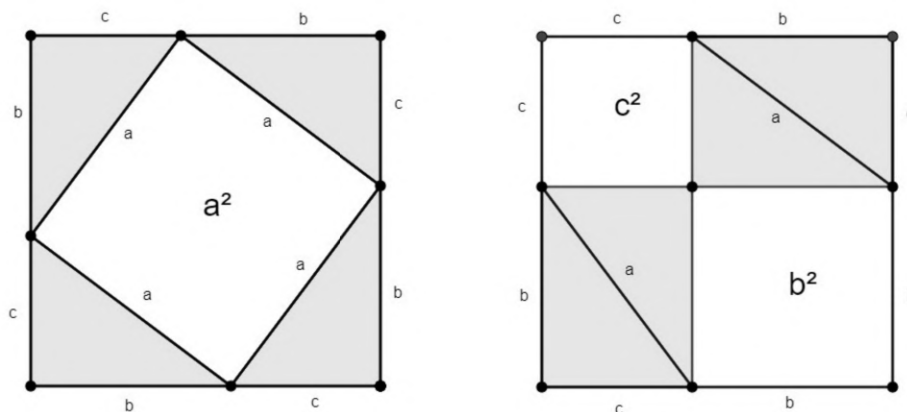


Figura 2.20: Outra demonstração do Teorema de Pitágoras

2.4 Lei dos cossenos

Teorema 2.6 (Lei dos cossenos). *Em um triângulo ABC , onde $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$, tem-se:*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B} \quad (2.13)$$

Demonstração. Vamos considerar o caso em que o triângulo não é retângulo, pois caso seja retângulo o Teorema acima é exatamente o Teorema de Pitágoras. Vamos começar traçando a altura do vértice A . Seja H o pé da altura do triângulo em relação ao lado BC e $\overline{AH} = h$. Conforme a figura 2.21, temos duas possibilidades: $H \in BC$ com $H \neq B$ e $H \neq C$ ou H pertence a reta que passa pelos pontos B e C com $H \notin BC$, $H \neq B$ e $H \neq C$.

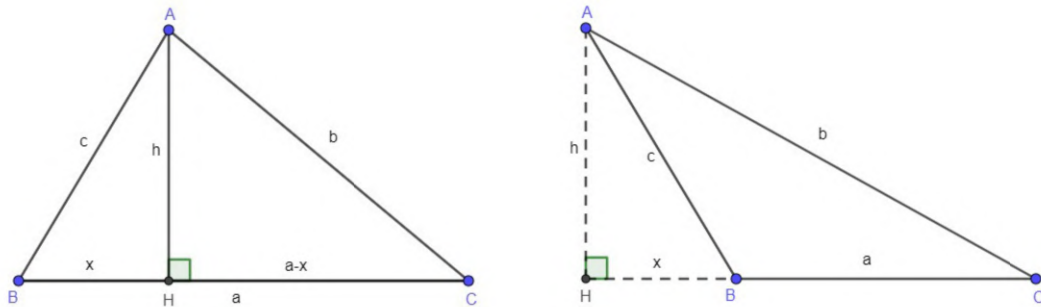


Figura 2.21: Demonstração Lei dos cossenos

No primeiro caso, seja $x = \overline{BH} = c \cdot \cos \widehat{B}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras (2.5) aos triângulos ABH e AHC , temos

$$c^2 = h^2 + x^2 \text{ e}$$

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + a^2 + x^2 - 2ax$$

$$b^2 = h^2 + a^2 + x^2 - 2a \cdot \cos \widehat{B}$$

Comparando as igualdades acima, temos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}.$$

No segundo caso, $x = \overline{HB} = c \cdot \cos(\pi - \widehat{B}) = -c \cdot \cos \widehat{B}$. Novamente, aplicando o Teorema de Pitágoras (2.5), obtemos

$$c^2 = h^2 + x^2 \text{ e}$$

$$b^2 = h^2 + (x + a)^2 = h^2 + x^2 + a^2 + 2ax$$

$$b^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}$$

Comparando as igualdades acima, temos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}.$$

Portanto, a igualdade vale em qualquer caso. \square

2.5 Lei dos senos

Teorema 2.7 (Lei dos senos). *Qualquer que seja o triângulo ABC , tem-se:*

$$\frac{\text{sen } \widehat{A}}{BC} = \frac{\text{sen } \widehat{B}}{AC} = \frac{\text{sen } \widehat{C}}{AB}. \quad (2.14)$$

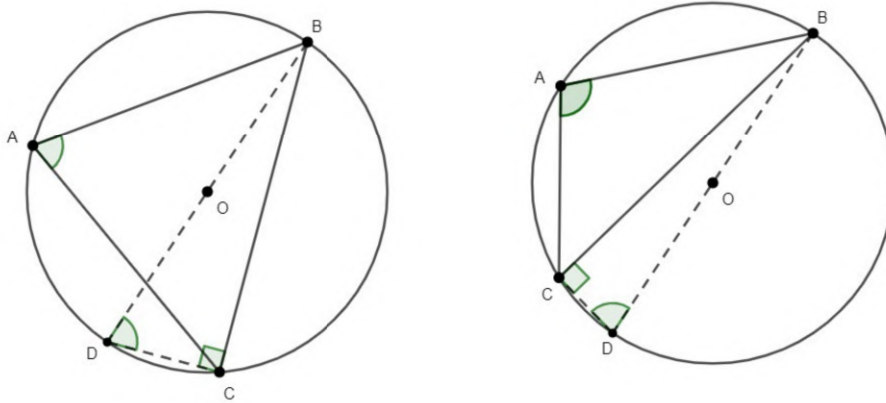


Figura 2.22: Lei dos senos

Demonstração. Consideremos o círculo que circunscribe o triângulo ABC . Seja O o seu centro e R o seu raio. Consideremos o diâmetro que tem B como extremidade. Seja D sua outra extremidade. Se os pontos A e D estiverem de um mesmo lado da reta determinada por B e C , então os ângulos \widehat{BDC} e \widehat{BAC} são congruentes por serem ângulos inscritos correspondentes a um mesmo arco (veja em [4] na página 133). Se os pontos A e D estiverem em lados distintos da reta que contém BC então os ângulos \widehat{BDC} e \widehat{BAC} são suplementares já que correspondem a arcos que se complementam para formar o círculo. Em ambos os casos tem-se que

$$\text{sen } \widehat{D} = \text{sen } \widehat{A}.$$

Consequentemente,

$$\overline{BC} = 2R \text{sen } \widehat{A}.$$

(Observe que aqui utilizamos o fato de que o triângulo BCD é retângulo). De forma análoga, demonstra-se que

$$\overline{AB} = 2R \text{sen } \widehat{C} \text{ e } \overline{AC} = 2R \text{sen } \widehat{B}.$$

Comparando-se as três fórmulas obtidas conclui-se que

$$\frac{\text{sen } \widehat{A}}{BC} = \frac{\text{sen } \widehat{B}}{AC} = \frac{\text{sen } \widehat{C}}{AB} = \frac{1}{2R}.$$

□

2.6 Teorema de Ceva

Definição 2.2. O segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a um ponto qualquer do lado oposto é chamado de Ceviana.

Logo, se X, Y, Z são pontos nos respectivos lados BC, CA e AB do triângulo ABC , os segmentos AX, BY e CZ são cevianas. Este termo vem do nome do matemático italiano Giovanni Ceva, que publicou em 1678, o seguinte teorema:

Teorema 2.8 (Teorema de Ceva). *Se três cevianas AX, BY, CZ , de um triângulo ABC , são concorrentes, então*

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1. \quad (2.15)$$

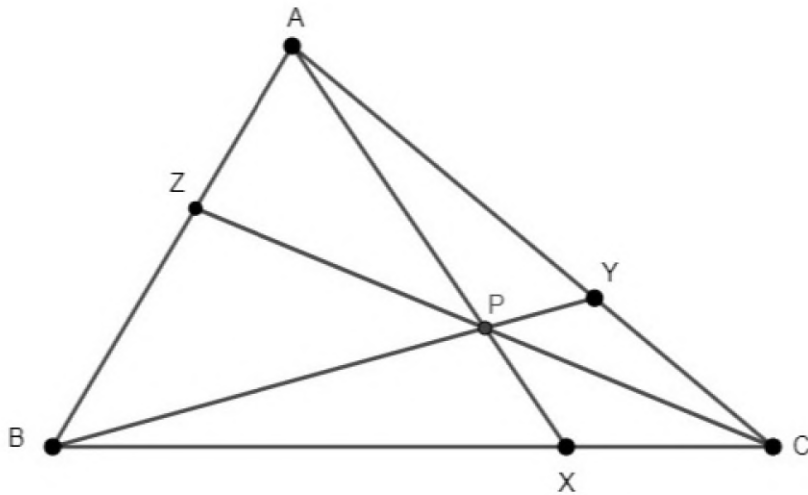


Figura 2.23: Teorema de Ceva

Demonstração. Quando dizemos que três linhas (ou segmentos) são concorrentes, queremos dizer que elas passam por um ponto, digamos P . Referindo-nos à Figura 2.23 e denotando por h a altura do triângulo ABC e h_1 a altura do triângulo PBC , temos

$$\frac{(ABP)}{(CAP)} = \frac{(ABX) - (PBX)}{(AXC) - (PXC)} = \frac{\frac{\overline{BX} \cdot h}{2} - \frac{\overline{BX} \cdot h_1}{2}}{\frac{\overline{XC} \cdot h}{2} - \frac{\overline{XC} \cdot h_1}{2}} = \frac{\overline{BX}(h - h_1)}{\overline{XC}(h - h_1)} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}},$$

em que a notação (ABX) representa o valor da área do triângulo ABX . Similarmente,

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{(BCP)}{(ABP)}, \quad \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{(CAP)}{(BCP)}.$$

Agora, se multiplicarmos estes, encontramos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{(ABP)}{(CAP)} \cdot \frac{(BCP)}{(ABP)} \cdot \frac{(CAP)}{(BCP)} = 1. \quad \square$$

Teorema 2.9. Se três cevianas AX, BY, CZ satisfazem $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$, elas são concorrentes.

Demonstração. Para ver isso, suponhamos que as duas primeiras cevianas se encontrem em P , como antes, e que a terceira ceviana através desse ponto P seja CZ' . Então, pelo Teorema de Ceva (2.8),

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = 1.$$

Mas estamos assumindo $\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1$. Consequentemente,

$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}},$$

Portanto, Z' coincide com Z e provamos que AX, BY, CZ são concorrentes. \square

Exemplo 2.3. Cevianas perpendiculares aos lados opostos são concorrentes.

- Resolução: Consideremos o triângulo ABC onde AX, BY, CZ são cevianas perpendiculares.

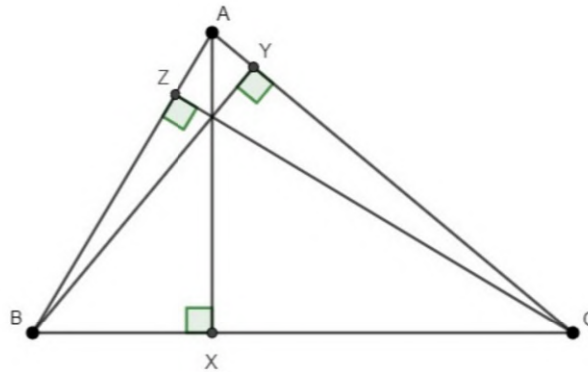


Figura 2.24: Exemplo 2.3

Pelo Teorema 2.2 (Caso AA) os triângulos BYC e AXC são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{CY}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Analogamente, os triângulos AYB e AXB são semelhantes aos triângulos AZC e CZB , respectivamente. Daí, segue que,

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \text{ e } \frac{\overline{BX}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 1.$$

Exemplo 2.4. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos não congruentes cujos lados são paralelos, como na Figura 2.25. Então as três linhas (ou segmentos) AA' , BB' , CC' (estendidas) são concorrentes.

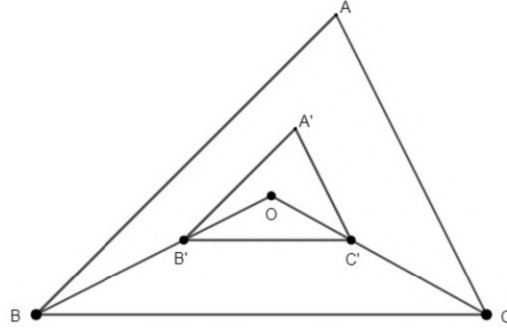


Figura 2.25: Exemplo 2.4

• Resolução:

Primeiro, vamos traçar as cevianas que passam pelos pontos A' e O , B' e O , C' e O e interceptam $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ nos pontos X' , Y' , Z' , respectivamente. Observando o triângulo $A'B'C'$, segue do Teorema de Ceva que

$$\frac{\overline{B'X'}}{\overline{X'C'}} \cdot \frac{\overline{C'Y'}}{\overline{Y'A'}} \cdot \frac{\overline{A'Z'}}{\overline{Z'B'}} = 1. \quad (2.16)$$

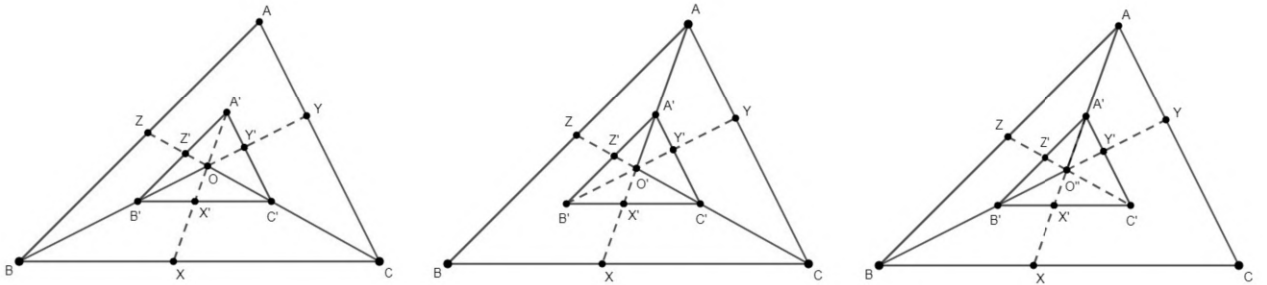


Figura 2.26: Exemplo 2.4

Agora, vamos prolongar os segmentos BB' e CC' , de modo que os pontos Y e Z pertençam às semirretas designadas por $\overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{CC'}$ e sejam o ponto de interseção com os lados AC e AB , respectivamente. Vamos chamar de O o ponto de interseção entre $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, O' o ponto de interseção entre $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{AA'}$ e O'' o ponto de interseção entre $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$. Como os lados dos triângulos ABC e $A'B'C'$ são paralelos (conforme figura 2.25), pelo Teorema 2.2 (Caso AA), temos

$$OB'X' \sim OBX \text{ e } OX'C' \sim OXC \Rightarrow \frac{\overline{B'X'}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{OX'}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{X'C'}}{\overline{XC}} \Rightarrow \frac{\overline{B'X'}}{\overline{X'C'}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}},$$

$$O'C'Y' \sim O'CY \text{ e } O'Y'A' \sim O'YA \Rightarrow \frac{\overline{C'Y'}}{\overline{CY}} = \frac{\overline{O'Y'}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{Y'A'}}{\overline{YA}} \Rightarrow \frac{\overline{C'Y'}}{\overline{Y'A'}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}},$$

$$O''A'Z' \sim O''AZ \text{ e } O''Z'B' \sim O''ZB \Rightarrow \frac{\overline{A'Z'}}{\overline{AZ}} = \frac{\overline{O''Z'}}{\overline{O''Z}} = \frac{\overline{Z'B'}}{\overline{ZB}} \Rightarrow \frac{\overline{A'Z'}}{\overline{Z'B'}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}.$$

Fazendo a substituição na equação (2.16), temos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1.$$

Logo as cevianas AX , BY , CZ são concorrentes e, conseqüentemente, os pontos O , O' , O'' coincidem. Portanto, as três linhas AA' , BB' , CC' (estendidas) são concorrentes.

Exemplo 2.5. Seja AX uma ceviana de comprimento p , dividindo BC em segmentos BX e XC , com medidas $\overline{BX} = m$ e $\overline{XC} = n$, como na Figura 2.27. Então,

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n.$$

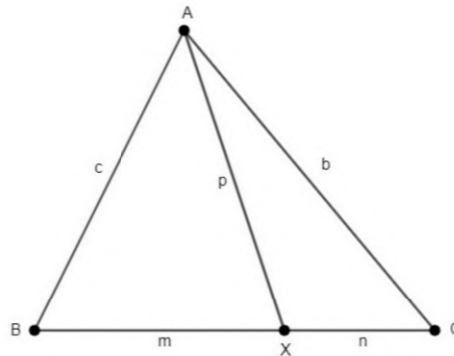


Figura 2.27: Exemplo 2.5

- Resolução:

Sejam $\widehat{AXB} = \theta$ e $\widehat{AXC} = \theta'$, então $\cos \theta' = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$. Agora, aplicando a Lei dos cossenos (Teorema 2.6), obtemos

$$\begin{cases} b^2 = p^2 + n^2 - 2 \cdot p \cdot n \cdot \cos \theta' \\ c^2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Substituindo $\cos \theta'$ por $-\cos \theta$, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} b^2 = p^2 + n^2 + 2 \cdot p \cdot n \cdot \cos \theta \\ c^2 = p^2 + m^2 - 2 \cdot p \cdot m \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Agora vamos multiplicar a primeira equação por m e a segunda equação por n

$$\begin{cases} b^2m = mp^2 + mn^2 + 2 \cdot p \cdot m \cdot n \cdot \cos \theta \\ c^2n = np^2 + nm^2 - 2 \cdot p \cdot m \cdot n \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos

$$b^2m + c^2n = mp^2 + np^2 + mn^2 + nm^2 \Rightarrow b^2m + c^2n = a(p^2 + mn).$$

2.7 O triângulo medial e a linha de Euler

2.7.1 A história de Euler

Leonhard Euler nasceu em 1707 em Basel, na Suíça. Em 1727, ele foi convidado para a Academia de São Petersburgo na Rússia. Em 1741, ele partiu para Berlim, para assumir a cadeira de matemática na Academia Prussiana. Ele retornou a São Petersburgo em 1766 e permaneceu lá até sua morte em 1783.

Euler foi um trabalhador incansável, suas atividades enriqueceram todos os campos da matemática. Onde quer que se olhe, há um teorema de Euler, uma fórmula de Euler ou um método de Euler. Euler escreveu 473 memórias que foram publicadas durante sua vida, 200 que foram publicadas logo depois, e outras 61 que tiveram que esperar. Além disso, ele fez tudo isso sob severa desvantagem, pois perdeu a visão de um olho em 1735, e a visão do outro em 1766. Sua habilidade em manipulação foi notável, e sua compreensão intuitiva da matemática era enorme.

2.7.2 Resultados

Definição 2.3. O triângulo formado pela junção dos pontos médios dos lados de um determinado triângulo é chamado de **triângulo medial**.

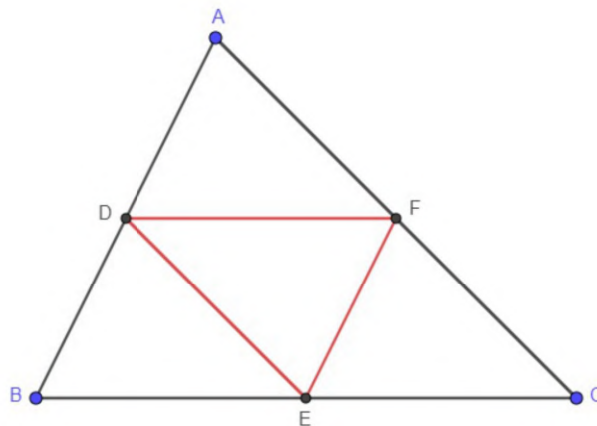


Figura 2.28: Triângulo Medial

Definição 2.4 (veja em [16] na página 93). Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, o **ortocentro** do triângulo.

Definição 2.5 (veja em [16] na página 92). Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o **circuncentro** do mesmo.

Teorema 2.10 (Teorema das medianas). As medianas de um triângulo são concorrentes e dividem-se na proporção 2 : 1.

Demonstração. Sejam X, Y, Z os pontos médios dos segmentos BC, CA, AB , respectivamente. Então, temos

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1.$$

Pelo Teorema de Ceva (2.8), provamos que as medianas de um triângulo são concorrentes.

Agora vamos mostrar que as medianas se dividem na proporção $2 : 1$.

Tracemos o segmento ZY . Pelo Caso LAL (Teorema 2.3), temos que os triângulos AZY e ABC são semelhantes de razão $\frac{1}{2}$. Logo, $\overline{ZY} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ e ZY é paralelo a BC . Notemos que os triângulos PYZ e PBC também são semelhantes (Caso AA) de razão $\frac{1}{2}$. Daí, segue que $\overline{PY} = \frac{1}{2}\overline{PB}$.

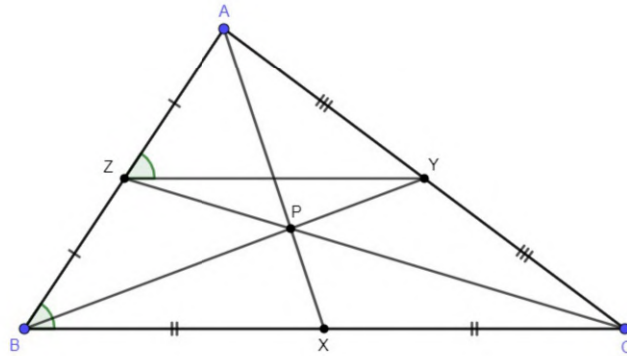


Figura 2.29: Medianas

□

Definição 2.6. O *centróide* é o ponto de interseção das medianas do triângulo.

Na Figura 2.30, o triângulo $A'B'C'$ é o *triângulo medial* do triângulo ABC . Tome-mos as duas medianas AA' e BB' que se intersectam em G , duas alturas do triângulo ABC que se intersectam em H e duas alturas do triângulo $A'B'C'$ que se intersectam em O . É notável o quanto podemos descobrir apenas a partir de uma inspeção desta figura.

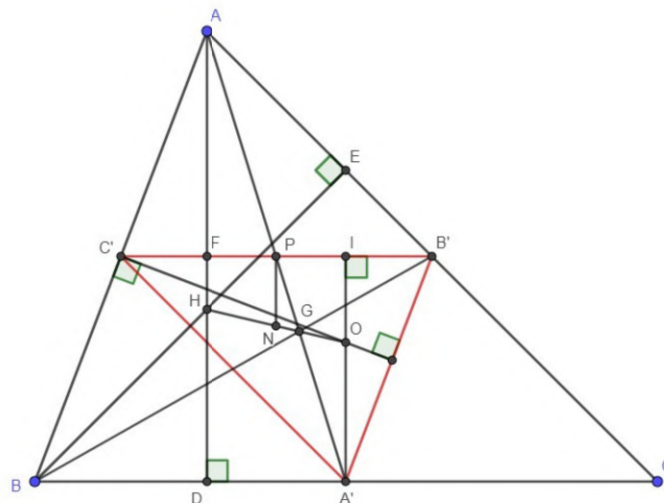


Figura 2.30: Triângulo Medial

Teorema 2.11. *O ortocentro, centróide e circuncentro de qualquer triângulo são colineares. O centróide divide a distância do ortocentro ao circuncentro na proporção de 2 : 1.*

Demonstração. Primeiramente, o triângulo $A'B'C'$ tem seus lados paralelos aos do triângulo ABC , então os dois triângulos são semelhantes. Em seguida, $\overline{C'B'} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, então a relação entre quaisquer dois segmentos de reta correspondentes (não apenas os lados correspondentes) será 1 : 2. De fato, os segmentos de reta $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ dividem o triângulo ABC em quatro triângulos congruentes. Em seguida, vemos que $AC'A'B'$ é um paralelogramo, de modo que AA' corta $B'C'$. Portanto, as medianas do triângulo $A'B'C'$ estão ao longo das medianas do triângulo ABC , ou seja, ambos os triângulos têm o mesmo centróide G . Aliás, o ponto médio P de $B'C'$ é também o ponto médio de AA' . Agora, as alturas do triângulo $A'B'C'$ que traçamos são bissetrizes perpendiculares dos lados AB e BC do triângulo ABC . Concluímos que O , o ortocentro do triângulo $A'B'C'$, é ao mesmo tempo o circuncentro do triângulo ABC . Como H é o ortocentro do triângulo ABC , enquanto O é o ortocentro do triângulo semelhante $A'B'C'$, $\overline{AH} = 2\overline{OA'}$. Do Teorema das medianas (Teorema 2.10), lembramos que $\overline{AG} = 2\overline{GA'}$. Finalmente, como AD e OA' são perpendiculares ao lado BC , elas são paralelas. Conseqüentemente

$$\widehat{HAG} = \widehat{OA'G}, HAG = OA'G \text{ e } \widehat{AGH} = \widehat{A'GO}.$$

Isso mostra que os pontos O , G , H são colineares e $\overline{HG} = 2\overline{GO}$. □

Definição 2.7. *A linha que passa pelo ortocentro, centróide e circuncentro é chamada de linha de Euler do triângulo.*

Vamos estudar mais de perto a Figura 2.30. Nós marcamos o ponto N pertencente a linha de Euler HO de tal maneira que o segmento PN seja perpendicular a $B'C'$. Os três segmentos AH , PN e $A'I$, todos perpendiculares a $B'C'$, são paralelos. Além disso, $\widehat{APF} = \widehat{A'PI}$, pois são ângulos opostos pelo vértice (veja em [4] na página 34). Assim, $\widehat{PAF} = \widehat{PA'I}$, pois $\widehat{AFP} = \widehat{A'IP} = 90^\circ$ e a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° (veja em [4] na página 89). Como $\overline{AP} = \overline{PA'}$, então os triângulos retângulos APF e $A'PI$ são congruentes pelo Caso *ALA*. Portanto, pelo Teorema de Tales, N é o ponto médio do segmento OH .

Construímos os nossos raciocínios com respeito ao lado $B'C'$ do triângulo $A'B'C'$. Se, em vez disso, aplicarmos o mesmo raciocínio a qualquer um dos outros lados, o segmento HO permanece fixo e é dividido pela bissetriz perpendicular do novo lado. Como HO tem apenas um ponto médio, podemos afirmar que as bissetrizes perpendiculares de todos os três lados do triângulo $A'B'C'$ passarão pelo ponto N . Em outras palavras, N deve ser o circuncentro do triângulo $A'B'C'$.

Definição 2.8. *Circunraio de um triângulo é o raio do círculo no qual o triângulo está inscrito.*

Observação 2.3. O circuncentro do triângulo medial é o ponto médio da linha de Euler. Além disso, desde que $A'B'C' \sim ABC$, o circunraio do triângulo medial é igual a metade do circunraio do triângulo original.

2.8 Triângulos Pedal

Definição 2.9. *Triângulo órtico é o triângulo formado pelos segmentos que ligam os pés das três alturas de um triângulo acutângulo.*

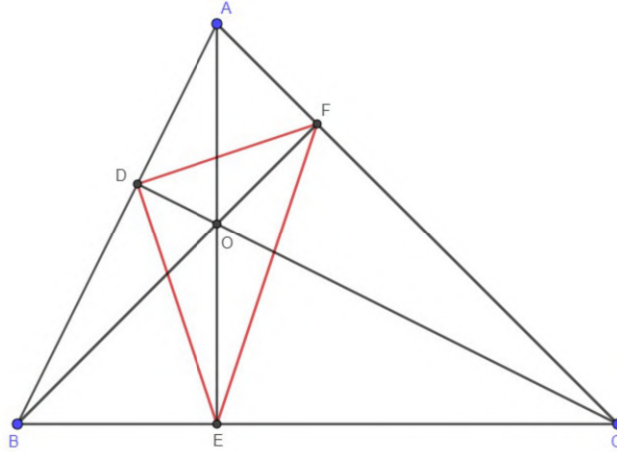


Figura 2.31: Triângulo Órtico

O triângulo órtico e o triângulo medial são casos particulares de um tipo mais geral de triângulo. Seja P um ponto qualquer dentro de um triângulo dado ABC , e tome as perpendiculares PA_1 , PB_1 , PC_1 em relação aos três lados BC , CA , AB , como na Figura 2.32. Os pés destas perpendiculares são os vértices de um triângulo $A_1B_1C_1$ que é chamado de *triângulo pedal* do triângulo ABC para o “ponto pedal” P . A condição de que P é um ponto dentro do triângulo ABC pode ser retirada, desde que P não pertença ao círculo no qual o triângulo ABC está inscrito (veja Reta de Simson no Apêndice). Claramente, o triângulo órtico ou o triângulo medial surge quando P é o ortocentro ou o circuncentro, respectivamente.

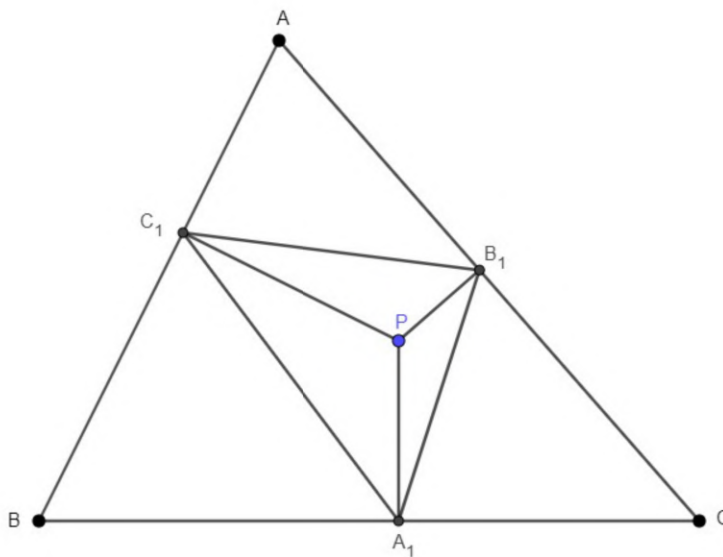


Figura 2.32: Triângulo Pedal

Teorema 2.12. *Se o ponto pedal está distante x, y, z dos vértices do triângulo ABC , então o triângulo pedal tem lados*

$$\frac{ax}{2R}, \frac{by}{2R}, \frac{cz}{2R}, \text{ em que } \overline{BC} = a, \overline{CA} = b \text{ e } \overline{AB} = c.$$

Quando $x = y = z = R$, P é o circuncentro.

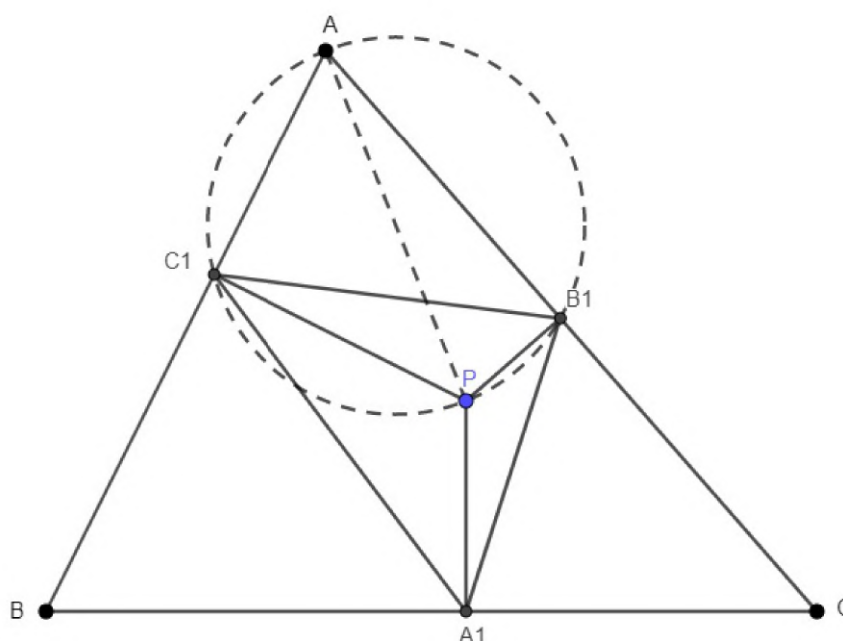


Figura 2.33: Triângulo Pedal

Demonstração. Vamos examinar a Figura 2.32 mais de perto. Os ângulos retos em B_1 e C_1 indicam que esses pontos estão no círculo de diâmetro AP , pois AB_1PC_1 é um quadrilátero cíclico ou inscritível (veja Proposição A.1 no Apêndice). Logo, P pertence ao círculo no qual o triângulo AB_1C_1 está inscrito. Aplicando a Lei dos senos (Teorema 2.7) a este triângulo e também ao próprio triângulo ABC , obtemos

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\text{sen } \widehat{A}} = \overline{AP} \text{ e } \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = 2R.$$

Daí,

$$\overline{B_1C_1} = a \cdot \frac{\overline{AP}}{2R}.$$

Similarmente,

$$\overline{C_1A_1} = b \cdot \frac{\overline{BP}}{2R} \text{ e } \overline{A_1B_1} = c \cdot \frac{\overline{CP}}{2R}.$$

□

Teorema 2.13. *O terceiro triângulo pedal é semelhante ao triângulo original.*

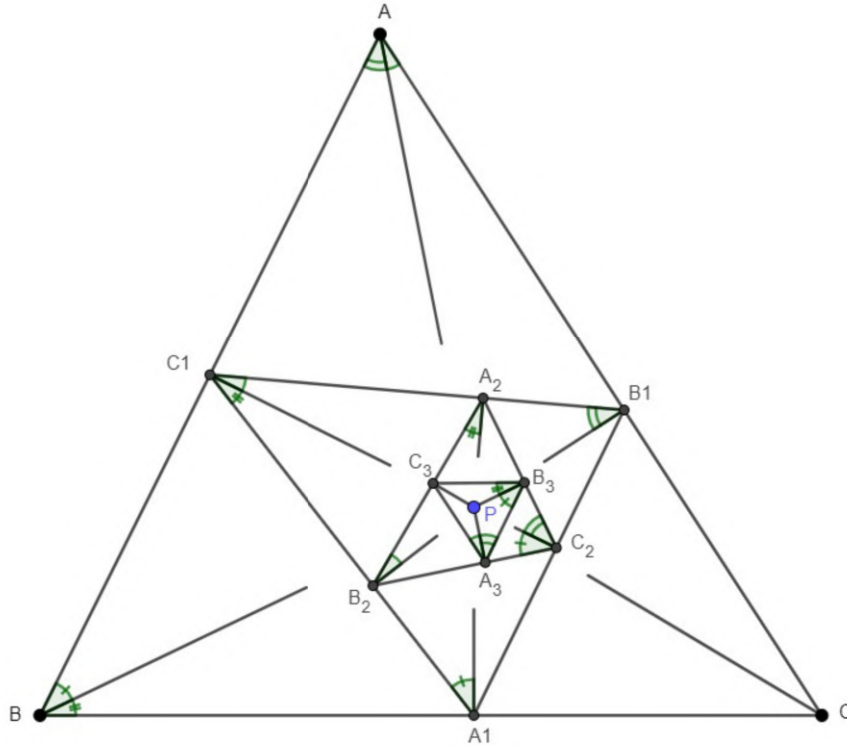


Figura 2.34: Terceiro Triângulo Pedal

Demonstração. A prova é surpreendentemente simples. Já que P pertence a cada círculo no qual cada um dos triângulos AB_1C_1 , $A_2B_1C_2$, $A_3B_3C_2$, $A_2B_2C_1$ e $A_3B_2C_3$ está inscrito, então

$$\widehat{C_1AP} = \widehat{C_1B_1P} = \widehat{A_2B_1P} = \widehat{A_2C_2P} = \widehat{B_3C_2P} = \widehat{B_3A_3P}$$

e

$$\widehat{PAB_1} = \widehat{PC_1A} = \widehat{PC_1A_2} = \widehat{PB_2A_2} = \widehat{PB_2A_2} = \widehat{PB_2C_3} = \widehat{PA_3C_3}$$

Logo,

$$\widehat{A_3} = \widehat{A}$$

Similarmente,

$$\widehat{B_3} = \widehat{B}$$

Portanto, o triângulo $A_3B_3C_3$ é semelhante ao triângulo original ABC , conforme queríamos demonstrar. \square

3 Transformações

A rotação, dilatação e a meia-volta são três exemplos de uma *transformação*, isto é, uma correspondência biunívoca do plano inteiro sobre si mesmo, de modo que cada ponto P tenha uma única imagem P' . Essa ideia de um “mapeamento” aparece com destaque na maioria dos ramos da matemática; por exemplo, quando escrevemos $y = f(x)$, estamos mapeando o conjunto de valores de x no conjunto de valores correspondentes de y .

A geometria euclidiana é apenas uma das muitas geometrias, cada uma com seus próprios conceitos primitivos, axiomas e teoremas. Felix Klein, em seu discurso inaugural em Erlangen, em 1872, propôs a classificação de geometrias de acordo com os grupos de transformações que podem ser aplicados sem mudar esses conceitos, axiomas e teoremas. Em particular, a geometria euclidiana é caracterizada pelo grupo de semelhanças; estas são transformações de preservação de ângulo. Um caso especial importante de uma semelhança é uma isometria. Esta é uma transformação que preserva o comprimento, como uma rotação ou, em particular, uma meia-volta. As isometrias estão relacionadas com a noção de congruência: duas figuras são congruentes se, e somente se, uma pode ser transformada na outra por uma isometria.

Mais detalhes sobre as definições das transformações desenvolvidas neste capítulo encontram-se no tópico Transformações no Apêndice.

3.1 Translação

Além da identidade, que deixa todos os pontos exatamente onde eles estavam antes, a transformação mais familiar é a translação, que preserva a distância entre dois pontos e a direção da linha através deles.

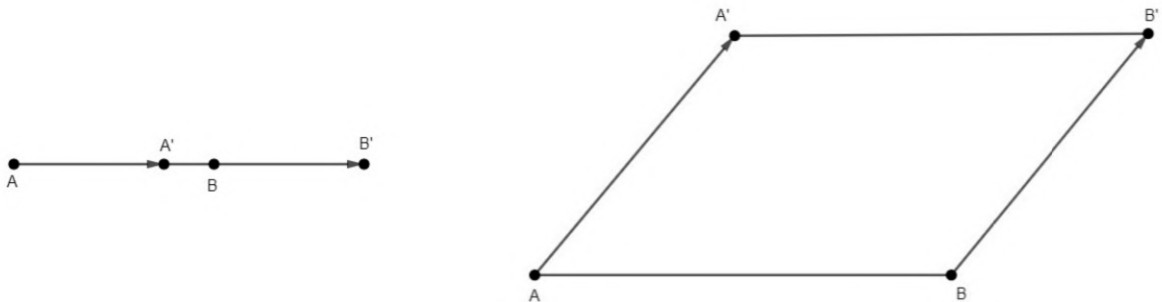


Figura 3.1: Translação

Se $A'B'$ é a imagem transladada de um segmento de reta AB , então A, B, A', B' estão em uma reta ou $AA'B'B$ é um paralelogramo, como na Figura 3.1. (No primeiro caso, naturalmente falamos de um paralelogramo degenerado $AA'B'B$.) Assim, a translação é determinada pelo segmento dirigido AA' (vamos indicá-la por $\overrightarrow{AA'}$), ou igualmente bem determinado por infinitamente muitos outros segmentos, tais como BB' , tendo a mesma distância e direção (neste caso $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$). Em particular, a identidade pode ser considerada como uma translação sem distância.

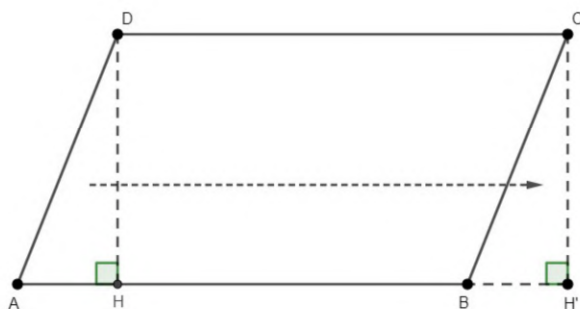


Figura 3.2: Translação

O fato de uma translação preservar a forma e o tamanho de qualquer figura é usado nas provas de vários teoremas da área. Por exemplo (ver Figura 3.2), ao deduzir a fórmula usual para a área de um paralelogramo $ABCD$ com um ângulo agudo em A , cortamos um triângulo retângulo AHD e o colocamos novamente após transladá-lo para a posição $BH'C$, obtendo assim um retângulo $HH'CD$.

A Figura 3.3 ilustra o problema de inscrever, em um determinado círculo, um retângulo com dois lados opostos iguais e paralelos a um dado segmento de linha a . Isso pode ser resolvido transladando o círculo ao longo de um dos dois vetores iguais e opostos representados por a . Se as posições antiga e nova do círculo se encontram em B e C , estes são dois vértices do retângulo desejado $ABCD$, cujos lados AB e DC são iguais e paralelos a a .

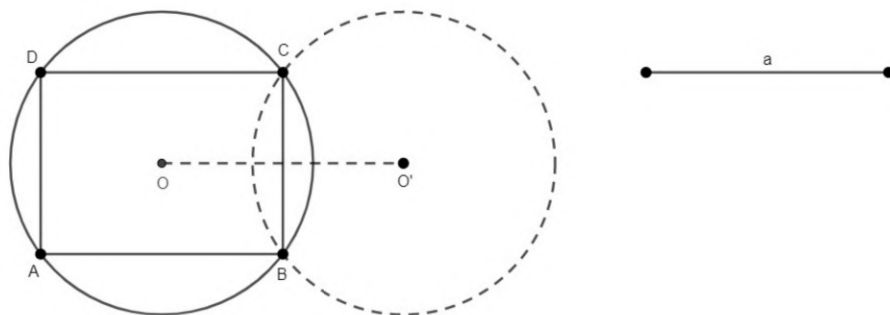


Figura 3.3: Translação

3.2 Rotação

Outro tipo de transformação que preserva a distância é a rotação. Aqui o plano inteiro é girado sobre algum ponto através de um ângulo dado. Assim, o tamanho e a forma de qualquer figura são mantidos invariantes, mas seus pontos se movem ao longo de arcos de círculos concêntricos. O centro (que pode ou não “pertencer” à figura sendo girada) é o único ponto que permanece fixo.

Como exemplo do uso de uma rotação, consideremos o triângulo ABC (Figura 3.4) com triângulos equiláteros BPC , CQA e ARB erigidos (externamente) nos três lados. Depois de desenhar os segmentos BQ e CR , que se encontram em F , observamos que uma rotação de 60° sobre A leva o triângulo ARC para o triângulo ABQ . Daí, $\widehat{RFB} = 60^\circ$ e $\overline{RC} = \overline{BQ}$. Raciocínio semelhante mostra que $\overline{PA} = \overline{CR}$. Portanto,

$$\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{CR}.$$

Além disso, já que

$$\widehat{RFB} = 60^\circ = \widehat{RAB} \text{ e } \widehat{CFQ} = 60^\circ = \widehat{CAQ},$$

os quadriláteros $ARBF$ e $CQAF$ são cíclicos ou inscritíveis (veja a Proposição A.1 no Apêndice); e como $\widehat{BFC} = 120^\circ$ enquanto $\widehat{CPB} = 60^\circ$, o $BPCF$ é um terceiro quadrilátero cíclico. Portanto, as circunferências dos três triângulos BPC , CQA , ARB passam pelo ponto F , chamado de *ponto de Fermat do triângulo ABC* . Tendo definido como ponto de interseção de BQ e CR , agora vemos que também deve estar em AP .

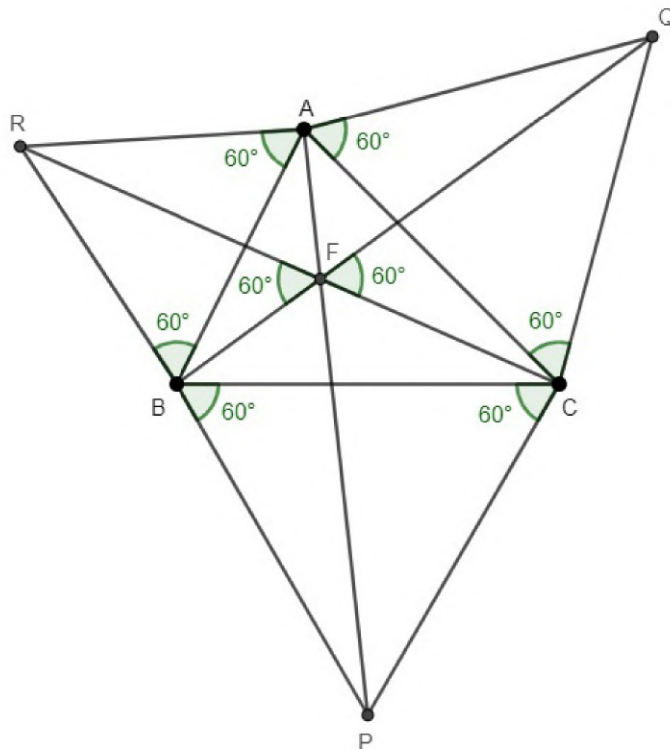


Figura 3.4: Rotação

Na prova de Euclides do Teorema de Pitágoras, os quadrados $CBIG$, $ACKJ$ e $BADE$ são erigidos externamente nos lados do triângulo retângulo dado ABC e o último quadrado é dividido em duas partes por meio da altura CH , como na Figura 3.5. Aqui O_1, O_2, O_3 são os centros dos três quadrados. Embora existam formas mais fáceis do que as de Euclides para provar o teorema de Pitágoras, sua figura sugere muitos resultados inesperados.

Depois de desenhar os segmentos AI, BJ, CD e CE , observamos que uma rotação de 90° em torno de A levará o triângulo ADC para o triângulo ABJ . Portanto, $\overline{BJ} = \overline{DC}$ e BJ é perpendicular a CD . Da mesma forma, AI e CE são congruentes e perpendiculares.

Os triângulos semelhantes $BCX \sim BKJ$ e $CAY \sim GAI$ dão

$$\frac{\overline{CX}}{b} = \frac{\overline{CX}}{\overline{KJ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BK}} = \frac{a}{a+b}, \quad \frac{\overline{CY}}{a} = \frac{\overline{CY}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GA}} = \frac{b}{a+b},$$

daí

$$\overline{CX} = \frac{ab}{a+b} = \overline{CY},$$

onde $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$.

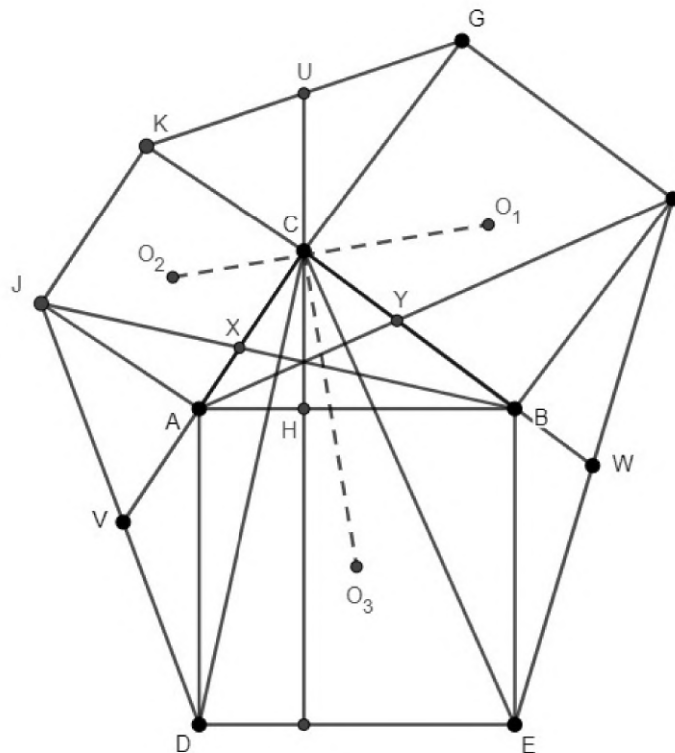


Figura 3.5: Rotação

3.3 Meia-volta

Um tipo de rotação que compartilha com translações a propriedade de transformar cada linha em uma linha paralela. Este tipo de transformação é a *meia-volta* ou a *rotação de 180°*, que transforma cada raio em um raio de direção oposta. Claramente, uma meia-volta é completamente determinada pelo seu centro. Como uma translação transforma cada raio em um raio paralelo, o efeito de duas meias-voltas aplicado sucessivamente é o mesmo que o efeito de uma translação: em suma, a composição de duas meias-voltas é uma translação (que se reduz à identidade se as duas meias-voltas tiverem o mesmo centro). Mais precisamente, se os pontos A, B e C estão uniformemente espaçados ao longo de uma linha, de modo que B é o ponto médio de CA , a meia-volta de A deixa A invariante, e a meia-volta de B leva A para C ; assim, a composição dessas duas meias-voltas é a translação \overrightarrow{AC} , e é a mesma com a composição das meias-voltas sobre B e C .

A Figura 3.6(a) ilustra a composição das meias-voltas em torno de O_1 e O_2 . O segmento de reta AB é transformado primeiro em $A'B'$ (dirigido de forma oposta) e depois em $A''B''$; assim, a composição é a translação $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''}$.

Muitos teoremas antigos e familiares podem ser provados simplesmente quando meias-voltas são usadas. Na Figura 3.6(b), O é o ponto médio comum de dois segmentos AC e BD . A meia-volta sobre O , levando AB em CD , mostra que $ABCD$ é um paralelogramo. Novamente, na Figura 3.6(c), M e N sendo os pontos médios de AB e AC , vemos que a composição das meias-voltas sobre esses dois pontos é a translação $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{BC}$, onde MN é paralelo a BC .

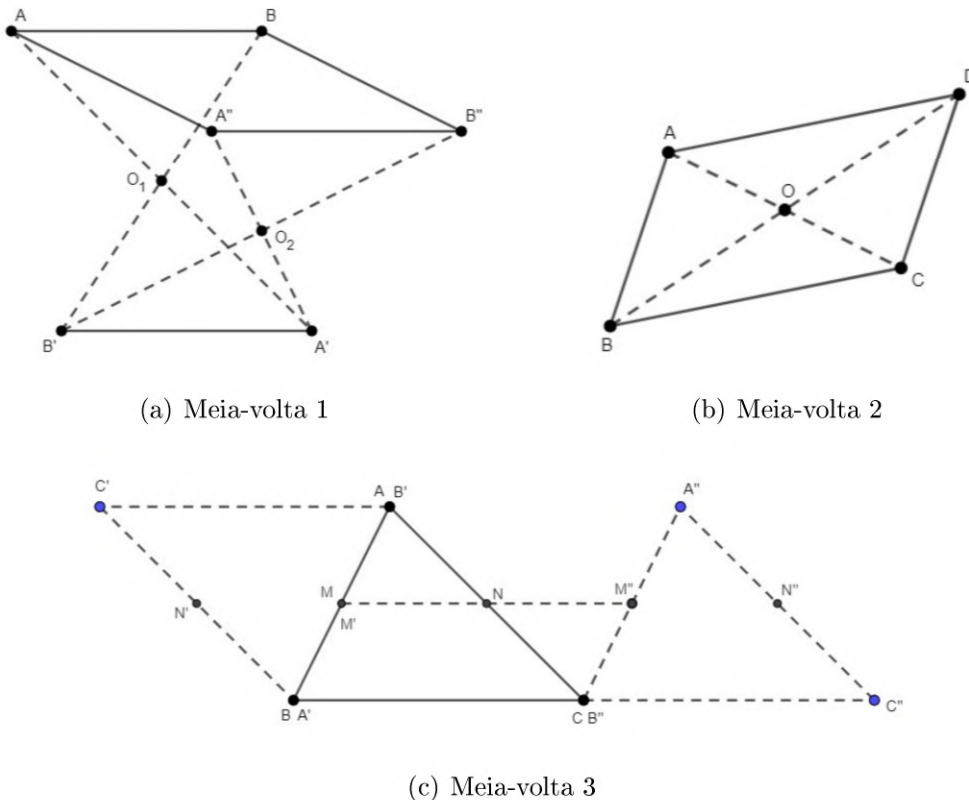


Figura 3.6: Meia-volta

3.4 Reflexão

Um terceiro tipo de transformação que preserva a distância é a *reflexão* em uma reta \overleftrightarrow{HK} , chamada de *espelho*. Cada ponto no espelho (como H ou K) é invariante, isto é, seu próprio reflexo. A imagem refletida de um ponto A que não pertence ao espelho é o ponto A' que pertence ao segmento perpendicular ao espelho, de tal forma que AA' é dividido na metade pelo espelho. Na Figura 3.7, o segmento $A'B'$ é a imagem do segmento AB . É uma questão simples mostrar que, se C é um ponto qualquer no segmento AB , sua imagem C' deve estar no segmento $A'B'$. O trapézio $AA'B'B$ tem diagonais AB' e $A'B$ que são imagens um do outro; seu ponto comum X , sendo sua própria imagem, está no espelho \overleftrightarrow{HK} . As propriedades dos ângulos verticais nos permitem concluir $\widehat{AXH} = \widehat{B'XK}$, enquanto a congruência dos triângulos BXK e $B'XK$ nos diz que $\widehat{B'XK} = \widehat{KXB}$. Conseqüentemente

$$\widehat{AXH} = \widehat{KXB}.$$

Segue-se que a trajetória mais curta de um ponto arbitrário A para um dado ponto B (do mesmo lado do espelho) “tocando” no espelho, é a linha AXB . De fato, como vemos na Figura 3.8, se qualquer outro ponto Y fosse levado no espelho, a trajetória $\overline{AY} + \overline{YB} = \overline{A'Y} + \overline{YB}$ seria maior que o segmento reto $\overline{A'B} = \overline{A'X} + \overline{XB} = \overline{AX} + \overline{XB}$.

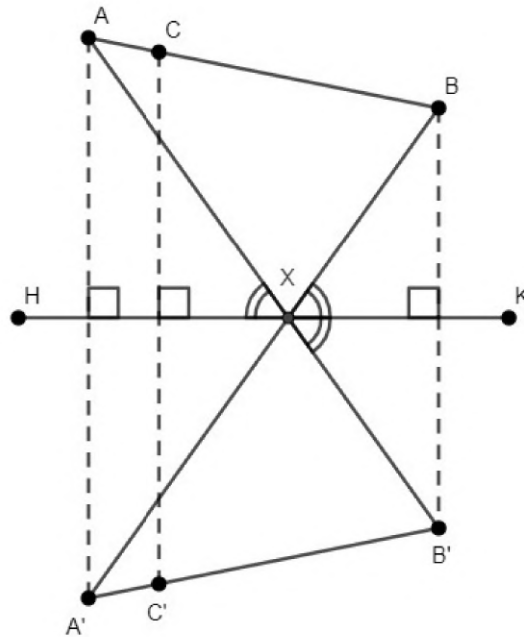


Figura 3.7: Reflexão

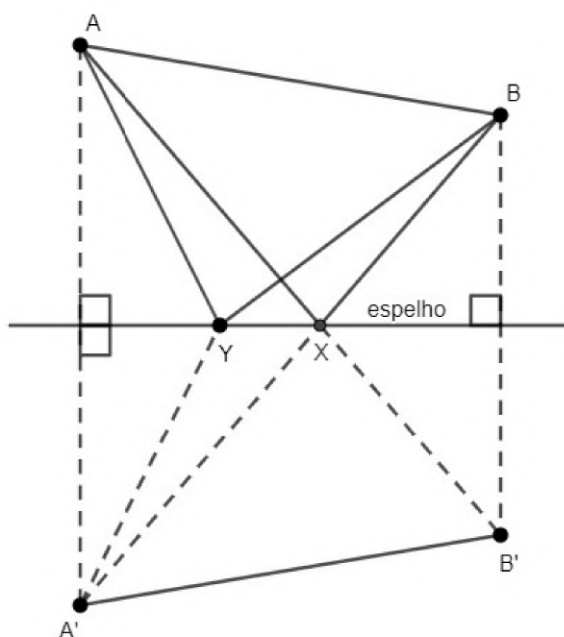


Figura 3.8: Reflexão

Isto, aliás, nos mostra como resolver geometricamente um famoso problema físico sem recorrer ao cálculo. Os físicos nos dizem que um raio de luz viajando de um ponto A para um espelho e daí para outro ponto B , percorre um caminho que minimiza o tempo do trajeto. Em um meio homogêneo, esse tempo é proporcional à distância percorrida. Assim, um raio de luz que vai de A para B através de um espelho encontrando o espelho em um ângulo α , deixa-o fazendo um ângulo igual. De fato, isto é uma consequência de exigir um caminho de comprimento mínimo. Os físicos geralmente medem ângulos a partir do normal, uma linha perpendicular ao espelho, em vez do próprio espelho. Na Figura 3.9, \hat{i} é chamado de ângulo de incidência, e \hat{r} é chamado de ângulo de reflexão.

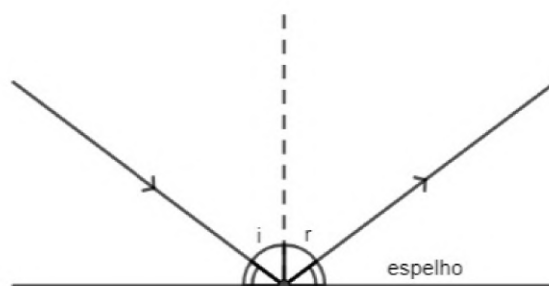


Figura 3.9: Reflexão

3.5 O Problema de Fagnano

As propriedades da imagem espelhada podem ser usadas para deduzir muitos teoremas interessantes de maneira simples e surpreendente. Usaremos essas propriedades para resolver o problema de encontrar o triângulo de perímetro mínimo inscrito em um dado triângulo de ângulos agudos. Este problema é conhecido como o *Problema de Fagnano*.

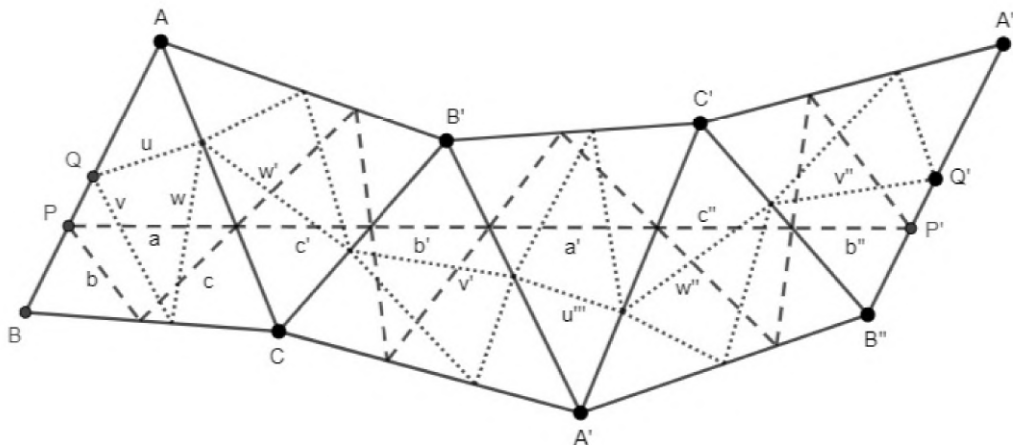


Figura 3.10: Problema de Fagnano

Para uma solução (ver Figura 3.10), começamos com o triângulo arbitrário de ângulos agudos ABC , no qual inscrevemos dois triângulos: o triângulo órtico (linhas tracejadas) e qualquer outro triângulo (linhas pontilhadas). Vamos refletir o triângulo ABC , e seus pontos interiores, em seus lados AC , CB , BA , AC , CB em sucessão. Agora nós inspecionamos o diagrama para ver o que esta sequência continuada de reflexões fez em nossos triângulos.

Desconsiderando os dois pontos marcados C e C' , observamos uma linha poligonal $BAB'A'B''A''$, tendo ângulos (medidos no sentido anti-horário) $2A$ no primeiro ponto A (superior esquerdo), $2B$ no ponto B' (no meio), $-2A$ no ponto A' (na parte inferior) e $-2B$ no ponto B'' (à direita). A soma zero desses quatro ângulos indica que o lado final $B''A''$ é congruente pela translação para o lado original BA , e que os pares de pontos correspondentes nesses dois lados formarão um paralelogramo como o $PP'Q'Q$.

Lembramos agora que as alturas do triângulo ABC dividem os ângulos do seu triângulo órtico. Segue-se que, após as reflexões indicadas, os lados do triângulo órtico estarão no segmento PP' , mostrada na Figura 3.10. Analogamente, os lados de qualquer outro triângulo, como o triângulo pontilhado na figura, formará uma linha poligonal de Q (no original AB) até Q' (no final $A''B''$). Como PQ é congruente e paralelo a $P'Q'$, o segmento QQ' é congruente a PP' , que é o dobro do perímetro do triângulo órtico. Isso é claramente mais curto que a linha poligonal de Q para Q' , que é o dobro do perímetro do outro triângulo. Portanto, o triângulo de perímetro mínimo é o triângulo órtico.

3.6 O problema dos três recipientes

Uma aplicação curiosa da reflexão é a solução de problemas que requerem a divisão de um líquido em porções determinadas com um tipo de objeto inadequado de medição. Esta aplicação requer uma conta preliminar de coordenadas trilineares, que agora apresentamos.

Como um papel quadriculado comum, usado para traçar pontos com coordenadas cartesianas dadas, pode-se construir um papel “tri-angulado”, governado com três sistemas de linhas paralelas dividindo o plano em uma tesselação de pequenos triângulos equiláteros. Esse papel é conveniente para traçar pontos que possuem coordenadas trilineares em relação a um triângulo equilátero (grande). No plano de um triângulo ABC , com o lado a e altura h , as coordenadas trilineares de um ponto P são definidas como sendo as distâncias x, y, z de P dos três lados BC, CA, AB , consideradas positivas quando P está dentro do triângulo. Nós chamamos P o ponto (x, y, z) . Como

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = (PCB) + (PCA) + (PAB) = (ABC) = \frac{1}{2}ah,$$

então

$$x + y + z = h.$$

Essas coordenadas são ideais para representar qualquer situação em que três quantidades variáveis tenham uma soma constante. Quando uma das quantidades permanece fixa enquanto as outras duas variam (com uma soma constante), o ponto (x, y, z) se move ao longo de uma linha paralela a um lado do triângulo. Em particular, os próprios lados têm as equações

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

e os vértices A, B, C têm as coordenadas $(h, 0, 0), (0, h, 0), (0, 0, h)$.

Uma dessas situações surge quando h litros de um líquido são distribuídos em três recipientes, de modo que haja x litros no primeiro, y no segundo e z no terceiro. A operação de derramar líquido gradualmente do segundo recipiente até o terceiro é representado por um movimento do ponto (x, y, z) ao longo de uma linha $x = \text{constante}$ na direção em que y diminui enquanto z (correspondentemente) aumenta. Se cada recipiente puder conter h litros, cada coordenada pode pegar qualquer valor de 0 a h , e nós temos o problema (trivial) $[h; h, h, h]$, em que o domínio de operações é toda a região triangular

$$0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq h, 0 \leq z \leq h.$$

De muito maior interesse é o problema $[h; a, b, c]$, onde $h \geq a > b > c$. Agora os três recipientes dados têm capacidades a, b, c , e o problema é medir uma quantidade determinada de líquido derramando repetidamente de um recipiente em outro, seja esvaziando o primeiro ou enchendo o segundo (ou possivelmente fazendo as duas coisas de uma vez). O domínio de operação agora está restrito à região

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c,$$

que pode ser um hexágono (regular ou irregular) delimitado pelas seis linhas

$$x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c,$$

mas pode em circunstâncias especiais reduzir a um pentágono, trapezóide, paralelogramo ou (como já vimos) o triângulo equilátero todo. Por exemplo, a Figura 3.11 ilustra o problema [8; 7, 6, 3] em que 8 litros de líquido são distribuídos de uma determinada maneira em recipientes de capacidades 7, 6, 3, e queremos medir (digamos) 4 litros. Agora o domínio de operação é a região hexagonal

$$0 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq 6, 0 \leq z \leq 3$$

que, sendo delimitada pelas seis linhas

$$x = 7, z = 0, y = 6, x = 0, z = 3, y = 0,$$

tem os vértices

$$(7, 1, 0), (2, 6, 0), (0, 6, 2), (0, 5, 3), (5, 0, 3), (7, 0, 1)$$

ou, em uma notação abreviada, 710, 260, 062, 053, 503, 701.

A Figura 3.11 chama a atenção para o ponto 332 que representa um estado típico: 3 litros no primeiro recipiente, o mesmo no segundo e 2 no terceiro. As linhas tracejadas radiando este ponto representam as seis operações possíveis de vazamento. O caminho de 332 para 530 representa o ato de esvaziar o último recipiente no primeiro; o caminho oposto de 332 a 233 representa o ato de encher o terceiro recipiente do primeiro; e o caminho de 332 para 062 representa o ato de esvaziar o primeiro recipiente no segundo, o qual é preenchido.

As linhas tracejadas na Figura 3.11 mostram uma das várias maneiras de passar de 332 para 440 e, assim, dividir os 8 litros em duas partes iguais. Todo o caminho é uma linha poligonal, que prossegue sempre ao longo de um direção paralela a um lado do triângulo de referência e dobra somente quando atinge um lado ou vértice do hexágono que limita o domínio de operação. Continuando esse caminho, pelas mesmas regras, além de 440, chegaríamos a todos os pontos com coordenadas integrais na fronteira do domínio; segue-se que, no [8; 7,6,3] problema, qualquer número inteiro de litros (menos de 8) pode ser medido.

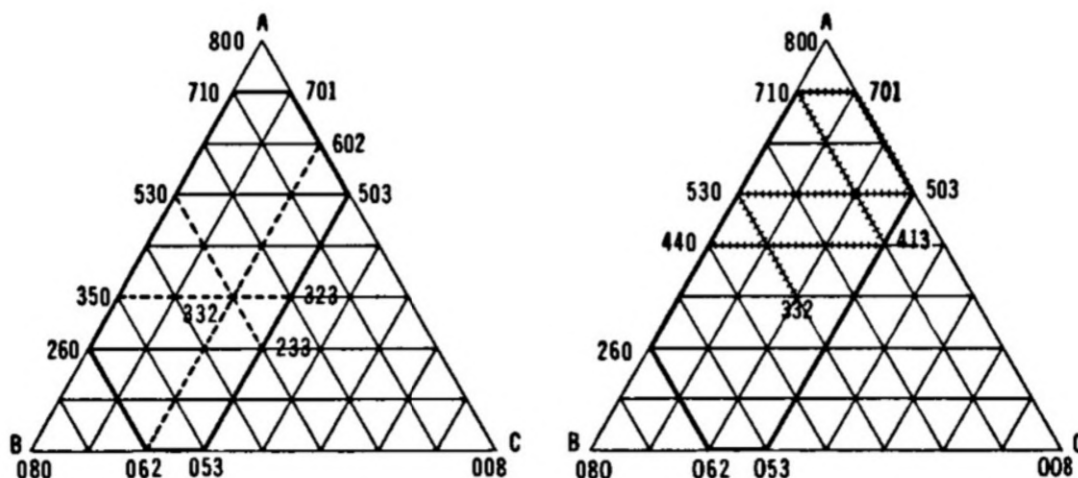


Figura 3.11: Problema dos 3 recipientes

A Figura 3.12 ilustra o problema $[10; 8, 7, 6]$, em que 10 litros de líquido devem ser divididos por meio de recipientes contendo 8, 7 e 6 litros, respectivamente. Agora podemos facilmente medir 1 litro, ou 2 ou 3 ou 4. Mas nunca podemos alcançar 5 (a menos que um dos recipientes seja conhecido por conter inicialmente 5), porque os três pontos 055, 505, 550 formam um caminho triangular que roda e gira como um círculo vicioso e não pode ser inserido de qualquer outro caminho. Esse tipo de fenômeno surge em qualquer problema $[h; a, b, c]$ com

$$h = 2d \geq a > b > c > d.$$

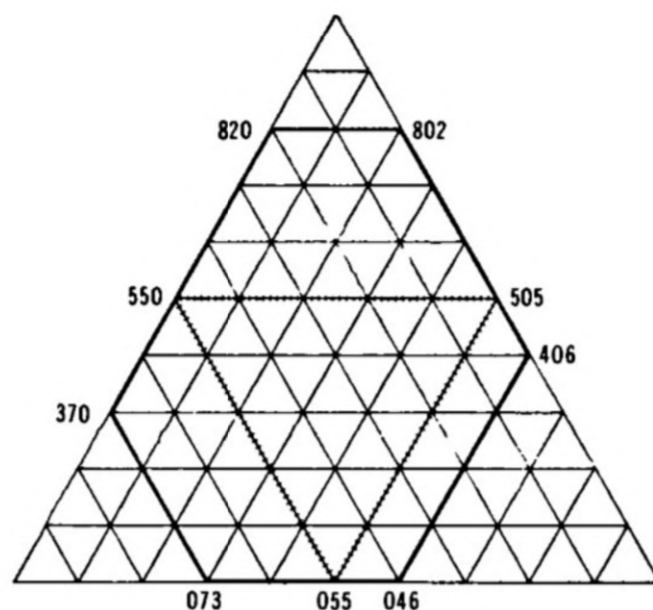


Figura 3.12: Problema dos 3 recipientes

Um tipo ligeiramente diferente de anomalia ocorre no problema $[10; 8, 6, 4]$ (Figura 3.13), em que os caminhos que visitam 550 formam um padrão de pequenos triângulos equiláteros e hexágonos regulares. Isso ilustra o fato de que um número ímpar de litros nunca pode ser medido com recipientes cujas capacidades são todas pares. Tais problemas podem ser esperados para qualquer problema $[h; a, b, c]$ em que os números a, b, c têm um divisor comum maior que 1.

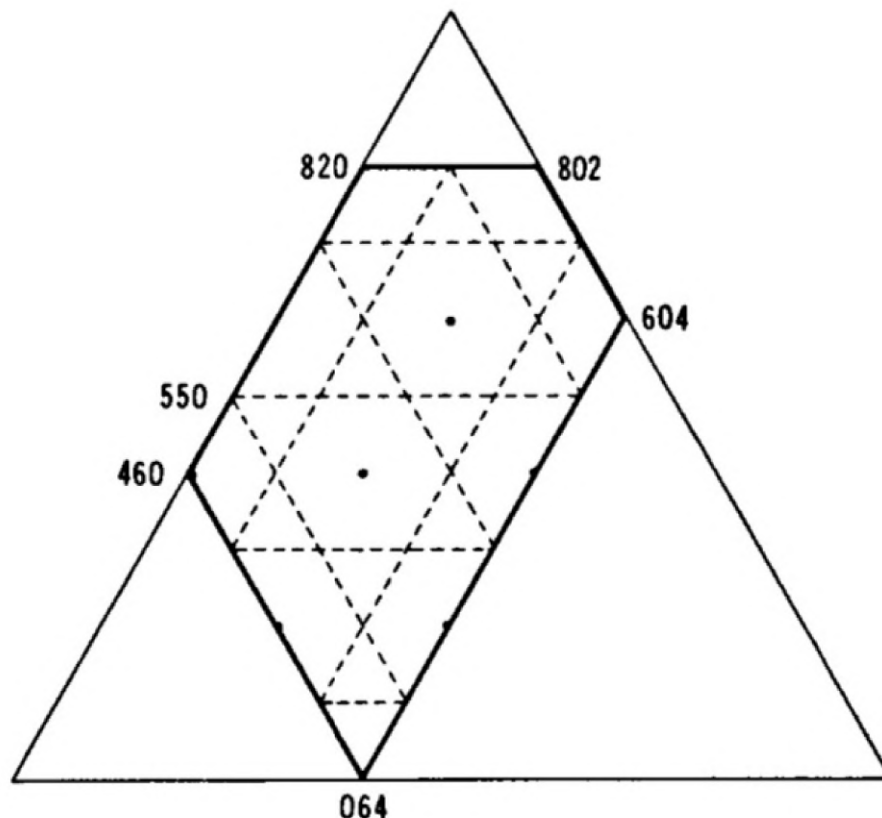


Figura 3.13: Problema dos 3 recipientes

Os problemas mais famosos $[h; a, b, c]$ são aqueles em que

$$h = a = 2d = b + c,$$

para que o domínio de operação seja limitado pelo paralelogramo cujos vértices são $a00, cb0, 0bc, b0c$. A Figura 3.14 mostra as soluções de sete e oito passos do problema $[8; 8, 5, 3]$, que pode ser expresso da seguinte forma: Dois homens têm um recipiente cheio com 8 litros de algum líquido e dois recipientes vazios com capacidades de 5 litros e 3 litros. Eles desejam dividir os oito litros de líquido igualmente.

O primeiro movimento deve ser o preenchimento do recipiente de 5 litros, como na Figura 3.14, ou o recipiente de 3 litros, como na Figura 3.14. Daí em diante, sempre que o caminho alcança uma das quatro linhas $y = 0, y = 5, z = 0, z = 3$, que são os lados do nosso paralelogramo (o domínio de operação), consideramos essa linha como um espelho. Em outras palavras, seguimos o caminho de uma bola de bilhar que é batida de modo a começar ao longo de uma borda de uma mesa com essa forma um tanto incomum. (A regra das reflexões sucessivas é justificada pelo fato de que cada pedaço da linha poligonal, sendo paralelo a um lado do triângulo de referência, representa o ato de derramar líquido de um recipiente para outro enquanto o terceiro permanece intacto). Assim, obtemos a solução de sete etapas

$$800, 350, 323, 620, 602, 152, 143, 440$$

e a solução de oito etapas

$$800, 503, 530, 233, 251, 701, 710, 413, 440.$$

Claramente, tal problema (com $a = b + c$) pode ser resolvido sempre que os inteiros b e c forem coprimos, isto é, não tiverem um divisor comum maior que 1.

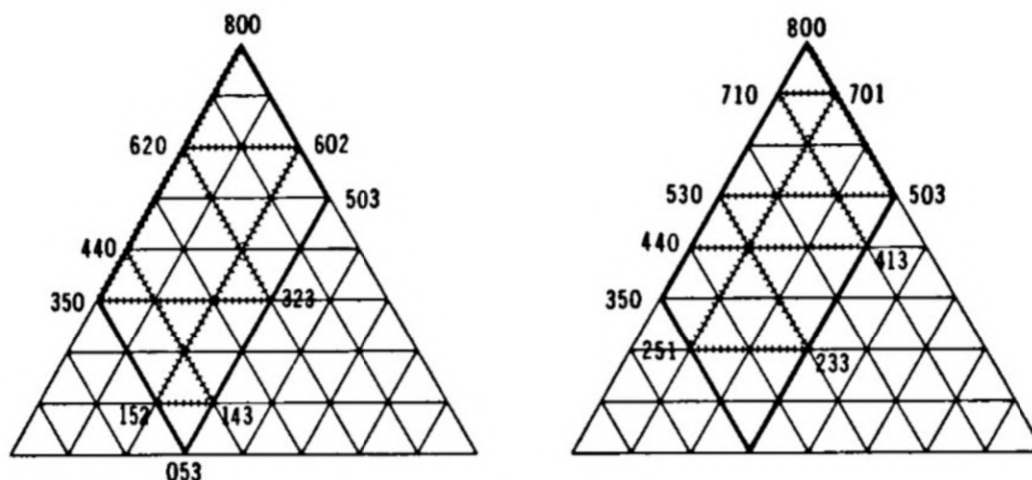


Figura 3.14: Problema dos 3 recipientes

3.7 Dilatação

As transformações apresentadas até agora têm uma característica comum: elas transformam cada figura em uma figura congruente. Todas as transformações que possuem essa propriedade de preservação de distância são chamadas de transformações de congruência ou *isometrias*.

É possível, no entanto, fazer bom uso de uma transformação que muda cada figura em uma figura semelhante. Tal semelhança preserva ângulos, embora possa alterar as distâncias. No entanto, todas as distâncias são aumentadas (ou diminuídas) na mesma razão, denominada *razão de ampliação*. Assim, qualquer segmento de reta AB é transformado em um segmento $A'B'$ cujo comprimento é dado por

$$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}.$$

A razão k pode ser maior que, igual a ou menor que 1, embora nos dois últimos casos a palavra “ampliação” seja menos apropriada. As semelhanças incluem, como casos especiais, isometrias, para as quais $k = 1$.

Essas observações podem ser feitas com mais precisão, definindo uma semelhança como uma transformação que preserva as proporções de distâncias. Por isso, implica que preserva a colinearidade e as medidas dos ângulos.

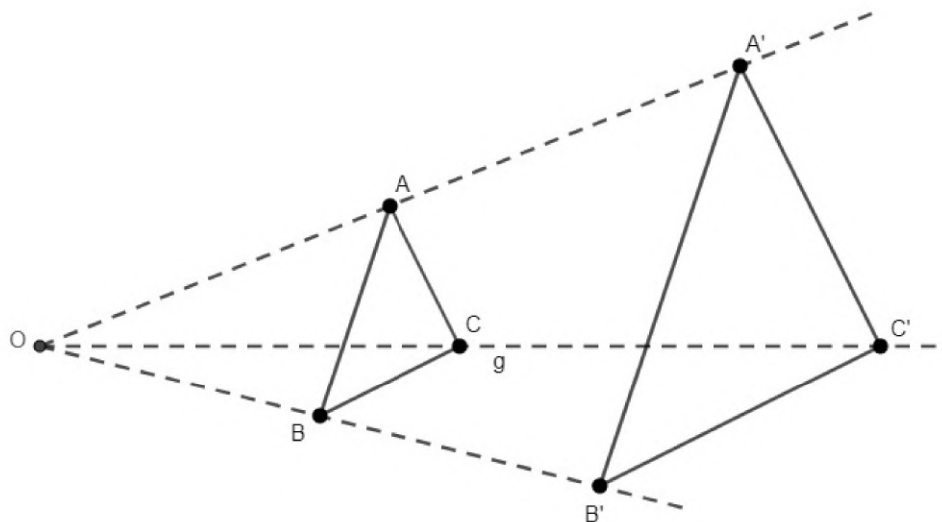


Figura 3.15: Dilatação

O tipo mais simples de semelhança é uma dilatação, que transforma cada segmento em um segmento paralelo. Qualquer dilatação que não seja meramente uma translação é chamada de *dilatação central*, porque todas as retas que unem os pontos correspondentes da figura e sua imagem são concorrentes. Para ver por que isso acontece, examine as Figuras 3.15 e Figura 3.16, nas quais os segmentos correspondentes AB e $A'B'$ (situados em retas paralelas) satisfazem a equação vetorial

$$\overrightarrow{A'B'} = \pm \overrightarrow{AB}.$$

Para qualquer ponto C que forme um triângulo com A e B , a imagem C' é onde a reta através de A' paralela a AC encontra a reta através de B' paralela a BC . Se a dilatação não for uma translação, as retas AA' e BB' não são paralelas, mas se encontram em um ponto O , tal que

$$\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA} \text{ e } \overrightarrow{OB'} = k \cdot \overrightarrow{OB},$$

como na Figura 3.15, ou

$$\overrightarrow{OA'} = -k \cdot \overrightarrow{OA} \text{ e } \overrightarrow{OB'} = -k \cdot \overrightarrow{OB},$$

como na Figura 3.16. Lembrando que retas paralelas cortam transversais em segmentos proporcionais (Teorema de Tales), deduzimos facilmente que C' está em \overrightarrow{OC} ; de fato

$$\overrightarrow{OC'} = \pm k \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Variando a Figura 3.15 ao fazer O recuar bem para a esquerda, vemos como uma translação surge como a forma limite de uma dilatação central $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ quando k tende para 1. Ainda mais facilmente, podemos mudar Figura 3.16 de modo a tornar-se O o ponto médio de AA' ; Assim, a dilatação central $\overrightarrow{A'B'} = -k \cdot \overrightarrow{AB}$ inclui, como um caso especial, a meia-volta

$$\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$$

para o qual o $ABA'B'$ é um paralelogramo com o centro O .

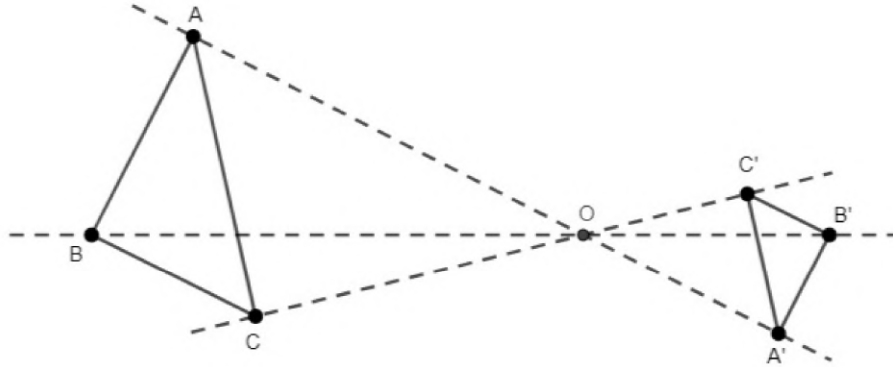


Figura 3.16: Dilatação

3.8 Semelhança espiral

Se uma figura é primeiro dilatada e depois transladada, a figura final e a figura original ainda têm linhas correspondentes paralelas, de modo que o resultado é simplesmente uma dilatação. Mais geralmente, e pela mesma razão, a composição de quaisquer duas dilatações (isto é, o efeito de realizar primeiro uma, depois a outra dilatação) é uma dilatação. Por outro lado, se uma figura é primeiro dilatada e depois rotacionada, as linhas correspondentes não são mais paralelas. Assim, a composição de uma dilatação e de uma rotação (outra que não a identidade ou meia-volta) não é uma dilatação, embora ainda seja uma *semelhança direta*, preservando ângulos tanto em magnitude quanto em sinal.

A composição de uma dilatação central e uma rotação em torno do mesmo centro é chamada de “rotação dilatadora” ou *semelhança espiral*. Essa transformação pouco conhecida pode ser usada na solução de muitos problemas.

Se, como na Figura 3.17, uma semelhança espiral com o centro O leva AB para $A'B'$, então os triângulos OAB e $OA'B'$ são diretamente semelhantes, e

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}.$$

Além disso, como no caso de uma dilatação simples, a razão de ampliação é

$$k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Como qualquer semelhança espiral é completamente determinada pelo seu centro O , razão k e ângulo de rotação θ , vamos denotá-la pelo símbolo

$$O(k, \theta).$$

(Como de costume, uma rotação no sentido anti-horário será positiva, uma rotação no sentido horário negativa.) Em particular, $O(k, 0^\circ)$ e $O(k, 180^\circ)$ são dilatações dos tipos ilustrados nas Figuras 3.15 e 3.16, respectivamente, e $O(1, \theta)$ é uma rotação.

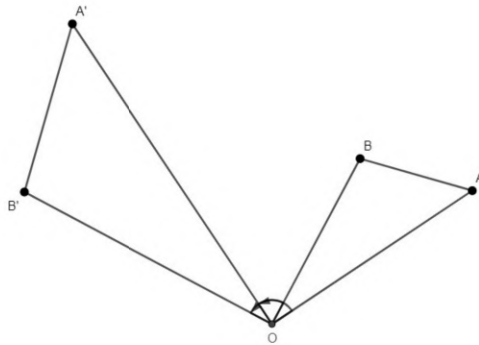


Figura 3.17: Espiral

Como um exemplo do uso de semelhanças espirais, vamos provar

Teorema 3.1. *Se quadrados, com os centros O_1, O_2, O_3 , são erigidos externamente nos lados BC, CA, AB do triângulo ABC , então os segmentos O_1O_2 e CO_3 são congruentes e perpendiculares.*

Demonstração. Na notação da Figura 3.18, a semelhança em espiral $A(\sqrt{2}, 45^\circ)$ transformará o triângulo CAO_3 no triângulo KAB , e a semelhança em espiral $C(\sqrt{2}, -45^\circ)$ transformará o triângulo O_1CO_2 no triângulo BCK . Como as transformações têm o lado BK em comum, decorrente de O_3C e de O_1O_2 , respectivamente, e como a razão de ampliação é a mesma em ambas as transformações, então $\overline{O_3C} = \overline{O_1O_2}$. Além disso, como o ângulo entre as transformadas de O_3C e O_1O_2 , por semelhanças que envolvem rotações de 45° e -45° , é zero, então esses segmentos são perpendiculares. A prova está concluída. (Observe que os três segmentos AO_1, BO_2, CO_3 , sendo as alturas do triângulo $O_1O_2O_3$, são concorrentes.)

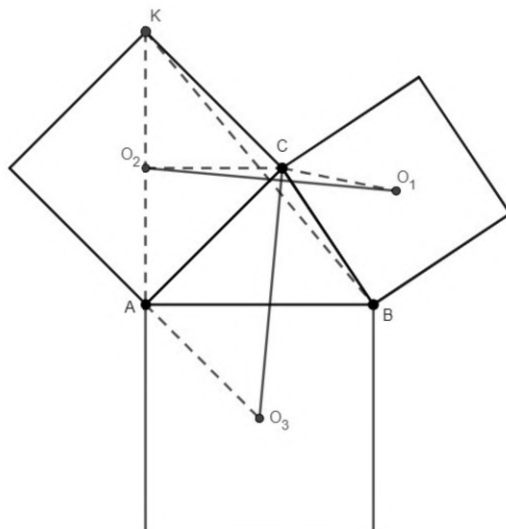


Figura 3.18: Espiral

□

Tendo definido uma semelhança espiral como a composição de uma dilatação central e uma rotação sobre o mesmo centro, nós naturalmente nos perguntamos o que é a composição de uma dilatação central e uma rotação cujos centros são distintos. A resposta simples e surpreendente - uma semelhança espiral - é uma consequência do fato de que não existe nenhum tipo mais complicado de semelhança direta:

Teorema 3.2. *Quaisquer duas figuras diretamente semelhantes estão relacionadas por uma translação ou por uma semelhança espiral.*

Demonstração. Considere dois segmentos correspondentes AB e $A'B'$ de figuras diretamente semelhantes. Se AB é paralelo a $A'B'$ e do mesmo comprimento, então a transformação é uma translação. Para ver isso, deixe C ser qualquer ponto que não esteja em AB e seja C' sua imagem. Então, pela semelhança direta das figuras, podemos concluir que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes e seus lados correspondentes são paralelos. Segue-se que todos os segmentos que unem pontos e suas imagens são paralelos e iguais, então a transformação é uma translação.

Em seguida, suponha que AB e $A'B'$ não sejam do mesmo tamanho. (Se os quatro pontos A, B, A', B' não formarem um quadrilátero, escolha um novo par de segmentos correspondentes, e nomeie-os com AB e $A'B'$. Por exemplo, se B estiver em AA' , como na Figura 3.20, use o ponto médio de AB em vez de A e o ponto médio de $A'B'$ em vez de A' .) Então as retas AA' e BB' se encontram em um ponto D , como na Figura 3.19. Deixe os círculos ABD e $A'B'D$, que têm o ponto comum D , se encontrarem novamente em O (ou, se tiverem D como um ponto de contato, seja O outro nome para D). Comparando os ângulos $\widehat{OAB}, \widehat{ODB}, \widehat{ODB'}$ e $\widehat{OA'B'}$, vemos que $\widehat{OAB} = \widehat{OA'B'}$. Da mesma forma, $\widehat{OBA} = \widehat{OB'A'}$. Assim, os triângulos OAB e $OA'B'$, sendo diretamente semelhantes, são relacionados pela semelhança espiral $O(k, \theta)$ onde

$$k = \frac{OA'}{OA} \text{ e } \theta = \widehat{AOA'}.$$

□

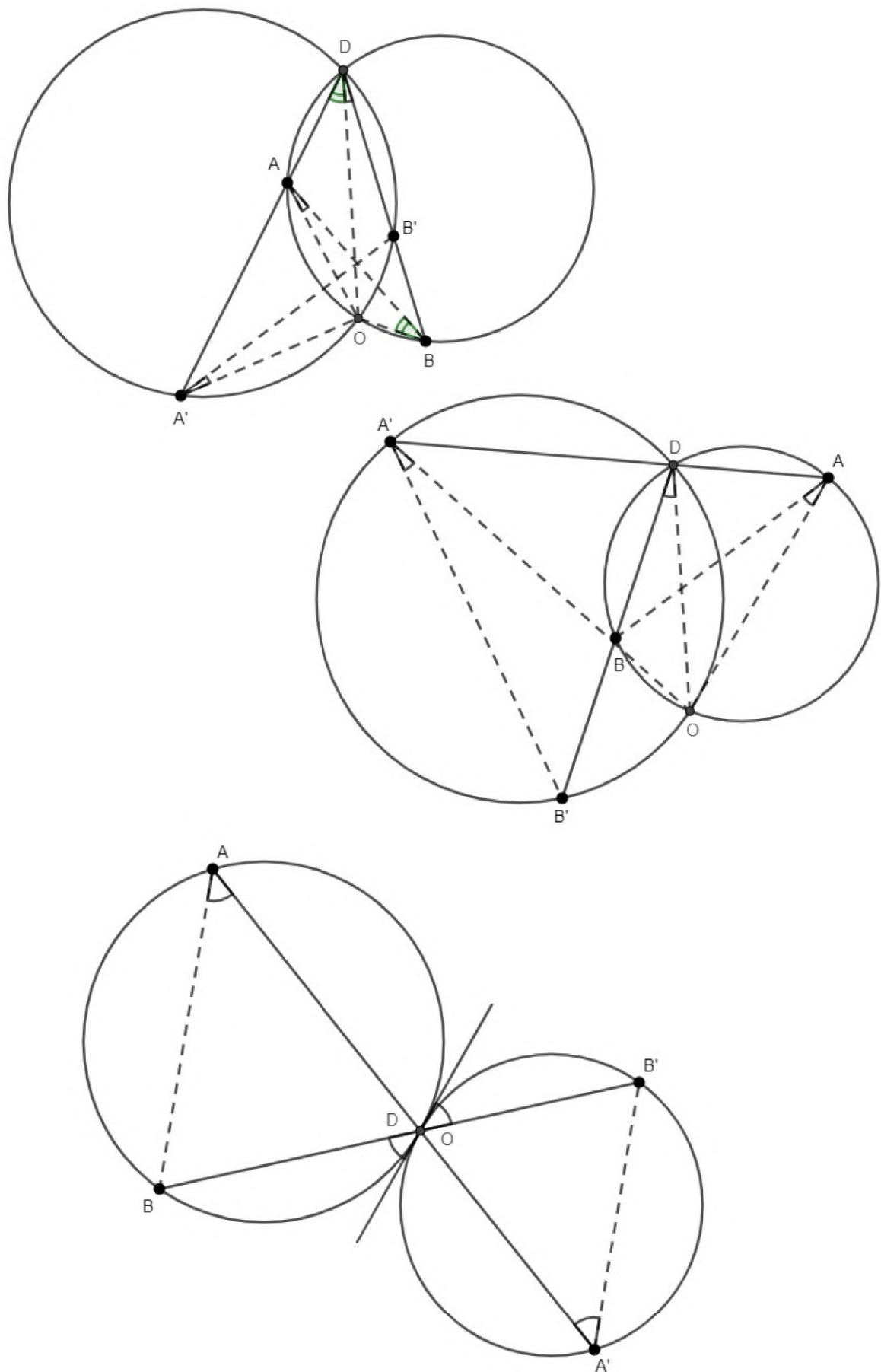


Figura 3.19: Espiral

Em outras palavras, toda semelhança direta que não é uma translação tem um ponto invariante. Além disso, o ponto invariante é único. De fato, dois desses pontos, digamos A e B , renderiam um segmento invariante AB . Desde que

$$k = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1,$$

a semelhança seria uma isometria deixando dois pontos fixos. Se isso transforma um triângulo ABC em ABC' , podemos localizar C' nos círculos A e B , raios AC e BC . Assim, as únicas isometrias que deixam A e B invariantes são a identidade, que é uma translação (através da distância zero), e uma reflexão, que não é direta (porque inverte o sinal de um ângulo).

Por exemplo, se dois mapas do mesmo estado, em diferentes escalas, forem desenhados em papel tracejado e superpostos, há apenas um local que é representado pelo mesmo ponto em ambos os mapas.

Estas idéias foram desenvolvidas por Julius Petersen (1880) e P. H. Schoute (1890) em um teorema muito bonito, do qual o seguinte é um caso especial:

Teorema 3.3. *Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos diretamente semelhantes, enquanto $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ são três triângulos diretamente semelhantes, então o triângulo $A''B''C''$ é diretamente semelhante ao triângulo ABC .*

Demonstração. Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pela translação, isso é óbvio. Se não, seja $O(k, \theta)$ a única semelhança espiral que transforma o triângulo ABC em $A'B'C'$, de modo que

$$k = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}},$$

$$\theta = \widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'},$$

como na Figura 3.20. Segue que

$$OAA' \sim OBB' \sim OCC'.$$

Mas estamos assumindo

$$AA'A'' \sim BB'B'' \sim CC'C''.$$

Conseqüentemente

$$OAA'' \sim OBB'' \sim OCC'';$$

$$\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB''}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC''}}{\overline{OC}} = k',$$

$$\widehat{AOA''} = \widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = \theta'.$$

e existe uma semelhança espiral $O(k', \theta')$ relacionando os triângulos ABC e $A''B''C''$. \square

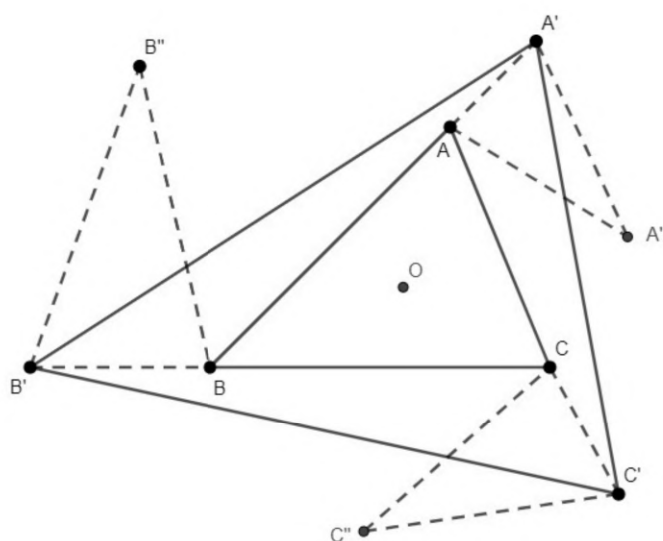


Figura 3.20: Espiral

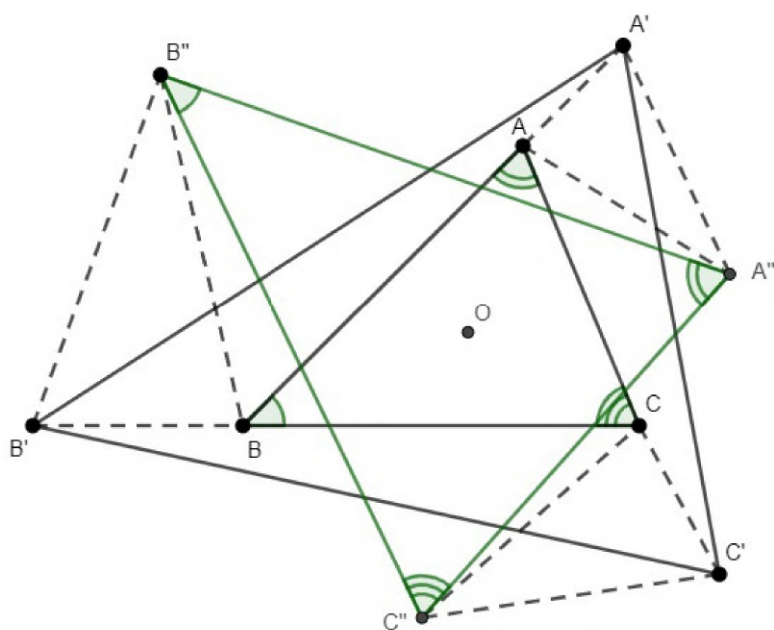


Figura 3.21: Espiral

Outro caso especial do teorema de Petersen-Schoute, provado da mesma forma, é

Teorema 3.4. *Quando todos os pontos P em AB estão relacionados por uma semelhança com todos os pontos P' em $A'B'$, os pontos que dividem os segmentos PP' em uma determinada razão são distintos e colineares, caso contrário, todos eles coincidem.*

3.9 Uma genealogia de transformações

É significativo que todas as transformações que estivemos discutindo sejam correspondências um a um de todo o conjunto de pontos no plano consigo mesmo. Entre estas, consideramos apenas *transformações contínuas* (ou “homeomorfismos”). Entre as transformações contínuas, existem as afinidades que preservam a colinearidade e, assim, levam retas paralelas em retas paralelas. Entre as afinidades, consideramos apenas semelhanças, que preservam proporções de distâncias, mas não abordamos outras transformações mais sofisticadas, como a “*Transformação de Lorentz*” ou o *alongamento procrusteano* (que transforma um círculo em uma elipse de mesma área). As semelhanças específicas que consideramos são isometrias, que preservam a distância, as dilatações, que transformam cada reta em uma reta paralela, e semelhanças espirais que (como algumas isometrias e algumas dilatações) deixam um ponto fixo e preservam o sentido de rotação (no sentido anti-horário ou horário). Essas categorias se sobrepõem um pouco: entre as isometrias, consideramos reflexões, translações (que são dilatações de acordo com a definição acima) e rotações (que são semelhanças espiral com razão de ampliação 1). As dilatações restantes são dilatações centrais (que são semelhanças espiral envolvendo a rotação zero). Finalmente, as meia-voltas são rotações (até 180°) e dilatações centrais. Todos esses relacionamentos podem ser nitidamente resumidos em uma árvore genealógica, onde cada “criança” é uma especialização de seu “pai”.

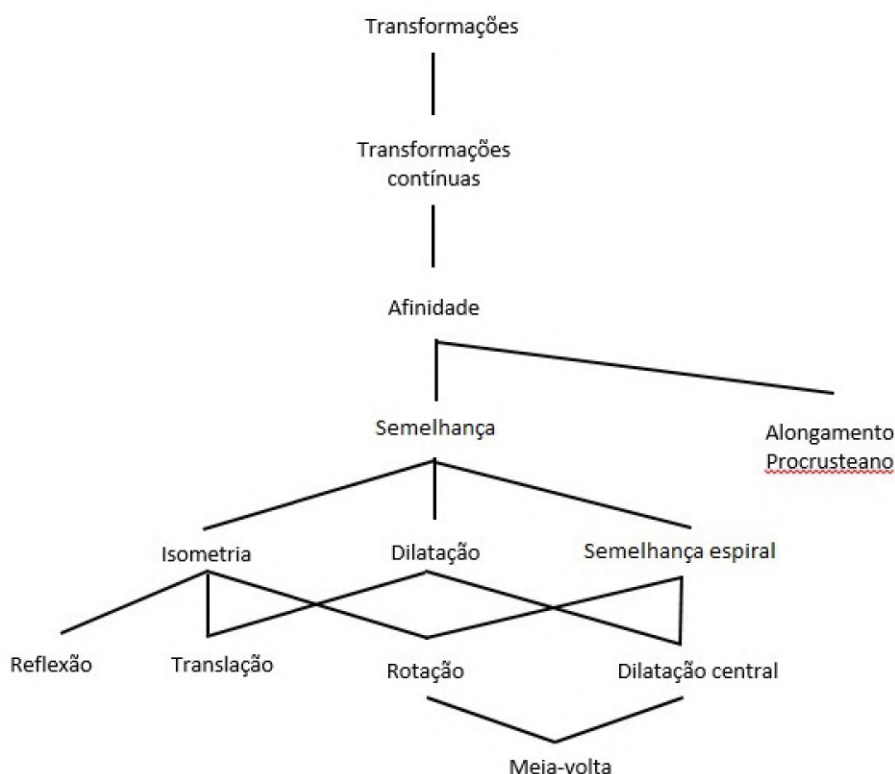
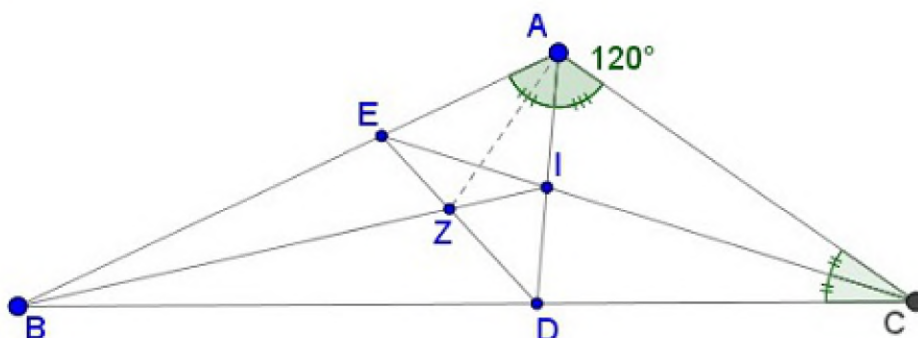


Figura 3.22: Genealogia de Transformações

4 Exercícios propostos para os alunos do ensino médio

Exemplo 4.1. (<https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/BMO5HL1985.shtml>)
 Tomemos ABC um triângulo com $\hat{A} = 120^\circ$. Sejam AD, CE as bissetrizes dos ângulos \hat{A}, \hat{C} , respectivamente, e I seu ponto de intersecção. Se Z é o ponto de intersecção de BI e DE , calcule \widehat{DAZ} .

Let ABC be a triangle with $\angle A = 120^\circ$. Let AD, CE be the angle bisectors of the angles at A, C , respectively and I their point of intersection.



If Z is the intersection point of BI and DE , calculate $\angle DAZ$.

Figura 4.1: Um problema da Olimpíada de Matemática dos Balcãs de 1985

- Resolução

Tracemos um segmento DF paralelo ao segmento AB , tal que F está entre A e C . Temos $\widehat{ADF} = \widehat{DAE} = 60^\circ$ (ângulos alternos internos). Logo, temos $\widehat{AFD} = 60^\circ$. Daí, segue que o triângulo ADF é equilátero e, portanto, $\overline{AD} = \overline{AF}$.

Pelo Teorema da bissetriz interna (Proposição 2.1), temos $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

Utilizando o Teorema de Tales (2.1), temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}. \quad (4.1)$$

Então, pelo Teorema da bissetriz interna (Proposição 2.1), temos que DE é uma bissetriz do triângulo ABD . Como BI também é bissetriz do triângulo ABD e AZ intersecta DE e BI , podemos concluir que AZ também é bissetriz do triângulo ABD e, portanto, $\widehat{DAZ} = 30^\circ$.

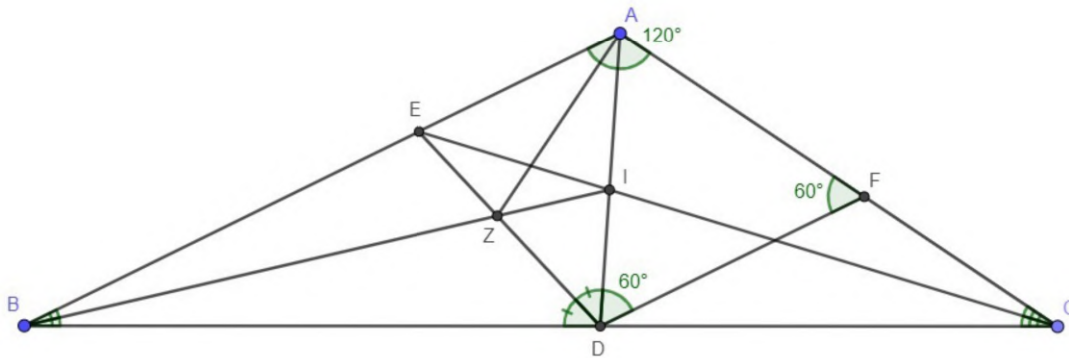


Figura 4.2: Exemplo 4.1

Exemplo 4.2. (Geometria Euclidiana Plana-João Lucas) Na figura 4.3, tem-se $\overline{AD} = \overline{DE}$, $\widehat{A} = \widehat{DEC}$ e $\widehat{ADE} = \widehat{BDC}$. Mostre que os triângulos ADB e EDC são congruentes.

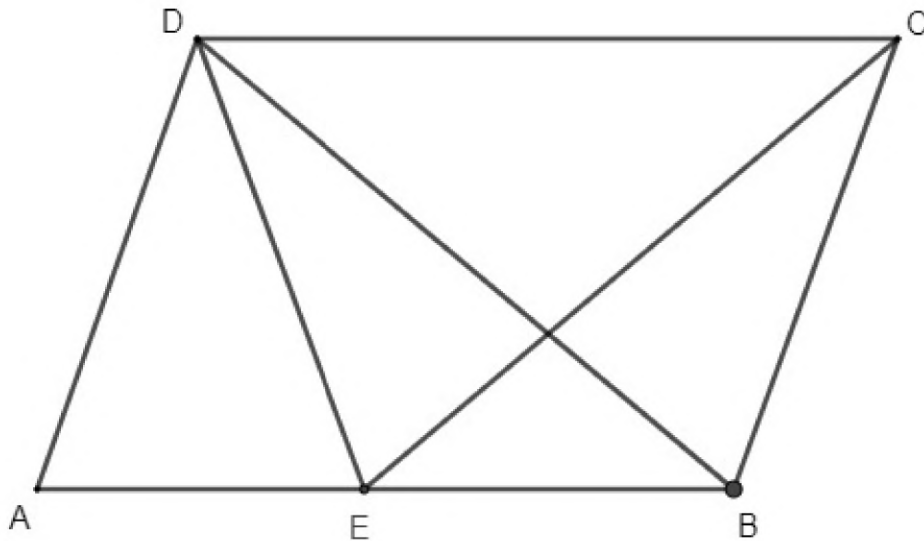


Figura 4.3: Exemplo 4.2

- Resolução

Primeiramente, como o Triângulo ADE é isóceles, temos $\widehat{DEA} = \widehat{DAE} = \widehat{DEC}$. Tomando os triângulos ADB e EDC , temos

$$\widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDB} = \widehat{BDC} + \widehat{EDB} = \widehat{EDC} \quad (4.2)$$

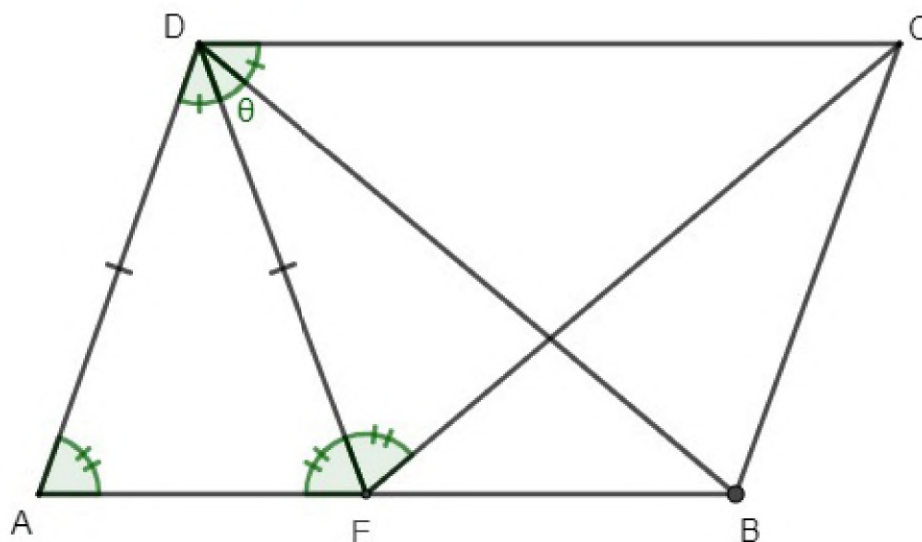


Figura 4.4: Exemplo 4.2

Portanto, pelo Teorema 1.1 (Caso ALA), temos que os triângulos ADB e EDC são congruentes.

Exemplo 4.3. (Profmat) Sejam ABC um triângulo e P e M , respectivamente, os pés da bissetriz interna e da mediana relativas ao lado BC . Se P e M coincidirem, prove que ABC é isóceles de base BC .

- Resolução

Supondo $P = M$, temos que $\widehat{BAM} = \widehat{BAP} = \widehat{CAP} = \widehat{CAM}$ e $\overline{BP} = \overline{BM} = \overline{MC} = \overline{PC}$. Pela Proposição 2.1, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} = 1 \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}. \quad (4.3)$$

Exemplo 4.4. (# contato Matemática) Observe parte do mapa de uma cidade.

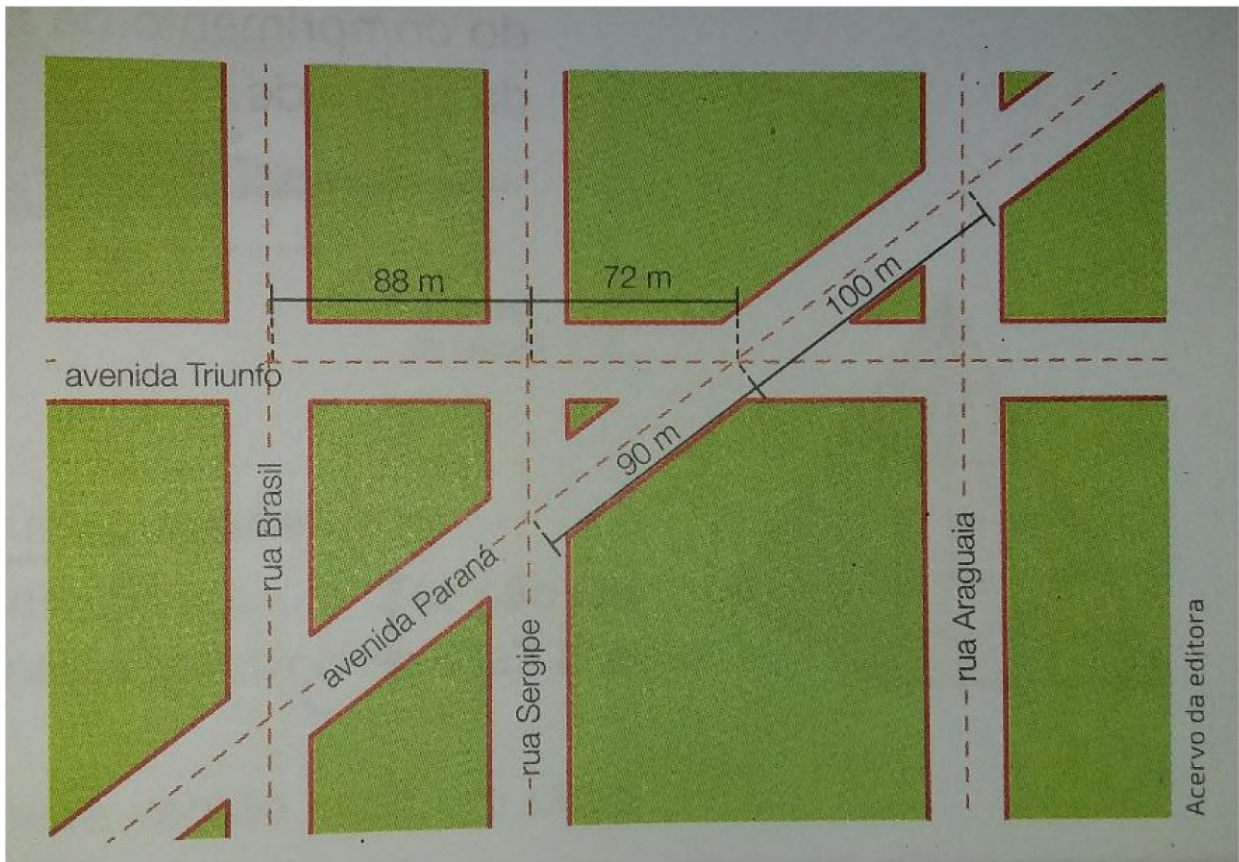


Figura 4.5: Exemplo 4.4

As ruas Brasil, Sergipe e Araguaia são paralelas e interceptadas pelas avenidas Triunfo e Paraná. De acordo com as medidas indicadas, determine quantos metros um pedestre irá percorrer se caminhar em linha reta da esquina da rua:

- Araguaia com a avenida Paraná à esquina da rua Brasil com a avenida Paraná.
- Brasil com a avenida Triunfo à esquina da rua Araguaia com a avenida Triunfo.

• Resolução

- Seja ABC o triângulo formado pelas avenidas Triunfo, Paraná e rua Brasil, onde A, B, C, D e E são os pontos de intersecção da avenida Triunfo com a rua Brasil, da rua Brasil com a avenida Paraná, da avenida Triunfo com a avenida Paraná, da avenida Triunfo com a rua Sergipe e da avenida Paraná com a rua Sergipe, respectivamente.

Como as ruas Brasil e Sergipe são paralelas, pelo Teorema 2.1, temos

$$\frac{72}{88} = \frac{90}{EB} \Rightarrow \overline{EB} = 110m. \quad (4.4)$$

Portanto, o pedestre irá percorrer $300m$.

- Seja CFG o triângulo formado pelas avenidas Triunfo, Paraná e rua Araguaia, onde F e G são os pontos de intersecção da avenida Paraná com a rua Araguaia e da avenida Triunfo com a rua Araguaia, respectivamente.

Como as ruas Sergipe e Araguaia são paralelas, temos que os triângulos CED e CFG são semelhantes (pelo Teorema 2.2). Logo, temos

$$\frac{\overline{CG}}{72} = \frac{100}{90} \Rightarrow \overline{CG} = 80. \quad (4.5)$$

Portanto, o pedestre irá percorrer $240m$.

Exemplo 4.5. (ENEM 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a $4m$ e $6m$. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF , todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB . Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.

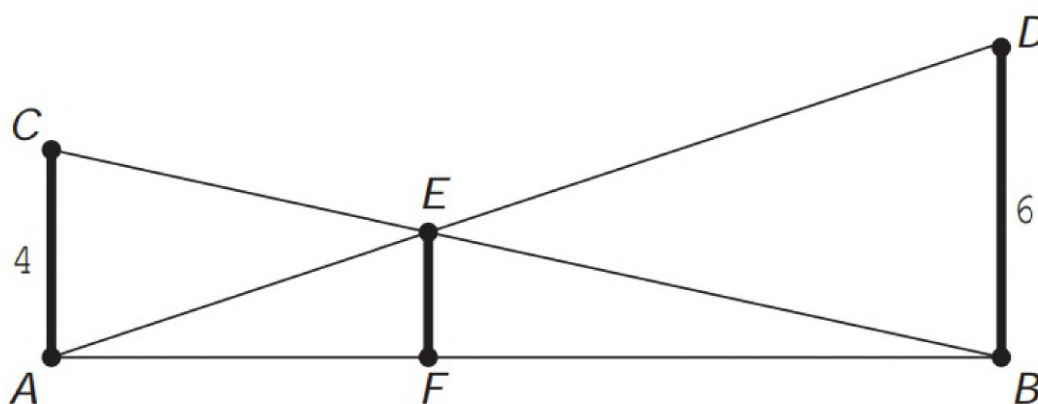


Figura 4.6: Exemplo 4.5

Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF ?

- a) $1m$
- b) $2m$
- c) $2,4m$
- d) $3m$
- e) $2\sqrt{6}m$

- Resolução: Como os segmentos CA , EF e DB são paralelos (pois são perpendiculares ao segmento AB), então os triângulos CAB e EFB são semelhantes e os triângulos DBA e EFA são semelhantes, pelo Teorema (2.2). Logo, temos

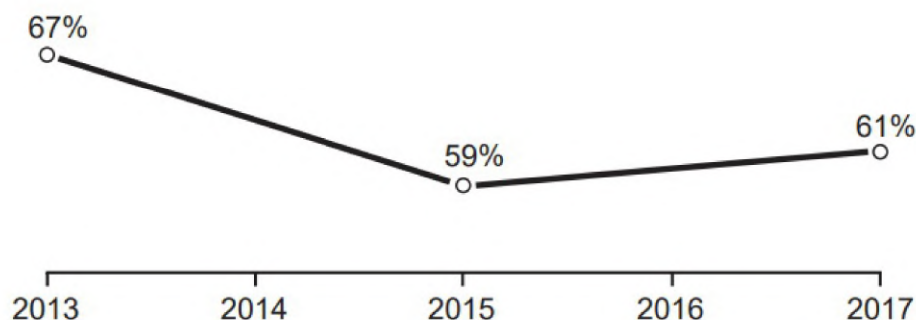
$$\frac{\overline{FB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{EF}}{4} \quad (4.6)$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EF}}{6} \quad (4.7)$$

Portanto, segue das igualdades (4.6) e (4.7) que

$$\frac{\overline{EF}}{4} + \frac{\overline{EF}}{6} = \frac{\overline{FB}}{\overline{BA}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1 \Rightarrow \overline{EF} = 2,4m.$$

Exemplo 4.6. (ENEM 2018) A raiva é uma doença viral e infecciosa, transmitida por mamíferos. A campanha nacional de vacinação antirrábica tem o objetivo de controlar a circulação do vírus da raiva canina e felina, prevenindo a raiva humana. O gráfico mostra a cobertura (porcentagem de vacinados) da campanha, em cães, nos anos de 2013, 2015 e 2017, no município de Belo Horizonte, em Minas Gerais. Os valores das coberturas em 2014 e 2016 não estão informados no gráfico e deseja-se estimá-los. Para tal, levou-se em consideração que a variação na cobertura de vacinação da campanha antirrábica, nos períodos de 2013 a 2015 e de 2015 a 2017, deu-se de forma linear.



Disponível em: <http://pni.datasus.gov.br>. Acesso em: 5 nov. 2017.

Figura 4.7: Exemplo 4.6

Qual teria sido a cobertura dessa campanha no ano de 2014?

- 62,3%
- 63,0%
- 63,5%
- 64,0%
- 65,5%

• Resolução:

Consideremos o triângulo da Figura 4.8 retângulo em B , que representa o gráfico da campanha de vacinação no período de 2013 a 2015, onde D representa o ano de 2014 e é ponto médio do segmento BC . Queremos descobrir qual o valor no ponto E . De acordo com o gráfico, sabemos que $\overline{AB} = 8$ (pois $67 - 59 = 8$) e $\overline{BC} = 2$.

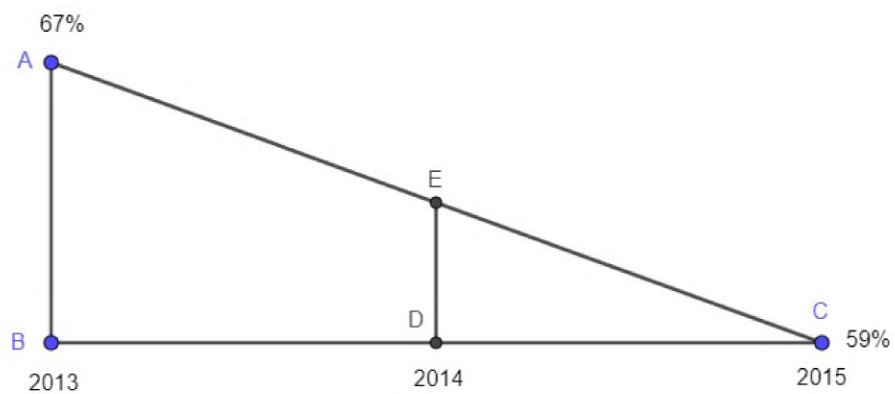


Figura 4.8: Exemplo 4.6

Como os triângulos CBA e CDE são semelhantes, pelo Caso AA (Teorema 2.2), temos

$$\frac{1}{\overline{DE}} = \frac{2}{8} \Rightarrow \overline{DE} = 4.$$

Portanto, a cobertura dessa campanha no ano de 2014 foi de 63%.

5 Considerações finais

O intuito deste trabalho foi aprofundar o conhecimento acerca das semelhanças de segmentos. Para isto, utilizamos muitos teoremas presentes no currículo escolar e também alguns que não fazem parte do currículo mas que são muito úteis na resolução de problemas e podem ser abordados com os alunos de ensino médio afim de motivá-los a continuar seus estudos envolvendo a matemática.

A maioria dos teoremas apresentados nesse trabalho foram demonstrados utilizando ferramentas relacionadas a semelhanças ou congruências de segmentos afim de mostrar que tais assuntos podem ser trabalhados com os alunos de ensino médio levando em conta o conhecimento prévio que eles possuem. É possível também ilustrar as demonstrações utilizando o programa Geogebra online, ferramenta que foi muito utilizada ao longo deste trabalho. Trouxemos também alguns exercícios resolvidos, em forma de exemplos, como sugestão para os professores de ensino médio trabalharem com seus alunos.

Por fim, este trabalho contribuiu imensamente para o desenvolvimento e aprimoramento do conhecimento da autora, pois muitos teoremas, até então, não haviam sido estudados ou se conhecia apenas de forma superficial. Deseja-se que este trabalho também possa ajudar no desenvolvimento de outros docentes que se interessam pelo assunto.

A Apêndice

A.0.1 Reta de Simson

Se perpendiculares são traçadas em relação aos lados de um triângulo ABC a partir de um ponto P , o pés dessas perpendiculares geralmente formar os vértices de um triângulo $A_1B_1C_1$ (o triângulo Pedal). Vamos agora examinar o caso excepcional em que P se encontra na circunferência que contém os vértices do triângulo ABC , conforme Figura A.1.

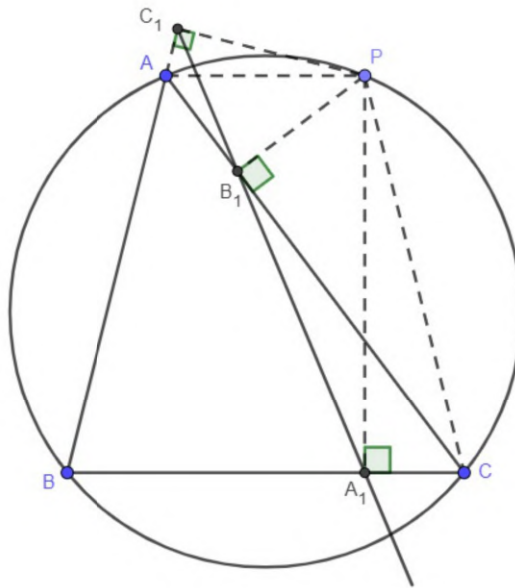


Figura A.1: Reta de Simson

Teorema A.1. *Os pés das perpendiculares construídas a partir de um ponto aos lados de um triângulo são colineares se, e somente se, o ponto pertence ao círculo que circunscreve o triângulo.*

Demonstração. Suponhamos que P pertença ao arco AC que não contém o ponto B . Todos os outros caso são análogos, basta renomear os pontos A, B, C . Por causa dos ângulos retos em A_1, B_1 e C_1 , o ponto P intersecta os círculos que circunscrevem os triângulos A_1BC_1, A_1B_1C e AB_1C_1 . Sendo assim, temos que

$$\widehat{APC} = 180^\circ - B = \widehat{C_1PA_1}$$

Subtraindo \widehat{APA} , temos que $\widehat{A_1PC} = \widehat{C_1PA}$.

Mas, desde que os pontos A_1, C, P, B_1 estejam em um círculo,

$$\widehat{A_1PC} = \widehat{A_1B_1C},$$

e, desde que os pontos A, B_1, P, C_1 estejam em um círculo,

$$\widehat{C_1PA} = \widehat{C_1B_1A}.$$

Logo, $\widehat{A_1B_1C} = \widehat{C_1B_1A}$. Portanto, A_1, B_1, C_1 são colineares e, conseqüentemente, o triângulo Pedal é “degenerado”.

Por outro lado, se um ponto P está situado de forma que o triângulo pedal de ABC é degenerado, P deve evidentemente estar na região do plano que está dentro de um ângulo do triângulo ABC e além do lado oposto. Podemos assumir que este ângulo é \widehat{B} e que C_1 está no prolongamento do lado BA além de A , como na Figura A.1. Podemos então inverter os passos da discussão acima sobre os ângulos e concluir que P está no círculo que contém os vértices do triângulo ABC . □

Definição A.1. A linha que contém os pés das perpendiculares construídas a partir de um ponto aos lados de um triângulo é chamada de Reta de Simson.

A.0.2 Quadriláteros inscritíveis

Proposição A.1. Um quadrilátero convexo $ABCD$, de lados AB, BC, CD e DA , é inscritível se, e somente se, qualquer uma das condições a seguir for satisfeita:

(a) $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

(b) $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Demonstração.

(a) Vamos supor que o quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo de centro O com $\alpha = \widehat{ABC}$ e $\beta = \widehat{ADC}$, conforme a figura abaixo.

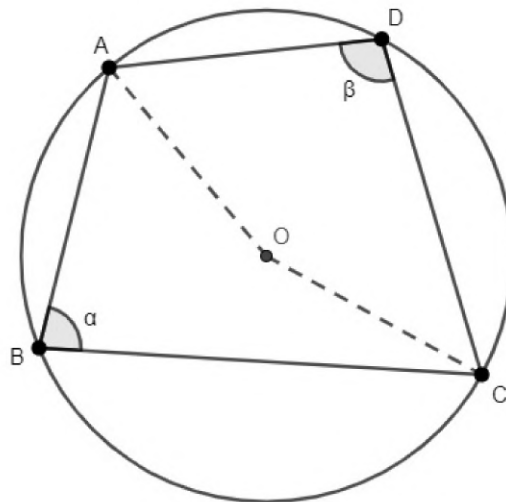


Figura A.2: Quadrilátero inscrito 1

Da figura A.2, temos que

$$\alpha = \frac{1}{2}\widehat{AOC} \text{ (que "enxerga" o arco ADC)}$$

e

$$\beta = \frac{1}{2}\widehat{AOC} \text{ (que "enxerga" o arco ABC) .}$$

Daí, temos que

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}\widehat{AOC} + \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Agora, vamos supor que o vértice D do quadrilátero $ABCD$ não pertença ao círculo (é exterior) e que $\alpha + \beta = 180^\circ$, onde $\alpha = \widehat{ABC}$ e $\beta = \widehat{ADC}$. Seja E o ponto de interseção do segmento CD com o círculo e tracemos o segmento AE , onde $\widehat{AEC} = \theta$, conforme a figura A.3.

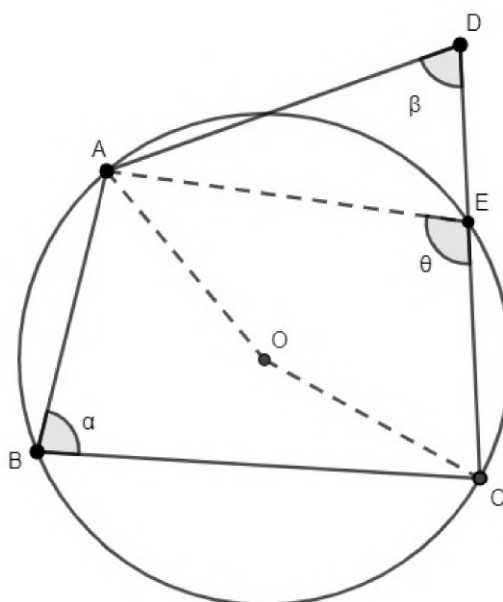


Figura A.3: Quadrilátero inscrito 2

Como o quadrilátero $ABCE$ está inscrito no círculo, temos que

$$\alpha + \theta = 180^\circ.$$

Logo,

$$\alpha + \beta = 180 = \alpha + \theta \Rightarrow \beta = \theta,$$

o que é uma contradição, pois θ é ângulo externo ao triângulo AED . Portanto, podemos concluir que os pontos D e E são coincidentes e, conseqüentemente, o quadrilátero $ABCD$ está inscrito no círculo.

Observação A.1. A demonstração do caso em que o ponto D é interior ao círculo é semelhante à demonstração acima.

(b) Primeiramente, vamos supor que o quadrilátero $ABCD$ está inscrito em um círculo. Como os ângulos \widehat{BAC} e \widehat{BDC} “enxergam” o mesmo arco BC , então $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

Agora, vamos supor primeiramente que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

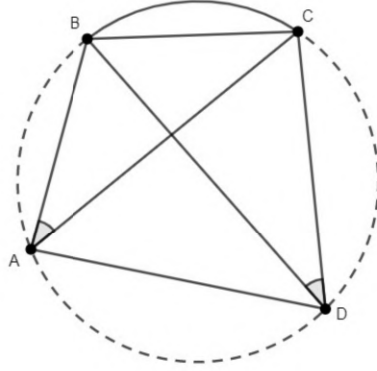


Figura A.4: Quadrilátero inscrito 3

Como $ABCD$ é convexo, segue que A e D estão situados no mesmo semiplano determinado pelo segmento BC . Sendo $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \theta$, temos que A e D estão ambos situados sobre o arco capaz de θ sobre BC , situado em tal semiplano. Logo, o círculo que contém o arco capaz circunscreve $ABCD$. \square

A.0.3 Transformações

Neste tópico, apresentamos as definições formais de cada uma das transformações que foram investigadas no Capítulo 3. Para mais detalhes, sugerimos o livro do George E. Martin [14].

Definição A.2. *Sejam $P, P_0 \in \mathbb{R}^2$ dois pontos, cujas coordenadas cartesianas são $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$. A **função distância** $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ é definida por*

$$d(P_0, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

*Assim, a **distância** entre os pontos P e P_0 é o número real $d(P_0, P)$.*

Observação A.2. Observamos que dados dois pontos $A, B \in \mathbb{R}^2$, a medida do segmento AB é igual a distância entre os pontos A e B , isto é,

$$\overline{AB} = d(A, B).$$

Definição A.3. *Uma **transformação** no plano \mathbb{R}^2 é uma aplicação biunívoca (isto é, injetiva e sobrejetiva) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada ponto $P \in \mathbb{R}^2$ associa o ponto $T(P) \in \mathbb{R}^2$ chamado **imagem** de P por T . Quando*

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q), \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^2$$

*dizemos que T é uma **isometria**, ou seja, T é uma **isometria** se preserva distâncias.*

Definição A.4. Seja $O \in \mathbb{R}^2$ a origem, ou seja, $O = (0, 0)$. A **translação** até o ponto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ é a transformação T_{P_0} para cada ponto $P \in \mathbb{R}^2$ associa o ponto $P' = T_{P_0}(P) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP_0}$. Em outras palavras, se $P = (x, y)$, e $P_0 = (x_0, y_0)$, então $P' = (x', y')$ é tal que

$$P' = T_{P_0}(P) = T(x, y) = (x + x_0, y + y_0),$$

ou ainda em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

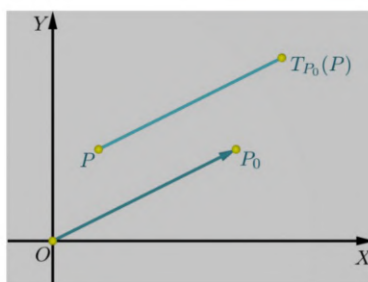


Figura A.5: Translação T_{P_0}

Definição A.5. A **reflexão** R_l em relação à reta l é a transformação que a cada ponto $P \in \mathbb{R}^2$ associa o ponto $P' = R_l(P) \in \mathbb{R}^2$ tal que l é a mediatriz do segmento PP' . Em outras palavras, se $P = (x, y)$ e a equação da reta l é $ax + by + c = 0$, com $a^2 + b^2 > 0$, então $P' = (x', y')$ é tal que

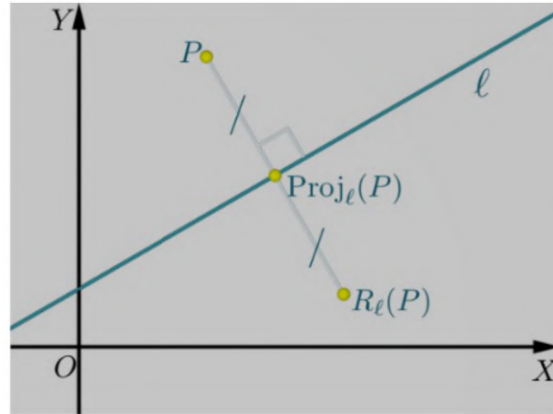
$$P' = R_l(P) = \left(x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}, y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2} \right),$$

ou ainda em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & \frac{-2ab}{a^2 + b^2} \\ \frac{-2ab}{a^2 + b^2} & \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y + \frac{c}{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-c}{b} \end{bmatrix}, \quad \text{se } b \neq 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x + \frac{c}{a} \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-c}{a} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{se } b = 0.$$

Figura A.6: Reflexão R_l

Definição A.6. A *rotação de ângulo θ em torno do ponto P_0* é a transformação $R_{(\theta, P_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada ponto $P \in \mathbb{R}^2$ do plano associa o ponto $P' \in \mathbb{R}^2$ obtido pela rotação de ângulo θ , no sentido anti-horário, do ponto P em torno do ponto P_0 . Em outras palavras, se $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$, então $P' = (x', y')$ é tal que

$$P' = R_{(\theta, P_0)}(P) = (x_0 + (x - x_0) \cos \theta - (y - y_0) \sin \theta, y_0 + (x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta),$$

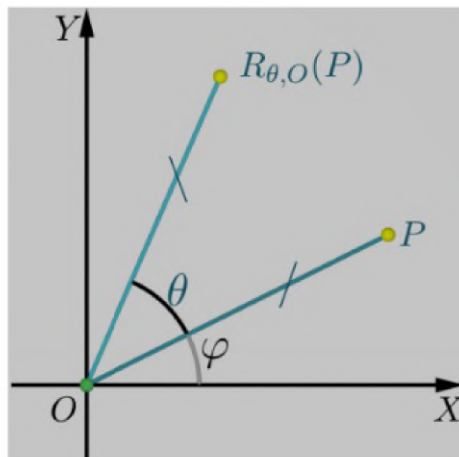
ou ainda em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Observação A.3. Para $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$, $Q_0 = (-x_0, -y_0)$ e $O = (0, 0)$, temos

1. $R_{(\theta, P_0)}(P) = T_{P_0} \circ R_{(\theta, O)} \circ T_{Q_0}(P)$, para todo $P \in \mathbb{R}^2$.
2. A transformação **meia-volta** em torno do ponto P_0 é a rotação de ângulo 180° em torno do ponto P_0 . Logo, $P' = (x', y')$ é tal que

$$P' = R_{(180^\circ, P_0)}(P) = (-x + 2x_0, -y + 2y_0).$$

Figura A.7: Rotação $R_{\theta, O}$

Definição A.7. Dados $P_0 \in \mathbb{R}^2$ e $k > 0$ um número real, a **dilatação de razão k sobre P_0** é a transformação $D_{(k,P_0)}$ tal que $D_{(k,P_0)}(P_0) = P_0$ e, para $P \in \mathbb{R}^2$, com $P \neq P_0$, $D_{(k,P_0)}(P) = P'$, em que $P' \in \overrightarrow{P_0P}$ é tal que $\overline{P_0P'} = k \cdot \overline{P_0P}$. Em outras palavras, se $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$, então $P' = (x', y')$ é tal que

$$P' = D_{(k,P_0)}(P) = (kx + (1-k)x_0, ky + (1-k)y_0),$$

ou ainda em notação matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Observação A.4. Observamos que

1. Para um número real $k < 0$, a **dilatação de razão $|k|$ sobre P_0** é a transformação $D_{(k,P_0)}$ obtida da composição da dilatação de razão $-k$ sobre P_0 com a meia-volta em torno de P_0 , isto é,

$$P' = D_{(k,P_0)}(P) = R_{(180^\circ, P_0)} \circ D_{(-k, P_0)}(P), \quad \forall P \in \mathbb{R}^2,$$

cuja notação matricial é

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $D_{(k,P_0)}(P_0) = P_0$ e, para $P \in \mathbb{R}^2$, com $P \neq P_0$, $D_{(k,P_0)}(P) = P'$, em que $P' \in \overrightarrow{PP_0}$ é tal que $\overline{P_0P'} = |k| \cdot \overline{P_0P}$.

2. A **semelhança espiral de razão k e ângulo θ sobre P_0** é a transformação $S_{(k,\theta)}$ definida pela composição da dilatação $D_{(k,P_0)}$ com a rotação $R_{(\theta, P_0)}$, isto é,

$$P' = S_{(k,\theta)}(P) = R_{(\theta, P_0)} \circ D_{(k, P_0)}(P), \quad \forall P \in \mathbb{R}^2,$$

cuja notação matricial é

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cos \theta & -k \sin \theta \\ k \sin \theta & k \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Referências

- [1] ACKER, F. *Cálculo Vetorial & Geometria Analítica - Livro 1: O Plano*. [S.l.]: Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, 2016.
- [2] ARMSTRONG, M. A. *Groups and Symmetry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] ATRACTOR. *Matemática sem Palavras*. Disponível em: <<https://www.atractor.pt/geral/temp/matematicasempalavras.html>>. Acesso em: 23 jul. 2019.
- [4] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.
- [5] CARNE, T. *Geometry and Groups*. Lecture notes, Cambridge University, v. 3, p. 5, 2006.
- [6] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. *Geometry Revisited*. [S.l.]: Maa, 1967. v. 19.
- [7] CUT THE KNOT. *A Problem from the 1985 Balkan Mathematical Olympiad (Shortlist)*. Disponível em: <https://www.cut-the-knot.org/m/Geometry/BMO_SHL_1985.shtml>. Acesso em: 02 jul. 2019.
- [8] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. Coleção PROFMAT, Editora SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [9] ENEM. *Questão 172 ENEM 2013*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem_2013_dom_amarelo.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2019.
- [10] ENEM. *Questão 143 ENEM 2018*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf>. Acesso em: 09 jun. 2019.
- [11] GEOGEBRA DOCU TEAM. *Geogebra Classic*. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/classic>>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- [12] LIMA, L. E. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [13] LINTZ, R. G.; SILVA, C. da. *História da Matemática*. [S.l.]: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007.

- [14] MARTIN, G. E. *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. *Geometria Moderna - Parte I*. São Paulo: Universidade de Brasília, 1971.
- [16] NETO, A. C. M.; CAMINHA, A. *Geometria* (Coleção PROFMAT). [S.l.]: Rio de Janeiro: Editora da SBM, 2013.
- [17] NIKULIN, V. V.; SHAFAREVICH, I. R. *Geometries and Groups*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] PROFMAT. *O Triângulo Pedal e a Geometria na Educação Básica*. Disponível em: <https://sca.profmtat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=90220>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- [19] SOUZA, J.; GARCIA, J. *Contato Matemática*. São Paulo: FTD, v. 1, 2016.