Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
PROFMAT

# Equações Diofantinas Lineares: Um Estudo com Alunos da 1ª Série do Ensino Médio

**Diego Adriano Silva**

**Teresina – PI**

**2019**

**Diego Adriano Silva**

# Equações Diofantinas Lineares: Um Estudo com Alunos da 1ª Série do Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito
Coorientadora:
Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa

**Teresina – PI**

**2019**

S586e Silva, Diego Adriano.
Equações diofantinas lineares: um estudo com alunos da 1ª série do ensino médio / Diego Adriano Silva. - 2019.
69f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
"Orientador(a): Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito."
"Co-orientador(a): Prof. Dra. Valdirene Gomes de Sousa."

1. Equações Diofantinas. 2. Resolução de Problemas. 3. Ensino Médio. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

**DIEGO ADRIANO SILVA**

# EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UM ESTUDO COM ALUNOS DA 1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

A. S. Bl
_______________________________
Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito – Presidente e Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Valdirene Gomes de Sousa
_______________________________
Prof ª. Drª. Valdirene Gomes de Sousa – Examinadora
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Disnah Barroso Rodrigues
_______________________________
Profª. Dra. Disnah Barroso Rodrigues – Examinadora
Universidade Federal do Piauí UFPI

Afonso Norberto da Silva
_______________________________
Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Agosto/2019

*Dedico este trabalho a Deus, a toda minha amada família, aos amigos, aos meus pais, irmãos, a minha grande companheira Paulianne Viana e ao meu amado filho Lucas Henri.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força, saúde e disposição para conseguir chegar até aqui passando por muitos obstáculos.

Aos meus pais, Elizabete e José Antônio que sempre se dedicaram para que eu pudesse me tornar um homem justo e honesto.

Aos meus irmãos, Daniele e Dielson, por toda compreensão da minha ausência na dedicação desse sonho.

Ao meu filho Lucas Henri, uma benção, que veio iluminar minha caminhada e me deu mais força a continuar e terminar essa etapa.

À minha grande companheira Paulianne, por todo amor e paciência nos momentos difíceis desta caminhada.

Aos meus amigos que me apoiaram em busca da realização dessa etapa.

Aos meus amigos de curso, pela união, amizade construída nesses 2 anos. Somos todos vencedores.

Ao meu orientador Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito e minha Coorientadora Profa. Dra. Valdirene Gomes de Sousa por toda dedicação e apoio.

Ao meu mestre Hoseano Costa, professor e amigo na graduação que foi meu grande incentivador em trilhar o caminho da matemática, sem esse incentivo dificilmente continuaria no curso da graduação e, consequentemente, não estaria finalizando o mestrado.

Ao grande Líder de nossa turma, meu amigo Teotônio, que foi fundamental para o andamento do grupo de estudos.

À UESPI, por me acolher com todos os excelentes profissionais que amam essa instituição como se fosse suas casas.

À CAPES por dar oportunidade de melhorar minha vida tanto profissional como pessoal, propiciando um mestrado de excelência como é o PROFMAT.

Meu obrigado a todos!

# Resumo

Este Trabalho buscou analisar a compreensão manifestada por alunos do Ensino Médio no que tange a problemas envolvendo duas variáveis e apenas uma equação, com a resolução a partir das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas. As referidas equações não fazem parte do currículo da Educação Básica, mas neste processo investigativo defende-se que seu estudo nesse nível de ensino é possível, pois os conceitos que dão base para o estudo da resolução de Equações Diofantinas Lineares fazem parte da relação de conteúdos estudados no Ensino Fundamental. A pesquisa envolveu a participação de alunos da 1ª série do Ensino Médio que estudam em um Campus do Instituto Federal do Maranhão (IFMA). Para tanto, foram aplicados, em duas etapas, questionários com 8 questões envolvendo problemas com uma equação e duas variáveis. A aplicação desse instrumento foi intercalada com uma oficina para estudo de Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas. Os dados obtidos nos momentos descritos foram analisados, tendo como parâmetros o referencial teórico-metodológico dentre os quais destacamos Pommer(2008), Oliveira (2006) e Artigue (1996) onde a hipótese aqui defendida, qual seja: É possível a apropriação dos conceitos do estudo de Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas por alunos do Ensino Médio. Foi constatado que os alunos podem se apropriar dos conceitos das Equações Diofantinas Lineares. Entretanto, se faz necessário uma consolidação dos conceitos básicos de equação e inequação do 1º grau, pois os alunos manifestaram dificuldades de compreensão desses conceitos, os quais são indispensáveis em procurar um número total de soluções das Equações Diofantinas Lineares.

**Palavras-chave:** Equações Diofantinas.Resolução de Problemas. Ensino Médio.

# Abstract

This paper aimed to analyze the comprehension expressed by high school students regarding problems involving two variables and only one equation, with the resolution from the Linear Diophantine Equations with two unknowns. These equations are not part of the curriculum of Basic Education, but in this investigative process it is argued that their study at this level of education is possible, because the concepts that underlie the study of the resolution of Linear Diophantine Equations are part of the content relationship studied in elementary school. The research involved the participation of students of the first grade of high school that study in a Campus of the Federal Institute of Maranhão (IFMA). For this purpose, in two phases, questionnaires with 8 questions involving problems with one equation and two variables were applied. The application of this instrument was interspersed with a workshop to study Linear Diophantine Equations with two unknowns. The data obtained in the described moments were analyzed, having as parameters the theoretical-methodological framework among which we highlight Pommer (2008), Oliveira (2006) and Artigue (1996) where the hypothesis defended here, namely: It is possible to appropriate the concepts of the study of Linear Diophantine Equations with two unknowns by high school students. It was found that students can appropriate the concepts of Linear Diophantine Equations. However, it is necessary to consolidate the basic concepts of equation and inequality of the 1st degree, because the students expressed difficulties in understanding these concepts, which are indispensable in finding a total number of solutions of Linear Diophantine Equations.



**Keywords:** Diophantine equations.Problems solving, High School.

# Lista de Figuras


1 Diofanto de Alexandria . . . 16
2 Capa do Livro Aritmética de Diofanto de Alexandria . . . 17
3 Euclides de Alexandria . . . 19
4 Gráfico 1: Desempenho dos alunos teste a priori . . . 41
5 Resposta do Aluno A Teste a priori . . . 42
6 Resposta Aluno B teste a priori . . . 43
7 Resposta aluno D teste a priori . . . 44
8 Resposta aluno C teste a priori . . . 45
9 Gráfico 2: Desempenho dos alunos no teste a posteriori . . . 47
10 Resposta do aluno B teste a posteriori . . . 48
11 Resposta do aluno B teste a posteriori . . . 49
12 Resposta do aluno E teste a posteriori . . . 49
13 Resposta aluno F teste a posteriori . . . 50
14 Resposta Aluno D teste a posteriori . . . 51
15 Resposta aluno D teste a posteriori . . . 52
16 Resposta aluno G teste a posteriori . . . 53
17 Resposta aluno B teste a posteriori . . . 54
18 Resposta aluno E teste a posteriori . . . 55
19 Resposta aluno F teste a posteriori . . . 56

# Sumário


**1 Introdução** **9**

**2 Equações Diofantinas Lineares: Aspectos históricos** **15**

2.1 Diofanto de Alexandria . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

2.2 Euclides de Alexandria . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

**3 Teoria Elementar dos Números** **20**

3.1 Divisibilidade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

3.2 Divisão Euclidiana . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23

3.3 Máximo Divisor Comum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

**4 Equações Diofantinas Lineares** **30**

**5 Procedimentos Metodológicos da Pesquisa** **36**

5.1 Abordagem de Pesquisa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36

5.2 Cenário da pesquisa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

5.3 Sujeitos da Pesquisa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

5.4 Procedimentos de apreensão e análise dos dados . . . . . . . . . . . . . . . 39

**6 Análise e discussão dos dados** **41**

6.1 Teste a priori . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

6.2 Teste a Posteriori . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

**7 Considerações Finais** **59**

**8 Referências** **62**

**A Anexos 1: Teste a Priori** **65**

**B Anexos 2: Teste a Posteriori** **67**

**C Anexos 3: Questionário Avaliativo** **68**

# 1 Introdução

Em conformidade com a Constituição Federal de 1988 e a Lei de Diretrizes e Base da Educação (LDB. 9394/1996), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que normatiza e define o conjunto orgânico e progressivo das aprendizagens essenciais durante todas as etapas e modalidade da Educação Básica, aponta a realidade educacional do país no que tange ao Ensino Médio:

> O Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica, direito público subjetivo de todo cidadão brasileiro. Todavia, a realidade educacional do País tem mostrado que essa etapa representa um gargalo na garantia do direito à educação. Entre os fatores que explicam esse cenário, destacam-se o desempenho insuficiente dos alunos nos anos finais do Ensino Fundamental, a organização curricular do Ensino Médio vigente, com excesso de componentes curriculares, e uma abordagem pedagógica distante das culturas juvenis e do mundo do trabalho. (BNCC, 2017, p. 461)

De acordo com o referido documento, os alunos chegam ao Ensino Médio normalmente com desempenho de aprendizagem insuficiente, decorrente das etapas de escolaridade anteriores, o que implica áreas do conhecimento a serem abordados nessa nova etapa.

Neste trabalho investigativo, trataremos, especificamente em relação a matemática. Assim, partimos do pressuposto que, conforme o referido documento, muitas vezes, o problema é decorrente da abordagem pedagógica utilizada que distancia das culturas juvenis e do mundo do trabalho.

A utilização de problemas contextualizados que envolvam o cotidiano dos alunos, se constitui como uma possibilidade da apropriação conceitual, contribuindo assim para reduzir as dificuldades comumente apresentadas pelos alunos nessa área do conhecimento no Ensino Médio.

O tema "Equações Diofantinas" possui vários problemas matemáticos que podem ser contextualizados no cotidiano dos alunos, assim além de concordar com o texto da BNCC em relação ao distanciamento das culturas juvenis, a ideia de desenvolver uma pesquisa sobre o conceito "Equações Diofantinas", surgiu após meu contato com a disciplina de Teoria dos Números ainda na graduação[1], o que foi confirmada durante o Mestrado, quando cursei a disciplina de Aritmética[2]. O estudo envolvendo as Equações Diofantinas nessa

[1] Graduação em Licenciatura em Matemática – (2014-2018) pelo Instituto Federal de Educação do Piauí – (IFPI/Campus Angical)

[2] (MA14) Disciplina obrigatória cursada no primeiro ano do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT

disciplina possibilitou o surgimento de algumas indagações, dentre as quais destacamos: é possível estabelecer a relação entre vários problemas matemáticos na Educação Básica e o conceito de Equações Diofantinas? É possível que os alunos da educação básica possam se apropriarem do conceito de Equações Diofantinas? Por que um conceito abordado tanto na graduação quanto na pós-graduação não é estudado no contexto da Educação Básica apesar de vários problemas matemáticos recaírem nesse nível de educação?

Muitas vezes se observa nas salas de aulas uma "competição" entre os alunos a respeito de quem é melhor na disciplina de Matemática, isso mostra até uma certa preocupação com a minimização dos erros cometidos por eles nos instrumentos de avaliação, mas essa "competição" acaba assim que a maioria dos discentes se depara com as dificuldades encontradas ao longo do ano letivo. Como exemplo, uma das razões de surgirem essas dificuldades, é que muitos conteúdos estudados em sala de aula não se aproximam de problemas da vida real, causando um certo desinteresse no processo de aprendizagem de determinados conteúdos.

Pensando nessa questão, recorremos à utilização das equações diofantinas por apresentarem diversos problemas matemáticos que recaem no cotidiano dos alunos. Como por exemplo "É possível comprar algo que custa R\$100, 00 com apenas notas de R\$ 2, 00 e R\$ 5, 00?" Quantas notas você precisa para que tenha esse valor com o menor número possível de cédulas? Exemplos como esse podem ser modelados por meio de uma equação diofantina linear com duas incógnitas, onde sendo $x$ o número de notas de R\$ 2, 00 e $y$ o número de notas de R\$ 5, 00 teríamos a equação $2x+5y = 100$. Quando surgem problemas como esse em sala de aula, a resolução é em grande maioria, realizada por professores e alunos, por meio da tentativa e erro, não sendo formulado um procedimento específico para resolução para encontrar as soluções dessas equações.

A BNCC (2017), no volume que trata de Matemática, apresenta os conteúdos essenciais da *Teoria Elementar dos Números*[3] que são necessários para abordagem das Equações Diofantinas Lineares, mas o mesmo não faz nenhuma menção a esse conteúdo, ou seja, que o tema pesquisado não consta como um conteúdo na matriz curricular do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Segundo Oliveira (2006, p.28), o tema Equações Diofantinas Lineares é fundamental

[3]Números naturais e inteiros com suas propriedades e operações básicas, números primos e decomposição em fatores primos, algoritmo da divisão, estudo da divisibilidade, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e critérios de divisibilidade

na educação básica, como podemos observar:

> É fundamental ressaltar que a resolução de problemas de Teoria Elementar dos Números envolve conceitos e métodos aprendidos no Ensino Básico e exigem a interpretação de seus dados. É o caso dos problemas que envolvem o uso de conhecimentos sobre resolução de equações diofantinas lineares. Esse é um assunto importante a ser trabalhado no Ensino Básico por dois motivos: primeiro, os conhecimentos relativos à resolução de equações desse tipo estão presentes nos livros didáticos do ensino médio. Segundo, já existem diversas situações-problema que são acessíveis a compreensão do estudante e cujas soluções são facilitadas com o conhecimento dessa ferramenta"de resolução de problemas. Dessa forma, justifica-se a presença do tema “equações diofantinas lineares” no Ensino Básico.

Diante do exposto, segundo o autor, o estudo de Equações Diofantinas Lineares pode ser estudado na Educação Básica, pois dentre os motivos apresentados, em um deles frisa em relação a diversas situações problemas que são acessíveis e podem ser facilitadas usando a resolução dessas equações como ferramenta de solução desses problemas. Além disso, os conteúdos que são pré-requisitos para o entendimento do tema do nosso trabalho são estudados no ensino básico, mas, segundo o autor, o referido assunto tem pouca atenção.

> Concluo, portanto, que não há qualquer referência ao objeto do saber equações diofantinas lineares feita tanto nos PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) como nos PCN+ (“Parâmetros Curriculares Nacionais Mais”), ou seja, esse assunto não é considerado um objeto de ensino pelos autores desses documentos. (OLIVEIRA, 2006, p.91)

Podemos perceber que o tema de estudo do nosso trabalho não é mencionado tanto nos PCNEM e nos PCN+ observados pelo autor, e observamos que também não consta na BNCC (2017). O referido autor em seu trabalho concluiu que o tema ”Equações Diofantinas” não consta em nenhum livro didático da Educação Básica aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), contudo isso não tira a importância do seu estudo no Ensino Médio, pois, segundo o autor, o fato do tema ser atrelado ao conteúdo de divisibilidade que é abordado no Ensino Fundamental só faz sentido se for tratada sobre os inteiros. Além disso, Oliveira cita a utilização dos conhecimentos sobre Equações Diofantinas Lineares facilitar a resolução de muitos problemas na vida cotidiana, contextualizados a partir da vida real, assim pode ser um modelador por esse objeto de saber.

Ressaltamos que nosso trabalho não se limita a intenção de inserir mais conteúdo aos alunos, mas, sobretudo, por que queremos responder o seguinte **problema de pesquisa**: Qual a compreensão de aprendizagem manifestada por alunos da 1ª série do Ensino Médio em relação ao estudo das equações diofantinas lineares na resolução de problemas envolvendo duas variáveis e uma equação? Apesar do conteúdo estudado não fazer parte do currículo da educação básica, conforme já afirmamos, defendemos a hipótese de que os alunos ingressantes no Ensino Médio podem compreender e resolver problemas que envolvam as equações diofantinas lineares com duas incógnitas.

Destacamos que o estudo das Equações Diofantinas Lineares é frequentemente utilizado em questões de olimpíadas de matemática como, por exemplo, a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares-OBMEP, edição promovida pelo Ministério da Educação e pelo Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e com a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), responsáveis pela Direção Acadêmica. A OBMEP foi criada em 2005 com objetivo geral de estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área. As provas priorizam o raciocínio lógico com problemas contextualizados que envolvem aritmética, álgebra, geometria e combinatória. No entanto, nas escolas, comumente é dado ênfase ao ensino de Álgebra Elementar e raramente são apresentados aos alunos problemas contextualizados com enfoque no raciocínio lógico. Como existe aplicações em problemas contextualizados, elencamos como importante abordarmos sobre o tema equação diofantina, pois entendemos que seu estudo se faz relevante na resolução de vários problemas matemáticos que surgem nessas provas. Nessa linha de pensamento, surge outra indagação: Por que esse conteúdo é utilizado em questões de olimpíadas de matemática e não é abordado no contexto da sala de aula?

A partir do exposto, delimitamos como **objetivo central** do trabalho, analisar a compreensão manifestada por alunos da 1ª série do Ensino Médio no que tange a problemas envolvendo duas variáveis e uma equação a partir do estudo de Equações Diofantinas Lineares. O desdobramento deste objetivo geral se norteia pelos seguintes **objetivos específicos**: Apresentar a evolução histórica das equações diofantinas com suas diversas aplicações; Identificar os conhecimentos iniciais dos alunos dos anos iniciais do Ensino Médio manifestados nas estratégias utilizadas na resolução de problemas que envolvem Equações Diofantinas Lineares; Propor intervenção didática envolvendo a resolução de problemas a partir do estudo de Equações Diofantinas Lineares; Analisar os conhecimentos apresentados pelos alunos a posteriori à intervenção didática referentes ao desenvolvimento conceitual de Equações Diofantinas Lineares.

Isto posto, ressaltamos a relevância desta pesquisa por apresentar possibilidade de reflexões para novos estudos e demais pesquisadores, bem como pode ser utilizado por professores de Matemática no desenvolvimento de sua prática docente no contexto da 1ª série do Ensino Médio. Assim como compreendemos serem necessárias para o acesso a um instrumento que alunos podem utilizar como possibilidade de estudo das Equações Diofantinas Lineares.

A partir do exposto, o presente trabalho estrutura-se em 07 (sete) capítulos onde, no capítulo inicial, apresentamos o texto introdutório com a contextualização do objeto de estudo, realçando as questões norteadoras e o problema de pesquisa que nos levaram a estudar sobre o tema "Equações Diofantinas". No segundo capítulo, intitulado "Equações Diofantinas Lineares: Aspectos históricos" temos um relato sobre a vida e obra dos matemáticos que contribuíram no estudo das equações diofantinas e, com isso, auxiliaram no entendimento da evolução histórica do estudo do nosso objeto de estudo. No capítulo seguinte, nomeado "Teoria Elementar dos Números", apresentamos os conceitos básicos da *Teoria Elementar dos Números* com proposições e teoremas que são importantes para o estudo das equações diofantinas. Em seguida, no capítulo "Equações Diofantinas Lineares", temos as definições e propriedades do estudo das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas como, por exemplo, identificar quando uma equação tem solução, calcular o número de soluções e suas aplicações em problemas contextualizados.

Em seguida, temos o capítulo denominado "Procedimentos Metodológicos da Pesquisa", onde descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados no trabalho, revelando que o estudo se orienta a partir da aplicação, a Engenharia Didática que, em resumo, constituía na aplicação de um questionário inicial (*teste a priori*), onde buscamos analisar a compreensão dos alunos da 1ª série do Ensino Médio manifestada nas estratégias utilizadas na resolução de problemas que envolvem Equações Diofantinas Lineares. Na sequência, realizamos uma intervenção didática envolvendo a resolução de problemas a partir do estudo de Equações Diofantinas Lineares para, após a intervenção didática, aplicamos um segundo teste (*teste a posteriori*). E, finalmente, analisamos os resultados obtidos pelos alunos no teste a posteriori à intervenção didática referente ao desenvolvimento conceitual de equações diofantinas lineares.

No prosseguimento do trabalho temos o capítulo “Análise e discussão dos dados”, onde temos a análise e discussão dos dados com as discussões e interpretações dos dados produzidos durante a pesquisa. Por fim, temos o capítulo “Considerações finais”, onde fizemos um comentário sobre os resultados do trabalho.

# 2 Equações Diofantinas Lineares: Aspectos históricos

Nesse capítulo trazemos uma abordagem histórica de dois dos principais matemáticos que contribuíram para o estudo das Equações Diofantinas Lineares. Ressaltamos que os fatos históricos envolvendo esses matemáticos em sua maioria foram fundamentados em estudos realizados por Eves (2011), Boyer (1974) e Hefez (2007).

## 2.1 Diofanto de Alexandria

Historicamente, a matemática tem "caminhado" junto com o processo de desenvolvimento da humanidade. Desde as primeiras civilizações conhecidas, estudos revelam a presença dos números em noções de contagem e medida. A esse respeito Boyer *apud* Bezerra; Putnoki, (1996, p.21), afirma:

> Grupos de pedras são demasiado efêmeros para conservar informação: por isso o homem pré–histórico às vezes registrava um número fazendo marcas num bastão ou pedaço de osso. Poucos desses registros existem hoje, mas na Tchecoslováquia foi achado um osso de lobo com profundas incisões em número de cinquenta e cinco; estavam dispostos em duas séries com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a ideia de número é muito mais antiga que progressos tecnológicos, como o uso de metais ou de veículos com rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico tais como o osso acima descrito, vêm de um período de cerca de trinta mil anos atrás.

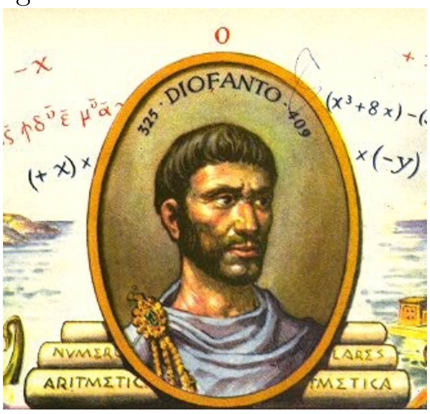
A partir do exposto, o homem pré-histórico já manifestava conhecimento acerca dos números ou noções de numeração. Como destacado na citação, tais manifestações se davam, por exemplo, por incisões no pedaço de osso, como o encontrado na Tchecoslováquia, evidenciando, assim, que o estudo em relação aos números se desenvolveu ao longo da história.

Vários matemáticos se destacaram no estudo dos números, na chamada "Teoria dos Números", um deles foi Diofanto de Alexandria, que em sua homenagem temos as Equações Diofantinas, o nosso objeto de estudo, essa homenagem se deu pelo fato de Diofanto ter sido o percursor no estudo desse conteúdo.

Apesar de não saber exatamente acerca de sua nacionalidade e da época exata em que viveu, Diofanto de Alexandria foi importante para o desenvolvimento da álgebra e sua obra *Aritmética* contribuiu com matemáticos[4], que posteriormente, se dedicaram ao estudo da Teoria dos Números.

Existem algumas evidências de que Diofanto possa ter vivido no século III, sabe–se ainda que viveu na "Idade da Prata" (250-350 d.C.) da Universidade de Alexandria, que foi o centro da atividade matemática, dos dias de Euclides (morreu por volta de 300 d.C.) aos de Hipatia[5] (morreu em 415 d.C.). Alexandria era um centro muito cosmopolita e a matemática que se originou dali não era toda de mesmo tipo, conforme consta em Boyer (1974):

Figura 1: Diofanto de Alexandria




Fonte: Imagens públicas do Google

Além do fato de que sua carreira floresceu em Alexandria, nada mais de certo se sabe sobre ele, embora se encontre na Antologia grega do V ou VI século, uma epigrama que se propõe a dar alguns detalhes da vida de Diofanto, no qual ele permite calcular quantos anos Diofanto viveu. Esse epigrama encontramos em Boyer (1974, p.130)

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso, cobriu–lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida.

Resolvendo esse enigma, a equação que representa o problema será:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

[4]Pierre de Fermat, Carl Friedrich Gauss, Christian Goldbach, Leonhard Euler, Étienne Bézout, Claude Gaspard Bachet de Méziriac, são exemplos dos principais estudiosos da Teoria dos Números

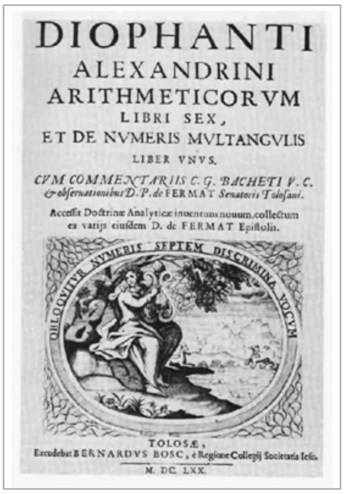
[5]Foi uma filósofa neoplatônica grega do Egito Romano. Foi a primeira mulher documentada como tendo sido matemática. Como chefe da escola platônica em Alexandria.

Resolvendo essa equação, temos que o valor de $x = 84$, então, se caso esse enigma seja historicamente exato, concluímos que ele viveu 84 anos. Conforme já ressaltamos, apesar de pouco se conhecer sobre a sua vida, foi considerado o maior algebrista grego de Alexandria. De acordo com Roque (2012), Diofanto provavelmente não fosse grego, pelo fato de sua obra ser muito distinta da tradição grega, apesar de sua obra ter sido escrito nessa língua. A referida autora até sugere que Diofanto possa ter origem árabe.

Além de ser o precursor da Teoria dos Números, ganhando por alguns, o título de Pai da Álgebra, tornou-se conhecido por suas obras, sendo a principal, o tratado intitulado "*Aritmética*" (250-275). Segundo Hefez (2007), trata-se do primeiro tratado de álgebra hoje conhecido, pois a abordagem de Diofanto era totalmente algébrica, não sendo revestida de nenhuma linguagem ou interpretação geométrica, como o faziam todos os seus predecessores. A maioria dos problemas estudados por Diofanto em Aritmética visava encontrar soluções em números racionais, muitas vezes contentando-se em encontrar apenas uma solução, de equações algébricas, com uma ou várias incógnitas.

Um dos problemas tratados por Diofanto era a resolução em números racionais, ou inteiros, da equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$, chegando a descrever todas as suas soluções. Este problema teve o poder de inspirar o matemático francês Pierre Fermat mais de 1300 anos depois.

Figura 2: Capa do Livro Aritmética de Diofanto de Alexandria




Fonte: Imagens públicas do Google

*Aritmética* era uma obra que continha 13 livros, mas que segundo Eves (2011) só remanesceram 6 que consistiam basicamente em 130 problemas de soluções numéricas para equações determinadas (aquelas que possuem uma única solução) e equações indeterminadas (Diofantinas). Temos que na Grécia antiga a palavra Aritmética significava "Teoria dos Números".

Segundo Boyer (1974), o título de "Pai da álgebra" se justifica pelo fato de Diofanto utilizar notação totalmente diferente do que se já tinha visto até o momento, mas que em termo de conceitos e motivação não se justifica pelo fato de sua obra mais conhecida não ser uma exposição sistemática de operações algébricas, mas sim uma coleção de 130 problemas, todos enunciados em termos de exemplos numéricos específicos. Ainda sobre a obra de Diofanto, Eves (2011, p. 207) afirma:

> A Aritmética é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. A parte remanescente do trabalho se dedica à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, que levam a equações do primeiro e do segundo graus. Só uma cúbica muito particular é resolvida. O primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e os demais de equações indeterminadas de segundo grau, e, às vezes, de grau maior, em duas ou três incógnitas. É notável a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos ideados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia–se com uma resposta apenas do problema.

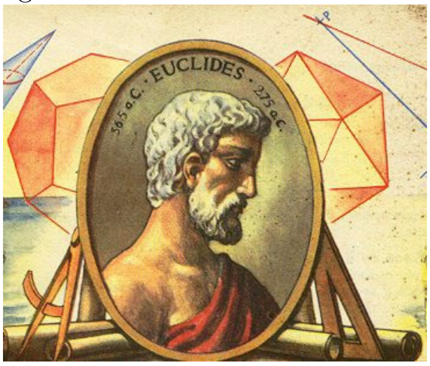
Diante do exposto, os adjetivos colocados a Diofanto como um "gênio em seu campo" se dá muito pelo fato de sua obra ser pioneira na organização e notação algébrica. Os problemas com números racionais eram chamados de *problemas diofantinos*, assim Diofanto se destacou por sua capacidade de organização e sistematização na resolução dos problemas, segundo Eves (2011).

## 2.2 Euclides de Alexandria

Assim como Diofanto de Alexandria, pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides. Em decorrência disso, se desconhece a data de seu nascimento. Segundo Hefez (2007), é provável que sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas e que também ele foi professor do Museu em Alexandria. Ainda segundo o autor, aparentemente Euclides não criou muitos resultados, mas teve o mérito de estabelecer um padrão de apresentação e rigor matemático jamais visto anteriormente, o que o fez ser seguido como exemplo por vários milênios posteriormente.

Segundo Eves (2011), Euclides escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos desde óptica, astronomia, música e mecânica e secções cônicas; porém, mais da

Figura 3: Euclides de Alexandria




Fonte: Imagens públicas do Google

metade do que ele escreveu se perdeu. Entre as obras[6] que sobreviveram, até hoje temos a obra "Os elementos de Euclides", sua obra mais famosa composta por treze livros, sendo que dez deles tratam de geometria e três de teoria dos números.

Segundo Hefez (2007), nos três livros de aritmética, Livros VII, VIII e IX, Euclides desenvolveu a teoria dos números naturais, sempre com uma visão geométrica (para ele, números representam segmentos e números ao quadrado representam áreas). No Livro VII, são definidos os conceitos de divisibilidade, de número primo, de números perfeitos, de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum, entre outros. Ainda segundo o autor, no mesmo livro, além das definições acima, todas bem-postas e até hoje utilizadas, encontra-se enunciada (sem demonstração) a divisão com resto de um número natural por outro, chamada divisão euclidiana. Com o uso iterado desta divisão, Euclides estabelece o algoritmo mais eficiente, até hoje conhecido, para o cálculo do máximo divisor comum de dois inteiros, chamado de Algoritmo de Euclides. No Livro VIII, são estudadas propriedades de sequências de números em progressão geométrica. No Livro IX, Euclides mostra, de modo magistral, que a quantidade de números primos supera qualquer número dado; em outras palavras, existem infinitos números primos. Após Euclides, a aritmética estagnou por cerca de 500 anos, ressuscitando com os trabalhos de Diofanto de Alexandria, que conhecemos na seção anterior.

[6]Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos e Óptica, são exemplos de algumas das obras de Euclides.

# 3 Teoria Elementar dos Números

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos da Teoria Elementar dos Números por meio de definições, proposições e teoremas, onde esses conceitos são indispensáveis para a dedução da fórmula geral que fornece o número total de soluções inteiras de uma Equação Diofantina. Os enunciados e demonstrações presentes neste capítulo foram baseados em maioria nos estudos feitos por Santos (2010) e Hefez (2013).

## 3.1 Divisibilidade

Temos que a divisão de um número inteiro por outro nem sempre é exata, porém existe mecanismo em que podemos expressar essa possibilidade, em que chamamos de relação de divisibilidade, mas mesmo quando não existir uma relação de divisibilidade, ainda assim é possível efetuar uma divisão com resto, denominada *divisão euclidiana.*

**Definição 1.** *Sejam* $a$ *e* $b$ *dois números inteiros, com* $a \neq 0$*. Diz-se que* $a$ *divide* $b$ *se, e somente se, existe um número inteiro* $q$ *tal que* $b = a \cdot q$.

Usamos a notação $a|b$ indicando que $a$ divide $b$. Acontecendo isso, dizemos que $a$ é divisor de $b$, que $a$ é um fator de $b$ ou que $b$ é um múltiplo de $a$. A negação dessa sentença significa que não existe nenhum número inteiro $q$ tal que $b = q \cdot a$, a qual denotamos $a \nmid b$ (lê–se $a$ não divide $b$).

**Exemplo 1.** $7 \mid 14$, $12 \mid 36$, $2 \nmid 9$, $4 \nmid 14$, *pois* $14 = 7 \cdot 2$, $36 = 3 \cdot 12$, *mas não existem números inteiros* $q_1$ *e* $q_2$ *que satisfaça* $9 = 2 \cdot q_1$ *e* $14 = 4 \cdot q_2$.

Suponha que $a \mid b$ e que $a \neq 0$. Seja $c$ um número inteiro tal que $b = a \cdot c$. O número $c$, que é unicamente determinado é chamado de quociente de $b$ por $a$ e denotado por $c = \dfrac{b}{a}$. Note que $\dfrac{b}{a}$ só está definido para $a \neq 0$. A relação "$a$ divide $b$, $a \mid b$" é chamada de relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$, dessa definição tem–se algumas propriedades.

Segundo Hefez (2013, p. 46), temos:

**Proposição 1.** *Sejam* $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$ *, com* $a$ *e* $b$ *não nulos , tem-se que:*

**(i).** $1 \mid a$, $a \mid a$ *e* $a \mid 0$*;*

**(ii).** $a \mid b \Leftrightarrow |a|$ *divide* $|b|$*;*

**(iii).** *Se* $a \mid b$ *e* $b \mid c$ *então* $a \mid c$.

Para demonstrar a proposição acima temos que utilizar a definição de divisibilidade, assim temos:

*Demonstração.* (i). Decorre imediatamente das igualdades $a = a.1$ , $a = 1.a$ e $0 = a.0$
(ii). Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, logo

$$a \mid b \Longrightarrow b = a \cdot c \Longrightarrow |b| = |a| \cdot |c| \Longrightarrow |a| \mid |b|$$

(iii). Suponha que $a|b$ e $b|c$. Portanto, existem $m$ e $n$ inteiros tais que $b = m.a$ e $c = n.b$. Substituindo o valor de $b$ da primeira equação na segunda, obtemos

$$c = n \cdot b = n(m \cdot a) = (n \cdot m)a,$$

o que mostra que $a \mid c$. □

**Exemplo 2.** *Temos que* $7 \mid 21$ *e* $21 \mid 126$*, então* $7 \mid 126$.

**Proposição 2.** *Dados os números inteiros* $a$*,* $b$*,* $c$ *e* $d$*, com* $a \neq 0$ *e* $c \neq 0$ *temos que se* $a \mid b$ *e* $c \mid d$*, então* $ac \mid bd$.

*Demonstração.* Com efeito, se $a \mid b$ e $c \mid d$, então existem $m$ e $n$ inteiros tais que $b = m \cdot a$ e $d = n \cdot c$. Sendo assim, temos que

$$bd = (m \cdot a)(n \cdot c) = (m \cdot n)(a \cdot c).$$

Logo, $ac \mid bd$. □

Em particular, se $a \mid b$, então $a \cdot c \mid b \cdot c$, para todo $c \neq 0$.

**Exemplo 3.** *Temos como exemplo* $5 \mid 15$ *e* $4 \mid 12$*, então* $20 = 5 \cdot 4 \mid 15 \cdot 12 = 180$.

**Proposição 3.** *Sejam números inteiros* $a$*,* $b$ *e* $c$ *com* $a \neq 0$*, tais que* $a \mid (b \pm c)$*. Então* $a \mid b$ *se, e somente se,* $a \mid c$.

*Demonstração.* Para tal, suponha que $a \mid (b + c)$. Portanto, existe $m$ um número inteiro tal que $b + c = am$. Se $a \mid b$, então existe $n$ inteiro tal que $b = an$. Desta forma, $b + c = an + c = am$, donde segue–se que $c = (m - n)a$. Logo, $a \mid c$. Reciprocamente, se $a \mid c$, então existe $h$ inteiro tal que $c = ah$. Desta forma, $b + c = b + ah = am$, donde segue-se que $b = (m - h)a$.

Logo, $a \mid b$. De forma análoga ocorre para $a \mid (b - c)$. $\square$

**Exemplo 4.** *Como* $4 \mid 28$ *e* $28 = 12 + 16$*, assim* $4 \mid 12$ *e* $4 \mid 16$.

A proposição a seguir pode ser encontrada em Santos (2010, p.3):

**Proposição 4.** *Se* $a$, $b$, $c$, $m$ *e* $n$ *são números inteiros,* $c \mid a$ *e* $c \mid b$*, então* $c \mid (ma + nb)$.

*Demonstração.* Se $c \mid a$ e $c \mid b$ então existem $k_1$, $k_2$ números inteiros tais que $a = k_1 c$ e $b = k_2 c$. Multiplicando estas duas equações, respectivamente, por $m$ e $n$ teremos

$$ma = mk_1 c \quad \text{e} \quad nb = nk_2 c.$$

Somando membro a membro obtemos $ma + nb = (mk_1 + nk_2)c$, o que nos diz que $c \mid (ma + nb)$ . $\square$

**Exemplo 5.** *Temos por exemplo, como* $3 \mid 21$ *e* $3 \mid 81$*, então* $3 \mid (21 \cdot 5 + 81 \cdot 4)$.

**Proposição 5.** *Sejam* $a$ *e* $b$ *números inteiros não nulos, se* $a \mid b$ *e* $b \mid a$*, então* $a = \pm b$.

*Demonstração.* Como $a \mid b$ e $b \mid a$, existem $p$ e $q$ números inteiros tais que: $b = a \cdot p$ e $a = b \cdot q$. Assim, $a = (a \cdot p) \cdot q$, ou seja, $a = a \cdot (p \cdot q)$, o que implica que $p \cdot q = 1$, ou seja, $p = q = \pm 1$. Portanto, $a = \pm b$. $\square$

Para finalizar essa seção temos uma proposição em relação aos módulos na divisibilidade.

**Proposição 6.** *Dados* $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$*, onde* $b \neq 0$*, temos que:*

$$a \mid b \Longrightarrow |a| \leqslant |b|$$

*Demonstração.* De fato, se $a \mid b$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = c \cdot a$. Tomando módulos, temos que $|b| = |c| \cdot |a|$. Como $b \neq 0$, temos que $c \neq 0$, logo $1 \leqslant |c|$ e, consequentemente $|a| \leqslant |a| \cdot |c| = |b|$.

Em particular, se $a \in \mathbb{Z}$ e $a \mid 1$, então $0 \leqslant |a| \leqslant 1$, logo $|a| = 1$ e, portanto $a = \pm 1$. $\square$

Neste trabalho, destacamos algumas das propriedades da divisibilidade, para um maior aprofundamento sobre o tema, sugerimos Hefez (2013), Santos (2010).

## 3.2 Divisão Euclidiana

Segundo Hefez (2007), Euclides, em sua obra Elementos, afirma, sem explicitar, que é sempre possível efetuar a divisão de número inteiro $b$ por um número inteiro $a$, com resto. Vamos enunciar e demonstrar esse teorema, contudo, antes enunciaremos um princípio chamado de Princípio da Boa Ordenação. Esse princípio é amplamente utilizado para demonstrar propriedades e teoremas nos mais variados ramos acadêmicos.

O seguinte enunciado e demonstração pode ser encontrado em Lima (2016).

**Teorema 1** (Princípio da Boa Ordenação)**.** *Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ contém um menor elemento.*

*Demonstração.* Defina $I_n = \left\{ p \in \mathbb{N} | \ 1 \leqslant p \leqslant n \ \right\}$ e consideremos o conjunto $X \subset \mathbb{N}$ formado pelos naturais $n$ tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Dessa forma, se $n \in X$ então $n$ nem pertence a $A$ nem os números menores que $n$. Perceba que caso $1 \in A$ não há nada a fazer, uma vez que 1 é o menor elemento dos naturais. Caso contrário, então $1 \in X$. Dessa forma, sabemos que $X \neq \mathbb{N}$ pois $A \neq \emptyset$. Para concluir, perceba que deve existir um $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$ pois, caso contrário, $X$ seria o conjunto dos números naturais. Dessa forma, de $a = n + 1 \notin A$ e sabemos que $a \in A$ é o menor elemento de $A$, pois todos os elementos de 1 até $n$ pertencem a $X$ (complementar de $A$). □

Com esse princípio podemos enunciar e demonstrar algumas definições e propriedades encontradas na obra *"Os Elementos"* de Euclides. A seguir vamos enunciar e demonstrar um importante teorema sobre a divisão dos números inteiros que pode ser encontrada em Hefez (2013, p.74).

**Teorema 2** (Divisão Euclidiana)**.** *Sejam $a$ e $b$ dois números inteiros com $a \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros $q$ e $r$ tais que $b = a.q + r$, com $0 \leqslant r < |a|$ .*

*Demonstração.* Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, os números $b$, $b-a$, $b-2a, \ldots, b-n \cdot a \ldots$. Pelo princípio da boa ordem o conjunto $S \neq \emptyset$, formado pelos elementos acima tem um menor elemento $r = b - q \cdot a$. Vamos provar que $r < a$. Se $a \mid b$, então $r = 0$ e nada mais temos a provar. Se, por outro lado, $a \nmid b$, então $r \neq a$, portanto basta mostrar que não pode ocorrer $r > a$. De fato, se isto ocorresse, existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$.

Assim, sendo $r = c + a = b - q.a$, teríamos

$$c = b - (q + 1) \cdot a \in S,$$

com $c < r$, contradição pelo fato de $r$ ser o menor elemento de $S$.

Portanto, temos que $b = a \cdot q + r$, com $r < a$, o que prova a existência de $q$ e $r$.

Agora, provaremos a unicidade. Note que, dados dois elementos distintos de $S$, a diferença entre o maior e o menor desses elementos, sendo um múltiplo de $a$, é pelo menos $a$. Logo, se $r_1 = b - aq_1$ e $r_2 = b - aq_2$, com $r_1 < r_2 < a$, teríamos $r_2 - r_1 \geqslant 0$, o que acarretaria $r_2 \geqslant r_1 + a \geqslant a$. Absurdo! Portanto, $r_1 = r_2$.

Daí segue que, $b - a \cdot q_1 = b - a \cdot q_2$ o que implica que $a \cdot q_1 = a \cdot q_2$, e portanto, $q_1 = q_2$. $\square$

Os números inteiros $q$ e $r$ são chamados respectivamente de quociente e resto da divisão de $b$ por $a$, esse teorema é importante pelo fato de poder calcular o quociente e o resto de dois números por meio de subtrações sucessivas.

**Exemplo 6.** *Vamos encontrar o quociente e o resto da divisão de 30 por 7.*

Observamos que $30 - 7 = 23$, $30 - 2 \cdot 7 = 16$, $30 - 3 \cdot 7 = 9$, $30 - 4 \cdot 7 = 2$ e como $2 < 7$ temos que $q = 4$ e $r = 2$.

## 3.3 Máximo Divisor Comum

Nessa seção vamos apresentar a definição do máximo divisor comum de dois números inteiros, mostrar que é sempre possível encontrar esse número, além disso, vamos enunciar e demonstrar as suas principais propriedades.

**Definição 2.** *O número inteiro* $d$ *é chamado de Máximo Divisor Comum de dois números inteiros* $a$ *e* $b$ *(com* $a$ *ou* $b$ *diferente de zero), denotado por*

$$d = \text{mdc}(a, b),$$

*o maior inteiro que divide* $a$ *e* $b$*, se* $d$ *satisfazer as seguintes condições:*

**(i).** $d$ *é um divisor comum de* $a$ *e* $b$

**(ii).** $d$ *é divisível por todo divisor comum de* $a$ *e* $b$*, isto é, se* $c$ *é um divisor comum de* $a$ *e* $b$ *então* $c \mid d$

**Proposição 7.** *Sejam* $a$ *e* $b$ *números inteiros, com* $a \neq 0$*, temos que* $a \mid b$ *se, e somente se,* $mdc(a, b) = |a|$

*Demonstração.* Se $a \mid b$, então $|a|$ é um divisor comum de $a$ e $b$, seja $c$, um número inteiro, um divisor comum de $a$ e $b$, como $c \mid a$, logo $c \mid |a|$, portanto $mdc(a, b) = |a|$. Por outro lado, se $mdc(a, b) = |a|$, logo $|a| \mid b$, mas como $a \mid |a|$, então, $a \mid b$. □

Observe que dados $a$ e $b$ números inteiros, se existir o $mdc(a, b)$ de $a$ e $b$, então:

$$mdc(a, b) = mdc(-a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, -b).$$

Assim, é possível supor sempre que $a$ e $b$ não negativos no cálculo do $mdc(a, b)$.

**Exemplo 7.** *Sejam os números inteiros* $a = 15$ *e* $b = 35$*. Os divisores comuns de* $15$ *e* $35$ *são* $1$, e $5$*, e como o maior deles é o* $5$*,temos que o* $mdc(15, 35) = 5$*. Observamos que:*

$$mdc(-15, 35) = mdc(15, -35) = mdc(-15, -35) = 5$$

**Definição 3.** *Sejam* $a$ *e* $b$ *dois números inteiros não conjuntamente nulos (*$a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$*). Diz-se que* $a$ *e* $b$ *são primos entre si se, e somente se, o* $mdc(a, b) = 1$

**Exemplo 8.** *Os números inteiros:* $2$ *e* $7$*;* $-13$ *e* $20$*;* $-28$ *e* $15$*, são primos entre si, pois temos que:*

$$mdc(2, 7) = mdc(-13, 20) = mdc(-28, 15) = 1.$$

**Lema 1** (Lema de Euclides)**.** *Sejam* $a$*;* $b$*;* $n \in \mathbb{Z}$ *com* $a < n.a < b$*. Se existe* $mdc(a, b - n.a)$*, então* $mdc(a, b)$ *existe e* $mdc(a, b) = mdc(a, b - n.a)$ *.*

*Demonstração.* Seja $d = mdc(a,\ b - n \cdot a)$. Como $d \mid a$ e $d \mid (b - n \cdot a)$, segue que $d$ divide $b = \ b - na + na$. Logo $d$ é um divisor comum de $a$ e $b$. Suponha agora que $c$ seja um divisor comum de $a$ e $b$; logo, $c$ é um divisor comum de $a$ e $b - na$ e, portanto $c|d$. Isso prova que $d = mdc(a, b)$. □

A seguir, apresentaremos a prova construtiva da existência do $mdc(a, b)$ dada por Euclides. O método, chamado de Algoritmo de Euclides, que, segundo Hefez (2007), é um primor do ponto de vista computacional e pouco conseguiu-se aperfeiçoá-lo em mais de dois milênios.

**Teorema 3** (Algoritmo de Euclides)**.** *Sejam* $a$ *e* $b$ *números naturais, com* $b > a$ *e* $b \neq 0$. *Se o Algoritmo de Euclides for aplicado sucessivamente, então o último resto não nulo* $r_n$, *satisfaz a seguinte igualdade* $\mathrm{mdc}(a, b) = r_n$.

*Demonstração.* Dados $a$, $b \in \mathbb{N}$, podemos supor $a \neq b$. Se $a = 1$ ou $a = b$, ou ainda $a|b$, já vimos que $\mathrm{mdc}(a, b) = a$. Suponhamos, então, que $1 < a < b$ e que $a \nmid b$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever:

$$b = aq_1 + r_1,$$

com $r_1 < a$. Temos duas possibilidades:

**a)** $r_1 \mid a$, e, em tal caso, pela definição de $\mathrm{mdc}(a, b)$ e o Lema de Euclides temos:

$$r_1 = \mathrm{mdc}(a, r_1) = \mathrm{mdc}(a, b - q_1 \cdot a) = \mathrm{mdc}(a, b),$$

e termina o algoritmo, ou

**b)** $r_1 \nmid a$, e, nesse caso podemos efetuar divisão de $a$ por $r_1$, obtendo

$$a = r_1 \cdot q_2 + r_2,$$

com $r_2 < r_1$. Novamente, temos duas possibilidades:

**i)** $r_2 \mid r_1$, e nesse caso novamente pela definição de $\mathrm{mdc}(a, b)$ e Lema de Euclides temos

$$r_2 = \mathrm{mdc}(r_1, r_2) = \mathrm{mdc}(r_1, a - q_2 \cdot r_1) = \mathrm{mdc}(r_1, a) = \mathrm{mdc}(b - q_1 \cdot a, a) = \mathrm{mdc}(b, a) = \mathrm{mdc}(a, b),$$

e assim paramos o algoritmo, ou

**ii)** $r_2 \nmid r_1$, e nesse caso, podemos efetuar a divisão de $r_1$ por $r_2$, obtendo

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3,$$

com $r_3 < r_2$.

Este procedimento não pode continuar indefinidamente, pois teríamos uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > \ldots$ que não possui menor elemento, o que não é possível pelo Princípio da Boa Ordem. Logo, para algum $n$, temos que $r_n \mid r_{n-1}$, o que implica que $\mathrm{mdc}(a, b) = r_n$. □

A seguir apresentamos um exemplo de aplicação do Algoritmo de Euclides para encontrar o $\mathtt{mdc}$ de dois números inteiros.

**Exemplo 9.** *Encontrar, pelo algoritmo de Euclides o* $\mathtt{mdc}(48, 13)$*:*

$$\begin{aligned} 48 &= 13 \cdot 3 + 9 \\ 13 &= 9 \cdot 1 + 4 \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\ 4 &= 1 \cdot 4 \end{aligned}$$

*Logo* $\mathtt{mdc}(48, 13) = 1$ .

**Teorema 4** (Teorema de Bézout)**.** *Seja* $d$ *um número inteiro, o máximo divisor comum dos números inteiros* $a$ *e* $b$*. Então existem* $m$ *e* $n$ *números inteiros, tais que* $d = ma + nb$*, e além disso,* $d$ *é o menor inteiro positivo que pode ser escrito como combinação linear de* $a$ *e* $b$*.*

*Demonstração.* Seja $A$ o conjunto de todas as combinações lineares $xa + yb$, com $x$ e $y$ números inteiros. Obviamente, $A$ contém números negativos, positivos e também o zero. Vamos escolher $m$ e $n$ tais que $c = ma + nb$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto $A$. Primeiramente, será provado que $c \mid a$ e $c \mid b$. Supondo que $c \nmid a$, logo, pelo Teorema 3.2, existem $q$ e $r$ tais que $a = q \cdot c + r$ com $0 \leqslant r < c$. Portanto,

$$r = a - q \cdot c = a - q(ma + nb) = (1 - qm)a + (-qn)b.$$

Isto mostra que $r \in A$, o que é uma contradição, uma vez que $0 \leqslant r < c$ e, por hipótese, $c$ é o menor elemento positivo de $A$. Logo $c \mid a$ e de forma análoga se prova que $c \mid b$. Daí, $c \mid d$ pois $d = \mathtt{mdc}(a, b)$, portanto $c \mid d$.

Como $d$ é o máximo divisor comum de $a$ e $b$, então, existem números inteiros $q_1$ e $q_2$ tais que $a = q_1 \cdot d$ e $b = q_2 \cdot d$ e, portanto,

$$c = m \cdot a + n \cdot b = m \cdot q_1 \cdot d + n \cdot q_2 \cdot d = d \cdot (m \cdot q_1 + n \cdot q_2)$$

o que implica $d \mid c$.

Logo $d \leqslant c$, e como $c \leqslant d$, segue que $c = d = ma + nb$.

Para a segunda afirmação do teorema seja $d = mdc(a, b)$, logo $a = dx$ e $b = dy$. como $c = am + bn$, então

$$c = dxm + dyn \Longrightarrow c = d(xm + yn) \Longrightarrow d \mid c,$$

assim $d \neq c$, mas $d < c$ não pode acontecer pois $d$ é o máximo divisor comum de $a$ e $b$. Concluímos assim que $c = d$, isto é, o $d = mdc(a, b)$ é o menor número inteiro positivo contido em $A$. $\square$

Pode–se observar facilmente que, dados $a$ e $b$ números inteiros, temos, $mdc(a, b) = mdc(b, a)$, $mdc(0, a) = |a|$, $mdc(1, a) = 1$ e que $mdc(a, a) = |a|$.

**Exemplo 10.** *Calcule o* $mdc(221, 91)$ *e em seguida encontre um valor de* $x$ *e* $y$ *números inteiros, tal que* $221x + 91y = mdc(221, 91)$

Temos inicialmente pelo Algoritmo de Euclides que:

$$\begin{aligned} 221 &= 91 \cdot 2 + 39 \\ 91 &= 39 \cdot 2 + 13 \\ 39 &= 13 \cdot 3 \end{aligned}$$

Logo o $mdc(221, 91) = 13$.

Assim podemos escrever $13 = 221x + 91y$ com $x$, $y$ números inteiros. Por inspeção, temos que

$$13 = 221 \cdot (-2) + 91 \cdot (5),$$

logo $x = -2$ e $y = 5$.

No decorrer do trabalho vamos mostrar que podemos encontrar esses números inteiros $x$ e $y$ por um método diferente da inspeção.

**Teorema 5.** *Dois números inteiros* $a$ *e* $b$*, não conjuntamente não nulos (*$a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$*), são primos entre si se, e somente se, existirem* $x$ *e* $y$ *números inteiros tais que* $ax + by = 1$

*Demonstração.* ($\Longrightarrow$) Se $a$ e $b$ são primos entre si, então o $mdc(a, b) = 1$ e pelo Teorema de Bézout temos que existem $x$ e $y$ tais que $ax + by = 1$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, se existem $x$ e $y$ tais que $ax+by=1$ e se o $mdc(a,b)=d$, então $d \mid a$ e $d \mid b$. Logo, $d \mid (ax+by)$ e $d \mid 1$, o que implica $d=1$ ou $mdc(a,b)=1$, isto é, $a$ e $b$ são primos entre si. □

**Corolário 1.** *Se o* $mdc(a,b)=d$, *então o* $mdc\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$

*Demonstração.* Primeiramente, observamos que $d \mid a$ e $d \mid b$, pois $d$ é um divisor comum de $a$ e $b$. Com isso, se o $mdc(a,b)=d$, então existem $x$ e $y$ números inteiros tais que $ax+by=d$, ou seja, dividindo ambos os membros desta igualdade por $d$ temos:

$$\left(\frac{a}{d}\right)x \;+\; \left(\frac{b}{d}\right)y = 1$$

Logo, pelo teorema anterior, os números inteiros $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são primos entre si, isto é, o $mdc\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$. □

**Exemplo 11.** *Temos que* $mdc(18,30)=6$ *e* $mdc\left(\frac{18}{6},\frac{30}{6}\right)=mdc(3,5)=1$

**Proposição 8.** *Dados* $a$ *e* $b$ *números inteiros e* $t$ *um inteiro positivo, tem-se que* $mdc(ta,tb)=t\cdot mdc(a,b)$.

*Demonstração.* Pelo Teorema de Bézout $mdc(ta,tb)$ é o menor valor positivo de

$$m\cdot(ta)+n\cdot(tb),$$

($m$ e $n$ inteiros), que é igual a $t$ vezes o menor valor positivo de

$$ma+mb=t\cdot mdc(a,b).$$

□

**Teorema 6.** *Sejam* $a,\ b,\ c$ *números inteiros. Se* $a \mid bc$ *e* $mdc(a,b)=1$, *então* $a \mid c$.

*Demonstração.* Como $mdc(a,b)=1$ pelo Teorema 3.5 existem inteiros $x$ e $y$ tais que $xa+yb=1$. Multiplicando os dois lados dessa última equação por $c$ segue que $x\cdot(ac)+y\cdot(bc)=c$. Como $a \mid ac$ e, por hipótese, $a \mid bc$, então, pela Proposição 3.4, $a \mid (x\cdot(ac)+y\cdot(bc))$, ou seja, $a \mid c$. □

Vamos apresentar a seguir o conceito, demonstração e exemplos das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

# 4 Equações Diofantinas Lineares

Neste capítulo vamos introduzir conceitos sobre as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas, enfatizamos que as equações diofantinas podem ter mais incógnitas, mas como o foco do trabalho é problemas no Ensino Médio, estudaremos esse "recorte" das equações, onde Pommer (2008, p.27) usou o seguinte conceito.

> [...] uma equação algébrica com uma ou mais incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas soluções inteiras. Uma equação deste tipo pode não ter solução, ou ter um número finito ou infinito de soluções (COURANT; ROBBINS, p. 59, 2000)

No nosso trabalho vamos considerar somente problemas envolvendo a busca de soluções inteiras para equação da forma $ax + by = c$, com $a$, $b$ e $c$ números inteiros, conhecida como Equação Diofantina Linear com duas incógnitas.

**Definição 4** (Equações Diofantinas)**.** *Dados* $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$*, chamamos de Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas as equações do tipo* $ax + by = c$*, com* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$.

Qualquer par de números inteiros que, quando substituído em $x$ e $y$ tornam a equação uma sentença verdadeira, são chamados de soluções para a equação, mas temos que nem sempre essas equações possuem soluções, como por exemplo $2x + 6y = 5$, não possui nenhuma solução $x_0$, $y_0$, números inteiros, pois, caso contrário, teríamos $2x_0 + 6y_0$ par, e, portanto, nunca igual a 5. Como indagado anteriormente, podemos nos perguntar quando uma equação diofantina tem solução, e caso as tenha, como determiná-las. Para responder as indagações segue os teoremas e proposições.

**Teorema 7.** *Dados* $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$*, com* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$*, a equação diofantina* $ax + by = c$ *admite solução se, e somente se,* $\mathrm{mdc}(a, b)$ *divide* $c$*.*

*Demonstração.* Suponha a existência de solução na equação, ou seja, que existam $x_0,\ y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = c$. Temos que $\mathrm{mdc}(a, b) \mid a$ e $\mathrm{mdc}(a, b) \mid b$ portanto, $\mathrm{mdc}(a, b)$ divide qualquer combinação linear formada por $a$ e $b$ . Assim, $\mathrm{mdc}(a, b) \mid (ax_0 + by_0)$, logo $\mathrm{mdc}(a, b) \mid c$.

Reciprocamente, por hipótese, temos que chamando $d = \mathrm{mdc}(a, b)$, temos que $d \mid c$. Então, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $c = qd$. Pelo Teorema de Bézout, existem $x_0,\ y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = d$. Multiplicando por $q$ ambos os lados da igualdade, obtemos

$(ax_0) \cdot q + (by_0) \cdot q = dq$. Portanto, $(ax_0) \cdot q + (by_0) \cdot q = c$, e assim, podemos afirmar que a equação diofantina $ax + by = c$ admite pelo menos uma solução: $x = x_0 \cdot q$ e $y = y_0 \cdot q$ □

Uma consequência deste teorema é o fato de que quando $mdc(a, b) = 1$ a equação apresentará infinitas soluções, já que 1 é divisor de qualquer número real. Importante notar que quando $mdc(a, b) \neq 1$ podemos dividir ambos os membros da igualdade por um valor conveniente de modo que $mdc(a, b) = 1$, ou seja, chamando $mdc(a, b) = d$, a equação $ax + by = c$ pode ser reduzida para a forma

$$\frac{a \cdot x}{d} + \frac{b \cdot y}{d} = \frac{c}{d}.$$

Note que $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, Assim, é suficiente estudar as equações do tipo $ax + by = c$, com $mdc(a, b) = 1$

**Proposição 9.** *Seja* $x_0$, $y_0$ *uma solução particular da equação* $ax + by = c$*, onde* $mdc(a, b) = 1$*. Então todas as soluções inteiras* $x$, $y$ *da equação são da seguinte forma:*

$$x = x_0 - bt, \quad y = y_0 + at,$$

*onde* $t \in \mathbb{Z}$.

*Demonstração.* Seja $x_0$, $y_0$ uma solução qualquer da equação $ax + by = c$, logo;

$$ax_0 + by_0 = ax + by = c.$$

Portanto,

$$a(x_0 - x) = b(y - y_0) \tag{1}$$

Como $mdc(a, b) = 1$, segue que $b \mid (x_0 - x)$, logo; $x_0 - x = tb$, ou seja,

$$x = x_0 - bt,$$

com $t \in \mathbb{Z}$. Substituindo $x_0 - x$ por $tb$ em (1), obtém-se: $y - y_0 = ta$, ou seja,

$$y = y_0 + ta.$$

Por outro lado, $x$, $y$ como no enunciado, é solução, pois;

$$ax + by = a(x_0 - tb) + b(y_0 + ta) = ax_0 + by_0 = c$$

$\square$

O número inteiro $t$ é também chamado de parâmetro, sendo que para cada valor de $t$, tem–se uma solução distinta para a equação diofantina.

**Exemplo 12.** *Resolver a Equação Diofantina* $26x + 36y = 10$.

*Solução*: Como o $\mathrm{mdc}(26, 36) = 2$ e $2 \mid 10$, temos que a equação acima admite solução. Assim podemos simplificar a equação para a forma $13x+18y = 5$, em que o $\mathrm{mdc}(13, 18) = 1$. Assim devemos determinar $r$ e $s \in \mathbb{Z}$ tais que $13 \cdot r + 18 \cdot s = 1$. Temos:

$$\begin{aligned}
18 &= 13 \cdot 1 + 5 \\
13 &= 5 \cdot 2 + 3 \\
5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \\
&= 3 - (5 - 3) \\
&= 2 \cdot 3 - 5 \\
&= 2 \cdot (13 - 5 \cdot 2) - 5 \\
&= 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 \\
&= 2 \cdot 13 - 5(18 - 13) \\
&= 7 \cdot 13 - 5 \cdot 18.
\end{aligned}$$

Logo, $r = 7$ e $s = -5$. Multiplicando ambos os lados de $1 = 13 \cdot 7 + 18 \cdot (-5)$ por 5, segue que

$$5 = 13 \cdot 35 + 18 \cdot (-25),$$

Isto é, $x_0 = 35$ e $y_0 = -25$ é uma solução de $13x + 18y = 5$, portanto a solução geral da equação diofantina é dada por: $x = 35 + 18t$ e $y = -25 - 13t$ com $t \in \mathbb{Z}$. Neste caso, as outras soluções são determinadas pelo parâmetro $t$.

Em muitas situações, apenas as soluções inteiras não negativas ou de uma equação diofantina são de interesse, ou seja, soluções $x$ e $y$ sendo números inteiros, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$. Veremos isto nos próximos exemplos.

**Problema 1.** *O problema dos selos. É possível comprar selos de* R\$ 5,00 *e* R\$ 10,00 *dispondo de* R\$ 95,00 *sem que haja troco? Se for possível, quantas são as maneiras de se comprar os selos?*

*Solução*: Para resolver o problema, sejam $x$ o número de selos de R\$ 5,00 e $y$ o número de selos de R\$10,00 assim temos a equação diofantina $5x+10y = 95$. Como o $\text{mdc}(5, 10) = 5$ e $5 \mid 95$ temos que a equação possui solução, dividindo a equação por 5 temos: $x+2y = 19$ onde $x_0 = 1$ e $y_0 = 9$ é uma solução particular. Todas as soluções são do tipo $x = 1 + 2t$ e $y = 9 - t$, com $t \in \mathbb{Z}$. Logo para todas as soluções do problema devemos ter $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

Então devemos ter $1 + 2t \geqslant 0$ e $9 - t \geqslant 0$ o que implica em $t \geqslant 0,5$ e $t \leqslant 9$, logo $0,5 \leqslant t \leqslant 9$, assim:

| t | x | y |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 8 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 7 | 6 |
| 4 | 9 | 5 |
| 5 | 11 | 4 |
| 6 | 13 | 3 |
| 7 | 15 | 2 |
| 8 | 17 | 1 |
| 9 | 19 | 0 |

Que são os valores de $t$, $x$, $y$ para todas as soluções inteiras não negativas, logo temos 9 maneiras de comprar os selos sem que haja troco.

**Problema 2.** *O problema das quadras. Quantas quadras de vôlei e quantas de futsal são necessárias para que 200 alunos joguem simultaneamente? E se forem 87 alunos?*

*Solução*: Temos que as equipes de vôlei e futsal são compostas, respectivamente, por 6 e 5 jogadores. Como precisamos de duas equipes em cada jogo, podemos modelar o problema a uma equação diofantina da forma $12x + 10y = 200$, onde $x$ representa as quadras de vôlei e $y$ as quadras de futsal que são necessárias para acomodar 200 jogadores simultaneamente. Como o $mdc(12, 10) = 2$ e $2 \mid 200$ temos que a equação possui solução, assim simplificando a equação temos que $6x+5y = 100$. Pelo Algoritmo de Euclides segue que $6 = 5 \cdot 1 + 1$ logo $1 = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1$, multiplicando ambos os membros por 100 temos que $100 = 6 \cdot (100) - 5 \cdot (100)$, ou seja, $100 = 6 \cdot (100) + 5 \cdot (-100)$, logo $x_0 = 100$ e $y_0 = -100$ é uma solução particular, e a solução geral é da forma $x = 100 + 5t$ e $y = -100 - 6t$ com $t \in \mathbb{Z}$.

Como o número de quadras deve ser um número positivo, devemos ter $x > 0$ e $y > 0$, assim $100 + 5t > 0$ e $-100 - 6t > 0$, o que implica em $t > -20$ e $t < -16,66$ logo $-20 < t < -16,66$. Assim ,$t = -19$, $t = -18$ ou $t = -17$
Para $t = -19$, temos 5 quadras de vôlei e 14 quadras de futsal.
Para $t = -18$, temos 10 quadras de vôlei e 8 quadras de futsal.
Para $t = -17$, temos 15 quadras de vôlei e 2 quadras de futsal.

Percebemos que na equação $6x + 5y = 100$ poderíamos por inspeção utilizar $x = 0$ e $y = 20$ como uma solução particular e assim as soluções em $x$ "crescem" em 5 e 5 unidades e as soluções em $y$ "diminuem" de 6 e 6 unidades, pois temos $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$, com isso as soluções procuradas seriam $x = 5$ e $y = 14$; $x = 10$ e $y = 8$; $x = 15$ e $y = 2$ não podendo ter mais soluções inteiras positivas, pois as próximas soluções já teriam $y$ negativo o que não pode acontecer, pois estamos com exemplos "reais" e não existem quadras negativas.

Caso fossem 87 alunos o problema seria modelado como $12x + 10y = 87$ e como $mdc(12, 10) = 2$ e $2 \nmid 87$ temos que a equação não possui solução, podemos ver que de um dos lados da igualdade temos dois números pares $12x$ e $10y$, assim sua soma também é um número par e do outro lado da igualdade 87 que é um número ímpar o que seria um absurdo!

Nesses dois últimos exemplos percebemos que as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas aparecem em problemas com situações reais no cotidiano. Com isso, além de resolver puramente as equações diofantinas devemos inicialmente interpretar o problema. Oliveira (2006) destaca a importância do estudo da Teoria Elementar dos Números, pois ela também está associada à realidade atual, onde segundo o autor enfrenta problemas provenientes das Ciências da Computação e da informática, bem como o de outras áreas do conhecimento, uma vez que quase todos os campos da Matemática têm alguma conexão com a Teoria Elementar dos Números. Pommer (2008, p.33) destacou essa exploração de problemas que podem ser modelados por Equações Diofantinas Lineares.

> Considero relevante estudos voltados para as equações diofantinas lineares no Ensino Médio, pelo fato de sua resolução envolver conhecimentos usuais do programa oficial de Ensino Básico, como o conceito de múltiplo, divisor e o máximo divisor comum entre dois números inteiros. Ainda, a busca das soluções inteiras de situações-problema contextualizadas que representam equações diofantinas lineares possibilita uma oportunidade de exploração de um tópico da Matemática Discreta..

Assim, as Equações Diofantinas Lineares se torna um tema importante para exploração da Matemática Discreta no Ensino Médio, visto que no Ensino Básico atual ocorre uma predominância da Matemática do Contínuo conforme verificou Moura(2005) em sua dissertação de Mestrado, onde ao analisar os livros didáticos no Ensino Básico, apontou que a partir do 2º ciclo do Ensino Fundamental até o Ensino Médio prevalece a matemática do Contínuo.

No próximo capítulo temos os fundamentos metodológicos que embasaram a concepção, a aplicação e a análise de uma sequência didática, a fim de observar as manifestações dos alunos em relação ao nosso tema de estudo, permitindo verificar o objetivo deste trabalho.

# 5 Procedimentos Metodológicos da Pesquisa

Com o objetivo de analisar a compreensão dos alunos a respeito da resolução de problemas que envolvem equações diofantinas lineares, neste capítulo descrevemos os procedimentos metodológicos da pesquisa. Para tanto, as questões que envolvem a abordagem de pesquisa, o cenário em que realizamos o estudo, os sujeitos envolvidos e os procedimentos de apreensão e análise dos dados.

## 5.1 Abordagem de Pesquisa

Situamos nosso trabalho no campo da pesquisa empírica e descritiva com abordagem quanti-qualitativa (mista). De acordo com Strauss e Corbin (2008) a pesquisa quantitativa e qualitativa pode se complementar, pois essa combinação pode ser feita por razões suplementares, complementares, informativas, de desenvolvimento, entre outras.

Denzin e Lincoln (2005) apresentam uma definição para pesquisa qualitativa: a pesquisa qualitativa é uma atividade situada que posiciona o observador no mundo. Ela consiste em um conjunto de práticas interpretativas e materiais que tornam o mundo visível. Essas práticas transformam o mundo, fazendo dele uma série de representações, incluindo notas de campo, entrevistas, conversas, fotografias, gravações e anotações pessoais. Nesse nível, a pesquisa qualitativa envolve uma postura interpretativa e naturalística diante do mundo. Isso significa que os pesquisadores desse campo estudam as coisas em seus contextos naturais, tentando entender ou interpretar os fenômenos em termos dos sentidos que as pessoas lhes atribuem. Já a pesquisa quantitativa serve para traduzir em números as opiniões e informações para então depois realizar a análise dos resultados e concluir o trabalho. Sendo feita por meio de percentagens, média, coeficiente de correlação e outros. Suas características principais são (DENZIN; LINCOLN, 2005; NEVES, 1996; HAYATI; KARAMI; SLEE, 2006):

> – Obedece a um plano pré-estabelecido, com o intuito de enumerar ou medir eventos;
> – Utiliza a teoria para desenvolver as hipóteses e as variáveis da pesquisa;
> – Examina as relações entre as variáveis por métodos experimentais ou semi-experimentais, controlados com rigor;
> – Emprega, geralmente, para a análise dos dados, instrumental estatístico;
> – Confirma as hipóteses da pesquisa ou descobertas por dedução, ou seja, realiza predições específicas de princípios, observações ou experiências;
> – Utiliza dados que representam uma população específica (amostra), a partir da qual os resultados são generalizados; e
> – Usa, como instrumento para coleta de dados, questionários estruturados, elaborados com questões fechadas, testes e checklists, aplicados a partir de entrevistas individuais, apoiadas por um questionário convencional (impresso) ou eletrônico.

Essas são as características básicas de nossa pesquisa, onde utilizamos testes a priori, questionários, teste a posteriori, fatos esses que serão detalhados na subseção dos procedimentos metodológicos, da, qual a seguir, apresentaremos o local onde foi realizada a pesquisa.

## 5.2 Cenário da pesquisa

Nosso trabalho se caracteriza como uma pesquisa descritiva, onde realizamos um estudo com a coleta de dados, depois foi feita sua análise e interpretação. Diante disso, nossa pesquisa é uma pesquisa de campo, onde nesse tipo de pesquisa é realizado observação, coleta, análise e interpretação de fatos e fenômenos que ocorrem dentro de seus nichos, cenários e ambientes naturais de vivência. Na afirmação de Gonsalves (2001, p. 67) temos:

> A pesquisa de campo é o tipo de pesquisa que pretende buscar a informação diretamente com a população pesquisada. Ela exige do pesquisador um encontro mais direto. Nesse caso, o pesquisador precisa ir ao espaço onde o fenômeno ocorre, ou ocorreu e reunir um conjunto de informações a serem documentadas [...]

Diante do exposto, afirmamos que nossa pesquisa é caracterizada como de campo, conforme Gonsalves descreveu. Na ocasião, a instituição escolhida para a realização da pesquisa foi um Campus do Instituto Federal do Maranhão-IFMA, a escolha do local se deu pelo fato do pesquisador ser servidor público na referida instituição e ter contato com a realidade dos alunos.

O Campus escolhido possuía na data da realização da pesquisa (segundo semestre de 2018) 789 alunos matriculados. Esse total divide-se em seus cursos técnicos integrados[7], cursos Técnicos concomitantes[8] , curso Técnico Subsequente[9], cursos superiores e curso de Educação de Jovens e Adultos (PROEJA). Destes discentes, 499 estão matriculados na forma de ensino Técnico Integrado, modalidade na qual estão inseridos os sujeitos da pesquisa. Registre-se que, hodiernamente, encontram-se 4 cursos disponibilizados na forma integrada, quais sejam, Administração, Eletroeletrônica, Eletromecânica e Edificações.

## 5.3 Sujeitos da Pesquisa

Este trabalho envolveu a participação de sujeitos, alunos que tinham disponibilidade de realizar a oficina de Equações diofantinas lineares no contraturno da escola. A opção por esse critério foi pelo fato de não atrapalhar o planejamento das aulas e por ser mais difícil os alunos se deslocarem para o IFMA aos sábados. Como critério básico para a escolha dos sujeitos, optamos pela adesão voluntária. Para tanto, explicamos em sala de aula composta aproximadamente por 40 alunos como seria a pesquisa. Destacamos que na apresentação inicial do tema "Equação Diofantina", poucos alunos demonstraram interesse. Contudo, assim que foi apresentado um exemplo de aplicação conforme exposto na página 3, 20 alunos manifestaram interesse em participar da pesquisa. Entretanto, salientamos que dos 20 alunos que manifestaram e começaram a participar do trabalho, 15 deles participaram totalmente da pesquisa, o que corresponde a participação desde o teste a priori até o último teste. Com isso definimos como sujeitos somente os alunos que permaneceram até o final, visto que os que se interessaram e não participaram da pesquisa até o final, se deu pelo fato de dificuldades de permanecer na instituição os dois turnos ou se deslocar no contraturno. Sendo assim, dos 15 participantes, 11 (onze) do sexo masculino e 4 (quatro) do sexo feminino.

[7]Nesses cursos os alunos estudam simultaneamente o Ensino Médio e o Ensino Técnico Profissionalizante.

[8]Curso em que o discente faz o ensino médio em uma outra escola e o Técnico Profissionalizante no IFMA.

[9]Nessa modalidade o aluno já terminou o ensino médio e faz somente o ensino técnico.

## 5.4 Procedimentos de apreensão e análise dos dados

Para atingir o objetivo desta pesquisa, foi elaborado e aplicado uma sequência didática embasada na Engenharia Didática, metodologia descrita em Artigue (1996). Segundo esta autora, a Engenharia Didática surgiu no bojo das questões levantadas pela Didática da Matemática Francesa, em meados da década de 1980, com a intenção de facilitar os estudos sobre as relações entre a investigação e a ação no sistema de ensino. Essa metodologia foi criada por inspiração do trabalho didático comparável à realização de um projeto pelo engenheiro, que apoia e aceita o controle científico, mas também está ciente da maior complexidade dos problemas didáticos.

A Engenharia Didática possui uma "dupla função" à qual pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino (MACHADO, S., 2002, p. 198). Na concepção da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa, utilizamos para a elaboração da sequência de atividades alguns elementos das quatro fases descritas por Artigue (1996), assim definimos: a 1ª fase, das análises preliminares, a 2ª fase, da concepção e da análise a priori, a 3ª fase, da experimentação e a 4ª e última fase, da análise a posteriori e validação. Assim, na pesquisa, inicialmente foi feito um levantamento sobre o perfil dos alunos e análises preliminares sobre o tema estudado. Depois, na segunda fase foi aplicado um questionário chamado de teste *a priori*, onde o objetivo de analisar esse teste é no sentido de determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido com a validação dos resultados no teste *a posteriori*.

O teste *a priori* teve 08 (oito) questões com situações problemas que envolveram as equações diofantinas lineares. Após a sua aplicação foi analisado esse teste quantitativamente (números de erros e acertos) e qualitativamente (as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das situações problemas) as estratégias. Após essa análise, tivemos a terceira fase que foi a de intervenção. Para tanto, realizamos com os sujeitos da pesquisa uma oficina de 16h, sobre o tema equações diofantinas lineares com duas incógnitas, incluindo uma revisão sobre o cálculo de $\mathtt{mdc}(a, b)$ e divisibilidade.

Por fim, após a intervenção, foi aplicado um novo teste, o qual chamamos de teste *a posteriori* com 08 (oito) questões, similar ao primeiro onde os alunos tinham uma nova ferramenta para resolver os problemas.[10]. A proposta do teste *a posteriori* teve como objetivo analisar o conjunto de resultados e assim validar a exploração dos dados recolhidos. Analisamos o *teste a posteriori* de forma quantitativa (número de acertos e erros) e qualitativa (análise das resoluções feita pelos alunos). Com essa análise podemos validar a nossa hipótese, de que os alunos do Ensino Médio podem se apropriar dos conceitos do estudo das Equações Diofantinas Lineares. Após a resolução do teste a posteriori, foi proposto para os alunos um questionário onde a proposta era que eles pudessem dar sua opinião sobre o tema estudado durante a pesquisa.

[10] As resoluções das equações diofantinas durante a oficina foi pelo método descrito no capítulo 5 com o algoritmo de Euclides e as divisões sucessivas, além de usar a divisibilidade dos inteiros.

# 6 Análise e discussão dos dados

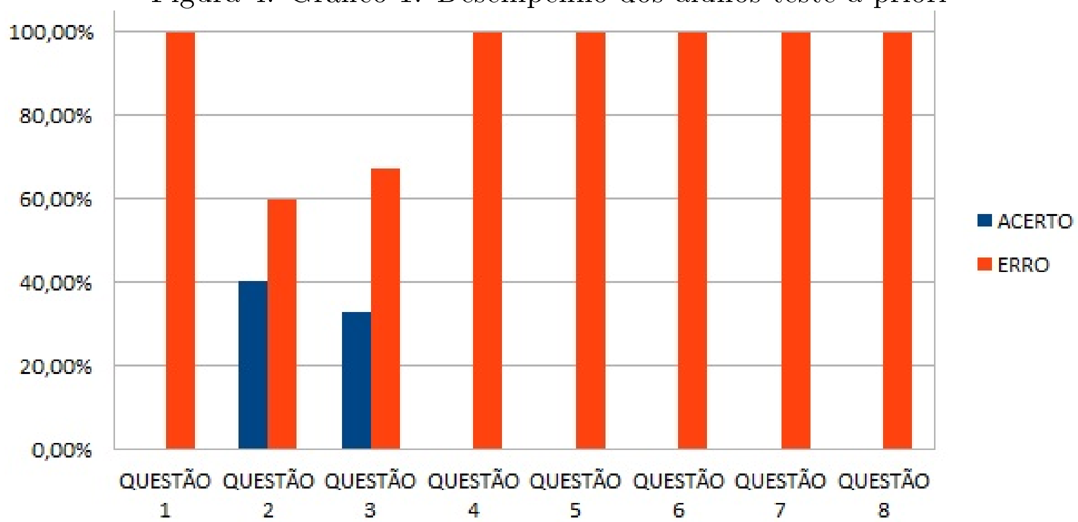
Neste capítulo apresentamos a análise e interpretação dos dados obtidos em nossa pesquisa, tendo como sujeitos os alunos da 1ª série do Ensino Médio de um Campus do Instituto Federal de Educação do Maranhão. Os dados foram analisados, tendo como parâmetro o referencial teórico-metodológico com base nas quatro fases da Engenharia Didática.

## 6.1 Teste a priori

O teste *a priori*, como observamos no capítulo Procedimentos Metodológicos da Pesquisa, consiste na segunda fase da metodologia utilizada pela Engenharia Didática, ou seja, antes da experimentação, que no nosso trabalho foi uma oficina de estudos, discussão e soluções de problemas que envolvem as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas. Este teste tem como mecanismo orientar para o desenvolvimento das fases que se sucederam da metodologia usada por Artigue (1996). Nele foram aplicados 8 (oito) situações-problemas (Apêndice A) que envolveram uma equação e duas incógnitas. Nessas situações problemas, os alunos resolveram individualmente de acordo com seus conhecimentos já adquiridos e em vivência escolar.

No gráfico abaixo, listamos o desempenho dos alunos em relação aos erros e acertos no teste *a priori*.

Figura 4: Gráfico 1: Desempenho dos alunos teste a priori




Fonte: Próprio autor

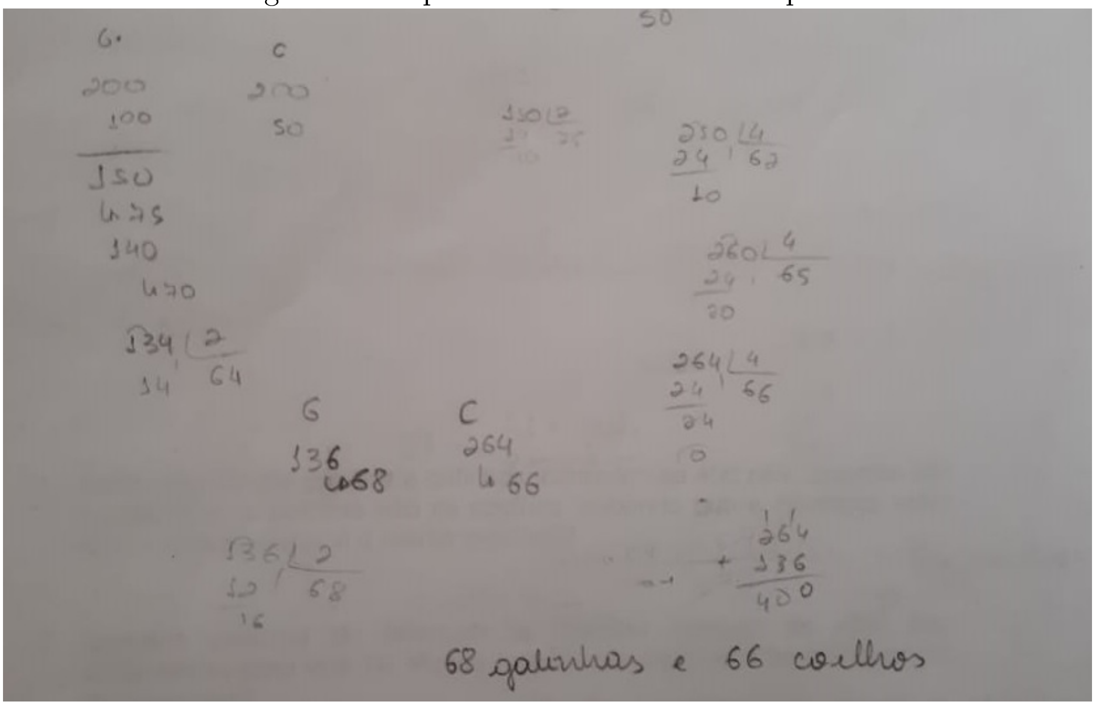
Com base no Gráfico 1 (Figura 4) percebemos que apenas duas situações problemas tiveram acertos por parte dos alunos, o que representa 25% do total das questões.

A seguir temos a primeira questão do teste *a priori*.

**Problema 1 (Teste a Priori): Numa criação de coelhos e galinhas, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?**

Pelo referido Gráfico 1, observamos ainda que nenhum dos alunos conseguiram encontrar o valor corretamente. A Figura 5 apresenta uma resolução feita por um dos alunos nesse problema.

Figura 5: Resposta do Aluno A Teste a priori




Fonte: Acervo do autor

Pela resolução, podemos ver que o aluno não escreveu a equação diofantina $4x + 2y = 400$, ( onde $x$ é o número de patas dos coelhos e $y$ é o número de pata das galinhas), e por meio da tentativa e erro, através de várias divisões procurou uma solução da referida equação, onde o mesmo encontrou uma solução particular, mas a mesma não era a solução procurada, visto que a resposta correta era $x = 67$ e $y = 66$. Em outras respostas analisadas encontramos outras soluções para a equação diofantina, onde a resposta apresentada na figura 5 foi a que mais se aproximou do resultado correto.

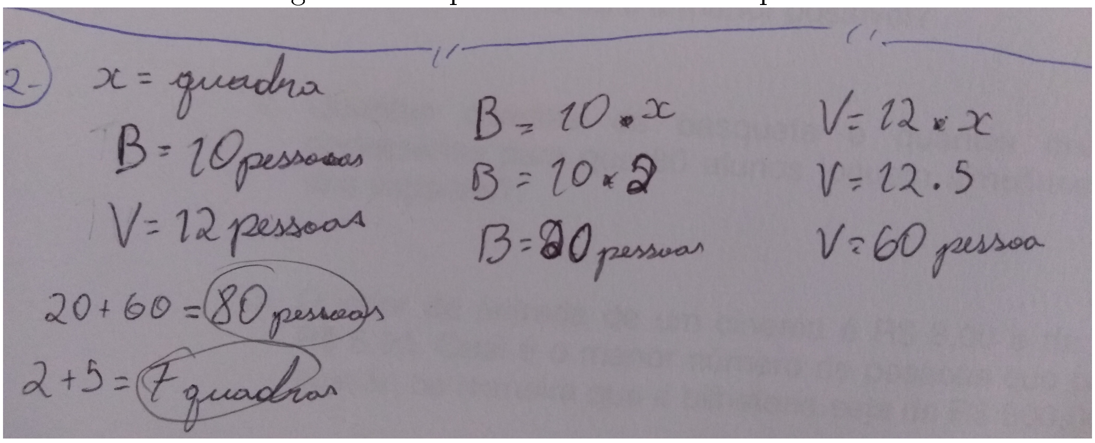
A seguir, temos o próximo problema.

**Problema 2 (Teste a Priori): Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente qualquer um dos esportes? (LA ROQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 39).**

No problema, o índice de acerto foi de 40%, o que representa 6 alunos, onde todos os sujeitos que conseguiram encontrar uma solução foi por meio do uso da tentativa e erro, através de várias divisões até encontrar uma solução.

A seguir, temos a resolução feita por um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 6: Resposta Aluno B teste a priori




Fonte: Acervo do Autor

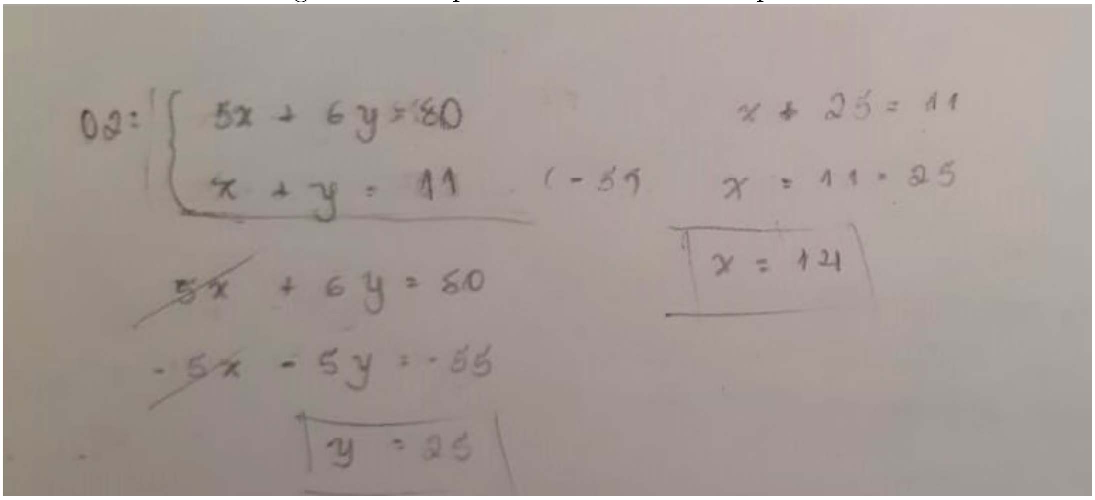
Percebemos que o aluno não montou a equação diofantina que no caso do problema seria $10x + 12y = 80$ e na sua forma simplificada $5x + 6y = 40$( onde $x$ é o número quadras de basquete e $y$ é o número de quadras de vôlei), no entanto isso não foi um obstáculo para que conseguisse encontrar o valor procurado. Como relatado anteriormente, os alunos que encontraram a solução procurada pelo problema resolveram por tentativa e erro com divisões sucessivas. Pommer (2008, p.55) destacou como importante o método da tentativa e erro, como podemos perceber ao afirmar que:

> Nesta pesquisa, as considerações teóricas propiciaram elementos para antecipar o método da tentativa e erro como estratégia de base, que até pode permitir ao aluno determinar algumas ou, em alguns casos, todas as soluções inteiras de uma equação diofantina linear, porém não permite verificar a inexistência de solução.

Assim, conforme o autor, esse meio de resolução pode permitir encontrar a solução em alguns problemas que envolvem uma equação e duas incógnitas, porém não permite verificar a inexistência de solução.

Na Figura 7, temos outra solução para o mesmo problema realizada por um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 7: Resposta aluno D teste a priori




Fonte: Acervo do Autor

Percebemos que o aluno montou um sistema linear com duas equações e duas incógnitas, visto que isso seria impossível pelo fato de não possuir a informação colocada $x + y = 11$. Com isso, podemos entender que possivelmente o sujeito possa ter colocado essa informação por ter os coeficientes 5 e 6 na equação diofantina. Tendo em vista que esse tipo de erro foi o mais comum encontrado nas soluções dos sujeitos no teste *a priori*.

Esta análise nos leva a observar que alguns sujeitos da pesquisa tentaram montar um sistema linear com duas equações e duas incógnitas. Esse aspecto nos chamou a atenção, pois muitos desses alunos comentaram que estava faltando dados no problema, mostrando que possivelmente poderiam responder o problema se fosse um sistema linear de duas equações e duas incógnitas.

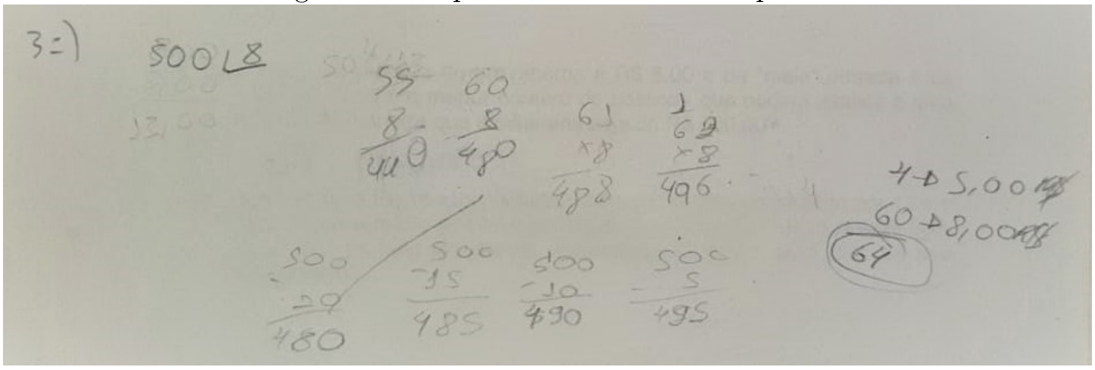
No próximo problema, todos os alunos que encontraram uma solução, foi por meio da tentativa e erro, onde apenas 5 alunos conseguiram encontrar o valor procurado, que era o menor número de pessoas, representando 33% do total dos sujeitos da pesquisa.

A seguir, temos o enunciado do problema.

**Problema 3 (Teste a Priori): O valor da entrada de um cinema é R\$ 8,00 e da "meia" entrada é de R\$ 5,00. Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R\$ 500,00?**

A seguir, temos uma solução feita por um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 8: Resposta aluno C teste a priori



Fonte: Acervo do Autor

Assim como em resoluções anteriores, notamos que o aluno não montou a equação diofantina, e por meio da tentativa e erro encontrou uma solução. Observamos as sucessivas multiplicações na busca de um resultado exato, assim não podemos desprezar o método da tentativa e erro, pois com ele os alunos não só trabalham as operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão), como a concentração em encontrar a solução desejada. Destacamos que a equação diofantina desse problema possui mais de uma solução inteira não negativa, mas que o problema procurava uma solução específica.

A partir do quarto problema, percebemos pelo Gráfico 1, que nenhum aluno acertou. Diante do exposto constatamos que dos oitos problemas propostos, nenhum dos sujeitos da pesquisa conseguiu resolver pelo menos três problemas do teste *a priori*, muito pelo fato de não possuir uma estratégia que pudesse resolver as equações diofantinas, procuraram em sua predominância uma solução por meio da tentativa e erro.

Pela análise do teste *a priori*, constatamos que os sujeitos não perceberam que uma equação diofantina poderia possuir mais de uma solução, pois assim que encontravam um valor que fosse solução da equação já o considerava como resposta do problema, onde em alguns desses problemas buscava uma solução específica.

O resultado do teste a *priori* era esperado antes do início da intervenção didática, visto que o tema em questão não faz parte do currículo do Ensino Básico no país, mas devemos destacar o fato de que mesmo sem alguma ferramenta específica, alguns alunos conseguiram encontrar uma solução, mas muitas vezes não era a solução procurada pelo problema, onde essas resoluções se deram pelos conhecimentos adquiridos pelos alunos na vivencia escolar.

Na análise, muitos problemas não foram interpretados corretamente. Em relação a esse tipo de erro em que o aluno não "converte" o problema matemático na linguagem matemática, destacamos Smole apud Diniz (2001, p. 69);

> Em qualquer área do conhecimento, a leitura deve possibilitar a compreensão de diferentes linguagens, de modo que os alunos adquiram uma certa autonomia no processo de aprender. Em uma situação de aprendizagem significativa, a leitura é reflexiva e exige que o leitor se posicione diante de novas informações, buscando, a partir da leitura, novas compreensões.

Com isso, percebemos que o hábito de leitura é importante, onde dentro de sala de aula a leitura e interpretação de problemas matemáticos podem ajudar os alunos a se posicionarem diante de informações novas e assim buscar novas compreensões.

No próximo capítulo temos a análise do teste a *posteriori*, onde foram baseadas nos dados coletados após a intervenção didática com a oficina de estudos e discussões sobre as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

## 6.2 Teste a Posteriori

O teste a *posteriori* corresponde à quarta etapa da Engenharia Didática, onde temos também a validação dos dados, que se apoia sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação, que neste trabalho foi uma oficina de estudos e discussões sobre Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

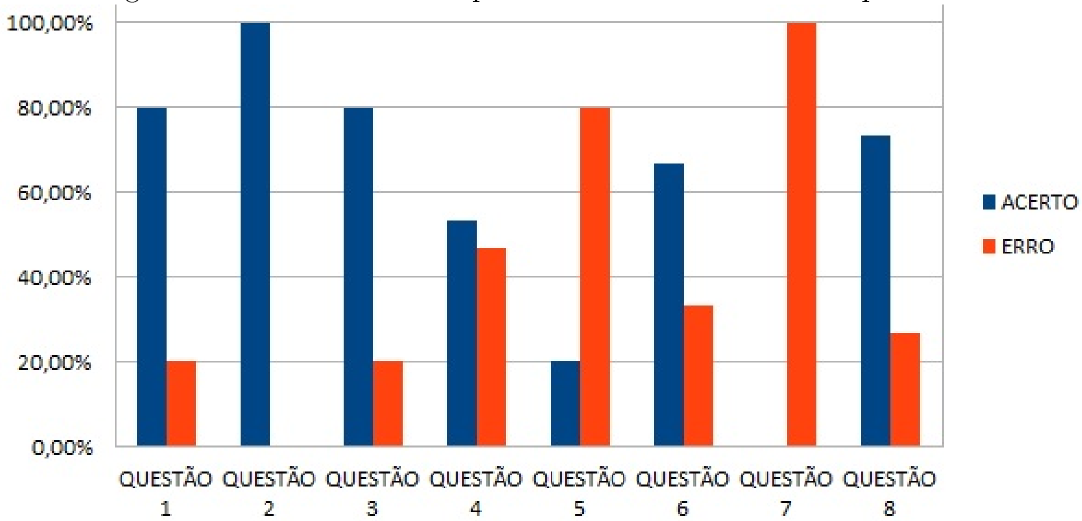
Segundo Artigue (1996), esta fase se caracteriza pelo tratamento dos dados colhidos e a confrontação com a análise *a priori,* permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões norteadoras levantadas foram respondidas.

O teste a *posteriori* foi aplicado após a oficina de estudos sobre Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas, onde nesse teste foram apresentados 08(oito) situações problemas semelhantes ao teste a *priori*. Ressaltamos, no entanto, que algumas situações problemas eram iguais ao primeiro teste, onde os alunos novamente responderam o teste individualmente.

Nesse momento do desenvolvimento do trabalho, admitimos a hipótese inicial de que os alunos poderiam se apropriar dos conceitos do tema estudado, onde eles poderiam encontrar uma solução particular e a partir dela encontrar as outras soluções de uma equação diofantina, além de reconhecer quando elas teriam ou não solução.

Abaixo segue o desempenho dos alunos nas oito situações problemas do teste *a posteriori*, onde dividimos entre erros e acertos, no qual foi considerado acerto somente os alunos que encontraram o total de soluções solicitadas, ou a solução específica procurada, ou ainda que justificassem o motivo pelo qual a equação diofantina não possuía solução inteira.

Figura 9: Gráfico 2: Desempenho dos alunos no teste a posteriori




Fonte: Próprio autor

A partir da leitura do Gráfico 2 (Figura 9), percebemos que houve um avanço nos resultados quantitativos em relação ao teste a *priori*. Conforme tínhamos mencionado anteriormente, o referido conteúdo não faz parte do currículo do Ensino Fundamental e Ensino Médio, mas o fato dos alunos terem estudado os conceitos básicos de teoria elementar dos números, faz com que, em teoria, seja necessária uma experiência escolar para estudar diretamente as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas. Com a intervenção didática, por meio da oficina de estudos e discussões sobre as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas, percebemos pelo Gráfico 2 que das oito situações-problemas apresentadas para os alunos, em apenas uma não teve acerto, o que representa $87,5\%$ das questões com acertos. Se compararmos com o teste *a priori*, neste apenas $25\%$ das questões respondidas pelos alunos apresentaram acerto.

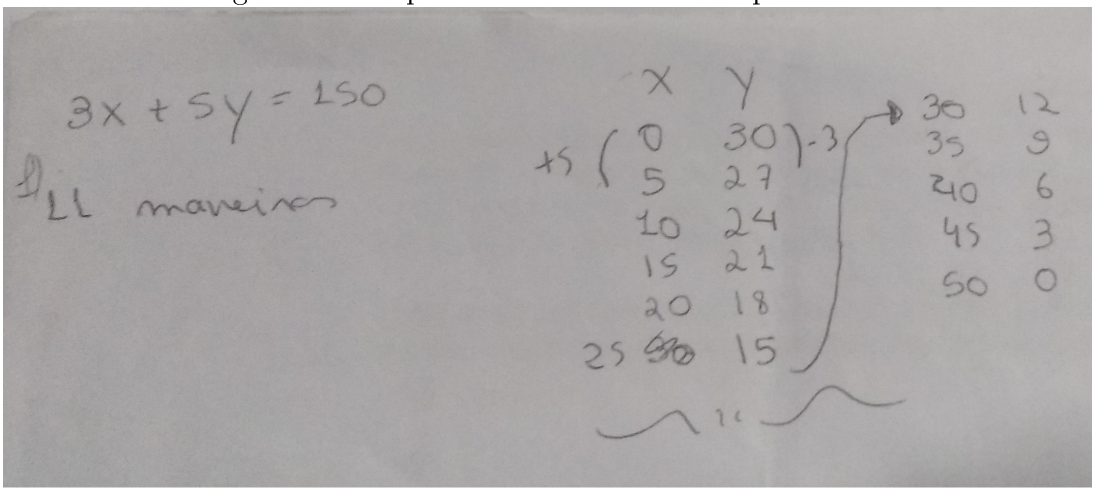
Salientamos que existem alguns procedimentos de resolução das referidas equações, onde procuramos resolver os problemas existentes pelo Método de Euclides para determinar uma das soluções da equação e assim encontrar as outras possíveis soluções de acordo com os coeficientes das incógnitas da equação.

A seguir temos o primeiro problema do teste *a posteriori*, onde, pelo Gráfico 2, 80% dos sujeitos da pesquisa encontraram as soluções procuradas, o que corresponde a 12 sujeitos da pesquisa.

**Problema 1 (Teste a Posteriori): De quantas maneiras pode-se comprar selos de** R$ $3,00$ **e de** R$ $5,00$ **de modo que se gaste** R$ $150,00$**?**

Na Figura 10, segue a resposta do aluno C em relação ao primeiro problema.

Figura 10: Resposta do aluno B teste a posteriori




Fonte: Acervo do autor

Conforme podemos ver, o aluno escreveu corretamente a equação diofantina $3x+5y = 150$, fato que não ocorreu no teste *a priori*. Além disso, o mesmo identificou uma solução particular $x_0 = 0$ e $y_0 = 30$ e pelos coeficientes da equação diofantina listou as soluções inteiras não negativas, pois no problema devemos ter a quantidade de maneiras que se poderia comprar os selos, onde não admitimos soluções inteiras negativas.

Na sequência temos o problema 2 do teste *a posteriori*.

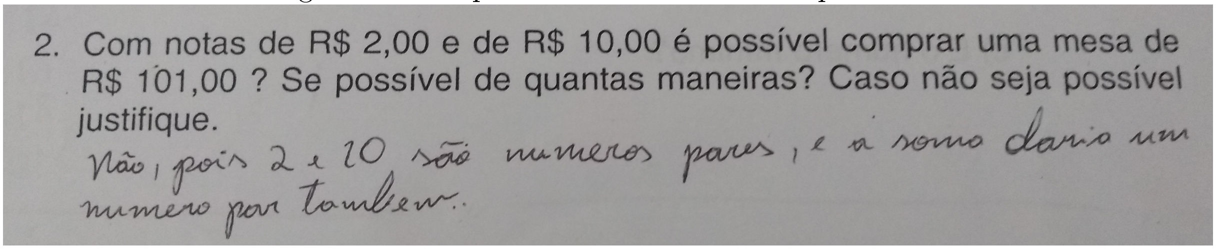
**Problema 2 (Teste a Posteriori): Com notas de** R$$2,00$ **e de** R$$10,00$ **é possível comprar uma mesa de** R$$101,00$**? Se possível, de quantas maneiras? Caso não seja possível, justifique.**

Nesse problema, onde o mesmo não possuía solução, pois temos a equação diofantina $2x + 10y = 101$ e como $mdc(2, 10) = 2$ e $2 \nmid 101$ temos que a equação não possui solução.

Pelo Gráfico 2 destacamos que os 15 alunos acertaram o problema, salientamos que as justificativas normalmente apresentadas não trazia um certo "rigor matemático" como demonstrado no Teorema 4.1, onde para uma equação diofantina da forma $ax + by = c$ possuir solução devemos ter que o $mdc(a, b)$ deve dividir $c$.

Nas Figuras 11 e 12, temos a resposta de dois alunos.

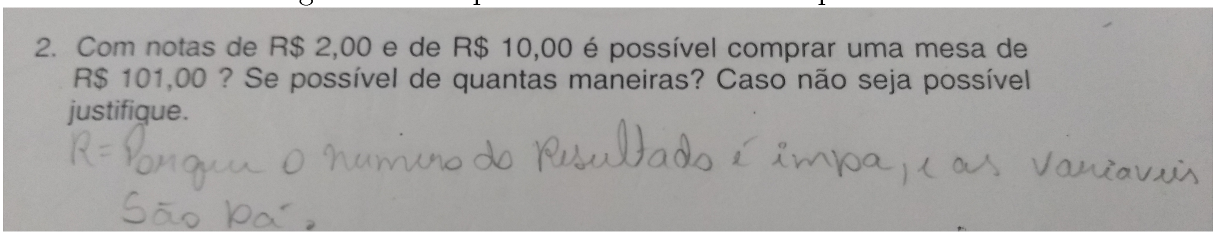
Figura 11: Resposta do aluno B teste a posteriori


2. Com notas de R$ 2,00 e de R$ 10,00 é possível comprar uma mesa de R$ 101,00 ? Se possível de quantas maneiras? Caso não seja possível justifique.

Não, pois 2 e 10 são numeros pares, e a soma daria um numero par tambem.

Fonte: Acervo do autor

Figura 12: Resposta do aluno E teste a posteriori


2. Com notas de R$ 2,00 e de R$ 10,00 é possível comprar uma mesa de R$ 101,00 ? Se possível de quantas maneiras? Caso não seja possível justifique.

R= Porque o numero do Resultado é impa, e as variaveis São pa´.

Fonte: Acervo do autor

Pelas respostas acima, percebemos que os alunos não utilizaram rigorosamente o fato da condição inicial para uma equação diofantina possuir solução, onde apresentamos tal fato no Teorema 4.1.

No problema 3, ressaltamos que 80% dos sujeitos colocaram a quantidade correta da solução, ou seja, 12 alunos elencaram o total de soluções inteiras não negativas da equação diofantina.

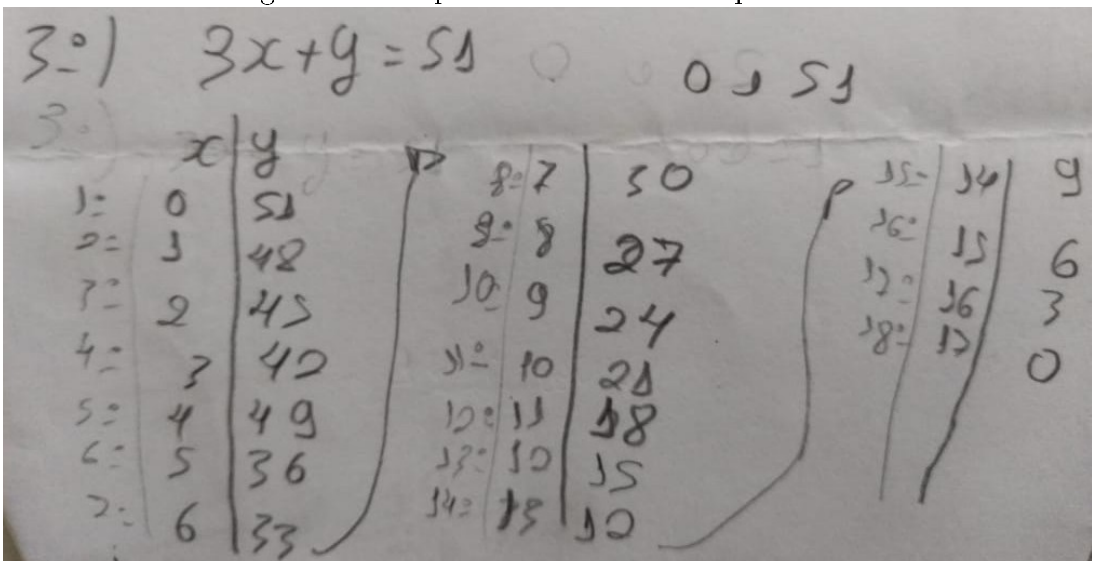
**Problema 3 (Teste a Posteriori): No Campeonato Espanhol de Futebol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e cada derrota vale 0 ponto. Certo time terminou o primeiro turno invicto (nenhuma derrota) e com 51 pontos. De quantas formas é possível que isso ocorra?**

A partir de exemplos semelhantes a esses trabalhados durante a oficina, onde o problema possui várias soluções inteiras não negativas, percebemos um fato importante. Quase a totalidade dos alunos não conseguiam resolver inequações do 1º grau, fato esse que não faz parte dos conteúdos listados da Teoria Elementar dos Números, mas que faz parte do currículo do Ensino Fundamental, sendo essencial para não precisar listar todas as soluções de uma equação diofantina.

Contudo, como meio de suprir essa "deficiência" foi sugerido aos alunos listar todas as soluções inteiras não negativas através dos coeficientes das equações diofantinas.

Temos a seguir uma resposta apresentada por um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 13: Resposta aluno F teste a posteriori




Fonte: Acervo do autor

Pela resolução, podemos perceber que o aluno escreveu a equação diofantina $3x+y=51$, onde $x$ seria o número de vitórias e $y$ o número de empates, assim interpretando corretamente o problema, com isso percebemos que o sujeito encontrou uma solução particular $x_0 = 0$ e $y_0 = 51$, assim a partir dos coeficientes da equação encontrou as outras soluções procuradas. Tanto nesse exemplo, como nos outros, não podemos excluir o método da tentativa e erro, ou seja, podemos unir esse método com o comportamento das soluções de uma equação diofantina a partir dos coeficientes dessa equação.

Pommer (2008) aponta que dentre as diversas possibilidades de resolução, é extremamente importante o uso da estratégia da tentativa e erro, bem como a verificação direta através de cálculos numéricos (mentais ou por escrito), assim como o uso de propriedades e conceitos dos números. Ressaltamos, contudo, que, conforme ainda ressaltado pelo autor, é necessário que os objetos a serem estudados façam sentido para o aluno.

Portanto, diante da dificuldade relatada anteriormente em relação a resolução de inequações pelos alunos, o método da tentativa e erro, com a divisibilidade dos inteiros para encontrar uma solução se tornou uma ferramenta mais eficaz na procura de uma solução particular e a partir de então poder encontrar todas as outras soluções através dos coeficientes da equação diofantina.

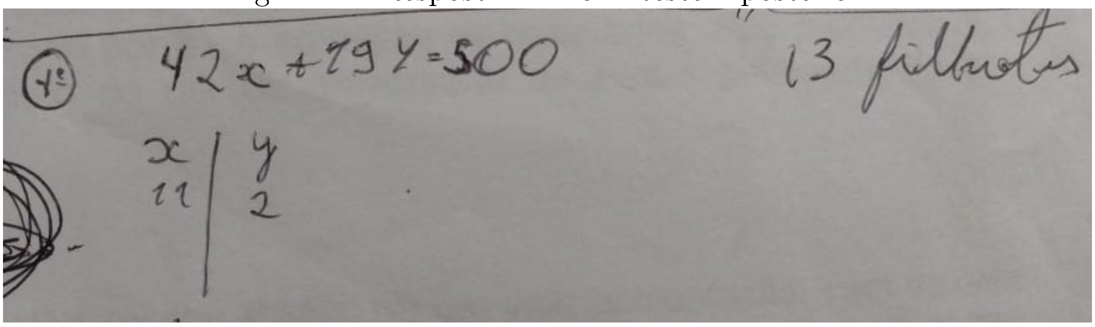
Observamos que para encontrar uma solução particular poderíamos utilizar a divisibilidade, pois no problema utilizando o fato que $3 \mid 51$ ou que $1 \mid 51$ encontraríamos uma solução particular do problema e assim encontraríamos todas as soluções inteiras não negativas a partir dos coeficientes da equação $3x + y = 51$ sem a necessidade de resolver uma inequação simultânea.

No problema 4, que foi semelhante ao que foi aplicado no teste *a priori*, pelo Gráfico 2 constatamos que os acertos foram pouco mais da metade, exatamente $53,33\%$ dos alunos, o que corresponde a 8 alunos que conseguiram encontrar a solução procurada.

**Problema 4 (Teste a Posteriori): Um fazendeiro pretende comprar filhotes de codorna e de galinha, gastando um total de** R\$500,00. **Um filhote de codorna custa** R\$42,00 **e um de galinha custa** R\$19,00. **Quantos filhotes de aves o fazendeiro poderá comprar?**

Na Figura 14, temos a resposta de um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 14: Resposta Aluno D teste a posteriori




Fonte: Acervo do autor

Temos que o aluno o fez pelo método da tentativa e erro, encontrou diretamente uma solução inteira não negativa, assim é importante destacar que o mesmo só colocou uma solução, assim unindo o fato de usar uma estratégia diferente do método de Euclides para encontrar uma solução particular com o entendimento que a equação não poderia ter mais soluções inteiras não negativas pelo fato dos coeficientes da equação.

Observamos que pelo fato problema ter uma maior nível de dificuldade em encontrar uma solução inteira não negativa, o número de acertos diminuiu, isso se deu muito provavelmente pela dificuldade relatada dos alunos em resolver inequações do 1° grau. Pelo método de Euclides, que foi o método utilizado durante a pesquisa, era possível encontrar uma solução particular e a partir de então encontrar as outras soluções caso existissem. Devemos destacar nesse problema o fato da equação diofantina possuir apenas um par

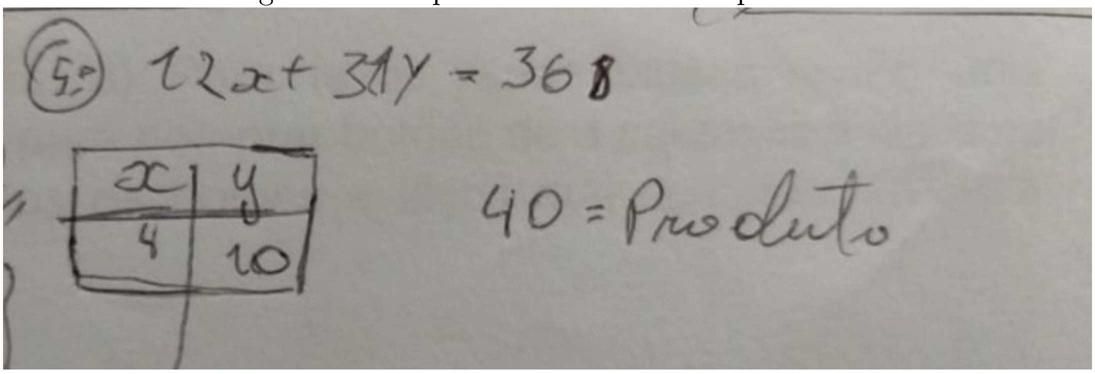
$x$ e $y$ de solução inteira não negativa, assim os alunos que encontraram corretamente a solução perceberam que o problema só poderia ter essa solução inteira não negativa.

No problema seguinte, em que o mesmo estava no teste *a priori*, foi um dos problemas que teve maior índice de erros, exatamente 80% dos alunos erraram o problema, ou seja, dos 15 sujeitos 12 erraram.

**Problema 5 (Teste a Posteriori): João pediu a Pedro que multiplicasse o dia de seu aniversário por 12 e o mês do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o produto do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento?**

A seguir, observamos uma solução de um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 15: Resposta aluno D teste a posteriori




Fonte: Acervo do autor

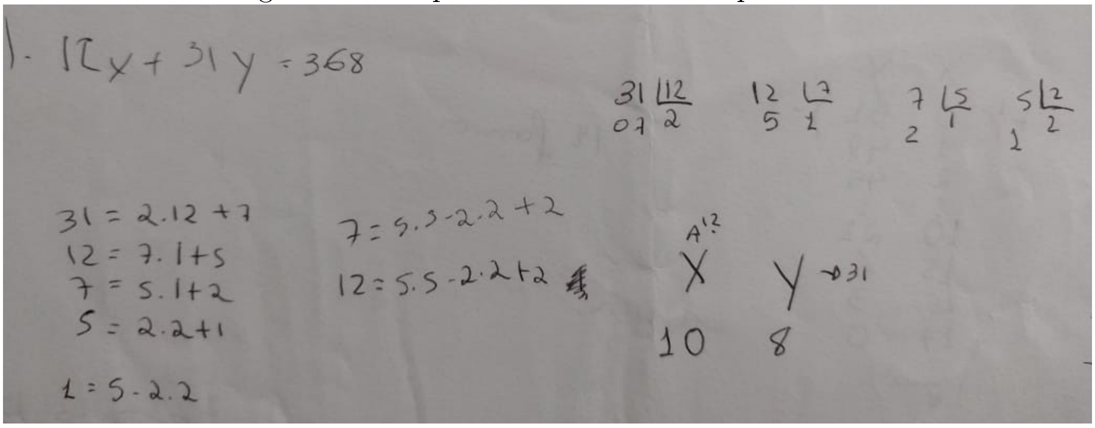
O aluno destacado encontrou um par de solução $x = 4$ e $y = 10$, mas o mesmo, possivelmente por falta de atenção, não percebeu que $12 \cdot 4 + 31 \cdot 10 = 48 + 310 = 358$ e não 368 que estava na equação montada corretamente pelo aluno.

A respeito desse tipo de erro, em relação a possível falta de atenção podemos destacar que apesar de não encontrar a solução do problema constatamos que o referido aluno teve a concepção de não só montar a equação diofantina corretamente como buscar uma solução para o problema.

Muitas vezes o erro é desprezado, nesse caso devemos enxergar de forma positiva, pois o referido aluno no teste a priori não tinha essa percepção que poderia resolver um problema com duas incógnitas e apenas uma equação.

Na Figura 16, temos outra solução por um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 16: Resposta aluno G teste a posteriori




Fonte: Acervo do autor

Podemos observar que o referido aluno utilizou o método de Euclides para determinar uma das soluções, não obtendo êxito na solução. No entanto, por meio da tentativa e erro, conseguiu encontrar uma solução particular, aliando isso ao fato da equação não possuir mais soluções inteiras não negativas o aluno respondeu corretamente o problema proposto.

Nesse caso, é importante destacar o fato mencionado anteriormente em relação à dificuldade dos sujeitos da pesquisa em relação a resolução de inequações, onde é visto na resolução que o referido aluno estava ciente que a equação diofantina $12x + 31y = 368$, onde $x$ era o dia do aniversário e $y$ o mês do aniversário de Pedro não possuía mais soluções inteiras não negativas pelos seus coeficientes 12 e 31 que teriam em outras soluções números inteiros negativos para as incógnitas $x$ e $y$.

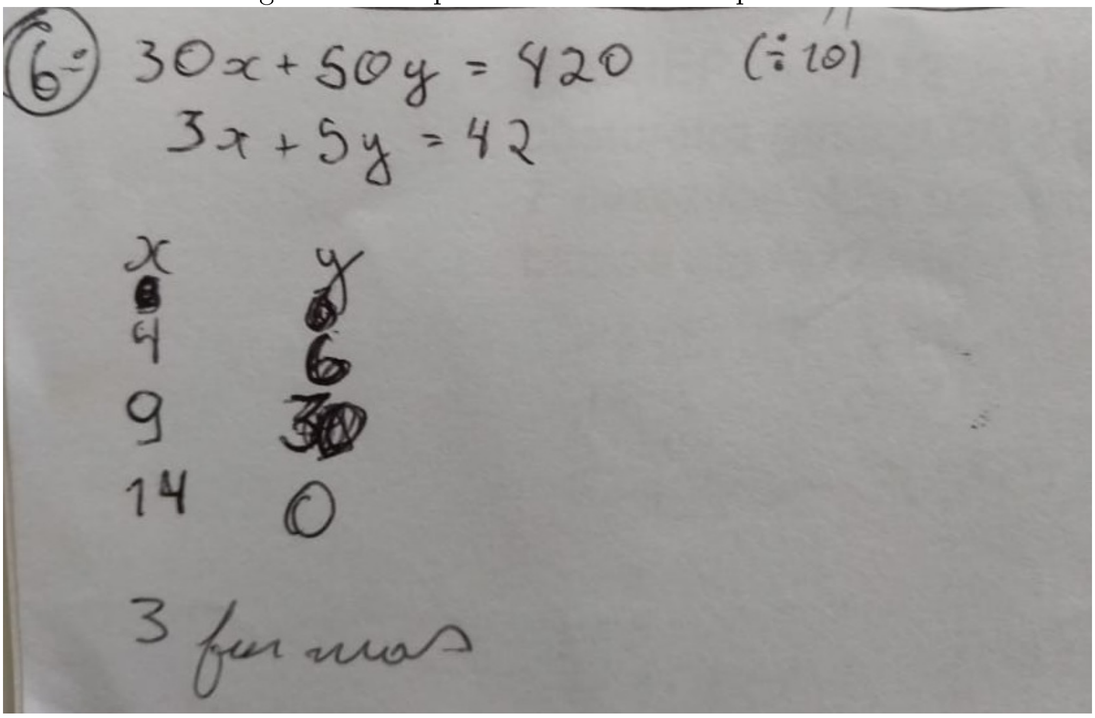
A seguir temos o problema 6, onde o seu índice de acerto foi de $66,66\%$, o que representa 10 alunos.

**Problema 6 (Teste a Posteriori): Se um trabalhador recebe R\$420,00 em tíquetes de alimentação, com valores de R\$30,00 reais ou R\$50,00 reais cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador?**

Para resolver esse problema a equação diofantina modelada é da forma $30x + 50y = 500$( onde $x$ número de tíquetes de R\$30,00 e $y$ número de tíquetes de R\$50,00 ).

Na figura 17 temos uma solução apresentada por um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 17: Resposta aluno B teste a posteriori




Fonte: Acervo do autor

Pela solução podemos perceber que o sujeito simplificou a expressão e assim encontrou uma solução. Com essa solução particular o referido aluno encontrou as soluções seguintes a partir dos coeficientes da equação. Podemos observar que na solução o sujeito enumerou as soluções da equação de acordo com os coeficientes da equação diofantina $3x + 5y = 52$, onde os valores de $x$ diminuem 5 unidades e os valores de $y$ aumentam 3 unidades.

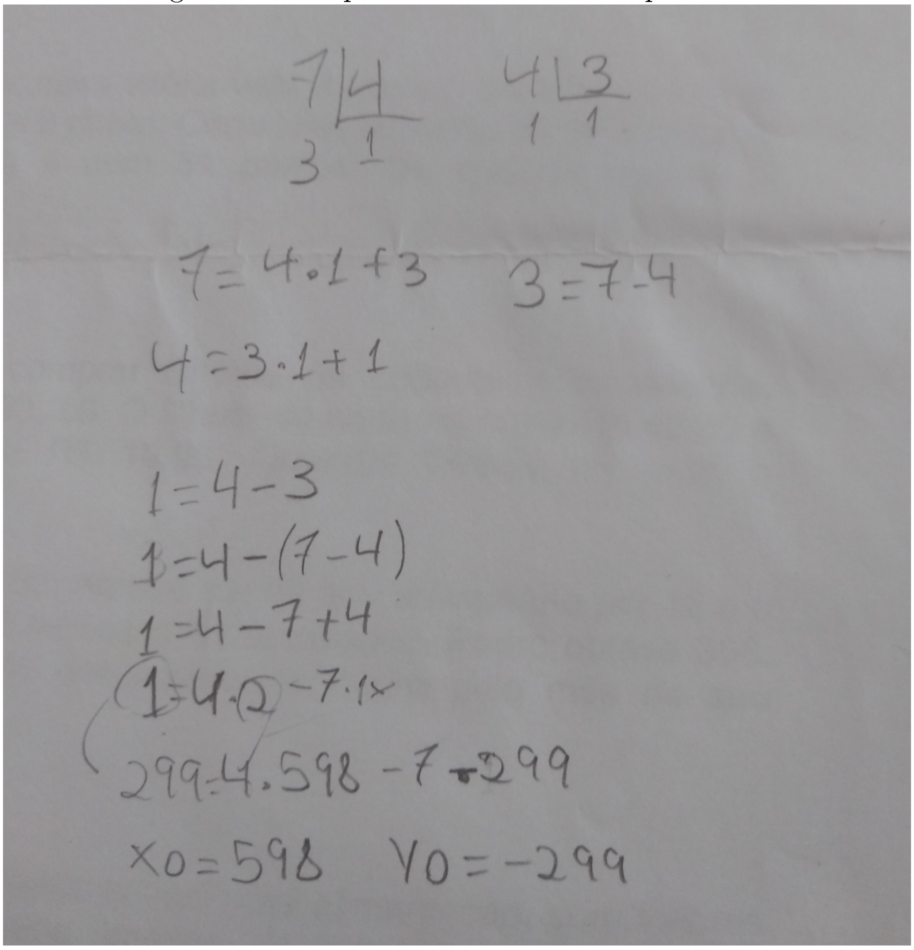
A seguir temos o problema 7, que também estava no teste *a priori*, o referido problema não teve nenhum aluno que conseguiu encontrar a solução desejada.

**Problema 7 (Teste a Posteriori): (OBMEP-2012-NÍVEL 3). Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou** R\$2,99 **para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?**

Podemos observar que o referido problema é da OBMEP, e como relatado anteriormente, as questões da OBMEP objetivam mais o raciocínio lógico dos alunos, ou seja, além de resolver a equação diofantina do problema, eles deveriam interpretar corretamente e encontrar solução específica procurada. Para resolver o problema a equação diofantina a ser modelada é da forma $0,04x + 0,07y = 2,99$( onde $x$ é o número de botões e y é o número de laços).

A seguir, temos uma resposta de um dos alunos em relação ao problema proposto.

Figura 18: Resposta aluno E teste a posteriori




Fonte: Acervo do autor

Pela solução acima, percebemos que o sujeito não escreveu a equação diofantina, mas pelo método de Euclides conseguiu encontrar uma solução particular da equação. No entanto, o aluno não conseguiu encontrar a solução desejada para o problema, pois para resolver tal problema, além de encontrar uma solução particular, deveria encontrar uma solução específica do problema.

Um outro motivo do alto número de erros encontrado na análise desse problema, foi o fato de muitos escreverem a equação como $0,4x + 0,7y = 2,99$, assim temos que muitos colocaram 40 centavos e 70 centavos contrariamente aos valores corretos que eram 4 e 7 centavos respectivamente. Outro fator que possivelmente influenciou no rendimento baixo dos alunos foi o fato de que as soluções encontradas da equação do problema serem o número de botões e laços, não dando o número de camisas, ou seja, resolvendo a equação diofantina $0,04x + 0,07y = 2,99$, assim teríamos a equação diofantina $4x + 7y = 299$ com coeficientes inteiros, teríamos $x$ o número de botões e $y$ o número de laços, onde o problema solicitava o número de camisas que ela deveria fabricar.

O último problema do *teste a posteriori* era um problema que também estava no *teste a priori*, onde pelo Gráfico 2, observamos que 80% dos alunos encontraram as soluções procuradas e assim responderam os itens solicitados.

**Problema 8 (Teste a Posteriori): Uma pessoa resolve comprar refrigerantes para o almoço em família de domingo. Chegando ao mercado, essa pessoa percebe que só havia duas opções de refrigerantes disponíveis: Coca-Cola, cujo preço é R\$ 5,00, e Guaraná Antárctica R\$ 4,00.**

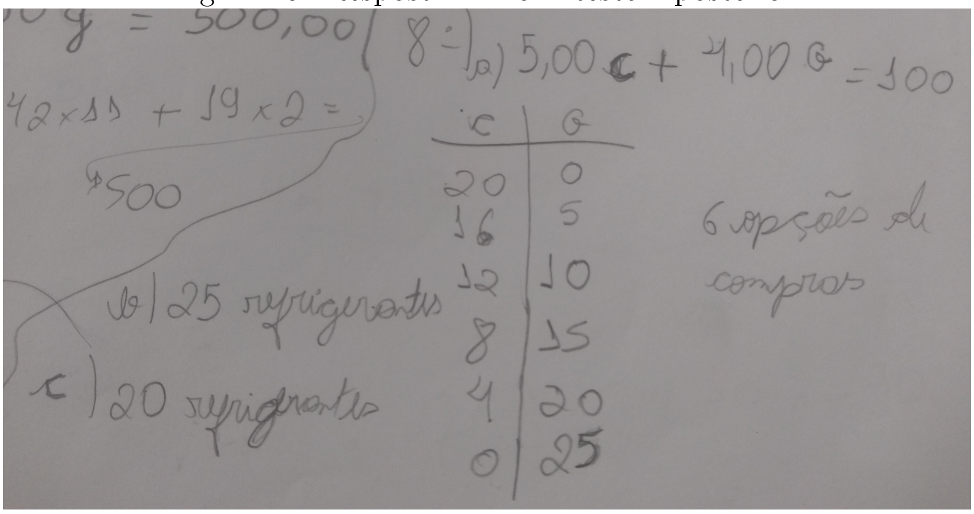
**a) Se essa pessoa deseja gastar R\$ 100,00, qual é o número de opções que ela dispõe para fazer a compra dos refrigerantes?**

**b) qual é o número máximo de refrigerantes que ela pode comprar gastando R\$ 100,00?**

**c) E o número mínimo?**

Abaixo segue a resposta de um dos sujeitos da pesquisa.

Figura 19: Resposta aluno F teste a posteriori




Fonte: Acervo do autor

Percebemos que o aluno encontrou uma solução particular $x_0 = 20$ e $y_0 = 0$ e assim listou as soluções inteiras não negativas da equação $5x + 4y = 100$, não sendo necessário o fato da utilização de inequações do primeiro grau para encontrar o total de soluções da referida equação. Percebemos que podemos encontrar uma das soluções sem utilizar o Método de Euclides, mas utilizando a divisibilidade, pois $4 \mid 100$ e $5 \mid 100$ assim poderia encontrar uma solução particular e com isso listar as soluções inteiras não negativas. Importante observar a interpretação correta na quantidade máximo e mínimo de refrigerantes que se poderia comprar nos itens “b”e “c” .

Podemos constatar uma melhora nos rendimentos dos alunos após a intervenção da oficina de Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas, assim as soluções passaram a ter sentido para os alunos conforme apontou Pommer (2008). Observamos nesses problemas que os alunos utilizaram o uso da tentativa e erro como estratégia, alinhando com a utilização do método de Euclides com o do uso do múltiplo ou divisor de um número como ferramenta facilitadora para encontrar uma solução das equações. Outro ponto importante é notar que o método de tentativa e erro, que foi a única ferramenta utilizada no teste *a priori*, foi utilizado no teste *a posteriori*, mas havendo uma maior compreensão por parte dos alunos no enunciado dos problemas e também na assimilação das propriedades e das ferramentas que foram estudadas e discutidas durante a oficina. Após a realização do teste *a posteriori*, os alunos receberam um questionário para averiguar as suas opiniões sobre o tema trabalhado. Percebeu-se nos alunos uma certa empolgação em relação aos seus rendimentos no teste *a posteriori*, pois segundo alguns comentários, no primeiro teste não conseguiram resolver quase nenhum problema e no segundo teste perceberam uma melhora quantitativamente os resultados em relação ao teste *a priori*.

Um aluno relatou o seguinte:

Aluno B: *"Eu gostei muito de ter aprendido sobre equações diofantinas porque através desse estudo eu consegui resolver problemas que antes não tinha ideia de como fazer".*

A respeito disso, podemos perceber que o fato do aluno ter respondido um problema que antes não conseguia despertou um gostar diferente do que se tinha antes da pesquisa.

Quando perguntados se eles achavam que os seus desempenhos em olimpíadas de matemática poderiam melhorar estudando conteúdos que não são trabalhados normalmente em sala de aula, como o tema equações diofantina, muitos afirmaram que sim, mas que tinham que estudar muito mais, pois era a questão mais difícil do teste. Eles relataram que se trabalhado num tempo um pouco maior os resultados poderiam ser ainda melhores. Temos um relato de um aluno a respeito disso:

Aluno C: *"Eu melhoraria meu desempenho se aprendesse conteúdos como esse porque são melhores de estudar."* Foi perguntado aos alunos sobre a possibilidade de implantação desse conteúdo na matriz curricular e sobre a sua visão sobre o tema Equações Diofantinas.

Aluno D: *"Eu gostei muito da oficina, pois aprendi a resolver as equações diofantinas e também por meio do algoritmo de Euclides como calcular MDC, porque não lembrava mais como fazia."*

Por fim, foi perguntado também sobre quais as dificuldades de se aprender Equações Diofantinas Lineares. Foi unanimidade dos alunos a dificuldade com inequações simultâneas, onde relataram que isso dificultava encontrar as soluções e que era mais fácil colocar uma por uma. Com isso, percebemos que foi satisfatório o que os alunos relataram em relação ao tema "Equações Diofantinas", visto que muitos no início da pesquisa falavam que nunca tinha ouvido falar nesse nome, mas que era mais fácil do que imaginava.

No próximo capítulo temos as considerações finais do nosso trabalho.

# 7 Considerações Finais

As considerações aqui apresentadas trazem as constatações do estudo, assim como as possíveis contribuições que a pesquisa possa oferecer, assim retomamos as reflexões realizadas no decorrer desta pesquisa sobre o tema "Equações Diofantinas Lineares", cujo objetivo foi analisar a compreensão dos alunos da 1ª série do Ensino Médio em relação ao estudo desse tema.

Nossa hipótese inicial era que os alunos do Ensino Médio poderiam se apropriar dos conceitos de Equações Diofantinas com duas incógnitas, para tanto, buscamos responder ao seguinte problema de pesquisa: Qual a compreensão de aprendizagem manifestada por alunos da 1ª série do Ensino Médio em relação ao estudo das Equações Diofantinas Lineares na resolução de problemas envolvendo duas variáveis e uma equação?

Durante este trabalho, a apresentação da vida e obra dos principais matemáticos que contribuíram para o estudo deste tema auxiliou na compreensão da evolução dos estudos em relação as equações diofantinas. Com a aplicação do teste *a priori*, observamos as manifestações iniciais dos alunos em relação ao tema estudado, assim observamos que o procedimento para resolução dos problemas teve o predomínio do uso da tentativa e erro e muitos utilizaram erroneamente sistemas lineares com duas incógnitas e duas equações. Dos 8(oito) problemas propostos em apenas 2(dois) os alunos conseguiram obter êxito em encontrar a solução procurada. Percebemos, nesse teste, que os alunos não conseguiram compreender que uma equação diofantina linear pode não ter solução, ou ter mais de uma solução. Os sujeitos da pesquisa que conseguiram acertar os problemas propostos não escreveram a equação diofantina do problema, muitos alunos escreveram um sistema linear para tentar resolver o problema, o que nos leva a constatação de que tiveram dificuldade em converter a linguagem do problema para linguagem matemática.

Com a intervenção didática proposta, através de uma oficina com estudo das Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas, os alunos puderam estudar e discutir diretamente os estudos do tema trabalhado, fato inédito na vida escolar desses alunos, pois, o referido conteúdo não faz parte do currículo do Ensino Básico no nosso país. A intervenção didática possibilitou aos alunos conhecer sobre os teoremas, propriedades da divisibilidade, condição para uma equação diofantina possuir solução, como determinar as soluções de uma equação. Durante a oficina, percebemos que os alunos tinham dificuldade em resolver inequações simultâneas, conteúdo necessário para o cálculo do número total de soluções inteiras não negativas de uma Equação Diofantina. Diante disso, uma forma de suprir essa dificuldade e não comprometer o planejamento do trabalho, foi propor aos alunos uma forma de enumerar todas as soluções inteiras não negativas de uma equação diofantina através dos coeficientes da equação.

Pelas análises das manifestações apresentadas pelos alunos no teste *a posteriori* à intervenção didática referente ao desenvolvimento conceitual de Equações Diofantinas Lineares, temos indícios de compreensão dos alunos sobre como se comportam as soluções de uma equação diofantina a partir dos coeficientes da equação. Apesar do uso da tentativa e erro ainda ser utilizado, observamos que os alunos utilizaram essa técnica juntamente com a divisibilidade e o método de Euclides para encontrar, caso exista, uma solução particular e a partir dos coeficientes da equação diofantina, encontrar as outras soluções. Esse fato mostra que os sujeitos da pesquisa conseguiram utilizar os conceitos apropriados durante a oficina e assim aplicar durante a resolução dos problemas, o que demonstra indícios de evolução nos resultados em relação ao teste *a priori*.

As dificuldades para a resolução de algumas questões ainda continuaram, onde uma das maiores dificuldades dos alunos foi em relação a resolver inequações simultâneas para encontrar o número de soluções inteiras não negativas de uma equação diofantina linear. Essa constatação foi observada tanto na análise do teste *a posteriori* quanto na análise do questionário avaliativo, aplicado depois do *teste a posteriori*. Nele, os alunos relataram a dificuldade na resolução das inequações simultâneas para encontrar todas as soluções inteiras não negativas das equações diofantinas.

Com isso, identificamos que é preciso uma consolidação maior desse conteúdo para a resolução das equações diofantinas, tema não abordado nas escolas, entretanto, bastante rico em problemas do cotidiano, podendo ser trabalhado mesmo que de forma "básica" podendo ajudar os alunos a manifestar maior interesse em matemática e, assim, poder diminuir as dificuldades dos alunos apresentados pela BNCC no início desse trabalho.

Ressaltamos o fato de nenhum aluno ter acertado o problema que esteve na OBMEP, esse fato mostra que mesmo com uma melhora nos resultados, eles tiveram dificuldades em problemas com uma maior complexidade em encontrar uma solução particular das equações diofantinas.

Com o estudo das equações diofantinas, podemos calcular por exemplo, o MDC de dois números inteiros pelo método de Euclides das divisões sucessivas, além de desenvolver nos alunos uma oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos. Assim, os alunos ao estudar conteúdos que envolvem problemas dentro do seu alcance, como o nosso tema estudado, poderão ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, e, assim, desenvolver sua autoconfiança.

Diante do exposto, este trabalho se apresenta como uma possibilidade de contribuições para novas pesquisas e, sobretudo, para os professores que atuam no Ensino Médio, ao apresentar possibilidade de material de pesquisa sobre o tema "Equações Diofantinas Lineares".

Consideramos, enfim, que o nosso olhar sobre as Equações Diofantinas Lineares nos revela a necessidade de continuar aprendendo a repensar prática docente em matemática no contexto do Ensino Básico e, portanto, entender que este campo de estudo continua aberto à produção de novos conhecimentos.

# 8 Referências


ARTIGUE, M. – **Engenharia didática. Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-217, 1996.

BOYER, C. B.; PÉREZ, M. M. **Historia de lª matemática.** [S.l.]: Edgard Blücher, 1974.

BOYER, C.B.; – **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide, 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996

BOYER, C. B.; **História de lª matemática.** 3. ed. Rio de Janeiro: Edgard Blücher, 2012.

BEZERRA, M. J.; PUTNOKI, J. C. – **Novo Bezerra: matemática 2º grau, volume único**. São Paulo: Scipione, 1996.

BRASIL. – **Secretaria de Educação Média e Tecnológica**. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. – **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. – **Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEMTC, 1999.

CARVALHO, L. M. et al. – **História e Tecnologia no Ensino da Matemática.**, v. 2. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

COURANT, R.; ROBBINS, H. – **O que é Matemática? Tradução de: Adalberto da Silva Brito**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000

DENZIN,N.K.; LINCOLN, Y. (orgs) – **Planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens**. 2 ed. Porto Alegre: ARTMED, 2006

D'AMBROSIO, B. S. – **Como ensinar matemática hoje? Temas e debates**, SBEM, ano II, n.2, 1996.

EVES, H. – **Introdução à história da matemática / Howard Eves**; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011. 1. Matemática – História. I. Título.

FILHO, E.A DE, – **Teoria elementar dos números.** São Paulo: Nobel, 1931.

HEFEZ, A. – **Elementos de Aritmética** SBM/IMPA/MEC, Rio de Janeiro, 2007.

HEFEZ, A. – **Iniciação à Aritmética**, Rio de Janeiro:SBM/IMPA/MEC 2009.

HEFEZ, A. – **Aritmética- Coleção PROFMAT** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

GONSALVES, E. P. – **Conversas sobre iniciação à pesquisa científica**. Campinas, SP: Alínea, 2001.

LIMA, E.L.– **Análise Real Volume 1-12ª edição**, Rio de Janeiro, IMPA, 2016.

LDB. – **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, 1996. Disponivel em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 20 de abril 2019.

MACHADO, S. D. A. – **Engenharia Didática**. In: MACHADO, Silvia Dias A. Educação Matemática: uma introdução. 2ª ed. São Paulo: EDUC, 2002, 197-208.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO – **Base Nacional Comum Curricular** Versão em revisão, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 11 jul. 2018.

MOURA, L. O. G.– **O contínuo e o discreto no ensino da Matemática: Conceitos Dicotômicos ou Complementares?**. 2005. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.

OLIVEIRA, S. B. – **As Equações Diofantinas Lineares e o livro didático de Matemática para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP. Disponivel em: http://www.obmep.org.br/.

POMMER, W. M. – **Equações Diofantinas Lineares: Um desafio motivador para**

**alunos do Ensino Médio.**Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo -PUCSP, 2008

POMMER, W. M. – **Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo: Unifesp, 2013

ROQUE, G. L.; PITOMBEIRA, J. – **Uma equação diofantina e suas resoluções**. Revista do Professor de Matemática, v. 19, p. 39?47, 1991.

ROQUE, T.- **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.**, São Paulo: Editora ZAHAR, 2012.

Santos, J. P. – **Introdução à Teoria dos Números**. IMPA-CNPq: Rio de Janeiro, 2010.

SMOLE , Kátia S. ; DINNIZ, Maria Ignez – **Ler escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**.Porto Alegre: Artmed, 2001.

STRAUSS, A. e CORBIN, J. – **Pesquisa qualitativa: Técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada**. Tradução Luciane de Oliveira da Rocha. 2ª Ed. Artmed, Porto Alegre, 2008.

# A Anexos 1: Teste a Priori

1. Numa criação de coelhos e galinhas, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?

2. Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente qualquer um dos esportes? (LA ROQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 39 [7]).

3. O valor da entrada de um cinema é R\$ $8,00$ e da "meia" entrada é de R\$ $5,00$. Qual é o menor número de pessoas que podem assistir a uma sessão de maneira que a bilheteria seja de R\$ 500,00?

4. João pediu a Pedro que multiplicasse o dia de seu aniversário por 12 e o mês do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o produto do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento?

5. Em um fazendeiro deseja comprar filhotes de pato e de galinha, gastando um total de R\$ $1.770,00$. Um filhote de pato custa R\$ $31,00$ e um de galinha custa R\$ $21,00$. Quantos de cada um dos dois tipos o fazendeiro poderá comprar?

6. (OBMEP–2012–NÍVEL 3) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R\$ $2,99$ para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

7. Com notas de R\$$2,00$ e de R\$ 10,00 é possível comprar uma mesa de R\$101,00? Se possível de quantas maneiras? Caso não seja possível justifique.

8. Uma pessoa resolve comprar refrigerantes para o almoço em família de domingo. Chegando ao mercado, essa pessoa percebe que só havia duas opções de refrigerantes disponíveis: Coca-Cola, cujo preço é R\$ 5,00, e Guaraná Antarctica R\$ 4,00.

   a) e essa pessoa deseja gastar R\$ 100,00, qual é o número de opções que ela dispõe para fazer a compra dos refrigerantes?

b) qual é o número máximo de refrigerantes que ela pode comprar gastando R$ 100,00?

c) E o número mínimo?

# B Anexos 2: Teste a Posteriori

1. De quantas maneiras pode-se comprar selos de R\$3, 00 e de R\$5, 00 de modo que se gaste R\$150, 00?

2. Com notas de R\$2, 00 e de R\$10, 00 é possível comprar uma mesa de R\$101, 00? Se possível de quantas maneiras? Caso não seja possivel justifique.

3. No Campeonato Espanhol de Futebol, cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto e cada derrota vale 0 ponto. Certo time terminou o primeiro turno invicto (nenhuma derrota) e com 51 pontos. De quantas formas é possível que isso ocorra?

4. Um fazendeiro pretende comprar filhotes de codorna e de galinha, gastando um total de R\$ 500,00 . Um filhote de pato custa R\$ 42,00 e um de galinha custa R\$ 19,00. Quantos filhotes de aves o fazendeiro poderá comprar?

5. João pediu a Pedro que multiplicasse o dia de seu aniversário por 12 e o mês do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o produto do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento?

6. Se um trabalhador recebe R\$ 420,00 em tíquetes de alimentação, com valores de R\$30,00 reais ou R\$50,00 reais cada tíquete, de quantas formas pode ser formado o carnê de tíquetes desse trabalhador?

7. (OBMEP-2012-NÍVEL 3) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R\$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

8. Uma pessoa resolve comprar refrigerantes para o almoço em família de domingo. Chegando ao mercado, essa pessoa percebe que só havia duas opções de refrigerantes disponíveis: Coca-Cola, cujo preço é R\$ 5,00, e Guaraná Antarctica R\$ 4,00.

   a) Se essa pessoa deseja gastar R\$ 100,00, qual é o número de opções que ela dispõe para fazer a compra dos refrigerantes?

   b) Qual é o número máximo de refrigerantes que ela pode comprar gastando R\$ 100,00?

   c) E o número mínimo?

# C Anexos 3: Questionário Avaliativo

1. Você gostou da oficina realizada sobre equações diofantinas lineares? Por quê?
2. Você acha que estudar Equações diofantinas lineares pode ajudar no desempenho nas olimpíadas de matemática? Por quê?
3. Depois da oficina, sua visão sobre o tema Equações diofantina?
4. O que você acha da implantação deste conteúdo no Ensino Médio?
5. Qual a maior dificuldade encontrada durante a oficina para aprender Equações Diofantinas Lineares?