

## Um breve estudo sobre os Números Metálicos

Jonilson dos Santos Oliveira<sup>1</sup>

Marcelo Oliveira Veloso<sup>2</sup>

Gilcélia Regiane de Souza<sup>3</sup>

**Resumo:** Neste trabalho abordamos os números metálicos e temas relacionados. Serão exploradas a ligação com as equações do segundo grau, sequências de Fibonacci, interpretações geométricas e outras correlações. O principal resultado, Teorema 6.1, mostra que não é possível obter o número de bronze como a razão entre uma diagonal qualquer e o lado de um polígono regular. Apresentamos o conceito de área metálica e exibimos uma fórmula para seu cálculo como uma aplicação no ensino fundamental e médio. A linguagem utilizada tem a pretensão de ser acessível aos professores do ensino fundamental e médio.

**Palavras-chave:** Números metálicos, equações quadráticas, sequências de Fibonacci.

**Abstract:** In this study, we approach the metallic numbers and its related themes. It will be explored the link with the second degree equations, Fibonacci sequences, geometric interpretations and other correlations. The main result, Theorem 6.1, shows that it is not possible to obtain the bronze number as the ratio between any diagonal and the side of a regular polygon. We introduce the concept of metallic area and we display a formula for its calculation as an application in elementary and high school. The language used is intended to be accessible to elementary and high school teachers.

**Keywords:** Metallic numbers, quadratic equations, Fibonacci sequences.

## 1 Introdução

Em 1997, no artigo LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS Y EL DISEÑO, Vera W. de Spinadel [1], define a família dos Números Metálicos cujos primeiros elementos recebem nomes de metais como ouro  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , prata  $1 + \sqrt{2}$ , bronze  $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ , cobre 2, níquel  $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ , etc.

---

<sup>1</sup>Aluno de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Turma 2017  
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ  
E-mail: jonilson23@hotmail.com

<sup>2</sup>Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso  
Departamento de Estatística, Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ  
E-mail: veloso@ufsj.edu.br

<sup>3</sup>Coorientadora do Trabalho de Conclusão de Curso  
Departamento de Estatística, Física e Matemática - Defim, CAP-UFSJ  
E-mail: gilcelia@ufsj.edu.br

Neste trabalho estudamos toda a “família genealógica” do número de ouro. Ou seja, a família dos números metálicos

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - px - q = 0 \text{ e } x > 0 \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}_+^*\}.$$

A proposta principal é estudar os números metálicos e as suas relações com outros temas da matemática. Em particular, pretendemos proporcionar mais uma forma para o professor introduzir e trabalhar as equações do segundo grau. Além de outros conteúdos abordados no final do ensino fundamental e no primeiro ano do ensino médio.

O primeiro e mais famoso número metálico é a *proporção áurea* que foi definida por Euclides [2] como uma proporção derivada da simples divisão de uma linha que ele chamou de sua “razão extrema e média”. A razão áurea pode ser obtida ao dividir um segmento em dois satisfazendo a seguinte proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$



Figura 1: Proporção áurea

Dividir um segmento em duas partes e calcular a razão entre eles pode parecer pouco interessante. Contudo desde Euclides de Alexandria (300 a.C) até os tempos atuais algumas dessas relações atraem a atenção da humanidade, e de forma surpreendente surgem em diversos contextos. Também conhecida por Número de Ouro, Proporção Áurea, Número Áureo, Secção Áurea, dentre outros, é o nome dado a constante real algébrica irracional denotada pela letra grega  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (phi), em homenagem ao escultor Phidias (Fídias), que a teria utilizado para conceber o Partenon. Para os gregos, esse número representava harmonia, equilíbrio e beleza. Ao longos dos séculos escultores, matemáticos, cientistas e artistas estudam suas relações geométricas e algébricas. Podemos encontrar no livro Razão Áurea - A história de  $\phi$  (veja [4]) uma explanação das ocorrências da razão áurea com excelentes imagens e explicações e conteúdo matemático acessível a todos.

O texto é organizado da seguinte maneira: na segunda seção apresentamos a definição dos números metálicos e demonstramos a propriedade aditiva 2.1 para todos os números dessa família. Na terceira seção exploramos a relação entre os números metálicos e as sequências secundárias de Fibonacci. Em particular, calculamos os limites das razões entre termos consecutivos destas sequências [5]. Na quarta seção estudamos o retângulo metálico, proporcionalidade e fractais em uma interpretação geométrica para os membros de uma subfamília metálica (veja [6]). Na seção cinco calculamos a razão entre as diagonais de um polígono regular e o seu lado, verificando que os Números de Ouro, Prata e Cobre são determinados por duas destas razões (veja Teoremas 5.1, 5.3 e 5.2). Continuando o estudo sobre a razão de uma diagonal por um lado de um polígono regular, verificamos que o número de bronze não pode ser obtido por uma razão entre a diagonal e o lado de qualquer polígono regular, Teorema 6.1. Este resultado aparece pela primeira vez no artigo ([7]). Neste texto, o resultado

é reescrito com mais detalhes e sem lacunas na demonstração. Por fim, na sétima seção buscamos aproximar nosso trabalho do cotidiano de professores e alunos do ensino fundamental II e Médio. Apresentamos o conceito de área metálica juntamente com uma solução criativa para o cálculo da área entre uma parábola e uma reta.

## 2 Generalidades

Um número metálico  $\sigma_{p,q}$  é a solução positiva de uma equação quadrática da forma

$$x^2 - px - q = 0,$$

onde  $p$  e  $q$  são inteiros positivos. Ou seja, o conjunto dos números metálicos é o subconjunto  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - px - q = 0 \text{ e } x > 0 \text{ com } p, q \in \mathbb{Z}_+^*\}$  dos números reais.

Observe que o número de ouro  $\phi$  é a raiz positiva da equação  $x^2 - x - 1 = 0$ . Ou seja, é o número metálico  $\sigma_{1,1}$ . O Número de Ouro ( $\phi = \sigma_{1,1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ) e o Número de Prata ( $\delta_{Ag} = \sigma_{2,1} = 1 + \sqrt{2}$ ) são os primeiros elementos da subfamília

$$\sigma_{p,1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - px - 1 = 0 \text{ e } x > 0 \text{ com } p \in \mathbb{Z}_+\}.$$

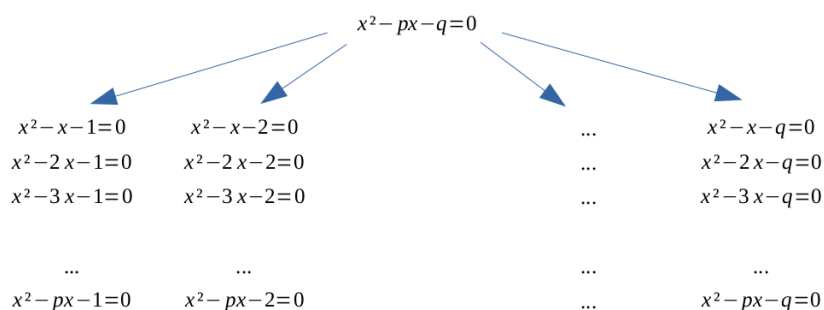


Figura 2: Subfamílias dos Números metálicos

Na seção 5 Teorema 5.1 mostramos que  $\phi$  é igual a razão entre uma *diagonal* e o lado <sup>4</sup> do pentágono regular.

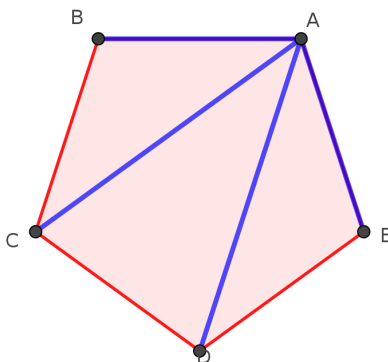


Figura 3: Proporção áurea no pentágono regular

<sup>4</sup>O lado de um polígono também é considerado uma diagonal neste trabalho

O número de prata, é o nome dado a raiz positiva da equação  $x^2 - 2x - 1 = 0$ ,  $\sigma_{2,1} = 1 + \sqrt{2}$ , sendo representado pelo símbolo  $\delta_{Ag}$ . Não tão popular quanto o número de ouro, mas objeto de estudo nos círculos acadêmicos, apresenta várias propriedades numéricas tão interessantes quanto às do seu “irmão” mais famoso, o número de ouro. Podemos encontrar um belo estudo sobre esses números em [18], [19].

Para obter o número de prata devemos dividir um segmento na seguinte razão

$$\frac{2a + b}{a} = \frac{a}{b}$$



Figura 4: Proporção de prata

Usando o método empregado no pentágono podemos encontrar essa razão no octógono (ver Seção 5 ).

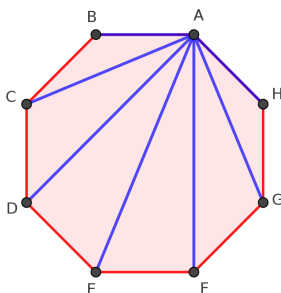


Figura 5: Diagonais de um octógono regular

Além dos números de ouro e de prata existem mais alguns elementos dessa família que recebem nomes específicos de metais.

p	q	Símbolo	Nome	Valor
1	1	$\phi$ ou $\sigma_{1,1}$	Número de Ouro	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
2	1	$\sigma_{2,1}$	Número de prata	$1 + \sqrt{2}$
3	1	$\sigma_{3,1}$	Número de Bronze	$\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
1	2	$\sigma_{1,2}$	Número de Cobre	2
1	3	$\sigma_{1,3}$	Número de Níquel	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
2	2	$\sigma_{2,2}$	Número de Platina	$1 + \sqrt{3}$

Esta lista contém somente os números mais usuais e não é completa, pois na verdade, não há limites para as possíveis combinações de  $p$  e  $q \in \mathbb{Z}_+^*$  em  $\sigma_{p,q}$ .

### Propriedade Aditiva

Ao escrevermos uma sucessão de valores numéricos em que cada termo, a partir do segundo,

é o produto do anterior por um valor  $k$  dado obtemos uma sequência denominada *Progressão Geométrica*.

$$a, ak, ak^2, \dots, ak^n, \dots$$

onde  $a$  é dito primeiro termo,  $ak^n$  é o  $(n+1)$ -ésimo termo e  $k$  a razão da progressão geométrica.

Considere a progressão geométrica onde  $\phi$ , o número de ouro, é o primeiro termo e a razão. Ou seja,

$$\phi, \phi^2, \phi^3, \dots$$

Esta sequência satisfaz à seguinte propriedade *aditiva*

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \phi^{n-1}.$$

De fato, se  $n = 1$  temos que  $\phi^2 = \phi + 1$ , por definição. Agora suponha, por hipótese de indução, que  $\phi^{k+1} = \phi^k + \phi^{k-1}$  para  $k \geq 2$ . Vamos verificar que o resultado também vale para  $k + 1$ . Note que

$$\begin{aligned} \phi^{(k+1)+1} &= \phi\phi^{k+1} \\ &\stackrel{(H.I.)}{=} \phi(\phi^k + \phi^{k-1}) \\ &= \phi^{k+1} + \phi^k. \end{aligned}$$

Portanto a propriedade segue por indução.

Esta propriedade não é exclusiva do Número de Ouro e pode ser ampliada para todos os números metálicos.

**Teorema 2.1.** *Seja  $\sigma_{p,q}$  um número metálico. Então*

$$\sigma_{p,q}^n = p\sigma_{p,q}^{n-1} + q\sigma_{p,q}^{n-2}$$

para todo inteiro  $n \geq 2$ .

**Demonstração:** Vamos provar por indução. Para  $n = 2$  temos  $\sigma_{p,q}^2 = p\sigma_{p,q} + q$ , por definição. Suponha que  $\sigma_{p,q}^k = p\sigma_{p,q}^{k-1} + q\sigma_{p,q}^{k-2}$  para algum  $k \geq 2$ . Multiplique a hipótese de indução por  $\sigma_{p,q}$  e temos

$$\sigma_{p,q}^{k+1} = p\sigma_{p,q}^k + q\sigma_{p,q}^{k-1}.$$

verificando assim o resultado. □

Esta propriedade mostra que os números metálicos estão diretamente ligados às regras de proporções, onde podemos ver uma interpretação geométrica na seção 4.

### 3 Sequências de Fibonacci

Sequências generalizadas de Fibonacci são sucessões de números naturais onde os  $n$  primeiros termos são dados

$$F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathbb{Z}_+,$$

e os termos seguintes são obtidos por recorrência

$$F_{n+1} = k_1F_1 + k_2F_2 + k_3F_3 + \dots + k_nF_n,$$

onde  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$ .

Podemos classificar as sequências de acordo com a quantidade de termos anteriores somados. Uma sequência  $F_n$  será denominada secundária, quando cada termo for uma combinação linear dos dois últimos, ou seja  $F_{n+2} = k_1 F_{n+1} + k_2 F_n$  com  $F_1$  e  $F_2$  dados, uma sequência  $F_n$  será denominada terciária quando cada termo for uma combinação linear dos três últimos  $F_{n+3} = k_1 F_{n+2} + k_2 F_{n+1} + k_3 F_n$  com  $F_1, F_2$  e  $F_3$  dados, e assim por diante.

**Exemplo 3.1.** Considere  $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 4$  e  $F_{n+3} = 2F_{n+2} + F_{n+1} + 3F_n$ . Então temos uma sequência terciária de Fibonacci

$$1, 2, 4, 13, 36, 97, \dots$$

O nosso interesse está nas sequências secundárias, dado que estão intimamente ligadas aos números metálicos, principal objeto de estudo deste trabalho. Ao longo da história percebemos que sempre houve um enorme interesse da ciência nas aplicações dos números de Fibonacci [4] [20]. Os números de Fibonacci são os termos da sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... em que cada termo é soma dos dois anteriores. Começando por  $F_1 = 1, F_2 = 1$ , temos que  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Por outro lado a razão do termo posterior pelo termo anterior convergem para um valor, ao qual mostraremos que é  $\phi$ .

**Teorema 3.1.** Seja  $F_n$  uma sequência secundária de Fibonacci tal que  $F_1 = a, F_2 = b$ , com  $a, b, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$  e  $F_{n+2} = k_1 F_{n+1} + k_2 F_n$ . Então o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

existe.

**Demonstração:** Veja Apêndice 10.2. □

**Teorema 3.2.** Seja  $F_1 = 1, F_2 = 1$  e  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  para  $n \geq 1$ . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \phi,$$

onde  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  é o número de ouro.

**Demonstração:** Segue do Teorema 3.1 que existe um número  $k$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = k.$$

Agora visto que  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  temos que  $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+1}} + \frac{F_n}{F_{n+1}}$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$  na última igualdade temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F_{n+1}}{F_n} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de cada limite obtemos

$$\begin{aligned} k &= 1 + k^{-1} \\ &= 1 + \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

E assim  $k^2 = k + 1$ . Resolvendo a equação do segundo grau  $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  ou  $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Como  $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$  é uma sucessão crescente de números positivos, temos que  $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ .  $\square$

Analogamente, dada a sequência  $F_1 = a$ ,  $F_2 = b$  e  $F_{n+2} = 2F_{n+1} + F_n$  com  $a$  e  $b$  inteiros positivos, podemos verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \sigma_{2,1}$$

onde  $\sigma_{2,1} = 1 + \sqrt{2}$  é o número de prata. Este resultado pode ser generalizado para sequências secundárias de Fibonacci.

**Teorema 3.3.** *Seja  $F_1 = a$ ,  $F_2 = b$  e  $F_{n+2} = pF_{n+1} + qF_n$ , onde  $a, b, p, q \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 1$ . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \sigma_{p,q},$$

onde  $\sigma_{p,q}$  é o número metálico dado pela equação  $x^2 - px - q = 0$ .

**Demonstração:** O limite da razão entre  $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$  existe pelo Teorema 3.1, logo temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \omega.$$

Segue da igualdade  $F_{n+2} = pF_{n+1} + qF_n$  que  $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = p\frac{F_{n+1}}{F_{n+1}} + q\frac{F_n}{F_{n+1}}$ . Assim temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} &= p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_{n+1}} + q \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} \\ &= p \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + q \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F_{n+1}}{F_n} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Visto que o limite existe, obtemos

$$\begin{aligned} \omega &= p + q\omega^{-1} \\ &= p + \frac{q}{\omega}. \end{aligned}$$

E assim  $\omega^2 = p\omega + q$ . E a solução positiva  $\omega$  é o número metálico  $\sigma_{p,q}$ .  $\square$

## 4 Retângulo Metálico

Nesta seção estudamos a relação entre certos números metálicos e retângulos. Dizemos que dois retângulos são semelhantes quando a razão entre os comprimentos de lados correspondentes é sempre a mesma.

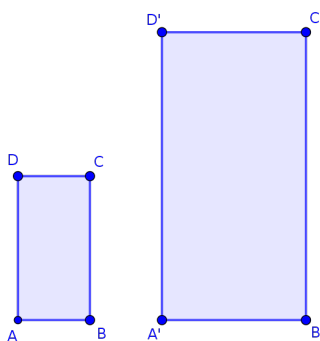


Figura 6: dois retângulos semelhantes

Suponha que os retângulos da figura 6 sejam semelhantes. Então existe um número real  $k$  tal que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = k.$$

O número  $k$  é denominado *razão de semelhança* entre os retângulos  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ .

Um *retângulo metálico*  $R_{p,1}$  é qualquer retângulo  $ABCD$  com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos uma quantidade  $p$  de quadrados, o retângulo restante será semelhante ao retângulo original.

Vamos estudar a família dos retângulos  $R_{p,1}$  que estão relacionados com os números metálicos  $\sigma_{p,1}$ . Vejamos alguns exemplos

### O retângulo de ouro $R_{1,1}$

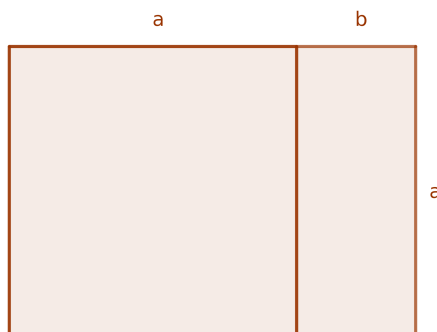


Figura 7: Retângulo de ouro

Se  $a + b$  e  $a$  são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição acima se traduz na relação:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Podemos aplicar a propriedade de frações  $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$  então  $\frac{x}{y} = \frac{x-z}{y-t}$  na **relação acima**, obtendo



$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{a-b}{(a+b)-a},$$

logo

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b}.$$

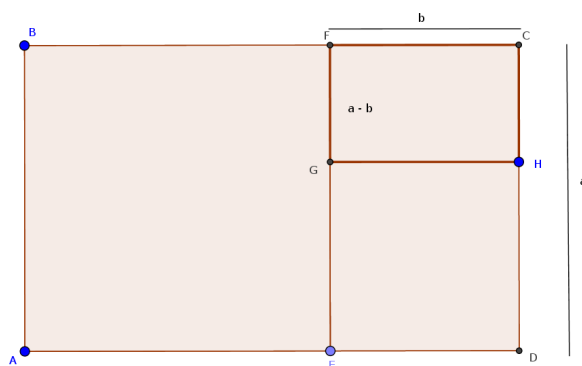


Figura 8: Retângulo de ouro CDEF

Mostrando que, se o retângulo de lados  $a + b$  e  $a$  é um retângulo de ouro, então o retângulo de lados  $a$  e  $b$  também é.

O mesmo raciocínio pode-se aplicar para o retângulo  $CDEF$ ,

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} = \frac{b-(a-b)}{a-b},$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2b-a}{a-b}$$

Para o retângulo  $CFGH$ ,

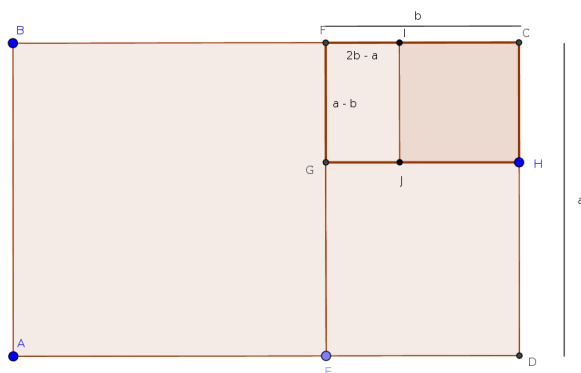


Figura 9: Retângulo de ouro CHGF

E assim por diante.

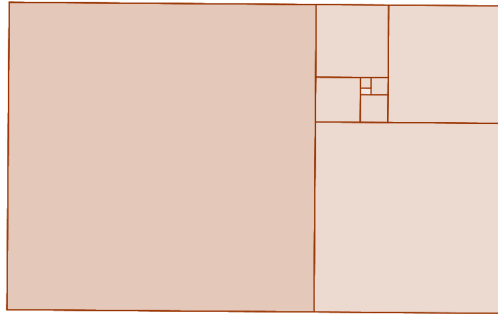


Figura 10: Retângulos de ouro

Colocando essas relações em uma sequência de igualdades:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} = \frac{2b-a}{a-b} = \frac{2a-3b}{2b-a} = \dots$$

e de acordo com os cálculos efetuados podemos observar o seguinte padrão recursivo:

$$\begin{aligned} & a+b \\ & a \\ & b \\ & a_2 = a-b \\ & a_3 = b-a_2 = 2b-a \\ & a_4 = a_2-a_3 = 2a-3b \\ & a_5 = a_3-a_4 = 5b-3a \\ & \dots \\ & a_n = a_{n-2} - a_{n-1} \end{aligned}$$

Em [16], vemos que a equação característica desta recorrência de segunda ordem é dada pela equação  $x^2 + x - 1 = 0$ , com solução  $x_1 = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$  e  $x_2 = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Onde  $x_1$  é o simétrico aditivo do número de ouro  $\phi$ .

**O retângulo de prata  $R_{2,1}$**

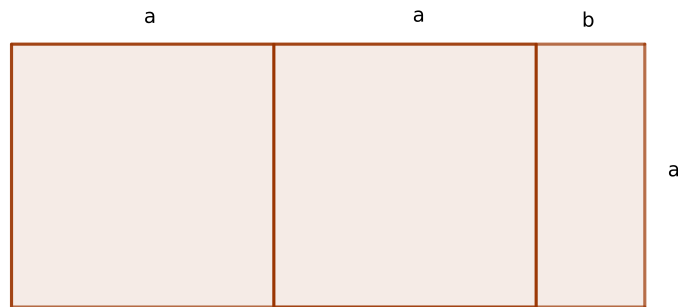


Figura 11: Razão de prata

Se  $2a + b$  e  $a$  são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição inicial se traduz na relação:

$$\frac{a}{2a + b} = \frac{b}{a}.$$

Retirando dois quadrados de lado  $b$  do retângulo  $EFGH$

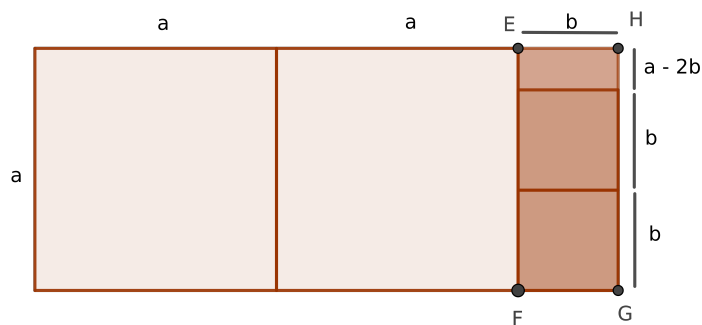


Figura 12: Razão de prata  $EFGH$

temos a relação

$$\frac{b}{a} = \frac{a - 2b}{b},$$

Mostrando que se o retângulo de lados  $b$  e  $a$  é um retângulo de prata, então o retângulo de lados  $a - 2b$  e  $b$  também é.

Podemos continuar essa razão indefinidamente, dentro desse retângulo,

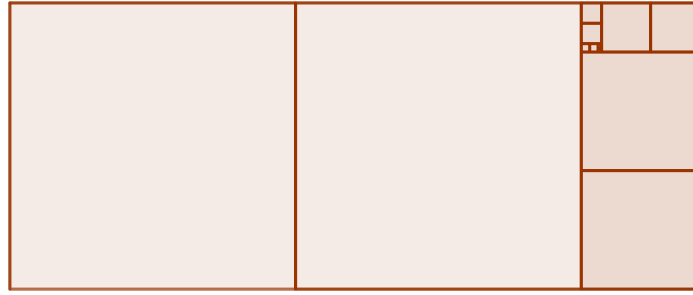


Figura 13: Retângulo de prata

$$\frac{a}{2a+b} = \frac{b}{a} = \frac{a-2b}{b} = \frac{5b-2a}{a-b} = \frac{5a-12b}{5b-2a} = \frac{29b-12a}{5a-12b} \dots$$

e mais uma vez podemos observar o seguinte padrão recursivo

$$\begin{aligned} &2a + b \\ &a \\ &b \\ &a_2 = a - 2b \\ &a_3 = b - 2a_2 = 5b - 2a \\ &a_4 = a_2 - 2a_3 = 5a - 12b \\ &a_5 = a_3 - 2a_4 = 29b - 12a \\ &\vdots \\ &a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1} \end{aligned}$$

Novamente temos uma recorrência de segunda ordem associada a equação  $x^2 + 2x - 1 = 0$ , com solução  $x_1 = -(1 + \sqrt{2})$  e  $x_2 = -(1 - \sqrt{2})$ .

Observe que  $x_1$  é o simétrico aditivo do número de prata  $\sigma_{2,1}$ .

### Retângulos metálicos $R_{p,1}$

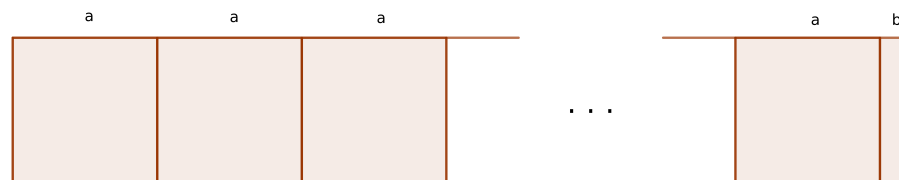


Figura 14: Razão metálica

Se  $pa + b$  e  $a$  são os comprimentos dos lados do retângulo original, a definição inicial se traduz na relação:

$$\frac{a}{pa+b} = \frac{b}{a},$$

Seguindo os passos utilizados no retângulo de ouro e prata, chegamos a:

$$\frac{b}{a} = \frac{a - pb}{b},$$

Mostrando que se o retângulo de lados  $pa + b$  e  $a$  é um retângulo metálico, então o retângulo de lados  $a$  e  $b$  também é.

Podemos continuar essa razão indefinidamente, dentro desse retângulo,

$$\frac{a}{pa + b} = \frac{b}{a} = \frac{a - pb}{b} = \frac{b - pa + p^2b}{a - pb} = \frac{a - 2pb + p^2a - p^3b}{b - pa + p^2b} = \frac{b - 2ap + 2p^2b - ap^3 + p^4b}{a - 2pb + p^2a - p^3b} = \dots$$

e mais uma vez podemos observar um padrão recursivo

$$\begin{aligned} & pa + b \\ & a \\ & b \\ & a_2 = a - pb \\ & a_3 = b - pa_2 = b - pa + p^2b \\ & a_4 = a_2 - pa_3 = a - 2pb + p^2a - p^3b \\ & a_5 = a_3 - pa_4 = b - 2ap + 2p^2b - ap^3 + p^4b \\ & \dots \\ & a_n = a_{n-2} - pa_{n-1} \end{aligned}$$

Analogamente, a equação característica desta recorrência de segunda ordem é  $x^2 + px - 1 = 0$ , com  $x_1$  e  $x_2$  raízes da equação, sendo uma das raízes igual ao simétrico aditivo do número metálico  $\sigma_{p,1}$ .

Este raciocínio estabelece que quaisquer dois elementos consecutivos desta sequência são os lados de um retângulo metálico.

Este processo de retirar quadrados de retângulos metálicos conduz a uma sequência infinita de retângulos, com dimensões cada vez menores. Essa característica de repetir padrões infinitamente, mostra que nossos retângulos metálicos também geram estruturas fractais. Fractal é uma estrutura geométrica similar em vários níveis de escala, ou seja, não altera o seu formato quando aumenta ou diminui o seu tamanho, e repete esse padrão infinitamente.

## 5 As razões entre Diagonais e Lado

Nesta seção estudaremos as razões cujos numeradores são os comprimentos das diagonais de um polígono regular inscrito em uma circunferência, e o denominador é o tamanho do lado deste polígono. O objetivo é estudar a relação destas razões com os números metálicos.

Com o intuito de facilitar a leitura do texto, o termo polígono refere-se a *polígonos regulares*. A definição de diagonal também será adaptada, veja a figura abaixo

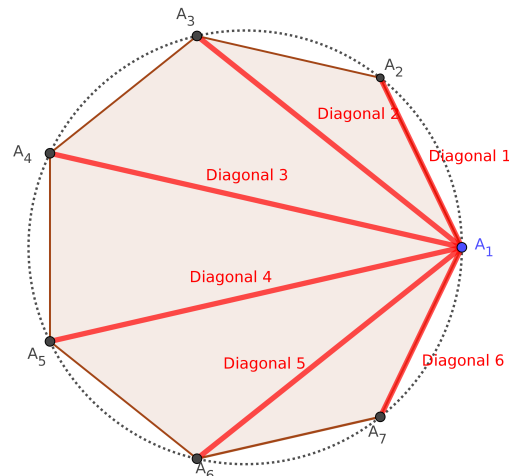


Figura 15: Diagonais

Uma diagonal é qualquer segmento que liga um vértice a outro. Fixado um vértice  $A_1$  enumeramos os outros seguindo o sentido anti-horário.

As demonstrações referentes aos comprimentos dos lados e das diagonais de um polígono estão no Apêndice **10** e serão usadas como base para os resultados a seguir. No Teorema 10.1 mostramos que o comprimento do lado de um polígono pode ser calculado pela fórmula  $l_n = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right)$ , e no Teorema 10.2 mostramos que o comprimento de uma diagonal de um polígono pode ser calculado pela fórmula  $d_k = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi}{n} \right)$ . Observando a semelhança entre as duas fórmulas anteriores vamos escrevê-las em uma única notação:

$$d_{n,k} = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi}{n} \right),$$

onde  $n$  significa o número de lados do polígono e  $k$  indica qual diagonal estamos calculando. Consideramos  $R = 1$ , pois os resultados independem do tamanho do raio.

Observe que com esta notação temos o tamanho do **lado** é dado é representado por  $d_{n,1}$  ou seja, o lado é a primeira diagonal.

De forma geral, o tamanho da diagonal é dado por  $d_{n,k}$ , com  $n \geq 4$  e  $1 \leq k \leq n - 1$ .

**Exemplo 5.1.** Temos que o lado do heptágono é denotado por  $d_{7,1} = 2 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{7} \right)$ .

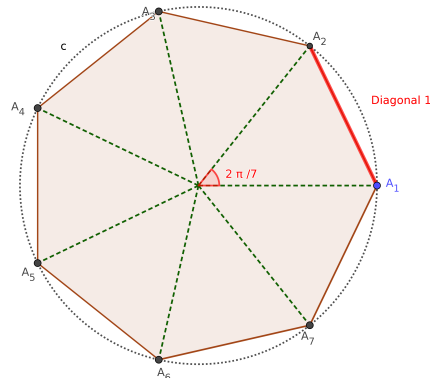


Figura 16: Diagonal 1 -  $d_{7,1}$

Agora vejamos a notação para a segunda diagonal do heptágono,  $d_{7,2} = 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ .

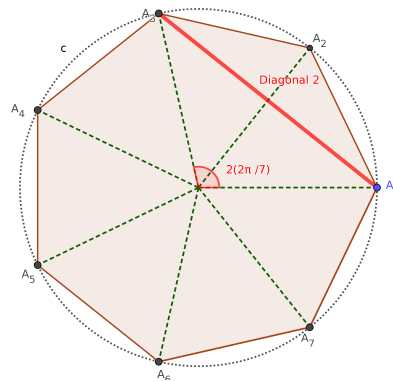


Figura 17: Diagonal 2 -  $d_{7,2}$

**Algumas observações devem ser feitas:**

Quando o número de lados é par a diagonal maior é o próprio diâmetro da circunferência circunscrita. Podemos calcular qual a posição da maior diagonal da seguinte maneira:

$$\text{Diagonal maior (par)} = \frac{\text{número de lados}}{2}$$

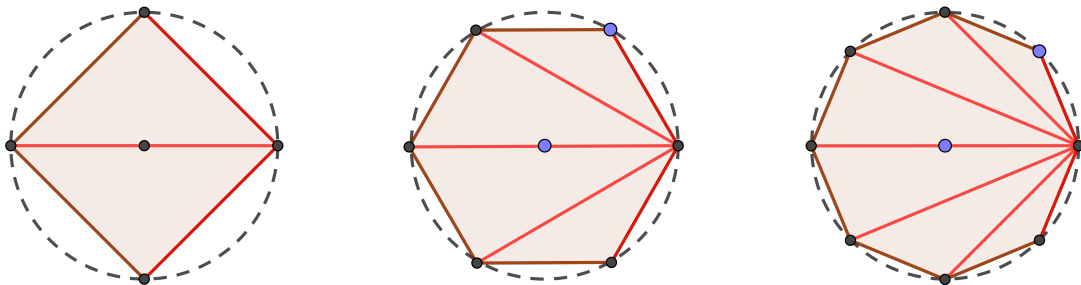


Figura 18: Polígonos pares

Quando o número de lados do polígono é ímpar a maior diagonal é determinada pelo seguinte cálculo:

$$\text{Diagonal maior (ímpar)} = \frac{\text{número de lados} - 1}{2}$$

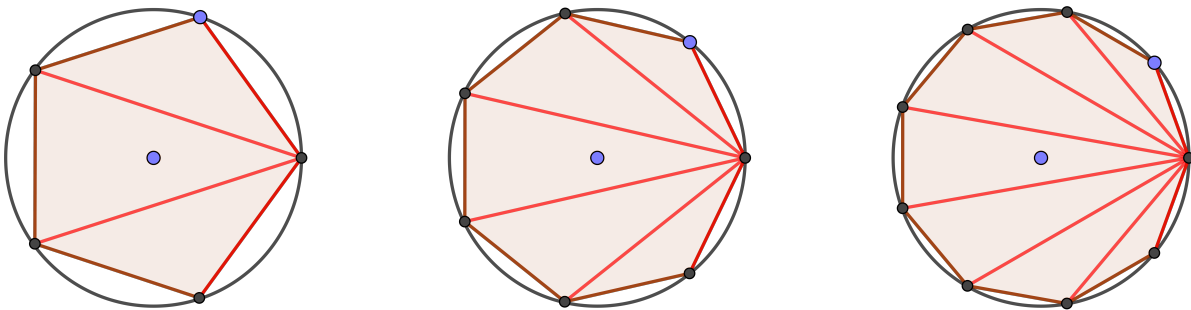


Figura 19: Polígonos ímpares

Prolongando  $\overline{OA_1}$  é possível observar a simetria das diagonais em relação a esse segmento. Para não repetir valores das diagonais na razão  $\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}}$ , precisamos somente de um parâmetro de todas diagonais. Para calcular a quantidade de diagonais basta  $k$  variar de 1 até  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ <sup>5</sup>.

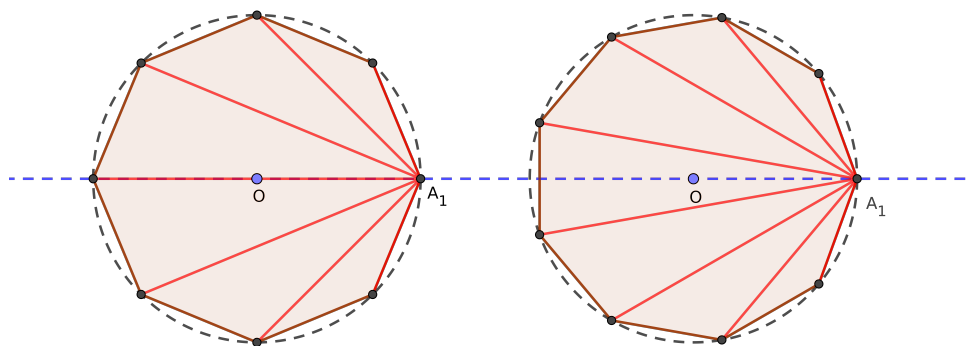


Figura 20: Eixo de simetria

Vamos iniciar nossa busca pelos números metálicos em polígonos regulares. Os exemplos abaixo exibem os cálculos e ilustram geometricamente a razão  $\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}}$ :

### Quadrado

<sup>5</sup> $\lfloor x \rfloor$  maior inteiro menor que  $x$ .



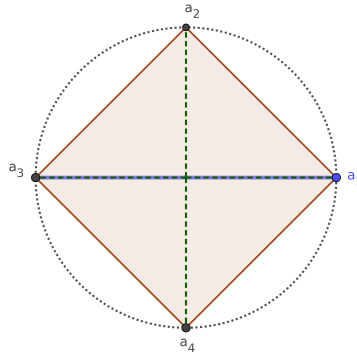


Figura 21: Quadrado

Começamos pelo quadrado, temos que

$$\frac{d_{4,2}}{d_{4,1}} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$

E  $\sqrt{2}$  não é um número metálico.

### Pentágono

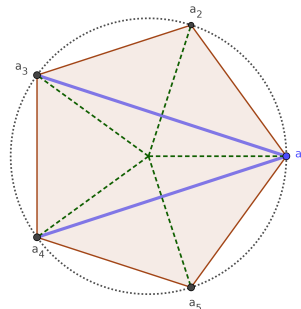


Figura 22: Pentágono

Agora, no pentágono, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 5.1.** *A razão entre a medida da segunda diagonal pela primeira diagonal (lado) de um pentágono regular é igual a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .*

#### Demonstração:

Temos que  $d_{5,2} = 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  é a segunda diagonal e  $d_{5,1} = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$  é o lado. Calculando a razão

$$\frac{d_{5,2}}{d_{5,1}} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}}{\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{8}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

temos o número de ouro.

□

*Por simetria, podemos observar que a terceira diagonal tem a mesma medida que a segunda, tornando desnecessário o cálculo.*

## Hexágono

Também temos um número metálico associado ao hexágono.

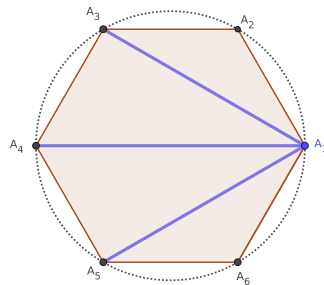


Figura 23: Hexágono

Calculando a razão da segunda diagonal pela primeira

$$\frac{d_{6,2}}{d_{6,1}} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

E  $\sqrt{3}$  não é um número metálico.

Mas calculando a razão da terceira diagonal pelo lado, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 5.2.** *A razão entre a medida da terceira diagonal pela primeira diagonal (lado) de um hexágono regular é igual ao número de cobre, 2.*

### Demonstração:

Calculando a razão

$$\frac{d_{6,3}}{d_{6,1}} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{6}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

vemos que esta razão está associada ao número de cobre.

□

## Heptágono

No heptágono também calculamos as razões da segunda e terceira diagonal em relação a primeira.

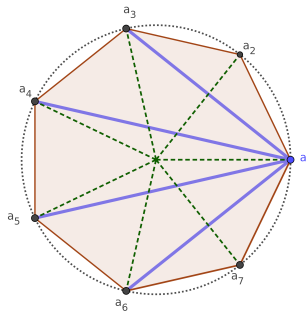


Figura 24: Heptágono

$$\frac{d_{7,2}}{d_{7,1}} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)} \approx \frac{0,781831}{0,433884} \approx 1,80193 \quad \frac{d_{7,3}}{d_{7,1}} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)} \approx \frac{0,974928}{0,433884} \approx 2,24698$$

Não encontramos nenhum número metálico associado aos resultados.

### Octógono

No octógono a razão entre a terceira diagonal e o lado é igual ao número de prata. As outras razões não correspondem a números metálicos.

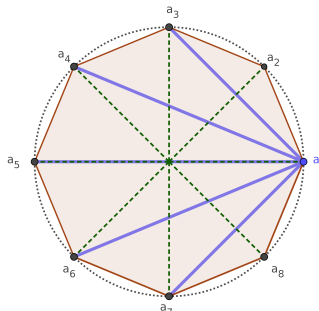


Figura 25: Octógono

$$\frac{d_{8,2}}{d_{8,1}} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{8}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

**Teorema 5.3.** A razão entre a terceira diagonal e o lado (primeira diagonal) de um octógono regular é igual ao número de prata,  $\sqrt{2} + 1$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $d_{8,3} = 2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)$  é a terceira diagonal e  $d_{8,1} = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)$  é o lado. Calculando a razão

$$\frac{d_{8,3}}{d_{8,1}} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}{\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{2} + 1$$

temos o número de prata. □

## 6 A busca pelo número de Bronze

Já relacionamos, o número de ouro ao pentágono, o números de cobre ao hexágono e o número de prata ao octógono. Considerando esses casos é possível criar alguma expectativa em relação ao número de bronze, e por seguinte aos próximos números metálicos. Continuar essa busca testando a razão  $\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}}$  em todos os polígonos até encontrar um resultado seria um trabalho exaustivo, e podendo ser um trabalho inexecutável. Por isso vamos recorrer a outras ferramentas matemáticas, a fim de desenvolver um método de pesquisa para verificar se existe solução para este problema e se podemos reutilizá-lo na busca de soluções para outros números metálicos.

Temos

$$d_{n,k} = 2\text{sen} \left( \frac{k\pi}{n} \right)$$

Com o objetivo de pesquisar a existência de diagonais em algum polígono regular com  $n \geq 4$  que possam estar relacionadas ao número de bronze, vamos estudar a seguinte família das funções periódicas:

$$f_n(x) = \frac{2\text{sen} \left( \frac{\pi x}{n} \right)}{2\text{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right)} = \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi x}{n} \right)}{\text{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right)} \text{ com } n \geq 4 \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

Podemos observar que todas as funções dessa forma possuem período  $T = 2n$ . De fato, visto que  $\text{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right)$  se comporta como uma constante em  $f_n(x)$ , fixando  $n$

$$f_n(x) = \frac{1}{\text{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right)} \text{sen} \left( \frac{\pi x}{n} \right)$$

É preciso analisar apenas o período de  $\text{sen} \left( \frac{\pi x}{n} \right)$ .

Como a função seno é periódica com período fundamental  $T = 2\pi$ , basta calcular o período da seguinte maneira:

$$\frac{\pi T}{n} = 2\pi$$

Logo

$$T = 2n$$

Temos aqui alguns exemplos gráficos:

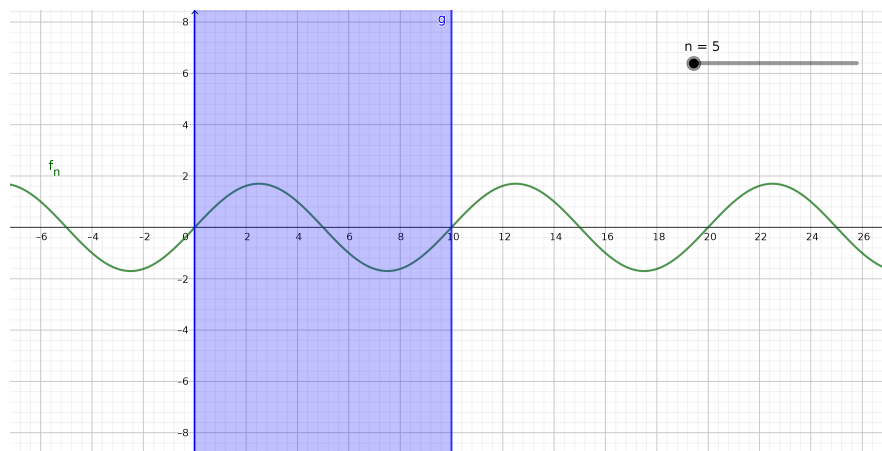
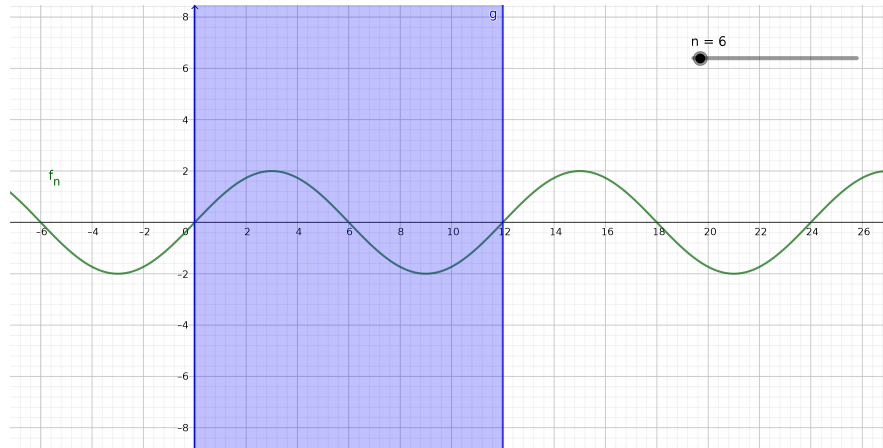
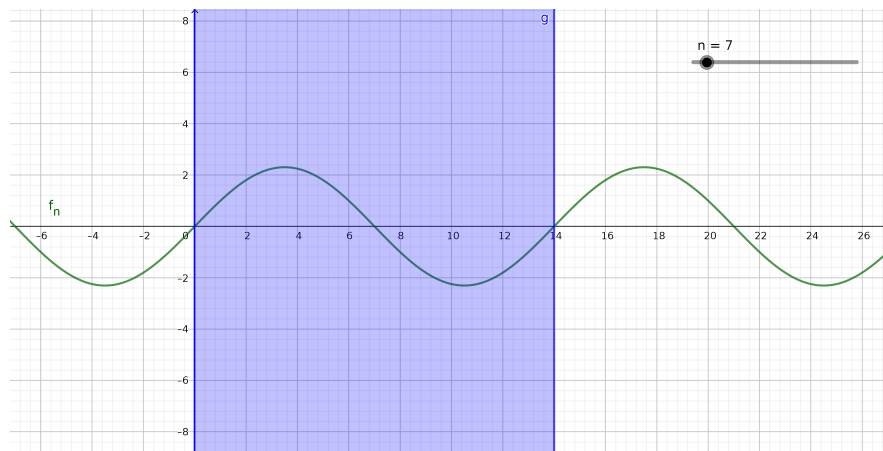


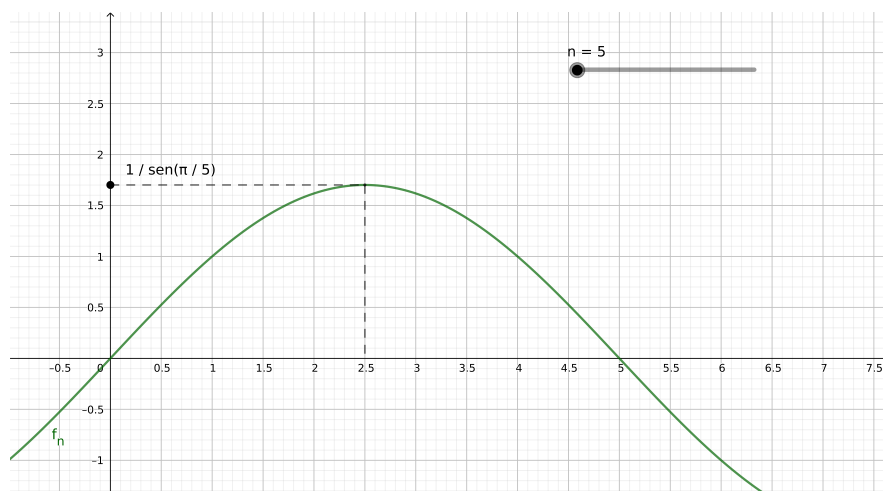
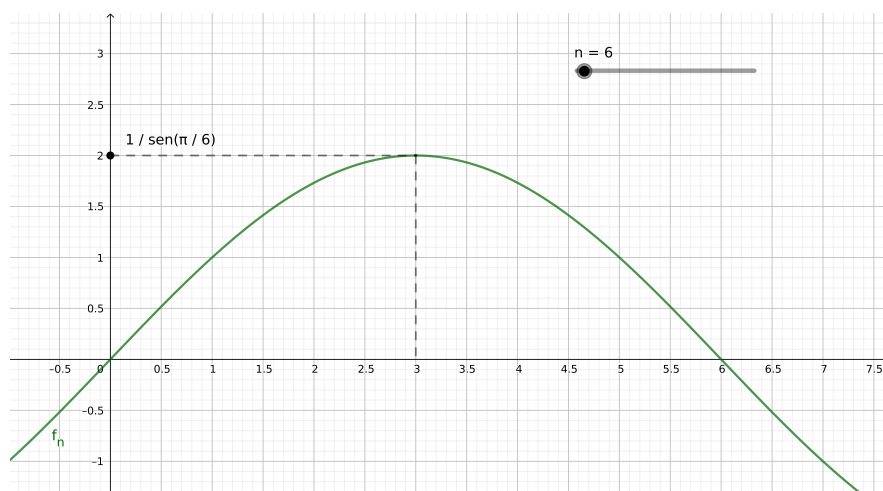
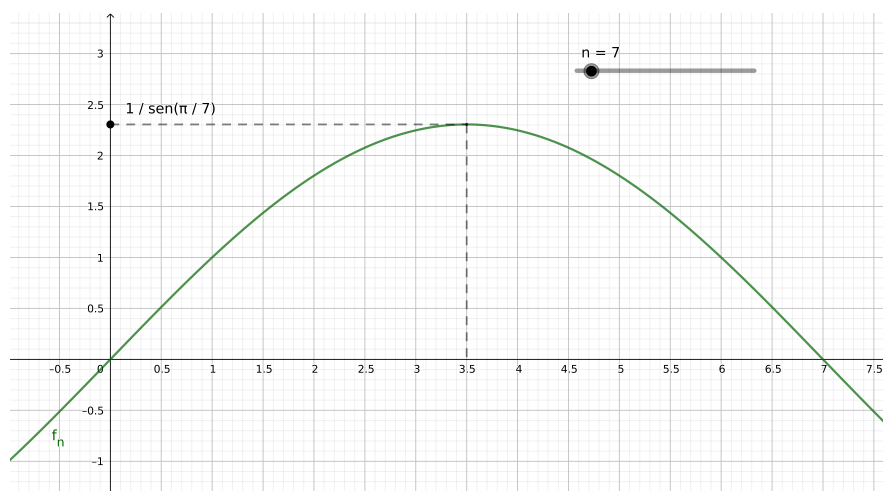
Figura 26:  $f_5(x)$

Figura 27:  $f_6(x)$ Figura 28:  $f_7(x)$ 

Também devemos estudar o máximo da função, lembrando que ao multiplicar uma função seno por uma constante altera-se a amplitude desta função.

A função é contínua no intervalo  $[0, 2n]$ . E o máximo da função ocorre no ponto  $\frac{n}{2}$ . Ou seja, o máximo de  $f_n(x)$  no intervalo  $[0, 2n]$  é  $f_n\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ .

Veamos alguns exemplos gráficos.

Figura 29: Máximo  $f_5(x)$ Figura 30: Máximo  $f_6(x)$ Figura 31: Máximo  $f_7(x)$ 

Perceba que quando o número  $n$  de lados é fixado, a função assume valores correspondentes

ao intervalo  $[0, n]$ , obtidos pela razão  $\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}}$ , contudo precisamos apenas considerar a primeira metade deles, pois temos uma simetria em relação ao diâmetro, por isso só precisamos considerar o intervalo  $[0, \frac{n}{2}]$ :

Observando o gráfico abaixo, podemos ver que o máximo para  $n \leq 9$  é inferior a 3.

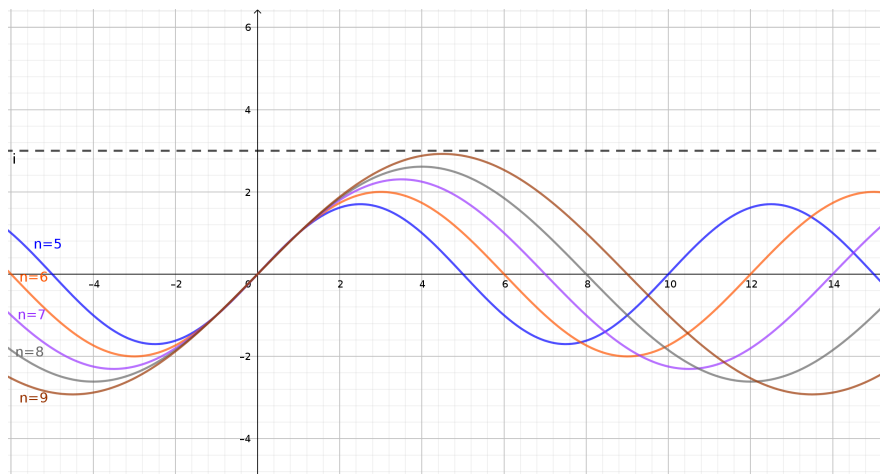


Figura 32:  $f_n(x)$ , com  $n \in \{5, \dots, 9\}$

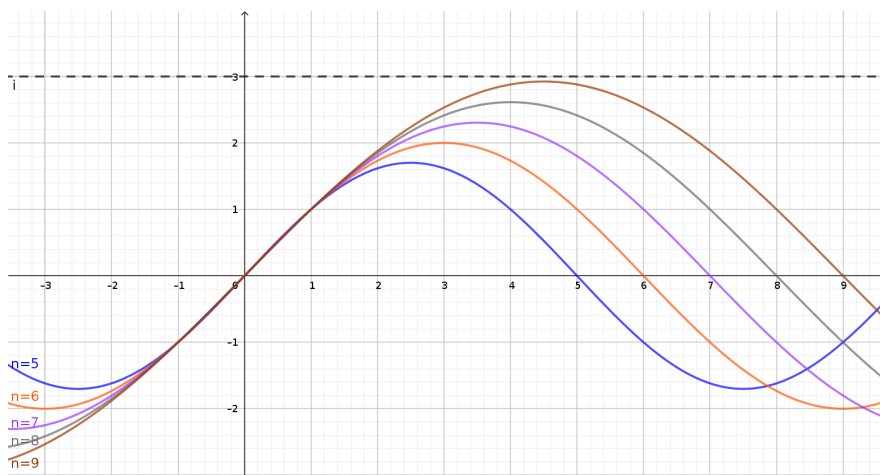


Figura 33: Máximos

Como o número de bronze tem valor  $\frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,30277563\dots$  nossa busca deve ocorrer nos polígonos regulares com o número de lados  $n$ , maiores que 9,  $n \geq 10$ . Observe no gráfico que para  $n \leq 9$  o valor máximo da função é inferior a 3.

Vamos verificar os valores na Tabela abaixo, organizada com todos os quocientes da razão  $\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}}$  para polígonos com lados  $4 \leq n \leq 17$ :

		LADOS						
		4	5	6	7	8	9	10
DIAGONAL	1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
	2	1,4142136	1,6180340	1,7320508	1,8019377	1,8477591	1,8793852	1,9021130
	3			2,0000000	2,2469796	2,4142136	2,5320889	2,6180340
	4					2,6131259	2,8793852	3,0776835
	5							3,2360680
	6							

		LADOS						
		11	12	13	14	15	16	17
DIAGONAL	1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
	2	1,9189859	1,9318517	1,9418836	1,9498558	1,9562952	1,9615706	1,9659462
	3	2,6825071	2,7320508	2,7709121	2,8019377	2,8270909	2,8477591	2,8649445
	4	3,2287074	3,3460652	3,4389051	3,5135188	3,5743292	3,6245098	3,6663805
	5	3,5133371	3,7320508	3,9070415	4,0489173	4,1653521	4,2619726	4,3429623
	6		3,8637033	4,1481149	4,3812863	4,5743292	4,7356503	4,8716497
	7					4,5743292	5,0273395	5,2344390
	8							5,4189757

Observando a Tabela, podemos ver que os valores por coluna apresentam uma sequência crescente. Podemos generalizar esse resultado com o lema abaixo 6.1:

**Lema 6.1.** *Seja  $n$  um inteiro positivo, com  $n \geq 4$ . Então  $f_n(k) < f_n(k+1)$  para todo  $k$  tal que  $k+1 < \frac{n}{2}$ .*

**Demonstração:** Note que  $0 \leq \frac{i\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$ , para todo  $0 \leq i \leq \frac{n}{2}$ . Então temos

$$f_n(k) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi(k+1)}{n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = f_{n+1}(k)$$

A desigualdade (\*), é válida quando  $0 \leq k \leq k+1 \leq \frac{n}{2}$ , pois a função  $\text{sen}(x)$  é crescente no intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .  $\square$

Observando a Tabela mais uma vez, podemos ver que os valores por linha também apresentam uma sequência crescente. Podemos generalizar esse resultado com o lema abaixo 6.3:

**Lema 6.2.** *A função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$  é decrescente no intervalo  $(0, \pi/2)$ . Em particular,  $0 < \beta < \alpha < \pi/2$  implica que*

$$\alpha \text{sen}(\beta) - \beta \text{sen}(\alpha) > 0.$$

**Demonstração:** A função  $f$  é decrescente visto que  $f'(x) < 0$  em  $(0, \pi/2)$ . De fato,

$$f'(x) = \frac{x \cos(x) - \text{sen}(x)}{x^2} < 0.$$

A última desigualdade é decorrência de que  $x \cos(x) < \text{sen}(x)$ , no intervalo  $(0, \pi/2)$  [8].



Visto que  $f(x)$  é decrescente, temos que  $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} < \frac{\text{sen}(\beta)}{\beta}$ . E assim

$$\alpha \text{sen}(\beta) - \beta \text{sen}(\alpha) > 0.$$

□

**Lema 6.3.** *Seja  $k$  um inteiro positivo tal que  $k \leq n/2$ . Então  $f_n(k) < f_{n+1}(k)$  para todo  $n$ .*

**Demonstração:** É suficiente verificar que a função  $g(x) = f_x(k) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{x}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}$  é crescente no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Ou seja,  $g'(x) > 0$  no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ . De fato,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left( \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{x}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \right)' \\ &= \frac{\pi}{x^2} \left[ \frac{-k \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{x}\right) + \text{sen}\left(\frac{k\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \right] \\ &= \frac{\pi}{x^2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left[ \text{sen}\left(\frac{k\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) - k \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{x}\right) \right] \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{\pi}{x^2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left[ \frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\right) + \frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{k\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\right) - \frac{k}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{x} + \frac{k\pi}{x}\right) - \frac{k}{2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{x} - \frac{k\pi}{x}\right) \right] \\ &= \frac{\pi}{x^2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left[ \frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{(k+1)\pi}{x}\right) + \frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{(k-1)\pi}{x}\right) - \frac{k}{2} \text{sen}\left(\frac{(k+1)\pi}{x}\right) - \frac{k}{2} \text{sen}\left(\frac{(1-k)\pi}{x}\right) \right] \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{\pi}{x^2 \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left[ \frac{1-k}{2} \text{sen}\left(\frac{(k+1)\pi}{x}\right) + \frac{k+1}{2} \text{sen}\left(\frac{(k-1)\pi}{x}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2x \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left[ -\frac{(k-1)\pi}{x} \text{sen}\left(\frac{(k+1)\pi}{x}\right) + \frac{(k+1)\pi}{x} \text{sen}\left(\frac{(k-1)\pi}{x}\right) \right] \\ &> 0. \end{aligned}$$

Na igualdade (2) utilizamos que  $1 - k = -(k - 1)$  e o fato da função  $\text{sen}(x)$  ser ímpar. A igualdade (1) segue da identidade  $\text{sen}(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\text{sen}(x+y) + \frac{1}{2}\text{sen}(x-y)$ . A desigualdade segue do Lema 6.2 considerando  $\alpha = \frac{(k+1)\pi}{x}$  e  $\beta = \frac{(k-1)\pi}{x}$ . □

**Lema 6.4.** *Seja  $f_n(k) = \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$  onde  $n \geq 3$  e  $k \geq 0$ . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = k.$$

**Demonstração:** Visto que  $f_n(k) = \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$  temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\text{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{k\pi}{n^2}}{-\text{cos}\left(\frac{\pi}{n}\right) \frac{\pi}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \text{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\text{cos}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= k \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{cos}\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\text{cos}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= k(1) = k \end{aligned}$$

Na igualdade (1) usamos a regra de L'Hôpital (veja Proposição 3.46 [11]). □

**Teorema 6.1.** *Não existe polígono regular tal que o número de bronze seja a razão entre uma diagonal e o seu lado.*

**Demonstração:** Lembre que o número de bronze tem valor  $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$  ou aproximadamente 3,3027756. Segue da Tabela 6 que  $f_n(k) < 3$  quando  $n < 10$ . Assim devemos examinar os valores de  $f_n(k)$  para  $n \geq 10$ .

Visto que  $f_{11}(5) = 3,513$  segue dos Lemas 6.1 e 6.3 que para  $n \geq 11$  e  $k \geq 5$   $f_n(k)$  é sempre maior do que o número de bronze. Segue do Lemas 6.1 e 6.4 que

$$f_n(k) \leq 3$$

para todo  $n$  e  $k \leq 3$ . Logo não temos o número de bronze nesta faixa da tabela. Resta examinar quando  $n \geq 10$  e  $k = 4$ . Observe na tabela que  $f_{10}(4) = 3,07768\dots$ ,  $f_{11}(4) = 3,2287\dots$ ,  $f_{12}(4) = 3,34606\dots > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$  e segue do Lema 6.3 que  $f_n(k)$  é sempre diferente do número de bronze para  $n \geq 10$  e  $k = 4$ . Portanto,  $f_n(k)$  é sempre diferente do número de bronze para todo  $n$  e todo  $k$ . □

## 7 A área metálica - Uma aplicação para o ensino médio

Com o intuito de relacionar nosso tema com o ensino básico, vamos propor uma atividade que mescla assuntos abordados no ensino básico com nossos números metálicos.

No ensino fundamental e médio aprendemos sobre funções, principalmente a função afim e quadrática. Também aprendemos sobre áreas e volumes nas aulas de geometria. Mas como relacionar todas essas coisas com os números metálicos? Aqui sugerimos uma proposta para trabalhar com os discentes.

Os alunos, em geral, desde o início da sua vida escolar trabalham com áreas e volumes. Vamos então, nesta seção propor o conceito de área metálica, como sendo a área delimitada no primeiro quadrante pela parábola  $g(x) = x^2$  e pela reta  $f(x) = px + q$ . Para facilitar vamos usar a notação  $A_{p,q}$  para denotar a área metálica.

Ao propor o estudo de áreas entre funções no ensino médio, mesmo que de forma rudimentar, temos a possibilidade de analisar problemas teóricos ou práticos que normalmente são

abordados no ensino superior, pois requerem conhecimento do cálculo integral para a solução.

Primeiramente vamos precisar calcular a área  $A_t$  delimitada pela função afim. Ou seja, dado um intervalo  $[x_1, x_2]$  e uma função afim  $f(x) = px + q$ , com  $p$  e  $q$  números reais. Qual a área entre o gráfico de  $f(x)$ , as retas  $x = x_1$ ,  $x = x_2$  e o eixo das abcissas?

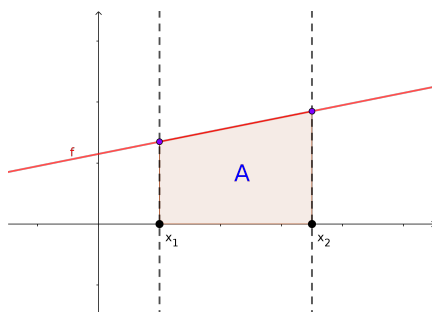


Figura 34: Área abaixo de uma função afim

Pela Figura 34 podemos ver que a área que desejamos determinar tem o formato de um trapézio, uma área com uma fórmula bastante conhecida

$$A_t = \frac{(\text{Base Menor} + \text{Base Maior}) \times \text{Altura}}{2},$$

logo

$$A_t = \frac{[(f(x_1) - x_1) + (f(x_2) - x_2)](x_2 - x_1)}{2}.$$

**Exemplo 7.1.** Vamos calcular a área delimitada pelo gráfico da função  $f(x) = 2x + 4$ ,  $x = 0$ ,  $x = 6$  e o eixo das abcissas.

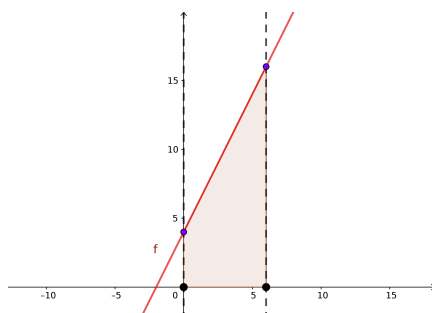


Figura 35: Área do trapézio

Substituindo na fórmula

$$A = \frac{(f(0) - 0) + (f(6) - 6)(6 - 0)}{2} = \frac{(4 + 10)6}{2} = 42 \text{ u.a.}$$

determinamos o valor da área.

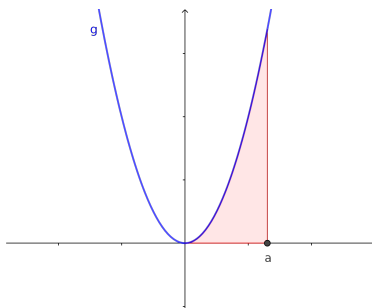


Figura 36: Área abaixo de  $g(x) = x^2$

Agora precisamos aprender a calcular a área da região compreendida entre o gráfico da função  $g(x) = x^2$  e o eixo  $x$ , para  $x$  variando em  $[0, a]$ .

Na Revista do Professor de Matemática vol. 59 podemos encontrar um pequeno artigo [21], que mostra uma maneira intuitiva de calcular essa área. Para tanto, vamos considerar uma partição do intervalo  $[0, a]$  no eixo  $x$ , em  $n$  sub-intervalos iguais, constituída pelo conjunto  $[0, x_1, x_2, \dots, x_n = a]$ . Dessa maneira ficam determinados  $n$  sub-intervalos, cada um da forma  $[x_{i-1}, x_i]$ , com  $1 \leq i \leq n$ .

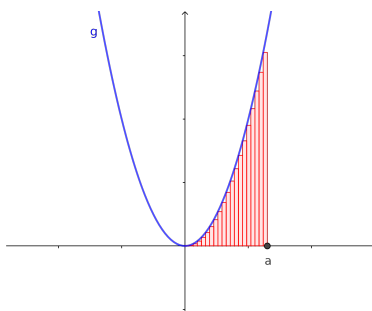


Figura 37: Retângulos abaixo de  $g(x) = x^2$

Sendo assim a área procurada é aproximada pela área de  $n$  retângulos. Sendo estes retângulos com base  $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{a}{n}$  e altura  $x_i^{*2}$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ , onde  $x_i^*$  é o extremo direito de cada sub-intervalo  $\Delta x$ . Agora observe cada partição, ou cada retângulo, de base  $\Delta x$  e altura  $x_i^{*2}$  pode ser interpretado como um prisma de base quadrada  $x_i^*$  e altura  $\Delta x$ .

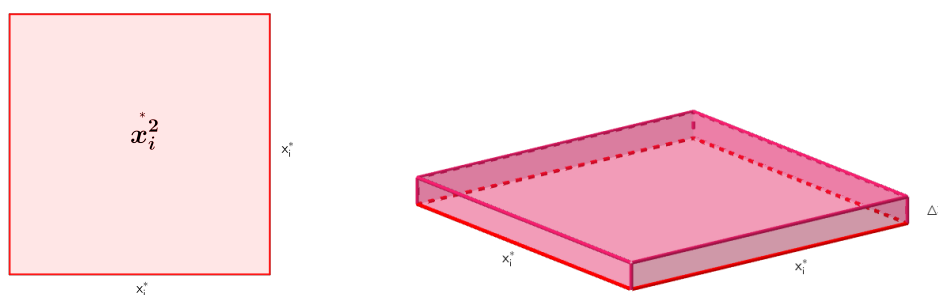


Figura 38: Prisma de lado  $x_i^*$  e altura  $\Delta x$

Quando fazemos crescer indefinidamente o número de pontos de partição, isto é, fazemos  $n \rightarrow \infty$ , obtemos uma soma de infinitos prismas que quando sobrepostos formam uma

pirâmide de base quadrada  $a$ .

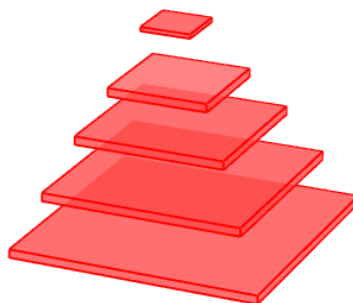


Figura 39: Pirâmide de base quadrada  $a$

E assim temos um método que utiliza apenas ferramentas e conteúdos do ensino básico capaz de calcular a área abaixo da curva  $g(x) = x^2$  no intervalo  $[0, a]$ . Visto que a área procurada é numericamente igual ao volume da pirâmide de base quadrada  $a$  e altura  $a$ . Ou seja,

$$A_p = \frac{a^3}{3}.$$

**Exemplo 7.2.** Vamos calcular a área delimitada pelo gráfico da função  $g(x) = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$  e o eixo das abscissas.

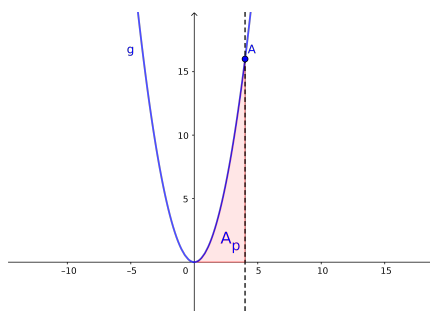


Figura 40: Área abaixo de  $g(x) = x^2$

*Substituindo na fórmula*

$$A_p = \frac{4^3}{3}.$$

$$A_p = \frac{64}{3} \text{ u.a.}$$

*Desta forma, calculamos o valor da área.*

## 7.1 A área de ouro

Agora vamos calcular a área dourada. Temos que o número de ouro é a solução positiva da equação  $x^2 = x + 1$ . Chamando  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x + 1$ , qual seria a área no primeiro quadrante entre essas duas funções? Observe primeiro que  $x \in [0, \phi]$ .

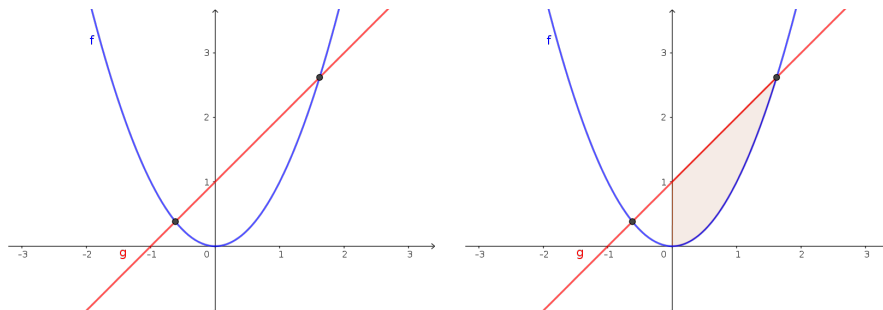


Figura 41: Área de Ouro

Para calcular a área abaixo de  $g(x) = x + 1$ , usamos a fórmula da área do trapézio com base maior igual a  $g(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ , base menor igual a 1 e altura igual a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , logo

$$A_t = \frac{\left(1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{2}$$

$$A_t = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{4}.$$

Usando o fórmula para calcular a área abaixo da parábola  $x^2$  e acima do intervalo  $[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ , temos

$$A_p = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{3}$$

$$A_p = \frac{2 + \sqrt{5}}{3}.$$

E portanto,

$$A_{1,1} = A_t - A_p$$

$$A_{1,1} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{4} - \frac{2 + \sqrt{5}}{3}$$

$$A_{1,1} = \frac{7 + 5\sqrt{5}}{12}$$

é a área de ouro.

## 7.2 A área Metálica

Neste trabalho as soluções positivas das equações  $x^2 - px - q = 0$  com  $p$  e  $q$  inteiros positivos são os números metálicos. Logo temos que  $[\sigma_{p,q}, p\sigma_{p,q} + q]$  é um ponto de interseção entre a parábola  $f(x) = x^2$  e a reta  $g(x) = px + q$ . A área metálica é a área delimitada por  $g(x)$  e  $f(x)$ .

Utilizando a fórmula apresentada para calcular a área abaixo de uma função afim, vamos determinar a área delimitada pelas função  $g(x) = px + q$  e o eixo  $x$  no intervalo  $[0, \sigma_{p,q}]$ .

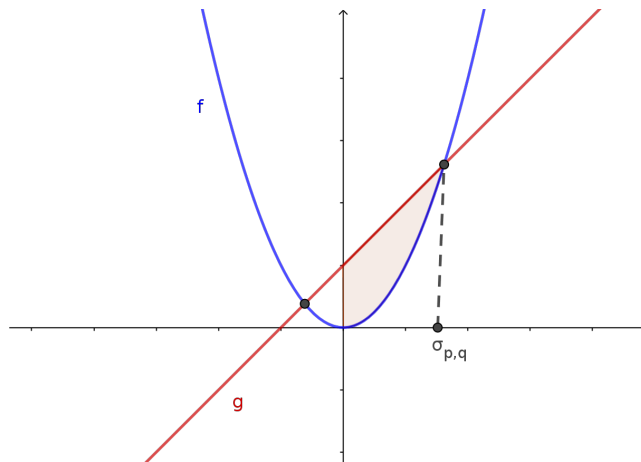


Figura 42: Área Metálica

Pela fórmula de Báskhara temos que  $\sigma_{p,q} = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$ , onde  $\Delta = p^2 + 4p$ . Os números metálicos também possuem a propriedade aditiva, logo

$$\sigma_{p,q}^2 = p\sigma_{p,q} + q \text{ e } \sigma_{p,q}^3 = p\sigma_{p,q}^2 + q\sigma_{p,q} = p^2\sigma_{p,q} + q\sigma_{p,q} + pq = \sigma_{p,q}(p^2 + q) + pq.$$

Visto que a base menor mede  $q$ , a base maior mede  $g(\sigma_{p,q}) = f(\sigma_{p,q}) = \sigma_{p,q}^2$  e a altura mede  $\sigma_{p,q}$ . Podemos substituir esses valores na fórmula para calcular a área de um trapézio

$$A_t = \frac{(q + \sigma_{p,q}^2)\sigma_{p,q}}{2}.$$

Utilizando a fórmula para calcular a área abaixo da função  $f(x) = x^2$ , vamos calcular a área delimitada pela função  $f(x) = x^2$  e o eixo  $x$  no intervalo  $[0, \sigma_{p,q}]$ .

Sendo a área da base da nossa “pirâmide”  $\sigma_{p,q}^2$  e  $\sigma_{p,q}$  a altura, vamos calcular esse “volume”

$$A_p = \frac{\sigma_{p,q}^2 \sigma_{p,q}}{3} = \frac{\sigma_{p,q}^3}{3}.$$

A área procurada,  $A_{p,q}$ , é igual a diferença,  $A_t - A_p$ , entre estes valores

$$A_{p,q} = A_t - A_p = \frac{(\sigma_{p,q}^2 + q)\sigma_{p,q}}{2} - \frac{\sigma_{p,q}^3}{3} = \frac{\sigma_{p,q}^3 + 3q\sigma_{p,q}}{6}$$

logo

$$A_{p,q} = \frac{\sigma_{p,q}(p^2 + q) + pq + 3q\sigma_{p,q}}{6} = \frac{\sigma_{p,q}(p^2 + 4q) + pq}{6}$$

e portanto a área metálica  $A_{p,q}$ , associada ao número metálico  $\sigma_{p,q}$ , é dada pela fórmula

$$A_{p,q} = \frac{1}{6} (\sigma_{p,q}\Delta + pq).$$

O conceito de função desempenha papel importante para descrever e estudar o comportamento de certos fenômenos físicos, geográficos, químicos, biológicos, econômicos, sociais entre outros.

Além das tradicionais maneiras de abordar as equações e funções do segundo grau em sala de aula, como raízes, estudo de sinal, máximos e mínimos, propomos uma maneira de estudar intuitivamente a interpretação de integral como a área abaixo de uma curva usando conceitos palpáveis aos alunos do ensino médio. Podendo-se criar várias situações problemas a partir da técnica apresentada, levando o aluno a adquirir certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas.

## 8 Considerações Finais

Ao estudarmos os números metálicos, percebemos que existem diversas possibilidades de se abordar e interligar conceitos matemáticos ensinados no ensino básico e médio. Estabelecer pontes entre a geometria e álgebra, interligar conteúdos que parecem desconexos quando ensinados no ensino médio, e levar nossos alunos a apreciação da verdadeira matemática, não de conceitos e fórmulas decoradas, mas sim de soluções criativas utilizando o que aprendemos como ferramentas na construção da solução de problemas.

## 9 Agradecimentos

Agradeço à minha esposa Juliana, companheira de todos os momentos. Agradeço aos meus pais por todo apoio e ao meu sobrinho Danilo, pela motivação. Agradeço aos amigos, colegas de trabalho e colegas do PROFMAT turma 2017. Agradeço à CAPES e SBM por tornarem possível a realização do curso. Agradeço aos professores do PROFMAT pela disponibilidade em compartilhar sabedoria, em especial ao meu orientador, Professor Doutor Marcelo Oliveira Veloso, pela disponibilidade, paciência, dedicação, compromisso, presteza, pelos ensinamentos que contribuíram decisivamente para a conclusão deste trabalho.

## 10 Apêndice

### 10.1 Polígonos Regulares

#### POLÍGONO

Sejam  $n \geq 3 \in \mathbb{N}$  e  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  pontos distintos do plano, dizemos que  $(A_1 A_2 \dots A_n)$  é um **polígono (convexo)** se, para  $1 \leq i \leq n$ , a reta  $\overleftrightarrow{A_i A_{i+1}}$  não contém nenhum outro ponto  $A_j$ , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue,  $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$  e  $A_{n+2} = A_2$ ).



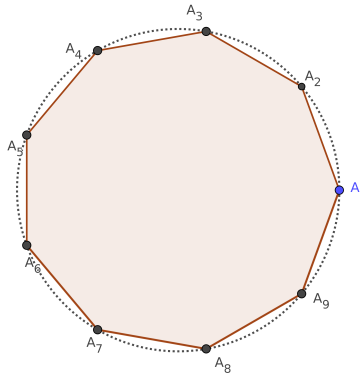


Figura 43: Exemplo - Eneágono regular

## POLÍGONO REGULAR

Um polígono convexo é regular se tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos congruentes. (equilátero e equiângulo).

### VÉRTICES

Os **vértices** de um polígono regular inscrito são os pontos  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ .

### LADOS

Os **lados** de um polígono regular inscrito são os segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ .

### DIAGONAL

A **diagonal** de um polígono é qualquer segmento  $A_iA_j$  cujo extremos sejam vértices do polígono.

### ÂNGULO CÊNTRICO

O ângulo cêntrico de um polígono regular de  $n$  lados é o ângulo cuja medida é  $\frac{2\pi}{n}$ , onde  $n \geq 3$ .

**Lema 10.1.** *Todo  $n$ -ágono convexo possui exatamente  $\frac{n(n-3)}{2}$  diagonais.*

**Demonstração:** Se  $n = 3$ , não há nada a provar, dado que um triângulo não possui diagonais e  $\frac{n(n-3)}{2} = 0$ .

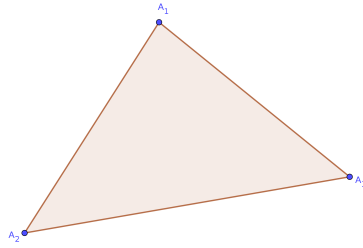


Figura 44: Triângulo

Vamos supor para  $n \geq 4$ . Traçando os segmentos de reta do vértice  $A_1$  aos  $n - 1$  vértices restantes ( $A_2, A_3, \dots, A_n$ ), obtemos  $n - 1$  segmentos de reta. Mas  $A_1A_2$  e  $A_1A_n$  são lado, assim sobram  $n - 3$  diagonais. Podemos repetir esse raciocínio para todos os outros vértices seguintes. Se de cada  $n$  vértice temos  $(n - 3)$  diagonais, temos um total de  $n(n - 3)$  diagonais. Mas cada diagonal foi contada duas vezes: uma quando contamos a que parte de  $A_i$  em direção a  $A_j$  e a outra que sai de  $A_j$  em direção a  $A_i$ . Para obter o número correto de diagonais, basta dividir por 2, chegando a  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

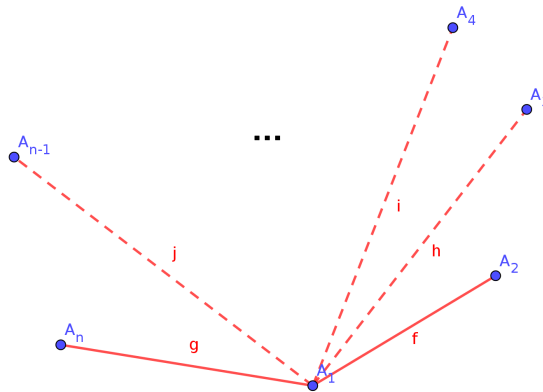


Figura 45: Diagonais de um polígono

□

**Exemplo 10.1.** No Hexágono (veja Figura 46) os lados são os segmentos  $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, \overline{A_5A_6}, \overline{A_6A_1}$  e suas diagonais os segmentos  $\overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}, \overline{A_1A_5}$ . Observe na imagem abaixo as diagonais partindo de  $A_1$ .

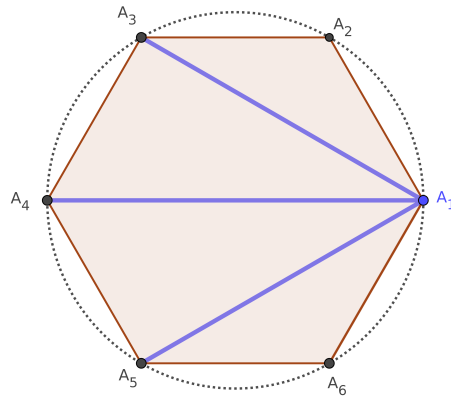


Figura 46: Hexágono

**Lema 10.2.** O arco de uma circunferência de raio  $R$  com ângulo central  $\alpha$  tem comprimento

$$2R \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right).$$

**Demonstração:** Seja  $\overline{AB}$  a corda do círculo  $C$  e raio  $R$  (veja 47). Denote por  $D$  o ponto médio da corda  $\overline{AB}$ . Temos que os  $\triangle AOD$  e  $\triangle BOD$  são congruentes, com  $\overline{OD}$  mediatriz e bissetriz (Basta verificar o caso LLL).

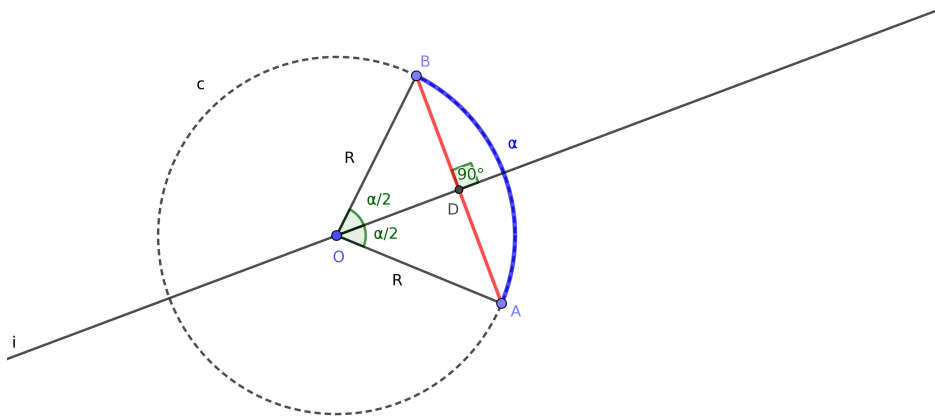


Figura 47: Corda de uma circunferência

Como o ângulo  $\widehat{AOB} = \alpha$ ,  $\widehat{AOD} \equiv \widehat{BOD} = \frac{\alpha}{2}$  temos:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{DB} \\ &= \overline{AO} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) + \overline{OB} \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= R \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) + R \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2R \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

□

**Teorema 10.1.** Dado um círculo  $C$  de centro  $O$  e raio  $R$ , o comprimento,  $l_n$ , de qualquer lado de um polígono regular inscrito em  $C$  com  $n$  lados é:

$$l_n = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right).$$

**Demonstração:** Dado um polígono regular, todos os seus lados  $\overline{A_i A_{i+1}}$ , possuem o mesmo tamanho e o seu ângulo cêntrico é  $\frac{2\pi}{n}$  pelo lema 10.2 temos:

$$l_n = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{\frac{2\pi}{n}}{2} \right)$$

$$l_n = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{n} \right)$$

□

**Teorema 10.2.** Dado um círculo de centro  $O$  e raio  $R$ , o comprimento das diagonais,  $d_k$ , de um polígono regular inscrito é dado por

$$d_k = 2R \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi}{n} \right)$$

onde  $n$  é o número de lados do polígono e  $k = 2, 3, \dots, n - 3$ .

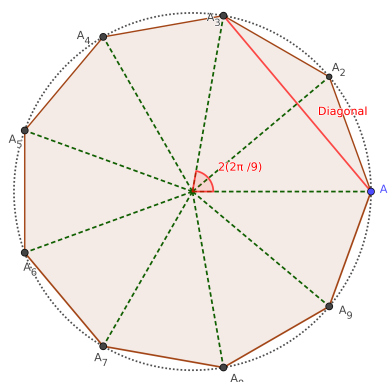


Figura 48: Diagonal 2 partindo de  $A_1$

**Demonstração:** Fixando o vértice  $A_1$ , pelo Lema 10.1 podemos ver as diagonais  $\overline{A_1 A_3}$ ,  $\overline{A_1 A_4}$ , ...,  $\overline{A_1 A_{n-1}}$ , e temos que a distância angular entre um vértice e outro é dado por  $\frac{2\pi}{n}$ . Devemos considerar  $k = 2, 3, 4, \dots, n - 1$ , pois para  $k = 1$  e  $k = n$  temos  $A_1 A_2$  e  $A_n A_1$  que por definição são lados de um polígono.

Assim o comprimento das diagonais  $\overline{A_1 A_i}$  está relacionado com um ângulo múltiplo de  $\frac{2\pi}{n}$ .

Procedendo da mesma forma que no teorema 10.1 podemos marcar um ponto médio  $D_i$  em qualquer segmento  $\overline{A_1 A_i}$  de forma que:

$$\begin{aligned}
\overline{A_1 A_i} &= \overline{A D_i} + \overline{D_i A_i} \\
&= \overline{A_1 O} \operatorname{sen} \left( \frac{k \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{2} \right) + \overline{A_i O} \operatorname{sen} \left( \frac{k \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{2} \right) \\
&= R \operatorname{sen} \left( k \frac{\pi}{n} \right) + R \operatorname{sen} \left( k \frac{\pi}{n} \right) \\
&= 2R \operatorname{sen} \left( k \frac{\pi}{n} \right)
\end{aligned}$$

□

## 10.2 Demonstração do Teorema 3.3

Vamos provar aqui o Teorema 3.3. Esta demonstração foi encontrada em <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/spinadel/>.

**Teorema:** Dada uma sequência secundária de Fibonacci  $a, b, pb + qa, p(b + qa) + qb, \dots$  tal que  $G(n+1) = pG(n) + qG(n-1)$  com  $p, q \in \mathbb{Z}_+^*$ , então o limite de  $\frac{G(n+1)}{G(n)} = \sigma_{p,q}$ , sendo  $\sigma_{p,q}$  um número real positivo.

**Demonstração:** Primeiro vamos encontrar uma expressão para o  $n$ -ésimo termo da sequência secundária de Fibonacci. Reescreva a equação  $G(n+1) = pG(n) + qG(n-1)$  na forma  $G(n+1) = pG(n) + qH(n)$ , onde  $H(n+1) = G(n)$ . Esta última equação pode ser escrita na forma matricial

$$[G(n)] = \begin{pmatrix} G(n) \\ H(n) \end{pmatrix}.$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Então é fácil verificar que  $[G(n+1)] = A[G(n)]$ . Ou seja

$$\begin{pmatrix} G(n+1) \\ G(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(n) \\ G(n-1) \end{pmatrix}.$$

Supondo  $G(0) = G(1) = 1$  para facilitar os cálculos temos que  $[G(1)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Assim temos

$[G(n+1)] = A^n [G(1)]$ . Vamos resolver este caso particular. Para calcular a  $n$ -ésima potência da matriz  $A$ .

A equação característica de  $A$  é  $\begin{pmatrix} p - \lambda & q \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - p\lambda - q = 0$

com dois autovalores  $\sigma = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$  e  $\sigma' = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ .

Colocando  $A$  na forma  $PA^n P^{-1}$ , fazemos  $A_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma' \end{pmatrix}$  e fazendo a mudança de base

$P = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma' \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , temos que

$$A^n = (PA_\sigma P^{-1})^n = PA_\sigma^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma' \end{pmatrix} P^{-1}$$

Chegamos a  $A^n = \frac{1}{\sigma - \sigma'} \begin{pmatrix} \sigma^{n+1} - \sigma'^{n+1} & \sigma\sigma'(\sigma^n - \sigma'^n) \\ \sigma^n - \sigma'^n & \sigma\sigma'(\sigma^{n-1} - \sigma'^{n-1}) \end{pmatrix}$

$$G(n+1) = \frac{1}{\sigma - \sigma'} \left[ \sigma^{n+1}(1 - \sigma') - \sigma'^{n+1}(1 - \sigma) \right].$$

Substituindo  $\sigma - \sigma' = \sqrt{p^2 + 4q}$  e  $\sigma' = \frac{-q}{\sigma}$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{n+1} + \left(-\frac{q}{\sigma}\right)^{n+1}}{\sigma^n + \left(-\frac{q}{\sigma}\right)^n} = \sigma$$

E a demonstração está completa para a sequência  $1, 1, p + q, p(p + q) + q, \dots$

Se, em vez de escolhermos  $G(0) = G(1) = 1$ , começarmos com dois valores arbitrários  $a$  e  $b$ , é fácil provar que o resultado é o mesmo. De fato, dado a sequência secundária de Fibonacci:  $a, b, pb + qa, p(pb + qa) + qb, \dots$  temos que avaliar a razão

$$\frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{pG(n) + qaG(n-1)}{pbG(n-1) + qaG(n-2)} = \frac{pb \frac{G(n)}{G(n-1)} + qa}{pb + \frac{qa}{\frac{G(n-1)}{G(n-2)}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma.$$

## Referências

- [1] SPINADEL, Vera W. de. (1997) LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS Y EL DISEÑO. Disponível em <https://cumincad.architexturez.net/system/files/pdf/4856.content.pdf> - Acesso em 10 ago 2018.
- [2] EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP - 2009.
- [3] SPINADEL, Vera W. de. (1998) THE FAMILY OF METALLIC MEANS. Disponível em <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/spinadel/> Acesso em 10 ago 2018.
- [4] LIVIO, Mario. Razão Áurea - A história de fi, um número surpreendente, Editora Record, 3ª Edição, Rio de Janeiro - São Paulo 2008.
- [5] HEFEZ, Abramo. Aritmética, SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [6] ÁVILA, Geraldo. Retângulo áureo, divisão áurea e seqüência de Fibonacci in: Revista do Professor de Matemática, 06, 15 - 22, SBM 1983.
- [7] BUITRANGO, Antonia Redondo. *Polygons, Diagonals, and the Bronze Means*, Nexus Network Journal - vol. 9, N<sup>o</sup> 2, p. 321 - 326, 2007. Disponível em <https://www.nexusjournal.com/volume-9/number-2-october-2007.html> - Acesso em: 12 ago 2018.
- [8] NETO, Antonio Caminha Muniz. Fundamentos de Cálculo, SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [9] MILIES, César Polcin. Coelho, Sônia Pitta. Números: Uma introdução à Matemática, Edusp, São Paulo, 2006.

- [10] NETO, Antônio Caminha Muniz. Tópicos de Matemática Elementar vol 1: Números Reais , SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [11] NETO, Antônio Caminha Muniz. Tópicos de Matemática Elementar vol 3: Introdução à análise , SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [12] IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 3, Editora Atual,7ª edição, São Paulo, 1993.
- [13] DOLCE, Osvaldo. Pompeo, José de Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 9, Editora Atual,7ª edição, São Paulo, 1993.
- [14] DOLCE, Osvaldo. Pompeo, José de Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 10, Editora Atual,7ª edição, São Paulo, 2013.
- [15] NETO, Antônio Caminha Muniz. Geometria , SBM, Rio de Janeiro, 2013, Coleção PROFMAT.
- [16] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Matemática Discreta , SBM, Rio de Janeiro, 2015, Coleção PROFMAT.
- [17] STEWART, James. Cálculo vol. 1, Pioneira Thomson Learning,4ª Edição, São Paulo, 2002.
- [18] ALVES, Francisco Regis Vieira. Revista Thema. Volume 13. Número 2. 2016. Página 27 a 41. Disponível em <http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/324> . Acesso em:18 jun 2019.
- [19] MARQUES, Bruno Alves. Equações Diofantinas Lineares e Equação de Pell: uma abordagem via Frações Contínuas.São João del-Rei, UFSJ, 2016. 24 f. (Dissertação de Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei,2016.
- [20] BOYER, Carl B. - História da matemática; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.
- [21] VENÂNCIO, Yuri. De nosso alunos, Mente libertada, um cálculo intuitivo,RPM 59, São Paulo, 1º quadrimestre de 2006.
- [22] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.Brasília: MEC, 2000.