2019: DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

As elegantes matrizes circulantes

Edson Pereira Arruda Filho[1]
José Eloy Ottoni[2]
Marcelo Oliveira Veloso[3]

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo apresentar aos alunos do ensino médio algumas aplicações das matrizes, especialmente das matrizes circulantes e de sua importância do ponto de vista computacional. Apesar de sua aparente simplicidade, matrizes circulantes conectam assuntos muito diferentes na paisagem da matemática. Nesse trabalho também temos a oportunidade de mesclar as matrizes circulantes com geometria utilizando o Geogebra. Passamos uma breve ideia sobre os números complexos, para que possamos calcular os autovalores de uma matriz circulante qualquer. Falaremos também das funções hiperbólicas generalizadas, e demonstraremos algumas propriedades dessas funções usando matrizes circulantes.

Palavras-chave: Matrizes, Matrizes circulantes, Diagonalização, Geogebra, Funções Hiperbólicas Generalizadas.

Abstract: The present work aims to present, to the high school students, some applications of matrices; especially of the circulant matrices and their importance from the computational point of view. Despite their seeming simplicity, circulant matrices link together very different subjects in the scenery of mathematics. In this work, we also have the opportunity to merge the circulant matrices with geometry using Geogebra. We pass a brief idea about the complex numbers, in order to calculate the eigenvalues of any circulant matrix. We will also talk about the generalized hyperbolic functions, and prove some of its properties employing circulant matrices.

Keywords: Matrices, Circulant Matrices, Diagonalization, Geogebra, Generalised Hyperbolic Functions.

[1]Aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Turma 2017
Instituição: Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
E-mail: edinpaf@hotmail.com
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM, CAP-UFSJ
E-mail: jeottoni@ufsj.edu.br
[3]Coorientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Estatística, Física e Matemática - DEFIM, CAP-UFSJ
E-mail: veloso@ufsj.edu.br

1 Introdução

A Matemática está em tudo, entretanto muitas pessoas sequer tentam desenvolver os mais elementares raciocínios matemáticos por medo de errar, pelo medo da Matemática. Mas observando mais atentamente, a matemática é praticada todos os dias e, às vezes, não nos damos conta disso. Com um pouco de análise, estudo e prática, é possível mostrar que a matemática não é tão difícil quanto parece ser, ou seja, a base da matemática não é a repetição mecânica e a simples memorização de fórmulas e fatos, mas a aprendizagem constante e a prática atenta.

Este trabalho abordará a definição do conceito de matriz e algumas de suas classificações. A intenção aqui é formar um alicerce bem seguro para o desenvolvimento de operações matriciais, tema de grande importância. O ensino da matemática deve buscar novas metodologias para alcançar seus objetivos e proporcionar aos alunos condições de perceber e entender a aplicação dos diversos conteúdos.

O professor de matemática deve procurar, nos dias atuais, tentar diminuir os problemas encontrados no ensino, atuar de forma mais dinâmica e tentar despertar o espírito de investigação dos alunos. Grandes ferramentas pedagógicas, como os computadores, celulares e tablets, são utilizadas no ensino da matemática, tornando as aulas mais dinâmicas e interativas e amenizando possíveis dificuldades ao longo da aprendizagem da matemática. O Geogebra é um aplicativo gratuito que nos permite mesclar álgebra com geometria. O software permite realizar construções geométricas de uma, duas ou três dimensões e também nos permite construir gráficos de diversas funções.

O presente trabalho aborda o conceito de matrizes, algumas de suas operações e a associação de um número real à uma matriz quadrada, o qual chamamos de determinante. Será apresentado também uma ideia breve do conjunto dos números complexos, com o objetivo de nos auxiliar nos cálculos dos autovalores de uma matriz circulante.

Este estudo objetiva o ensino de Matrizes Circulantes, discutindo-se e aplicando as matrizes circulantes junto com o Geogebra, bem como a importância das matrizes circulantes para a determinação simples de algumas das propriedades das chamadas Funções Hiperbólicas Generalizadas. As funções hiperbólicas são definidas em um triângulo retângulo associado à uma hipérbole equilátera, assim como as funções trigonométricas são definidas em um círculo. As matrizes circulantes nos ajudarão a obter resultados importantes de algumas funções que são generalizações elegantes dessas funções hiperbólicas clássicas.

2 Conceitos preliminares - Matrizes

Para auxiliar a representação de informações ou facilitar cálculos complexos, é comum a utilização de tabelas numéricas retangulares. Essas tabelas, compostas de certa quantidade de linhas (fileiras horizontais) e colunas (fileiras verticais), são chamadas na Matemática de matrizes [1].

As matrizes são amplamente utilizadas em diversas áreas, como na Computação Gráfica, em Engenharia, Física e Administração. As matrizes oferecem meios para a solução de sistemas lineares, resolução de equações polinomiais e também representam as transformações lineares entre espaços vetoriais, além de diversas outras aplicações.

Definição 2.1 *Uma matriz de ordem $m \times n$ (m por n), em que m e n são números naturais não nulos, é toda tabela composta de mn elementos dispostos em m linhas e n colunas.*

Exemplo 2.1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Representaremos genericamente uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$ da seguinte maneira

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Um elemento genérico dessa matriz pode ser expresso por a_{ij}, onde i e j são a i-ésima linha e a j-ésima coluna, respectivamente, em que esse elemento se encontra.

Exemplo 2.2 *Dado uma matriz $\mathbf{A}$ qualquer, a_{21} é o elemento da segunda linha e primeira coluna, a_{32} é o elemento da terceira linha e segunda coluna.*

2.1 Alguns tipos de matrizes

Apresentaremos alguns tipos de matrizes que possuem nomenclatura diferenciada, por apresentarem certas características.

1) *Matrizes quadradas:* É toda matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$, em que $m = n$, ou seja, o número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplo 2.3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}_{1\times 1} \qquad \textit{matriz quadrada de ordem } 1.$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \textit{matriz quadrada de ordem } 2.$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \textit{matriz quadrada de ordem } 3.$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}_{m\times m} \qquad \textit{matriz quadrada de ordem } m.$$

Em uma matriz quadrada de ordem m, os elementos a_{ij}, em que $i = j$, formam a diagonal principal. E os elementos em que $i + j = m + 1$ formam a diagonal secundária.

2) *Matriz diagonal:* É toda matriz quadrada em que os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, se $i \neq j$ então $a_{ij} = 0$.

Exemplo 2.4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3) *Matriz triangular:* É toda matriz quadrada em que todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos.

3.1) *Matriz triangular superior:* É toda matriz triangular cujos elementos nulos estão abaixo da diagonal principal.

Exemplo 2.5

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3.2) *Matriz triangular inferior:* É toda matriz triangular cujos elementos nulos estão acima da diagonal principal.

Exemplo 2.6

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

4) *Matriz identidade:* É toda matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a um e os demais são nulos, ou seja, se $i = j$ então $a_{ij} = 1$ e se $i \neq j$ então $a_{ij} = 0$.

Exemplo 2.7

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

5) *Matriz coluna:* É toda matriz que possui apenas uma coluna.

Exemplo 2.8

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

6) *Matriz linha:* É toda matriz que possui apenas uma linha.

Exemplo 2.9

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

7) *Matriz transposta:* Dada uma matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$, a matriz transposta indicada por $\mathbf{A}^T$, é a matriz $n \times m$, cujas linhas são iguais às colunas da matriz $\mathbf{A}$ ordenadamente.

Exemplo 2.10

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

8) *Matriz simétrica:* É quando a matriz $\mathbf{A}$ é igual à sua transposta, ou seja, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Note que a matriz só será simétrica se ela for uma matriz quadrada.

Exemplo 2.11

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Operações com matrizes

É possível definirmos algumas operações algébricas entre matrizes [2].

Definição 2.2 (Igualdade de matrizes) *Duas matrizes $\mathbf{A}_{m\times n}$ e $\mathbf{B}_{p\times q}$ são iguais se $m = p$ e $n = q$ e se todos os seus elementos correspondentes são iguais,ou seja $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.*

Exemplo 2.12

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ 0 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 4$$

$$x + y = 1$$

$$4 + y = 1$$

$$y = 1 - 4$$

$$y = -3$$

Portanto, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ *se, e só se,* $x = 4$ *e* $y = -3$.

Definição 2.3 (Multiplicação de um número real por uma matriz) *Dada uma matriz* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$*, de ordem* $m \times n$ *e um número real* k*, temos que* $k \cdot \mathbf{A}$ *é uma matriz também de ordem* $m \times n$*, tal que todo elemento da matriz* $\mathbf{A}$ *é multiplicado por* k*.*

Exemplo 2.13

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad e \quad k = 3$$

$$k \cdot \mathbf{A} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Definição 2.4 (Soma de matrizes) *Dadas duas matrizes de mesma ordem* $m \times n$*, a soma de* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$*, denotada por* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *é a matriz* $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$ *de mesma ordem de* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *tal que* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para todo* $1 \le i \le m$ *e para todo* $1 \le j \le n$*.*

Exemplo 2.14

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 1 + 2 = 3 \qquad c_{21} = a_{21} + b_{21} = 3 - 1 = 2$$

$$c_{12} = a_{12} + b_{12} = 3 + 1 = 4 \qquad c_{22} = a_{22} + b_{22} = 1 + 1 = 2$$

$$c_{13} = a_{13} + b_{13} = 2 + 0 = 2 \qquad c_{23} = a_{23} + b_{23} = 4 + 1 = 5$$

Definição 2.5 (Subtração de matrizes) *Dadas duas matrizes de mesma ordem* $m\times n$*, a diferença de* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$*, denotada por* $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ *é a matriz* $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$ *de mesma ordem de* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *tal que* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ *para todo* $1 \le i \le m$ *e para todo* $1 \le j \le n$*.*

Exemplo 2.15

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = a_{11} - b_{11} = 1 - (+2) = -1 \qquad c_{21} = a_{21} - b_{21} = 3 - (-1) = 4$$

$$c_{12} = a_{12} - b_{12} = 3 - (+1) = 4 \qquad c_{22} = a_{22} - b_{22} = 1 - (+1) = 0$$

Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, define-se a matriz oposta de $\mathbf{A}$, como a matriz $-\mathbf{A}$. Observe que a subtração de matrizes nada mais é do que somar a primeira com a oposta da segunda.

Quando trabalhamos com matrizes, pode surgir a necessidade de efetuarmos operações com seus elementos de tal maneira que facilite a interpretação de uma situação. Observe a situação a seguir:

Exemplo 2.16 *Em uma empresa, dois funcionários embalam dois tipos de produtos, vamos designar x e y os funcionários e A e B os produtos embalados por cada funcionário e a parcela do total de cada produto embalado em um determinado mês estão nas tabelas a seguir.*

Tabela 2.2.1: Proporção de produtos embalados

Funcionários\Produto	A	B
x	0,30	0,75
y	0,70	0,25

Tabela 2.2.2: Quantidade de produtos embalados

A	700
B	1200

Podemos calcular o total de produtos embalados pelos funcionários x e y nesse mês em questão, da seguinte maneira.

Funcionário $x : 0,3 \cdot 700 + 0,75 \cdot 1200 = 1110$
Funcionário $y : 0,7 \cdot 700 + 0,25 \cdot 1200 = 790$

Dessa maneira podemos ver os rendimento de cada funcionário conforme a tabela a seguir.

Tabela 2.2.3

Funcionário	**Quantidade**
x	1110
y	790

O que acabamos de fazer foram os cálculos que corresponde à multiplicação de matrizes.

Definição 2.6 (Multiplicação de matrizes) *Sejam* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *e* $\mathbf{B}_{n\times p}$ *duas matrizes. O produto* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$*, é definido como a matriz* $\mathbf{C}_{m\times p}$ *tal que*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ *e para todo* $1 \leq j \leq p$.

Em outras palavras cada elemento c_{ij} é obtido multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i de $\mathbf{A}$ e da coluna j de $\mathbf{B}$, e adicionando as parcelas correspondentes aos produtos das multiplicações. No exemplo anterior, isso corresponde à multiplicação entre as matrizes abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0,30 & 0,75 \\ 0,70 & 0,25 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 700 \\ 1200 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0,30\cdot 700 + 0,75\cdot 1200 \\ 0,70\cdot 700 + 0,25\cdot 1200 \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1110 \\ 790 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

Note que, pela definição apresentada, o produto de duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ existe se, e somente se, o número de colunas de $\mathbf{A}$ for igual ao número de linhas da matriz $\mathbf{B}$. A matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, resultante do produto $\mathbf{AB}$, tem o número de linhas de $\mathbf{A}$ e o número de colunas de $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{B}_{n\times p} = \mathbf{C}_{m\times p}$$

A seguir mostraremos algumas propriedades da multiplicação de matrizes:

I- Associativa

$$(\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{B}_{n\times p})\cdot\mathbf{C}_{p\times r} = \mathbf{A}_{m\times n}\cdot(\mathbf{B}_{n\times p}\cdot\mathbf{C}_{p\times r})$$

II- Distributiva

$$(\mathbf{A}_{m\times n} + \mathbf{B}_{m\times n})\cdot\mathbf{C}_{n\times p} = \mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{C}_{n\times p} + \mathbf{B}_{m\times n}\cdot\mathbf{C}_{n\times p}$$

III- Elemento neutro

$$\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m\times n} \quad ou \quad \mathbf{I}_m\cdot\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}$$

Definição 2.7 (Matriz inversa) *[2] Dada uma matriz quadrada de ordem* n*, chamamos de inversa de* $\mathbf{A}$ *a matriz quadrada* $\mathbf{B}$ *de ordem* n *tal que*

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Note que nem toda matriz quadrada possui uma inversa.

Exemplo 2.17 *Vamos tentar determinar a inversa da matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathbf{A}$ *possui inversa, existe uma matriz* $\mathbf{B}$ *tal que* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0a + 0c & 0b + 0d \\ a + 2c & b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a + 2c & b + 2d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo não existe a matriz $\mathbf{B}$*, tal que* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$*. Portanto a matriz* $\mathbf{A}$ *não possui inversa.*

Se uma matriz $\mathbf{A}$ possuir uma inversa, então essa inversa é única e escreveremos $\mathbf{A^{-1}}$. Suponhamos que $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são duas inversas de $\mathbf{A}$. Então

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad e \quad \mathbf{AC} = \mathbf{I}$$

Assim pela associatividade, temos

$$\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}$$

o que mostra que a inversa é única.

Vejamos algumas propriedades das matrizes inversas.
Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes quadradas de ordem n.

I- Se $\mathbf{A}$ é invertível, então $\mathbf{A}^{-1}$ é também invertível e $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

De fato, uma matriz $\mathbf{B}$ é a inversa de $\mathbf{A}^{-1}$ se

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I_n}.$$

Como $\mathbf{A}^{-1}$ é a inversa da matriz $\mathbf{A}$, então

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I_n}.$$

Sabemos que a inversa é única, então $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ é a inversa de $\mathbf{A}^{-1}$, ou seja, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

II- Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são invertíveis, então $\mathbf{AB}$ é invertível e $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

De fato, basta mostrar que os produtos $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})$ e $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})$ são iguais à matriz identidade,

$$\begin{aligned}(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AI_nA}^{-1}\\ &= \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I_n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{B^{-1}A^{-1}})(\mathbf{AB}) &= \mathbf{B^{-1}}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B^{-1}I_nB}\\ &= \mathbf{B^{-1}B} = \mathbf{I_n}.\end{aligned}$$

As matrizes inversas tem uma grande aplicação na solução de sistemas lineares. Dado um sistema linear com n equações e n incógnitas,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

cuja representação matricial desse sistema linear é

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, se soubermos que a matriz $\mathbf{A}$ é invertível e calculando sua inversa, então o sistema linear se resolve efetuando apenas a multiplicação da matriz $\mathbf{A}^{-1}$ com $\mathbf{B}$, pois

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Exemplo 2.18 *Vamos determinar a inversa da matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

então $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}_2$, *ou seja,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando igualdade de matrizes temos os dois sistemas para resolver

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ 2a+c=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad a=-1/3 \;\; e \;\; c=2/3$$

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad b=2/3 \;\; e \;\; d=-1/3$$

Portanto,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

2.3 Determinante de uma matriz

Para toda matriz quadrada de números reais é possível associar um número real denominado determinante. O determinante está associado ao estudo de sistemas lineares, ele também nos ajuda a descobrir se uma matriz possui ou não uma matriz inversa, falaremos sobre isso mais adiante.

Indicaremos o determinante de uma matriz $\mathbf{A}$ por $\det \mathbf{A}$.

Definição 2.8 (Determinante de uma matriz de ordem 1) *Em uma matriz de ordem 1, por definição, o determinante é o próprio elemento da matriz. Se* $\mathbf{A} = [a_{11}]$, *então* $\det \mathbf{A} = a_{11}$.

Exemplo 2.19 *Dada a matriz* $\mathbf{A} = [8]$, *então* $\det \mathbf{A} = 8$.

Definição 2.9 (Determinante de uma matriz de ordem 2) *Em uma matriz de ordem 2, o determinante é dado pela diferença do produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.*

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo 2.20 *Dada a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que,

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3.$$

Definição 2.10 (Determinante de uma matriz de ordem 3) *Em uma matriz de ordem 3, o determinante é obtido por meio dos seguintes cálculos.*

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Essa regra para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é conhecida como *Regra de Sarrus*.

Exemplo 2.21 *Dada a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que,

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2$$

Ou seja,

$$\det \mathbf{A} = 1 + 8 + 27 - 6 - 6 - 6 = 36 - 18 = 18$$

Portanto, $\det \mathbf{A} = 18$.

Definição 2.11 (Determinante de uma matriz de ordem maior do que 3) *O determinante de uma matriz quadrada* $\mathbf{A}$ *de ordem* n *é dado por*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{A}_{-i,-j},$$

onde $\mathbf{A}_{-i,-j}$ *é a submatriz que é construída com a matriz* $\mathbf{A}$ *excluindo-se a linha* i *e a coluna* j.

Essa expressão para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem n é chamada de *desenvolvimento de* ***Laplace*** [2].

Exemplo 2.22 *Dada a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular $\det \mathbf{A}$. *Desenvolvendo o determinante pela primeira linha obtemos:*

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det(\mathbf{A}_{-1,-1}) + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det(\mathbf{A}_{-1,-2}) +$$

$$a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det(\mathbf{A}_{-1,-3}) + a_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det(\mathbf{A}_{-1,-4}).$$

Então,

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 28 - 0 \cdot 20 = 4 + 8 + 84 - 0 = 96.$$

Portanto, $\det \mathbf{A} = 96$.

É fácil ver também, através do cálculo do determinante pelo desenvolvimento de Laplace, que qualquer que seja a ordem, o determinante da matriz identidade é sempre igual a um, $\det \mathbf{I}_n = 1$, e que o determinante de qualquer matriz triangular (superior ou inferior) é o produto dos elementos de sua diagonal principal.

E finalmente, é importante destacar, no estudo de determinantes, os dois teoremas a seguir [1]:

Teorema 2.1 (Teorema de Jacobi) *Se adicionarmos à uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada* $\mathbf{A}$, *outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um numero real, obtemos uma matriz* $\mathbf{B}$ *tal que* $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.

Exemplo 2.23 *Dada a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Temos que,

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 28 + 0 + 6 + 0 + 28 = 14$$

Se por exemplo, adicionarmos à 2^a linha da matriz $\mathbf{A}$ a 3^a linha multiplicada por 2, obtemos a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Agora calcularemos o determinante de $\mathbf{B}$, temos:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 56 + 0 + 6 + 0 + 0 = 14$$

O que mostra que o teorema de Jacobi foi válido, pois $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.

Teorema 2.2 (Teorema de Binet) *Dadas as matrizes quadradas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de mesma ordem, temos que:*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Esse teorema é importantíssimo para mostrar se uma matriz possui ou não uma matriz inversa.

Exemplo 2.24 *Dadas as matrizes*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \;\; e \;\; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix},$$

temos:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5+12 & 6+10 \\ 10+6 & 12+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 16 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} 17 & 16 \\ 16 & 17 \end{vmatrix} = 289 - 256 = 33$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 36 = -11$$

$$\det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (-3) \cdot (-11) = 33$$

Portanto, de acordo com o teorema de Binet, $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = 33$.

Como corolário, podemos demonstrar que uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é invertível se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$:

De fato, da definição de matriz inversa temos que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$, logo $\det(\mathbf{AA^{-1}}) = \det \mathbf{I}$, e utilizando o **Teorema de Binet**, podemos escrever

$$\det(\mathbf{AA^{-1}}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A^{-1}} = \det \mathbf{I}.$$

O determinante da matriz identidade é, como sabemos, igual a um, assim obtemos

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$

Então, se $\det \mathbf{A} = 0$, a matriz $\mathbf{A}$ não possui inversa, por não existir divisão por zero. Podemos portanto concluir que uma matriz $\mathbf{A}$ é invertível se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$ [2].

2.4 Autovalores e Autovetores

Antes de falar sobre autovalores e autovetores vamos falar um pouco sobre Bases e Dimensões. Isso nos ajudará a entender melhor o conceito de autovalores e autovetores.

Seja $\alpha = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo V. Dizemos que α é uma base de V se as seguintes condições são verificadas [2]:

$i)$ os vetores de α são linearmente independentes;

$ii)$ $V = span\{\alpha\}$.

Teorema 2.3 *Sendo $\alpha = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto ordenado de vetores de um espaço vetorial não nulo V. As seguintes afirmações são equivalentes:*

$i)$ α é uma base de V;

$ii)$ Cada vetor v em V pode ser escrito de modo único na forma

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n.$$

Demonstração: Suponhamos que α é uma base de V. Tomemos $v \in V$. Como α gera V existem números reais $a_1, a_2, ..., a_n$ tais que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n. \tag{1}$$

Para mostrar que a combinação linear em (1) é única, suponhamos que existem $b_1, b_2, ..., b_n$ em $\mathbb{R}$ tais que

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n. \tag{2}$$

De (1) e (2) segue-se que

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0. \tag{3}$$

Como α é independente, a equação (3) é satisfeita somente se $a_j - b_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$, ou seja, se $b_j = a_j$ para todo $1 \leq j \leq n$. Como $v \in V$ foi tomado de modo arbitrário, conforme (ii) . Suponhamos agora que α tem a propriedade de que cada vetor v em V pode ser escrito de modo único como combinação linear dos elementos de α. Claramente α gera V e para mostrarmos que α é independente, consideremos a equação

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0.$$

Como tem-se que $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$ e esta escrita é única, segue-se que $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

□

Quando a transformação linear for de um espaço vetorial V nele mesmo, ela será chamada de **operador** em V. Um operador linear em V, onde V tem dimensão finita, pode ser representado por uma matriz. Sendo as matrizes diagonais as mais simples do ponto de vista das operações matriciais. Dizemos que um operador definido sobre um espaço vetorial V de dimensão finita é diagonalizável, quando for possível representá-lo por uma matriz diagonal em alguma base de V [2].

Seja $T : V \to V$ um operador linear. Um número real λ será dito um **autovalor** de T se existir um vetor não nulo v em V tal que $T(v) = \lambda v$. O vetor v é chamado de **autovetor** de T associado a λ.

Observemos que se v é um autovetor de um operador T associado a um autovalor λ, então todo múltiplo escalar de v é também um autovetor de T associado a λ. Mais ainda, se $A(\lambda) = \{v \in V;\ T(v) = \lambda v\}$, então $A(\lambda)$ é um subespaço vetorial de V, chamado **auto espaço** de T associado a λ.

Proposição 2.1 *Seja $T : V \to V$ um operador linear e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ autovalores distintos de T. Se $v_1, v_2, \cdots, v_r$ são autovetores associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$, respectivamente, então $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ é linearmente independente.*

Demonstração: A prova será feita por indução em r. O resultado é válido para $r = 1$, pois se $T : V \to V$ é um operador linear com autovalor λ_1 se v_1 é um autovetor de T associado a λ_1 então $\{v_1\}$ é linearmente independente, pois $v_1 \neq 0$.

Suponhamos o resultado válido para $r - 1$ e vamos prová-lo para r, $r \geq 2$. Para isto, consideremos a equação:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_r = 0 \tag{4}$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_r$ são números reais. Aplicando T em (4), obtemos

$$a_1(\lambda_1 v_1) + a_2(\lambda_2 v_2) + \cdots + a_r(\lambda_r v_r) = 0 \tag{5}$$

já que $T(v_j) = \lambda_j v_j$, para todo $1 \leq j \leq r$.

Por outro lado, T possui pelo menos um autovalor não nulo. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\lambda_r \neq 0$. Multiplicando (4) por λ_r, obtemos

$$a_1(\lambda_r v_1) + a_2(\lambda_r v_2) + \cdots + a_r(\lambda_r v_r) = 0 \tag{6}$$

de (5) e (6)

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_r)v_2 + \cdots + a_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} = 0 \tag{7}$$

Pela hipótese de indução, $\{v_1, v_2, \cdots, v_{r-1}\}$ é linearmente independente. Portanto, de (7), segue-se que

$$a_j(\lambda_j - \lambda_r) = 0, \quad \forall \quad 1 \leq j \leq r. \tag{8}$$

Como os autovalores de $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ são todos distintos, de (8) obtemos $a_j = 0$ para todo $1 \leq j \leq r-1$. Substituindo estes valores em (4), concluímos que $a_r = 0$ também, já que $v_r \neq 0$.

Portanto, $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ é independente.

$\square$

O número de elementos de uma base de um espaço vetorial não nulo V de dimensão finita é chamado de **dimensão** de V e denotado por $dimV$.

A **Proposição 2.1** nos permite concluir que, se a $dimV = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada por autovetores de T.

Se $\mathbf{A}$ for uma matriz $n \times n$, então um vetor não nulo v em $\mathbb{R}^n$ é denominado autovetor de $\mathbf{A}$ se $\mathbf{A}v$ for um múltiplo escalar de v, isto é,

$$\mathbf{A}v = \lambda v$$

com algum escalar λ.

Nosso próximo objetivo é elaborar um procedimento geral para encontrar autovalores e autovetores de uma matriz $\mathbf{A}$ de tamanho $n \times n$. Começamos com o procedimento para encontrar os autovalores da matriz $\mathbf{A}$. Inicialmente, observe que a equação

$$\mathbf{A}v = \lambda v$$

pode ser reescrita como

$$\mathbf{A}v = \lambda \mathbf{I}v,$$

ou equivalentemente como,

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})v = 0.$$

Para que λ seja um autovalor de $\mathbf{A}$, essa equação deve possuir alguma solução v não nula. No entanto isso ocorre se, e só se, a matriz de coeficientes $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ tem determinante nulo. Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4 *Se* $\mathbf{A}$ *for uma matriz* $n \times n$*, então* λ *é um autovalor de* $\mathbf{A}$ *se, e só se,* λ *satisfaz a equação*

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0.$$

Essa equação é chamada *equação característica* da matriz $\mathbf{A}$.[3]

A seguir vamos encontrar os autovalores e os autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Segue que os autovalores de $\mathbf{A}$ são soluções da equação

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

que pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Da qual obtemos

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0. \tag{9}$$

Quando o determinante $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ do lado esquerdo de (9) é expandido, resulta um polinômio $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ de grau n denominando **polinômio característico de A**.

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

que é um polinômio de grau 2.

Em geral o polinômio característico de uma matriz $\mathbf{A}$, de ordem n, é da forma

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_0$$

onde $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$, [2].

Como um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes distintas segue que a equação

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_0 = 0$$

tem, no máximo, n soluções distintas e, consequentemente, que uma matriz $n \times n$ tem, no máximo n autovalores distintos. Como algumas dessas soluções podem ser números complexos, é possível que uma matriz tenha autovalores complexos, mesmo se a própria matriz tiver somente entradas reais. Vamos encontrar agora as bases dos autoespaços da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vimos que a equação característica de $\mathbf{A}$ é

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

da qual obtemos os autovalores $\lambda_0 = 3$ e $\lambda_1 = -1$. Assim, temos dois autoespaços de $\mathbf{A}$, cada um associado a um autovalor. Temos

$$v_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que é um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a $\lambda_0 = 3$ se, e somente se, v_0 é uma solução não trivial de $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})v_0 = 0$, ou seja

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $\lambda_0 = 3$, essa equação é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0x + 0y \\ -8x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-8x + 4y = 0$$

$$-8x = -4y$$

$$x = \frac{y}{2}$$

Cuja solução geral é $\{[\frac{t}{2}, t]^T | t \in \mathbb{R}\}$. Fazendo $t = 1$, temos

$$v_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 3$.

Agora para $\lambda_1 = -1$, temos que encontrar um vetor

$$v_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

tal que $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})v_1 = 0$. onde v_1 é também solução não trivial. Substituindo $\lambda_1 = -1$ na equação temos

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4x + 0y \\ -8x + 0y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que implica, $-4x = 0$ e logo $x = 0$. Nesse caso, a solução geral é $\{[0, t]^T | t \in \mathbb{R}\}$. Fazendo $t = 1$, temos

$$v_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que é uma base do autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$.

A definição e a proposição que seguem, servirão de suporte para a demonstração do **Teorema de Cayley-Hamilton** [2].

Definição 2.12 *Dada uma matriz* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *quadrada de ordem* n*, seja* $det\mathbf{A}_{-i-j}$ *o determinante da matriz quadrada de ordem* $n-1$ *que surge ao eliminarmos a i-ésima linha e a* j*-ésima coluna da matriz* $\mathbf{A}$*. A* ***matriz de cofatores*** *de* $\mathbf{A}$ *é de tamanho* $n \times n$ *e definida por* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *com* $b_{ij} = (-1)^{i+j} det\mathbf{A}_{-i-j}$*. A* ***matriz adjunta*** *de* $\mathbf{A}$ *é a matriz transposta de* $\mathbf{B}$*. Cuja notação,*

$$adj(\mathbf{A}) = \mathbf{B}^T.$$

Proposição 2.2 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz quadrada de ordem* n*. Então*

$$adj(\mathbf{A})\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}_n.$$

Em particular, se $\det \mathbf{A} \neq 0$*, segue*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj(\mathbf{A})}{\det(\mathbf{A})}.$$

Teorema 2.5 (Teorema de Cayley-Hamilton) *Seja* $\mathbf{A}$ *uma matriz quadrada de ordem* n *e seja* $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ *o polinômio característico de* $\mathbf{A}$*. Então,* $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = 0$*, onde 0 é a matriz quadrada nula de ordem* n*.*

Demonstração: Como $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ é um polinômio mônico de grau n em λ, podemos escrever

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + b_0, \tag{10}$$

onde $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$ são números reais. Seja $\mathbf{C}(\lambda)$ a matriz adjunta da matriz $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$. Como $\mathbf{C}(\lambda)$ é, por definição, a transposta da matriz cujas entradas são cofatores de $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, logo são polinômios em λ de grau menor ou igual a $n-1$. Assim, podemos escrever

$$\mathbf{C}(\lambda) = \mathbf{C}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \mathbf{C}_1\lambda + \mathbf{C}_0, \tag{11}$$

onde $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \cdots, \mathbf{C}_{n-1}$ são matrizes quadradas de ordem n, que não dependem de λ. Pela **proposição 2.2**, temos

$$(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})\mathbf{C}(\lambda) = P_{\mathbf{A}}(\lambda)\mathbf{I}_n,$$

já que, por definição, $P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$. De (10) e (11) temos

$$(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{C}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \mathbf{C}_1\lambda + \mathbf{C}_0) = (\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0)\mathbf{I}_n.$$

Da igualdade anterior, obtemos

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{n-1} = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{C}_{n-2} - \mathbf{A}\mathbf{C}_{n-1} = b_{n-1}\mathbf{I}_n \\ \mathbf{C}_{n-3} - \mathbf{A}\mathbf{C}_{n-2} = b_{n-2}\mathbf{I}_n \\ \qquad\vdots \\ \mathbf{C}_0 - \mathbf{A}\mathbf{C}_1 = b_1\mathbf{I}_n \\ -\mathbf{A}\mathbf{C}_0 = b_0\mathbf{I}_n \end{cases}$$

Multiplicando cada uma das equações acima por $\mathbf{A}^n, \mathbf{A}^{n-1}, \cdots, \mathbf{A}, \mathbf{I}_n$, respectivamente, temos

$$\begin{cases} \mathbf{A}^n\mathbf{C}_{n-1} = \mathbf{A}^n \\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{C}_{n-2} - \mathbf{A}^n\mathbf{C}_{n-1} = b_{n-1}\mathbf{A}_{n-1} \\ \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{C}_{n-3} - \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{C}_{n-2} = b_{n-2}\mathbf{A}_{n-2} \\ \qquad\vdots \\ \mathbf{A}\mathbf{C}_0 - \mathbf{A}^2\mathbf{C}_1 = b_1\mathbf{A} \\ -\mathbf{A}\mathbf{C}_0 = b_0\mathbf{I}_n. \end{cases}$$

Somando membro a membro as equações acima, resulta

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + b_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + b_1\mathbf{A} + b_0\mathbf{I}_n = 0.$$

□

Exemplo 2.25 *Vamos considerar a matriz do exemplo anterior*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

cujo o polinômio característico é

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Pelo ***Teorema de Cayley-Hamilton****,* $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = 0$.
Vamos agora verificar esta igualdade diretamente. De fato,

$$P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 16 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 16 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma consequência imediata do **Teorema de Cayley-Hamilton** é que a potência $\mathbf{A}^n$, de uma matriz $\mathbf{A}$ quadrada de ordem n, pode ser escrita como combinação linear das potências de $\mathbf{A}$ com os expoentes menores do que n, pois se

$$P_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + b_0,$$

então $P_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = 0$, o que é equivalente a

$$\mathbf{A}^n = -b_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - \cdots - b_1\mathbf{A} - b_0\mathbf{I}_n.$$

2.5 Diagonalização

Definição 2.13 *Dizemos que uma matriz quadrada* $\mathbf{A}$ *é diagonalizável, se existe uma matriz* $\mathbf{P}$ *invertível tal que* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$*, com* $\mathbf{D}$ *diagonal.*

Para descobrirmos as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{P}$, vamos precisar utilizar os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$.

Exemplo 2.26 *Vamos diagonalizar a matriz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos Primeiro descobrir os autovalores da matriz $\mathbf{A}$.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1) - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - \lambda + 1 - 1 = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$
$$\lambda_0 = 0 \quad ou \quad \lambda_1 = 2$$

Para $\lambda_0 = 0$, *encontramos o autovetor*

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x - y = 0$$
$$x = -y$$

Cuja solução geral é $\{[t, -t]^T | t \in \mathbb{R}\}$. *Fazendo* $t = 1$, *temos*

$$v_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = 2$, *encontramos o autovetor*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x - y = 0$$
$$x = y$$

Cuja solução geral é $\{[t, t]^T | t \in \mathbb{R}\}$. *Fazendo* $t = 1$, *temos*

$$v_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz **D**, *sempre será formada pelos autovalores da matriz* **A**. *E a matriz* **P**, *sempre será a matriz dos autovetores da matriz* **A** *e estão dispostos em colunas esses autovetores. Devemos ter atenção que a ordem que os autovetores aparecem em* **P** *respeita a ordem que os autovalores aparecem em* **D**, *[2].*

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se tivermos n autovetores linearmente independentes ou se todos os autovalores forem distintos, a matriz é diagonalizável. Note que a recíproca não é valida. Nem toda matriz diagonalizável tem autovalores distintos.

Podemos escrever nossa matriz $\mathbf{A}$ diagonalizável da seguinte maneira $\mathbf{A} = \mathbf{PDP^{-1}}$ que chamamos de decomposição espectral. Tal maneira de escrita da matriz $\mathbf{A}$ facilita o cálculo de potências dessa matriz. Observe:

$$\mathbf{A^2 = AA = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIDP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}}$$

$$\mathbf{A^3 = A^2A = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^2IDP^{-1} = PD^2DP^{-1} = PD^3P^{-1}}$$

$$\mathbf{A^4 = A^3A = PD^3P^{-1}PDP^{-1} = PD^3IDP^{-1} = PD^3DP^{-1} = PD^4P^{-1}}$$

Por indução:

$$\mathbf{A^n = PD^nP^{-1}}$$

A potência da matriz $\mathbf{D}$ é fácil de se calcular, pois $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal e sua potência é a matriz diagonal onde cada elemento é o elemento correspondente da matriz $\mathbf{D}$ elevado ao expoente em questão.

3 Matrizes Circulantes

Segundo Davis [4], os fatos básicos sobre matrizes circulantes e sua relação com a Transformada Discreta de Fourier foram redescobertos repetidas vezes. As matrizes circulantes têm um papel importante nas aplicações do ponto vista algébrico, analista numérico, combinatorialista e físico. Agora as matrizes circulantes são vistas como instâncias especiais de matrizes estruturadas ou padronizadas mais gerais.

Matrizes circulantes é o principal novo ingrediente de alguns algoritmos de melhorias de imagens, pois podem modelar regularidades naturais comumente encontradas em conjuntos de dados de visão computacional. Essas matrizes são matrizes quadradas com um padrão determinístico simples, que será explorado ao longo do restante desse trabalho.

Apesar de sua aparente simplicidade, as matrizes circulantes conectam assuntos muito diferentes na paisagem da matemática. Seus usos na engenharia incluem a caracterização dos limites de sistemas lineares invariantes no tempo no processamento de sinais, recuperação de sinais esparsos com matrizes de detecção de circulantes em sensoriamento comprimido e métodos de desfocagem no processamento de imagens. Elas são um tópico importante em criptografia, sendo usados para construir códigos de correção de erros. Na física, as matrizes circulantes estão relacionadas com as representações de grupos em mecânica quântica discreta e podem ser usadas para obter soluções de equações diferenciais parciais. As matrizes circulantes também produziram resultados importantes no estudo de raízes de equações polinomiais [5].

No entanto, pode-se argumentar que as matrizes circulantes são objetos matemáticos interessantes por si mesmos.

Definição 3.1 *Uma matriz circulante de ordem n é uma matriz quadrada da forma*

$$\mathbf{A} = circ(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

Observe que o padrão determinístico é totalmente especificado pelo vetor gerador que aparece na primeira linha ou na primeira coluna da matriz circulante. Cada uma das linhas restantes é apenas a linha anterior deslocada para a direita por um elemento, e o elemento mais à direita aparece como o primeiro elemento da próxima linha. Referimo-nos a esta operação como uma mudança cíclica [4].

A matriz de Toeplitz, é uma generalização da matriz circulante. Contudo, as matrizes de Toeplitz não mantêm muitas das boas propriedades das matrizes circulantes, como a relação direta com a Transformada Discreta de Fourier (DFT). A matriz de Toeplitz é uma matriz em que cada diagonal descendente da esquerda para a direita tem valor constante, como mostramos abaixo:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

Note que toda matriz circulante é uma matriz de Toeplitz, mas nem toda matriz de Toeplitz é uma matriz circulante.

Exemplo 3.1

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1 Operações com Matrizes Circulantes

1) *A soma de matrizes circulantes resulta em uma matriz circulante.*

Observe o caso de matrizes de segunda ordem:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

2) *A subtração de matrizes circulantes também resulta em uma matriz circulante.*

Observe, mais uma vez, o caso de matrizes de segunda ordem:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-c \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sejam as matrizes circulantes $\mathbf{A} = circ(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ e $\mathbf{B} = circ(b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1})$, a soma ou subtração delas resulta em um matriz $\mathbf{C}$, tal que $\mathbf{C} = circ(a_0 \pm b_0, a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, ..., a_{n-1} \pm b_{n-1})$, pois a matriz resultante da soma de duas matrizes circulantes de mesma ordem terá na primeira linha, em cada elemento, o resultado da soma/subtração dos elementos correspondentes das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, e todas as outras linhas serão cópias transladadas, da maneira já prescrita, dessa primeira linha.

3) *A multiplicação de uma constante por uma matriz circulante também resulta em uma matriz circulante.*

No caso de matrizes de segunda ordem:

$$k{\cdot}\mathbf{A} = k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kb & ka \end{bmatrix}$$

De maneira geral, para uma matriz circulante qualquer $\mathbf{A} = circ(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$, de ordem n, ao multiplicarmos ela por uma constante k, temos uma nova matriz com todos os elementos de $\mathbf{A}$ multiplicados por k, e portanto, essa é também uma matriz circulante.

$$k \cdot \mathbf{A} = circ(ka_0, ka_1, ka_2, ..., ka_{n-1})$$

Exemplo 3.4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad k = 3$$

$$k{\cdot}\mathbf{A} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

4) *Sejam* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *duas matrizes circulantes de mesma ordem, então o produto delas é uma matriz circulante e é comutativo, ou seja,* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Faremos, nesse trabalho, apenas a demonstração para matrizes de terceira ordem.

Demonstração:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & e & f \\ f & d & e \\ e & f & d \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ad+bf+ce & ae+bd+cf & af+be+cd \\ cd+af+be & ce+ad+bf & cf+ae+bd \\ bd+cf+ae & be+cd+af & bf+ce+ad \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} d & e & f \\ f & d & e \\ e & f & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

$\square$

Exemplo 3.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot4+2\cdot6+3\cdot5 & 1\cdot5+2\cdot4+3\cdot6 & 1\cdot6+2\cdot5+3\cdot4 \\ 3\cdot4+1\cdot6+2\cdot5 & 3\cdot5+1\cdot4+2\cdot6 & 3\cdot6+1\cdot5+2\cdot4 \\ 2\cdot4+3\cdot6+1\cdot5 & 2\cdot5+3\cdot4+1\cdot6 & 2\cdot6+3\cdot5+1\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 31 & 28 \\ 28 & 31 & 31 \\ 31 & 28 & 31 \end{bmatrix}$$

Algumas observações interessantes podem ser feitas sobre os determinantes das matrizes circulantes de ordem 2 e 3.

No que se segue, vamos considerar $a, b, c \in \mathbb{R}$. O determinante de uma matriz real circulante de ordem 2 é igual a zero se, e somente se, o vetor gerador for composto de elementos com os mesmos valores em módulo:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$$

O determinante será zero, $a^2 - b^2 = 0$, se, e somente se $a^2 = b^2$, ou seja, se $a = \pm b$.

Exemplo 3.6

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$

Mais interessante é o caso do determinante de uma matriz circulante de ordem 3:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

A expressão que nos dá o valor do determinante de uma matriz circulante de ordem 3 pode ser reescrita da seguinte maneira após ser fatorada:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

Dessa maneira, o determinante de uma matriz circulante de ordem 3 é igual a zero se $(a+b+c) = 0$ ou se $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) = 0$. A segunda parte podemos reescrever da seguinte maneira:

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)/2$$

e, reorganizando

$$(a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + c^2 - 2bc + a^2 + c^2 - 2ac)/2 = [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]/2$$

como a expressão é uma soma de 3 quadrados e estamos considerando apenas números reais, ela só pode ser zero se cada termo entre parênteses for zero, portanto, se, e somente se $a = b = c$.

Concluindo, o determinante de uma matriz circulante real qualquer de ordem 3 é zero, se e somente se, os elementos do seu vetor gerador forem todos iguais, ou se a soma deles for zero.

Exemplo 3.7

$$\mathbf{A} = circ(4, 6, -10)$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -10 \\ -10 & 4 & 6 \\ 6 & -10 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

pois $a + b + c = 4 + 6 - 10 = 0.$

Dessa maneira fica mais fácil determinar se uma matriz circulante de ordem 2 e de ordem 3 possui ou não uma matriz inversa. Para fazer isso basta apenas olhar para o vetor gerador dessa matriz e conferir as condições descritas acima. Relembrando que uma matriz quadrada qualquer possui inversa se, e somente se, o determinante dela for diferente de 0.

3.2 Números Complexos

Antes de falar dos autovalores e autovetores de uma matriz circulante, vamos falar brevemente de números complexos, pois os números complexos serão uma ferramenta muito útil para os cálculos dos autovetores e autovalores de uma matriz circulante, principalmente de matrizes circulantes onde o vetor gerador tenha pelo menos 3 elementos. Isso ficará claro mais adiante.

Definição 3.2 *Um número complexo pode ser representado por uma expressão da forma* $z = a + bi$ *onde* a *e* b *são números reais e* i *é um símbolo com a propriedade de que* $i^2 = -1$*, e seu módulo é definido como* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ *[6].*

No número complexo $z = a + bi$, a é a chamada **parte real** de z e b é a **parte imaginária**.

O **módulo** $|z|$, ou valor absoluto, acima definido, de um número complexo, pode ser interpretado geometricamente como a distância do ponto $z = (a, b)$, no plano dos números complexos (o chamado **plano de Argand-Gauss**), até a origem, e pode ser, portanto, calculado com o teorema de Pitágoras.

Exemplo 3.8 *Vamos calcular o módulo do número complexo*

$$z = 2 + 3i$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Outra maneira bastante útil de representarmos os números complexos é através da chamada **forma polar**. Sabemos que qualquer número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado como um ponto (a, b) no plano de Argand-Gauss, e que esse ponto também pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r \geq 0$ e $-\pi \leq \theta < +\pi$.

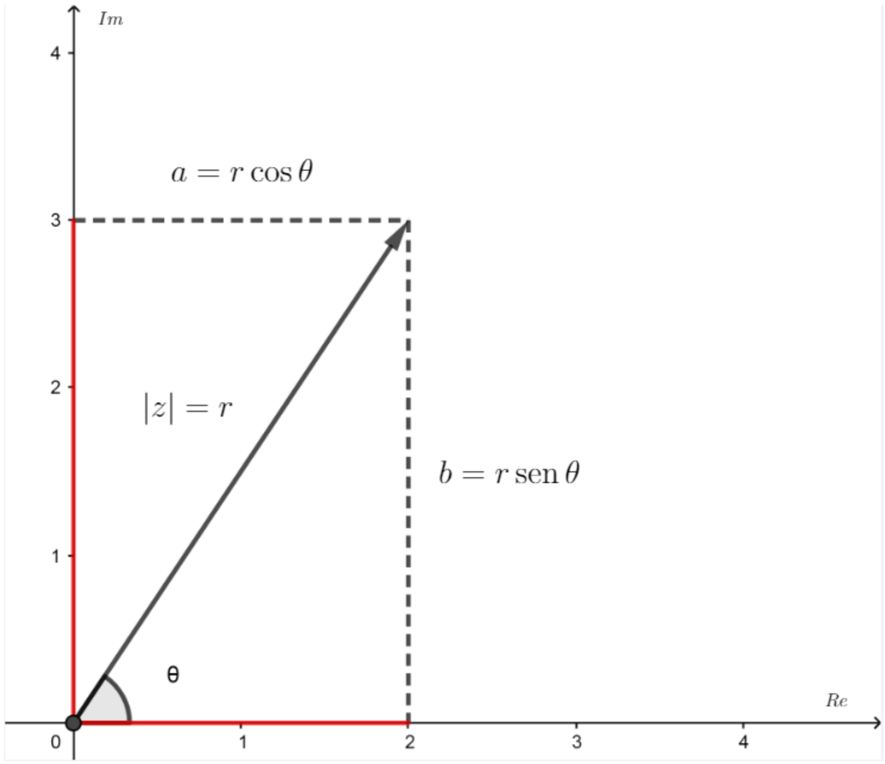

Figura 1: Número complexo na forma polar

De fato,

$$a = rcos\ \theta \quad e \quad b = rsen\ \theta$$

O ângulo θ é chamado argumento de z. Precisamos também dar um significado para a expressão e^z quando $z = x + yi$ for um número complexo. Usando a série de **Taylor** [7], para e^z, definimos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... \tag{12}$$

Se fizermos $z = iy$, onde y é um numero real, na equação (13), e usarmos o fato

$$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i,\ ...$$

obtemos

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + ... = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ...\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + ...\right)$$

Reconhecendo os termos entre parênteses como as fórmulas das séries de Taylor das funções *cos y* e *sen y*, respectivamente, $cos\ y = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ...\right)$ e $sen\ y = \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + ...\right)$, o resultado é a famosa **fórmula de Euler**:

$$e^{iy} = cos\ y + isen\ y.$$

Um resultado curioso ocorre se fizermos $y = \pi$ na fórmula de Euler: $e^{\pi i} = cos\ \pi + isen\ \pi$, ou seja, $e^{\pi i} = -1$, que é considerado uma das mais belas equações da matemática, por reunir as mais importantes constantes, de maneira bem simples, em uma única expressão.

3.3 Autovalores e Autovetores de Matrizes Circulantes

Podemos calcular os autovalores e autovetores de matrizes circulantes de duas maneiras diferentes. Para ilustrar, seja uma matriz circulante qualquer, de ordem 2, $\mathbf{A} = circ(2, 1)$, e calculemos, primeiramente, seus autovalores e autovetores da maneira padrão. A matriz $\mathbf{A}$ é:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $\mathbf{A}$ são as soluções da equação $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, que pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(\lambda - 2)^2 - (-1)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Calculando o discriminante dessa equação do segundo grau, temos

$$\Delta = (-4)^2 - 4(+1)(+3) = 16 - 12 = 4$$

então

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Portanto, os autovalores de $\mathbf{A}$ são $\lambda_0 = 3$ e $\lambda_1 = 1$. Vamos determinar o autovetor v_0 para $\lambda_0 = 3$ e v_1 para $\lambda_1 = 1$. Para o cálculo de v_0 resolvemos o sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que resulta em $x - y = 0$, e portanto, $x = y$. Logo, a solução geral desse sistema é dada por $\{[t, t]^T | t \in \mathbb{R}\}$. Fazendo $t = 1$, e normalizando temos o autovetor

$$v_{\mathbf{0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, vamos determinar o autovetor v_1 para $\lambda_1 = 1$ resolvendo o sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o que resulta em $-x - y = 0$, e logo, $x = -y$. Portanto, a solução geral do sistema acima é dada por $\{[t, -t]^T | t \in \mathbb{R}\}$. Fazendo $t = 1$, e também normalizando, temos o segundo autovetor

$$v_{\mathbf{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Após os cálculos dos autovalores e autovetores conseguimos determinar as matrizes **D** e **P**, que nesse caso são:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que o $\det \mathbf{D} = \det \mathbf{A} = 3$ e que a matriz **P** é invertível, pois $\det \mathbf{P} = -2 \neq 0$.

Os autovalores e autovetores de qualquer matriz circulante podem ser calculados como mostramos anteriormente mas também podem ser calculados da maneira que explicaremos a seguir [5].

Representemos por $\mathbf{C}_n$ a matriz circulante especial, de ordem n, dada por $\mathbf{C}_n = circ(0, 1, 0, ..., 0)$, ou seja,

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Uma importante característica dessa matriz é que seus autovalores são as n raízes n-ésimas complexas da unidade:

Teorema 3.1 *Seja* $\mathbf{C}_n = circ(0,1,0,...,0)$*, então seu polinômio característico é dado por* $P_{\mathbf{C}_n}(z) = z^n - 1$.

Demonstração:

$$P_{\mathbf{C}_n}(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{C}_n) = \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & z \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Usando o desenvolvimento de Laplace para calcular o determinante, considerando a n-ésima linha, temos

$$P_{\mathbf{C}_n}(z) = -1(-1)^{n+1} \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} + z(-1)^{n+n} \det \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z \end{bmatrix}$$

observando que as duas matrizes menores acima são triangulares, e que portanto, como já salientado anteriormente, o determinante de cada uma delas é o produto de seus elementos da diagonal principal, segue que

$$P_{\mathbf{C}_n}(z) = -1(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} + z(-1)^{2n} z^{n-1} = z^n - 1$$

Assim, podemos concluir que o conjunto dos autovalores de $\mathbf{C}_n$ são as n raízes n-ésimas da unidade:

$$z_m = e^{2\pi i \frac{m}{n}}, \; com \; m = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

□

Proposição 3.1 *Qualquer que seja a matriz circulante* $\mathbf{C} = circ(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$*, vale que o polinômio* $q(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_{n-1} z^{n-1}$ *satisfaz*

$$\mathbf{C} = q(\mathbf{C}_n) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{C}_n + a_2\mathbf{C}_n^2 + a_3\mathbf{C}_n^3 + ... + a_{n-1}\mathbf{C}_n^{n-1}.$$

Demonstração:

É fácil ver que,

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} +$$

$$a_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{I}_n + a_1\mathbf{C}_n + a_2 circ(0,0,1,...,0) + ... + a_{n-1} circ(0,0,0,...,1)$$

e finalmente, observando que $circ(0,0,1,...,0) = \mathbf{C}_n^2$, $circ(0,0,0,1,...,0) = \mathbf{C}_n^3$, etc, até $circ(0,0,0,...,1) = \mathbf{C}_n^{n-1}$, podemos concluir que $\mathbf{C} = q(\mathbf{C}_n)$

$\square$

Exemplo 3.9 *Sejam*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ e \ q(z) = a + bz + cz^2.$$

Temos que,

$$q(\mathbf{C}_3) = a\mathbf{I} + b\mathbf{C}_3 + c\mathbf{C}_3^2 = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \ b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$q(\mathbf{C}_3) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Proposição 3.2 *Sejam* $\mathbf{A}$ *uma matriz quadrada de ordem* n, $v \in \mathbb{C}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Se* $\mathbf{A}v = \lambda v$, *então* $\mathbf{A}^n v = \lambda^n v$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Essa propriedade pode ser verificada pelo Princípio de Indução

(I) A propriedade é válida para $n = 1$, pois $\mathbf{A}v = \lambda v$.

(II) Suponha a propriedade válida para $n = k$:

$$\mathbf{A}^k v = \lambda^k v.$$

Vamos provar que a mesma vale para $n = k + 1$, de fato

$$\mathbf{A}^{k+1}v = \mathbf{A}^k(\mathbf{A}v) = \mathbf{A}^k(\lambda v) = \lambda(\mathbf{A}^k v) = \lambda(\lambda^k v) = \lambda^{k+1}v.$$

Logo, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 3.2 *Sejam* $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *e* $\mathbf{C} = circ(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ *uma matriz circulante real qualquer. Então, todos os autovalores de* $\mathbf{C}$ *são da forma* $q(z_m)$*, onde* $z_m = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$*,* $(m = 0, 1, 2, ..., n-1)$*, são os* n *autovalores de* $\mathbf{C}_n$ *e* $q(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_{n-1} z^{n-1}$.

Demonstração:

Seja z_m um autovalor de $\mathbf{C}_n$ e seja v_m o autovetor associado ao autovalor z_m, ou seja $(z_m \mathbf{I} - \mathbf{C}_n)v_m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{C}_n v_m = z_m v_m$. Podemos ver que $q(z_m)$ é autovalor de $\mathbf{C}$, pois

$$\big[q(z_m)\mathbf{I} - \mathbf{C}\big]v_m = \big[q(z_m)\mathbf{I} - (a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{C}_n + a_2\mathbf{C}_n^2 + a_3\mathbf{C}_n^3 + \cdots + a_{n-1}\mathbf{C}_n^{n-1})\big]v_m$$

$$= q(z_m)v_m - (a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{C}_n + a_2\mathbf{C}_n^2 + a_3\mathbf{C}_n^3 + \cdots + a_{n-1}\mathbf{C}_n^{n-1})v_m$$

$$= q(z_m)v_m - (a_0 v_m + a_1\mathbf{C}_n v_m + a_2\mathbf{C}_n^2 v_m + a_3\mathbf{C}_n^3 v_m + \cdots + a_{n-1}\mathbf{C}_n^{n-1} v_m)$$

$$= q(z_m)v_m - (a_0 v_m + a_1 z_m v_m + a_2 z_m^2 v_m + a_3 z_m^3 v_m + \cdots + a_{n-1} z_m^{n-1} v_m)$$

$$= q(z_m)v_m - (a_0 + a_1 z_m + a_2 z_m^2 + a_3 z_m^3 + \cdots + a_{n-1} z_m^{n-1})v_m = q(z_m)v_m - q(z_m)v_m$$

E, portanto $\big[q(z_m)\mathbf{I} - \mathbf{C}\big]v_m = 0.$ Visto que, como vimos

$$\mathbf{C}_n v_m = z_m v_m, \quad \mathbf{C}_n^2 v_m = z_m^2 v_m, \quad \mathbf{C}_n^3 v_m = z_m^3 v_m, \quad \cdots, \quad \mathbf{C}_n^{n-1} v_m = z_m^{n-1} v_m.$$

□

Esse teorema nos permite concluir que os autovalores de uma matriz circulante são exatamente $\lambda_m = q(z_m) = q(e^{2\pi i \frac{m}{n}})$, ou seja

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{2\pi i \frac{m}{n}}, \qquad (0 \leq m \leq n-1) \tag{13}$$

Uma propriedade surpreendente das matrizes circulantes é que, quaisquer que sejam as matrizes circulantes de uma mesma ordem determinada, os autovetores são sempre os mesmos, devido à **proposição 3.1** e ao **teorema 3.2**, de maneira que se encontrarmos os autovetores de uma matriz circulante qualquer, de uma ordem fixa, encontramos os autovetores de qualquer matriz dessa mesma ordem. É fácil ver que isso é verdade, da seguinte maneira: Seja v_m o autovetor da matriz $\mathbf{C}_n$, correspondente ao autovalor z_m dessa matriz. Multiplicando à esquerda a matriz $\mathbf{C}$ em v_m, e usando a propriedade dada pela proposição 3.1, temos $\mathbf{C}v_m = (a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{C}_n + a_2\mathbf{C}_n^2 + a_3\mathbf{C}_n^3 + ... + a_{n-1}\mathbf{C}_n^{n-1})v_m$, e consequentemente $\mathbf{C}v_m = (a_0 v_m + a_1 z_m v_m + a_2 z_m^2{}_n v_m + a_3 z_m^3{}_n v_m + ... + a_{n-1} z_m^{n-1}{}_n v_m)$, logo $\mathbf{C}v_m = (a_0 + a_1 z_m + a_2 z_m^2 + a_3 z_m^3 + ... + a_{n-1} z_m^{n-1})v_m = q(z_m)v_m$. Mas como, pelo teorema 3.2, os $q(z_m) = \lambda_m$ são autovalores de $\mathbf{C}$, podemos concluir que os v_m também são os autovetores de $\mathbf{C}$, correspondentes aos autovalores λ_m.

Podemos escolher encontrar, portanto, os autovetores da matriz $\mathbf{C}_n$, de ordem n. Para encontrar os autovetores dessa matriz, basta resolver o sistema $\mathbf{C}_n v_m = z_m v_m$, onde $z_m = e^{2\pi i \frac{m}{n}}$ é um autovalor qualquer de $\mathbf{C}_n$, e fazendo $v_m = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1})^T$, precisamos encontrar a solução da equação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = z_m \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$$

que, escrita em termos de um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 0x_0 + 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_{n-1} = z_m x_0 \\ 0x_0 + 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_{n-1} = z_m x_1 \\ 0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + \cdots + 0x_{n-1} = z_m x_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ 1x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_{n-1} = z_m x_{n-1} \end{cases}$$

resolvendo o sistema, colocando $x_0 = 1$, segue que $x_1 = z_m$, $x_2 = z_m^2$, $x_3 = z_m^3$, ..., $x_{n-1} = z_m^{n-1}$. Portanto, os autovetores de qualquer matriz circulante $\mathbf{C}$, correspondente aos autovalores λ_m dessa matriz, são dados por (devidamente normalizados em $\mathbb{C}^n$):

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2\pi i \frac{m}{n}} \\ e^{2\pi i \frac{2m}{n}} \\ \vdots \\ e^{2\pi i \frac{(n-1)m}{n}} \end{bmatrix}, \qquad (0 \leq m \leq n-1) \tag{14}$$

Os autovalores são diferentes para cada matriz circulante, mas como conhecemos os autovetores, elas são facilmente diagonalizáveis.

Teorema 3.3 *Se* $\mathbf{A}$ *é uma matriz circulante, ela é diagonalizável.*

Demonstração: Pela equação (14) os autovetores de uma matriz circulante são linearmente independentes, fazendo com que ela seja diagonalizável.

O produto escalar de dois autovetores quaisquer v_m e v_l, em $\mathbb{C}^n$ é dado por

$$v_m^* \cdot v_l = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \left(1 + e^{-2\pi i \frac{m}{n}} e^{2\pi i \frac{l}{n}} + e^{-2\pi i \frac{2m}{n}} e^{2\pi i \frac{2l}{n}} + \cdots + e^{-2\pi i \frac{(n-1)m}{n}} e^{2\pi i \frac{(n-1)l}{n}}\right)$$

ou seja $v_m^* \cdot v_l = \frac{1}{n}\left(1 + e^{2\pi i \frac{(l-n)}{n}} + e^{2\pi i \frac{2(l-n)}{n}} + \cdots + e^{2\pi i \frac{(n-1)(l-n)}{n}}\right)$, o que pode ser escrito como

$$v_m^* \cdot v_l = \frac{1}{n}\left(1 + z_{(l-n)} + z_{(l-n)}^2 + \cdots + z_{(l-n)}^{(n-1)}\right)$$

onde $(0 \leq m, l \leq n-1)$. Por fim, é fácil ver que se $m = l$, $v_m^* \cdot v_l = \frac{1}{n}\left(1 + 1 + \cdots + 1\right) = 1$, e $m \neq l$, $v_m^* \cdot v_l = 0$, por que o produto escalar é proporcional à soma de todas as n-ésimas raízes complexas da unidade, que é zero.

$\square$

Em matemática, a **transformada de Fourier** é uma transformada integral que expressa uma função em termos de funções senos e cossenos. Existem diversas variações relacionadas desta transformada, a que está mais intimamente relacionada com as matrizes circulantes é a chamada **transformada discreta de Fourier (DFT)**. A DFT age em sequências, em vez de agir em funções de variável contínua, e corresponde à amostragens igualmente espaçadas em frequência [9].

A DFT é uma das transformadas discretas mais importantes, é usada para executar a análise de Fourier em muitas aplicações práticas em tempo discreto. É também usada no processamento digital de sinais, em sinais de rádio e processamento de imagens. A DFT também pode ser usada para resolver equações diferenciais parciais.

A equação (13) indica que os autovalores de uma matriz circulante qualquer são dados exatamente pela Transformada Discreta de Fourier do vetor gerador da matriz circulante $\mathbf{A} = circ(a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1})$.

Vamos agora calcular os autovalores da matriz $\mathbf{A} = circ(2, 1)$ com o método da Transformada Discreta de Fourier, que é a outra maneira de calcular os autovalores de uma matriz circulante, a que referimos anteriormente.

Utilizando a Equação (13), temos ($n = 2$ e $m = 0, 1$)

$$\lambda_0 = a_0 e^0 + a_1 e^0 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$\lambda_1 = a_0 e^0 + a_1 e^{2\pi i \frac{1 \cdot 1}{2}} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1$$

Portanto $\lambda_0 = 3$ e $\lambda_1 = 1$ que são os mesmos valores achados anteriormente pelo outro método. Os autovetores da matriz $\mathbf{A}$, correspondentes a esses autovalores, podem ser calculados diretamente através da equação (14).

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2\pi i \frac{0}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2\pi i \frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{\pi i} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Encontramos a mesma base do método anterior, porém normalizada.

No próximo exemplo calcularemos os autovalores de uma matriz circulante de ordem 3 utilizando as duas maneiras descritas anteriormente e calcularemos os autovetores utilizando a equação (14).

Exemplo 3.10 *Encontrar os autovalores e autovetores da matriz circulante* $\mathbf{A} = circ(0, 1, 2)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segue que podemos calcular os autovalores de $\mathbf{A}$*, com o método padrão, encontrando as soluções da equação característica* $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -2 \\ -2 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda - 9 = 0$$

Que é uma equação cúbica (equação de Cardano), que em geral não é simples de acharmos as raízes. Por tentativa e erro podemos calcular uma das raízes (3) e reescrever o polinômio da seguinte maneira:

$$(\lambda-3)(\lambda^2+3\lambda+3)=0$$

Portanto, uma das soluções é $\lambda_0 = 3$ e as outras duas raízes são as soluções da equação de segundo grau $\lambda^2+3\lambda+3=0$, cujas raízes são

$$\lambda_1=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \lambda_2=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$$

Vale notar por esse exemplo que, mesmo que uma matriz circulante tenha apenas entradas reais, os seus autovalores podem ser números complexos.

*Vamos utilizar agora o outro método, o método da DFT para acharmos os autovalores de **A** (equação 13):*

$$\lambda_0=a_0e^0+a_1e^0+a_2e^0=0+1+2=3$$

$$\lambda_1=a_0e^0+a_1e^{\frac{2\pi i}{3}}+a_2e^{\frac{4\pi i}{3}}=0\cdot 1+1\left(cos\frac{2\pi}{3}+isen\frac{2\pi}{3}\right)+2\left(cos\frac{4\pi}{3}+isen\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\lambda_1=\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-2+2i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda_2=a_0e^0+a_1e^{\frac{4\pi i}{3}}+a_2e^{\frac{8\pi i}{3}}=0\cdot 1+1\left(cos\frac{4\pi}{3}+isen\frac{4\pi}{3}\right)+2\left(cos\frac{8\pi}{3}+isen\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$\lambda_2=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-2-2i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$$

*Finalmente, os autovetores de **A** podem ser computados diretamente através da equação (14):*

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ e^{2\pi i\frac{0}{3}}\\ e^{2\pi i\frac{0}{3}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ e^0\\ e^0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ e^{2\pi i\frac{1}{3}}\\ e^{2\pi i\frac{2}{3}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ e^{\frac{2\pi i}{3}}\\ e^{\frac{4\pi i}{3}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

$$v_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ e^{2\pi i\frac{2}{3}}\\ e^{2\pi i\frac{4}{3}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ e^{\frac{4\pi i}{3}}\\ e^{\frac{8\pi i}{3}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$$

O cálculo dos autovetores da matriz $\mathbf{A}$, da maneira tradicional, envolve resolver um sistema linear 3×3 com coeficientes complexos. Isso acarreta cálculos consideravelmente mais difíceis, o que mostra as vantagens de se utilizar diretamente a equação (14).

Agora vamos pensar, do ponto de vista computacional, as vantagens de se usar esse método para calcularmos os autovalores e autovetores de uma matriz circulante de ordem mais alta. Uma matriz circulante de ordem n tem um polinômio característico também de grau n, e encontrar os autovalores dessa matriz, da maneira tradicional, implica em encontrar as n raízes desse polinômio, o que pode ser algebricamente bem difícil, ou mesmo computacionalmente pesado, em geral. Portanto, para ordens mais altas, o método da DFT pode ser significativamente vantajoso.

4 Funções Hiperbólicas Generalizadas

As matrizes circulantes, como vimos, aparecem em diversos ramos da matemática pura e aplicada. Uma instância interessante onde elas podem aparecer é no estudo das propriedades das chamadas funções hiperbólicas generalizadas [10].

Para qualquer par de inteiros (n, r), $n \geq 2$ e $0 \leq r \leq n-1$, a função inteira no plano complexo $\mathbb{C}$, definida como

$$H_{n,r}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r}}{(nk+r)!} \tag{15}$$

é denominada **função hiperbólica de ordem n e tipo r**. Essa família de funções englobam, como caso especial, as funções hiperbólicas clássicas, bem conhecidas do cálculo diferencial e integral.

De fato, para o caso de ordem $n = 2$, temos duas funções, referentes ao tipo $r = 0$ e $r = 1$; e podemos ver que $H_{2,0}(z) = cosh\ z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ e $H_{2,1}(z) = senh\ z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$:

$$H_{2,0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$H_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

que são exatamente as séries de Taylor das funções $cosh\ z$ e $senh\ z$, respectivamente. O caso $n = 1$, mais simples, $H_{1,0}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ é a função exponencial.

Uma das propriedades mais importantes e interessantes dessas funções é a propriedade abaixo, que mostra que a derivada de uma função hiperbólica de ordem n é outra função hiperbólica de mesma ordem, mas de tipo menor:

$$\frac{d}{dz} H_{n,r}(z) = H_{n,r-1}(z), \tag{16}$$

a prova é direta, dada uma ordem $n \geq 2$ qualquer, considerando por enquanto apenas as funções de tipos $1 \leq r \leq n-1$:

$$\frac{d}{dz}H_{n,r}(z) = \frac{d}{dz}\left[\frac{z^r}{r!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{nk+r}}{(nk+r)!}\right] = \frac{rz^{r-1}}{r!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(nk+r)}{(nk+r)!}z^{nk+r-1}$$

de modo que,

$$\frac{d}{dz}H_{n,r}(z) = \frac{z^{r-1}}{(r-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = H_{n,r-1}(z).$$

enquanto que, para a função de ordem $n \geq 2$ e tipo $r = 0$:

$$\frac{d}{dz}H_{n,0}(z) = \frac{d}{dz}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{nk}}{(nk)!}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{nk-1}}{(nk-1)!}$$

que, fazendo a substitução $k = l + 1$, no último somatório, resulta em

$$\frac{d}{dz}H_{n,0}(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{nk-1}}{(nk-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{nl+n-1}}{(nl+n-1)!} = H_{n,n-1}(z)$$

o que indica que podemos fazer simbolicamente a identificação $H_{n,-1}(z) = H_{n,n-1}(z)$. Mais ainda, podemos estender a definição de $H_{n,r}(z)$ para qualquer inteiro r, da seguinte maneira

$$H_{n,r}(z) = H_{n,r(mod\ n)}(z),$$

É possível mostrar que o conjunto das n funções hiperbólicas de ordem n, $H_{n,r}(z)$, $(r = 0, 1, 2, ..., n-1)$, forma um conjunto de n soluções linearmente independentes da equação diferencial ordinária linear:

$$\frac{d^n\phi(z)}{dz^n} = \phi(z). \tag{17}$$

Uma grande variedade de propriedades das funções hiperbólicas pode ser estudada com auxílio de uma matriz construída com essas funções como elementos. Seja $\mathbf{H_n}(z)$ a matriz $n \times n$ tal que $\mathbf{H_n}(z) = (a_{ij})$, onde $a_{ij} = H_{n,j-i}(z)$, $(i, j = 0, 1, 2, ..., n-1)$:

$$\mathbf{H_n}(z) = \begin{bmatrix} H_{n,0}(z) & H_{n,1}(z) & H_{n,2}(z) & \cdots & H_{n,n-1}(z) \\ H_{n,n-1}(z) & H_{n,0}(z) & H_{n,1}(z) & \cdots & H_{n,n-2}(z) \\ H_{n,n-2}(z) & H_{n,n-1}(z) & H_{n,0}(z) & \cdots & H_{n,n-3}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n,1}(z) & H_{n,2}(z) & H_{n,3}(z) & \cdots & H_{n,0}(z) \end{bmatrix}, z \in \mathbb{C}.$$

A matriz $\mathbf{H_n}(z)$, $(n \geq 2)$, referida doravante como a **matriz hiperbólica de ordem** n, é uma matriz de tipo muito especial, uma matriz circulante, e seu determinante é o **Wronskiano** da equação diferencial (17). Com ela, e usando o teorema abaixo [10], que afirma algumas propriedades dessas matrizes, podemos deduzir muitas das mais importantes identidades envolvendo as funções hiperbólicas generalizadas.

Teorema 4.1 *Seja* $\mathbf{H_n}(z)$, *(*$n \geq 2$*), a* ***matriz hiperbólica de ordem*** n*, então*

$$\det \mathbf{H_n}(z) = 1, \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad e \qquad \mathbf{H_n}(z_1 + z_2) = \mathbf{H_n}(z_1) \cdot \mathbf{H_n}(z_2), \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}),$$

No que se segue, faremos uso frequente desse teorema para explorarmos as propriedades das funções hiperbólicas de ordem $n = 2$ e $n = 3$, e mostraremos a seguir, apenas para essas ordens, os resultados $\det \mathbf{H}_2(z) = 1$ e $\det \mathbf{H}_3(z) = 1$.

Demonstração:

Primeiramente, provemos o resultado $\det \mathbf{H}_2(z) = 1$. Notemos que $\det \mathbf{H}_2(z)$ é a função:

$$\det \mathbf{H}_2(z) = \begin{vmatrix} H_{2,0}(z) & H_{2,1}(z) \\ H_{2,1}(z) & H_{2,0}(z) \end{vmatrix} = H_{2,0}^2(z) - H_{2,1}^2(z)$$

derivando essa função, e lembrando que $H'_{2,1}(z) = H_{2,0}(z)$ e $H'_{2,0}(z) = H_{2,1}(z)$ de (16), temos

$$(\det \mathbf{H}_2(z))' = 2H_{2,0}(z)H_{2,1}(z) - 2H_{2,1}(z)H_{2,0}(z) = 0,$$

de tal forma que $\det \mathbf{H}_2(z) = \textit{constante}$ e, finalmente, dado que $H_{2,0}(0) = 1$, e $H_{2,1}(0) = 0$:

$$\det \mathbf{H}_2(z) = \det \mathbf{H}_2(0) = \begin{vmatrix} H_{2,0}(0) & H_{2,1}(0) \\ H_{2,1}(0) & H_{2,0}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

A prova de que $\det \mathbf{H}_3(z) = 1$ é também simples e segue o mesmo raciocínio, mas um pouco mais elaborada. A função $\det \mathbf{H_3}(z)$ é:

$$\det \mathbf{H}_3(z) = \begin{vmatrix} H_{3,0}(z) & H_{3,1}(z) & H_{3,2}(z) \\ H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,1}(z) & H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) \end{vmatrix} = H_{3,0}(z)\Delta_0(z) - H_{3,1}(z)\Delta_1(z) + H_{3,2}(z)\Delta_2(z)$$

onde $\Delta_0(z)$, $\Delta_1(z)$ e $\Delta_2(z)$ são os determinantes das matrizes menores:

$$\Delta_0(z) = \begin{vmatrix} H_{3,0}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) \end{vmatrix}, \ \Delta_1(z) = \begin{vmatrix} H_{3,2}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,1}(z) & H_{3,0}(z) \end{vmatrix}, \ \Delta_2(z) = \begin{vmatrix} H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) \\ H_{3,1}(z) & H_{3,2}(z) \end{vmatrix}$$

Derivando o determinante $\det \mathbf{H}_3(z)$, temos

$$(\det \mathbf{H}_3(z))' = H'_{3,0}(z)\Delta_0(z) - H'_{3,1}(z)\Delta_1(z) + H'_{3,2}(z)\Delta_2(z)$$
$$+H_{3,0}(z)\Delta'_0(z) - H_{3,1}(z)\Delta'_1(z) + H_{3,2}(z)\Delta'_2(z)$$

de (16) sabemos que $H'_{3,2}(z) = H_{3,1}(z)$, $H'_{3,1}(z) = H_{3,0}(z)$ e $H'_{3,0}(z) = H_{3,2}(z)$, e portanto:

$$H'_{3,0}(z)\Delta_0 - H'_{3,1}(z)\Delta_1 + H'_{3,2}(z)\Delta_2 = H_{3,2}(z)\Delta_0 - H_{3,0}(z)\Delta_1 + H_{3,1}(z)\Delta_2$$

que pode ser reconhecido como o determinante da matriz abaixo

$$\begin{vmatrix} H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,1}(z) & H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) \end{vmatrix} = 0$$

que é nulo, pois a primeira e segunda linhas são iguais. Também, podemos ver que, dado que

$$\Delta_0(z) = \begin{vmatrix} H_{3,0}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) \end{vmatrix} = H^2_{3,0}(z) - H_{3,1}(z)H_{3,2}(z)$$

$$\Delta_1(z) = \begin{vmatrix} H_{3,2}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,1}(z) & H_{3,0}(z) \end{vmatrix} = -\big(H^2_{3,1}(z) - H_{3,2}(z)H_{3,0}(z)\big)$$

$$\Delta_2(z) = \begin{vmatrix} H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) \\ H_{3,1}(z) & H_{3,2}(z) \end{vmatrix} = H^2_{3,2}(z) - H_{3,0}(z)H_{3,1}(z)$$

as derivadas dessas funções são:

$$\Delta'_0(z) = 2H_{3,0}(z)H_{3,2}(z) - H_{3,0}(z)H_{3,2}(z) - H^2_{3,1}(z) = \Delta_1(z)$$
$$\Delta'_1(z) = -2H_{3,1}(z)H_{3,0}(z) + H_{3,1}(z)H_{3,0}(z) + H^2_{3,2}(z) = \Delta_2(z)$$
$$\Delta'_2(z) = 2H_{3,2}(z)H_{3,1}(z) - H_{3,2}(z)H_{3,1}(z) - H^2_{3,0}(z) = -\Delta_0(z)$$

portanto,

$$H_{3,0}(z)\Delta'_0 - H_{3,1}(z)\Delta'_1 + H_{3,2}(z)\Delta'_2 = H_{3,0}(z)\Delta_1 - H_{3,1}(z)\Delta_2 - H_{3,2}(z)\Delta_0,$$

ou

$$H_{3,0}(z)\Delta'_0 - H_{3,1}(z)\Delta'_1 + H_{3,2}(z)\Delta'_2 = -\big(H_{3,2}(z)\Delta_0 - H_{3,0}(z)\Delta_1 + H_{3,1}(z)\Delta_2\big)$$

que é o determinante da mesma matriz acima, com sinal trocado, e portanto também nulo:

$$-\begin{vmatrix} H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) & H_{3,1}(z) \\ H_{3,1}(z) & H_{3,2}(z) & H_{3,0}(z) \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, $(\det \mathbf{H}_3(z))' = 0 - 0 = 0$, de onde podemos concluir que $\det \mathbf{H}_3(z) = constante$, e finalmente, dado que $H_{3,0}(0) = 1$, $H_{3,1}(0) = 0$ e $H_{3,2}(0) = 0$:

$$\det \mathbf{H}_3(z) = \det \mathbf{H}_3(0) = \begin{vmatrix} H_{3,0}(0) & H_{3,1}(0) & H_{3,2}(0) \\ H_{3,2}(0) & H_{3,0}(0) & H_{3,1}(0) \\ H_{3,1}(0) & H_{3,2}(0) & H_{3,0}(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\square$

Como dissemos anteriormente, podemos usar os dois resultados do teorema 4.1 para extrairmos importantes identidades envolvendo as funções hiperbólicas de ordem $n = 2$ e $n = 3$.

Para $n = 2$, $\det \mathbf{H}_2(z) = 1$ implica que

$$\det \mathbf{H}_2(z) = \begin{vmatrix} cosh\ z & senh\ z \\ senh\ z & cosh\ z \end{vmatrix} = cosh^2 z - senh^2 z = 1$$

que é a relação fundamental envolvendo as funções $senh\ z$ e $cosh\ z$. As relações que resultam da soma dos argumentos das funções $senh\ z$ e $cosh\ z$ podem ser deduzidas de $\mathbf{H_2}(z_1 + z_2) = \mathbf{H_2}(z_1) \cdot \mathbf{H_2}(z_2)$:

$$\begin{bmatrix} cosh\ (z_1 + z_2) & senh\ (z_1 + z_2) \\ senh\ (z_1 + z_2) & cosh\ (z_1 + z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cosh\ z_1 & senh\ z_1 \\ senh\ z_1 & cosh\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cosh\ z_2 & senh\ z_2 \\ senh\ z_2 & cosh\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cosh\ z_1 cosh\ z_2 + senh\ z_1 senh\ z_2 & cosh\ z_1 senh\ z_2 + senh\ z_1 cosh\ z_2 \\ cosh\ z_1 senh\ z_2 + senh\ z_1 cosh\ z_2 & cosh\ z_1 cosh\ z_2 + senh\ z_1 senh\ z_2 \end{bmatrix}$$

De onde podemos retirar as duas identidades hiperbólicas da soma de argumentos:

$$cosh\ (z_1 + z_2) = cosh\ z_1 cosh\ z_2 + senh\ z_1 senh\ z_2$$

$$senh\ (z_1 + z_2) = cosh\ z_1 senh\ z_2 + senh\ z_1 cosh\ z_2$$

e as identidades envolvendo a subtração seguem naturalmente daí, levando em conta a simetria das funções: $cosh\ (-z) = cosh\ z$, $senh\ (-z) = -senh\ z$. Logo,

$$senh\ (z_1 \pm z_2) = senh\ z_1 cosh\ z_2 \pm senh\ z_2 cosh\ z_1$$

$$cosh\ (z_1 \pm z_2) = cosh\ z_1 cosh\ z_2 \pm senh\ z_1 senh\ z_2$$

Todas as identidades hiperbólicas abaixo podem ser extraídas dessa mesma maneira, com o uso iterado de $\mathbf{H_2}(z + z) = \mathbf{H_2}(z) \cdot \mathbf{H_2}(z)$:

$$senh\ 2z = 2senh\ z cosh\ z$$

$$cosh\ 2z = cosh^2\ z + senh^2\ z$$

$$senh\ 3z = 3senh\ z + 4senh^3 z$$
$$cosh\ 3z = 4cosh^3 z - 3cosh\ z$$

$$senh\ 4z = 8senh^3\ zcosh\ z + 4senh\ zcosh\ z$$
$$cosh\ 4z = 8cosh^4\ z - 8cosh^2\ z + 1$$

Os gráficos do cosseno hiperbólico e do seno hiperbólico, respectivamente, estão esboçados nas figuras 2 e 3:

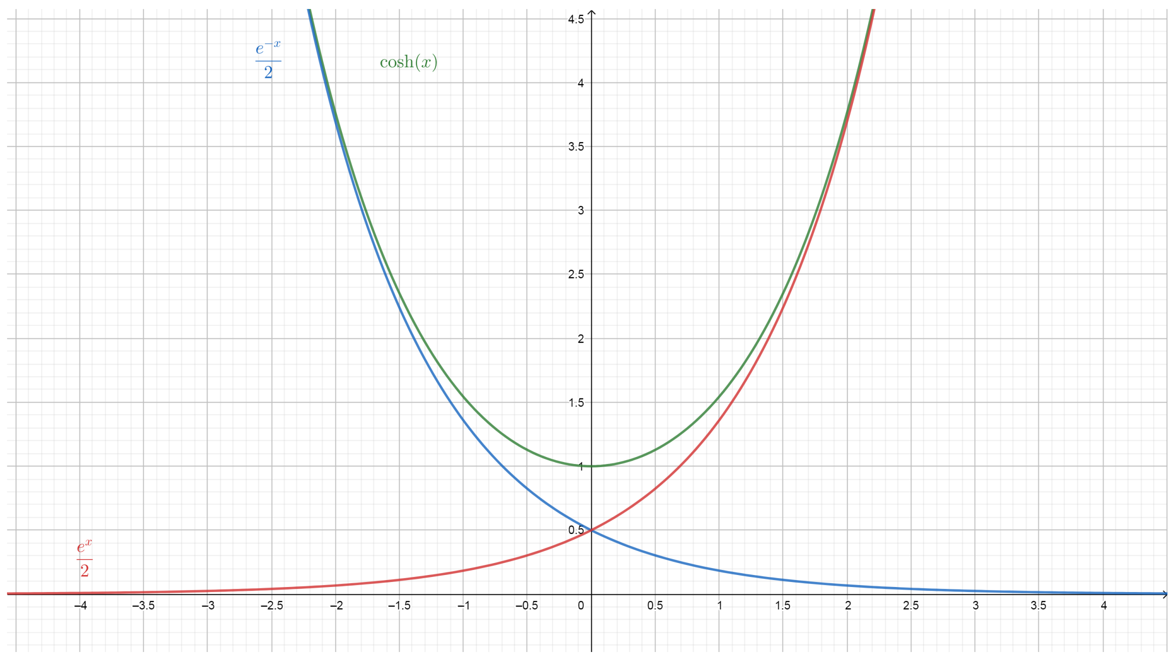

Figura 2: Cosseno Hiperbólico

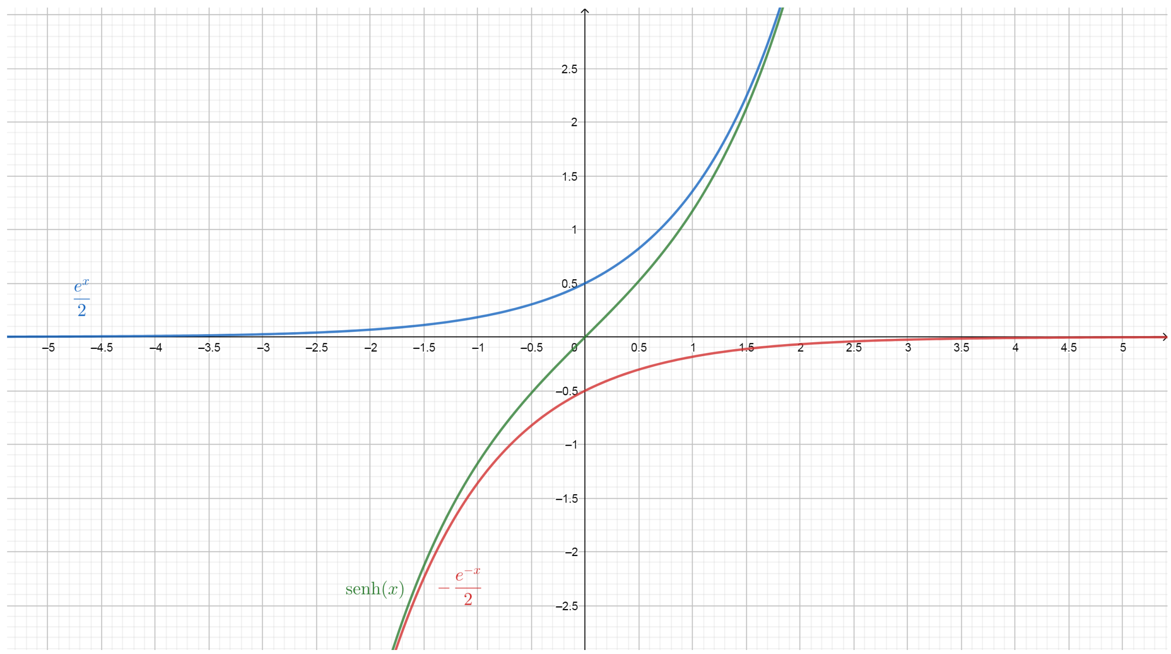

Figura 3: Seno Hiperbólico

Para $n = 3$, $\det \mathbf{H}_3(z) = 1$ implica que:

$$H_{3,0}^3(z) + H_{3,1}^3(z) + H_{3,2}^3(z) - 3H_{3,0}(z)H_{3,1}(z)H_{3,2}(z) = 1$$

que é a relação fundamental envolvendo as funções hiperbólicas de terceira ordem. As relações que resultam da soma dos argumentos dessas funções podem ser deduzidas de $\mathbf{H_3}(z_1 + z_2) = \mathbf{H_3}(z_1) \cdot \mathbf{H_3}(z_2)$:

$$\mathbf{H}_3(z_1)\mathbf{H}_3(z_2) = \begin{bmatrix} H_{3,0}(z_1) & H_{3,1}(z_1) & H_{3,2}(z_1) \\ H_{3,2}(z_1) & H_{3,0}(z_1) & H_{3,1}(z_1) \\ H_{3,1}(z_1) & H_{3,2}(z_1) & H_{3,0}(z_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{3,0}(z_2) & H_{3,1}(z_2) & H_{3,2}(z_2) \\ H_{3,2}(z_2) & H_{3,0}(z_2) & H_{3,1}(z_2) \\ H_{3,1}(z_2) & H_{3,2}(z_2) & H_{3,0}(z_2) \end{bmatrix}$$

$$H_{3,0}(z_1 + z_2) = H_{3,0}(z_1)H_{3,0}(z_2) + H_{3,1}(z_1)H_{3,2}(z_2) + H_{3,2}(z_1)H_{3,1}(z_2)$$
$$H_{3,1}(z_1 + z_2) = H_{3,0}(z_1)H_{3,1}(z_2) + H_{3,1}(z_1)H_{3,0}(z_2) + H_{3,2}(z_1)H_{3,2}(z_2)$$
$$H_{3,2}(z_1 + z_2) = H_{3,0}(z_1)H_{3,2}(z_2) + H_{3,1}(z_1)H_{3,1}(z_2) + H_{3,2}(z_1)H_{3,0}(z_2)$$

Pode-se mostrar que as três funções hiperbólicas de ordem 3, $H_{3,0}(z)$, $H_{3,1}(z)$ e $H_{3,2}(z)$, também podem ser escritas em termos da função exponencial

$$H_{3,0}(z) = \frac{1}{3}(e^z + e^{q_1 z} + e^{q_2 z})$$
$$H_{3,1}(z) = \frac{1}{3}(e^z + q_1 e^{q_1 z} + q_2 e^{q_2 z})$$

$$H_{3,2}(z) = \frac{1}{3}(e^z + q_2 e^{q_1 z} + q_1 e^{q_2 z}),$$

onde $q_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$ e $q_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ são as duas raízes cúbicas não reais da unidade. Equivalentemente, as funções hiperbólicas de terceira ordem podem ser escritas como

$$H_{3,0}(z) = \frac{1}{3}\left[e^z + 2e^{-z/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)\right]$$

$$H_{3,1}(z) = \frac{1}{3}\left[e^z + 2e^{-z/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$H_{3,2}(z) = \frac{1}{3}\left[e^z + 2e^{-z/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{2\pi}{3}\right)\right],$$

de onde podemos notar que, para argumentos reais puros $z = x$, todas as três funções $H_{3,r}(x)$, $r = 0, 1, 2$, aproximam-se assintoticamente de $e^x/3$ para $x \to \infty$, e oscilam rapidamente para $x \to -\infty$.

Os gráficos das três funções descritas acima estão representados na figura 4, para argumentos reais:

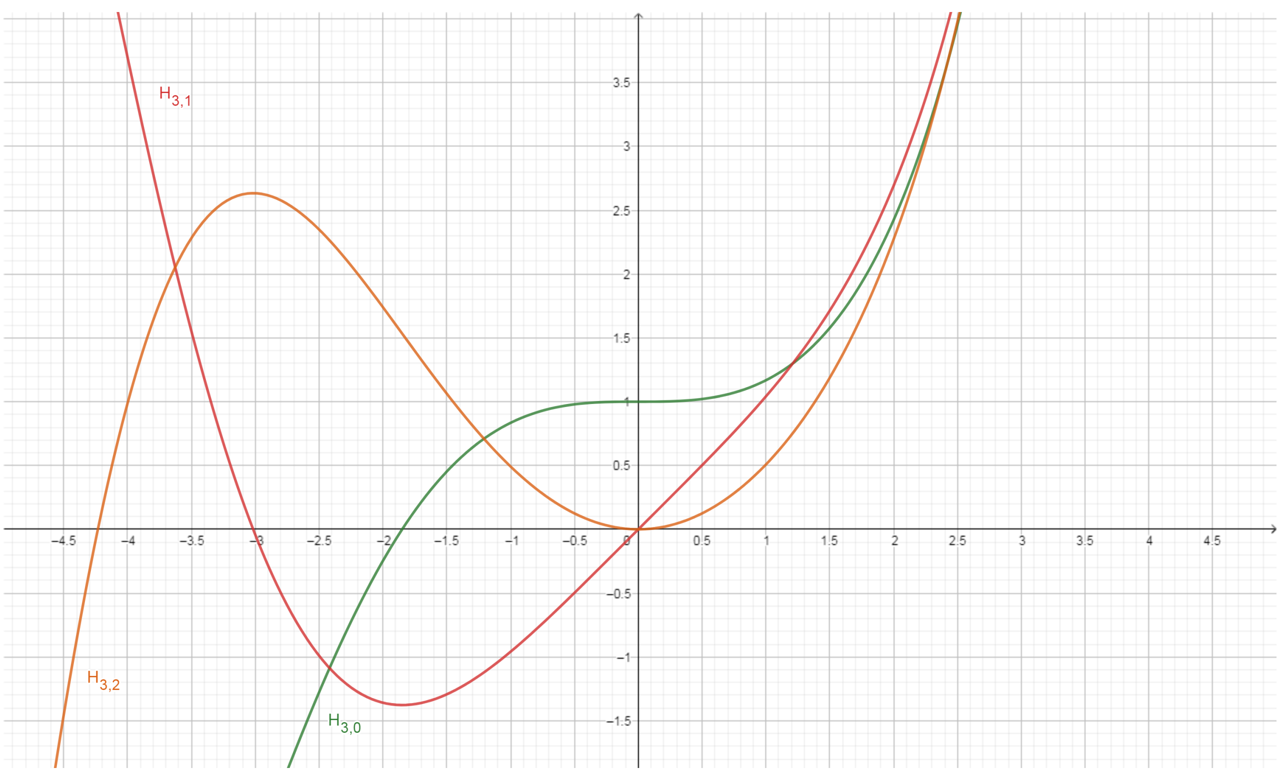

Figura 4: Funções hiperbólicas de ordem 3 com argumentos reais

5 Uma aplicação geométrica de uma matriz circulante

O uso da tecnologia é indispensável na atualidade em salas de aula. A informática possibilita o ensino da matemática com mais dinâmica. Os recursos disponibilizados a partir da tecnologia, como os softwares educacionais, instigam a participação dos alunos, auxiliam a tomada de decisão e possibilitam fazer analogias no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse momento vamos utilizar Geogebra para fazer o esboço de alguns triângulos que serão descritos a seguir:

Considere o triângulo ABC, com vértices $A(0,0)$, $B(6,0)$ e $C(3,5)$, ilustrado na figura 5. Os comprimentos dos segmentos a, b e c e a área $(t1)$ do triângulo ABC são fornecidos pelo software Geogebra, conforme a figura 6.

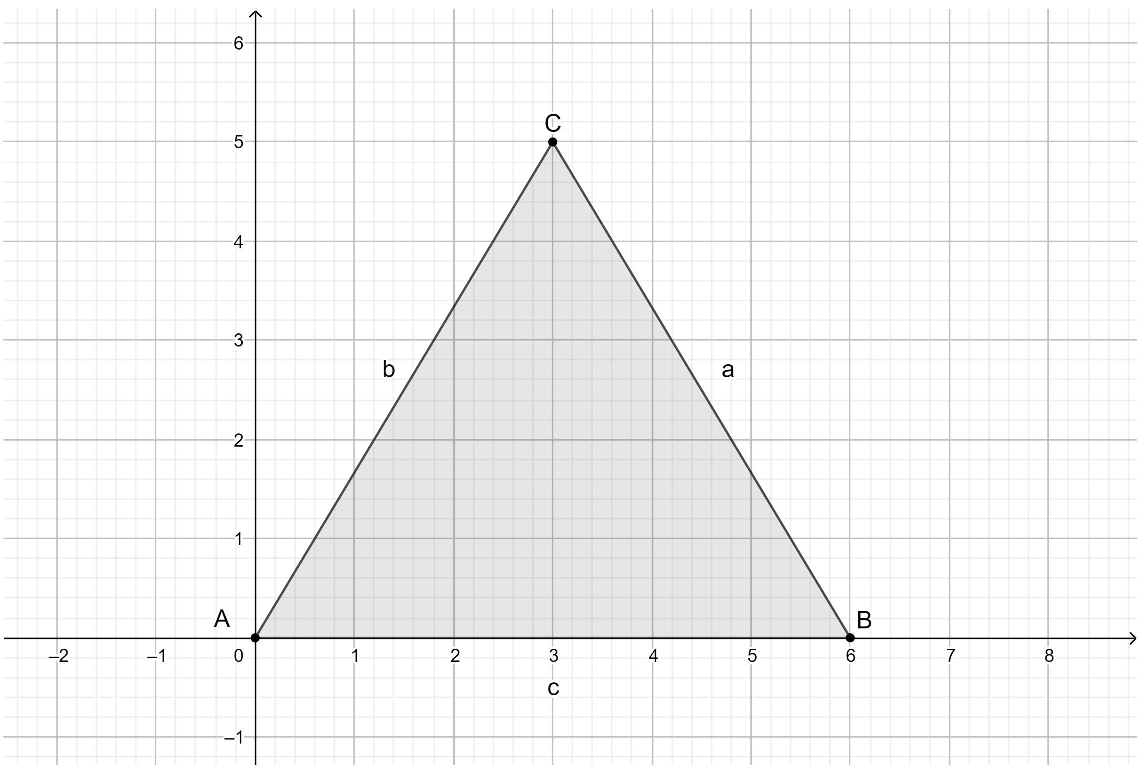

Figura 5: Triângulo ABC

Ponto	Segmento	Triângulo
A = (0, 0)	a = 5.83	t1 = 15
B = (6, 0)	b = 5.83	
C = (3, 5)	c = 6	

Figura 6: Valores fornecidos pelo Geogebra

Considere também a matriz circulante $\mathbf{A} = circ(1/2, 1/2, 0)$, e a matriz $\mathbf{T}$ composta pelos vértices do triângulo ABC. Ao multiplicar a matriz $\mathbf{A}$ com a matriz $\mathbf{T}$ vamos obter os pontos médios dos segmentos a, b e c, [4].

Vamos então fazer a multiplicação de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{T}$:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4,5 & 2,5 \\ 1,5 & 2,5 \end{bmatrix}$$

que são exatamente os valores fornecidos pelo Geogebra conforme a tabela que mostra as coordenadas dos pontos médios dos lados do triângulo em questão (figura 8):

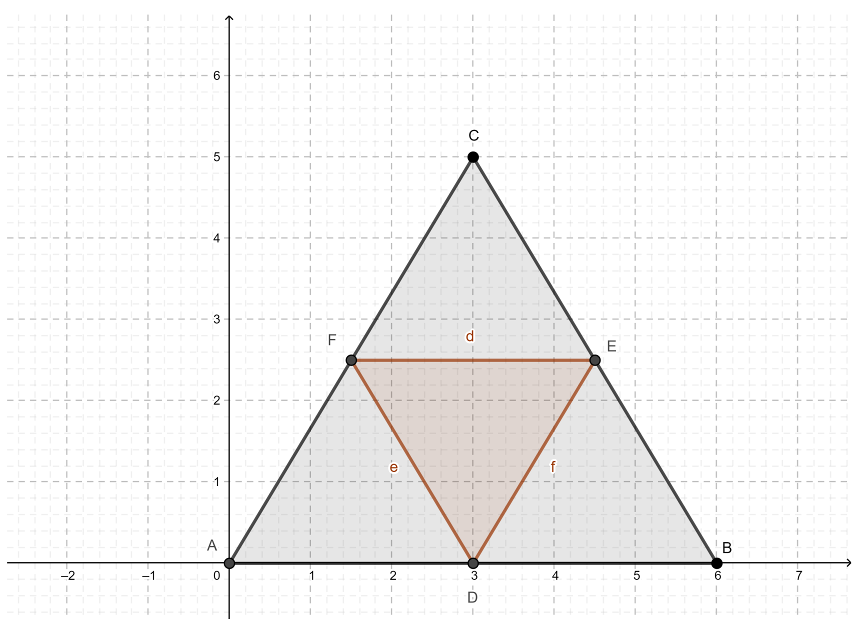

Figura 7: Triângulo DEF

Ponto		Segmento		Triângulo	
	D = (3, 0)		d = 3		t2 = 3.75
	E = (4.5, 2.5)		e = 2.92		
	F = (1.5, 2.5)		f = 2.92		

Figura 8: Valores fornecidos pelo Geogebra

Vamos realizar o mesmo procedimento com o triângulo formado pelos pontos médios dos segmentos a, b e c, temos então

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4,5 & 2,5 \\ 1,5 & 2,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,75 & 1,25 \\ 3 & 2,5 \\ 2,25 & 1,25 \end{bmatrix}$$

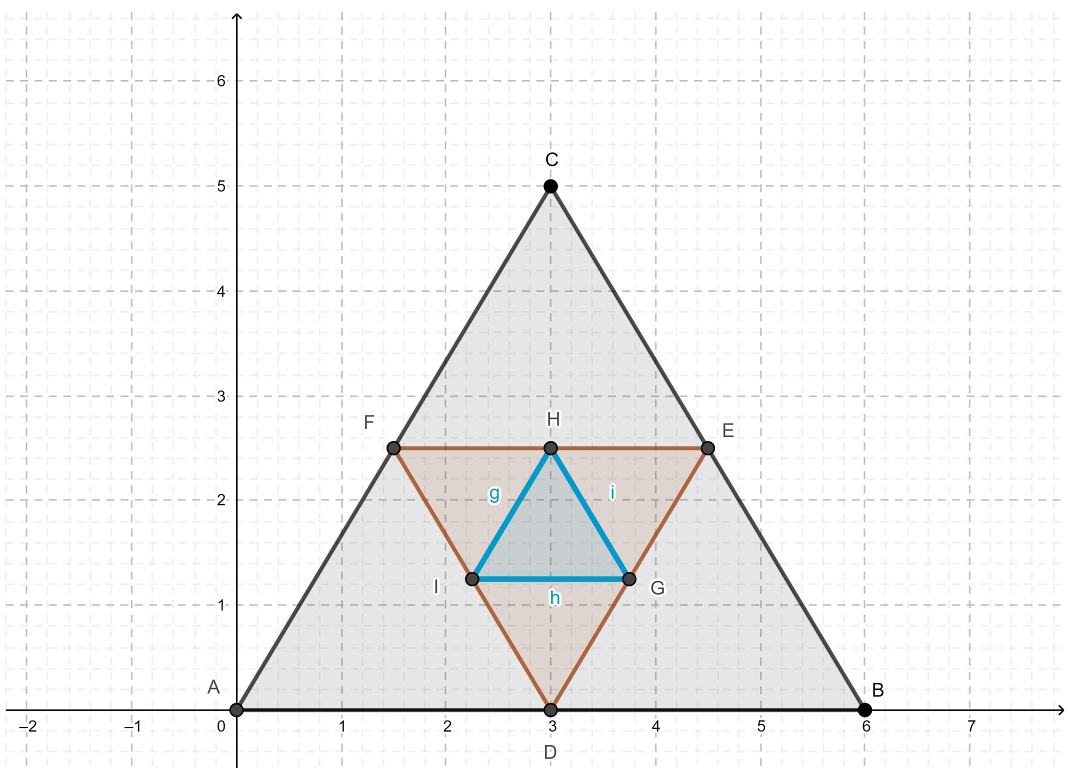

Figura 9: Triângulo GHI

Ponto		Segmento		Triângulo	
	G = (3.75, 1.25)		g = 1.46		t3 = 0.94
	H = (3, 2.5)		h = 1.5		
	I = (2.25, 1.25)		i = 1.46		

Figura 10: Valores fornecidos pelo Geogebra

Podemos realizar esse procedimento iteradas vezes para encontrar os pontos médios do novo triângulo gerado pelos pontos médios do triângulo anterior. Se formos fazendo esse procedimento sucessivas vezes o conjunto de triângulos converge para o Baricentro do triângulo incial com rapidez geométrica. O Baricentro por sua vez tem coordenadas [11]:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

Dado um triângulo T_0 de vértices A, B e C e um inteiro positivo k, o triângulo de ordem k é $T_k = \mathbf{A^k T}$, onde $\mathbf{A^k}$ é a potência da matriz circulante $\mathbf{A} = circ(1/2, 1/2, 0)$ e $\mathbf{T}$ é a matriz composta pelas coordenadas do triângulo T_0.

Para valores de k muito grandes não fica tão fácil calcularmos as coordenadas do triângulo em questão, mas lembrando do Teorema 3.3 que afirma que toda matriz circulante é diagonalizável, é mais fácil calcular suas potências utilizando a matriz diagonal e a decomposição espectral.

O que foi descrito para os triângulos acima, também pode ser descrito para um polígono qualquer, o que vale ressaltar é que o tamanho da matriz circulante varia conforme a quantidade de lados do polígono. Se o polígono tiver 4 lados a matriz circulante será $\mathbf{A} = circ(1/2, 1/2, 0, 0)$, e assim por diante.

Considerações Finais

Neste trabalho, dedicamos nosso estudo a alguns conteúdos de matrizes, e em específico, das matrizes circulantes e à abordagem de alguns problemas práticos. Alguns tópicos matemáticos, como o das matrizes circulantes, são pedras preciosas que clamam por serem admiradas e estudadas com diferentes técnicas ou perspectivas. Acreditamos que o trabalho desenvolvido possa ajudar aos professores da Educação Básica, possibilitando a participação dos alunos no processo de construção do conhecimento. No caso do uso do Geogebra, aguçando a criatividade e facilitando o desenvolvimento do aluno.

O estudo feito recorre a ferramentas de Geometria Analítica e de Álgebra Linear e serve como exemplo de uma atividade possível de ser desenvolvida com alunos do 2º ano do ensino médio. É muito importante que os professores consigam estabelecer relações entre os conteúdos da sala de aula com o mundo real. Desta forma, o desinteresse dos alunos pela Matemática pode ser minimizado.

Agradecimentos

A Deus, pela oportunidade de estar vivo.

Aos meus pais, Ana Rita e Edson, especialmente minha mãe por ser exemplo de força, caráter e honestidade. Seu apoio e amor incondicional me dão motivos para continuar buscando ser alguém cada vez melhor.

Aos meus irmãos, Alison e Nisleide, por todo apoio dado durante minha carreira acadêmica.

Aos meus avós, José Francisco e Joanira, por ter me ensinado que as verdadeiras riquezas não são materiais.

Ao meu orientador Professor Dr. José Eloy Ottoni pela confiança em mim depositada e pela sua paciência.

A todos os professores do Profmat-UFSJ que contribuíram com minha formação pessoal compartilhando os seus conhecimentos.

A todos os colegas da turma de 2017 do PROFMAT-UFSJ-CAP que também contribuíram compartilhando os seus conhecimentos, especialmente aos amigos Luiz Fernando e Jonilson que me ajudaram bastante nessa jornada.

À Professora Dra. Mariana Garabini, por toda dedicação e paciência.

Ao meu amigo Charles Amaral por me ajudar nos estudos.

Referências

[1] J. Souza e J. Garcia, Contato Matemática, 2º ano. São Paulo: FTD, 2016.

[2] A. Hefez e C. S. Fernandez, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[3] H. Anton e C. Rorres, Álgebra Linear com aplicações, 10ª edição, Porto Alegre: Bookman, 2012.

[4] P. J. Davis, Circulant Matrices, Wiley 1979, 2ª edição, Nova York: Chelsea 1994.

[5] A. S. Cavalcanti, Matrizes Circulantes: Aplicação na Resolução de Equações Polinomiais. Universidade Federal Rural de Pernambuco - Departamento de Matemática. Recife: Novembro/2016.

[6] J. Stewart, Cálculo, Volume I, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[7] J. Stewart, Cálculo, Volume II, 7ª edição. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[8] A. Zborowska, On some properties of circulant matrices. Institute of Mathematic, Pedagogical University of Cracow, Poland:19 November 2017.

[9] Matriz Circulante. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Matriz circulante

[10] A. Ungar, Generalized Hyperbolic Functions. The American Mathematical Monthly, Vol. 89, Nº. 9 (Nov.,1982). http://www.jstor.org/stable/2975654

[11] J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[12] L. B. de Aguiar, Relações Complexas Entre as Funções Hiperbólicas e a Transmissão de Energia. Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2011.

[13] R. M Gray, Toeplitz and Circulant Matrices: A review. Department of Electrical Engineering. Stanford University, 2006.

[14] P. J. S. de O. Júnior, Equações Polinomiais e Matrizes Circulantes. Universidade Federal da Paraíba - Centro de Ciências Exatas e da Natureza Departamento de Matemática. João Pessoa - PB: Julho/2015.

[15] J. F. Henriques, Circulant Structures In Computer Vision. Department of Electrical and Computer Engineering Faculty of Science and Technology University of Coimbra: July/2015.