UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

CICERO WILTON SANTANA FILGUEIRAS

A IMPORTÂNCIA DOS CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POUCO COBRADOS NO ENEM

JUAZEIRO DO NORTE
2019

CICERO WILTON SANTANA FILGUEIRAS

A IMPORTÂNCIA DOS CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POUCO COBRADOS NO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. VALDINÊS LEITE DE SOUSA JÚNIOR.

JUAZEIRO DO NORTE
2019

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A Importância dos Conteúdos de Matemática Pouco Cobrados no ENEM

CICERO WILTON SANTANA FILGUEIRAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 19 de julho de 2019.

Banca Examinadora

Valdinês Leite de Sousa Júnior

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
Orientador

Leandro da Silva Tavares

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares

UFCA

Prof. Dr. Steve da Silva Vicentim

UFCA

Dedico esse trabalho aos meus pais, que sempre lutaram para me dar a melhor educação possível, com muito trabalho e muita fé.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me possibilitado estar em um curso como esse e pelas muitas que ele me iluminou em momentos de dificuldade.

Aos meus pais, que durante toda minha juventude, trabalharam duro para sempre me manter em boas escolas, o que me permitiu chegar onde cheguei.

A minha esposa Celia, que sempre se mostrou próxima e preocupada com o meu andamento no curso, onde em muitas situações cuidou dos meninos sozinha pra eu ficar estudando.

A minha grande amiga Morgana Delfino que foi uma das maiores incentivadoras para que eu ingressasse neste curso, por sempre pegar no meu pé, quando eu queria desistir de tentar.

Aos meus ex alunos: Tâmara, Wesley, Hanna e Glícia que nos anos 2016 e 2017, que foram grandes motivadores dos estudos para o acesso e nas primeiras disciplinas do curso.

Ao meu orientador, Valdinês Leite de Sousa Júnior, por ser essa pessoa tão solícita e de grande coração que me ajudou bastante na construção desse trabalho.

A todos os colegas de curso, que tiveram boa vontade e paciência de ajudar em momentos difíceis, em especial à João Paulo, Aline, Paulo Henrique e Gilson, por várias horas de estudos que tivemos em diversas tardes e noites, inclusive em sábados, domingos e feriados.

A toda equipe de professores da UFCA que compõe o PROFMAT.

Ao grande professor Mário de Assis Oliveira por ter sido um grande facilitador da Matemática na minha vida, principalmente na época do concurso do Estado em 2009.

"Sem passado, nem futuro,
eu vivo um dia de cada vez."
(Engenheiros do Hawai)

RESUMO

Desde que a prova do ENEM tornou-se o principal acesso às Universidades Federais do Brasil, o ensino da Matemática ganhou novos contornos na sua abordagem. Ao longo das dez edições que fizeram deste exame a principal forma de ingresso em universidades e programas de financiamento estudantis promovidos pelo governo federal, vimos que alguns conteúdos têm um forte apelo e predominância nesse formato de avaliação, devido à sua maior capacidade de contextualização com outras áreas, o que não significa ser necessariamente uma aplicação da Matemática nessa área. Devido a esse fato, conteúdos que outrora tiveram bastante peso nas antigas provas de Matemática dos vestibulares tradicionais perderam espaço com o surgimento deste exame. Neste trabalho, fizemos um levantamento de todos os conteúdos cobrados na prova do ENEM e em cima de tais resultados mostraremos a importância dos conteúdos menos cobrados (ou até não cobrados) nesta prova, citando sua relevância em diversas áreas da ciência e sua importância no desenvolvimento da sociedade. Além disso, apresentaremos algumas aplicações desses conteúdos em vestibulares, deixando claro para estudantes e professores do Ensino Médio que a relevância da Matemática não se dá meramente à incidência de conteúdos na prova do ENEM. Esperamos que este trabalho inspire professores e alunos de Ensino Médio, a enxergarem a Matemática sob uma nova ótica, de tal forma que eles vejam que a beleza desta disciplina está além das propriedades de seus conteúdos mostradas em sala de aula.

Palavras-chave: ENEM, Conjuntos, Números complexos, Matrizes, Logaritmos.

ABSTRACT

Since the ENEM test became the main access to the Federal Universities of Brazil, the teaching of Mathematics gained new contours in its approach. Throughout the ten editions that have made this exam the main form of entrance into universities and student financing programs promoted by the federal government, we have seen that some contents have a strong appeal and predominance in this format of evaluation, due to its greater capacity of contextualization with other areas , which does not necessarily mean an application of Mathematics in this area. Due to this fact, other contentes that were once widely explored in the old Mathematics tests of the traditional vestibular are no longer relevant with the appearance of this exam. In this paper, we made a survey of all the contents charged in the ENEM test and based on these results we will show the importance of the contents less charged (or not charged) in this test, citing their relevance in several areas of science and its importance in the development of society . In addition, we will present some applications of these contents in vestibular, with the purpose of clarifying to students and teachers of high school that the relevance of mathematics is not merely the incidence of content in the ENEM test. We hope this work inspires teachers and high school students to look at Mathematics from a new perspective so that they see that the beauty of this subject is beyond the properties of their classroom content.

Keywords: ENEM, Sets, Complex numbers, Matrices, Logarithms.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) é a principal forma de ingresso nas Instituições de Ensino Superior do país. Devido a isso, muitas escolas direcionam o seu conteúdo programático de acordo com os conteúdos mais cobrados do ENEM. Consequentemente, os conteúdos menos cobrados são muitas vezes menosprezados e tendo sua relevância diminuída. Essa situação dificulta o trabalho do professor em destacar tais conteúdos, pois sem uma justificativa direta, fica difícil despertar o interesse dos alunos em aprender algo que não irá lhes proporcionar um benefício imediato.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar a importância dos conteúdos de Matemática que estão sendo pouco cobrados no ENEM, apresentando aplicações que impactam diretamente o nosso dia a dia em diversas áreas de conhecimento. Com isso, espera-se motivar os professores a abordarem tais conteúdos aos alunos destacando aplicações dos mesmos na sociedade, fazendo-os perceber que tais assuntos não estão tão distantes assim da nossa realidade.

Analisando as dez últimas edições do ENEM (desde que se tornou o principal processo seletivo do país), percebe-se que conteúdos como Conjuntos, Números Complexos, Matrizes e Logaritmos, pouco ou quase não aparecem nas questões do exame. Esse fato chama atenção pois áreas de conhecimento tais como a Engenharia Elétrica, a Matemática Financeira, e a Computação são influenciadas diretamente ou têm suas bases teóricas fundamentadas nesses conteúdos. Diante disso, fica a questão: Por que conteúdos que influenciam diretamente nossa sociedade, possuem diversas aplicações, estão sumindo do principal exame de acesso às universidades do país? O fato é que eles são importantes e é isso que destacaremos aqui.

Este trabalho está dividido como segue: no Capítulo 2 apresentaremos um breve histórico da origem do ENEM, destacando sua importância nos seus primeiros anos, e de como o Governo Federal se valia de seus resultados. Em seguida, mostramos quais conteúdos de Matemática foram mais e menos abordados desde que o ENEM passou a valer como exame de acesso das principais universidades federais do país. Nos Capítulos 3, 4, 5 e 6 destacaremos quatro conteúdos "esquecidos" pelo ENEM; são eles: Conjuntos, Números Complexos, Matrizes e Logaritmos. Para cada conteúdo apresentaremos definições e um breve histórico, destacando suas propriedades básicas e, principalmente, a importância desses temas em diversas áreas de conhecimento. Além disso, apresentaremos algumas questões de vestibulares que ainda abordam tais conteúdos em suas provas. Considerações finais serão feitas no Capítulo 7.

2 A MATEMÁTICA NO ENEM

Neste capítulo, apresentaremos um resumo do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), fazendo um breve histórico sobre sua implantação nas universidades. Além disso, faremos um estudo detalhado sobre a prova de Matemática deste exame em todas as suas edições válidas como prova de acesso nas universidades federais, estabelecendo um levantamento dos conteúdos mais abordados e menos abordados ao longo dos anos.

2.1 Sobre o ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio foi criado pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC) em 1998, visando avaliar o nível de conhecimento sobre os conteúdos estudados durante a vida escolar; principalmente conteúdos dos últimos anos do ensino fundamental e também de todo o Ensino Médio. Os resultados desse exame serviam de parâmetro para o governo estabelecer políticas educacionais.

A partir de 2009, o ENEM passou a ser uma avaliação que seleciona alunos de todo o país para o ingresso em instituições de ensino superior, substituindo assim os vestibulares tradicionais que cada universidade federal realizava anual ou semestralmente. A nota do ENEM também se tornou o principal parâmetro para selecionar alunos à programas do Governo Federal como o SISU (Sistema de Seleção Unificada), PROUNI (Programa Universidade Para Todos) e FIES (Fundo de Financiamento Estudantil do Ensino Superior). Como podemos verificar em [5], as instituições de ensino superior têm toda autonomia de escolher como vão utilizar a nota do ENEM em seu processo seletivo. Porém, verificamos que a maioria das universidades federais aderiram SISU como única forma de ingresso ao ensino superior (ou seja, ter o ENEM como única forma de acesso), outras de forma parcial, onde a nota do ENEM é um dos critérios no processo de ingresso na universidade. A partir de 2014, o ENEM passou também a valer como ingresso em algumas universidades em Portugal como podemos verificar em [2].

2.2 A Matemática na prova do ENEM

A prova do ENEM, é distribuída em quatro áreas de conhecimentos, onde cada área abrange algumas disciplinas que são estudadas ao longo do ensino médio. Cada área de conhecimento possui 45 questões, perfazendo um total de 180 questões aplicadas em dois dias, onde em cada dia abrange duas áreas de conhecimento.

A Matemática é a única área de conhecimento que possui apenas uma disciplina em sua prova, dando um "peso" significativo na nota final do processo. A prova de

Matemática é aplicada junto a outra área de conhecimento totalizando 90 questões com duração máxima de 05 horas, desse modo, temos uma média de pouco mais de três minutos para cada questão. A prova de Matemática representa 25% de toda nota do ENEM.

Na tabela a seguir, apresentaremos a quantidade de questões cobradas por conteúdo em cada ano desde que a prova do ENEM passou a ser critério de seleção para as universidades ou seja, a partir de 2009 até a sua última edição em 2018.

Tabela 2.1: Quantidade de questões por conteúdo na prova de Matemática do ENEM no período 2009-2018

Conteúdo	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Razões/Prop.	11	10	14	11	11	12	2	9	11	12
Aritmética	5	1	1	3	2	5	8	2	3	5
Funções	2	4	5	5	3	1	2	4	1	2
Progressões	0	2	1	1	2	0	1	1	0	1
Geom. Plana	4	4	3	5	6	4	7	3	4	3
Geom. Espacial	5	10	3	4	3	7	5	5	5	2
Geom. Analítica	0	1	1	0	2	1	2	3	3	4
Trigonometria	2	2	1	0	1	0	1	0	3	3
Combinatória	1	1	1	2	3	1	1	3	3	1
Estatística	4	4	2	3	3	4	2	7	3	4
Probabilidade	4	2	4	3	3	1	3	1	3	3
Exp./Log.	1	0	1	1	1	0	1	2	1	1
Eq. e sistemas	2	2	0	0	1	1	0	0	0	2
Gráficos/Tabelas	1	2	3	3	2	6	6	4	3	0
Matriz/Det.	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Análise de figuras	2	0	1	0	1	0	0	0	1	0
U. de medidas	1	0	2	1	1	1	2	0	0	0
Conjuntos	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Mat. Financeira	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
Sist. de Num.	0	0	1	2	0	1	0	1	0	0
N.Complexos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45

Fonte: Autor

Através da Tabela 2.1, identificamos que alguns conteúdos tiveram uma maior incidência ao longo dos anos, como por exemplo: Razões e Proporções, Geometria Espacial e Plana e Aritmética. Esses três conteúdos somados abrangem $51,08\%$ de todas as questões cobradas ao longo de todas as provas do EMEM no período mencionado na tabela. Em contrapartida, percebe-se tais ou nenhuma incidência de conteúdos clássicos da base curricular do Ensino Médio como: Logaritmos, Matrizes, Noções de Conjunto e Números Complexos. A próxima tabela, destaca a distribuição percentual de conteúdos ao longo desses dez anos, dando-nos o do total de questões e a porcentagem de incidência por conteúdos cobrados no período 2009–2018.

Tabela 2.2: Total de questões por conteúdo em porcentagem

Conteúdo	Total	Porcentagem(%)
Razões e Proporções	103	22,88
Aritmética	35	7,77
Funções Polinomiais	29	6,44
Sequências e Progressões	9	2
Geometria Plana	43	9,55
Geometria Espacial	49	10,88
Geometria Analítica	17	3,77
Trigonometria	13	2,88
Análise Combinatória	17	3,77
Estatística	36	8
Probabilidade	27	6
Exponencial e Logaritmo	9	2
Equações e sistemas	8	1,77
Gráficos e Tabelas	30	6,66
Matriz e Determinante	2	0,44
Análise de figuras	5	1,11
Unidades de medidas	8	1,77
Conjuntos	2	0,44
Matemática Financeira	3	0,66
Sistema de numeração	5	1,11
Números Complexos	0	0
Total de Questões	450	100

Fonte: Autor

Desse modo, fica mais fácil verificar o que foi afirmado anteriormente sobre a incidência de conteúdos nas provas do ENEM no período citado. Note a forte incidência do conteúdo *Razões e Proporções*, visto nas séries finais do Ensino Fundamental onde foi englobado: regra de três, escalas e porcentagem. Devido a isso, professores de Matemática veem dando grande importância a esses temas na composição do seu plano anual de curso. Todavia, a pouca frequência de conteúdos como conjuntos, logaritmos, números complexos e matrizes desperta pouca ou nenhuma curiosidade dos alunos do Ensino Médio em estudar esses conteúdos, o que torna um grande desafio para os professores mostrar sua importância.

3 CONJUNTOS

3.1 Noções iniciais

Conjunto, elemento e pertinência entre elemento e conjunto, são alguns dos conceitos primitivos fundamentais para o entendimento e compreensão da Teoria de Conjuntos. O conceito matemático de conjunto é a mesma de agrupamento ou coleção. Convenciona-se dar nomes aos conjuntos por letras maiúsculas e aos seus elementos por letras minúsculas. Dado um conjunto A e um elemento a, dizemos que a pertence ao conjunto A (denotamos $a \in A$) quando a é um elemento do conjunto A; a não pertence ao conjunto A (denotado por $a \notin A$) se a não é um elemento de A.

Basicamente há três formas principais para se representar um conjunto: representação tabular, pelo diagrama de Venn e por uma propriedade que define os elementos do conjunto. Na representação tabular, escrevemos os elementos do conjunto entre chaves, por exemplo, o conjunto dos números naturais pode ser expresso como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. O diagrama de Venn (John Venn, 1834–1923), é usado quando os elementos são internos de uma região plana delimitada por uma linha fechada. Veja a figura a seguir.

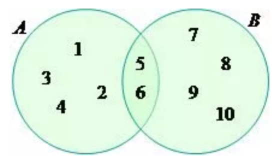


Figura 1: Diagramas de Venn

Podemos perceber pela Figura 1 que o conjunto A é formado pelos elementos 1, 2, 3, 4, 5, 6, que o conjunto B é formado pelos elementos 5, 6, 7, 8, 9, 10. Pelo diagrama, é fácil perceber que os elementos 5 e 6 são comuns aos dois conjuntos.

Por fim, uma propriedade pode definir um conjuntos quando todos os elementos do conjunto possuem uma propriedade comum a todos. Por exemplo, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é um número natural entre 1 e 100}\}$ é definido por uma propriedade comum aos números $2, 3, \ldots, 99$. Note que esse conjunto também pode ser definido na forma $A = \{2, 3, \ldots, 99\}$.

Existem três conceitos ou exemplos específicos de conjuntos com relação a sua estrutura: o conceito de *unitário*, *vazio* e *universo*. O conjunto é dito *unitário* se possuir apenas um elemento; *vazio* (denotado por $\emptyset$ ou $\{\ \}$) se não possui nenhum elemento; *universo* quando abrange todos os elementos relacionados a um determinado campo de estudo.

Para definir relações entre conjuntos, precisamos da noção de implicância ($\Rightarrow$) e equivalência ($\Leftrightarrow$). Dizemos que uma proposição é sentença declarativa, seja ela expressa de forma afirmativa ou negativa, na qual podemos atribuir um valor lógico "V" (verdadeiro) ou "F" (falso). Uma proposição p implica uma proposição q quando a veracidade de p garante a veracidade de q. Notação $p \Rightarrow q$. Uma proposição p é equivalente a uma proposição q quando ocorrem as duas implicações $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ ao mesmo tempo. Essa equivalência é representada por $p \Leftrightarrow q$.

Definição 1 (Subconjuntos) *Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se dado x um elemento qualquer de A, então x é um elemento de B.*

Usa-se o símbolo $\subset$, denominado sinal de inclusão, para indicar que "A está contido em B", que quer dizer que A é subconjunto de B. Em símbolos:

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Para dizer que um conjunto A não é subconjunto de um conjunto B, usamos a notação $A \not\subset B$, (lê-se: A não está contido em B).

Definição 2 (Conjuntos iguais) *Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento do conjunto A, pertence ao conjunto B e, da mesma forma, todo elemento do conjunto B pertence ao conjunto A.*

Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$, dessa forma podemos representar também a igualdade entre dois conjuntos por:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A).$$

Existem inúmeras propriedades fundamentais na Teoria de Conjuntos que facilitam o entendimento de certos problemas encontrados diariamente. Por exemplo, uma das propriedades mais básicas é a seguinte: se A, B e C são três conjuntos quaisquer, então

$$(A \subset B \text{ e } B \subset C) \Rightarrow A \subset C.$$

Tal propriedade pode ser usada para o entendimento de uma ideia lógica chamada *Silogismo*, veja [18]. Silogismo é uma argumentação lógica formada por três proposições que se relacionam de tal forma que das duas primeiras, chamadas premissas, é possível deduzir a terceira dita conclusão. Aqui a utilização da Teoria de Conjuntos se dá na adaptação dos diagramas de Venn para uma compreensão visual do silogismo, e dessa forma torná-lo mais simples de se entender. Por exemplo:

" Todos os aracnídeos são artrópodes, e todos os escorpiões são aracnídeos. Logo, todos os escorpiões são artrópodes."

Vamos dividir esse silogismo em três conjuntos, (A) dos aracnídeos; (T) dos artrópode e (E) dos escorpiões. Utilizando os diagramas de Venn e a definição de subconjuntos, vamos analisar se o silogismo é verdadeiro ou falso. Quando é dito que " Todos os aracnídeos são artrópodes", concluímos que o conjunto formado por todos os aracnídeos é subconjunto do conjunto dos artrópodes. Logo em linguagem matemática, $A \subset T$. O diagrama de Venn dessa inclusão está representado abaixo.

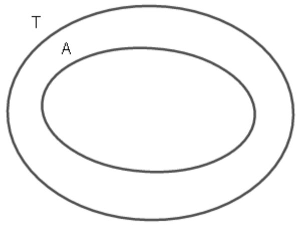


Figura 2: Diagrama $A \subset T$

Quando é dito que "Todos os escorpiões são aracnídeos", podemos afirmar que o conjunto dos escorpiões é um subconjunto do conjunto dos aracnídeos. Em linguagem matemática temos, $E \subset A$. Veja o diagrama de Venn abaixo.

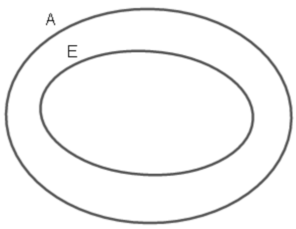


Figura 3: Diagrama $E \subset A$.

Dessa forma, é fácil ver que, $E \subset A \subset T$. Temos então:

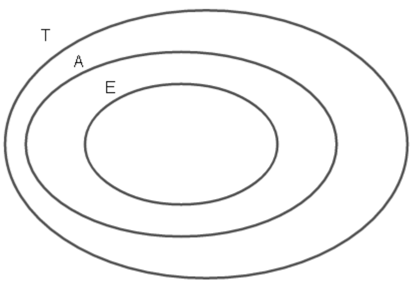


Figura 4: Diagrama $E \subset A \subset T$

Com a utilização dos diagramas de Venn verificamos que o silogismo é verdadeiro, e mais ainda, pelos diagramas podemos visualizar essa situação.

3.2 União e intersecção de conjuntos

Dois conceitos são de certa forma uma base na Teoria dos Conjuntos: *união* e *interseção*. Tais definições trazem ideias novas e ajudam a compreender problemas diversos existentes na Matemática. A seguir, apresentaremos as definições formais de união e intersecção de conjuntos.

Definição 3 (União de Conjuntos) *Dados dois conjuntos A e B, a união dos conjuntos A e B (denotado por $A \cup B$) é o conjunto formados pelos elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B. Assim,*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Na Figura abaixo, a região hachurada representa a união dos conjuntos A e B.

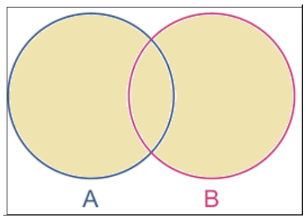


Figura 5: União de Conjuntos.

Definição 4 (Interseção de Conjuntos) *Dados dois conjuntos A e B, a interseção dos conjuntos A e B (denotado por $A \cap B$) é o conjunto formado pelos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B. Assim,*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Na figura abaixo, a região hachurada é a interseção dos conjuntos A e B.

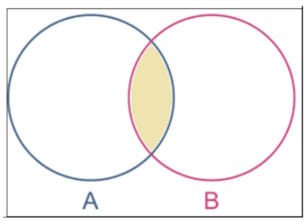


Figura 6: Interseção de conjuntos.

O conceito de união e intersecção de conjuntos tem várias aplicações na Matemática. Podemos por exemplo utilizar esse conceito em um levantamento estatístico sobre uma pesquisa de opinião pública.

Vejamos uma situação hipotética: Em um grupo de 500 alunos de uma escola, 120 jogam basquete, 260 jogam futebol e 30 jogam basquete e futebol. Se um aluno desse grupo for escolhido ao acaso, qual a probabilidade desse aluno jogar basquete ou futebol e qual a probabilidade desse aluno não jogar nem basquete e nem futebol? Esse tipo de problema pode ser expresso com linguagem de conjuntos, facilitando o entendimento. Chamaremos o conjunto formado pelos alunos que jogam basquete de B, e o conjunto formado pelos alunos que jogam futebol de F. Daí temos as seguintes quantidades de elementos por conjunto: B possui 120 elementos, F possui 260 e $B \cap F$ possui 30. Usando os diagramas de Venn, temos,

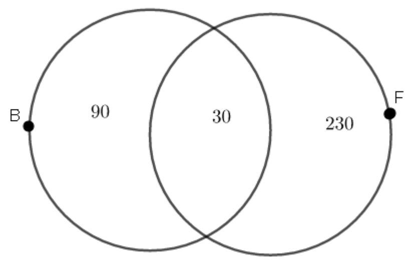


Figura 7: Diagrama dos conjuntos B e F

Observando o diagrama, é fácil perceber que o número de alunos que não jogam nem basquete e nem futebol é $500 - 90 - 30 - 230 = 150$ alunos. Portanto, 350 alunos jogam basquete ou futebol (união dos dois conjuntos B e F). Assim, respondendo as perguntas do problema temos: 350 alunos jogam basquete ou futebol de um total de 500 alunos, o que nos dá $0,7$ ou 70% do total de alunos; de forma complementar 150 alunos não jogam nem basquete e nem futebol de um total de 500 alunos, o que nos dá $0,3$ ou 30% do total de alunos.

Assim percebemos a importância do conhecimento sobre Teoria de Conjuntos para compreender tais problemas.

3.3 Questões de vestibulares

Nesta seção, apresentaremos questões de vestibulares tradicionais ver [21] espalhados pelo Brasil, para destacar a importância desse conteúdo para a aquisição de vagas em universidades que não usam o ENEM como prova de acesso.

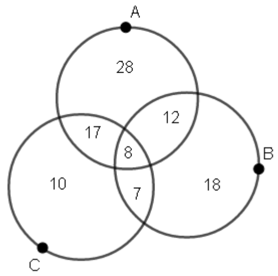
1. (Mackenzie–2018). Em uma pesquisa com 120 pessoas, verificou-se que 65 assistem ao noticiário A, 45 assistem ao noticiário B, 42 assistem ao noticiário C, 20 assistem

ao noticiário A e ao noticiário B, 25 assistem ao noticiário A e ao noticiário C, 15 assistem ao noticiário B e ao noticiário C e 8 assistem aos três noticiários.

Então o número de pessoas que assistem somente a um noticiário é

(a) 7 (b) 8 (c) 14 (d) 28 (e) 56

Solução: Inicialmente, organizaremos a informações dos conjuntos A, B e C em diagramas de Venn, como mostra a figura abaixo:



Daí, pode-se verificar que o número de pessoas que assistem apenas um dos noticiários é $28 + 10 + 18 = 56$.

2. (Unicamp–2017). Sabe-se que, em um grupo de 10 pessoas, o livro A foi lido por 5 pessoas e o livro B foi lido por 4 pessoas. Podemos afirmar corretamente, que nesse grupo,

a) pelo menos uma pessoa leu os dois livros.

b) nenhuma pessoa leu os dois livros.

c) pelo menos uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

d) todas as pessoas leram pelo menos um dos dois livros.

Solução: Para solucionar essa questão, vamos supor que dessas dez pessoas, cinco delas leram o livro A e outras quatro pessoas distintas leram o livro B, o que dá um total de nove pessoas que leram algum livro. Dessa forma, tem-se que uma pessoa não leu nenhum dos dois livros.

3. (URCA–2018.1). Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Assinale a alternativa CORRETA.

a) $(A \cup B) \cap (C) = A \cup (B \cap C)$;

b) Se $A \subset B$ e $C \subset B$, então $A \subset C$;

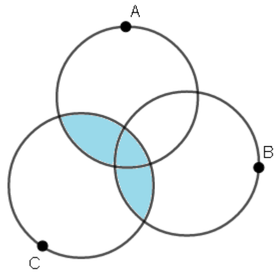
c) Se $A \cap B = \emptyset$ e $B \subset C$, então $A \cap C = \emptyset$;

d) Se $A \cap B = \emptyset$ e $C \subset B$, então $A \cap C = \emptyset$;

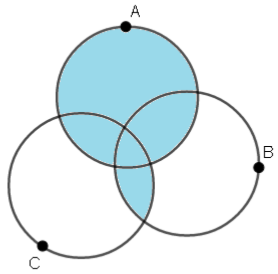
e) Se $C \subset (A \cup B)$, então $C \subset A$ e $C \subset B$.

Solução: A partir das afirmações acima, vamos justificar as alternativas, para identificar se ocorre algum erro de emprego das propriedades de conjuntos.

I) Vamos representar a afirmação da alternativa a) através dos diagramas de Venn. Assim, $(A \cup B) \cap (C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$ está representado na figura a seguir:



E a sentença $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ é representda pela figura abaixo



Logo, $(A \cup B) \cap (C) \neq A \cup (B \cap C)$. Sendo assim, a alternativa a) é falsa.

II) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Perceba que, $A \subset B$ e $C \subset B$, porém $A \not\subset C$. Logo, a afirmativa do item b) é falsa.

III) Para mostrar que o item c) está incorreto, vamos usar um contra exemplo. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, note que $A \cap B = \emptyset$ e $B \subset C$, mas $A \cap C \notin \emptyset$.

IV) Na letra e) quando diz que se $C \subset (A \cup B)$ então $C \subset A$ e $C \subset B$ o erro está no emprego do conectivo "e". Pois pela definição de união de conjuntos, se $C \subset (A \cup B)$ então $C \subset A$ ou $C \subset B$.

Podemos concluir por exclusão que a alternativa d) é a correta.

4 NÚMEROS COMPLEXOS

4.1 Histórico

Um jovem estudante que se depara com a expressão $i^2 = -1$ pela primeira vez na vida, sem qualquer aviso prévio, certamente chegará à conclusão de que existe algo de errado acontecendo. "Um número elevado ao quadrado igual a um negativo?" Esse sentimento de dúvida e descrença é frequente a quem estuda pela primeira vez esse conjunto de números, pois até a terceira série do ensino médio, só se conhecia os números reais e era comum os próprios professore até esse ponto afirmar que não existiam raízes de números negativos.

Por ter como uma das principais propriedades o fato onde raízes de números negativos fazem sentido, os números complexos parecem sempre distante da realidade em que vivemos. A maneira como sempre são ensinados nas escolas, geralmente provoca um sentimento de que tais números não têm aplicação prática. Mas na realidade, os números complexos têm um grande papel no desenvolvimento de diversas áreas de estudo. Por exemplo, ao longo dos anos, diversos fatores contribuíram para que a energia elétrica se tornasse uma das formas de energia mais utilizadas. O desenvolvimento da sociedade como um todo, deu-se em grande parte pelo domínio da capacidade de distribuir energia elétrica adequadamente. O que pouca gente sabe é que os números conhecidos na Matemática como complexos têm um papel fundamental no desenvolvimento de tecnologias de transporte de energia. Mas voltaremos a esse tema mais adiante.

Historicamente, os números complexos não tiveram vida fácil no seu processo de aceitação. De acordo com [20], durante séculos os matemáticos travaram uma relação de amor e ódio pelos números imaginários (que em 1831 Gauss os batizou de números complexos), pois muitos viam com estranheza o fato de se elevar um número ao quadrado e o resultado ser negativo. As primeiras aparições desses números foi na obra prima de Girolamo Cardano intitulado *Ars Magna* ("A Grande Arte") de 1545 onde ele descobriu um novo tipo de número e classificou "tão sútil como inútil" e logo desconsiderou a ideia. Porém, neste livro encontraremos métodos para resolver equações de terceiro e quarto graus. Mesmo Cardano não dando muita importância a esse "novo número" descoberto por ele, sua aparição despertou o interesse imediato de Rafael Bombelli que em 1572 publicou *L'Algebra* onde seu principal objetivo era tornar clara as ideias de Cardado sobre a nova descoberta.

Os resultados de Bombelli foram encarados com desconfiança pelos matemáticos da época, que devido a influência helenística que predominava na Matemática, onde sobressaíam os trabalhos de Euclides e Arquimedes que desenvolveram a Geometria, não se via com bons olhos resultados que não apresentassem significados geométricos. Podemos citar Newton e Descartes como opositores dos números "imaginários", como passaram a ser chamados. Eles não aceitavam o fato de algum número cujo quadrado fosse menos um, para eles isso só poderia ser um número imaginário e logo não seria solução. Por outro lado, conforme [20] podemos citar Leibniz que de modo visionário escreveu em 1702:

> "O espirito Divino encontrou uma sublime manifestação naquela maravilha de análise, naquele prodígio do mundo ideal, naquele anfíbio entre ser e não ser, que chamamos de raiz imaginária de uma unidade negativa".

Contudo, só depois de pouco mais de dois séculos do seu surgimento, os números complexos alcançaram o seu reconhecimento pelos matemáticos. Esse fato foi devido a representações geométricas publicadas por três matemáticos em curto intervalo de tempo: Caspar Wessel em 1797, Jean-Robert Argand, em 1806 e Carl Friedrich Gauss, em 1811. Os números imaginários passaram a ser aceitos pelos matemáticos e como já se conhecia a sua praticidade de simplificar cálculos, passaram a ser indispensáveis para a Matemática e para a ciência de modo geral.

Os matemáticos do século XIX descobriram que os números complexos e suas propriedades podiam resolver equações diferenciais na Física e na Matemática, podiam fazer aplicações na eletricidade estática, magnetismo e mecânica dos fluidos. A partir daí os números complexos passaram a ser um dos principais instrumentos de todo cientista na composição de suas pesquisas e na divulgação de seus resultados. Podemos citar por exemplo, que na segunda metade do século XX, esses números estavam tão diretamente relacionados com mecânica quântica que se via como impossível a evolução dessa área sem eles.

Com o domínio dos números complexos e suas propriedades, podia-se provar padrões desconhecidos nas leis físicas, analisar ondas, resolver equações diferenciais, e transformar formas em outras formas usando equações complexas. De modo que diante da indiscutível importância da aplicação desses números, é que atualmente todo curso de engenharia ensina entre suas especialidades, a usar a análise complexa para resolver problemas práticos.

Formalmente, define-se o conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, como sendo o conjunto formado por todos os pares ordenados $z = (a, b)$ (veja a Figura 8), onde a e b são números reais, e as operações de adição e multiplicação de números complexos são definidas por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{4.1}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \tag{4.2}$$

Pode-se escrever qualquer número real a como o número complexo $(a, 0)$, dessa forma, podemos considerar o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como um subconjunto de $\mathbb{C}$. Além

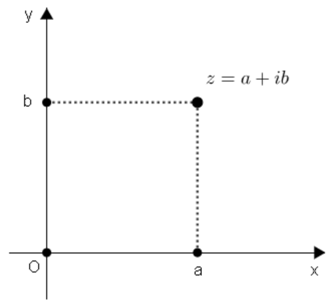


Figura 8: Representação geométrica de um número complexo.

disso, se definirmos $i = (0, 1)$, tem-se $(a, b) = a + ib$. Esta é a forma mais usual de escrever um número complexo, conhecida como *forma algébrica* de um número complexo. Utilizando a definição de produto de números complexos, é fácil ver que $i^2 = -1$, uma das identidades mais conhecidas e emblemáticas do conjunto dos números complexos.

A forma algébrica dos números complexos nos permite ver as identidades (4.1) e (4.2) da seguinte forma:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{4.3}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad) \tag{4.4}$$

Escrevendo-se $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, os números a e b são conhecidos como *parte real* e *parte imaginária*, respectivamente, do número complexo z, denotados por $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$.

Encontraremos outras importantes definições, teoremas e suas demonstrações em [9].

4.2 Aplicações

Como destacamos inicialmente, os números complexos têm um grande papel no desenvolvimento de diversas áreas de estudo. Tais áreas têm papel fundamental no desenvolvimento de tecnologias que foram e são fundamentais para o desevolvimento da sociedade atual. Dentre elas podemos citar:

4.2.1 Engenharia elétrica

Números complexos são muito usados em engenharia elétrica. Para nos ajudar a ter uma ideia clara de como eles são utilizados e o que eles significam, podemos olhar para um exemplo mecânico, como a distribuição de energia elétrica nas residências. Encontrar uma maneira segura e eficaz de transportar energia elétrica sempre foi um grande desafio. Todo aparelho eletrônico existente está sujeito à uma quantidade limitada de energia que pode receber da rede elétrica. O que está por trás de tudo isso são as chamadas *correntes alternadas*, que são fontes de energia elétrica em que tensão e a corrente mudam com o tempo. Mais de 99% da energia usada diariamente é produzida por geradores elétricos na forma de corrente alternada. Tais correntes garantem a eficácia na transmissão da energia para o uso diário. Mas o que isso tem a ver com números complexos? Para calcular a intensidade adequada dessas correntes elétricas, faz-se uso da equação diferencial

$$R \cdot i(t) + L\frac{\partial i(t)}{\partial t} = \sqrt{2} \cdot V_m \operatorname{sen}(\omega t).$$

Com a utilização de números complexos, podemos reescrever a expressão acima como a seguinte equação algébrica: $I = V/R{+}j\omega L$, onde V e I são números complexos que representam; tensão e corrente elétrica respectivamente, L é a impedância que dificulta a mudança de corrente, R resistência elétrica inicial, ω é frequência angular e j é a unidade imaginária.

Para diferenciar i da corrente elétrica utilizada na física e na engenharia do i da unidade imaginária dos números complexos como se usa na Matemática, é adotado na engenharia o número j como unidade imaginária para os números complexos.

Podemos concluir que com a utilização dos números complexos, é possível determinar a corrente elétrica de um circuito de uma maneira mais fácil, deixando os cálculos mais factíveis. São essas correntes que são usadas nas instalações residenciais. O processo de como as equações diferenciais são convertidas em equações algébricas para o cálculo da corrente elétrica alternada, e outras aplicações da engenharia elétrica, podemos encontrar nas referências [17] e [6].

4.2.2 Engenharia de controle e automação

Esse ramo da Engenharia objetiva a automatização de processos industriais. Grandes indústrias vêm buscando automatizar seus sistemas para diminuir ou substituir a mão de obra humana em situações de estresse mental e esforço físico. Isso pode ser visto facilmente na indústria automobilística, na indústria agrícola e sistemas de distribuição de água.

Por exemplo, de acordo com [4], vamos mostrar um sistema de controle da quantidade de água que entra em um reservatório ou tanque e da taxa de saída dessa água para outro tanque e desse para outro, e assim por diante de acordo com a quantidade de tanques que formam o sistema de armazenamento e distribuição de água. Para isso, existem válvulas instaladas nesses tanques que funcionam através de mecanismos elétricos, que controlam a entrada de água em um dado tanque e a saída dessa água para um outro, ligando e desligando automaticamente. Esse processo tem como consequência a diminuição do consumo de energia elétrica, pois automatizando o ato de ligar e desligar faz com que os picos de correntes diminuam. Desta forma, podemos verificar uma maior eficiência no sistema automatizado. A Figura 9, representa um modelo desse tipo de distribuição de água em um sistema de tanques interligados:

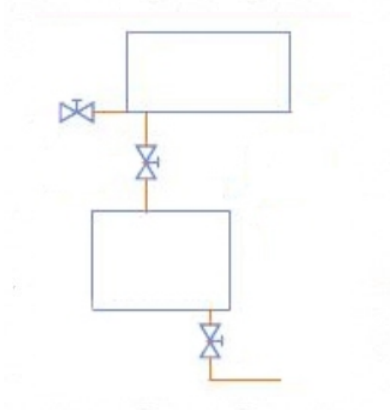


Figura 9: Modelo da entrada e saída de água de um tanque para outro

Fonte: sites.google.com/site/matematicacomplexa

Existe um modelo matemático que controla a quantidade de água nos tanques, abrindo ou fechando as válvulas através de estímulos elétricos que trabalha segundo esse modelo matemático, para assim manter o nível de água adequado nos tanques. O modelo matemático de funcionamento desse sistema tem como base as raízes complexas de uma função, que se comporta de acordo com os gráficos mostrados na figura a seguir:

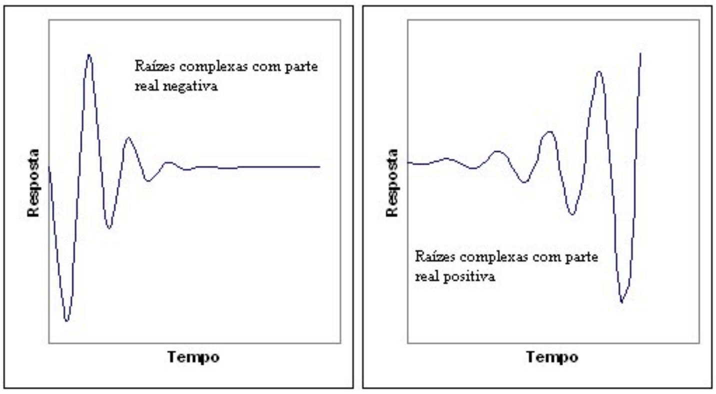


Figura 10: Modelo da entrada e saída de água de um tanque para outro

Fonte: sites.google.com/site/matematicacomplexa

Podemos entender pela Figura 10 que se a raiz complexa da função for tal que a parte real seja negativa, significa que com o passar do tempo a resposta da função vai se estabilizando, convergindo para um valor definido. E se a raiz complexa da função tiver a parte real positiva, então como podemos perceber, com o transcorrer do tempo a resposta da função oscila e diverge.

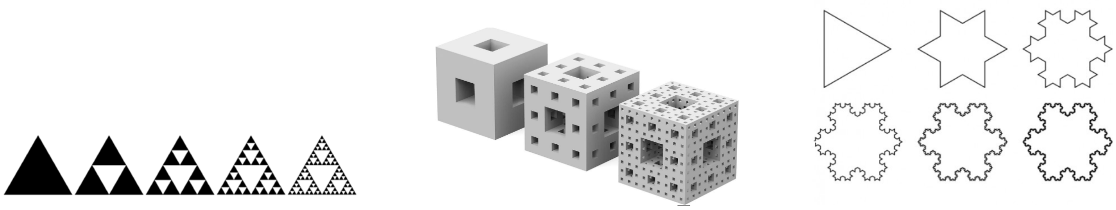
4.2.3 Geometria fractal

Os fractais são representações geométricas de uma figura que pode ser dividida em pequenos pedaços, sendo que cada um dos pedaços é uma miniatura da figura inteira. Nessas formas geométricas abstratas, usa-se números complexos na sua criação, com padrões que se repetem indefinidamente em escalas cada vez menores, mesmo em áreas restritas. O termo *fractal* surgiu em 1975 por Benoît Mandelbrot, matemático francês, que descobriu a Geometria Fractal e deu esse nome devido ao adjetivo latino "fractus", do verbo frangere, que significa quebrar. Foi diante da dificuldade de se calcular e definir certos fenômenos da natureza ou objetos que não possuem formas definidas, que surgiu a Geometria Fractal. De acordo com (MANDELBROT,1977, p.14)

> "As nuvens não são esferas, montanhas não são cones, as costas não são círculos e casca não é suave, nem relâmpago viaja em linha reta."

Conforme Mandelbrot, estas formas não podem ser explicadas pela Geometria Euclidiana, pois apresentam uma maior complexidade devido a possuírem infinitas variações. Veja a Figura 11.

Figura 11: Representação em Fractais.

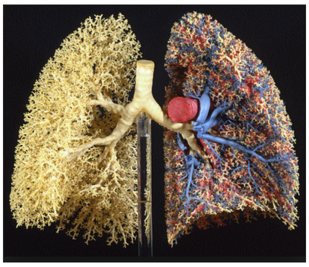


(a) Triângulo de Sierpinski (b) Esponja de Menger (c) Curvas de Kock

Fonte: (a)pt.wikipedia.org, (b) www.educ.fc.ul.pt e (c)http://curious-math.blogspot.com

Dentre os diversos tipos de fractais, podemos citar os fractais conhecidos como *Conjuntos de Julia*. Os Conjuntos de Julia foram criados pelos matemáticos Pierre Fatou e Gaston Julia em 1919. Esses conjuntos são obtidos por iterações no plano complexo, devido à curiosidade de se saber o que aconteceria com um número complexo z quando a este fosse submetida a iterações repetidas em uma função complexa. Por vários anos esse questionamento tinha uma resposta limitada, apenas com o surgimento de modernos computadores foi possível visualizar a beleza dos gráficos de tais funções. Os gráficos obtidos pelos Conjuntos de Julia são utilizados em várias áreas de estudos científicos

Figura 12: Fractais na natureza.



(a) Estrutura dos alvéolos pulmonares

(b) Bríssica oleracea-Couve

(c) Flocos de neve visto de um microscópio

Fonte: (a) lounge.obviousmag.org, (b) paisagismodigital.com e (c) roseflores.blogspot.com

como na Biologia, Botânica e Medicina. Podem-se também identificar e definir corpos sem uma forma geométrica conhecida (ver Figura 12)

Mais aplicações em outras ciências onde se faz uso da Geometria Fractal podem ser encontradas em [7] e [3].

4.3 Definições e propriedades

Nesta seção apresentaremos algumas definições e propriedades dos números complexos.

Definição 5 *Se* $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, *define-se*

a) o ***valor absoluto*** *(ou módulo) de* z*, como sendo o número real*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

b) o ***conjugado*** *de* z *por* $\overline{z} = a - ib$.

Note que $|z|^2 = z\overline{z}$, e em particular, se $z \neq 0$ tem-se $1/z = \overline{z}/|z|^2$. Geometricamente, $|z|$ mede a distância da origem a z e $\overline{z}$ representa o complexo simétrico ao complexo z em relação ao eixo x (como podemos ver Figura na 13).

As seguintes propriedades básicas de módulo e conjugado são de fácil verificação e são úteis em várias situações problema existentes. Se $z \in \mathbb{C}$, tem-se

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{e} \qquad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Além disso, se $z, w \in \mathbb{C}$,

i) $\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w}$,

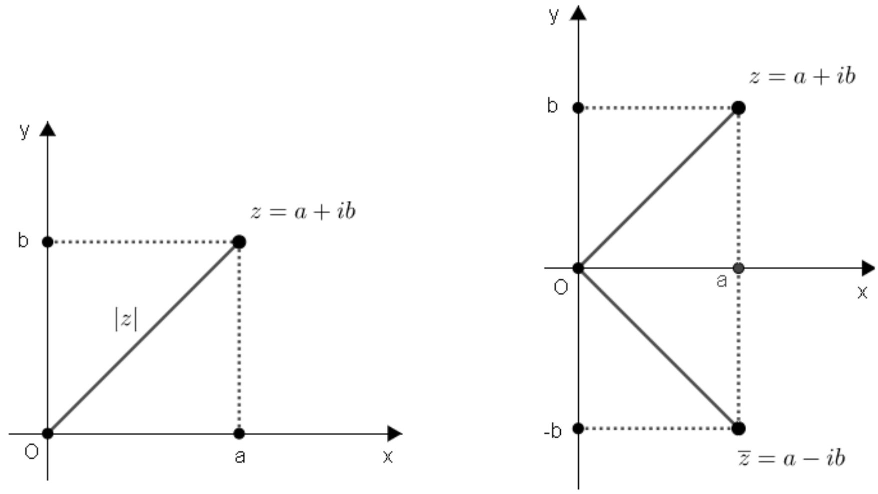


Figura 13: Módulo (à esquerda) e conjugado (à direita) de um número complexo

ii) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

iii) $|zw| = |z||w|$,

iv) $\overline{|z|} = |\overline{z}|$,

v) $|z/w| = |z|/|w|, \quad w \neq 0$.

A representação algébrica $z = a + ib$ de um número complexo z não é a única maneira de representá-lo. Em algumas situações é mais conveniente escrever um número complexo em sua *forma polar*. Uma vez que uma número complexo $z = a+ib$ pode ser representado como um ponto de coordenadas (a, b), este, por sua vez, pode ser determinado através de suas coordenadas polares (ρ, θ). Com efeito (ver Figura 14), se θ é o ângulo formado pelo eixo x e pelo segmento de reta de comprimento ρ, tem-se

$$a = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad b = \rho \operatorname{sen} \theta.$$

Assim, é sempre possível representar z na forma

$$z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \tag{4.5}$$

onde, $|z| = \rho$, uma vez que ρ mede a distância de z à origem.

O ângulo θ, é chamado de *argumento principal* de z e denotado por $arg(z) = \theta$. A representação do complexo z em (4.5) é chamada, entre outras variações, de *forma polar* ou *forma trigonométrica* de z. Tal representação mostra-se útil em diferentes situações, principalmente quando se deseja efeutar operações básicas com números complexos.

Se $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $w = \lambda(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ são as formas polares de dois

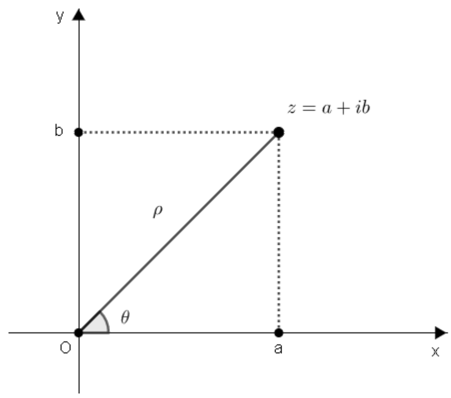


Figura 14: Argumento de z.

complexos não nulos z e w, pode-se verificar que

$$z \cdot w = \rho \cdot \lambda \cdot [\cos(\theta + \lambda) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \lambda)] \quad \text{e} \quad \frac{z}{w} = \frac{\rho}{\lambda}[\cos(\theta - \beta) + i\,\mathrm{sen}(\theta - \beta)] \quad \lambda \neq 0.$$

Com a multiplicação na forma polar podemos determinar uma expressão para potências de expoente inteiro n em que sua base é um número complexo diferente de zero. O autor dessa expressão foi o matemático e probabilista Abraham De Moivre (1667–1754), daí denominou-se por *Fórmula de De Moivre* a equação:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)].$$

Tal identidade simplifica o cálculo de potências de números complexos. Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1 *Para obter o valor de* $(1+i\sqrt{3})^{100}$, *basta escrevermos o complexo* $z = 1+i\sqrt{3}$ *em sua forma polar. Com efeito,* z *tem módulo* $\rho = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ *e argumento* $\theta = \pi/3$, *uma vez que* $\cos\theta = 1/2$ *e* $\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{3}/2$. *Assim, pela Fórmula de Moivre,*

$$(1 + i\sqrt{3})^{100} = 2^{100}\left(\cos\left(\frac{100\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{100\pi}{3}\right)\right).$$

Como,

$$\cos((100\pi)/3) = \cos(\pi/3 + 33\pi) = \cos(\pi/3 + \pi) = -\cos(\pi/3)$$

e

$$\mathrm{sen}((100\pi)/3) = \mathrm{sen}(\pi/3 + 33\pi) = \mathrm{sen}(\pi/3 + \pi) = \mathrm{sen}(\pi/3),$$

obtem-se,

$$(1 + i\sqrt{3})^{100} = 2^{100}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Portanto,

$$(1+i\sqrt{3})^{100} \quad = \quad 2^{100}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Além de facilitar o cálculo de potências, podemos usar a forma polar de um número complexo para calcular suas raízes n-ésimas. Chamamos de raiz enésima de z e denotamos por $\sqrt[n]{z}$ a um número complexo z_k de tal forma que $z_k^n = z$. Em representação matemática temos:

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff z_k^n = z.$$

Diante dessa equivalência, podemos nos perguntar: E quantas serão as raízes n-ésimas de um dado número complexo z? E como podemos determiná-las? A resposta para essa pergunta é a fórmula da extração das raízes n-ésimas de um número complexo, que alguns autores gostam de chamar de *Segunda Fórmula de Moivre* dada pela expressão:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),$$

onde, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $\rho = |z| > 0$ e $\theta = arg(z)$. Podemos concluir que todo número complexo não nulo possui n raízes enésimas distintas.

Exemplo 2 *Através da Segunda Fórmula de Moivre, determinaremos as raízes cúbicas de $z = -27i$. Nesse caso, temos que $\rho = |z| = 27$ e como $\cos\theta = 0$ e $\mathrm{sen}\,\theta = -1$, temos que $arg(z) = \theta = \dfrac{3\pi}{2}$. Logo, $\sqrt[3]{z} \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$. Daí, para $k = 0, 1, 2$ temos as seguintes raízes:*

$$z_0 = 3i, \quad z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}, \quad z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}.$$

Uma importante consequência da extração das raízes n-ésimas de um número complexo, é que a soma de todas essas raízes é zero. Dessa forma, seja a_n uma raiz n-ésima de z, então temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0.$$

Note que $\sqrt[n]{z}$ pode assumir n valores distintos porém todos com o mesmo módulo. Assim em representação geométrica, as raízes enésimas são pontos de uma circunferência, com centro na origem do plano de eixos coordenados e raio $\sqrt[n]{\rho}$, sendo $\sqrt[n]{\rho} = |z|$, formando assim polígonos de n lados com ângulo central igual a $2\pi/n$.

As demonstrações dessas fórmulas, bem como das operações citadas aqui neste capítulo podemos encontrar em [12].

4.4 Questões de vestibulares

Como falamos no início deste capítulo, mostraremos algumas questões de vestibulares que encontraremos em [21] como forma de aplicar as propriedades dos números complexos, mostrando a importância de se dominar tais regras com o intuito de conquistar uma das vagas ofertadas por essas universidades.

1. (PUC–SP.2018) Considere os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = -b + ai$ e $z_3 = -b + 3i$, com a e b números inteiros. Sabendo que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. O valor de $(z_2/z_1)^3$ é igual a

   (a) 1 (b) -1 (c) $-i$ (d) i

   Solução: De $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ temos que $(a - 2b) + (a + b + 3)i = 0$, que nos dá o seguinte sistema:
   $$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ a + b + 3 = 0 \end{cases}$$
   Resolvendo, temos $a = -2$ e $b = -1$. Dessa forma, temos que
   $$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \left(\frac{1-2i}{-2-i}\right)^3 = \left(\frac{1-2i}{-2-i} \cdot \frac{-2+i}{-2+i}\right)^3 = i^3 = -i.$$

2. (ITA–2019). Sabe-se que $-2+2i$ é uma das raízes quartas de um número complexo z. Então, no plano de Argand-Gauss, a área do triângulo, cujos vértices são as raízes cúbicas de z, é igual a

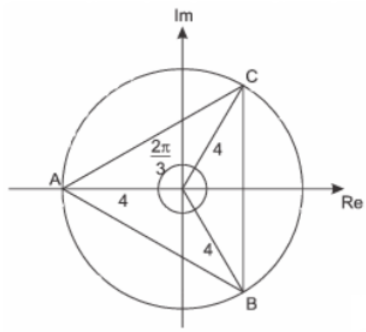
   (a) $4(\sqrt{3}+1)$ (b) $6\sqrt{3}$ (c) $8(\sqrt{3}-1)$ (d) $10\sqrt{3}$ (e) $12\sqrt{3}$

   Solução: Como $(-2 + 4i)$ é uma raiz quarta de z, então $z = (-2 + 4i)^4$, escrevendo esse número na sua forma trigonométrica temos $z = (2\sqrt{2}\cos 3\pi/4 + i \operatorname{sen} 3\pi/4)^4$. Aplicando a fórmula de Moivre segue que $z = 2^6(\cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi)$, que podemos ainda escrever como $z = 4^3(\cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi)$.

   A raiz cúbica de z, é um número w de tal forma que $z = w^3$. Desse modo temos que $w^3 = 4^3(\cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi)$, portanto $w = 4(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$.

   O triângulo, cujos vértices são as raízes cúbicas de z está representado na figura abaixo:

   Perceba que o triângulo ABC é dividido em três triângulos isósceles com ângulo $\frac{2\pi}{3}$ entre os lados iguais. Assim podemos calcular a área do triângulo ABC da seguinte forma:
   $$A_{ABC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = 12\sqrt{3}.$$
   Daí temos que a área do triângulo formado pelas raízes de z é $12\sqrt{3}$.



Fonte: https://www.sprweb.com.br/mod-app/index.php

3. (URCA–2016.2). Seja $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. O valor de $1 + z + \cdots + z^{15}$ é:

(a) $\frac{2}{\sqrt{2}+2i}$
(b) 2
(c) 0
(d) $\frac{2}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$
(e) -1

Solução: Para melhorar a resolução dessa questão, vamos converter o número z para sua forma trigonométrica, note que, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$. Então, desse modo, temos,

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.$$

Agora fazendo a potência z^{16} pela Fórmula de De Moivre, segue que,

$$\begin{aligned} z^{16} &= \cos\left(16\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(16\cdot\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos 4\pi + i\operatorname{sen} 4\pi \\ &= 1. \end{aligned}$$

A expressão $1 + z + \cdots + z^{15}$ corresponde a uma soma de PG de 1º termo $a_1 = 1$, razão $q = z$ e $n = 16$ termos, assim,

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(z^{16} - 1)}{z - 1}.$$

Como $z^{16} = 1$, segue $S_n = 0$.

5 MATRIZES

5.1 Breve histórico

As matrizes possuem grande importância na Matemática e no cotidiano da humanidade, utilizadas em áreas como Economia, Engenharia, Física, Biologia, Computação, entre outras. Uma situação prática são os pixels da tela de um computador, tomando como exemplo uma tela com 640×480 pixels, onde o modelo matemático de localização dos pontos dessa tela é uma matriz. Numa outra situação, podemos usar cadeias de Markov para calcular estimativas e previsões de períodos de chuva e de seca de uma certa época do ano em uma dada região; ou para avaliar o custo de um dado produto na compra deste em determinadas quantidades. Outra aplicação das matrizes ocorre no estudo de migrações populacionais e crescimento demográfico. Também podemos usar matrizes como modelo matemático para codificar e decodificar mensagens criptografadas. Essas aplicações e outras podemos ver com mais detalhes em [10], [21], [13] e [14]

Como podemos ver em [22], o primeiro uso da noção de matriz foi quando Lagrange, em 1790, reduziu a caracterização dos máximos e mínimos, de uma função real de várias variáveis, ao estudo do sinal da forma quadrática associada a uma matriz. Antes funções como essas sempre eram expressas na forma escalar e Lagrange conseguiu escrevê-las na notação matricial. Depois da aplicação de Lagrange, já no século XIX, a Teoria das Formas Quadráticas chegou a ser um dos assuntos mais importantes em termos de pesquisas, principalmente no que se refere ao estudo de seus invariantes. Essas investigações tiveram como consequência a descoberta de uma grande quantidade de resultados no estudo sobre matrizes.

5.2 Definições e resultados

Nesta seção, veremos alguns conceitos e operações básicas fundamentais ao estudo de matrizes.

5.2.1 O conceito de matriz

Dados m e $n \in \mathbb{N}$, definimos uma matriz real de ordem m por n $(m \times n)$, como uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$ dispostas em m linhas e n colunas. Estes elementos de $\mathbb{R}$ são chamados entradas da matriz.

Cada elemento de uma matriz, é da forma a_{ij}, onde, i indica a linha do elemento e j a coluna do elemento. Representamos uma matriz qualquer $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ da seguinte forma,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Dependendo dos valores de m e n, uma matriz $m \times n$ tem denominações especificas, como veremos a seguir:

1. *Matriz Linha*: Dado $n > 1$, se $m = 1$, obtém-se uma matriz com uma linha e n colunas. Assim,
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1 \times n}.$$

2. *Matriz Coluna*: Se $n = 1$ e $m > 1$, teremos a uma matriz com m linhas e uma coluna. Ou seja,
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}.$$

3. *Matriz Transposta*: Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se Matriz Transposta a matriz $A^t = [a'_{ji}]_{n \times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j.

4. *Matriz Quadrada*: É a matriz que possui o mesmo número de linhas e colunas, isto é, quando se $n = m$. Neste caso,
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Numa matriz quadrada, a diagonal formada pelos elementos, onde $i = j$, é chamada diagonal principal da matriz. Existe uma matriz quadrada especial em que todos os elementos da diagonal principal tem valores iguais a 1 e os demais elementos são nulos. Esta matriz é denominada *matriz identidade* e denotada por I_n com $n \geq 1$. Assim:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

5.2.2 Operações entre matrizes e propriedades

Entre matrizes, pode-se efetuar as seguintes operações:

1. *Adição:* Se $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ são duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, então a soma dessas matrizes, denotada $A + B$, é a matriz $S = [s_{ij}]$ de ordem $m \times n$ de tal forma que $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

2. *Multiplicação por escalar:* O produto de um número real k por uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, que denotamos por kA, é a matriz $P = [p_{ij}]_{m\times n}$ de tal forma que, $p_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

3. *Produto entre duas matrizes:* Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, chama-se produto AB a matriz $P = [p_{ik}]_{m\times p}$ tal que

$$p_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Para definir o produto de A por B, é necessário que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B. Dessa forma, a matriz produto AB terá ordem $m \times p$.

Veremos a seguir algumas propriedades:

Igualdade de matrizes: Dizemos que duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, de mesma ordem, são iguais, pondo $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

Matriz Oposta: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, chamamos matriz oposta de A a matriz em que todos os elementos da matriz A são multiplicados por -1, obtendo assim a matriz $-A = [-a_{ij}]$.

Com as definições de adição de matrizes e matriz oposta, podemos definir subtração de matrizes como a soma algébrica das matrizes A com a oposta da matriz B, em que as matrizes possuem a mesma ordem $m \times n$. Assim, $A - B = A + (-B)$.

A seguir apresentaremos a definição de matriz inversa.

5.2.3 Matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que a matriz A é *inversível* se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é uma matriz singular (que não admite inversa).

Se A é inversível, então sua inversa é única a matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Veja [8] e [19] para mais definições e propriedades de matrizes.

5.3 Aplicações

Nesta seção, veremos algumas aplicações da teoria de matrizes em situações diversas.

5.3.1 Crescimento Populacional

A Álgebra Matricial é uma ferramenta de grande importância para a análise do crescimento populacional, veja [13]. Vejamos um exemplo desse tipo de situação. Uma certa população de indivíduos pode ser subdividida em grupos etários, raças e/ou classes diferentes. Buscaremos determinar como a população se modifica ao longo de um certo período (ano, por exemplo).

A situção mais trivial é a análise populacional homogênea, com origem no tempo $t = 0$ e P_0 indivíduos crescendo ou decrescendo a uma taxa anual fixa. Desse modo, existe um número a, denotado fator multiplicativo, de tal forma que após um ano a população será $P_1 = aP_0$, após dois anos será $P_2 = aP_1 = a^2P_0$ e assim sucessivamente. De maneira recursiva podemos afirmar que

$$P_n = a^nP_0.$$

Ou seja, após n anos, a população inicial P_0 foi multiplicada pelo fator a, n vezes.

Se uma população estiver subdividida em grupos, a população P_n será representada por um vetor $\overrightarrow{p_0}$ em que os elementos representam o números de indivíduos nos diferentes grupos. O fator multiplicativo a será substituído pela matriz de transição A tal que o vetor população de cada ano seja multiplicado pela matriz A, para se obter o vetor população do ano seguinte segundo a equação

$$\overrightarrow{p_n} = A^n \cdot \overrightarrow{p_0},$$

onde $\overrightarrow{p_0}$ é o vetor populacional inicial.

Exemplo 3 *A população total de um município de* 10 *milhões de pessoas foi dividida em quem mora na cidade e quem mora nos subúrbios. Denotaremos por C_n a população que vive na cidade e por S_n, a população suburbana após n anos. A distribuição da população entre cidade e subúrbios depois de n anos é descrita pelo vetor população:*

$$\overrightarrow{p_n} = \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix}.$$

Considere que, a cada ano, 20% *da população da cidade migre para o subúrbio e que neste mesmo ano,* 15% *da população do subúrbio mude para a cidade. Com estes dados podemos afirmar que no ano $n+1$, a população da cidade e do subúrbio será determinado* *por:*

$$C_{n+1} = 0,80C_n + 0,15S_n \qquad e \qquad S_{n+1} = 0,20C_n + 0,85S_n$$

para $n \geq 0$.

Em forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} C_{n+1} \\ S_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,15 \\ 0,20 & 0,85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix}.$$

Portanto, neste caso, a matriz de transição A *é*

$$A = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,15 \\ 0,20 & 0,85 \end{bmatrix}.$$

Voltando às informações dadas no início do exemplo vamos determinar a população na cidade e nos subúrbios nos três primeiros anos considerando que no ano n_0 *existam* 7 *milhões de pessoas na cidade e* 3 *milhões nos subúrbios. Desse modo,* $C_0 = 7.000.000$ *e* $S_0 = 3.000.000$. *Aplicando na equação matricial obtida, tem-se para* $n = 0, 1, 2$ *os seguintes resultados:*

Para $n = 0$,

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,15 \\ 0,20 & 0,85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7.000.000 \\ 3.000.000 \end{bmatrix}.$$

Efetuando os cálculos devidos temos que $C_1 = 6.050.000$ *e* $S_1 = 3.950.000$.

Para $n = 1$,

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,15 \\ 0,20 & 0,85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6.050.000 \\ 3.950.000 \end{bmatrix}.$$

Segue que $C_2 = 5.432.500$ *e* $S_2 = 4.567.500$.

Para $n = 2$,

$$\begin{bmatrix} C_3 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,15 \\ 0,20 & 0,85 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5.432.500 \\ 4.567.500 \end{bmatrix}.$$

Temos portanto, $C_3 = 5.031.125$ *e* $S_3 = 4.968.875$.

Podemos então concluir que nesse intervalo de três anos, a população da cidade diminuiu ano a ano e de subúrbio aumentou.

5.3.2 Cadeias de Markov

Uma outra aplicação do estudo de matrizes, ver [14], são os cálculos de probabilidades para um comportamento futuro de um processo conhecendo o seu estado atual, sendo que o resultado dessa probabilidade não é influenciado pelo comportamento anterior desse processo. Para esse tipo de cálculo, usamos as *Cadeias de Markov.*

Definiremos uma cadeia de Markov da seguinte forma: Seja $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ um conjunto de estados discretos (finitos). O processo tem início em um desses estados e desloca-se sucessivamente de um estado para outro. Cada movimento é chamado de *passo.* Se a cadeia está atualmente no estado e_i, então ela move-se para o estado e_j no próximo passo com uma probabilidade denotada por p_{ij}, de modo que esse resultado não depende dos estados ocupados nos passos anteriores, somente do estado atual.

O valor de p_{ij} é chamado de *probabilidade de transição* de um estado para outro, sendo que na transição, o processo pode permanecer no estado que se encontra e isso ocorre com probabilidade p_{ii}. Por exemplo, p_{12} é probabilidade do processo mudar do estado e_1 para o estado e_2, assim como p_{22}, é a probabilidade do processo manter-se no estado e_2 durante a transição.

De maneira prática, podemos representar as probabilidades de transição em uma matriz $P = [p_{ij}]_{m\times n}$, chamada matriz de transição da cadeia de Markov, ou simplesmente matriz de Markov. Onde os elementos dessa matriz são não-negativos e a soma dos valores de cada linha é igual a 1, por se tratar de probabilidades. Então temos as seguintes somas:

$$p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \cdots + p_{ik} = 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad e \quad (1 \leq i; j \leq k).$$

Vejamos a seguir uma situação onde podemos aplicar o modelo matemático das Cadeias de Markov.

Exemplo 4 *Numa determinada loja temos três produtos a venda do mesmo setor, a cada período de uma semana podemos notar que* 50% *dos compradores continuam comprando o mesmo produto. Dos que compravam o produto A,* 40% *passam a comprar o produto B e* 10% *o produto C. Dos que compravam o produto B,* 20% *passam a comprar o produto A e* 30% *passam a comprar o produto C. E dos que compravam o produto C,* 30% *passam a comprar o produto A e* 20% *passam a comprar o produto B. Note que, essa situação é uma cadeia de Cadeia de Markov, pois o estado futuro não depende do estado anterior, que o estado é discreto, pois a quantidade de valores é finito, pois vamos observar uma quantidade finita de clientes. Podemos descrever tal evento utilizando uma matriz $(P_{ij})_{3\times 3}$, onde cada elemento p_{ij} representa a probabilidade de um comprador do produto i trocar para o produto j, assim:*

$$P = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,40 & 0,10 \\ 0,20 & 0,50 & 0,30 \\ 0,30 & 0,20 & 0,50 \end{bmatrix}.$$

Supondo 80 *compradores destes produtos, onde inicialmente* 40 *compram o produto* A, 20 *compram o produto* B *e* 20 *compram* C, *quantos compradores em média temos dos produtos* A, B *e* C *após uma semana?*

Para responder essa pergunta, montaremos uma matriz linha que chamaremos de Q *com os números iniciais de compradores, assim:*

$$Q = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 20 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, faremos o produto entre as matrizes P *e* Q,

$$\begin{bmatrix} 40 & 20 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,50 & 0,40 & 0,10 \\ 0,20 & 0,50 & 0,30 \\ 0,30 & 0,20 & 0,50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 20 \end{bmatrix}.$$

A matriz obtida representa os valores médios dos 80 *compradores após uma semana.*

Portanto, a media semanal de compradores, é de 30 *para o produto* A, 30 *para o produto* B *e* 20 *para o produto* C.

5.3.3 Mensagens criptografadas

Conforme [13] podemos citar o funcionamento de um importantíssimo sistema de codificação e decodificação de mensagens chamado de *Mensagens Criptografadas*, cuja finalidade é assegurar o sigilo de uma mensagem de tal forma que só o remente e o destinatário conheçam o seu conteúdo.

A necessidade de proteger mensagens secretas de modo que somente as pessoas a que elas destinam-se possam decifrá-las, vem desde que a humanidade passou a viver em sociedade, até os dias de hoje. A Criptografia é um conjunto de técnicas que nos possibilita escrever mensagens em códigos de modo que apenas o remetente e o destinatário tenha ferramentas para decifrá-las.

Exemplo 5 *Vejamos a seguinte tabela, onde associaremos cada símbolo a um número. Note que o número* 37 *representará um espaço vazio entre palavras ou no fim de uma frase caso seja necessário. Também representamos por números alguns sinais de pontuação. O princípio básico da Criptografia é a conversão de símbolos em números, onde palavras, frases e textos são convertidos em sequências numéricas. Vamos adotar esta tabela de conversão, para realizar criptografias.*

Tabela 5.3: Conversão de letras em números

a 11	b 12	c 13	d 14	e 15	f 16	g 17	h 18	i 19	j 20
k 21	l 22	m 23	n 24	o 25	p 26	q 27	r 28	s 29	t 30
u 31	v 32	w 33	x 34	y 35	z 36	 37	. 38	, 39	! 40

Fonte: Autor

Um método bastante simples para codificar e decodificar mensagens faz uso de álgebra linear, que envolve apenas uma matriz $A_{n\times n}$ e sua inversa $A^{-1}_{n\times n}$, cujos elementos devem ser números inteiros.

Neste caso, o remetente usará a matriz A para codificar a mensagem e o destinatário usará a matriz A^{-1} para decodificar. A finalidade deste método é que a mensagem seja codificada em pares de caracteres, de modo a dificultar a decodificação para qualquer indivíduo que não seja o destinatário. Para que isto ocorra deve existir uma tabela de correspondência, onde possamos converter as letras do alfabeto em números.

Digamos que uma mensagem de um celular para outro foi realizada com criptografias segundo os dados da tabela acima. Usando essa tabela de conversão vamos codificar e transmitir a mensagem: Gosto de filmes. Sendo a matriz codificadora

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz é conveniente para o nosso problema, pois seus elementos são números inteiros, bem como os da sua matriz inversa.

Primeiramente escreveremos a matriz M correspondente de cada letra ou símbolo ao seu número associado. Sendo a matriz A do tipo 2×2, organizaremos a matriz M com duas linhas:

$$M = \begin{bmatrix} 17 & 25 & 29 & 30 & 25 & 37 & 14 & 15 \\ 37 & 16 & 19 & 22 & 23 & 15 & 29 & 38 \end{bmatrix}.$$

A matriz codificada N encontrada fazendo o produto $A \times M = N$ é

$$N = \begin{bmatrix} 88 & 91 & 106 & 112 & 134 & 57 & 83 \\ 71 & 66 & 77 & 82 & 97 & 43 & 68 \end{bmatrix}.$$

Logo a mensagem codificada que chegará ao celular de destino será:

88 91 106 112 134 57 83 71 66 77 82 97 43 68

Para que a mensagem seja decodificada e portanto lida no celular do destinatário, este aparelho deve usar a matriz decodificadora A^{-1} que é a matriz inversa de A, logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

A decodificação é feita realizando o produto $A^{-1} \times N$. Assim:

$$A^{-1} \times N = \begin{bmatrix} 17 & 25 & 29 & 30 & 25 & 37 & 14 & 15 \\ 37 & 16 & 19 & 22 & 23 & 15 & 29 & 38 \end{bmatrix}.$$

Logo, $A^{-1} \times N = M$. Portanto, a mensagem que foi decodificada no celular de destino possui os seguintes números:

$$17 \quad 25 \quad 29 \quad 30 \quad 25 \quad 37 \quad 14 \quad 15 \quad 37 \quad 16 \quad 19 \quad 22 \quad 23 \quad 15 \quad 29 \quad 38$$

Convertendo esses números em símbolos de acordo com a tabela de conversão temos a mensagem recebida "Gosto de filmes".

5.4 Questões de vestibulares

Mostraremos nesta seção, aplicações das operações e propriedades de matrizes onde colocaremos em prática o domínio de técnicas matemáticas desse conteúdo em questões de vestibulares ver [21], para que alunos de Ensino Médio tenham como referência modelos de exercícios em que essas técnicas são utilizadas.

1. (Fatec–2019). João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix},$$

em que:

- a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018;
- na matriz B as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana desse mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será

(a) $R\$\,670,00$ (b) $R\$\,680,00$ (c) $R\$\,824,00$ (d) $R\$\,980,00$ (e) $R\$\,984,00$

Solução: Os valores pagos pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários, em cada semana do mês de julho de 2018, correspondem aos elementos da matriz

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}.$$

Para obtermos a resposta pedida no enunciado, basta multiplicarmos os elementos da matriz A pelos elementos da segunda coluna da matriz B, dessa forma, encontraremos o valor pago pela empresa aos três trabalhadores mencionados. Então:

$$10 \cdot 40 + 12 \cdot 22 + 8 \cdot 25 = 864.$$

Portanto, a empresa pagará $R\$\,864,00$ aos funcionários João, Sílvia e Pedro na segunda semana.

2. (URCA–2019.1). Considere M uma matriz quadrada de ordem n. Chama-se traço de M a soma $Tr(M) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ dos elementos a_{ii} de M.

Se

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

concluímos que $Tr(M+N)$ vale

(a) 0 (b) 2 (c) 5 (d) 10

Solução: Como as matrizes M e N possuem as mesmas ordens no caso 3×3 , então podemos obter uma matriz soma $M + N$ somando seus elementos correspondentes. Assim,

$$M + N = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 9 \\ 14 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$Tr(M+N) = 0 + 1 + 11 \;\Rightarrow Tr(M+N) = 12.$$

3. (Insper–2018). A tabela a seguir será usada para a transmissão de mensagens criptografadas em matrizes. A criptografia é feita ao se multiplicar a matriz C pela matriz-mensagem M gerando a matriz criptografada $M_c = M \cdot C$.

0		7	**G**	14	**N**	21	**U**
1	**A**	8	**H**	15	**O**	22	**V**
2	**B**	9	**I**	16	**P**	23	**W**
3	**C**	10	**J**	17	**Q**	24	**X**
4	**D**	11	**K**	18	**R**	25	**Y**
5	**E**	12	**L**	19	**S**	26	**Z**
6	**F**	13	**M**	20	**T**	27	**?**

Fonte: https://www.sprweb.com.br/mod.app/index.php

A matriz C é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 4 & 1 & 9 \\ 14 & 5 & 11 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 & 15 & 21 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 \end{bmatrix},$$

que significa ESTUDOU NO INSPER, depois de criptografada por C vira a matriz

$$M_c = \begin{bmatrix} 33 & 67 & 59 & 46 & 5 & 18 \\ 28 & 48 & 39 & 31 & 5 & 018 \\ 70 & 111 & 78 & 62 & 10 & 36 \end{bmatrix}.$$

Ao receber M_c, o destinatário deve multiplicá-la pela matriz decodificadora D, da mesma ordem da matriz C, para recuperar a mensagem original. Desse modo, determine a matriz decodificadora D.

Solução: Sendo $M_c = C \cdot M$, a matriz decodificadora D, é de tal forma que $D \cdot M_c = M$. Ou seja, $D \cdot C \cdot M = M$, isso implica que $D \cdot C \cdot M - M = 0$ onde podemos fazer $(D \cdot C - I)M = 0$, sendo I a matriz identidade. Isso resulta em $D \cdot C = I$. Portanto a matriz D é a matriz inversa da matriz C, onde $D = C^{-1}$. Realizando as devidas operações temos que

$$D = C^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

6 LOGARITMOS E EXPONENCIAL

6.1 Histórico

O contexto histórico e as aplicações sobre o estudo de logaritmos que mostraremos a seguir podem ser encontradas em [15] e [20].

Ao nos confrontarmos com a expressão $\log xy = \log x + \log y$ podemos nos perguntar: Como multiplicar números fazendo, ao invés do produto entre eles, uma soma de números correlacionados? Tal questionamento é de grande importância pois somar é muito mais fácil do que multiplicar. Com o surgimento dos logaritmos e suas técnicas de simplificar cálculos tediosos, vários ramos da ciências como Astronomia, Geologia, Química e Economia por exemplo tiveram avanços significativos após o domínio de equações como a que abre este capítulo. Avanços estes que nos propiciaram descobertas de grande importância para a sociedade como o cálculo de prazos em aplicações financeiras, bem como para a comunidade científica como datação de fósseis e níveis de radiação de núcleo de átomos radioativos e outras aplicações que veremos adiante.

Até o século XVII, cálculos que envolviam grandes multiplicações ou divisões eram bastante desgastantes no estudo e desenvolvimento de ciências físicas que usavam medições, como a Astronomia por exemplo. Porém essas operações eram inevitáveis e demandavam muito tempo e atrapalhava o desenvolvimento dos estudos em atividades mais criativas. Vários dispositivos mecânicos foram inventados, porém o avanço mais significativo foi conceitual, como a criação de estratégias matemáticas que viriam a facilitar os cálculos.

Devido a necessidade de se acelerar processos de estudos e pesquisas, a Matemática rapidamente evoluiu nesse período, desenvolvendo aprimoradas implicações teóricas, e práticas, de tal maneira que até hoje essas ideias iniciais ainda são ferramentas imprescindíveis em toda ciência.

A principal evolução da Matemática nos primeiros anos do século XVII, foi uma técnica chamada *logaritmo*, criada pelo escocês John Napier também conhecido como Neper. Essa descoberta foi publicada em seu livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* ("Descrição do Maravilhoso cânone dos logaritmos"), lançado em 1614 após 20 anos de estudos. O prefácio desta obra escrito pelo próprio Neper mostra o quanto ele tinha consciência da sua descoberta:

> "Já que não existe nada mais enfadonho, colegas matemáticos, na prática da arte matemática do que o grande atraso sofrido no tédio de extensas multiplicações e divisões, de encontrar razões, e na extrações de raízes quadradas e cúbicas – e ... os muitos erros traiçoeiros que podem surgir: eu estive, portanto, revirando em minha mente que arte segura e expedida eu poderia

> ser capaz de aperfeiçoar para tais mencionadas dificuldades. No final, após muito pensar, finalmente descobri uma surpreendente maneira de abreviar os procedimentos ... e é uma tarefa prazerosa apresentar o método para o uso público dos matemáticos."

O princípio básico dos logaritmos é transformar uma multiplicação em adição e como consequência uma divisão em subtração. Para isso Neper representou os números positivos como potências de um mesmo número e os dispôs em uma tabela de duas colunas, onde os números positivos listados por ele ocupava a coluna esquerda e o seu *logaritmo* correspondente ficava na coluna direita. Segundo Neper, para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos e o resultado dessa soma é o logaritmo do produto, de forma análoga, para dividir dois números basta subtrair seus logaritmos, para se elevar um número a uma potência basta multiplicar o seu logaritmo pelo expoente e para extrair a raiz n–ésima de um número, basta dividir o logaritmo desse número pelo índice da raiz.

A invenção de Neper provocou grande repercussão e admiração entre os matemáticos da época, ao ponto que em 1615 Henry Briggs, o primeiro professor de geometria do Gresham College, em Londres, quis conhecê-lo pessoalmente para sugerir melhorias à sua descoberta. E assim o fez, sugerindo a Naper uma tabela com os mesmos princípios porém usando a base 10 como base comum. Com a morte de Neper em 1617 coube a Briggs concluir sozinho o trabalho, e no mesmo ano foi publicada a primeira tabela de logaritmos de números inteiros de 1 a 1000 na base 10 com catorze casas decimais. Anos mais tarde publicou uma tabela com a mesma precisão da primeira, porém com números inteiros até 100.000. Daí por diante, outros matemáticos inspirados nas tabelas de Briggs criaram tabelas auxiliares como a tabela de logaritmo das funções trigonométricas.

Mesmo hoje com a utilização de calculadoras modernas, o estudo dos logaritmos ainda é e continuará a ser imprescindível, pois embora eles tenham sido criados como ferramenta para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da Matemática e das ciências de modo geral mostram que diversos fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são intrinsecamente ligados aos logaritmos.

6.2 Definições e propriedades

Muito do que vimos sobre a necessidade de simplificar cálculos de multiplicações em somas remete a conhecida propriedade da potência de mesma base onde $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Porém, vale ressaltar que a ideia de reduzir multiplicações a somas foi evidenciada muito antes da notação de expoentes para indicar potências de um número, devido ao fato dos logaritmos terem surgido antes da notação exponencial.

Contudo, após a difusão da notação a^n, não demorou para que outras ideias como potências de expoente negativos e fracionários fossem inseridos no cálculo de potências e, que sendo a um número real positivo diferente de 1, esse número pode ser expresso na forma a^n, onde n é um expoente racional. Restringindo ao estudo de potências de um número positivo, podemos explicar de maneira mais fácil a elaboração das tábuas de logaritmos numa mesma base.

Seja a um número real positivo. Dado $n > 0$, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais ao número a. Ou seja,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots a. \qquad (n \text{ fatores})$$

Valendo assim a propriedade fundamental das potências:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \qquad (m,\, n \text{ inteiros positivos})$$

Para preservar a validez da propriedade acima, vamos convencionar $a^0 = 1$ de modo que $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$. Podemos verificar outras consequências da definição e da propriedade fundamental em [15].

Desde que se estabeleceu o domínio da definição e da propriedade fundamental das potências de expoente natural de um número real $a > 0$, passou-se a definir logaritmos da seguinte forma.

Definição 6 *Seja um número real $a > 0$, onde também $a \neq 1$, o logaritmo de um número $b > 0$ na base a é o expoente x no qual se deve elevar a base a de tal maneira que se tenha $a^x = b$. Assim escrevemos $\log_a b = x$ e lemos da seguinte forma: logaritmo de b na base a é igual a x. Em linguagem matemática temos:*

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Como consequência imediata dessa definição, temos uma importante propriedade dos logaritmos, que é a seguinte:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Essa propriedade é que fundamenta a criação das tábuas e tabelas de logaritmos criadas por Neper e Briggs como solução para grandes impasses na Matemática do início do século XVII como efetuar longas multiplicações.

Como consequência da propriedade fundamental dos logaritmos, foi possível também facilitar o cálculos de grandes divisões na época do surgimento das primeiras tabelas de logaritmos. Assim segue que,

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Veja que agora basta subtrair os logaritmos dos números que queremos dividir considerando sob uma mesma base.

Uma importante consequência da definição dos logaritmos, e que pode ser verificado nas tabelas de Neper e Briggs, é sobre logaritmo de um número elevado a um expoente:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b \ , \ n \in \mathbb{R}.$$

Ainda como decorrência da definição dos logaritmos, temos os seguintes resultados:

1. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$.

2. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$

3. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow a = c$, equação logarítmica de mesma base.

Muitas vezes, em um problema envolvendo logaritmos, se faz necessário mudar a base de um ou mais dos logaritmos para uma base conveniente ao problema. Assim, seja $\log_a b$ e queremos mudar a base desse logaritmo para uma base d, em que $d > 0$ e $d \neq 1$, segue que,

$$\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}.$$

Uma importante definição no estudo de logaritmos, é de *logaritmos naturais.*

Definição 7 *O logaritmo natural de um número a, denotado por $\ln a$, sendo $a > 0$, é o logaritmo desse número a, na base e. Dessa forma temos:*

$$\ln a = \log_e a.$$

Em que e corresponde ao número irracional de valor aproximado

$$e = 2,718281828\ldots$$

O número e denotado por *número de Euler* por conta de Leonhard Euler ou *número de Neper* devido a John Napier, está presente em todas as situações em que se deseja calcular a variação instantânea de uma grandeza que cresce ou decresce através do produto por uma taxa constante.

Da definição de *logaritmo natural*, decorre as seguintes consequências:

1. $\ln e = 1$

2. $\ln 1 = 0$

3. $\ln e^n = n$.

Nas referências [18] e [11], poderemos encontrar as demonstrações das propriedades vistas neste capítulo e outras importantes definições sobre logaritmos.

6.3 Aplicações

Veremos a seguir, algumas aplicações do estudo de logaritmos em áreas como Geologia, Química e Economia para que possamos evidenciar como o domínio da sua definição e de suas propriedades teve papel importante para a evolução dessas áreas de estudo.

6.3.1 Desintegração radioativa

Átomos de uma substância radioativa sofrem decaimento, ou seja tem uma tendência espontânea a se desintegrar, emitindo partículas e dessa forma transformando-se em outras substâncias não radioativas, devido a reações nucleares. As partículas emitidas constituem a radiação. Com o passar do tempo, o nível de radioatividade diminui exponencialmente da mesma forma em que aumenta a massa da substância originada nesse processo. Portanto, o nível de de radioatividade $N(t)$ em um dado instante de tempo t é calculado de acordo com a equação

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt},$$

em que N_0 é o nível inicial de radioatividade e k é a constante de proporcionalidade que é encontrada experimentalmente, cujo valor depende da substância em questão. De forma mais exata, depende do isótopo do elemento que compõe a substância que estamos estudando. De tal forma que em um dado momento, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo, é proporcional à massa da substância que ainda resta da matéria original no corpo naquele momento.

A unidade de tempo convencional para se determinar a desintegração de uma substância radioativa é a meia-vida. A meia-vida de uma substância radioativa é o tempo que leva para que se desintegre a metade de um nível inicial N_0 da massa de um corpo formado por tal substância. Para determinar a meia-vida de uma substância, resolvemos a equação

$$\frac{1}{2} \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-kt}.$$

Aplicando a definição de logaritmos naturais em ambos os membros temos:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -kt \quad \Longleftrightarrow \quad -\ln(2) = -kt \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln(2)}{k}.$$

Fixando $\ln(2) = 0,6931$, então basta saber o valor da constante de proporcionalidade k para se calcular a meia-vida t de uma substância radioativa.

Nos acidentes com reatores nucleares convencionais, os materiais radioativos mais relevantes são o iodo–131 (um isótopo radiotivo do iodo) e o césio–137 (um isótopo radioativo do césio). O iodo–131 pode causar câncer na tireoide, devido a glândula tireoide acumular iodo, porém como a meia vida desse isótopo é de apenas oito dias, isso quer dizer que seu nível de radiação diminui muito rapidamente de modo que com tratamento médico imediato e adequado pode-se controlar seus danos à saúde. Infelizmente, não podemos dizer o mesmo com o césio–137 que tem meia vida de 30 anos e demora cerca de 200 anos para que seu nível de radioatividade diminua para um centésimo do valor inicial, fazendo assim um fator de grande risco e perigo principalmente na contaminação do solo e rios, colocando em risco vida de plantas e animais e consequentemente da alimentação dos seres humanos que vivem na região.

Podemos citar por exemplo, o acidente ocorrido na usina nuclear de Fukushima Dai-ichi(Usina Fukushima 1) no Japão em 2011 provocado por um terremoto matando cerca de 25 mil pessoas. No Brasil, em 1987, ocorreu o acidente radiológico de Goiânia, que ficou conhecido como *acidente com o césio–137*, foi um episódio de contaminação por radioatividade que afetou seriamente a saúde de centenas de pessoas.

6.3.2 O método do carbono–14

O carbono–14, indicado por ^{14}C, é um isótopo radioativo do carbono formado nas camadas superiores da atmosfera devido ao bombardeamento de raios cósmicos. A quantidade de carbono–14 existente na atmosfera terrestre tem se mantido praticamente constante ao longo dos anos devido ao equilíbrio entre a quantidade produzida e a quantidade desintegrada.

O carbono–14 é absorvido por seres vivos (animais e vegetais) e a quantidade absorvida se mantém constante ao longo da vida, e com a morte inicia-se o processo de desintegração. A cada 5730 anos, quantidade de ^{14}C existente no organismo reduz à metade da quantidade anterior, de modo que após cerca de 50.000 anos a quantidade será tão pequena que será inviável definir de forma precisa uma datação. De modo análogo ao cálculo do nível de radiação de um elemento radioativo, calculamos a constante de proporcionalidade k da desintegração do carbono–14 de um organismo pela equação

$$k = \frac{\ln(2)}{t},$$

em que t é a meia-vida. Daí,

$$k = \frac{0,6931}{5730} = 0,00012097.$$

De posse dessa constante, podemos então determinar a idade de fósseis ou vestígios de madeira que não ultrapasse o limite estabelecido para tal datação. Dessa forma, vamos determinar a idade de um pedaço de madeira encontrado numa escavação arqueológica, onde foi constatado que a massa de ^{14}C atual presente nesse pedaço, é cerca de $0,894$ vezes a massa de ^{14}C existente em um pedaço de madeira viva com a mesma massa do fóssil encontrado. Tomando como M a massa de ^{14}C do pedaço de madeira hoje e M_0 a massa de ^{14}C da mesa no passado, então temos a razão $M/M_0 = 0,894$, desse modo, pela fórmula $M = M_0 \cdot e^{-kt}$ temos que, $0,894 = e^{-kt}$. Aplicando logaritmo nos dois membros e sabendo que $k = 0,00012097$ segue que

$$\ln(0,0894) = -0,00012097 \cdot t.$$

Então,

$$t = -\frac{\ln(0,894)}{0,00012097} = \frac{0,1121}{0,00012097} = 926.$$

Portanto, esse pedaço de madeira encontrado tem cerca de 926 anos.

6.3.3 Matemática financeira

No regime de juros compostos de taxa de acordo com o tempo i, um capital inicial C é transformado após n períodos de tempo, em um montante M, onde

$$M_n = C(1 \; + \; i)^n.$$

Nas aplicações de juros compostos utilizamos os logaritmos para determinar o período (tempo) de uma operação financeira. Diante dessas informações, vamos determinar o prazo em que um empréstimo no valor de $R\$$ 65.000, feito por um cliente em uma instituição financeira, pode ser quitado por meio de uma parcela única de $R\$$ $131.625,60$, se a taxa de juros compostos cobrada for de 15% $a.a$?

No problema acima, temos uma aplicação financeira no regime de juros compostos onde a partir do capital inicial $C = 65.000$, que foi tomado por empréstimo queremos saber qual o período de tempo n a uma taxa $i = 15\%$ ao ano fará com que o montante após esse tempo e devido aos juros, atinja um valor final de $M = 131.625,60$. Para determinar o prazo n aplicamos os dados aqui coletados na fórmula supracita do seguinte modo:

$$131.625,60 = 65.000(1 + 0,15)^n,$$

que implica em

$$(1,15)^n = 2,025.$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros temos:

$$\log(1,15)^n = \log(2,025).$$

E pela propriedade do logaritmo da potência segue que,

$$n \cdot \log(1,15) = \log(2,025).$$

Portanto,

$$n = \frac{\log(2,025)}{\log(1,15)} \Rightarrow n = 5.$$

Então a dívida será quitada com uma pagamento de parcela única de $R\$$ $131.625,60$ após cinco anos.

6.3 Questões de vestibulares

Nas questões de vestibulares ver [21] que se segue podemos ver algumas aplicações matemáticas das definições e propriedades de logaritmos.

1. (UFRGS–2019). O valor de $E = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{99}{1000}\right)$ é:

(a) -3 (b) -2 (c) -1 (d) 0 (e) 1

Solução: Para resolver essa questão, vamos utilizar a conseqência da propriedade fundamental dos logaritmos, transformando essas divisões em subtrações de logaritmo na mesma base. Assim teremeos,

$$\log 1 - \log 2 + \log 2 - \log 3 + \log 3 - \log 4 + \cdots + \log 998 - \log 999 + \log 999 - \log 1000.$$

Daí, fazendo os devidos cancelamentos de parcelas, resta que

$$\log 1 - \log 1000 = 0 - 3 = -3.$$

2. (FUVEST–2019). Se $\log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x$, para $x > 0$ então

(a) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}$ (b) $y = \sqrt{\frac{x^3}{2}}$ (d) $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

(c) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{x^2}$ (e) $y = \sqrt{2x^3}$

Solução: Na expressão dada na questão, aplicando a definição de logaritmo temos,

$$\log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x \Leftrightarrow y = 2^{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x}$$

Agora fazendo a distribuição da potência de base 2 temos que, $y = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}\log_2 x}$. Daí utilizando a propriedade do logaritmo da potência, segue que,

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{\log_2 x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

Portanto, temos que a solução do problema proposto é $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}$.

3. (UECE–2018). Se n é um número inteiro maior do que dois, o valor de

$$\log\left[\log_n\left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}}\right)\right]$$

é:

a) 3. b) -4. c) 4. d) -3.

Solução: Para solucionar esta questão, faremos uso de propriedades de radicais, bem como da propriedade potência de logaritmos e de consequências da definição. Assim sendo, segue que:

$$\log\left[\log_n\left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}}\right)\right] = \log_n\left[\log_n(\sqrt[n^4]{n})\right] = \log_n\left[\log_n n^{n^{\frac{1}{4}}}\right] = \log_n\left[\frac{1}{n^4}\right]$$

Assim, chamando de $x = \log_n\left[\dfrac{1}{n^4}\right] = \log_n n^{-4}$, temos por consequência da definição de logaritmo que $x = -4$.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo apresentar aplicações teóricas e práticas dos conteúdos menos abordados na prova de Matemática do ENEM. Atualmente, intensifica-se, por parte dos discentes, um questionamento sobre a aplicabilidade de certos conteúdos matemáticos no cotidiano. Há um sentimento, de que se um conteúdo não é cobrado em algum vestibular, ou se um determinado assunto não se apresenta de forma claramente aplicável para o seu entendimento, este não possui relevância suficiente para ser estudado.

Ao longo dos últimos 10 anos, o ENEM, que se tornou o principal processo de seleção para ingresso nas IES do país (e algumas instituições do exterior), contribuiu para que esse sentimento de desprezo para com alguns conteúdos matemáticos se propagasse.

Diante disso, visou-se apresentar aplicações de alguns conteúdos esquecidos pelo ENEM, para que os discentes conheçam sua importância na sociedade atual. Conjuntos, Números Complexos, Matrizes e Logaritmos foram escolhidos para tal pela sua relevância, em termos de aplicação, e pela pouca (ou nenhuma) frequência nas provas de Matemática do ENEM.

Após a leitura deste trabalho, esperamos que os leitores (especialmente os discentes) questionem o porquê de tais conteúdos estarem sendo gradativamente ignorados pelo sistema educacional, sendo que estes são de fundamental importância em diversas áreas da Ciência.

É verdade que, para o entendimento completo de algumas aplicações apresentadas, necessita-se de um conhecimento mais aprofundado a nível de graduação. Entretanto, o conhecimento é construído por degraus, e o primeiro passo deve ser dado no Ensino Básico, a fim de que os alunos desenvolvam um senso crítico sobre o que eles estão aprendendo e como tais conteúdos são aplicados na sociedade. Ignorar conteúdos tão relevantes pode limitar o leque de conhecimento dos alunos, o que seria fatal numa sociedade cada vez mais competitiva.

Espera-se que este trabalho deixe um mensagem positiva de incentivo aos alunos de que, além de possuir aplicações teóricas, a Matemática é uma Ciência extremamente fundamental ao desenvolvimento do ser humano, social e intelectualmente, sendo altamente aplicável nas mais diversas áreas, influenciando nossas vidas mais do que se imagina.

REFERÊNCIAS

[1] **Códigos Corretores de Erros e Teoria de Galois.** Disponível em: http://mtm.ufsc.br/ ebatista/2016-1/Helena.pdf. Acesso em 14 Junho 2019.

[2] **Consulado Geral de Portugal.** Disponível em: https://consuladoportugalsp.org.br/enem-sera-aceito-pelas-universidades-de-coimbra-e-do-algarve/. Acesso em: 30 Maio 2019.

[3] DAGA, M. S. **Uma análise da Geometria Fractal.** 2017. 17p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Naturais)-UnB, Planaltina. Disponível em: http://bdm.unb.br/bitstream/10483/18188/1/2017. MarceloDaSilva.tcc.pdf. Acesso em 30 Maio 2019.

[4] **Engenharia de Controle.** Matemática Complexa. Disponível em: https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/aplicacao-dos-numeros-complexos/engenharia-de-controle. Acesso em: 24 Maio 2019.

[5] **Entenda o ENEM de uma vez por todas.** Tudo sobre o ENEM. Disponível em: https://descomplica.com.br/tudo-sobre-enem/enem/o-que-e-o-enem. Acesso em: 30 Maio 2019.

[6] Essays, UK. November 2018. **Application of complex number in engineering.** Disponível em: https://www.ukessays.com/essays/mathematics/application-of-complex-number-in-engineering.php.vref=1. Acesso em: 24 Maio 2019.

[7] **Fractais dos Conjuntos de Julia.** Disponível em: https://abelsiqueira.github.io/disciplinas/cm141/2016s2/luana-baier.pdf. Acesso em 30 Maio 2019.

[8] HEFEZ, A., FERNANDEZ, C. S.**Introdução à Algebra Linear**. Coleção PROFMAT. 2^a edição. Rio de janeiro: SBM, 2016.

[9] HEFEZ, A., VILLELA, M. L. T.**Polinômios e Equações Algébricas**. Coleção PROFMAT. 1^a edição. Rio de janeiro: SBM, 2012.

[10] **Histórias e aplicações de matrizes e determinantes.** Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2017/11/historias-aplicacoes-matrizes-determinantes.html. Acesso em 14 Junho 2019.

[11] IEZZI,G., DOLCE,O., MURAKAMI,C. **Logaritmos**.Coleção Fundamentos da Matemática Elementar Vol.2. 8^a edição. São Paulo: Atual, 1993.

[12] IEZZI,G. **Complexos, Polinômios, Equações**.Coleção Fundamentos da Matemática Elementar Vol.6. 8^a edição. São Paulo: Atual, 1993.

[13] KUERTEN,C., **Algumas aplicações de Matrizes.** 2002. 68p. Trabalho de Conclusão de Curso (Habilitação em Licenciatura em Matemática)-Universidade Federal de Santa Catarina(UFSC), Florianópoles. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96804/Cristini Kuerten.PDF.sequence =1. Acesso em 30 Maio 2019.

[14] LAMBERTI, F. A. **Cadeias de Markov e Aplicações.** 2015. 30p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática)-Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. Disponível em: http://w3.ufsm.br/coordmat/images/TCC2.2015/TCC.FERNANDA.pdf. Acesso em 16 Junho 2019.

[15] LIMA, E. L. **Logaritmos**. Coleção Professor de Matemática. 6^a edição. Rio de janeiro: SBM, 2016.

[16] LIMA, E. L. **Números e Funções**. Coleção PROFMAT. 1^a edição. Rio de janeiro: SBM, 2013.

[17] OCHI, M., ISHINO, T., PRO, T. **Números Complexos**. 1^a edição. Guia Mangá. Tradução: Ivan Luis Lopes - São Paulo: Novatec Editora, 2015.

[18] PAIVA, M. **Matemática Paiva**, Vol.1. 1^a edição. São Paulo: Moderna, 2009.

[19] PAIVA, M. **Matemática Paiva**, Vol.2. 1^a edição. São Paulo: Moderna, 2009.

[20] STEWART, I. **17 Equações que Mudaram o Mundo**.1^a edição. Tradução: George Schlesinger - Rio de Janeiro: Zahar, 2013.

[21] **Super professor.** https://www.sprweb.com.br/mod-superpro/index.php. Acesso em: 03 Agosto 2019.

[22] **Surgimento da Teorias das Matrizes.** Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/ portosil/passa3b.html. Acesso em: 30 Maio 2019.