UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

O Uso do Teorema de Rouché-Capelli na Resolução de Sistemas Lineares

Marcos dos Santos Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Alciônio Saldanha de Oliveira

Campina Grande - PB
Agosto/2019

S586u Silva, Marcos dos Santos.
O uso do Teorema de Rouché-Capelli na resolução de sistemas lineares / Marcos dos Santos Silva. - Campina Grande, 2019.
90 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2019.
"Orientação: Prof. Dr. Alciônio Saldanha de Oliveira.
Referências.

1. Matrizes. 2. Sistemas Lineares. 3. Teorema de Rouché-Capelli. I. Oliveira, Alciônio Saldanha de. II. Título.

CDU 51(043)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO BIBLIOTECÁRIO GUSTAVO DINIZ DO NASCIMENTO CRB-15/515

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

O Uso do Teorema de Rouché-Capelli na Resolução de Sistemas Lineares

por

Marcos dos Santos Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

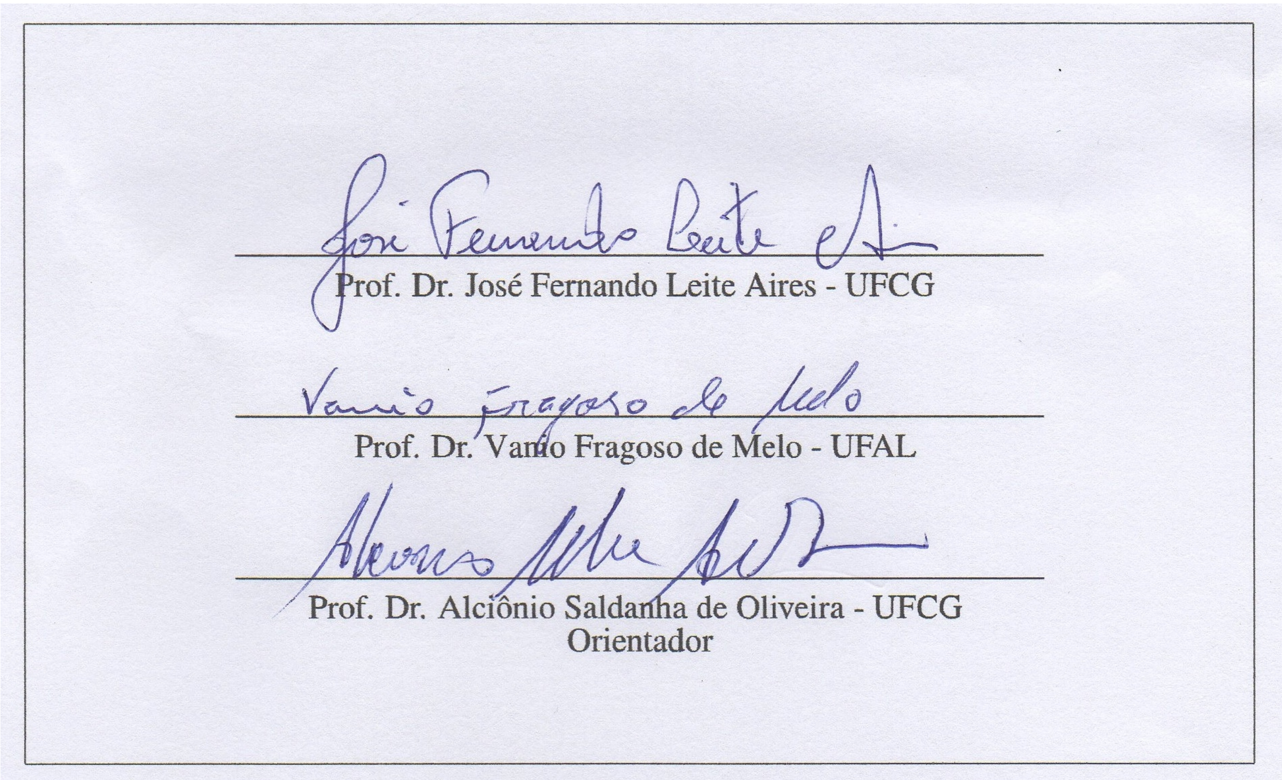
O Uso do Teorema de Rouché-Capelli na Resolução de Sistemas Lineares

por

Marcos dos Santos Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



Prof. Dr. José Fernando Leite Aires - UFCG

Prof. Dr. Vanio Fragoso de Melo - UFAL

Prof. Dr. Alciônio Saldanha de Oliveira - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2019

Dedicatória

A todos, que assim como eu, acreditam que a educação é a chave para um mundo melhor.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pois graças a Ele estou chegando ao fim dessa jornada e realizando o utópico sonho de obter o título de Mestre.

Aos meus pais, Geovando Florentino da Silva e Maria Sileide dos Santos Silva, por todo carinho, apoio, por sempre me incentivarem (em especial nos estudos), e por sempre fazerem tudo que podiam para dar a melhor criação possível a mim e a minha irmã; vocês sempre serão meus exemplos.

À minha querida noiva, Letícia Araújo de Carvalho, por todo o apoio que me deu durante os momentos difíceis ao longo do curso e por suportar com paciência os momentos de ausência durante as longas sextas-feiras de estudo em Campina Grande.

À minha irmã Jakeline dos Santos Silva por todo incentivo e apoio.

Agradeço a todos os meus familiares por sempre acreditarem em mim e me incentivarem durante todas as empreitadas da vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Alciônio Saldanha de Oliveira, por aceitar a tarefa de me orientar durante a realização desse trabalho.

Aos professores Dr. José Fernando Leite Aires e Dr. Vanio Fragoso de Melo, por aceitarem participar da banca examinadora.

Ao coordenador Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros, pela sua incansável dedicação para com o curso do PROFMAT na UFCG.

A todos os servidores da UAMAT, em especial a todos os professores vinculados ao PROFMAT por suas contribuições ao longo do curso.

Aos meus amigos/colegas de turma por todas as aflições, risadas e momentos de estudo compartilhados ao longo do curso.

Aos meus amigos, Bruno Vinícius Alves de Freitas, Dailton de Almeida Costa, Jadielson Silva de Oliveira e João Bosco de Souza, pelos momentos de estudo e descontração durante o curso de verão em 2018. Um agradecimento todo especial a Bruno Vinícius e a Jadielson, pois sem as madrugadas de discussão sobre a correnteza de um rio, jamais teria compreendido um determinado problema da disciplina MA11 - Números e funções reais.

Ao amigo e companheiro de viagem, Tiago Beserra Maciel, por toda ajuda durante o tempo em que viajamos juntos para Campina Grande.

Aos amigos Bruno Lopes Oliveira da Silva, Geraldo Erilson da Costa Silva Júnior, José Renato Alves de Mendonça, Marcos Raphael de França Cavalcante e Maria Eduarda de

Oliveira Gomes, pelos momentos calorosos e divertidos durante as nossas viagens à UFCG. Em especial ao amigo Bruno Lopes, por toda a ajuda que me deu ao longo da minha jornada.

Aos meus amigos/colegas de graduação do IFPE-Campus Pesqueira, pela amizade e pelos bons momentos que vivemos durante nossa graduação.

A todos os professores do IFPE-Campus Pesqueira, por tudo o que me ensinaram e pelos exemplos que me deram, em especial ao prof. MSc. Antonio Marcos da Silva Souto que foi meu orientador na graduação e também me apresentou ao PROFMAT.

Agradeço a todos da Escola Estadual Cônego Emanuel Vasconcelos pelo apoio, e em especial à direção dessa instituição por compreender as ausências e me incentivar a enfrentar essa jornada até o final.

Agradeço a todos da Escola Estadual EREM Quitéria Wanderley Simões pelo apoio, e em especial à direção dessa instituição por compreender minhas ausências e me incentivar até o final.

Ao meu amigo e colega de trabalho prof. Lívio David de Almeida, por me ajudar na construção do Abstract desse trabalho.

À profa. Renata Fernanda Felix de Araújo, pela revisão ortográfica e gramatical desse texto.

A todos aqueles que foram meus professores durante meus anos de estudante na educação básica.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização desse trabalho.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

Sem dúvidas, é indiscutível a importância das matrizes e dos sistemas lineares, tanto na matemática quanto para o estudo de outras áreas do conhecimento. Em virtude da importância desses objetos matemáticos, buscamos observar o currículo de matemática da educação básica e suas expectativas de aprendizagem sobre o ensino de matrizes e sistemas lineares. Voltando nosso olhar para os métodos de resolução dos sistemas lineares, descobrimos uma nova ferramenta a ser usada nessas resoluções: o teorema de Rouché-Capelli. Além disso, em nosso trabalho procuramos explorar os sistemas lineares, sob o ponto de vista teórico, com demonstrações rigorosas norteadas à luz dos conceitos da Álgebra Linear, e sob o ponto de vista prático, expondo uma série aplicações dos sistemas lineares à outras áreas do conhecimento, utilizando como método de resolução dos problemas o teorema de Rouché-Capelli.

Palavras-chave: Matrizes, Sistemas Lineares, Teorema de Rouché-Capelli.

Abstract

Undoubtedly, the importance of matrices and linear systems is indisputable, both in mathematics and in the study of other areas of knowledge. Due to the importance of these mathematical objects we seek to observe the mathematics curriculum of basic education and its expectations of learning about the teaching of matrices and linear systems. Turning our gaze to the methods of solving linear systems we have discovered a new tool to be used in these resolutions: Rouché-Capelli theorem. In addition, in our work we seek to explore linear systems, from the theoretical point of view, with rigorous demonstrations guided in the light of the concepts of Linear Algebra, and from the practical point of view, exposing a series of applications of linear systems to other areas of the knowledge, using as a method of solving the problems Rouché-Capelli theorem.

Keywords: Matrices, Linear Systems, Rouché-Capelli Theorem.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Durante nossos anos como estudantes da educação básica, e também da graduação, em se tratatando da Matemática, estudamos os sistemas lineares, porém sempre restritos a resoluções por métodos como o da adição e o escalonamento. No estudo das matrizes realizamos vários exercícios ao longo da educação básica e também da graduação, inclusive calculando o *Posto* de matrizes, mas foi apenas quando tivemos que escolher um tema de pesquisa para realização desse trabalho que fomos apresentados ao teorema de Rouché-Capelli.

Debruçando nossa atenção sobre esse método de resolução dos sistemas lineares, percebemos um novo caminho que agora daria um novo tratamento a resolução dos problemas. Pensando em fundamentá-lo adequadamente, desenvolvemos um capítulo dedicado a teoria das matrizes e sistemas lineares, contando com definições, teoremas, corolários e demonstrações. Quando nosso olhar voltou-se para o currículo de matemática da educação básica percebemos o abismo que foi colocado entre as matrizes e os sistemas lineares.

Quando falamos do ensino médio regular é ainda mais alarmante a situação, pois, apesar dos livros didáticos trazerem o estudo das matrizes, o currículo do nosso estado de Pernambuco não as inclui na proposta de instrução dos estudantes do referido nível de ensino, apenas nas expectativas de aprendizagem da educação integral. Esse tratamento dado às matrizes representa uma certa perda de conhecimento, pois historicamente o estudo destas caminhou lado a lado com a resolução de sistemas lineares.

Durante nossa análise dos livros, constatamos que eles trazem um espaço para as aplicações dos sistemas lineares, e, pensando nisso, pesquisamos algumas aplicações dos sistemas lineares em várias áreas. Na resolução dos problemas, bem como nos exemplos, usamos o teorema de Rouché-Capelli no intuito de mostrar uma nova ferramenta que pode ser usada na resolução dos sistemas lineares e fazer uma ponte com o estudo das matrizes, e assim facilitar a aprendizagem desses conceitos matemáticos.

1.1 Objetivos

Objetivo Geral

- Discutir a utilização do teorema de Rouché-Capelli na resolução de sistemas lineares.

Objetivos Específicos

- Estudar as propriedades das matrizes e sistemas lineares.
- Resolver sistemas lineares ultizando o método de escalonamento e o teorema de Rouché-Capelli.
- Discutir o que os documentos que norteiam a educação básica dizem sobre as matrizes e os sistemas lineares.
- Modelar problemas de outras áreas utilizando sistemas lineares.
- Comparar a utilização dos métodos "tradicionais" de resolução de sistemas lineares com o uso do teorema de Rouché-Capelli.

1.2 Organização

A organização do presente trabalho deu-se da seguinte forma: iniciamos com uma nota histórica sobre como os matemáticos britânicos do século XIX trabalhavam com as matrizes e os sistemas lineares. Na sequência, realizamos uma ampla discussão sobre matrizes, na qual trazemos definições, teoremas e propriedades sobre esse objeto matmático.

Nas seções seguintes do capítulo 2 abordamos as transformações de matrizes, descrevendo como realizar essas transformações elementares e as suas propriedades, trabalhamos as chamadas matrizes elementeres e novamente realizamos um recorte histórico no qual mencionamos os determinantes, mas sem entrar em muitos detalhes, pois nesse trabalho voltamos nossa atenção apenas para os sistemas lineares e usamos as matrizes como ferramenta para resolução dos mesmos.

Ao longo desse texto foi feita uma caracterização dos sistemas lineares: dizemos o que é esse objeto matemático, como encontrar suas soluções, classificação quanto ao número de soluções, métodos de soluções e como resolvê-los utilizando o teorema de Rouché-Capelli. Após a apresentação desse método de solução todos os problemas foram discutidos utilizando o referido teorema.

Fizemos uma discussão sobre como os sistemas lineares e as matrizes estão descritos no currículo de matemática da educação básica. Certamente não poderíamos deixar de analisar como os livros didáticos organizam e trabalham com as matrizes e os sistemas lineares. Essas considerações foram feitas na seção 3.2 do capítulo 3.

Dedicamos o capítulo 4 ao estudo de problemas que envolvem circuitos elétricos, equilíbrio de equações químicas e outros assuntos que a princípio não são diretamente ligados a matemática, mas podem ser modelados por sistemas lineares e resolvidos através da utilização do teorema de Rouché-Capelli.

No penúltimo capítulo desse trabalho fizemos uma comparação de métodos resolvendo problemas primeiro por adição ou escalonamento e em seguida usando o teorema de Rouché-Capelli. Na última seção do capítulo 5 tecemos alguns comentários sobre as diferentes resoluções.

Por fim, são feitos alguns comentários sobre todos os estudos realizados, e nesse momento sugerimos que em pesquisas futuras seja intensificado o estudo do uso das matrizes e, especificamente, do teorema de Rouché-Capelli na resolução dos sistemas lineares. No apêndice A apresentamos uma breve lista de exercícios, e no apêndice B temos as soluções desses problemas.

Capítulo 2

Sobre Matrizes, Sistemas de Equações Lineares e o Teorema de Rouché-Capelli

Nessa parte teórica do trabalho nossos estudos foram feitos e embasados nas referências [3], [8], [10], [13] e [14].

2.1 Matrizes: Definição e Propriedades

Nessa seção faremos um breve recorte histórico sobre como os matemáticos ingleses trabalharam com as matrizes no século XIX, vamos expor uma definição de matriz, bem como de propriedades e teoremas desse objeto matemático.

2.1.1 Um Pouco de História

A disputa entre Newton e Leibniz (ou, mais exatamente, entre seus adeptos) em torno da primazia da criação do Cálculo, foi negativa para a matemática inglesa, embora Newton tenha levado vantagem na polêmica. Considerando uma questão de honra nacional ser fiel ao seu mais eminente cientista, nos cem anos seguintes ao início desse episódio os matemáticos britânicos fixaram-se nos métodos geométricos puros, preferidos de Newton, em detrimento dos métodos analíticos, muito mais produtivos. Como os matemáticos da Europa Continental exploraram grandemente estes últimos métodos nesse período, a matemática britânica acabou ficando bem para trás.

Durante o século XIX houve uma reação e a matemática britânica conseguiu voltar ao primeiro plano, especialmente em álgebra, um campo que de um modo geral ficou marginalizado nesse meio tempo. Um dos responsáveis por essa reascensão foi Arthur Cayley (1821-1895).

Natural de Richmond, Inglaterra, Cayley descendia de uma família que conciliava talento e tradição. Desde muito cedo demonstrou grande aptidão para os estudos. Assim sendo, e atendendo a sugestões de alguns de seus professores, seus pais resolveram enviá-lo para estudar em Cambridge, em vez de iniciá-lo nos negócios da família. Então, em 1838 ingressa no Trinity College, onde iria se graduar com distinção máxima. Logo em seguida inicia-se no ensino, no próprio Trinity, mas desiste 3 anos depois, pois sua permanência exigiria abraçar a carreira religiosa, o que não estava em seus planos. Durante os próximos quinze anos Cayley dedicou-se a advocacia, mas com certeza não integralmente, como o mostram os mais de duzentos artigos que publicou no período, na área de matemática. Foi também nessa época que conheceu James Joseph Sylvester (1814-1897), outro dos grandes expoentes da álgebra britânica do século XIX, com quem estabeleceu sólida amizade, consolidada até por áreas de pesquisa comuns, como teoria dos invariantes. Em 1863 aceita o convite para ocupar uma nova cadeira de matemática pura criada em Cambridge, à testa da qual ficou até sua morte (salvo um semestre de 1882, em que deu cursos nos Estados Unidos).

Em volume de produção matemática, em todos os tempos, Cayley talvez só seja superado por Euler e Cauchy. Embora sua obra seja bastante diversificada, foi no campo da Álgebra, com a grande facilidade que tinha para formulações abstratas, que mais se sobressaiu. Assim, por exemplo, deve-se a ele, num artigo de 1854, a noção de *grupo abstrato*. (Galois, que introduziria o termo *grupo* em 1830, com o sentido atual, só considerara grupos de permutações.) Outra contribuição importante de Cayley, iniciada em 1843, é a Geometria Analítica n-dimensional em cuja elaboração utiliza determinantes e coordenadas homogêneas como instrumentos essenciais.

O início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855. Diga-se de passagem, porém, que o termo *matriz* já fora usado, com o mesmo sentido, cinco anos antes por Sylvester. Nesse artigo Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a idéia de matriz preceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário: de fato, os determinantes já eram usados há muito na resolução de sistemas lineares. Quanto às matrizes, Cayley as introduziu para simplificar a notação de uma transformação linear. Assim, em lugar de

$$\begin{cases} a\cdot x+b\cdot y=x' \\ c\cdot x+d\cdot y=y' \end{cases} \quad \text{escrevia} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A observação do efeito de duas transformações sucessivas sugeriu-lhe a definição de produto de matrizes. Daí chegou à ideia de inversa de uma matriz, o que obviamente pressupõe a de elemento neutro (no caso, a matriz identidade). Curiosamente, foi só num outro artigo, três anos depois, que Cayley introduziu o conceito de adição de matrizes e o de multiplicação de matrizes por escalares, chamando inclusive a atenção para as propriedades algébricas dessas operações.

Ao desenvolver a teoria das matrizes, como outros assuntos, a grande preocupação de Cayley era com a forma e a estrutura em Álgebra. O século XX se encarregaria de encontrar inúmeras aplicações para suas matrizes.

Nas etapas porteriores passamos a estudar as matrizes e suas propriedades, apresentando as definições e teoremas que julgamos necessários para construção da teoria das matrizes.

2.1.2 Uma Definição de Matriz

Definição 2.1 *Dados dois números naturais m e n não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas. Dizemos que $m \times n$ é a ordem da matriz.*

Em uma matriz qualquer M, cada elemento é indicado por a_{ij}. O índice i indica a linha e o índice j a coluna às quais o elemento pertence. Com a convenção de que as linhas sejam enumeradas de cima para baixo (de 1 até m) e as colunas, da esquerda para a direita (de 1 até n), uma matriz $m \times n$ é representada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Também podemos usar as seguintes notações:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \; ou \; M = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Uma matriz M do tipo $m \times n$ também pode ser indicada por:

$$M = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}; i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\} \text{ e } j \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$$

ou simplesmente, $M = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$.

Vejamos alguns exemplos de matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 1 \times 4. \tag{2.2}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 3 \times 1. \tag{2.3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 2 \times 2. \tag{2.4}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 & -7 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 3 \times 3. \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 3 \times 3. \tag{2.6}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 4 \times 4. \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 3 \times 3. \tag{2.8}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 4 \times 4. \tag{2.9}$$

2.1.3 Matrizes Especiais

Agora destacaremos alguns tipos de matrizes abordadas pelos autores [10] e [14], e que por apresentar determinadas características, recebem um nome especial:

1. *Matriz linha* é toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha (Veja (2.2)).

2. *Matriz coluna* é toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem um única coluna (Veja (2.3)).

3. *Matriz nula* é toda matriz que tem todos os seus elementos iguais a zero, isto é, $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ (Veja (2.4)).

4. *Matriz quadrada de ordem n* é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas (Veja (2.5)). Chamamos de diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n (Veja (2.1)) o conjunto dos elementos que têm os dois índices iguas, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}\}.$$

De modo semelhante, denomina-se diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm a soma dos índices igual a $n+1$, ou seja:

$$\{a_{ij} \mid i+j = n+1\} = \{a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \cdots, a_{n1}\}.$$

Por exemplo, como (2.5) é uma matriz quadrada de ordem 3, podemos constatar que sua diagonal principal é $\{8,4,3\}$ e sua diagonal secundária é $\{-7,4,-1\}$.

5. *Matriz triangular superior* é toda matriz quadrada cujos elementos que se encontram abaixo da diagonal principal são iguas a zero, isto é, $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ (Veja (2.6)).

6. *Matriz triangular inferior* é toda matriz quadrada cujos elementos que se encontram acima da diagonal principal são iguas a zero, isto é, $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$ (Veja (2.7)).

7. *Matriz diagonal* é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertecem a diagonal principal são iguais a zero, isto é, $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Portanto, podemos dizer que uma matriz é diagonal se ela for simultaneamente triangular superior e triangular inferior (Veja (2.8)).

8. *Matriz identidade de ordem n* (indica-se I ou I_n) é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1, isto é, $a_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$ (Veja (2.9)).

2.1.4 Operações com Matrizes

Definição 2.2 *Duas matrizes* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *e* $B = \left[b_{ij}\right]_{r\times s}$ *são iguais se* $m = r$, $n = s$ *e todos os seus elementos correspondentes (elementos com índices iguais) forem iguais* ($a_{ij} =$ $= b_{ij}$, *para todo* $1 \leq i \leq m$ *e para todo* $1 \leq j \leq n$).

Por exemplo, Matrizes $A = \begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 9 & \operatorname{sen} 90^{\text{o}} & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ são iguais, pois $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $\cdots$, $a_{23} = b_{23}$.

Definição 2.3 *Dadas duas matrizes* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *e* $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$, *a soma de A e B, denotada por* $A+B$, *é a matriz* $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ *de ordem* $m \times n$ *tal que* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, *para todo* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq n$. *A operação que transforma cada par de matrizes de mesma ordem na matriz* $C = A+B$ *chama-se adição de matrizes.*

Definição 2.4 *Dada a matriz* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, *chama-se de matriz oposta de A a matriz* $-A =$ $= \left[-a_{ij}\right]_{m\times n}$.

Proposição 2.1 *Se* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ *e* $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ *são matrizes de mesma ordem* $m \times n$*, então:*

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associatividade da adição);*

(ii) $A + B = B + A$ *(comutatividade da adição);*

(iii) $A + 0 = A$*, onde* 0 *denota a matriz nula* $m \times n$ *(elemento neutro);*

(iv) $A + (-A) = 0$*.*

Demonstração: As propriedades acima decorrem diretamente das definições de igualdade e adição de matrizes, desta forma para demonstrarmos estes resultados, basta usarmos propriedades dos números reais.

(i) Se $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ e $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, então $A + (B + C) = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij} + c_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\right]_{m\times n} = \left[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[c_{ij}\right]_{m\times n} = (A + B) + C$.

(ii) $A + B = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[b_{ij} + a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[b_{ij}\right]_{m\times n} + \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = B + A$.

(iii) $A + 0 = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[0_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + 0\right]_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = A$.

(iv) $A + (-A) = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[-a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + (-a_{ij})\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} - a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[0\right]_{m\times n} = 0$

■

Definição 2.5 *Dadas duas matrizes* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *e* $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$*, chama-se diferença de* $A - B$ *a matriz soma de A com a oposta de B, ou seja,* $A - B = A + (-B)$*.*

Definição 2.6 *Dado um número real k e uma matriz* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$*, definimos a matriz produto de A pelo escalar k como sendo a matriz* $\left[k \cdot a_{ij}\right]_{m\times n}$*, denotada por* $kA = \left[k \cdot a_{ij}\right]_{m\times n}$*.*

Proposição 2.2 *As seguintes propriedades se verificam para quaisquer matrizes*

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \text{ e } B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$$

de mesma ordem, e k e k' *em* $\mathbb{R}$*:*

(i) $k \cdot (A+B) = k \cdot A + k \cdot B$;

(ii) $(k+k') \cdot A = k \cdot A + k' \cdot A$;

(iii) $k \cdot (k' \cdot A) = (k \cdot k') \cdot A$;

(iv) $1 \cdot A = A$.

Demonstração: Para demonstrarmos estes resultados, basta usarmos propriedades dos números reais.

(i) $k \cdot (A+B) = k \cdot \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[k \cdot (a_{ij} + b_{ij})\right]_{m\times n} = \left[k \cdot a_{ij} + k \cdot b_{ij}\right]_{m\times n} =$

$= \left[k \cdot a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[k \cdot b_{ij}\right]_{m\times n} = k \cdot \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + k \cdot \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = k \cdot A + k \cdot B.$

(ii) $(k+k') \cdot A = (k+k') \cdot \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[(k+k') \cdot a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[k \cdot a_{ij} + k' \cdot a_{ij}\right]_{m\times n} =$

$= \left[k \cdot a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[k' \cdot a_{ij}\right]_{m\times n} = k \cdot \left[a_{ij}\right]_{m\times n} + k' \cdot \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = k \cdot A + k' \cdot A.$

(iii) $k \cdot (k' \cdot A) = k \cdot \left[k' \cdot a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[k \cdot (k' \cdot a_{ij})\right]_{m\times n} = \left[(k \cdot k') \cdot a_{ij}\right]_{m\times n} =$

$= (k \cdot k') \cdot \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = (k \cdot k') \cdot A.$

(iv) $1 \cdot A = 1 \cdot \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[1 \cdot a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = A.$

■

Neste ponto apresentaremos a definição de *multiplicação de matrizes*, bem como alguma de suas propriedades. A definição de produto de matrizes foi apresentada por Arthur Cayley (Inglaterra, 1821-1895), no trabalho intitulado “A Memoir on the Theory of Matrices”, publicado em 1858 na revista *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. No referido trabalho, Cayley notou que a multiplicação de matrizes, como ele definiu, simplificava em muito o estudo de sistemas de equações lineares. Também observou que esta multiplicação deixava de apresentar propriedades importantes, como a comutatividade e a lei do corte, e que uma matriz não nula não é necessariamente invertível.

Definição 2.7 *Sejam $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ duas matrizes. O produto de A e B, denotado por AB, é definido como a matriz $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times p}$ tal que*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$.

Sobre a multiplicação de matrizes achamos necessário tecer alguns comentários:

1. A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B;

2. O produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, ou seja, $C = AB$ é do tipo $m \times p$.

3. Dadas duas matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{n \times p}$, não é difícil perceber que o produto AB está definido. Para que exista o produto BA, devemos ter $m = p$.

4. Ainda considerando as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{n \times p}$ se $m = p$ e $m \neq n$, então as matrizes AB e BA são de ordens diferentes. Assim, para que AB e BA sejam da mesma ordem, devemos ter também $m = n$, ou seja, A e B devem ser matrizes quadradas e de mesma ordem.

5. A multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa. Por exemplo, consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Temos que
$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Na multiplicação de matrizes, podemos ter $AB = 0$ sem que necessariamente A ou B sejam uma matriz nula. De fato, tomemos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Note que $A \neq 0$ e $B \neq 0$, no entanto,
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.3 *Desde que as operações sejam possíveis, temos:*

(i) $A(B+C) = AB + AC$ *(distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição);*

(ii) $(A+B)C = AC + BC$ *(distributividade à direita da multiplicação em relação à adição);*

(iii) $(AB)C = A(BC)$ *(associatividade da multiplicação);*

(iv) $(k \cdot A)B = A(k \cdot B) = k(A \cdot B)$*, para todo* $k \in \mathbb{R}$*;*

(v) $AI = IA = A$ *(existência de elemento identidade);*

(vi) $A0 = 0A = 0$

(vii) Se A tem uma linha nula, então AB também tem uma linha nula, para qualquer matriz B.

Demonstração:

(i) Consideremos as matrizes $A = \left[a_{il}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{lj}\right]_{n\times p}$ e $C = \left[c_{lj}\right]_{n\times p}$.

Fazendo $A(B+C) = D = \left[d_{ij}\right]_{m\times p}$, temos

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\cdot b_{kj}+a_{ik}\cdot c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot c_{kj}.$$

Então, $A(B+C) = AB+AC$.

(ii) Dadas as matrizes $A = \left[a_{il}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{il}\right]_{m\times n}$ e $C = \left[c_{lj}\right]_{n\times p}$.

Fazendo $(A+B)C = D = \left[d_{ij}\right]_{m\times p}$, temos

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{kj})\cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\cdot c_{kj}+b_{ik}\cdot c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\cdot c_{kj}.$$

Portanto, $(A+B)C = AC+BC$.

(iii) Consideremos as matrizes $A = \left[a_{il}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{lj}\right]_{n\times p}$ e $C = \left[c_{jt}\right]_{p\times r}$.

Fazendo $AB = D = \left[d_{ij}\right]_{m\times p}$, $(AB)C = E = \left[e_{it}\right]_{m\times r}$ e $BC = F = \left[f_{lt}\right]_{n\times r}$, temos

$$e_{it} = \sum_{k=1}^{p}(d_{ik}\cdot c_{kt}) = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sk})\cdot c_{kt} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sk}\cdot c_{kt}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot\sum_{k=1}^{p}(b_{sk}\cdot c_{kt}) = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot f_{st}.$$ Então, $(AB)C = A(BC)$.

(iv) Consideremos as matrizes $A = \left[a_{il}\right]_{m\times n}$, $B = \left[b_{lj}\right]_{n\times p}$.

Fazendo $k\cdot A = C = \left[c_{il}\right]_{m\times n}$, $k\cdot B = D = \left[b_{lj}\right]_{n\times p}$ e $k\cdot AB = E = \left[e_{ij}\right]_{m\times p}$, temos

$$\sum_{s=1}^{n} c_{is}\cdot b_{sj} = \sum_{s=1}^{n}(k\cdot a_{is}\cdot b_{sj}) = k\cdot\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj}$$ e

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot d_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot(k\cdot b_{sj}) = k\cdot\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj}.$$

Logo, $(k\cdot A)B = A(k\cdot B) = k(A\cdot B)$.

(v) Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$, I_n a matriz identidade de ordem n e I_m a matriz identidade de ordem m. Fazendo $AI_n = B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$, temos $b_{ij} = a_{i1}\cdot 0 + a_{i2}\cdot 0 + a_{i3}\cdot 0 + \cdots + {} + a_{ij}\cdot 1 + \cdots + a_{in}\cdot 0 = a_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$. Agora, fazendo $I_mA = C = \begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$, temos $c_{ij} = 0\cdot a_{i1} + 0\cdot a_{i2} + 0\cdot a_{i3} + \cdots + 1\cdot a_{ij} + \cdots + 0\cdot a_{in} = a_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$. Assim, $AI_n = I_mA = A$.

(vi) O resultado segue dos fatos de que a multiplicação de números reais é comutativa e que o produto de qualquer número real por zero é sempre nulo.

(vii) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{il} \end{bmatrix}_{m\times n}$, $B = \begin{bmatrix} b_{lj} \end{bmatrix}_{n\times p}$. Suponhamos que a r-ésima linha de A seja nula. Fazendo $AB = C = \begin{bmatrix} cij \end{bmatrix}_{n\times p}$, segue, para cada $j = 1,2,3,\cdots,p$, que $c_{rj} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\cdot b_{kj}$. Como $a_{rk} = 0$ para cada $k = 1,2,3,\cdots,n$, temos que $c_{rj} = 0$ para cada $j = 1,2,3,\cdots,p$. Assim, a r-ésima linha de AB é nula. Logo, AB tem uma linha nula.

■

2.1.5 Transposta de uma Matriz

Definição 2.8 *Dada uma matriz* $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$*, chamamos de transposta de A, e denotamos por* A^t*, a matriz* $A^t = \begin{bmatrix} a'_{ji} \end{bmatrix}_{n\times m}$ *onde* $a'_{ji} = a_{ij}$*, para todo* $1 \leq i \leq n$ *e para todo* $1 \leq j \leq m$*.*

Consideremos as matrizes A, B e C tais que $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

e

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

temos que suas transpostas são $A^t = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B^t = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ e

$$C^t = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 & -2 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.4 *A matriz transposta apresenta as seguintes propriedades:*

(i) $(A^t)^t = A$ *para toda matriz* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$*;*

(ii) *Se* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *e* $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$*, então* $(A+B)^t = A^t + B^t$*;*

(iii) *Se* $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ *e* $k \in \mathbb{R}$*, então* $(kA)^t = kA^t$*;*

(iv) *Se* $A = \left[a_{il}\right]_{m\times n}$ *e* $B = \left[b_{lj}\right]_{n\times p}$*, então* $(AB)^t = B^tA^t$*.*

Demonstração:

(i) $(A^t)^t = \left(\left(\left[a_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t\right)^t = \left(\left[a'_{ji}\right]_{n\times m}\right)^t = \left[a''_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = A.$

(ii) Fazendo $A + B = C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, temos

$$(A+B)^t = \left(\left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t = \left(\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t = \left(\left[c_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t =$$

$$= \left[c'_{ji}\right]_{n\times m} = \left[a'_{ji}+b'_{ji}\right]_{n\times m} = \left[a'_{ji}\right]_{n\times m} + \left[b'_{ji}\right]_{n\times m} = A^t + B^t.$$

(iii) Fazendo $ka_{ij} = d_{ij}$, temos $(kA)^t = \left(\left[k\cdot a_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t = \left(\left[d_{ij}\right]_{m\times n}\right)^t = \left[d'_{ji}\right]_{n\times m} =$

$$= \left[k\cdot a'_{ji}\right]_{n\times m} = k\cdot\left[a'_{ji}\right]_{n\times m} = k\left(\left[a_{ij}\right]_{n\times m}\right)^t = kA^t.$$

(iv) Fazendo $AB = C = \left[c_{ij}\right]_{m\times p}$ e, $(AB)^t = C^t = \left[c'_{ji}\right]_{p\times m}$, resulta:

$$c'_{ji} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b'_{jk}\cdot a'_{ki}.$$ Logo, $(AB)^t = B^tA^t$.

■

Definição 2.9 *Uma matriz quadrada* $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$*, é chamada de:*

(i) *Simétrica se* $A^t = A$*, ou seja,* $a_{ij} = a_{ji}$ *para todos* $1 \leq i,\ j \leq n$*;*

(ii) *Antissimétrica se* $A^t = -A$*, ou seja,* $a_{ij} = -a_{ji}$ *para todos* $1 \leq i,\ j \leq n$*.*

Note que (2.10) é um exemplo de matriz simétrica e (2.11) é uma matriz antissimétrica. Os elementos da diagonal principal de uma matriz antissimétrica são todos nulos.

2.1.6 Inversa de uma Matriz

Definição 2.10 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A é matriz invertível se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Se A não é invertível, dizemos que A é uma matriz singular.*

Definição 2.11 *Uma matriz quadrada A é dita invertível se A admite uma matriz inversa.*

Proposição 2.5 *Se A é invertível, então sua inversa é única.*

Demonstração: Vamos admitir que exista uma matriz C tal que $AC = CA = I_n$. Então $C = I_nC = (AB)C = (BA)C = B(AC) = BI_n = B$.

∎

Definição 2.12 *Dada uma matriz invertível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*

Vejamos a seguir algumas propriedades das matrizes inversas.

Proposição 2.6 *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.*

(i) *Se A é invertível, então A^{-1} é também invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.*

(ii) *Se A e B são invertíveis, então AB também é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

(iii) *A é invertível se, e somente se, A^t é invertível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

(iv) *Se A tem uma linha nula, então A não é invertível.*

Demonstração:

(i) Como A é invertível, temos $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. Agora, A^{-1} é invertível se existe uma matriz quadrada C de ordem n tal que $A^{-1}C = CA^{-1} = I$. Ora, $C = A$ satisfaz esta condição. Logo, pela unicidade da matriz inversa, A é a inversa de A^{-1}, ou seja, A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Por (iii) e (v) da Proposição 2.3, segue que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} =$ $= AA^{-1} = I$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$. Logo, $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB , ou seja, AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(iii) $(\Rightarrow)$ Queremos provar que A^t é invertível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, ou seja, queremos que $A^t(A^{-1})^t = I$ e $(A^{-1})^tA^t = I$. Como A é invertível, então $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Usando este fato e o item (iv) da Proposição 2.4, temos que

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I \text{ e } (A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I.$$

Logo, pela unicidade da matriz inversa, $(A^{-1})^t$ é a inversa de A^t, ou seja, A^t é invertível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, como A^t é invertível e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, temos

$$(A^{-1})^t A^t = A^t (A^{-1})^t = I.$$

Por (i) e (iv) da Proposição 2.4, segue que $[(A^{-1})^t A^t]^t = [(AA^{-1})^t]^t = AA^{-1} = I$ e $[A^t(A^t)^{-1}]^t = [(A^{-1}A)^t]^t = A^{-1}A = I$. Logo, pela unicidade da matriz inversa, A^{-1} é a inversa de A, ou seja, A é invertível.

(iv) Pela Proposição 2.3 (vii), temos que AC possui uma linha nula, qualquer que seja a matriz quadrada C de ordem n. Assim, como I não possui uma linha nula, segue que não existe matriz C tal que $AC = I$. Logo, A não é invertível.

■

2.2 Transformação de Matrizes

Nesta seção trataremos das transformações de matrizes, pois estas operações serão de grande utilidade quando estivermos trabalhando com sistemas lineares. Assim, estaremos expondo uma série de propriedades e definições que julgamos importantes em nosso estudo.

2.2.1 Transformações Elementares de Matrizes

Definição 2.13 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Para cada $1 \leq i \leq m$, denotemos por L_i a i-ésima linha de A. Definimos as transformações elementares nas linhas da matriz A como segue:*

(i) Permutação das linhas L_i e L_j (indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$).

(ii) Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com c vezes uma outra linha L_j (indicada por $L_i \to L_i + cL_j$, sendo c um número real não nulo).

(iii) Multiplicação de uma linha L_i por um número real c não nulo (indicada por $L_i \to cL_i$).

Tomemos, por exemplo, a matriz A tal que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ para efetuarmos algumas operações elementares. Assim,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to -\frac{1}{3}L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.14 *Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. Dizemos que a matriz A é equivalente por linhas à matriz B se B pode ser obtida pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre as linhas de A.*

Por exemplo, as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são equivalentes por linhas já que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - 3L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos concluir que se A é equivalente por linhas a uma matriz B, então B é equivalente por linha a matriz A, já que toda transformação elementar sobre linhas é reversível. De agora em diante quando duas matrizes A e B forem equivalentes por linhas, usaremos a seguinte notação $A \sim B$, e diremos simplesmente que A e B são *matrizes equivalentes*.

Ainda sobre notações, será conveniente indicarmos por e uma transformação qualquer efetuada em uma matriz A para obtermos uma matriz B equivalente por linhas a matriz A. Então, se e representa uma das transformações elementares nas linhas de uma matriz A de ordem $m \times n$, denotada por $e(A)$ a matriz obtida de A aplicando-lhe a transformação e, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.7 *Toda transformação elementar e nas linhas de matrizes é reversível, no sentido de que existe uma transformação elementar e' tal que $e'(e(A)) = e(e'(A)) = A$.*

Demonstração: Se e é uma transformação elementar do tipo $L_i \leftrightarrow L_j$, tome $e' = e$. Se e é uma transformação elementar do tipo $L_i \to cL_i$, tome e' como a transformação $L_i \to \dfrac{1}{c}L_i$. Finalmente, se e é uma transformação elementar do tipo $L_i \to L_i + cL_j$, tome e' como a transformação $L_i \to L_i - cL_j$.

■

2.2.2 Forma Escalonada de uma Matriz

Definição 2.15 *Uma matriz A de ordem $m \times n$ se diz na forma escalonada se for nula, ou se:*

(i) *o primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é* 1*;*

(ii) *cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;*

(iii) *toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas; e*

(iv) *se $L_1, \cdots, L_p$ são as linhas não nulas e se o primeiro elemento não nulo da linha L_i ocorre na k_i-ésima coluna, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_p$.*

Por exemplo, vamos considerar as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Observe que a matriz A está na forma escalonada, pois todas as condições da definição anterior são satisfeitas, mas as matrizes B e C não estão na forma escalonada, pois B não satisfaz a condição (ii) da definição 2.15, enquanto a matriz C não satisfaz as condições (i) e (iv) da definição acima.

O resultado que apresentaremos a seguir garantirá que toda matriz é equivalente por linhas a uma matriz na forma escalonada, ou seja, esse algoritmo *reduz por linhas* uma matriz não nula qualquer a uma matriz na forma escalonada. *Reduzir por linhas* significa transformar uma matriz usando transformações elementares sobre linhas. Esse processo é também chamado de *escalonamento* de matrizes.

1. Seja k_1 a primeira coluna da matriz dada com algum elemento não nulo. Troque as linhas entre si de modo que esse elemento não nulo apareça na primeira linha, isto é, de modo que na nova matriz $a_{1k_1} \neq 0$.

2. Para cada $i > 1$, realize a transformação $L_i \to L_i - \dfrac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}} L_1$.

   Repita os passos 1 e 2 na primeira matriz assim obtida, ignorando a primeira linha. Novamente, repita os passos 1 e 2 nessa nova matriz, ignorando as duas primeiras linhas etc., até alcançar a última linha não nula.

3. Se $L_1, \cdots, L_p$ são as linhas não nulas da matriz obtida após terminar o processo acima e se k_i é a coluna na qual aparece o primeiro elemento não nulo a_{ik_i} da linha L_i, aplique as transformações $L_i \to \dfrac{1}{a_{ik_i}} L_1$ para todo $1 \leq i \leq p$.

4. Realize na matriz obtida até então as transformações

$$L_l \to L_i - a_{lk_i} L_i, \; l = 1, \cdots, i-1,$$

para $i = 2$. Depois para $i = 3$, e assim por diante, até $i = p$. Dessa forma, obteremos uma matriz na forma escalonada que é equivalente por linhas a matriz dada.

Teorema 2.8 *Toda matriz é equivalente a uma única matriz na forma escalonada.*

Demonstração: Nossa demonstração será dividida em duas partes, primeiro mostraremos a existência e depois a unicidade.

Existência: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ qualquer. Se a primeira linha de A é nula, então a condição (i) da Definição 2.15 está satisfeita no que diz respeito a esta linha. Caso contrário, seja K o menor inteiro tal que $a_{1k} \neq 0$. Multipliquemos a primeira linha por $\dfrac{1}{a_{1k}}$ e então a condição (i) da Definição 2.15 fica satisfeita. Agora, para cada $i \geq 2$, somemos $(-a_{ik})$ vezes a primeira linha à linha L_i. Como resultado, temos uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da primeira linha é 1 e ocorre na coluna k. Além disso, todos os outros elementos da coluna k são nulos.

Consideremos agora a matriz B obtida acima. Se a segunda linha de B for nula, nada fazemos no que diz respeito a esta linha. Caso contrário, seja k' o menor inteiro tal que $b_{2k'} \neq 0$. Multipliquemos a segunda linha por $\dfrac{1}{b_{2k'}}$ e, a seguir, para cada $i \geq 3$, somemos $(-b_{ik'})$ vezes a segunda linha à linha L_i, obtendo, assim, uma matriz cujo primeiro elemento não nulo da segunda linha é 1 e todos os outros elementos da coluna k' são nulos.

Repitamos o procedimento acima em relação às demais linhas (terceira, quarta, ... , m-ésima), obtendo no final uma matriz M que é equivalente à matriz A e que satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 2.15. Caso M ainda não satisfaça as condições (iii) e (iv) da Definição 2.15, basta efetuarmos um número finito de permutações das linhas de M. Logo, toda matriz é equivalente a uma matriz na forma escalonada.

Unicidade: Afirmemos primeiramente que *duas matrizes na forma escalonada que são equivalentes só podem ser iguais*. De fato, nenhuma transformação elementar (exceto a multiplicação de uma linha por 1) pode ser efetuada numa matriz na forma escalonada sem que ela perca esta condição.

Agora, suponhamos que possamos obter duas matrizes na forma escalonada, N e P, através de transformações elementares efetuadas sobre as linhas de uma matriz A qualquer. Teremos, então, $A \sim N$ e $A \sim P$. Como as transformações elementares são reversíveis, de acordo com a Proposição 2.7, segue que N e P são equivalentes, e, portanto, pela afirmação destacada acima, $N = P$.

■

A primeira parte da demonstração anterior, existência da matriz equivalente na forma escalonada, garante a eficácia do algoritmo para reduzir por linhas uma matriz não nula qualquer a uma matriz na forma escalonada, em outras palavras, garante que podemos sempre escalonar uma matriz não nula qualquer.

2.2.3 Matrizes Elementares

Definição 2.16 *Uma matriz elementar de ordem n é uma matriz quadrada de ordem n obtida da matriz identidade I_n a partir da aplicação de uma transformação elementar, isto é, trata-se de uma matriz da forma $E = e(I_n)$, onde e é uma transformação elementar.*

Por exemplo, a matriz identidade é uma matriz elementar (pois podemos considerar a transformação elementar $e : L_i \to 1 \cdot L_i$ sobre qualquer linha L_i de I), e as matrizes

$$e(I_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } e : L_1 \leftrightarrow L_2\,,$$

e

$$e(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ onde } e : L_1 \to L_1 + L_2\,,$$

são matrizes elementares de ordem 2 e de ordem 3, respectivamente.

Sendo A uma matriz de ordem $m \times n$ e e uma transformação elementar. O teorema a seguir nos diz que a matriz $e(A)$ pode ser obtida como o produto da matriz elementar $e(I_m)$ pela matriz A.

Teorema 2.9 *Seja e uma transformação elementar sobre matrizes. Consideremos a matriz elementar $E = e(I_m)$. Então, $e(A) = EA$, qualquer que seja a matriz A de ordem $m \times n$.*

Demonstração: Seja $EA = D = \left[d_{ij}\right]_{m\times n}$. Denotemos por b_{ij} o elemento na linha i e coluna j de E, com $1 \leq i,\, j \leq m$. Temos três casos a considerar (um para cada tipo de transformação elementar):

$1^{\mathbf{o}}$ **Caso:** e é a transformação elementar $L_r \leftrightarrow L_s$.

Analisando as linhas de E:

(i) para as linhas $i = 1, 2, \cdots, m$, com $i \neq r$ e $i \neq s$, temos $b_{ii} = 1$ e $b_{ij} = 0$, com $j \neq i$;

(ii) para a linha r, temos $b_{rs} = 1$ e $b_{rj} = 0$, com $j \neq s$; e

(iii) para a linha s, temos $b_{sr} = 1$ e $b_{sj} = 0$, com $j \neq r$.

Os elementos das linhas $i = 1, 2, \cdots, m$, com $i \neq r$ e $i \neq s$, de $D = EA$ são da forma (para $j = 1, ..., n$) $d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot a_{kj} = b_{ii} \cdot a_{ij} = a_{ij}$, uma vez que, por (i), somente para $k = i$ teremos $b_{ik} = 1$ e as demais parcelas do somatório se anulam. Assim, as linhas diferentes de r e s em D são iguais às linhas correspondentes de A.

Os elementos da linha r de D são da forma (para $j = 1,...,n$)

$$d_{rj} = \sum_{k=1}^{m} b_{rk} \cdot a_{kj} = b_{rs} \cdot a_{sj} = a_{sj},$$

uma vez que, por (ii), somente para $k = s$ teremos $b_{rk} = 1$ e as demais parcelas do somatório se anulam. Com isso, a linha r de D é igual à linha s de A.

Por fim, os elementos da linha s de D são da forma (para $j = 1,...,n$)

$$d_{sj} = \sum_{k=1}^{m} b_{ks} \cdot a_{kj} = b_{sr} \cdot a_{rj} = a_{rj},$$

uma vez que, por (iii), somente para $k = r$ teremos $b_{sk} = 1$ e as demais parcelas do somatório se anulam. Logo, a linha s de D é igual à linha r de A. Portanto, D corresponde à matriz A com as linhas r e s trocadas.

$2^{\mathbf{o}}$ **Caso:** e é a transformação elementar $L_r \to L_r + cL_s$. Neste caso, as linhas $i = = 1,2,\cdots,m$, com $i \neq r$, de E são iguais às linhas correspondentes de I_m, ou seja, para todo $i \neq r$ temos $b_{ii} = 1$ e $b_{ij} = 0$, com $j \neq i$. Para a linha r, temos $b_{rs} = c$, $b_{rr} = 1$ e $b_{rj} = 0$, com $j \neq r$ e $j \neq s$.

Os elementos das linhas $i = 1,2,\cdots,m$, com $i \neq r$, de D são da forma (para $j = 1,\cdots,n$) $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot a_{kj} = b_{ii} \cdot a_{ij} = a_{ij}$, uma vez que $b_{ii} = 1$ e $b_{ik} = 0$, com $k \neq i$. Assim, as linhas diferentes de r em D são iguais às linhas correspondentes de A.

Os elementos da linha r de D são da forma (para $j = 1,...,n$)

$$d_{rj} = \sum_{k=1}^{m} b_{rk} \cdot a_{kj} = b_{rr} \cdot a_{rj} + b_{rs} \cdot a_{sj} = a_{rj} + c \cdot a_{sj},$$

uma vez que $b_{rr} = 1$, $b_{rs} = c$ e os demais termos do somatório se anulam. Logo, a linha r de D corresponde à linha r de A somada com a linha s multiplicada por c. Logo, D corresponde à matriz A com a linha r somada à linha s multiplicada por c.

$3^{\mathbf{o}}$ **Caso:** e é a transformação elementar $L_r \to cL_r$. Neste caso, as linhas $i = 1,2,\cdots,m$, com $i \neq r$, de E são iguais às linhas correspondentes de I_m, ou seja, para todo $i \neq r$ temos $b_{ii} = 1$ e $B_{ij} = 0$, com $j \neq i$. Para a linha r, temos $b_{rr} = c$ e $b_{rj} = 0$, com $j \neq r$.

Os elementos das linhas $i = 1,2,\cdots,m$, com $i \neq r$, de D são da forma (para $j = 1,\cdots,n$) $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot a_{kj} = b_{ii} \cdot a_{ij} = a_{ij}$, uma vez que $b_{ii} = 1$ e $b_{ik} = 0$, com $k \neq i$. Assim, as linhas diferentes de r em D são iguais às linhas correspondentes de A.

Os elementos da linha r de D são da forma (para $j = 1,\cdots,n$) $d_{rj} = \sum\limits_{k=1}^{m} b_{rk} \cdot a_{kj} = = b_{rr} \cdot a_{rj} = c \cdot a_{rj}$, uma vez que $b_{rr} = c$ e $b_{rk} = 0$, com $k \neq r$. Logo, a linha r de D corresponde à linha r de A multiplicada por c. Portanto, D corresponde à matriz A com a linha r multiplicada por c.

■

Corolário 2.10 *Sejam A e B matrizes de mesma ordem $m \times n$. Então, $A \sim B$ se, e somente se, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \cdots, E_s$ de ordem m tais que $E_s \cdots E_2 E_1 A = B$.*

Demonstração: Pela Definição 2.14, A é equivalente a B quando existem transformações elementares $e_1, \cdots, e_s$ tais que $e_s(\cdots(e_2(e_1(A)))) = B$. Mas, pelo teorema anterior, essa igualdade $E_s \cdots E_2 E_1 A = B$, onde $E_i = e_i(I_m)$, para cada $1 \leq i \leq s$.

■

Corolário 2.11 *Toda matriz elementar é invertível e sua inversa também é uma matriz elementar.*

Demonstração: Seja E uma matriz elementar. Seja e a transformação elementar tal que $E = e(I)$. Se e' é a transformação elementar inversa de e (conforme Proposição 2.7) e se $E' = e'(I)$, então, pelo Teorema 2.9, temos $I = e'(e(I)) = e'(E) = e'(I)E = E'E$ e $I = e(e'(I)) = = e(E') = e(I)E' = EE'$. Logo, E é invertível e $E^{-1} = E'$.

■

Pelo Corolário 2.11, sabemos como inverter uma matriz elementar. Por exemplo, se considerarmos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, podemos concluir que A e B são invertíveis, já que A e B são matrizes elementares. De fato, $A = e_1(I_3)$ com $e_1 : L_1 \leftrightarrow L_2$ e $B = e_2(I_3)$ com $e_2 : L_1 \to L_1 + 2 \cdot L_2$. Assim, pelo Corolário 2.11, $A^{-1} = e'_1(I_3)$, onde e'_1 é a transformação elementar inversa de e_1, e $B^{-1} = e'_2(I_3)$, onde e'_2 é a transformação elementar inversa de e_2. Mais precisamente, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

O teorema a seguir caracteriza as invertíveis.

Teorema 2.12 *Para uma matriz quadrada A de ordem n, são equivalentes:*

(i) A é invertível;

(ii) Se B é uma matriz na forma escalonada equivalente a A, então $B = I_n$;

(iii) A é uma matriz elementar ou um produto de matrizes elementares.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Se B é equivalente a A, então, pelo Corolário 2.10, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \cdots, E_s$ tais que $E_s \cdots E_2 E_1 A = B$. Como, pelo Corolário 2.11, cada E_i é invertível e A, por hipótese, é invertível, temos que B é invertível (por (ii) da Proposição 2.6). Além disso, por (iv) da Proposição 2.6, segue que B não possui linhas nulas, e, por estar na forma escalonada, de acordo com a Definição 1.15, todos os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1 e todos os seus outros elementos são nulos. Logo, $B = I_n$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como $B \sim A$, por hipótese, então, pelo Corolário 2.10, $E_s \cdots E_2 E_1 A = B =$ $= I_n$, onde $E_1, E_2, \cdots, E_s$ são matrizes elementares (e invertíveis, conforme o Corolário 2.11). Assim, temos que $A = E_1{}^{-1} E_2{}^{-1} \cdots E_s{}^{-1} I_n$ (pela (ii) da Proposição 2.6). Como cada $E_i{}^{-1}$ é uma matriz elementar (de acordo com o Corolário 2.11) e I_n também é uma matriz elementar, o resultado segue.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Como matrizes elementares são invertíveis (conforme o Corolário 2.11) e produtos de matrizes invertíveis são invertíveis (por (ii) da Proposição 2.6), segue que A é invertível.

■

Proposição 2.13 *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n.*

(i) Se $AB = I$, então A é invertível e $A^{-1} = B$.

(ii) Se AB é invertível, então A e B são invertíveis.

Demonstração:

(i) Suponhamos que A não seja invertível. Seja C a matriz equivalente a A na forma escalonada (de acordo com o Teorema 2.8). Pelo Teorema 2.12, $C \neq I_n$, e, por estar na forma escalonada (conforme a Definição 2.15), C tem uma linha nula. Pelo Corolário 2.10, $C = E_s \cdots E_2 E_1 A$, onde $E_1, E_2, \cdots, E_s$ são matrizes elementares. Por (vii) da Proposição 2.3, $CB = E_s \cdots E_2 E_1 AB$ possui uma linha nula. Assim, $AB =$ $= E_1{}^{-1} E_2{}^{-1} \cdots E_s{}^{-1} CB$ também tem uma linha nula, o que é um absurdo, pois, por hipótese, $AB = I$. Logo, A é invertível. Além disso, por (iii) e (v) da Proposição 2.3, $A^{-1} = A^{-1} I = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$.

(ii) Como AB é invertível, existe uma matriz C tal que $(AB)C = C(AB) = I$. Assim, $(AB)C = I \Rightarrow A(BC) = I$ (de acordo com (iii) da Proposição 2.3) $\Rightarrow A$ é invertível (conforme (i), pois, neste caso, $A^{-1} = BC$). Por outro lado, $C(AB) = I \Rightarrow (CA)B = I \Rightarrow B$ é invertível (novamente por (i), pois, neste caso, $B^{-1} = CA$). Logo, A e B são invertíveis.

■

Pela Definição 2.11, uma matriz quadrada A é invertível quando existe uma matriz quadrada B tal que $AB = I$ e $BA = I$. No entanto, de acordo com (i) da Proposição 2.13, basta encontrarmos B tal que $AB = I$ ou tal que $BA = I$ para que A seja invertível. Ou seja, se uma das duas igualdades é satisfeita, então a outra é automaticamente satisfeita.

Proposição 2.14 *Sejam A uma matriz invertível e $e_1, e_2, \cdots, e_s$ uma sequência de transformações elementares tais que $e_s(\cdots(e_2(e_1(A)))) = I$. Então, essa mesma sequência de transformações elementares aplicadas a I produz A^{-1}, isto é, $e_s(\cdots(e_2(e_1(I)))) = A^{-1}$.*

Demonstração: Para cada $1 \leq i \leq s$, seja E_i a matriz elementar correspondente à transformação elementar e_i. Então, $E_s \cdots E_2 E_1 A = I$. Assim, $(E_s \cdots E_2 E_1 I) A A^{-1} = I A^{-1}$. Portanto, $E_s \cdots E_2 E_1 I = A^{-1}$.

■

O uso do Teorema 2.12 e da Proposição 2.14 nos fornece um método para inversão de matrizes por meio de transformações elementares. Para ilustrarmos esse método, consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$. Se aplicarmos uma sequência de transformações elementares em A até obtermos uma matriz B na forma escalonada, pelo Teorema 2.12, A é invertível se, e somente se, $B = I_3$. Se $B = I_3$, então, pela Proposição 2.14, essa mesma sequência de transformações elementares aplicadas em I_3 resultará em A^{-1}. Assim, vamos formar a matriz $\begin{bmatrix} A & | & I_3 \end{bmatrix}$ de ordem 3×6 e reduzi-la a uma matriz na forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} A & | & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to -L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to -L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \to L_1 - 2L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como obtemos uma matriz na forma $\begin{bmatrix} I_3 & | & C \end{bmatrix}$, temos que A é invertível e $C = A^{-1}$. Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Consideremos agora a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Ao reduzirmos a matriz $\begin{bmatrix} A & | & I_3 \end{bmatrix}$ a uma matriz na forma escalonada, obtemos a matriz $\begin{bmatrix} B & | & C \end{bmatrix}$, onde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e portanto, diferente de I_3. Logo, A não é invertível por ser equivalente a uma matriz com uma linha nula.

2.3 Sistemas Lineares

Nesta seção, que novamente iniciamos com um recorte histórico, vamos pôr em prática toda teoria desenvolvida anteriormente com as matrizes para resolver sistemas de equações lineares. Apresentaremos ao longo desta seção as propriedades e métodos de solução dos sistemas lineares. Por fim apresentaremos o teorema do *Posto*, mais conhecido como Teorema de Rouché-Capelli em homenagem aos matemáticos Eugène Rouché (França, 1832 - 1919) e Alfredo Capelli (Itália, 1855 - 1910).

2.3.1 De Volta à História

Um pouco à frente neste trabalho mencionaremos os *sistemas de Cramer*. Quando mencionamos o nome do matemático Gabriel Cramer o associamos quase que de imediato a chamada regra de Cramer para resolução de sistemas lineares. Essa regra requer o uso de determinantes na resolução de sistemas lineares, porém como não é intenção nossa entrar em detalhes no estudo de determinantes, mencionamos apenas um recorte hitórico sobre como se desenrolou o estudo desse objeto matemático ao longo da história. Os interessados em estudar melhor os determinantes e a regra de Cramer podem consultar [2], [10], [11] e [12].

Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto recebeu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação - que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Exemplos desse procedimento encontram-se nos *Nove Capítulos Sobre a Arte da Matemática*, um texto que data provavelmente do século III a.C.

Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas).

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e pelos termos independentes (este determinante deve ser nulo). Para tanto criou até uma notação com índices para os coeficientes: o que hoje, por exemplo, escreveríamos como a_{12}, Leibniz indicava por 1_2.

A regra de Cramer para resolver sistemas de n equações por n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698 - 1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente em 1748 no seu *Treatise of Algebra*. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704 - 1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou a regra (independentemente), mas depois, na sua *Introdução à Análise das Curvas Planas* (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $A+By+Cx+Dy^2+Exy+x^2=0$.

O francês Étienne Bézout (1730 - 1783), autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou em 1764 o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. Coube a outro francês, Alexandre Vandermonde (1735 - 1796), em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares - embora também os usasse na resolução desses sistemas. O importante *teorema de Laplace*, que permite a expansão de um determinante através dos menores de r filas escolhidas e seus respectivos complementos algébricos, foi demonstrado no ano seguinte pelo próprio Laplace num artigo que, a julgar pelo título, nada tinha a ver com o assunto: *Pesquisas Sobre o Cálculo Integral e o Sistema do Mundo*.

O termo *determinante*, com o sentido atual, surgiu em 1812 num trabalho de Cauchy sobre o assunto. Neste artigo, apresentado à Academina de Ciências, Cauchy resumiu e simplificou o que era conhecido até então sobre determinantes, melhorou a notação (mas a atual com duas barras verticais ladeando o quadrado de números só surgiria em 1841 com Arthur Cayley) e deu uma demonstração do teorema da multiplicação de determinantes - meses antes J. F. M. Binet (1786 - 1856) dera a primeira demonstração desse teorema, mas a de Cauchy era superior.

Além de Cauchy, quem mais contribuiu para consolidar a teoria dos determinantes foi o alemão Carl G. J. Jacobi (1804 - 1851), cognominado às vezes “o grande algorista”. Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje elementarmente. Como algorista, Jacobi era um entusiasta da notação de determinante, com suas potencialidades. Assim, o importante conceito de *jacobiano* de uma função, salientando um dos pontos mais característicos de sua obra, é uma homenagem das mais justas.

2.3.2 Caracterizando Sistemas Lineares

Definição 2.17 *Chamamos de equação linear sobre $\mathbb{R}$ nas incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$, toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b$, com $n \geq 1$.*

Dizemos que uma equação linear possui solução se existir uma sequência ou n-nupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ tais que a sentença

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b$$

seja verdadeira. Por exemplo, se considere a equação linear $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$, a sequência $(1,2,3,-2)$ é solução, pois $2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) - (3) + (-2) = 3$ é uma sentença verdadeira, porém a sequência $(1,1,2,1)$ não é solução, pois $2 \cdot (1) + 3 \cdot (1) - (2) + (1) = 3$ é uma sentença falsa.

Definição 2.18 *Um sistema linear de m equações com n incógnitas é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Se $m = n$, então chamamos simplesmente de sistema linear de ordem n.*

Assim, podemos representar um sistema linear S da seguinte forma

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.12}$$

Dizemos que a sequência ou n-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear S, se for solução de *todas* as equações de S, isto é:

$$\begin{array}{ll} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 & \text{(sentença verdadeira)} \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 & \text{(sentença verdadeira)} \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + a_{33}\alpha_3 + \cdots + a_{3n}\alpha_n = b_3 & \text{(sentença verdadeira)} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \ddots \quad \cdots \quad \cdots & \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + a_{m3}\alpha_3 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m & \text{(sentença verdadeira)} \end{array}$$

Por exemplo, considere o sistema $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$, o qual admite como uma solução a tripla ordenada $(1,2,3)$, pois

$$\begin{array}{ll} 1 + 2 + 3 = 6 & \text{(sentença verdadeira)} \\ 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 & \text{(sentença verdadeira)} \\ 3 \cdot 1 - 2 + 3 = 4 & \text{(sentença verdadeira).} \end{array}$$

Definição 2.19 *Um sistema linear é chamado de impossível (ou incompatível) se não admite solução. Um sistema linear que admite uma única solução é chamado de possível (ou compatível) e determinado. Se um sistema linear admite mais do que uma solução, então ele é chamado de possível (ou compatível) e indeterminado.*

Definição 2.20 *Chamamos de sistema linear homogêneo todo sistema S que, na notação da Definição 2.18, tiver* $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_m = 0$.

Note que, um sistema linear homogêneo com n incógnitas é sempre possível, pois admite como uma solução a n-upla $(0,0,0,\cdots,0)$, chamada *solução trivial*. Qualquer outra solução, se existir, é dita *solução não trivial* do sistema.

Agora queremos chamar a atenção para o seguinte fato: dado um sistema linear S de m equações e n incógnitas, podemos representar S matricialmente para tal consideremos as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

De fato, (2.12) realmente pode ser escrito matricialmente basta fazermos $S : AX = B$. Neste caso as matrizes acima são chamadas *matrizes de um sistema*, onde (2.13) é a *matriz incompleta* ou *matriz dos coeficientes* do sistema, (2.14) é denomida *matriz das incógnitas* e (2.15) é a *matriz dos termos independentes*. Note que, (2.16) foi obtida a partir da matriz A, acrescentando-se a esta a coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema, ou seja, a matriz B. Neste caso, dizemos que (2.16) é a *matriz completa* ou *matriz ampliada* do sistema. Por exemplo, considere o sistema linear $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$, temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ é *matriz incompleta*, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ é a *matriz das incógnitas*, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ é *matriz dos termos independentes* e $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ é a *matriz completa* do sistema.

2.4 Sistemas Lineares e Alguns Métodos de Resolução

Nesta seção vamos expor alguns métodos que podemos usar na resolução de sistemas lineares.

2.4.1 Sistemas de Cramer

Definição 2.21 *Um sistema de Cramer é um sistema linear de ordem n cuja matriz dos coeficientes é invertível.*

Todo sistema de Cramer é possível e determinado, pois dado $S : AX = B$ um sistema de Cramer, onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes de S. Como A é invertível, temos $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. Portanto, pela unicidade da matriz inversa, a única solução de S é dada por $A^{-1}B$.

Como exemplo do fato citado acima considere o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$, temos que sua matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, sua matriz das incógnitas é $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e sua matriz dos termos independentes é $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Através do método para inversão de matrizes que vimos no final da Subseção 2.2.3, verifiquemos que A é invertível e determinemos sua inversa:

$$\begin{bmatrix} A & | & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to -L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 + 4L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & | & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to -\frac{1}{8}L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\dfrac{5}{8} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \to L_1 - 2L_3 \\ L_2 \to L_2 + 3L_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\dfrac{5}{8} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos uma matriz na forma $\begin{bmatrix} I_3 & | & C \end{bmatrix}$ e portanto A é invertível e $C = A^{-1}$.

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{8} \\ -\dfrac{5}{8} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{8} \end{bmatrix}$.

Logo, temos $X = A^{-1}B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} & 0 & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{8} \\ -\dfrac{5}{8} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{3}{8} \end{bmatrix}$, ou seja, $x = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{8}$ e $z = \dfrac{3}{8}$. Portanto, $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}\right)$ é a única solução do sistema, e ele é possível e determinado.

2.4.2 Escalonamento de um Sistema Linear

Definição 2.22 *Dizemos que dois sistemas lineares S e S' são equivalentes, se toda solução de S for solução de S' e toda solução de S' for solução de S.*

Usaremos a notação $S \sim S'$ para indicar que o sistema linear S é equivalente ao sistema S'. Podemos efetuar transformações elementares nas equações de um sistema linear qualquer da mesma forma que vimos na Definição 2.13 em relação a uma matriz, ou seja:

- Trocar a posição relativa de duas equações do sistema.
- Trocar uma equação pela soma membro a membro da própria equação com um múltiplo não nulo de outra.
- Trocar uma equação dada por um de seus múltiplos não nulos (isto é, a equação obtida multiplicando ambos os membros da equação dada por um número real não nulo).

Seja S um sistema linear de m equações com n incógnitas. Consideremos o sistema S' obtido de S através de uma transformação elementar. Afirmamos que S e S' são sistemas lineares equivalentes. De fato, se S' foi obtido de S através da permutação de duas equações de S, então é óbvio que toda solução de S' é solução de S e vice-versa. O primeiro ponto mencionado acima é bem imediato. Por outro lado, o segundo e terceiro ponto acima devem ser melhor trabalhados, e para isso, apresentaremos as proposições a seguir:

Proposição 2.15 *Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S por um número $K \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.*

Demonstração: Considere o sistema linear

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Multiplicando a i-ésima equação de S por K, onde $K \neq 0$, obteremos o sistema:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Ka_{i1}x_1 + Ka_{i2}x_2 + Ka_{i3}x_3 + \cdots + Ka_{in}x_n = Kb_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Perceba que a única diferença entre S e S' é a i-ésima equação. Portanto, devemos nos preocupar apenas com ela.

(a) Suponhamos que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é uma solução de S. Provaremos que ela também será solução de S'. De fato, por hipótese temos que $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots +$ $+a_{in}\alpha_n = b_i$. Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ no 1º membro da i-ésima equação de S', obtemos:

$$Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + Ka_{i3}\alpha_3 + \cdots + Ka_{in}\alpha_n = K\underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n)}_{b_i \text{ por hipótese}} =$$

$= Kb_i$, o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ satisfaz a *i-ésima* equação de S'. Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de S'.

(b) Suponha agora que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é uma solução de S' e provaremos que também será solução de S. Por hipótese, $Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + Ka_{i3}\alpha_3 + \cdots + Ka_{in}\alpha_n = Kb_i$. Colocando, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ no primeiro membro da i-ésima equação de S, temos: $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n = \frac{K}{K}a_{i1}\alpha_1 + \frac{K}{K}a_{i2}\alpha_2 + \frac{K}{K}a_{i3}\alpha_3 + \cdots + \frac{K}{K}a_{in}\alpha_n =$ $= \frac{1}{K}\underbrace{(Ka_{i1}\alpha_1 + Ka_{i2}\alpha_2 + Ka_{i3}\alpha_3 + \cdots + Ka_{in}\alpha_n)}_{Kb_i \text{ por hipótese}} = \frac{1}{K} \cdot K \cdot b_i = b_i$, isso prova que a n-nupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S. Assim, a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de S.

■

Proposição 2.16 *Se substituirmos uma equação de um sistema linear S pela soma, membro a membro, dela com uma outra, o novo sistema obtido, S', será equivalente a S.*

Demonstração:

$$\text{Seja } S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Substituindo a i-ésima equação de S pela soma, membro a membro, dela com a j-ésima equação, obteremos o sistema:

$$S' : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ (a_{i1} + a_{j1})x_1 + (a_{i2} + a_{j2})x_2 + (a_{i3} + a_{j3})x_3 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})x_n = b_i + b_j \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

A única diferença entre S e S' é a i-ésima equação. Portanto devemos voltar nossa atenção apenas para ela.

(a) Suponha que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de S e provemos que ela também será solução de S'. Com efeito, por hipótese:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \tag{2.17}$$

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j \tag{2.18}$$

Colocando $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ no 1º membro da i-ésima equação de S', temos

$$(a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\alpha_3 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n = b_i + b_j,$$

isto é

$$\underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n)}_{b_i \text{ pela hipótese (2.17)}} + \underbrace{(a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n)}_{b_j \text{ pela hipótese (2.18)}} = b_i + b_j.$$

Isso mostra que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S'. Logo, a sequência de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de S'.

(b) Agora suponhamos que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de S' e provemos que ela também será solução de S'.

$$(a_{i1} + a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\alpha_2 + (a_{i3} + a_{j3})\alpha_3 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})\alpha_n = b_i + b_j \tag{2.19}$$

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + a_{j3}\alpha_3 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j \tag{2.20}$$

Das igualdades (2.19) e (2.20), concluímos que $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + a_{i3}\alpha_3 + \cdots + a_{in}\alpha_n = = b_i$, o que prova que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ satisfaz a i-ésima equação de S. Logo, a n-nupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)$ é solução de S.

■

Agora que já temos noção de sistemas equivalentes, podemos tratar do *método do escalonamento*. Basicamente esse método consiste em tomar uma matriz ampliada, ou completa, de um sistema linear e aplicar uma série de transformações elementares a esta matriz, de maneira que possamos obter uma matriz equivalente que seja a matriz ampliada de um sistema mais simples de ser resolvido. Para garantir que após essas transformações os sistemas serão equivalentes enunciaremos e provaremos os dois resultados abaixo.

Proposição 2.17 *Dois sistemas lineares com matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.*

Demonstração:

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ e $A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{bmatrix}$ as matrizes ampliadas $m \times (n+1)$ dos sistemas S e S', respectivamente, tais que $A \sim A'$. Seja C um produto de matrizes elementares, então pelo Corolário 2.10,

$$A' = CA. \tag{2.21}$$

Sejam agora $N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ e $N' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & a'_{m3} & \cdots & a'_{mn} \end{bmatrix}$ as matrizes dos coeficientes de S e S', respectivamente, e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ e $B' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_m \end{bmatrix}$ as matrizes dos termos independentes de S e S', também respectivamente. De (2.21), temos $a'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \cdot a_{kj}$ e $b'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \cdot b_{kj}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$, isto é, $N' = CN$ e $B' = CB$. Como C é invertível (de acordo com o Corolário 2.11) e do fato de podermos representar um sistema linear S matricialmente, segue-se que $NX = B \Leftrightarrow CNX = CB \Leftrightarrow N'X = B'$, qualquer que seja a matriz das incógnitas $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Logo, toda solução de S é solução de S' e vice-versa. Portanto, $S \sim S'$.

■

Quando utilizarmos a Proposição 2.17 num sistema linear homogêneo, não será necessário tomarmos a matriz ampliada. Basta considerarmos a matriz dos coeficientes do sistema.

Proposição 2.18 *Dois sistemas lineares com matrizes ampliadas equivalentes têm o mesmo conjunto solução.*

Demonstração: Basta lembrar que efetuar transformações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema, equivale a efetuar transformações elementares no sistema de equações, obtendo um sistema equivalente.

$\blacksquare$

A seguir, um exemplo para ilustrar os resultados das proposições acima. Consideremos o sistema linear $S_1 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$, então seja $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ a matriz ampliada de S_1. Efetuemos a seguinte sequência de transformações elementares sobre as linhas de A_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}}{\longrightarrow} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to -\frac{1}{3}L_2}{\longrightarrow} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -31 \end{bmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + 7L_2}{\longrightarrow} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to \frac{1}{2}L_3}{\longrightarrow} A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \to L_1 - L_3 \\ L_2 \to L_2 - L_3}}{\longrightarrow} A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_1 \to L_1 - 2L_2}{\longrightarrow} A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pelo que vimos na Subseção 2.2.1, temos $A_1 \sim A_7$. Além disso, A_7 é a matriz ampliada do sistema linear $S_7 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$. Assim, pela Proposição 2.17, segue que $S_1 \sim S_7$. Logo, como S_7 é possível e determinado (pela Definição 2.19), pois possui a terna ordenada $(1,3,2)$ como sua única solução, S_1 também é possível e determinado e sua única solução é $(1,3,2)$. De outra forma, porém equivalente, podemos fazer com S_1 o que segue:

1. Tomando o sistema $S_1 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$. Vamos eliminar x_1 da segunda e terceira equação de S_1 multiplicando a 1ª por -2 e somando a equação resultante

com a 2ª, obtendo uma nova equação. Da mesma maneira, com a 3ª equação, multiplicaremos a 1ª por -3 e somando esta nova equação à 3ª. Isto resulta no sistema

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ \quad -3x_2 - 3x_3 = -15 \\ \quad -7x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}.$$

2. Para tornar o coeficiente de x_2 da 2ª equação igual a 1, multiplicamos a 2ª equação de S_2 por $-\dfrac{1}{3}$. O sistema obtido é $S_3 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ \quad x_2 + x_3 = 5 \\ \quad -7x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}$.

3. Agora eliminaremos x_2 da 3ª equação de S_3, multiplicando a 2ª equação de S_3 por 7 e somando a esta a 3ª equação, obtendo $S_4 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ \quad x_2 + x_3 = 5 \\ \quad 2x_3 = 4 \end{cases}$.

4. Para tornar o coeficiente de x_3 da 3ª equação igual a 1, multiplicamos a 3ª equação de S_4 por $\dfrac{1}{2}$. O sistema resultante é $S_5 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ \quad x_2 + x_3 = 5 \\ \quad x_3 = 2 \end{cases}$.

5. Para eliminar o coeficiente de x_3 da 2ª equação, multiplicamos a 3ª equação de S_5 por -1 e somamos com a 2ª equação de S_5. O sistema obtido é $S_6 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ \quad x_2 = 3 \\ \quad x_3 = 2 \end{cases}$.

6. Finalmente, vamos eliminar x_2 e x_3 da primeira equação de S_6 multiplicando a 2ª equação por -2 e somando o resltado obtido com a 1ª, obtendo uma nova equação. Da mesma maneira, multiplicaremos a 3ª por -1, somando esta à 1ª equação. Isto resulta no sistema $S_7 : \begin{cases} x_1 = 1 \\ \quad x_2 = 3 \\ \quad x_3 = 2 \end{cases}$.

Logo, temos $S_1 \sim S_7$, ou seja, S_1 é possível e determinado e sua única solução é $(1,3,2)$. Esse método aplicado aos sistemas de equações lineares é essencialmente devido a Carl Friedrich Gauss[1] $(1777-1855)$ e foi aperfeiçoado por Wilhelm Jordan $(1842-1899)$ e, por este motivo, é chamado de *processo de eliminação de Gauss-Jordan*.

[1] A Gauss é creditada a célebre frase "A Matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha da Matemática". Para mais detalhes sobre a obra de Gauss veja [4].

Ainda sobre o processo de eliminação de Gauss-Jordan considere os sistemas

$$S_1 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 = -4 \end{cases} \quad \text{e } S_2 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -10 \end{cases},$$

ao efetuarmos uma sequência de transformações elementares encontramos os sistemas

$$S_3 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 = -\frac{12}{5} \end{cases} \quad \text{e } S_4 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ 0 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

tais que $S_1 \sim S_3$ e $S_2 \sim S_4$. Note que, S_4 não possui solução, pois a 3ª equação de S_4 é uma contradição. Logo, S_2 também é impossível. Por sua vez, o sistema S_3 possui um número de equações menor que o de incógnitas, ou seja, S_3 é possível e indeterminado. Da segunda equação de S_3 temos, $x_2 = 2x_3 - 12$ e substituindo essa igualdade na primeira equação de S_3 obtemos $x_1 = x_3 - 8$. Como as soluções de S_3 também são válidas para S_1, as soluções desse sistema são os elementos do conjunto $\left\{ \left(\frac{8-3x_3}{5}, \frac{2x_3-12}{5}, x_3 \right); x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

2.4.3 O Teorema de Rouché-Capelli

Neste momento, depois de toda teoria desenvolvida, chegamos ao resultado principal deste trabalho, o Teorema de Rouché-Capelli e a maneira que o usaremos para resolver sistemas lineares ou situações problemas que possam ser representadas por sistemas lineares. Mas, antes de usar esse teorema, enunciaremos a definição e o corolário a seguir:

Definição 2.23 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$, A é equivalente a uma única matriz $\tilde{A}$, de ordem $m \times n$, na forma escalonada. Dizemos que $\tilde{A}$ é a forma escalonada de A. Portanto, definimos o posto ρ (característica) da matriz A como sendo o número de linhas não nulas de sua forma escalonada $\tilde{A}$. Definimos também a nulidade de A como sendo o número $n - \rho$.*

Por exemplo, consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Logo, o posto ρ de A é igual a 3, pois o número de linhas não nulas de $\tilde{A}$ é 3 e a nulidade de A é igual a 1, pois $n - \rho = 1$.

Sobre matrizes quadradas temos o resultado abaixo.

Corolário 2.19 *Uma matriz quadrada de ordem n é invertível se, e somente se, ela tem posto n.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se A é invertível, então, pelo Teorema 2.12, $\tilde{A} = I_n$. Logo, como I_n não possui linhas nulas, segue que A tem posto n.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se A tem posto n, então $\tilde{A}$ não tem linhas nulas, e, por estar na forma escalonada, de acordo com a Definição 2.15, todos os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1 e todos os seus outros elementos são nulos. Assim, $\tilde{A} = I_n$. Pelo Corolário 2.10, existem matrizes elementares $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_s$ de ordem n (e invertíveis, pelo Corolário 2.11) tais que $A = E_s \cdots E_3 E_2 E_1 \tilde{A} = E_s \cdots E_3 E_2 E_1$. Portanto, pela Proposição 2.6 (ii), A é invertível.

■

Agora enunciaremos o Teorema de Rouché-Capelli e o demonstraremos.

Teorema 2.20 (Teorema de Rouché-Capelli ou Teorema do Posto) *Consideremos um sistema linear com m equações e n incógnitas $AX = B$. Sejam ρ_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema e ρ_A o posto da matriz dos coeficientes do sistema. Então:*

(i) O sistema é possível se, e somente se, $\rho_{AB} = \rho_A$.

(ii) O sistema é possível e determinado se $\rho_{AB} = \rho_A = n$.

(iii) O sistema é possível e indeterminado se $\rho_{AB} = \rho_A < n$. Neste caso, $n - \rho_A$ é o número de incógnitas livres (ou o grau de liberdade) do sistema, ou seja, incógnitas que podem assumir qualquer valor real.

Demonstração: Sejam $S : AX = B$ um sistema linear de m equações com n incógnitas, C a matriz ampliada de S, $\tilde{C}$ a matriz na forma escalonada equivalente a C e $\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{m\times n}$ a matriz na forma escalonada equivalente à matriz A dos coeficientes de S. Claramente, $\tilde{C}$ é formada pelas n colunas de $\tilde{A}$ acrescidas da coluna de B alterada pelas transformações elementares efetuadas nas linhas de C. Denotemos a matriz formada pela última coluna de $\tilde{C}$ por $\tilde{B} = \left[\tilde{b}_{ij}\right]_{m\times 1}$. Com isso, pela Proposição 2.17, o sistema $S' : \tilde{A}X = \tilde{B}$ é equivalente ao sistema S. Desta forma, temos dois casos a considerar:

Caso 1: $\rho_A = \rho_{\tilde{A}} < \rho_{\tilde{C}} = \rho_{AB}$. Logo, $\tilde{C}$ tem uma linha do tipo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Logo, o sistema S' é impossível. Portanto, o sistema S é impossível.

Caso 2**:** $\rho_A = \rho_{\tilde{A}} = \rho_{\tilde{C}} = \rho_{AB}$, então $\tilde{C}$ e $\tilde{A}$ têm o mesmo número de linhas não nulas. Assim, podemos dividir esse caso em dois subcasos.

Subcaso 2.1**:** $\rho_{AB} = \rho_A = n$. Sendo $\tilde{A}$ uma matriz com n colunas, com $\rho_{\tilde{A}} = \rho_A = n$, e estando $\tilde{A}$ na forma escalonada, segue que $\tilde{A} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $\rho_A = \rho_{AB} = n$, segue que $\tilde{B}$ é tal que $b_{n+1} = \cdots = b_m = 0$. Logo, o sistema $S' : \tilde{A}X = \tilde{B}$ é possível e determinado com a única solução $x_1 = \tilde{b}_1, \cdots, x_n = \tilde{b}_n$. Portanto, o sistema $S : AX = B$ é possível e determinado com a mesma solução.

Subcaso 2.2**:** $\rho_A = \rho_{AB} < n$. Ponhamos $\rho = \rho_A = \rho_{AB}$. Neste caso, $\tilde{A}$ e $\tilde{C}$ possuem as linhas não nulas $L_1, \cdots, L_\rho$ tais que o primeiro elemento não nulo de L_i está na coluna k_i e $k_1 < \cdots < k_\rho$. Além disso, temos $\tilde{b}_{\rho+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$. Com isso, segue que o sistema S' é da forma

$$\begin{bmatrix} x_{k_1} + \tilde{a}_{1(k_1+1)}x_{k_1+1} + \tilde{a}_{1(k_1+2)}x_{k_1+2} + \tilde{a}_{1(k_1+3)}x_{k_1+3} + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n \\ 0 + \quad x_{k_2} \quad + \tilde{a}_{2(k_2+1)}x_{k_2+1} + \tilde{a}_{2(k_2+2)}x_{k_2+2} + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 0 + \quad 0 \quad + \quad x_{k_\rho} \quad + \quad \tilde{a}_{\rho k_\rho}x_{k_\rho+1} \quad + \cdots + \tilde{a}_{\rho n}x_n \\ 0 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \cdots + \quad 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 0 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \ldots + \quad 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_\rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tal igualdade matricial, juntamente com o fato de $\tilde{A}$ estar na forma escalonada, nos fornece o sistema de equações

$$\begin{cases} x_{k_1} = -\sum_{j>k_1} \tilde{a}_{1j}x_j + \tilde{b}_1, & \text{onde } \tilde{a}_{1k_i} = 0, \text{ se } i > 1, \\ x_{k_2} = -\sum_{j>k_2} \tilde{a}_{2j}x_j + \tilde{b}_2, & \text{onde } \tilde{a}_{2k_i} = 0, \text{ se } i > 2, \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ x_{k_{\rho-1}} = -\sum_{j>k_{\rho-1}} \tilde{a}_{(\rho-1)j}x_j + \tilde{b}_{\rho-1}, & \text{onde } \tilde{a}_{(\rho-1)k_i} = 0, \text{ se } i = k_\rho, \\ x_{k_\rho} = -\sum_{j>k_\rho} \tilde{a}_{\rho j}x_j + \tilde{b}_\rho & \end{cases}.$$

Isto mostra que podemos escolher arbitrariamente valores para as incógnitas no conjunto

$$\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\} \setminus \{x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \cdots, x_{k_\rho}\} \tag{2.22}$$

e, com eles, determinar valores para $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \cdots, x_{k_\rho}$. Logo, como este conjunto em (2.22) tem $(n-\rho)$ elementos, o sistema $S' : \tilde{A}X = \tilde{B}$ é possível e indeterminado, e tem $(n-\rho)$

incógnitas livres. Assim, o sistema $S : AX = B$ é possível e indeterminado, e tem $(n-\rho)$ incógnitas livres (ou grau de liberdade $(n-\rho)$).

$\blacksquare$

Observação 2.1 *Se $\rho_{AB} \neq \rho_A$, o sistema é impossível.*

Em particular, o Teorema de Rouché-Capelli para sistemas homogêneos fornece o seguinte resultado:

Corolário 2.21 *Seja dado um sistema linear $AX = 0$ com m equações e n incógnitas:*

(i) Se A tem posto n, então o sistema possui apenas a solução trivial. Em particular, isto ocorre quando $m = n$ e A é invertível.

(ii) Se A tem posto $\rho < n$, então o sistema possui infinitas soluções. Em particular, isto sempre ocorre quando $m < n$.

Agora vamos colocar em prática os resultados do Teorema de Rouché-Capelli e do corolário 2.21 fazendo alguns exemplos:

1. Considere o sistema $S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

   A matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} =$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$. Logo, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 3 = n$. Assim, pelo Teorema de Rouché-Capelli, S_1 é possível e determinado, e sua única solução é $\begin{cases} x_1 = \frac{9}{5} \\ x_2 = -\frac{1}{5} \\ x_3 = -\frac{6}{5} \end{cases}$, ou seja, o terno ordenado $\left(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{6}{5}\right)$.

2. Considere o sistema $S_2 : \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$.

A matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Desse modo, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 2 < 3 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, S_2 é possível e indeterminado, e possui 1 incógnita livre (ou grau de liberdade 1). Podemos escolher x_3 como incógnita livre. Portanto, S é equivalente ao sistema $S_3 : \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{8}x_3 + \frac{5}{8} \\ x_2 = \frac{1}{8}x_3 + \frac{7}{8} \end{cases}$, cujas soluções são os elementos do conjunto $\left\{ \left(-\frac{5}{8}x_3 + \frac{5}{8}, \frac{1}{8}x_3 + \frac{7}{8}, x_3 \right); x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Considere o sistema $S_4 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$.

A matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, temos $\rho_{AB} = 3 > 2 = \rho_A$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli S_4 é um sistema impossível.

4. Considere o sistema $S_5 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

A matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$. Assim, A tem posto 3, ou seja, $\rho_A = 3 = n$. Portanto, pelo Corolário 2.21, S_5 possui apenas a solução trivial $(0,0,0)$. Observemos também que $m = 3$ e A é invertível.

5. Considere o sistema $S_6 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

A matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, A tem posto 2, ou seja, $\rho_A = 2 < 3 = n$. Portanto, pelo Corolário 2.21, S_6 possui infinitas soluções. Além disso, pelo Teorema de Rouché-Capelli, S_6 possui 1 incógnita livre (ou grau de liberdade 1). Podemos escolher x_3 como a incógnita livre. Assim, S_6 é equivalente ao sistema $S_7 : \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$, cujas soluções são os elementos do conjunto $\{(-x_3, x_3, x_3); x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Capítulo 3

Sistemas Lineares: Qual a Proposta de Ensino e como Estão Sendo Trabalhados?

Esse capítulo traz um breve recorte de alguns documentos que regem a educação básica no estado de Pernambuco, e em um segundo momento fazemos uma análise de alguns livros didáticos e de como esses livros estruturaram o estudo de matrizes e sistemas lineares.

3.1 O que Dizem os Documentos

Nesta seção iremos expor o que dizem os documentos que norteiam a nossa educação. Iniciaremos com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC[1]), que é o documento mais recente e abrangente quando falamos em currículo da educação básica. Em seguida, vamos ver alguns pontos dos documentos que regulam o currículo do estado de Pernambuco. Essa escolha se deu pois foi nessa rede pública estadual que cursei o ensino médio e é também onde tabalho atualmente como Professor.

A BNCC diz que a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir que os alunos desenvolvam as cinco competências listadas abaixo:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

[1] Veja [5].

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

A cada uma dessas competências estão relacionadas algumas habilidades a serem trabalhadas e desenvolvidas. Mencionaremos apenas aquelas que estão ligadas à resolução dos sistemas de equações lineares. Essas habilidades foram organizadas por unidades, e, em particular na unidade de Álgebra e Números, temos a seguinte habilidade:

- (EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Na habilidade acima, quando são mencionadas as equações lineares simultâneas, logo somos remetidos aos sistemas de equações lineares, pois uma determinada n-upla ordenada vai satisfazer simultaneamente o problema que essas equações descrevem, quando houver solução.

Quando voltamos nosso olhar para os documentos que norteiam o ensino, mais especificamente analisando os Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco[2] constatamos que há no ensino médio, assim como no ensino fundamental, o estabelecimento de conteúdos que são divididos em cinco eixos, sobre os quais são lançadas expectativas de aprendizagem que devem ser atingidas pelos alunos. Segue abaixo a lista desses eixos.

- Geometria
- Estatística e Probabilidade
- Álgebra e Funções
- Grandezas e Medidas
- Números e Operações

[2] Veja [6].

No eixo Álgebra e Funções encontram-se as seguintes expectativas de aprendizagem para o 10º ano da eduacação básica (1° ano do ensino médio):

- Associar duas retas no plano cartesiano à representação de um sistema de duas equações de primeiro grau e duas incógnitas.
- Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por sistemas de equações de primeiro grau.
- Resolver sistema de duas equações de primeiro grau e duas incógnitas por escalonamento (método da adição).
- Resolver sistemas de três equações de primeiro grau e três incógnitas por escalonamento.

No 11º ano da eduacação básica (2° ano do ensino médio) temos duas expectativas no eixo álgebra e Funções para destacar:

- Associar a região do plano cartesiano à solução de um sistema de duas inequações de primeiro grau e duas incógnitas.
- Resolver sistema de três equações de primeiro grau e três incógnitas por escalonamento.

Nota-se que [5] e [6] em nenhum momento mencionaram o estudo de matrizes. Porém, ao analisarmos [7] encontram-se no eixo de Álgebra e Funções, no 11º ano da educação básica (2° ano do ensino médio), os seguintes conteúdos: Estudo das matrizes, Determinantes e Sistemas lineares. A esses conteúdos estão associadas as seguintes expectativas de aprendizagem:

- Dominar a resolução matricial, cálculo do determinante e de sistemas de equações lineares e de discussão dos resultados encontrados.
- Identificar os diversos tipos de matrizes, associados a conjuntos de informações veiculadas no dia-a-dia e efetuar operações entre elas, compreendendo o significado dos resultados obtidos.
- Calcular o valor do determinante de uma matriz de ordem $n > 1$.
- Apresentar a solução de um sistema de equações lineares, utilizando a Regra de Cramer e/ou o método de escalonamento.
- Classificar e discutir sistemas de equações lineares.

Porém, tanto os conteúdos quanto as expectativas de aprendizagem aparecem com um asterisco e com a seguinte legenda “Referente a Educação Integral”, ou seja, na proposta do currículo do estado de Pernambuco, as Matrizes foram de certa forma excluídas da educação regular. Aí, um questionamento que veio à nossa mente: qual o motivo dessa exclusão?. Bom, quando pensamos nessa questão, uma justificativa talvez seja a carga horária, pois no ensino médio integral são destinadas semanalmente seis aulas a displina de matemática, enquato no ensino médio regular temos apenas quatro aulas semanais.

Quando pensamos em sistemas lineares e matrizes como dois objetos matemáticos que ao longo da história sempre estiveram relacionados, outro questionamento nos veio à mente: separá-los e omitir o estudo das matrizes realmente é uma boa ideia?

Atualmente nosso currículo encontra-se organizado dessa forma. Veremos a seguir como estão estruturados os livros didáticos no que diz respeito ao estudo de matrizes e sistemas lineares.

3.2 Analisando como Alguns Livros Estão Trabalhando

Realizamos uma breve análise em alguns livros didáticos e nela observamos a forma como as matrizes e os sistemas lineares são abordados e trabalhados. Essa análise foi feita em dois livros cuja escolha se deu da seguinte forma: escolhemos para nosso estudo o livro didático usado na escola em que trabalho atualmente, e o livro utilizado pela escola em que cursei o ensino médio entre 2008 e 2010.

A tabela abaixo mostra a nomenclatura que usamos para fazer referência a cada um desses livros analisados.

Tabela 3.1: Livros didáticos analisados.

Livro didático usado na escola em que trabalho atualmente	**Livro 1**
Livro utilizado pela escola em que cursei o ensino médio entre 2008 e 2010	**Livro 2**

Fonte: Autoria Própria.

3.2.1 No Estudo das Matrizes

(I) **Livro 1**

No **Livro 1** o capítulo destinado ao estudo de matrizes inicia com uma nota histórica que versa sobre o problema da venda de uma colheita, problema este tirado de um livro chamado *Chiu-Chang Suan-Shu* (250 a.C.) de autor desconhecido. Esse problema diz o seguinte: Três fardos de uma boa colheita, dois fardos de uma colheita medíocre e um fardo de uma colheita ruim foram vendidos por 39 dou. Dois fardos da boa, três da medíocre e um da ruim foram vendidos a 34 dou; e um da boa, dois da medíocre e três da ruim foram vendidos a 26 dou. Qual a quantia recebida pela venda de cada fardo da boa colheita, da colheita medíocre e da colheita ruim?

O próprio **Livro 1** diz que em linguagem moderna esse problema se reduz a um sistema linear de ordem 3×3 e que o mesmo pode ser representado de forma de uma tabela na qual podem ser relacionados os coeficientes das incógnitas e os termos independentes, esse tipo de tabela é chamado Matriz. Logo em seguida temos uma referência aos estudos de Arthur Cayley $(1821 - 1895)$, e por fim o **Livro 1** ressalta a aplicabilidade das matrizes à computação gráfica.

Em seguida temos uma definição de matriz, representação genérica, definições de algumas matrizes especiais, igualdade de matrizes, exemplos, exercícios resolvidos e alguns exercícios propostos. Para introduzir o conceito de adição de matrizes é utilizada uma situação problema e em seguida temos a definição de adição de matrizes, matrizes opostas, subtração de matrizes e multiplicação de matrizes por um número real, e novamente uma lista de exercícios.

A apresentação do conceito de multiplicação de matrizes é precedida mais uma vez por uma situação problema. Logo após, temos a definição e exemplos de produto de linha por coluna, multiplicação de matrizes, exercícios resolvidos, e novamente uma lista de exercícios propostos.

Ao final do capítulo, temos uma seção de exercícios complementares compostos por situações problemas e questões de vestibulares, uma atividade com os pré-requisitos para o próximo capítulo (o capítulo seguinte trata de sistemas lineares), uma atividade resolvida com um erro intencional - a proposta é o aluno descobrir onde está esse erro -, e por último, um exemplo da aplicação das matrizes em transformações geométricas no plano cartesiano, das quais ele destaca a translação, a transformação por escala e a rotação. Fechando o capítulo, temos um problema no qual é necessario usar os conhecimentos de matrizes e transformações geométricas.

(II) **Livro 2**

Ao analisar o **Livro 2** vemos que o capítulo destinado ao estudo das matrizes inicia com um comentário sobre sua aplicação nos pixels de uma imagem na tela de um computador. Outro exemplo de matriz é uma tabela que mostra as vendas de livros de matemática, física e química de uma editora fictícia ao longo de três meses consecutivos.

Depois dessa introdução, o livro define formalmente uma matriz, bem como sua representação genérica, matriz quadrada, matriz triângular, matriz diagonal, matriz identidade, matriz nula e igualdade de matrizes sempre mostrando exemplos e trazendo alguns exercícios.

Na sequência, é mostrado como fazer adição de matrizes e, em seguida, esse processo é definido formalmente. Logo após, temos definições de matriz oposta, subtração de matrizes, multiplicação de um número real por uma matriz e transposta de uma matriz, entre essas definições sempre encontramos exemplos e exercícios.

Através de uma situação problema retirada da Copa do Mundo de 2002, levando em conta a pontuação das seleções do grupo C - que por sinal era o do Brasil -, é introduzido no **Livro 2** o conceito de multiplicação de matrizes, e depois temos sua definição formal. Logo após a multiplicação de matrizes, somos apresentados ao conceito de inversa de uma matriz dada, - ressaltando que o livro só trabalha a invera de matrizes de ordem 2×2. Por fim, a última seção do capítulo traz a aplicação das matrizes à computação gráfica com exemplos e problemas de rotação, escala, translação e composição de transformações geométricas. O livro apresenta ainda, uma seção para trabalhar equações matriciais.

3.2.2 No Estudo dos Sistemas Lineares

(I) **Livro 1**

Ao analisar o **Livro 1** vemos que no capítulo destinado aos sistemas lineares o estudo é iniciado com uma situação problema que diz o seguinte: Um agricultor necessita de 2000 litros de solução aquosa de nitrogênio a 10% para borrifar sua plantação de trigo. Em seu estoque, há dois grandes reservatórios, A e B, com solução aquosa de nitrogênio; porém, no resevatório A, a concentração de nitrogênio é de 8% e, em B, de 16%. Quantos litros do conteúdo de cada recipiente o agricultor deverá misturar para obter os 2000 litros de solução aquosa de nitrogênio a 10%?

Esse problema resulta em um sistema linear de ordem 2×2. Na sequência o livro define o que são equações lineares e mostra alguns exemplos delas e das não lineares. Segue discutindo sobre solução de uma equação linear e equação linear homogênea. Em seguida, temos exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos. Posteriormente o **Livro 1** apresenta, mais uma vez, uma situação problema para em seguida definir sistema linear. Como já foi trabalhado o seu conceito, é feita a definição de uma solução de um sistema linear seguida de exemplo e discussão sobre a classificação de um deles de acordo com seu número de soluções. Depois, vemos as possíveis interpretações gráficas de um sistema linear de ordem 2×2. Novamente o **Livro 1** apresenta uma lista com alguns exercícios propostos.

Este livro apresenta resoluções para o referido sistema; para isso ele define sistema escalonado, descreve o processo de resolução de um sistema linear escalonado e apresenta exemplos e exercícios propostos.

Temos uma nota histórica sobre Diofanto de Alexandria e suas pesquisas. Na sequência temos uma definição de sistemas lineares equivalentes e, finalmente o **Livro 1** fala de escalonamento de um sistema linear e dos teoremas que garantem que ao realizarmos operações elemetares é possível encontrar um sistema linear equivalente ao sistema dado inicialmente. Para trabalhar esse processo, o livro traz alguns exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos. Novamente temos uma seção de exercícios complementares, uma atividade com os pré-requisitos para o próximo capítulo, uma atividade resolvida com um erro intencional - a proposta dessa atividade é o aluno descobrir onde está esse erro -, e por último, um exemplo da aplicação dos sistemas lineares no processo de otimização. Fechando o capítulo temos um problema de mesma ordem para ser resolvido.

(II) **Livro 2**

No **Livro 2** o capítulo que apresenta sistemas lineares inicia a discussão com o seguinte problema: Um terreno de 8000 m^2 deve ser dividido em dois lotes. O maior lote deverá ter 1000 m^2 a mais do que o lote menor e devemos determinar a área que cada um deverá ter. Esse problema recai em um sistema linear que o próprio livro resolve.

Na sequência temos definições de equações lineares, sistemas de equações lineares e solução de um sistema linear, além dos exemplos e exercícios. Depois o livro passa a discutir os sistemas lineares de ordem 2×2, apresentando o método da adição como ferramenta para resolução de sistemas lineares de ordem 2×2. Trabalha a interpretação geométrica dos sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, bem como sua classificação no que diz respeito ao número de soluções.

Quando o **Livro 2** aborda sistemas lineares de ordem 3×3 vemos a sua interpretação geométrica. Depois de discutir todas a interpretações possíveis, é iniciada uma seção que trata o escalonamento de sistemas lineares de ordem 3×3. Nela temos uma discussão sobre a classificação e resolução de sistemas lineares escalonados.

Após alguns exercícios, é tratada a condição de equivalência de sistemas lineares e o procedimento prático para escalonar sistemas lineares. Uma das últimas seções é destinada aos sistemas lineares homogêneos. Temos uma seção com aplicações dos sistemas lineares em outras áreas do conhecimento humano, áreas que envolvem equilíbrio de equações químicas e alocação de recursos, que serão abordados no capítulo 4 desse trabalho, na qual apresentamos alguns exemplos e exercícios. A última seção do capítulo traz uma introdução à programação linear, onde novamente temos exemplos e exercícios.

3.2.3 Alguns Comentários

Ao analisar o **Livro 1** e o **Livro 2** observamos que ambos estão bem estruturados e desenvolvem corretamente os conceitos e propriedades das matrizes e dos sistemas lineares. Contudo, temos uma ressalva a fazer: apesar de ambos os livros apresentarem uma seção de aplicações, o **Livro 2** apresentou uma quantidade de aplicações maior que o **Livro 1**.

Por sua vez, o **Livro 1**, ao final de cada capítulo, traz uma lista de problemas complementares que fazem um apanhado geral dos conteúdos abordados. A nosso ver isso é positivo para a aprendizagem, pois o aluno vai ter de resgatar os conhecimentos desenvolvidos anteriormente para resolver as situações propostas. Ainda no **Livro 1** constatamos que ele apresenta situações problemas em seus exercícios, enquanto no **Livro 2** os exercícios, em sua maioria, são mais mecânicos.

Outro ponto que chamou nossa atenção no **Livro 1** foi a ideia de montar uma lista de exercícios com os conhecimentos prévios necessários para o capítulo seguinte, relembrando ao aluno conceitos que o mesmo vai precisar para uma melhor compreensão do que vai ser estudado na sequência. Essa ideia de estabelecer uma conexão com o capítulo seguinte nos parece uma boa estratégia, pois normalmente os assuntos dos capítulos são trabalhados de maneira bastante isolada e individual. Outro fator positivo são as atividades que instigam o aluno a descobrir o erro em exercícios resolvidos, estimulando-o a desenvolver um olhar crítico e validar por si mesmo se a teoria por ele estudada foi aplicada corretamente. A nosso ver o **Livro 1** atende melhor às competências três e quatro da BNCC e seria a melhor escolha para ser usado em sala de aula.

Nos livros mencionados encontramos problemas contextualizados e até mesmo problemas de outras áreas que podem ser resolvidos usando sistemas lineares. No capítulo a seguir veremos mais algumas situações que podem ser trabalhadas/modeladas e resolvidas utilizando sistemas lineares.

Capítulo 4

Sistemas Lineares: Modelando Problemas

Neste capítulo apresentaremos problemas de diversas áreas, tais como Física, Química, dentre outras, que possam ser modelados e resolvidos por meio de sistemas lineares. Neste capítulo os estudos nas áreas apresentadas foram realizados em [1], [2] e [12].

4.1 Modelando Problemas na Análise de Redes

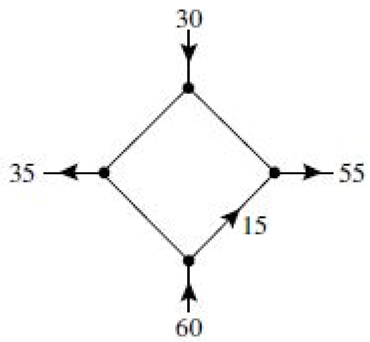
Uma *rede*, em linhas gerais, pode ser considerada como o conjunto de *ramos* através dos quais flui algum meio. Por exemplo, os ramos podem ser fios elétricos através dos quais flui corrente elétrica, canos através dos quais flui água ou petróleo, ruas de cidades pelas quais fluem veículos, conexões financeiras pelas quais flui dinheiro e etc.

Ramos de redes, em sua maioria, se encontram em pontos denominados *nós* ou *vértices*, nos quais o fluxo divide. Em uma rede elétrica os nós ocorrem onde três ou mais fios se juntam, por sua vez em uma rede de trânsito eles ocorrem em cruzamentos de ruas, e assim por diante nas demais situações. É comum ao estudarmos redes adotarmos alguma medida numérica da taxa segundo a qual o meio flui ao longo do ramo. O fluxo de uma corrente elétrica, por exemplo, é geralmente medido em ampères. Em nossa análise vamos nos restringir as redes onde há *conservação de fluxo* em cada nó, com isso queremos dizer que a taxa de fluxo para dentro de qualquer nó é igual à taxa de fluxo para fora desse nó.

Um problema comum na análise de redes é usar taxas de fluxo conhecidas em certos ramos a fim de encontrar a taxa de fluxo em todos os outros ramos dessa rede. Vejamos alguns exemplos - os quais extraímos das nossas referências - de como esse procedimento é realizado.

1. A figura 4.1 mostra uma rede de quatro nós com indicações de algumas taxas de fluxo e sentido do fluxo ao longo dos ramos. Encontre as taxas de fluxo e o sentido do fluxo nos demais ramos.

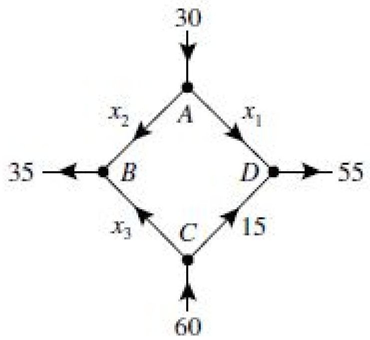
Figura 4.1: Rede de quatro nós.



Fonte: Imagem extraída de [2].

Solução: Na figura 4.2 associamos sentidos arbitrários para as taxas de fluxos x_1, x_2, x_3. Não há necessidade de nos preocuparmos com a veracidade dos sentidos, pois um sentido incorreto acabará recebendo um valor negativo para a taxa de fluxos quando tivermos resolvido para as incógnitas.

Figura 4.2: Rede de quatro nós.



Fonte: Imagem extraída de [2].

Segue da conservação do fluxo no nó A que $x_1 + x_2 = 30$. Seguindo o mesmo raciocínio nos demais nós obtemos

$$x_2 + x_3 = 35 \text{ (nó } B),$$
$$x_3 + 15 = 60 \text{ (nó } C),$$
$$x_1 + 15 = 55 \text{ (nó } D),$$

dessas quatro condições, escrevemos o seguinte sistema linear $\begin{cases} x_1 + x_2 \quad = 30 \\ \quad x_2 + x_3 = 35 \\ \qquad\quad x_3 = 45 \\ x_1 \qquad\quad = 40 \end{cases}$.

Nesse caso particular, o sistema linear é bem simples de resolver, pois x_1 e x_3 são imediatos, mas vamos aplicar o teorema de Rouché-Capelli para averiguar se o sistema possui solução.

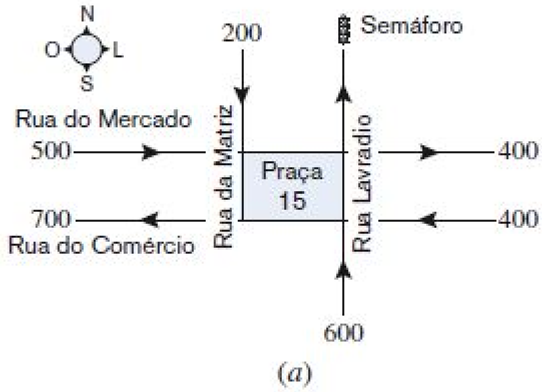
A matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 45 \\ 1 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$ $= I_3$. Assim, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 3 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, o sistema é possível e determinado, e sua única solução é $\begin{cases} x_1 \qquad = 40 \\ \quad x_2 \quad = -10 \\ \qquad x_3 = 45 \end{cases}$. Após nossa verificação encontramos $x_2 = -10$, ou seja a solução do sistema é $(40, -10, 45)$. Como x_2 é negativo, vemos que o sentido do fluxo naquele ramo da figura 4.2 está incorreto, pois o fluxo naquele ramo é para *dentro* do nó A.

2. A rede da figura 4.3 mostra uma proposta de fluxo de tráfego de uma certa cidade em torno de uma de suas praças, a praça 15. O plano prevê a instalação de um semáforo computadorizado na saída norte da Rua Lavradio, e o diagrama indica o número médio de veículos por hora que se espera ter nas ruas que circundam o complexo da praça. Todas as ruas são de mão única.

   (a) O semáforo deveria deixar passar quantos veículos por hora para garantir que o número médio de veículos por hora que entra no complexo seja igual ao número médio de veículos que sai do complexo?

   Solução: Se x for o número de veículos por hora que semáforo deve deixar passar, conforme a figura 4.4, então o número total de veículos por hora que entra e

Figura 4.3: Rede de fluxo de tráfego em torno da praça 15.



Fonte: Imagem extraída de [2].

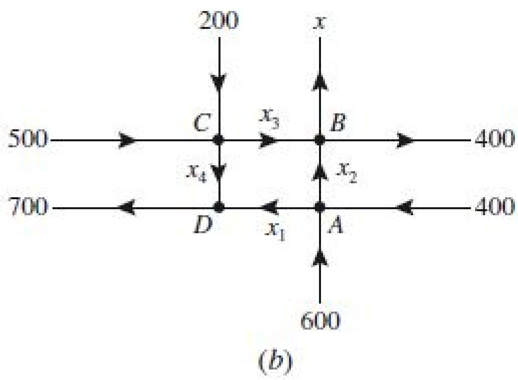
sai do complexo da praça será

$$\text{Para dentro: } 500 + 400 + 600 + 200 = 1700$$

$$\text{Para fora: } x + 700 + 400$$

Igualando esses fluxos temos $x + 1100 = 1700 \Rightarrow x = 600$. Logo, o semáforo deveria deixar passar 600 carros por hora.

Figura 4.4: Representação das taxas de fluxos x_1, x_2, x_3, x_4.



Fonte: Imagem extraída de [2].

(b) Supondo que o semáforo tenha sido ajustado para equilibrar o fluxo total para dentro e para fora do complexo da praça, o que pode ser dito sobre o número médio de veículos por hora que circulará pelas ruas que circundam o complexo?

Solução: Para evitar congestionamentos de trânsito, o fluxo para dentro de cada cruzamento deve igualar o fluxo para fora do cruzamento. Para que isso aconteça as seguintes condições devem ser satisfeitas:

Cruzamento	Fluxo para dentro		Fluxo para fora
A	$400+600$	$=$	x_1+x_2
B	x_2+x_3	$=$	$400+x$
C	$500+200$	$=$	x_3+x_4
D	x_1+x_4	$=$	700

No item anterior encontramos $x=600$, assim podemos montar o seguinte sistema linear: $\begin{cases} x_1+x_2 \quad\quad\quad = 1000 \\ \quad\quad x_2+x_3 \quad\quad = 1000 \\ \quad\quad\quad\quad x_3+x_4 = 700 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad +x_4 = 700 \end{cases}$

A matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 700 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 700 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 700 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 3 < 4 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, esse sistema é possível e indeterminado, e possui 1 incógnita livre (ou grau de liberdade 1). Podemos escolher x_4 como incógnita livre. Portanto, o sistema é equivalente ao sistema abaixo: $\begin{cases} x_1 = 700 - x_4 \\ x_2 = 300 + x_4 \\ x_3 = 700 - x_4 \end{cases}$, cujas soluções são os elementos do conjunto

$$\{(700-x_4,\, 300+x_4,\, 700-x_4,\, x_4)\,;\, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Entretanto, o valor de x_4 não é completamente arbitrário, pois há restrições físicas a considerar. Por exemplo, as taxas de fluxo médias não podem ser negativas, pois estamos supondo ruas de mão única, e uma taxa de fluxo negativa indicaria um fluxo na contra-mão. Portanto, vemos que x_4 pode ser qualquer número real que satisfaça $0 \leq x_4 \leq 700$ e isso implica que a taxa de fluxo média ao longo das ruas ficará dentro das cotas $0 \leq x_1 \leq 700$, $300 \leq x_2 \leq 1000$, $0 \leq x_3 \leq 700$ e $0 \leq x_4 \leq 700$.

4.2 Modelando Problemas nos Circuitos Elétricos

Nos circuitos elétricos também podemos encontrar aplicação para os sistemas lineares. Mas antes, precisamos compreender algumas nomenclaturas e elementos diretamente relacionados aos circuitos elétricos. Essa parte conceitual sobre circuitos elétricos está fundamentada em [1].

Na comunicação ou transmissão de energia de um ponto a outro é necessária uma interconexão de dispositivos elétricos. Tal conexão é conhecida como *circuito elétrico* e cada componente do circuito é denominado *componente*.

Definição 4.1 *Circuito elétrico é uma interconexão de elementos elétricos.*

Em seguida destacamos o conceito de carga elétrica como um princípio fundamental para explicar todos os fenômenos elétricos. Da mesma forma, a quantidade mais elementar em um circuito elétrico é a *carga elétrica*.

Definição 4.2 *Carga é uma propriedade elétrica das partículas atômicas que compõem a matéria, medida em coulombs (C).*

Agora, consideremos o fluxo de cargas elétricas. Uma característica exclusiva da carga elétrica é o fato de ela ser móvel; isto é, ela pode ser transferida de um lugar a outro, onde pode ser convertida em outra forma de energia.

Quando um fio condutor (formado por vários átomos) é conectado a uma bateria (uma fonte de força eletromotriz), as cargas são compelidas a se mover; as cargas positivas se movem em uma direção, enquanto as cargas negativas se movem na direção oposta. A essa movimentação de cargas dá-se o nome de corrente elétrica. Por convenção, o fluxo da corrente é aquele das cargas positivas, isto é, ao contrário do fluxo das cargas negativas. Essa convenção foi introduzida por Benjamin Franklin (1706-1790), cientista e inventor norte-americano. Embora saibamos que a corrente em condutores metálicos se deve a elétrons carregados negativamente, seguiremos a convenção adotada universalmente de que a corrente é o fluxo líquido das cargas positivas. Logo, tem-se a definição a seguir.

Definição 4.3 *Corrente elétrica é o fluxo de carga por unidade de tempo, medido em ampères*[1] *(A).*

[1] 1 ampère = 1 coulomb/segundo.

Contudo, podem haver diversos tipos de corrente; isto é, a carga pode variar com o tempo de diversas maneiras. Se a corrente não muda com o tempo e permanece constante, podemos chamá-la de *corrente contínua* (CC) e por convenção, o símbolo I é usado para representar uma corrente contínua desse tipo. Uma corrente que varia com o tempo é conhecida pelo símbolo i. E uma de suas formas comuns é a corrente senoidal ou corrente alternada (CA). Portanto, pode-se estabelecer as seguintes definições:

Definição 4.4 *Corrente contínua* (CC) *é uma corrente que permanece constante ao longo do tempo.*

Definição 4.5 *Corrente alternada* (CA) *é uma corrente que varia com o tempo segundo uma forma de onda senoidal.*

Uma corrente alternada (CA) é a que usamos em nossas residências para acender lâmpadas e ligar eletrodomésticos. Logo abaixo temos algumas definições que julgamos importantes para compreensão dos circuitos elétricos.

Definição 4.6 *Tensão (ou diferença de potencial) é a energia necessária para deslocar uma carga unitária através de um elemento, medida em volts* (V).

Definição 4.7 *Potência é a velocidade com que se consome ou se absorve energia medida em watts* (W).

Definição 4.8 *A convenção de sinal passivo é realizada quando a corrente entra pelo terminal positivo de um elemento e* $p = +vi$. *Se a corrente entra pelo terminal negativo,* $p = -vi$.

Definição 4.9 *Energia*[2] *é a capacidade de realizar trabalho e é medida em joules* (J).

Em um circuito elétrico existem dois tipos de elementos: elementos passivos e elementos ativos. Um elemento ativo é capaz de gerar energia enquanto um elemento passivo não é. Exemplos desses últimos são resistores, capacitores e indutores; já os geradores, baterias e amplificadores operacionais exemplificam os primeiros.

Os elementos ativos mais importantes são fontes de tensão ou corrente que geralmente liberam potência para o circuito conectado a eles. Há dois tipos de fontes: as dependentes e as independentes.

Definição 4.10 *Fonte independente ideal é um elemento ativo que fornece uma tensão especificada ou corrente que é completamente independente de outros elementos do circuito.*

Definição 4.11 *Uma fonte dependente (ou controlada) ideal é um elemento ativo no qual a quantidade de energia é controlada por outra tensão ou corrente.*

[2] As concessionárias de energia elétrica medem a energia em watts-hora (Wh), em que $1Wh = 3600J$.

Os materiais geralmente possuem um comportamento característico de resistir ao fluxo de carga elétrica. Essa propriedade física, ou habilidade, é conhecida como *resistência* e é representada pelo símbolo R. O elemento de circuito usado para modelar o comportamento da resistência à corrente de um material é o *resistor*.

Credita-se a Georg Simon Ohm (1787-1854), físico alemão, a descoberta da relação entre corrente e tensão para um resistor. Essa relação é conhecida como *lei de Ohm*.

Definição 4.12 *A resistência R de um elemento representa sua capacidade de resistir ao fluxo de corrente elétrica; ela é medida em ohms Ω.*

Observação 4.1 *A lei de Ohm afirma que a tensão v em um resistor é diretamente proporcional à corrente i através dele.*

Isto é,

$$v = iR.$$

A seguir temos mais alguns elementos presentes nos circuitos elétricos.

Definição 4.13 *Ramo representa um elemento único como fonte de tensão ou resistor.*

Definição 4.14 *Nó é o ponto de conexão entre dois ou mais ramos.*

Definição 4.15 *Laço é qualquer caminho fechado em um circuito.*

A lei de Ohm por si só não é o bastante para analisar os circuitos; entretanto, quando associada com as duas leis de Kirchhoff, elas formam um conjunto de ferramentas poderoso e suficiente para analisar uma série de circuitos elétricos. As leis de Kirchhoff foram introduzidas pela primeira vez em 1847 pelo físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) e são formalmente conhecidas como lei de Kirchhoff para corrente (LKC, ou lei dos nós) e lei de Kirchhoff para tensão (LKT, ou lei das malhas); sendo que a primeira se baseia na lei da conservação da carga, que exige que a soma algébrica das cargas dentro de um sistema não pode mudar.

Observação 4.2 *Lei de Kirchhoff para corrente (LKC) diz que a soma algébrica das correntes que entram em um nó (ou um limite fechado) é zero.*

Algebricamente a LKC pode ser representada da seguinte forma $\sum_{n=1}^{N} i_n = 0$, onde N é o número de ramos conectados ao nó e i_n é a enésima corrente que entra (ou sai) do nó.

A segunda lei de Kirchhoff se baseia no princípio da conservação da energia e pode ser enunciada da seguinte forma:

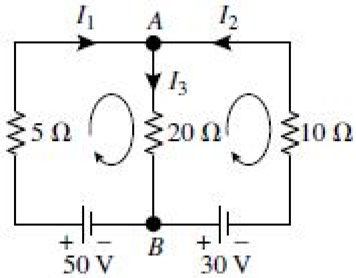
Observação 4.3 *Lei de Kirchhoff para tensão (LKT) diz que a soma algébrica de todas as tensões em torno de um caminho fechado (ou laço) é zero.*

Algebricamente a LKT pode ser representada da seguinte forma $\sum_{k=1}^{K} v_k = 0$, onde K é o número de tensões no laço (ou o número de ramos no laço) e v_k é a k-ésima tensão.

Feitos todos esses esclarecimentos sobre os conceitos básicos de circuitos elétricos vamos fazer um exemplo extraído de [2] e vejamos como os sistemas lineares podem ser usados na resolução desse problema.

1. Determine as correntes I_1, I_2 e I_3 do circuito mostrado na figura 4.5.

Figura 4.5: Diagrama do circuito 2.



Fonte: Imagem extraída de [2].

Solução: Usando os sentidos atribuídos às correntes, a lei das correntes de Kirchhoff fornece uma equação para cada nó:

Nó	Corrente para dentro	Corrente para fora
A	$I_1 + I_2$	I_3
B	I_3	$I_1 + I_2$

Como as equações acima são iguais, ambas podem ser reescritas como

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \tag{4.1}$$

Para encontrar valores únicos das correntes precisamos de mais duas equações. Ao observarmos o diagrama do circuito 2 na figura 4.5 vemos que há três laços fechados, um laço interno à esquerda com um capacitor de 50 V, um laço interno à direita com um capacitor de 30 V e o laço externo que contém ambos capacitores. Logo, a leis das tensões de Kirchhoff nos forneceu três equações e considerando o percurso horário dos laços, as quedas e as elevações de voltagem nesses três laços podem ser representadas da seguinte forma:

	Elevação de voltagem	Queda de voltagem
Laço interno à esquerda	50	$5I_1+I_3$
Laço interno à direita	$30+10I_2+20I_1$	0
Laço externo	$30+50+10I_2$	$5I_1$

Podemos reescrever essas condições como:

$$\begin{aligned} 5I_1 \qquad\quad +20I_3 &= \ 50\\ 10I_2+20I_3 &= -30\\ 5I_1-10I_2 \qquad\quad &= \ 80 \end{aligned} \tag{4.2}$$

No entanto note que ao somarmos a segunda e a terceira linha de (4.2), temos

$$\begin{aligned} 5I_1 \qquad\quad +20I_3 &= \ 50\\ 10I_2+20I_3 &= -30\\ 5I_1 \qquad\quad +20I_3 &= \ 50 \end{aligned} \tag{4.3}$$

dessa forma para resolvermos nosso problema devemos combinar (4.1) com as duas primeiras linhas de (4.3) para assim obtermos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0\\ 5I_1 \qquad\quad +20I_3 = \ 50\\ \qquad 10I_2+20I_3 = -30 \end{cases}$$

Vamos aplicar o teorema de Rouché-Capelli para averiguar se o sistema possui solução.

A matriz ampliada desse sistema é $C=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 5 & 0 & 20 & 50\\ 0 & 10 & 20 & -30\end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 5 & 0 & 20\\ 0 & 10 & 20\end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3$. Logo, temos $\rho_{AB}=\rho_A=3=n$. Assim, pelo Teorema de Rouché-Capelli, o sistema é possível e determinado, e sua única solução é $\begin{cases} I_1 \qquad = \ 6\\ \quad I_2 \quad = -5\\ \qquad I_3 = \ 1 \end{cases}$.

Após alguns cálculos encontramos a solução do sistema, ou seja, o terno ordenado $(6,-5,1)$. Como I_2 é negativo, vemos que o sentido da corrente é o oposto do indicado na figura 4.5.

Uma outra maneira de resolver o problema acima seria analisar separadamente cada malha do circuito representado na figura 4.5. Chamando a primeira malha de **malha A** e a segunda de **malha B** temos:

Na **malha A**

$$\begin{aligned} & -50+5I_A+20(I_A-I_B)=0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 25I_A-20I_B=50 \\ \Longleftrightarrow \quad & 5I_A-4I_B=10 \end{aligned} \tag{4.4}$$

e na **malha B** temos

$$\begin{aligned} & -30+20(I_B-I_A)+10I_B=0 \\ \Longleftrightarrow \quad & -20I_A+30I_B=30 \\ \Longleftrightarrow \quad & -2I_A+3I_B=3 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Assim de (4.4) e (4.5) obtemos o seguinte sistema linear: $\begin{cases} 5I_A - 4I_B = 10 \\ -2I_A + 3I_B = 3 \end{cases}$. Ao resolver esse sistema encontramos $I_A = 6\ A$ e $I_B = 5\ A$, logo $I_1 = I_A = 6\ A$, $I_2 = -I_B = -5\ A$ e $I_3 = I_1 + I_2 = 1\ A$. Uma vantagem de analisar as malhas separadamente é que encontraremos um sistema linear com menos equações e incógnitas.

4.3 Modelando Problemas no Equilíbrio de Equações Químicas

Componentes químicos são representados por *fórmulas químicas* que descrevem a composição atômica de suas moléculas. Exemplos quase que imediatos de pensarmos são oxigênio estável e a água representados pelas fórmulas químicas O_2 e H_2O, respectivamente. As fórmulas químicas do oxigênio estável, (O_2) indica que ele é composto por dois átomos de oxigênio enquanto a fórmula química da água indica que ela é composta por dois átomos de hidrogênio e um atômo de oxigênio.

Quando combinamos compostos químicos sob condições corretas, os átomos de suas moléculas se rearranjam formando novos componentes. Por exemplo, na queima de metano, o metano (CH_4) e o oxigênio estável (O_2) reagem para formar dióxido de carbono (CO_2), ou gás carbônico, e água (H_2O). Esse processo é indicado pela *equação química*

$$CH_4 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O \tag{4.6}$$

Em (4.6) as moléculas da esquerda são denominadas *reagentes* e as da direita são os produtos. Cabe fazermos uma observação, na equação química (4.6) o sinal $+$ serve somente para separar as moléculas e não tem conotação de operação algébrica.

Dizemos que uma reação química está *equilibrada* se aparecer o mesmo número de átomos em cada lado da seta para cada tipo de átomo na reação. Assim, a equação química (4.6) não está equilibrada, desta forma, versões equilibradas da referida equação química podem ser $CH_4+2O_2 \longrightarrow CO_2+2H_2O$ ou $2CH_4+4O_2 \longrightarrow 2CO_2+4H_2O$. Por convenção, é padrão utilizar os menores inteiros positivos que equilibrem uma determinada equação química.

Contudo, a equação (4.6) é relativamente simples de ser resolvida por tentativa e erro, mas equações químicas mais complicadas requerem um método mais sistemático. Existem diversas maneiras de fazer essa tarefa, mas em nosso caso vamos recorrer aos sistemas lineares. Assim, para equilibrar uma equação química precisamos encontrar $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ tais que para cada átomo da equação, o número de átomos à esquerda deve ser igual ao número de átomos à direita. Em particular, para a equação (4.6), devemos encontrar x_1,x_2,x_3 e x_4 tais que

$$x_1CH_4+x_2O_2 \longrightarrow x_3CO_2+x_4H_2O \tag{4.7}$$

Expresso em formato tabular, temos

	Lado esquerdo		Lado direito
Carbono	x_1	$=$	x_3
Hidrogênio	$4x_1$	$=$	$2x_4$
Oxigênio	$2x_2$	$=$	$2x_3+x_4$

E assim montarmos o seguinte sistema linear homogêneo $\begin{cases} x_1 \quad - x_3 \quad = 0 \\ 4x_1 \quad - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

A matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Assim, A tem posto 3, ou seja, $\rho_A = 3 < 4 = = n$. Portanto, pelo Corolário 2.21, o sistema em questão possui infinitas soluções. Além disso, pelo Teorema de Rouché-Capelli ele possui 1 incógnita livre (ou grau de liberdade 1). Podemos escolher x_4 como a incógnita livre. Assim, nosso sistema é equivalente ao sistema $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$, cujas soluções são os elementos do conjunto $\left\{ \left(\frac{1}{2}x_4, x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4\right); x_4 \in \mathbb{R} \right\}$.

O sistema em si admite infinitas soluções, mas estamos interessados nos menores valores inteiros positivos que equilibrem a equação e isso ocorre quando tomamos $x_4=2$, desse modo, podemos equilibrar a equação tomando $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$ e $x_4 = 2$.

Seguindo o mesmo raciocínio vamos equilibrar a equação química

$$\begin{array}{ccccccc} HCl & + & Na_3PO_4 & \longrightarrow & H_3PO_4 & + & NaCl \\ \text{Ácido clorídrico} & + & \text{Fosfato de sódio} & \longrightarrow & \text{Ácido fosfórico} & + & \text{Cloreto de sódio} \end{array}$$

Para isso devemos encontrar x_1, x_2, x_3 e x_4 inteiros positivos tais que

$$x_1(HCl) + x_2(Na_3PO_4) \longrightarrow x_3(H_3PO_4) + x_4(NaCl) \tag{4.8}$$

Igualando o número de átomos de cada tipo em ambos os lados temos,

$$\begin{array}{rclc} 1x_1 & = & 3x_3 & \text{Hidrogênio } (H) \\ 1x_1 & = & 1x_4 & \text{Cloro } (Cl) \\ 3x_2 & = & 1x_4 & \text{Sódio } (Na) \\ 1x_2 & = & 1x_3 & \text{Fósforo } (P) \\ 4x_2 & = & 4x_3 & \text{Oxigênio } (O) \end{array}$$

E essas equações geram o seguinte sistema linear $\begin{cases} x_1 \quad - 3x_3 = 0 \\ x_1 \quad - x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$.

A matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, A tem posto 3, ou seja, $\rho_A = 3 < 4 = n$. Portanto, pelo Corolário 2.21, o sistema em questão possui infinitas soluções. Além disso, pelo Teorema de Rouché-Capelli ele possui 1 incógnita livre (ou grau de liberdade 1). Podemos escolher x_4 como a incógnita livre. Assim, nosso sistema é equivalente ao sistema $\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_4, \\ x_3 = \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$ cujas soluções são os elementos do conjunto $\left\{\left(x_4, \frac{1}{3}x_4, \frac{1}{3}x_4, x_4\right); x_4 \in \mathbb{R}\right\}$.

Novamente o sistema em si admite infinitas soluções, mas estamos interessados nos menores valores inteiros positivos que equilibrem a equação e isso ocorre quando tomamos $x_4 = 3$, desse modo podemos equilibrar a equação tomando $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$ e $x_4 = 3$. Substituindo esses valores em (4.7), obtemos a equação equilibrada

$$3HCl + Na_3PO_4 \longrightarrow H_3PO_4 + 3NaCl.$$

4.4 Modelando Problemas na Alocação de Recursos

Sistemas de equações lineares podem ser utilizados em situações que envolvam alocação de recursos limitados sujeitos a um conjunto de restrições. Vejamos a seguir como resolver alguns problemas que extraímos de [12].

1. Um biólogo colocou três espécies de bactérias (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes de alimentos $(A, B$ e $C)$. A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2300 unidades de A, 800 unidades de B e 1500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como ilustra a Tabela 4.1. Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

Tabela 4.1: Tipos de alimentos e bactérias.

	Bactéria da espécie I	Bactéria da espécie II	Bactéria da espécie III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

Fonte: Talela reproduzida de [12].

Solução: Sejam x_1, x_2 e x_3 os números das espécies de bactérias I, II e III , respectivamente. Como cada uma das x_1 bactérias da espécie I consome duas unidades de A por dia, o grupo I consome um total de $2x_1$ unidades por dia. Analogamente, os grupos II e III consomem um total de $2x_2$ e $4x_3$ unidades do alimento A diariamente. Como queremos usar todas as 2300 unidades de A, temos a equação

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300.$$

De modo análogo, obtemos as equações correspondentes ao consumo de B e C:

$$x_1 + 2x_2 = 800 \text{ e } x_1 + 3x_2 + x_3 = 1500.$$

Dessa forma, obtemos o seguinte sistema linear $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300 \\ x_1 + 2x_2 = 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1500 \end{cases}$.

A matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 2300 \\ 1 & 2 & 0 & 800 \\ 1 & 3 & 1 & 1500 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 350 \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$ $= I_3$. Assim, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 3 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, o sistema é possível e determinado, e sua única solução é $\begin{cases} x_1 = 100 \\ x_2 = 350 \\ x_3 = 350 \end{cases}$. Então, $x_1 = 100, x_2 = 350$ e $x_3 = 350$, ou seja, o biólogo deve colocar 100 bactérias da espécie I e 350 de cada uma das outras espécies no tubo de ensaio para que todo o alimento seja consumido.

2. Uma florista oferece três tamanhos de arranjos de flores com rosas, margaridas e crisântemos. Cada arranjo pequeno contém uma rosa, três margaridas e três crisântemos. Cada arranjo médio contém duas rosas, quatro margaridas e seis crisântemos. Cada arranjo grande contém quatro rosas, oito margaridas e seis crisântemos. Um dia, a florista notou que havia usado um total de 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos ao preparar as encomendas desses três tipos de arranjos. Quantos arranjos de cada tipo ela fez?

   Solução: Sejam x_1, x_2 e x_3 os tamanhos de arranjos pequeno, médio e grande, respectivamente. Vamos fazer uma análise relacionando o número total de rosas usadas e o tamanho dos arranjos. Em cada um dos x_1 arranjos pequenos ela colocou uma rosa, em cada um dos x_2 arranjos médios foram colocadas duas rosas e em cada um dos x_3 arranjos grandes ela colocou quatro rosas, dessa forma foram usados um total de 24 rosas. Logo, podemos traduzir essa situação pela seguite equação

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 24.$$

   Analogamente, relacionando a quantidade de margaridas e crisântemos com os tamanhos dos arranjos encotraremos as equações

$$3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 50 \text{ e } 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 48,$$

essas equações dão origem ao seguinte sistema linear: $\begin{cases} x_1 \ +2x_2+4x_3=24 \\ 3x_1+4x_2+8x_3=50 \\ 3x_1+6x_2+6x_3=48 \end{cases}$.

Note que a matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 3 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 6 & 6 & 48 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$. Assim, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 3 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, o sistema é possível e determinado, e sua única solução é $\begin{cases} x_1 \quad\quad =2 \\ \quad x_2 \quad =3 \\ \quad\quad x_3=4 \end{cases}$.

Então, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$, ou seja, a florista fez 2 arranjos pequenos, 3 arranjos médios e 4 arranjos grandes.

4.5 Modelando Problemas nos Jogos Lineares Finitos

Há várias situações nas quais devemos considerar um sistema físico que tem apenas um número finito de *estados*. Às vezes esses estados podem ser alternados por meio da aplicação de determinados procedimentos, cada um dos quais produzindo uma quantidade finita de efeitos. Por exemplo, uma lâmpada pode estar acesa ou apagada, e um interruptor pode mudar o estado da lâmpada de acesa para apagada e vice-versa.

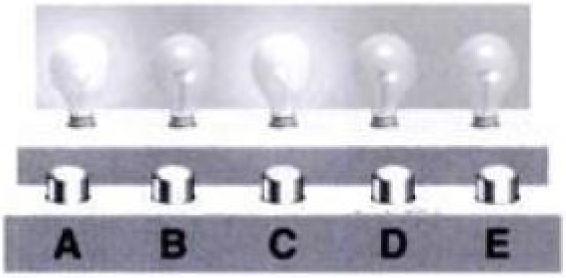
Sistemas digitais que surgem em ciências da computação muitas vezes são desse tipo. Muitos jogos de computador retratam quebra-cabeças nos quais um certo esquema deve ser manipulado por vários interruptores a fim de produzir o efeito desejado. A natureza finita de tais situações é perfeitamente adequada às análises que fazem uso de aritmética modular, e frequentemente sistemas lineares sobre $\mathbb{Z}_p$ entram em ação[3]. Problemas que envolvem esse tipo de situação são chamados *jogos lineares finitos*.

[3] A notação $\mathbb{Z}_p$ representa o conjunto de todas as classes residuais módulo p. Para maiores detalhes sobre classes residuais veja [9].

Vejamos agora um exemplo extraído de [12] para entendermos como uma situação envolvendo jogos lineares finitos funciona na prática:

1. Uma fileira de cinco lâmpadas é controlada por cinco interruptores. Cada interruptor muda o estado (ligado ou desligado) da lâmpada diretamente sobre ele e os estados das lâmpadas imediatamente adjacentes à esquerda e à direita como ilustrado na figura 4.6 abaixo.

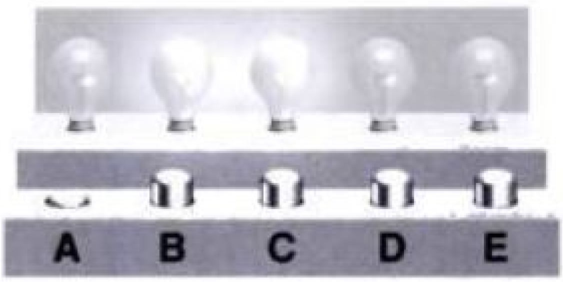
Figura 4.6: Estado (a).



Fonte: Imagem extraída de [12].

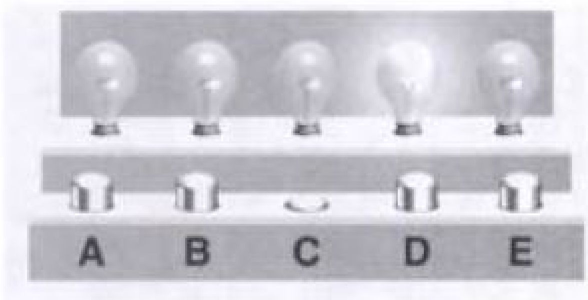
Inicialmente, a primeira e a terceira lâmpada estão acessas, como na figura 4.6. Ao pressionarmos o interruptor A, muda-se o estado do sistema para o estado da figura 4.7. Se depois pressionarmos o interruptor C, o resultado será o que está representado na figura 4.8.

Figura 4.7: Estado (b).



Fonte: Imagem extraída de [12].

Figura 4.8: Estado (c).



Fonte: Imagem extraída de [12].

Suponhamos o seguinte: inicialmente todas as luzes estão apagadas. Podemos pressionar os interruptores em alguma ordem de modo que a primeira, a terceira e a quinta lâmpadas fiquem acesas? Ou ainda: podemos pressionar os interruptores em alguma ordem de modo que só a primeira lâmpada fique acesa?

Para resolvermos essas perguntas devemos entender o seguinte: a natureza "liga/desliga" deste problema sugere que a notação binária será útil e que devemos trabalhar em $\mathbb{Z}_2$. Assim, representamos os estados das cinco lâmpadas por um vetor em $\mathbb{Z}_2^5$ de modo que 0 representa desligado e 1, ligado. Por exemplo, o vetor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ corresponde a situação da figura 4.7. Podemos usar a mesma ideia de vetores em $\mathbb{Z}_2^5$ para representar a ação de cada interruptor. Se um interruptor muda o estado de uma lâmpada, a componente correspondente é um 1; caso contrário, ela é 0. Assim, as ações dos cinco interruptores são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora vamos entender como funciona a mudança de um estado para o outro, na situação mostrada na figura 4.6 corresponde ao estado inicial $S = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ seguida por $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

e a soma é $S+A=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, como mostrado na figura 4.7. Se começarmos com uma configuração S qualquer e pressionarmos os interruptores também em uma ordem qualquer, por exemplo $S+A+B+C+D+E+A$ e como em $\mathbb{Z}_2^5$ a adição é comutativa, temos $S+A+B+C+D+E+A=S+2A+B+C+D+E=A+B+C+D+E$, já que $2=0$ em $\mathbb{Z}_2$. Para esse exemplo o resultado seria o mesmo independente da ordem que pressionarmos os botões, e também podemos perceber que nenhum dos interruptores precisa ser acionado mais que uma vez. Nesse problema a grande questão que precisamos discutir é: Se é possível chegar a uma configuração-alvo T, começando com uma configuração inicial S. Ou seja, precisamos determinar se existem x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 em $\mathbb{Z}_2$ tais que

$$S+x_1A+x_2B+x_3C+x_4D+x_5E=T \Rightarrow x_1A+x_2B+x_3C+x_4D+x_5E=T-S \quad (4.9)$$

Nesse caso, a configuração inicial é $S=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ e temos duas configurações que desejamos alcançar, as quais vamos resolver separadamente a seguir.

(a) Para $T=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ resolver (4.9) é equivalente ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1+x_2 & =1\\ x_1+x_2+x_3 & =0\\ x_2+x_3+x_4 & =1\\ x_3+x_4+x_5 & =0\\ x_4+x_5 & =1 \end{cases}$$

Perceba que a matriz ampliada desse sistema é $C=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&1\\1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada sobre $\mathbb{Z}_2$ é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Desse modo, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 4 < 5 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, esse sistema é possível e indeterminado, e possui 1 incógnita livre (ou grau de liberdade 1). Podemos escolher x_5 como incógnita livre. Portanto, há exatamente duas soluções. Resolvendo o sistema em termos de x_5 temos:

$$\begin{cases} x_1 = \quad x_5 \\ x_2 = 1 + x_5 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 + x_5 \end{cases}.$$

Logo, quando $x_5 = 0$ e $x_5 = 1$, temos respectivamente as soluções $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

e $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Para $T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ resolver (4.9) é equivalente ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ \quad\; x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ \qquad\; x_3 + x_4 + x_5 & = 0 \\ \qquad\qquad x_4 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

Perceba que a matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada sobre $\mathbb{Z}_2$ é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, temos $\rho_{AB} = 5 > 4 = \rho_A$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, esse sistema é impossível, ou seja, não há como começar com todas as lâmpadas apagadas e acender apenas a primeira.

Capítulo 5

Teorema de Rouché-Capelli: Confrontando Métodos

Dedicaremos esse capítulo a resolução de problemas e exercícios. Durante a resolução dos problemas estaremos usando os métodos trabalhados usualmente pelo livro didático e também construindo a resolução desses problemas através do Teorema de Rouché-Capelli. Os livros didáticos que analisamos apresentam como método de solução para sistemas de ordem 2×2 a substituição e adição. Por sua vez, para sistemas 3×3 ou de ordem superior eles trabalham apenas com escalonamento.

5.1 Alguns Problemas

Os problemas que estaremos resolvendo nesta seção foram extraídos de [2], [11] e [12]. Procuramos escolher problemas que se encaixassem nas áreas discutidas nas seções do capítulo anterior.

1. Bronze é uma liga de cobre e zinco, na qual a porcentagem de cobre varia geralmente entre 60% e 70%.Usando dois tipos de bronze, um com 62% e outro com 70% de cobre, deseja-se obter uma tonelada de bronze com exatamente 65% de cobre. Quantos quilos do primeiro tipo de bronze e quantos quilos do segundo devem ser usados?

   Uma Solução: Nesse problema temos dois tipos de bronze, os quais vamos denominar por A e B. Para cada tonelada do bronze do tipo A temos $0,62$ toneladas de cobre e $0,38$ toneladas de zinco. Para cada tonelada do bronze do tipo B temos $0,70$ toneladas de cobre e $0,30$ toneladas de zinco. Em uma tonelada do bronze que desajamos formar vai conter x_1 toneladas do bronze A e x_2 toneladas do bronze B, então a quantidade de cobre que ela vai conter será dada pela expresssão $0,62x_1 + 0,70x_2$, ou seja, a equação $0,62x_1 + 0,70x_2 = 0,65$ representa a quantidade de cobre que teremos. De maneira semelhante concluímos que a equação $0,38x_1 + 0,30x_2 = 0,35$ representa a quantidade de zinco presente numa tonelada do bronze desejado. Logo, nosso problema pode ser representado pelo sistema s_1 : $\begin{cases} 0,62x_1 + 0,70x_2 = 0,65 \\ 0,38x_1 + 0,30x_2 = 0,35 \end{cases}$. Resolveremos esse sistema pelo método da substituição e para isso usaremos a seguinte sequência de passos:

(a) Multiplicando ambas as equações de S_1 por 100 obtemos o seguinte sistema S_2:

$$S_2 : \begin{cases} 62x_1 + 70x_2 = 65 \\ 38x_1 + 30x_2 = 35 \end{cases}$$

(b) Tomando a primeira equação de S_2 escrevendo x_1 em função de x_2 temos

$$x_1 = \frac{65 - 70x_2}{62} \tag{5.1}$$

(c) Agora substituindo (5.1) na segunda equação de S_2 temos

$$38\left(\frac{65 - 70x_2}{62}\right) + 30x_2 = 35$$

após algumas manipulações algébricas concluímos que $x_2 = \dfrac{3}{8}$.

(d) Agora substituindo o valor encontrado de x_2 em (5.1) e realizando alguns cálculos encontramos $x_1 = \dfrac{5}{8}$.

Portanto, para obtermos uma tonelada de bronze com 65% de cobre e 35% de zinco, devemos tomar $\dfrac{5}{8}$ de uma tonelada do bronze A e $\dfrac{3}{8}$ de uma tonelada do bronze B, ou seja, 625 quilos do bronze A e 375 quilos do bronze B.

2. Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a "mistura da casa" contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a "mistura especial" contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado francês. Um pacote com "mistura gourmet" contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 de café queniano e 25 de café tostado tipo francês. Se ele deseja utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura deve preparar?

   Uma Solução: Inicialmente vamos entender o problema: temos de preparar três tipos de misturas de café com tipos e quantidades diferentes desse conteúdo. Por exemplo, vamos considerar os 30 quilos de café colombiano que esse comerciante tem em estoque, como os pacotes de cada mistura será medida em gramas vamos considerar não os 30 quilos de café colombiano e sim 30000 gramas de café colombiano.

Suponha que vão ser preparados x_1 pacotes da “mistura da casa” e em cada um deles vamos colocar 300 gramas de café colombiano. Da mesma forma em cada um dos x_2 pacotes da “mistura especial” serão colocadas 200 de café colombiano e em x_3 pacotes da “mistura gourmet” vamos colocar 100 gramas de café colombiano. Como vamos usar todo o estoque de café colombiano, ou seja, 30000 gramas, temos a seguinte equação

$$300x_1 + 200x_2 + 100x_3 = 30000.$$

De modo análogo, obtemos as equações que representam as quantidades de café francês e queniano:

$$200x_1 + 100x_2 + 200x_3 = 25000 \text{ e } 200x_2 + 200x_3 = 15000.$$

Logo, obtemos o seguinte sistema linear $S_1 : \begin{cases} 300x_1 + 200x_2 + 100x_3 = 30000 \\ 200x_1 + 100x_2 + 200x_3 = 25000 \\ \phantom{200x_1 + {}} 200x_2 + 200x_3 = 15000 \end{cases}$. Vamos resolver esse sistema por escalonamento, e para isso aplicaremos a sequência de passos abaixo:

(a) Inicialmente vamos dividir ambos os membros de todas as equações de S_1 por 100, obtendo o sistema $S_2 : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 300 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 250 \\ \phantom{2x_1 + {}} 2x_2 + 2x_3 = 150 \end{cases}$.

(b) Vamos multiplicar a 1ª equação de S_2 por $\frac{1}{3}$. Isto resulta no sistema
$S_3 : \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 100 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 250 \\ \phantom{2x_1 + {}} 2x_2 + 2x_3 = 150 \end{cases}$.

(c) Multiplicaremos a 1ª linha de S_3 por -2 e a equação obtida vamos somar com a 2ª linha de S_3 obteremos o sistema $S_4 : \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 100 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = 50 \\ 2x_2 + 2x_3 = 150 \end{cases}$.

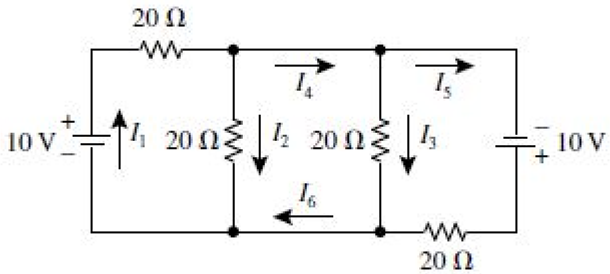
(d) Multiplicaremos a 2ª linha de S_4 por -3 e dividiremos a terceira linha de S_4 por 2. Isto resulta no sistema $S_5 : \begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 100 \\ x_2 - 4x_3 = -150 \\ x_2 + x_3 = 75 \end{cases}$.

(e) Multiplicaremos a 2ª linha de S_5 por -1, e somando a equação resultante com a terceira linha de S_5 vamos encontrar o sistema S_6 : $\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 100 \\ x_2 - 4x_3 = -150 \\ 5x_3 = 225 \end{cases}$.

Da terceira equação de S_6 concluímos que $x_3 = 45$. Substituindo o valor de x_3 na segunda equação de S_6 encontraremos $x_2 = 30$ e por último substituindo os valores de x_3 e x_2 na primeira equação de S_6 temos que $x_1 = 65$. Logo, o comerciante pode preparar 65 pacotes da "mistura da casa", 30 pacotes da "mistura especial" e 45 pacotes da "mistura gourmet".

3. Analise o circuito elétrico dado encontrando as correntes desconhecidas.

Figura 5.1: Diagrama do circuito 3.



Fonte: Imagem extraída de [2].

Uma Solução: Aplicando a lei das correntes de Kirchhoff em cada um dos nós do circuito representado na figura 5.1, no sentido horário a partir do canto superior esquerdo, temos:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_4 \\ I_4 &= I_3 + I_5 \\ I_6 &= I_3 + I_5 \\ I_1 &= I_2 + I_6 \end{aligned}$$

As igualdades acima mostram que $I_4 = I_6$, em outras palavras $I_4 - I_6 = 0$. Assim, a lei das correntes de Kirchhoff nos fornece três equações $I_4 - I_6 = 0$, $I_1 - I_2 - I_4 = 0$ e $-I_3 + I_4 - I_5 = 0$. Agora, aplicando a lei das tensões de Kirchhoff temos:

$$\begin{aligned} 10 &= 20I_1 + 20I_2 \\ 20I_2 &= 20I_3 \\ 10 + 20I_3 &= 20I_5 \end{aligned}$$

As igualdades acima mostram que $I_2 = I_3$, em outras palavras $I_2 - I_3 = 0$. Assim, a lei das tensões de Kirchhoff nos fornece três equações $I_2 - I_3 = 0$, $2I_1 + 2I_2 = 1$ e $2I_2 - 2 - I_5 = -1$.

O uso das leis das tensões e das correntes de Kirchhoff nos forneceu seis equações, logo, podemos reescrever essas condições como:

$$S_1 : \begin{cases} I_1 - I_2 \quad - I_4 = 0 \\ 2I_1 + 2I_2 = 1 \\ 2I_2 \quad - 2I_5 = -1 \\ -I_3 + I_4 - I_5 = 0 \\ I_2 - I_3 = 0 \\ I_4 \quad - I_6 = 0 \end{cases}.$$

Vamos dividir o processo de escalonamento do sistema S_1 em algumas etapas.

(a) Permuta-se a 3^a com a 4^a equação de S_1. Em seguida multiplicamos a primeira equação de S_1 por -2 e o resultado obtido soma-se a 2^a equação de S_1 obtendo um sistema equivalente S_2 tal que

$$S_2 : \begin{cases} I_1 - I_2 \quad - I_4 = 0 \\ 4I_2 \quad + 2I_4 = 1 \\ -I_3 + I_4 - I_5 = 0 \\ 2I_2 \quad - 2I_5 = -1 \\ I_2 - I_3 = 0 \\ I_4 \quad - I_6 = 0 \end{cases}.$$

(b) Permuta-se a 2^a com a 5^a equação de S_2. Em seguida multiplicamos a 3^a equação de S_2 por -1. Permuta-se a 4^a com a 6^a equação de S_2 obtendo um sistema equivalente S_3 tal que

$$S_3 : \begin{cases} I_1 - I_2 \quad - I_4 = 0 \\ I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_4 \quad - I_6 = 0 \\ 4I_2 \quad + 2I_4 = 1 \\ 2I_2 \quad - 2I_5 = -1 \end{cases}.$$

(c) Permuta-se a 5^a com a 6^a equação de S_3. Dessa forma obtemos um sistema equivalente S_4 tal que

$$S_4: \begin{cases} I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\ I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_4 - I_6 = 0 \\ 2I_2 - 2I_5 = -1 \\ 4I_2 + 2I_4 = 1 \end{cases}.$$

(d) Multiplica-se a 2^a equação de S_4 por -2 e a equação obtida somamos com a 5^a equação de S_4. Em seguida multiplica-se a 2^a de S_4 por -4 e a equação obtida somamos com a 6^a equação de S_4. Dessa forma obtemos um sistema equivalente S_5 tal que

$$S_5: \begin{cases} I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\ I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_4 - I_6 = 0 \\ I_3 - 2I_5 = -1 \\ 4I_3 + 2I_4 = 1 \end{cases}.$$

(e) Multiplica-se a 3^a equação de S_5 por -1 e a equação obtida somamos com a 5^a equação de S_5. Em seguida multiplica-se a 3^a de S_5 por -4 e a equação obtida somamos com a 6^a equação de S_5. Dessa forma obtemos um sistema equivalente S_6 tal que

$$S_6: \begin{cases} I_1 - I_2 - I_4 = 0 \\ I_2 - I_3 = 0 \\ I_3 - I_4 + I_5 = 0 \\ I_4 - I_6 = 0 \\ I_4 - 3I_5 = -1 \\ 6I_4 - 4I_5 = 1 \end{cases}.$$

(f) Multiplica-se a 4^a equação de S_6 por -1 e a equação obtida somamos com a 5^a equação de S_6. Em seguida multiplica-se a 4^a de S_6 por -6 e a equação obtida somamos com a 6^a equação de S_6. Dessa forma obtemos um sistema equivalente S_7 tal que

$$S_7:\begin{cases} I_1-I_2 \quad -I_4 = 0\\ I_2-I_3 = 0\\ I_3-I_4+I_5 = 0\\ I_4 - I_6 = 0\\ -3I_5+I_6=-1\\ -4I_5+6I_6=1\end{cases}.$$

(g) Multiplica-se a 5^a equação de S_7 por $-\frac{1}{3}$. Dessa forma obtemos um sistema equivalente S_8 tal que

$$S_8:\begin{cases} I_1-I_2 \quad -I_4 = 0\\ I_2-I_3 = 0\\ I_3-I_4+I_5 = 0\\ I_4 - I_6 = 0\\ I_5-\frac{1}{3}I_6=\frac{1}{3}\\ -4I_5+I_6=1\end{cases}.$$

(h) Multiplica-se a 5^a equação de S_8 por 4 e a equação obtida soma-se com a 6^a equação de S_8. Dessa forma obtemos um sistema equivalente S_8 tal que

$$S_9:\begin{cases} I_1-I_2 \quad -I_4 = 0\\ I_2-I_3 = 0\\ I_3-I_4+I_5 = 0\\ I_4 - I_6 = 0\\ I_5-\frac{1}{3}I_6=\frac{1}{3}\\ \frac{14}{3}I_6=\frac{7}{3}\end{cases}.$$

Da última equação de S_9 conclui-se que $I_6=\frac{1}{2}$ e como $I_6=I_4$, logo $I_4=\frac{1}{2}$. Substituindo o valor encontrado para I_6 na 5^a equação de S_9 encontra-se $I_5=\frac{1}{2}$. Aplicando os valores de I_4 e I_5 na 3^a equação de S_9, daí encontra-se $I_3=0$ e consequentemente $I_2=0$, pois $I_2=I_3$. Por fim, na 1^a equação de S_9 aplica-se os valores de I_2 e I_4 o que implica em $I_1=\frac{1}{2}$. Portanto, $I_1=I_4=I_5=I_6=\frac{1}{2}A$ e $I_2=I_3=0$.

5.2 Alguns Problemas... Novamente?

Nessa seção, como seu título sugere, vamos abordar os problemas da seção anterior, porém dessa vez usaremos o teorema de Rouché-Capelli para analisar os problemas propostos.

1. Bronze é uma liga de cobre e zinco, na qual a porcentagem de cobre varia geralmente entre 60% e 70%.Usando dois tipos de bronze, um com 62% e outro com 70% de cobre, deseja-se obter uma tonelada de bronze com exatamente 65% de cobre. Quantos quilos do primeiro tipo de bronze e quantos quilos do segundo devem ser usados?

   Uma Solução: Como já constatou-se anteriormente o problema acima pode ser representado pelo sistema linear $S_2 : \begin{cases} 62x_1 + 70x_2 = 65 \\ 38x_1 + 30x_2 = 35 \end{cases}$. A matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 62 & 70 & 65 \\ 38 & 30 & 35 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 62 & 70 \\ 38 & 30 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$. Assim, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 2 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, o sistema é possível e determinado, e sua única solução é $\begin{cases} x_1 = \frac{5}{8} \\ x_2 = \frac{3}{8} \end{cases}$.

2. Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a "mistura da casa" contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a "mistura especial" contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado francês. Um pacote com "mistura gourmet" contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 de café queniano e 25 de café tostado tipo francês. Se ele deseja utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura deve preparar?

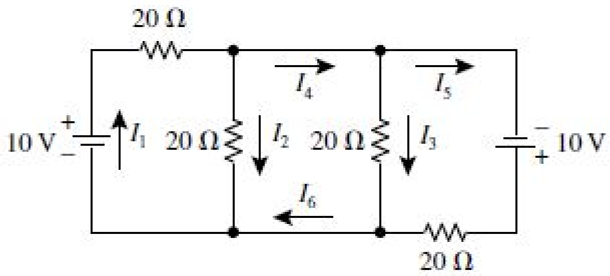
   Uma Solução: Esse problema pode ser representado pelo sistema abaixo

$$S_2 : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 300 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 250 \\ 2x_2 + 2x_3 = 150 \end{cases}.$$

   A matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 2 & 1 & 2 & 250 \\ 0 & 2 & 2 & 150 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 65 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 45 \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$ $= I_3$. Assim, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 3 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, o sistema é possível e determinado, e sua única solução é $\begin{cases} x_1 & & = 65 \\ & x_2 & = 30 \\ & & x_3 = 45 \end{cases}$.

3. Analise o circuito elétrico dado encontrando as correntes desconhecidas.

Figura 5.2: Diagrama do circuito 3.



Fonte: Imagem extraída de [2].

Uma Solução: Anteriormente vimos que esse problema pode ser represntado pelo seguinte sistema linear S_1 : $\begin{cases} I_1 - I_2 \quad -I_4 & = 0 \\ 2I_1 + 2I_2 & = 1 \\ 2I_2 \quad -2I_5 & = -1 \\ -I_3 + I_4 - I_5 & = 0 \\ I_2 - I_3 & = 0 \\ I_4 \quad -I_6 & = 0 \end{cases}$. Perceba que a matriz ampliada desse sistema é $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, cuja matriz equivalente na forma escalonada é $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Por sua vez, a matriz dos coeficientes do sistema é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e sua forma escalonada é a matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_6$. Desse modo, temos $\rho_{AB} = \rho_A = 6 = n$. Logo, pelo Teorema de Rouché-Capelli, esse sistema é possível e determinado. Portanto, há exatamente uma solução, e essa única solução é

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{2} \\ x_5 = \frac{1}{2} \\ x_6 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

5.3 Alguns Comentários

Na seção 3.2 do capítulo 3 fizemos uma descrição de como dois livros específicos estão apresentando as matrizes e os sistemas lineares. O que chamou nossa atenção foi que esses objetos matemáticos são estudados de modo independente, e sabemos que historicamente as matrizes foram fortemente utilizadas na resolução de sistemas lineares.

Na resolução dos sistemas, os livros didáticos analisados ficam limitados ao método da substituição ou da adição se o sistema é de ordem 2×2 e, se o sistema for de ordem 3×3 eles são resolvidos escalonando as equações. O que não é levado em conta é o tratamento matricial que pode ser dado aos sistemas lineares, uma vez que o escalonamento é feito nas equações em sua representação algébrica, o que por sua vez pode não parecer muito amigável ou agradável a princípio para um aluno iniciante.

Esse tratamento exclusivamente algébrico pode ser devido ao currículo, uma vez que ele foi estruturado de modo que matrizes e sistemas lineares são trabalhados de forma independente. O próprio currículo do estado de Pernambuco exclui o ensino de matrizes do ensino médio regular. Contudo, os livros didáticos trazem esses conteúdos, então talvez seja viável trabalhar com matrizes no ensino regular, pois ganharemos uma nova ferramenta que pode ser utilizada na resolução dos sistemas lineares.

No ensino médio integral por sua vez, como devem ser trabalhadas as matrizes e suas propriedades, esses conhecimentos podem ser usados quando o aluno estiver estudando sistemas lineares. Nesse momento, entra a proposta desse trabalho, ou seja, utilizar o teorema de Rouché-Capelli, que não aparece em nenhum dos livros que analisamos. Porém, sua simplicidade, ao nosso ver, torna esse teorema perfeitamente aplicável na resolução de sistemas lineares, bastando conhecermos apenas as operações com matrizes.

Se levarmos em conta sistemas lineares muito grandes, trabalhar com sua forma algébrica pode se tornar algo não muito vantajoso. Daí, uma boa solução é trabalhar com a matriz ampliada e a matriz dos coeficientes do sistema. Essa alternativa pode inclusive ser usada como uma forma de aplicar aqueles conhecimentos sobre matrizes que adquirimos anteriomente.

Para resolver um sistema linear usando o teorema de Rouché-Capelli basta escalonarmos a matriz ampliada e dela tirarmos a matriz dos coeficientes do sistema e compararmos o posto de ambas, e assim determinar se esse sistema possui ou não solução. Aqui, novamente destacamos que do ponto de vista prático pode ser mais pertinente escalonar uma matriz composta unicamente de números que um sistema linear com várias incógnitas.

A fim de exemplificar esse fato nas seções 5.1 e 5.2 desse capítulo foram resolvidos de duas formas distintas os mesmos problemas. Resolver sistemas lineares usando o teorema de Rouché-Capelli é uma forma de resgatar o estudo de matrizes.

Por fim, convidamos o leitor a resolver os problemas propostos no apêndice A[1] utilizando o teorema de Rouché-Capelli, que é uma ferramenta pouco usada e no entanto muito eficiente na resolução de sistemas lineares.

[1]O leitor pode conferir as possíveis soluções dos problemas consultando o apênce B.

Capítulo 6

Conclusões

Na construção desse trabalho, fizemos um estudo sobre o uso do teorema de Rouché-Capelli na resolução dos sistemas lineares, levando em consideração a importância desses sistemas para a matemática e outras áreas do conhecimento. O tema discorrido nesse texto estabelece uma ponte que conecta o estudo dos sistemas lineares a conhecimentos que devem ser adquiridos no estudo das matrizes.

Dessa forma, precisamos ressaltar que o conceito de matriz, bem como o conhecimento de suas propriedades, são fundamentais e devem ser devidamente exploradas no Ensino Médio. Destacamos ainda, que o uso dos sistemas lineares para tratar problemas de outras áreas do conhecimento é uma atividade bastante construtiva e interessante. Nesse sentido, propomos uma lista de atividades em que os sistemas lineares e o teorema de Rouché-Capelli devem ser utilizados de forma objetiva, para solucionar problemas práticos que modelam situações diversas.

Sem dúvida alguma, a elaboração desse trabalho nos fez adquirir um novo olhar acerca do estudo e dos métodos de resolução de sistemas lineares, contribuindo para nossa formação acadêmica e docente. Durante as pesquisas despertamos uma nova visão em relação ao currículo de matemática e sua proposta de ensino das matrizes e dos sistemas lineares, uma vez que tornar-se-á mais vantajosa uma proposta de ensino onde esses dois objetos matemáticos caminhem lado a lado, como foi historicamente. Consideramos melhor que um modelo pré-estabelecido onde cada um é discutido de forma independente, ou pior, onde um deles seja negligenciado ou trabalhado de maneira inadequada.

Esperamos que o uso do teorema de Rouché-Capelli como um método alternativo na resolução dos sistemas lineares possa ser trabalhado no Ensino Médio de forma efetiva, fugindo à proposta dos livros didáticos e dando a devida atenção ao estudo das matrizes. Nosso anseio é que ao voltar seu olhar para um problema que envolva um sistema linear, o leitor possa enxergar através desse teorema um método de solução viável, eficaz e sobre tudo, mais uma pérola da “Rainha das Ciências”.

Referências Bibliográficas

[1] ALEXANDER, C. K., SADIKU, M. N. O.; *Fundamentos de Circuitos Elétricos*, 5^a ed. Porto Alegre: AMGH, (2013).

[2] ANTON, H., RORRES, C.; *Álgebra Linear com Aplicações*, 10^a ed. Porto Alegre: Bookman, (2012).

[3] BOLDRINI, J. L. et al.; *Álgebra Linear*, 3^a ed. São Paulo: Harper / Row do Brasil, (1980).

[4] BOYER, C. B.; *História da Matemática*, 3^a ed. São Paulo: Blucher, (2012).

[5] BRASIL: *Base Nacional Comum Curricular*. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em 19 Junho de 2019.

[6] ESTADO DE PERNAMBUCO: *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco*, Secretaria de Estado de Pernambuco (2012). Disponível em <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/4171/matematica_ef_em.pdf>. Acesso em 21 Junho de 2019.

[7] ESTADO DE PERNAMBUCO: *Currículo de Matemática para o Ensino Médio com Base nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco*, Secretaria de Estado de Pernambuco. Disponível em <http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/750/curriculo_matematica_em_2.pdf>. Acesso em 22 Junho de 2019.

[8] HEFEZ, A., FERNANDES, C. S.; *Introdução à Álgebra Linear*, 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, (2016). (Coleção PROFMAT).

[9] HEFEZ, A.; *Aritmética*, 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, (2016). (Coleção PROFMAT).

[10] IEZZI, G., HAZZAN, S.; *Fundamentos de Matemática Elementar, 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas Lineares*, 7^a ed. São Paulo: Atual, (2004).

[11] LIMA, E. L., et al.; *A Matemática do Ensino Médio, Vol. 3. Coleção do Professor de Matemática*, 7^a ed. Rio de Janeiro: SBM, (2016).

[12] POOLE, D.; *Álgebra Linear / David Poole*. São Paulo: Thomson Learning, (2006).

[13] RUGGIERO, M. A. G.; VITORINO, A.; *Álgebra Linear e Aplicações*. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/Arquivos%20PDF/demo_op.pdf>. Acesso em 03 Julho de 2019.

[14] SAMPAIO, R.; *Matrizes no Estudo e na Resolução de Sistemas Lineares*. Dissertação de Mestrado, PROFMAT. São José do Rio Preto: Unesp, (2018).

Apêndice A

Primeiro Apêndice

Neste Apêndice apresentamos uma pequena lista de exercícios e convidamos o leitor a resolvê-los como forma de exercitar os conceitos desenvolvidos ao longo desse trabalho. Assim como os exercícios do capítulo 5 os problemas desse apêndice também foram extraídos de [2], [11] e [12].

1. Aço fino é uma liga de ferro, cromo e níquel. Um exemplo é o aço $V2A$, que contém 74% de ferro, 18% de cromo e 8% de níquel. Na tabela A.1, têm-se ligas *I*, *II*, *III* e *IV*, as quais devemos misturar para obter uma tonelada de aço $V2A$. Quantos quilos de cada uma dessas ligas devemos tomar?

Tabela A.1: Metais que compõem as ligas *I*, *II*, *III* e *IV*.

	I	*II*	*III*	*IV*
Ferro	70%	72%	80%	85%
Cromo	22%	20%	10%	12%
Níquel	8%	8%	10%	3%

Fonte: Tabela reproduzida de [11].

2. De volta ao exemplo das lâmpadas da seção 4.5, supondo que todas as lâmpadas estejam inicialmente desligadas responda:

   (a) É possível pressionar os interruptores em alguma ordem de modo que apenas a segunda e a quarta lâmpadas fiquem acesas?

   (b) É possível pressionar os interruptores em alguma ordem de modo que apenas a segunda lâmpada fique acesa?

3. A tabela A.2 exibe as porcentagens de albumina, carboidrato e lipídio em cada um dos alimentos A, B e C. mostre que não é possível combinar esses alimentos formando uma refeição que contenha, 47% de albumina, 35% de carboidrato e 18% de lipídio. Investigue se seria possível caso as exigências fossem 40% de albumina, 40% de carboidrato e 20% de lipídio.

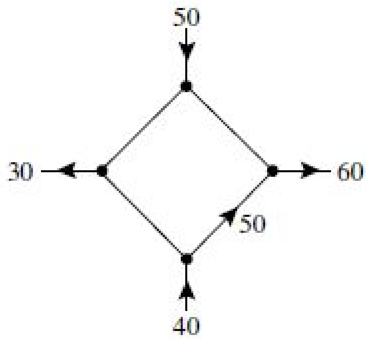
Tabela A.2: Porcentagens de albumina, carboidrato e lipídios nos alimentos A, B e C.

	A	B	C
Albumina	30%	50%	20%
Carboidrato	30%	30%	70%
Lipídio	40%	20%	10%

Fonte: Tabela reproduzida de [11].

4. A figura A.1 mostra uma rede na qual são conhecidos a taxa de fluxo e o sentido do fluxo em alguns ramos. Encontre as taxas de fluxo e os sentidos do fluxo nos demais ramos.

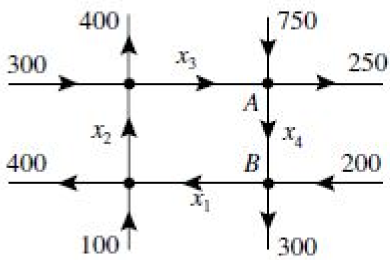
Figura A.1: Diagrama do fluxo de tráfego 1.



Fonte: Imagem extraída de [2].

5. A figura A.2 mostra uma rede viária de ruas de mão única com fluxo de tráfego nos sentidos indicados. As taxas de fluxo ao longo das ruas são medidas pelo número médio de veículos por hora.

Figura A.2: Diagrama do fluxo de tráfego 2.



Fonte: Imagem extraída de [2].

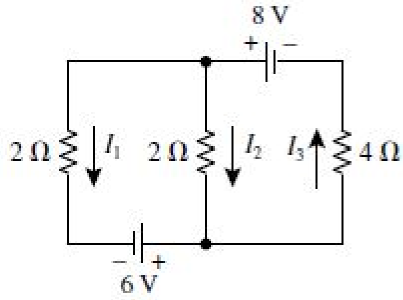
(a) Monte um sistema linear cuja solução forneça as taxas de fluxo desconhecidas.

(b) Resolva o sistema para as taxas de fluxo desconhecidas.

(c) Se o fluxo ao longo da rua A para B precisar ser reduzido em virtude de uma obra, qual será o fluxo mínimo necessário para manter o tráfego fluindo em todas as ruas?

6. Analise o circuito elétrico dado encontrando as correntes desconhecidas.

Figura A.3: Diagrama do circuito 4.



Fonte: Imagem extraída de [2].

7. Escreva uma equação equilibrada para a reação química $C_3H_8 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$ (queima de propano).

8. Escreva uma equação equilibrada para a reação química

$$CO_2 + H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$$

(Essa reação ocorre quando uma planta verde converte dióxido de carbono e água em glicose e oxigênio durante a fotossíntese).

Apêndice B

Segundo Apêndice

Neste Apêndice trazemos as soluções dos exercícios propostos na lista do apêndice A.

1. $x_1 = \frac{33}{2}x_4 - 1$, $x_2 = 2 - 20x_4$ e $x_3 = \frac{5}{2}x_4$. Como x_1, x_2 e x_4 não podem ser negativos devemos ter $\frac{2}{33} \leq x_4 \leq \frac{1}{10}$. Essa flexibilidade que a variável livre oferece permite atender as conveniências de preço e estoque.

2. (a) Sim é possível, há duas maneiras disso acontecer basta precionar os interruptores 1, 2 e 3 ou os interruptores 3, 4 e 5.

   (b) Não é possível.

3. **1º Caso:** $x_1 = -\frac{3}{80}$, $x_2 = \frac{73}{80}$ e $x_3 = \frac{1}{8}$. Como encontramos uma solução negativa a refeição procurada não existe.

   2º Caso: $x_1 = \frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{5}{8}$ e $x_3 = \frac{1}{4}$. Como todas as soluções encontradas são positivas a refeição procurada existe.

4. Uma possível resposta é $x_1 = 40$, $x_2 = 10$ e $x_3 = -10$. O fato de x_3 estar com sinal negativo significa que o sentido atribuido a ele está errado.

5. (a) $$\begin{cases} x_1 - x_2 = 300 \\ -x_1 + x_4 = 100 \\ x_3 - x_4 = -500 \\ x_2 - x_3 = 100 \end{cases}.$$

   (b) $x_1 = x_4 - 100$, $x_2 = x_4 - 400$ e $x_3 = x_4 - 500$.

   (c) Para manter o tráfego fluido em todas as ruas ele deve ser não negativo. O fluxo mínimo de A para B deverá ser de 500 veículos por hora, ou seja, $x_1 = 100$, $x_2 = 100$, $x_3 = 0$ e $x_4 = 500$.

6. $I_1 = \dfrac{13}{5}A$, $I_2 = -\dfrac{2}{5}A$ e $I_3 = \dfrac{11}{5}A$. Como I_2 é negativa sua direção é oposta aquela indicada na figura.

7. $x_1 = \dfrac{1}{4}x_4$, $x_2 = \dfrac{5}{4}x_4$ e $x_3 = \dfrac{3}{4}x_4$. Os menores valores inteiros de x_1, x_2, x_3 e x_4 que equilibram a equação química são obtidos quando tomamos $x_4 = 4$, ou seja, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 3$ e $x_4 = 4$. Logo, a equação química equilibrada é

$$C_3H_8 + 5O_2 \longrightarrow 3CO_2 + 4H_2O.$$

8. $x_1 = x_4$, $x_2 = x_4$ e $x_3 = \dfrac{1}{6}x_4$. Os menores valores inteiros de x_1, x_2, x_3 e x_4 que equilibram a equação química são obtidos quando tomamos $x_4 = 6$, ou seja, $x_1 = 6$, $x_2 = 6$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 6$. Logo, a equação química equilibrada é

$$6CO_2 + 6H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2.$$