



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# **Números Complexos: Por que não estudar?**

**Luís Sales Carneiro**

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes

Campina Grande - PB  
agosto/2019

C289n Carneiro, Luís Sales.  
Números complexos : por que não estudar? / Luís Sales  
Carneiro. – Campina Grande, 2019.  
111 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) –  
Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e  
Tecnologia, 2019.  
"Orientação: Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes".  
Referências.

1. Números Complexos. 2. Propriedades. 3. Vibrações. I.  
Fernandes, José de Arimatéia. II. Título.

CDU 511(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



## **NÚMEROS COMPLEXOS: POR QUE NÃO ESTUDAR?**

**por**

**LUÍS SALES CARNEIRO †**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

---

† Não sou Bolsista CAPES

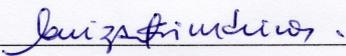
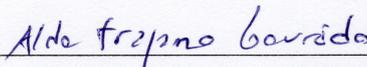
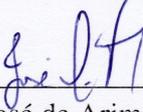
# NÚMEROS COMPLEXOS: POR QUE NÃO ESTUDAR?

por

**Luís Sales Carneiro**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:


Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG

Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo - UEPB

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG Orientador

**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
**Unidade Acadêmica de Matemática**  
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**agosto/2019**

# Dedicatória

Aos ensinios de Jesus Cristo que transcendem o tempo. Que transformam desertos em oásis e onde o impossível acontece.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me conduzido em todos os caminhos ao longo de muitos anos de estudo, e por ter proporcionado chegar até aqui.

Agradeço à minha família, por ter apoiado sempre em meus estudos, em especial ao meu pai, Antônio Carneiro Sobrinho, que na sua sabedoria, e com palavras que sempre me motivam a não desistir e alcançar meus sonhos.

Agradeço aos amigos de Curso, que juntos verdadeiramente vivenciamos as dificuldades que não foram poucas mas, com alegrias, com superação e paciência que nos motivaram a seguir adiante, sempre acreditando que era possível alcançar o objetivo.

Agradeço em particular ao Professor José de Arimatéia Fernandes, ou simplesmente Arimatéia, pela proximidade que construímos ao longo deste Curso, como Professor de História da Matemática, como Orientador e como amigo.

Agradeço a todos Professores pela paciência e sabedoria, que durante todo curso foram ao seu modo dedicados e tentaram fazer o melhor possível, zelando pelo conhecimento, buscando construir coletivamente saberes que transformaram alunos em mestres.

Agradeço à Secretaria de Educação do Município de João Pessoa pela concessão de licença para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

# Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento da teoria dos Números complexos, desde o surgimento confuso, que provocou as mentes dos grandes gênios da matemática durante séculos XVI, XVII, XVIII e XIX na busca por esse universo fascinante que são os Números Complexos. Além disso, apresento as principais propriedades algébricas e trigonométricas, com exemplos, aplicações e exercícios resolvidos e propostos, que podem e devem ser empregados no Ensino Médio, até mesmo em cursos de graduação dadas a riquezas desse mundo que são os números complexos. Por fim, um estudo sobre Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem com coeficientes constantes aplicadas a modelos vibratórios.

**Palavras Chaves:** Números Complexos. Propriedades. Vibrações.

# Abstract

This paper presents the development of the theory of complex numbers since the confused emergence that sparked the minds of the great geniuses of mathematics during the sixteenth, seventeenth, eighteenth, and nineteenth centuries in the search for this fascinating universe that are the Complex Numbers. In addition, I present the main algebraic and trigonometric properties, with examples, applications and solved and proposed exercises, which can and should be used in high school, even in undergraduate courses given the riches of this world that are the complex numbers. Finally, a study on Secondary Linear differential Equations with constant coefficients applied to vibratory models.

**Keywords:** Complex numbers. Properties. Vibrations.

# Lista de Figuras

1.1	Fluxograma do Curso de Licenciatura Plena Matemática da UFCG . . . . .	6
1.2	Componente curricular . . . . .	6
1.3	Fluxograma do Curso de Licenciatura Noturna em Matemática da UFPB . . . . .	7
1.4	Grade curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPB . . . . .	7
2.1	Bhaskara (1114 - 1185) . . . . .	12
2.2	Gerolamo Cardano (1501-1576) . . . . .	13
2.3	Niccolo Fontana - Tartaglia (1499-1557) . . . . .	14
2.4	Rafael Bombelli (1526-1573) . . . . .	18
2.5	René Descartes (1596-1650) . . . . .	20
2.6	Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) . . . . .	21
2.7	Isaac Newton (1642-1727) . . . . .	21
2.8	Abraham De Moivre (1667-1754) . . . . .	22
2.9	Leonhard Euler (1707-1783) . . . . .	23
2.10	Caspar Wessel (1745-1818) . . . . .	25
2.11	Plano de Wessel . . . . .	25
2.12	Jean Robert Argand (1768-1822) . . . . .	26
2.13	Carl Friedrich Gauss(1777-1855) . . . . .	27
2.14	Plano de Wessel-Argand-Gauss . . . . .	28
2.15	William Rowan Hamilton (1805-1865) . . . . .	28
4.1	Conjugado de $z$ . . . . .	41
4.2	Módulo de $z$ . . . . .	44
4.3	Desigualdade triangular . . . . .	46
4.4	Solução geométrica . . . . .	50
4.5	Distância entre dois afixos . . . . .	51
4.6	Coordenadas polar no plano Argand-Gauss . . . . .	52
4.7	Representação de $z$ . . . . .	53
4.8	Representação geométrica de $z_1 \cdot z_2$ . . . . .	54
4.9	Representação geométrica de $\frac{z_1}{z_2}$ . . . . .	56
4.10	Rotação de $90^\circ$ . . . . .	58
4.11	Ilha do Tesouro . . . . .	58

4.12	Tesouro encontrado . . . . .	59
4.13	Rotação do segmento AB . . . . .	60
4.14	Rotação de um número complexo $z$ em torno da origem. . . . .	61
4.15	Rotação de $120^\circ$ de um número complexo $z$ em torno da origem. . . . .	62
4.16	Representação geométrica das raízes quartas de $z$ . . . . .	66
4.17	Representação geométrica das raízes cúbicas de $i$ . . . . .	69
4.18	Quadrado de vértices $z_1, z_2, z_3, z_4$ . . . . .	72
4.19	Octógono regular . . . . .	74
4.20	Hexágono regular . . . . .	77
5.1	Solução da equação $16y'' - 8y' + 145y = 0$ , $y(0) = -2$ , $y'(0) = 1$ . . .	93
5.2	Solução da equação $y'' + 16y = 0$ . . . . .	93
5.3	Sistema massa mola . . . . .	95
5.4	Diagrama de força do sistema massa mola . . . . .	96
5.5	Vibrações livres, $u(t) = 10 \cos 4t$ . . . . .	99
5.6	Movimento amortecido . . . . .	99
5.7	Movimento amortecido dado por $u = R e^{\frac{-\gamma}{2m}t} \cos(\mu t - \delta)$ . . . . .	101
5.8	Gráfico de $u(t) = e^{-t} \left( -2 \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t \right)$ . . . . .	103
5.9	Circuito composto de lâmpada, chave e pilha . . . . .	103
5.10	Resistor . . . . .	104
5.11	Capacitor . . . . .	104
5.12	Indutor . . . . .	105
5.13	Circuito RLC simples . . . . .	106

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Objetivos . . . . .	4
1.2	Organização . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Os Números Complexos</b>	<b>11</b>
2.1	A equação cúbica . . . . .	16
2.1.1	Fórmula de Cardano . . . . .	16
2.1.2	Rafael Bombelli - Descobrindo os números complexos . . . . .	17
2.2	René Descartes - Surgimento do termo imaginário . . . . .	20
2.3	Leonhard Euler - Unidade imaginária $i$ . . . . .	22
2.4	Caspar Wessel - Visão geométrica dos complexos . . . . .	24
2.5	Carl Friedrich Gauss - Números Complexos . . . . .	26
2.6	William R. Hamilton - Formalidades das operações . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Corpo dos Números Complexos</b>	<b>30</b>
3.1	Construção dos Números Complexos . . . . .	30
3.1.1	Aplicações I . . . . .	31
3.2	Propriedades algébricas . . . . .	35
3.2.1	Subtração . . . . .	35
3.2.2	Divisão . . . . .	35
3.3	Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ . . . . .	36
3.3.1	$\mathbb{R}$ subconjunto de $\mathbb{C}$ . . . . .	36
3.3.2	$\mathbb{C}$ é um corpo não ordenado . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Resultados básicos dos números complexos</b>	<b>39</b>
4.1	Forma algébrica . . . . .	39
4.2	As potências de $i$ . . . . .	40
4.3	Módulo e conjugado . . . . .	41
4.3.1	Propriedades do conjugado . . . . .	41
4.3.2	Módulo do número complexo . . . . .	44
4.3.3	Propriedades do módulo . . . . .	44

4.4	Aplicações II . . . . .	47
4.5	Forma polar ou trigonométrica de um número complexo . . . . .	52
4.5.1	Operações com números complexos na forma polar . . . . .	54
4.6	Rotação . . . . .	57
4.7	Pontenciação de números complexos na forma polar . . . . .	62
4.8	Radiciação de números complexos . . . . .	65
4.8.1	Raízes da Unidade . . . . .	72
4.9	Exercícios propostos . . . . .	78
4.10	A fórmula de Euler . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem</b>	<b>84</b>
5.1	Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes . . . . .	84
5.1.1	Existência e unicidade de solução . . . . .	86
5.2	Equação Característica . . . . .	88
5.3	Raízes complexas da equação característica . . . . .	89
5.3.1	Soluções reais . . . . .	90
5.4	Vibrações Mecânicas . . . . .	94
5.4.1	Sistema massa mola acoplados . . . . .	95
5.4.2	Vibrações livres amortecidas . . . . .	98
5.5	Circuito Elétrico . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>110</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>111</b>

# Capítulo 1

## Introdução

No decorrer do tempo e na medida que estudamos, passamos a aplicar de forma natural os números e suas operações de acordo com as necessidades que se apresentam. Esse maravilhoso universo dos números envolve toda nossa vida, desde a simples contagem, as inúmeras aplicações nos diversos ramos das ciências, levando o homem a dimensionar, entender e representar alguns fenômenos físicos, como para soluções a movimentos vibratórios amortecidos.

Neste trabalho de conclusão de curso colocamos em evidência os números complexos, por três razões: Em primeiro lugar pela abolição do assunto números complexos no principal exame de ingresso nas Universidades Públicas e Privada do País, o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) o que acarreta uma limitação do saber, dado as suas aplicações nas engenharias por exemplo. Em segundo lugar, como professor, um sentimento preocupante, já que alguns livros reformulados, não trazem mais o assunto e outros o trazem de forma bem tímida na sua abordagem, além disso, os próprios alunos já indicam a não necessidade de aprendê-los, pois já nem são exigidos nos exames, e ficando a critério do professor apresentá-los, que neste caso, geralmente é substituído por revisões de outros assuntos. Em terceiro, ao analisar a grade curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da UFCG não consta mais como obrigatória no fluxograma, a disciplina *Funções de uma Variável Complexa*, sendo o conteúdo números complexos abordado na “Componente Curricular: Matemática para o Ensino Médio I: Uma Abordagem Crítica”, e tudo indica que ao longo do curso são tratados em problemas específicos por algumas disciplinas em casos necessários. Ainda, sendo ofertada como disciplina optativa para Licenciatura, e sendo obrigatória ao Curso Bacharelado em Matemática, conforme Projeto Pedagógico do Curso de Matemática[19]. Ao verificar em outras instituições de ensino superior como UFPB e UEPB ainda constam como disciplina obrigatória do currículo da Licenciatura “Funções de uma variável complexa. Fazendo o papel de um defensor dos números complexos devido ao contato que tive com eles quando cursei Eletrônica no IFPB, antiga Escola Técnica Federal da Paraíba e Engenharia Elétrica pela UFPB, ambos na cidade de João Pessoa capital do Estado da Paraíba.

É claro, que esse fascinante mundo dos números complexos se não fossem pelas in-

sistências e a coragem dos muitos e geniais homens, na busca de formalizarem os números complexos como um novo conjunto numérico dotado de operações básicas, deixariam uma quantidade enumerável de equações e problemas pendentes, “desconsolados”, e sem base matemática para justificá-los, só restaria apenas uma frase: “Não tem solução”.

## 1.1 Objetivos

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT tem como objetivo geral apresentar o universo dos Números Complexos, tanto no contexto histórico com as formalidades matemáticas pertinentes, num processo formal, mais de simples compreensão.

Apresentar a construção dos Números Complexos de maneira formal axiomática, através das propriedades dos números reais.

Mostrar que o Conjunto dos números Reais está imerso no Conjunto dos Números Complexos, fazendo deste um dos maiores conjuntos numéricos.

Aplicações a título de exemplos, problemas, exercícios e propriedades numéricas visando aplicá-los no Ensino Médio.

Apresentar a fórmula de Euler relacionando Números Complexos e a trigonometria, com algumas aplicações.

Resolver Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda ordem com coeficientes constantes.

Aplicar as Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda ordem com coeficientes constantes nos problemas envolvendo movimentos vibratórios.

## 1.2 Organização

Desafios são frequentes na vida de qualquer pessoa que busque ensinar Matemática, no tocante a envolver os alunos que são a principal razão de tudo isso. Resgatar alegria para descobrir novos horizontes nesse universo de números, símbolos, equações, fórmulas e deduções lógicas, parece até poético e soa bem, mas não é simples. Essa busca pelo conhecimento, pelo saber, dessa maravilhosa ciência que é a matemática, é o que me motiva ainda mais a estudar, construir ideias que valorizem os saberes. Mas, ao longo de 18 anos dedicados ao Magistério, fico a refletir onde e quando essa alegria começou a desaparecer dos olhares, das ações e na vida de muitos jovens estudantes talentosos e rebeldes, ou seja, o gosto em aprender. Além disso, seguem seus estudos num processo de formação precária, com baixa compreensão na leitura e escrita, o que os levam a um contexto de serem denominados de analfabetos funcionais, isto é, não desenvolvem a compreensão, a interpretação de textos simples e de fazer operações matemáticas.

Essa fase que o ensino brasileiro passa, só uma função exponencial com base menor que 1 ao longo do tempo para simplificar e explicar esse comportamento, ou seja, vai diminuindo o interesse, o compromisso em estudar, a vontade de aprender, na medida que o tempo avança, assim como o valor da função vai caindo. São calamitosas as estatísticas avaliativas do governo em relação ao apesendizado em Matemática. O que nos resta é procura os culpados num universo de desrumos que segue a educação brasileira. Salvos os casos pontuais e emblemáticos que vez por outra aparecem nas diversas mídias e que nos alegram por ainda existir esperança, assim acretido e vivo, no sentido que possamos também acertar seguindo esses bons exemplos de sucesso.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso buscamos fazer um estudo detalhado sobre os números complexos e suas propriedades, focando a utilizá-los como base de pesquisa das propriedades e resultados no Ensino Médio. No Capítulo 2, apresentamos a história dos Números Complexos e as contribuições dos grandes gênios da Matemática no desenvolvimento desse conjunto numérico notável.

No Capítulo 3 apresentamos o corpo dos números complexos, sua construção axiomática, as operações fundamentais básicas, a imersão dos números reais nos complexos. A prova que os números complexos é um corpo não ordenado, ou seja, mostramos que não é possível comparar dois números complexos e concluir qual é o maior ou menor número.

No Capítulo 4 apresentamos todas as principais propriedades relativas ao conjugado e módulo de um número complexo, muitos exemplos com as aplicações desses resultados, além da forma trigonométrica ou polar, destacamos as aplicações em rotação de um número complexo ao redor de um ponto. Desenvolvimento da fórmula de De Moivre para o cálculo de potências e das raízes  $n$ -ésimas dos números complexos e aplicações ilustradas nos problemas de Vestibulares. Assim como, a partir das raízes  $n$ -ésimas da unidade obter as demais raízes de um número complexo.

No capítulo 5 apresentamos a resolução das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes cujas equações características apresentam raízes complexas. Aplicamos esses resultados no estudo dos fenômenos de movimentos vibratórios, em especial num sistema massa-mola e num circuito elétrico RLC simples. São inúmeras aplicações com números complexos, que nem de longe, chegamos perto de esgotá-los.

Um pouco mais além, apesar do grande esforço para desenvolver esse trabalho, evidenciando os números complexos, ao pesquisar e analisar o fluxograma do Curso de Licenciatura em Matemática da UFCG figura (1.1), não consta como disciplina obrigatória *Funções de uma Variável Complexa*, ficando apenas no caso das optativas, porém é uma ressalva pessoal, porque vejo como necessária na formação acadêmica, uma robusta oportunidade de termos futuros profissionais da educação, professores, com ampla e maior solidez no domínio de saberes matemáticos, possibilitando dar respostas as demandas de questões que porventura cheguem, sendo com muito respeito que faço essa observação ao Curso.

Podemos verificar através do Projeto Pedagógico do Curso de Graduação de Mate-

Figura 1.1: Fluxograma do Curso de Licenciatura Plena Matemática da UFCG



Universidade Federal de Campina Grande - UFCG  
Unidade Acadêmica de Matemática e Estatística  
Curso de Matemática



Modalidade Licenciatura - Diurno

1º Período	2º Período	3º Período	4º Período	5º Período	6º Período	7º Período	8º Período
Algebra Vetorial e Geometria Analítica 2:2 - 1:4 - 4:4	Cálculo Diferencial e Integral I 1:3 - 4:4	Cálculo Diferencial e Integral II 1:4 - 2:4 - 2:5	Cálculo Diferencial e Integral III 2:6 - 1:7	Estruturas Algébricas 2:3	Introdução à Estatística 2:5	Análise Matemática para Licenciatura 2:3 - 1:4	Atividades Complementares(*) 1:4
Lógica Aplicada à Matemática 2:3	Álgebra Linear I 2:4 - 2:5	Fundamentos de Matemática 1:5 - 2:6 - 1:7	Equações Difer. Lineares 2:2 - 1:3	Introdução à Probabilidade 1:6	Intr. à História da Matemática 2:3 - 1:4	Estágio Supervisionado II 6:4	Estágio Supervisionado III 3:6
Leit. e Prod. de Textos Acadêmicos I 4:4	Expressão Gráfica 3:3	Fund. da Geometria Euclidiana Plana 4:6	Leit. e Prod. de Textos Acadêmicos II 3:1	Física Experimental I 4:3	Prática do Ensino de Matemática IV 4:5	Optativa II 5:5	Optativa IV 7
Intr. à Ciência da Computação 5:4	Didática 6:4 - 3:6	Física Geral I 3:5 - 4:4	Física Geral II 1:1 - 1:2 - 4:3	Prática de Ensino de Matemática III 4:2	Lab. de Ensino de Matemática 3:3	Optativa III 4	
Matemática para o Ensino Médio I 5:3	Metod. do Ensino da Matemática I 5:3	Metod. do Ensino da Matemática II 5:2	O Computador como Instrum. de Ensino 4:1	Optativa I 4	Estágio Supervisionado I 6:4		
Psicol. Educacional da Aprendizagem 4:2	LIBRAS 4	Prática de Ensino de Matemática I 4:2	Prática de Ensino de Matemática II 6:3				

Preto: Componentes Curriculares comuns ao bacharelado e à licenciatura   
 Marron: Componentes curriculares específicos   
 (\*) 210 horas de Atividades Acadêmico-Científico-Culturais realizadas ao longo do Curso

**Legendas:**

Notação:	Pré - Requisito	X	Nº de Créditos
L:C	Nome da Disciplina	M,N,P	
Linha : Coluna			Co-requisito
			Disciplinas dependentes
		XY ...	

Carga Horária Mínima: 2.835 horas  
 Número Mínimo de Créditos: 189  
 Período Mínimo para Conclusão: 08 Períodos  
 Período Máximo para Conclusão: 12 Períodos  
 Habilitação Reconhecida pelo MEC: Portaria 649 de 13/04/90

Fonte: <http://mat.ufcg.edu.br/pgmat2/>

mática em seu anexo-I da componente curricular, Funções de Variável Complexa sendo a obrigatoriedade desta, ao Curso de Bacharelado em Matemática figura (1.2).

Figura 1.2: Componente curricular

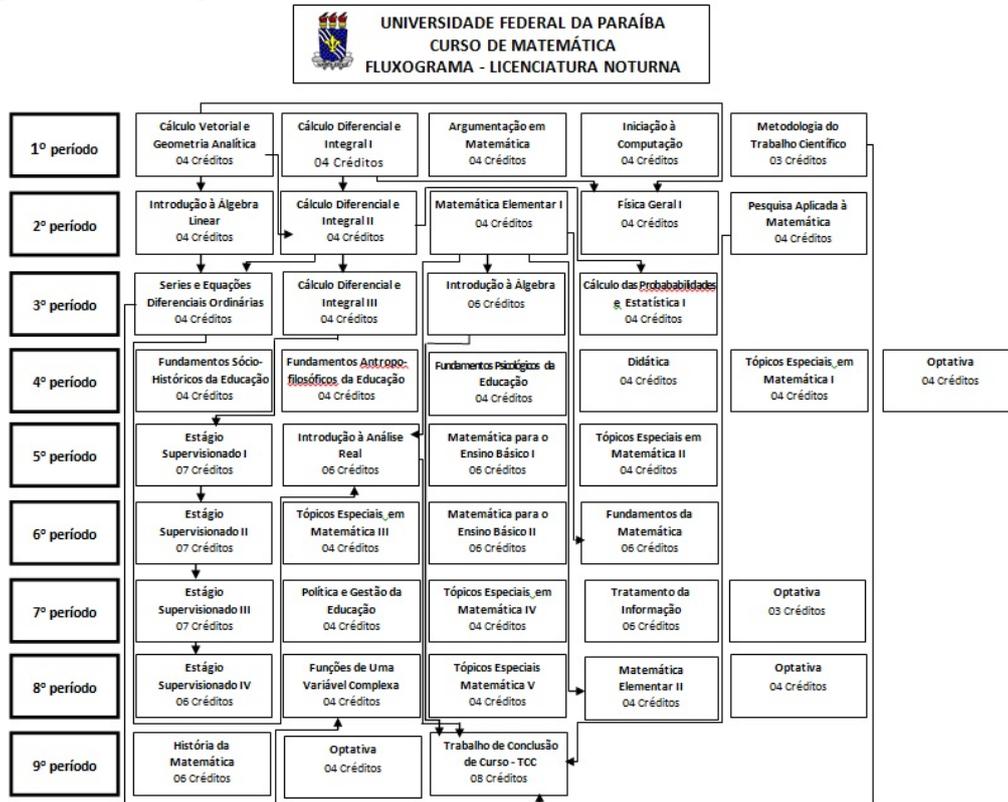
<p><b>Componente Curricular:</b> Funções de uma Variável Complexa  <b>Pré-requisito:</b> Cálculo Diferencial e Integral III  <b>Carga Horária:</b> 60 horas  <b>Caráter:</b> Obrigatória (Bacharelado)</p>		<p><b>Número de Créditos:</b> 04 (quatro)  <b>Unidade Acadêmica Responsável:</b> UAME / CCT</p>
<p><b>Objetivos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Habilitar o aluno no trato algébrico com os números complexos e no reconhecimento da geometria envolvida.</li> <li>• Dar condições ao aluno para trabalhar com as transformações de subconjuntos do plano, obtidos via funções analíticas.</li> </ul>		
<p><b>Ementa:</b>                  Números Complexos. Funções Analíticas. Integração Complexa. Séries de Taylor e Laurent. Resíduos. Integração pelo Método dos Resíduos. Teoria do Potencial.</p>		
<p><b>Bibliografia básica:</b>                  ÁVILA, Geraldo S. S. <b>Variáveis Complexas e Aplicações</b>. 3 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2000.                  CHURCHILL, R. V., <b>Variáveis complexas e suas Aplicações</b>. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975.</p>		
<p><b>Bibliografia complementar:</b>                  CONWAY, J. B., <b>Functions of one complex variable</b>. New York: Springer Verlag, 1973.                  MEDEIROS, L. A., <b>Introdução às Funções Complexas</b>. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972.                  SOARES, Marcio G., <b>Cálculo em uma Variável Complexa</b>, 3 ed. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA, 2001.</p>		

Fonte:

<http://mat.ufcg.edu.br/pgmat/ppc-e-resolucoes/>

Por outro lado, outras instituições de Ensino Superior como a Universidade Federal da Paraíba-UFPB e a Universidade Estadual da Paraíba -UEPB ainda trazem em sua grade curricular a disciplina *Funções de uma Variável Complexa*. ou simplesmente “variáveis complexas”, conforme figuras (1.3) e (1.4) respectivamente.

Figura 1.3: Fluxograma do Curso de Licenciatura Noturna em Matemática da UFPB



Fonte: <http://www.mat.ufpb.br/dmufpb/>

Figura 1.4: Grade curricular do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPB

SEMESTRE 7	Componente Curricular	Cód	T	P	O	D	L	Total
	Análise Matemática I	MAT01150	60					
Introdução a Probabilidade e Estatística	EST01057	60						60
Língua Brasileira De Sinais I	PED01005			30				30
Metodologia da Pesquisa em Matemática	MAT01157	15	15	15				45
Variáveis Complexas	MAT01092	60						60
Total Semestre			195	45	15			255

Fonte:

<http://departamentos.uepb.edu.br/matematica/download/documentos/Grade-PPC-2016.pdf>

Criado em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica. Podem participar do exame alunos que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio em anos anteriores. É uma avaliação que ocorre anualmente em dois finais de semanas consecutivos, aplicadas preferencialmente aos alunos concluintes do Ensino Médio ou que já concluíram. O Exame Nacional do Ensino Médio conforme seu edital[20] na seção dos objetivos, avalia o desempenho do estudante e os resultados obtidos colaboram para:

1. Autoavaliação.
2. Acesso à Educação Superior: Sisu | Prouni | Instituições Portuguesas.
3. Acesso a financiamento e apoio estudantil: Fies | Prouni.
4. Desenvolvimento de estudos e indicadores educacionais.

Ao analisar a Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, onde das sete competências de áreas listadas, podemos constatar que não há nenhuma exigência ou orientação no sentido sobre o conteúdo ou aplicação que envolvam os números complexos. Apenas vamos transcrever a primeira competência, por está tratar dos conjuntos numéricos envolvidos e requeridos na prova.

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.[20]

Além disso, uma outra Instituição que elabora provas de acesso ao ensino superior, a Fuvest, Fundação Universitária para o Vestibular, considerado o maior vestibular do Brasil, realizado no Estado de São Paulo, sendo o principal meio de ingressar em um dos cursos da Universidade de São Paulo- USP. E segundo o manual do candidato 2019, em relação aos conteúdos da prova de matemática na seção Conceitos e Relções Numéricas Básicas e Aplicações, tópico central na ampliação dos campos numéricos no item 1.4 traz:

*Insuficiência dos números reais para a resolução de equações algébricas de 2º e 3º graus; o conceito de número complexo e suas representações – geométrica, algébrica e trigonométrica; interpretação algébrica e geométrica das operações e das raízes de números complexos – raízes da unidade. [21]*

Uma outra Instituição de Ensino Superior e de grande prestígio nacional é o Instituto Tecnológico de Aeronáutica -ITA, que segundo seu edital é necessário a qualquer candidato que queira e que terminou o Ensino Médio participar do vestibular, onde poderá escolher uma carreira nas áreas de engenharias. As provas de Matemática junto com outras disciplinas, são realizadas em duas fases, a primeira fase composta por 15 questões objetivas Matemática e a segunda fase 10 questões dissertativas de Matemática, e entre os muitos conteúdos exigidos temos: *Números complexos: representação e operações nas formas algébrica e trigonométrica, raízes complexas, fórmula de Moivre* [18]. O que demonstra mais uma vez, a necessidade do porquê estudar números complexos.

A Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional traz na Seção IV no que diz respeito ao Ensino Médio.

Art. 35. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:

I - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;

Art. 36. O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber: (Redação dada pela Lei nº 13.415, de 2017)

II - matemática e suas tecnologias;

Quando tratamos do estudo dos números complexos, este conteúdo é amplamente utilizado nos Cursos de Engenharia Elétrica, sendo certamente ligados a tecnologia, como também aplicações à dinâmica dos fluidos, a projetos de aeronaves, estes relacionados a tecnologia.

A Base Nacional Comum Curricular é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Seu principal objetivo é ser a balizadora da qualidade da educação no País por meio do estabelecimento de um patamar de aprendizagem e desenvolvimento a que todos os alunos têm direito![23].

A Base Nacional Curricular Comum - BNCC, define o conteúdo mínimo que os estudantes de ensino médio de todo o Brasil deverão aprender em sala de aula, e deve ser implementada em cada estado conforme as realidades locais.

Na área de matemática e suas tecnologias é consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade.

Ainda sobre as competências específicas de Matemática, o BNCC reconhece que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

O desenvolvimento da competência, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes, utilizando conceitos de diferentes **campos da Matemática** para fazer julgamentos bem fundamentados.

Neste ponto, é que este Trabalho de Conclusão de Curso vem a somar, e multiplicar esforços para que os meus alunos e outros futuros, tenham em tese, condições de resolverem ao menos equações do segundo grau com o discriminante negativo, associá-los a isometrias e rotações no plano, além disso, é mediante o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  que permite decompor um polinômio em fatores lineares. Sendo assim, instigá-los a pesquisarem mais esse campo da Matemática que envolve os números complexos e suas aplicações.

## Capítulo 2

# Os Números Complexos

Neste capítulo abordaremos o processo histórico e as motivações que levaram grandes gênios da matemática ao descobrimento dos números complexos e de sua aceitação como um novo campo numérico capaz de justificar os grande problemas da época que tratavam das soluções algébricas das equações cúbicas e quárticas, e além de suas operações básicas.

A resolução de equações sempre provocou nos matemáticos grande interesse, desde a antiguidade até os dias atuais. Alguns casos de equações quadráticas, já eram tratados pelos babilônios, gregos, egípcios e hindus. Tais equações se baseavam em problemas concretos, quando encontravam raiz quadrada de um número negativo, esses matemáticos não encontravam dificuldades e concluíam que o problema não tinha solução.

Na Grécia antiga, os matemáticos já encontravam problemas que a título de hoje, se faz necessário o cálculo de raiz quadrada de número negativo. Por exemplo, Diofanto de Alexandria século III d.C., em sua obra intitulado *Arithmetica*, tratado que era originalmente composto de 13 livros dos quais apenas os seis primeiros preservaram, propôs o seguinte problema: Achar os lados de um triângulo retângulo de área 7 e perímetro 12. (MILIES, 1993).

Resolver esse problema nos levará a uma equação quadrática com discriminante negativo.

Vejamos: Considerando  $x$  e  $y$  as medidas dos catetos desse triângulo e fazendo uso da escrita atual temos,

$$\frac{x \cdot y}{2} = 7 \Leftrightarrow x \cdot y = 14 \Leftrightarrow y = \frac{14}{x}; \quad x \neq 0. \quad (2.1)$$

Considerando da hipótese do triângulo usando ter perímetro  $p = 12$ , obtemos pelo Teorema de Pitágoras que

$$x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2. \quad (2.2)$$

Substituindo o valor da equação (2.1) na equação (2.2) e simplificando obtemos:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12} \quad (2.3)$$

Para Diofanto só teria solução se  $(\frac{172}{2})^2 \geq 24 \times 336 = 0$  e que até aquele momento, não fazia sentido a expressão  $\sqrt{-167}$ .

O símbolo para raiz quadrada, por exemplo, foi introduzido em 1525 pelo matemático alemão Christoff Rudolff em seu livro de álgebra intitulado *Die Coss*. Seu aspecto vem de uma abreviação da letra r, inicial de “raiz”. (EVES, 2004, p.301).

Séculos antes, em 1202, no livro líber abaci (livro do ábaco ou livro de cálculo) de Leonardo de Pisa<sup>1</sup>, mais conhecido como Fibonacci, traz da seguinte maneira, o que hoje chamamos de raiz quadrada: “radix quadratum 16 aequalis 4”, escrito em latim, que traduzindo para o português, é: “A raiz quadrada de 16 é igual a 4”. Podemos perceber que a palavra Radix não tem nada a ver com raiz, pois, a tradução correta de radix é lado.

Figura 2.1: Bhaskara (1114 - 1185)



Fonte: <https://www.booksfact.com/science/ancient-science/bhaskaracharya-greatest-mathematician-introduced-concept-infinity.html>

Bhaskara<sup>2</sup> matemático hindu do século XII, escreveu: “*O quadrado de um afirmativo(positivo) é afirmativo, e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo, pois ele não é um quadrado*”. (MILIES, 1993).

Esse panorama começou a mudar a partir do século XVI na Itália, com os matemáticos italianos em seus estudos sobre a resolução das equações do 3º grau onde apareciam raízes de

<sup>1</sup>Leonardo de Pisa (1175-1250), ou Leonardo Fibonacci filho de Bonacci, um próspero encarregado das cidades de Veneza, Pisa e Gênova, o matemático mais talentoso da Idade Média por (Eves), devido em grande parte a ele a divulgação e aceitação da notação dos números indu-arábico na Europa. Também famoso pela sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., n, m, n + m, ...) conhecida por sequência de Fibonacci.

<sup>2</sup>Bhaskara, também conhecido como Bhaskara II e Bhaskara Acharya (que significa Bhascara, o professor) viveu entre 1114 a 1185 na Índia. Seu principal trabalho foi o Siddhanta Siromani, dividido em quatro partes: Lilavite, Bijaganita, Grahaganita and Goladhyaya, dedicados à aritmética, álgebra, astronomia e trigonometria esférica, respectivamente. Considerado o mais eminente Matemático do século XII.

números negativos, até então eram consideradas sem solução. Em meio a uma disputa entre Cardano e Tartaglia pela solução algébrica das equações do 3º grau, dar-se aí os primeiros passos rumo ao descobrimento do conjunto dos números complexos.

Vamos discorrer sobre essa intrigante história da disputa que ocorreu entre Cardano e Tartaglia.

Figura 2.2: Gerolamo Cardano (1501-1576)



Fonte: <https://clube.spm.pt/news/5395>

Segundo Eves(2004, p. 306) Gerolamo Cardano é um dos personagens mais extraordinários da história da matemática. Nasceu em Pávia, em 1501, filho ilegítimo de um jurista, levou uma vida marcada por extremos e contrastes. Um dos homens mais talentoso e versátil do seu tempo, deixou uma vasta obra abrangendo aritmética, astronomia, física, medicina e outros assuntos. Dentre os seus muitos livros, o mais importante, é sem dúvida *Artis Magicae Sive de Regulis Algebraicis* mais conhecida por *Ars Magna* publicado em Nuremberg, na Alemanha, em 1545, sendo primeiro grande tratado em latim dedicado exclusivamente a álgebra, onde se dá alguma atenção às raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários<sup>3</sup>, ademais, é claro, o método de resolução das equações de grau 3º, obtido de seu “amigo” Tartaglia, motivo da discordia entre eles, e a de grau 4º, obtido de seu discípulo Ludovico Ferrari<sup>4</sup> (1522 - 1565) após apresenta-lhe um problema<sup>5</sup> proposto em 1540 pelo matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi cuja solução geraria uma equação quártica.

Após uma viagem à Escócia, onde foi muito prestigiado, veio a ocupar sucessivamente, cadeiras importantes nas Universidade de Pávia e Bolonha como professor, tendo

<sup>3</sup>Denominação dada por René Descartes aos números com raiz quadrada negativa.

<sup>4</sup>Ludovico Ferrari, nascido em Bolonha em 1522, foi o mais famoso dos discípulos de Cardano, de origem humilde, foi trabalhar como servo na residência de Cardano aos 15 anos, mas sua brilhante inteligência logo foi descoberta sendo promovido a secretário, tornando-se depois professor de Matemática na Universidade de Bolonha. Faleceu aos 43 anos provavelmente inventado pela própria irmã. (GARBI, 2010, p.42).

<sup>5</sup>“Dividir 10 em 3 partes que formem uma proporção contínua, sendo o produto das duas primeiras partes iguais a 6”. Denotando-se por  $a$ ,  $b$ ,  $c$  as três partes, temos:  $a + b + c = 10$ ,  $ac = b^2$ ,  $ab = 6$ . Fazendo os devidos cálculos e substituindo  $a$  e  $c$  obtemos a equação  $b^4 + 6b^2 + 36 = 60b$ . (EVES, 2004, p.326).

uma clientela de pacientes ricos, tornou-se rico, bem sucedido e influente. Esteve preso por algum tempo, acusado de heresia por ter feito e publicado o horóscopo de Jesus Cristo. Renunciando sua cadeira em Bolonha mudou-se para Roma, onde se destacou como astrólogo, inclusive do Papa, pelo que recebia uma pensão vitalícia. Morreu em Roma 1576, que segundo uma versão pôs fim à própria a vida para não contrariar previsão astrológica feita por ele mesmo sobre a data de sua morte. (EVES, 2004).

Figura 2.3: Niccolo Fontana - Tartaglia (1499-1557)



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol>

Niccolo Fontana, de infância difícil nasceu em Brescia em 1499 filho de pais pobres, presenciou sua cidade ser invadida pelos franceses em 1512, com tamanha violência, tendo ele e seu pai (que era mensageiro postal da cidade) assim como muitas pessoas refugiaram-se na catedral local, mas os soldados não tiveram nenhum respeito ou compaixão e todos foram dados como mortos. O menino foi encontrado pela sua mãe com crânio fraturado e um ferimento grave na boca que atingiu o palato, que posteriormente lhe causou dificuldades na fala, resultando no apelido de Tartaglia que significa gago em italiano. Desde cedo demonstrou grande interesse pelos estudos e uma infinita vontade de aprender. Porém, sua mãe não tinha dinheiro para custear seus estudos, e brevemente deixou a escola, passando a ler e a escrever sozinho, fazendo uso de um caderno que roubara, das lápides dos cemitérios como quadro negro e estudando nos raros livros que conseguia aqui e ali. E devido a tão grandioso empenho passou a ser professor de ciência em Verona. (GARBI, 2010).

Mas, e a fórmula de resolução das equações do 3º grau? Verifica-se que por volta 1515, Scipione del Ferro(1465-1526) professor de matemática em Bolonha, uma das mais antigas Universidades medievais e forte tradição em matemática, tenha resolvido algebricamente a equação cúbica  $x^3 + mx = n$  usando provavelmente fontes árabes. Não publicou sua descoberta, tendo-a revelado antes de morrer ao seu discípulo Antonio Maria Fior, que tempos depois tentou ganhar reconhecimento usando a descoberta do seu mestre. Por volta de 1535, Tartaglia divulgou ter descoberto uma solução algébrica para equação cúbica  $x^3 + px^2 = q$ . Por considerar um blefe, Fior desafiou Tartaglia, já conhecido por seu talento para uma dis-

puta pública envolvendo a resolução das equações cúbicas. Naquela época eram frequentes tais disputas entre os sábios e também entre aqueles que queriam parecê-los. Que muitas vezes serviam de garantia na manutenção de seus cargos em centros de ensino, alimentando a vaidade de seus vencedores. O desafio constava em resolver trinta questões proposta por cada um dos participantes, por sorte poucos dias antes desse desafio Tartaglia soube que seu oponente tinha adquirido um método de resolução do falecido professor Scipione del Ferro, e então, sitindo-se ameaçado o próprio Tartaglia relatou, “mobilizei todo entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz objetivando encontrar uma regra para solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1535”.(GARBI, 2010, p.37). Obtendo êxito, teve a solução das equações do tipo  $x^3 + px = q$  e também da equação  $x^3 + px^2 = p$ , essa Fior não conhecia. Chegando o dia da decisão, Tarataglia havia resolvido todas as questões, consequentemente saiu vitoriosos do desafio, enquanto Fior saiu derrotado por não conseguiu resolver nenhuma das questões e humilhado, diríamos que recebeu um merecido castigo por sua petulância.

A notícia da vitória de Tartaglia chegou ao conhecimento de Cardano, que nessa época estava escrevendo *Pratica Arithmeticae Generalis* que continha Álgebra, Aritmética e Geometria, ainda acreditando no que afirmara Luca Pacioli <sup>6</sup> sobre a impossibilidade da solução geral das equações cúbicas. Prontamente convidou-o à sua casa, com o pretexto de arranjar um encontro entre ele um possível patrono. E devido ser um homem de pouca expressão econômica e com muitas necessidades aparentes, Tartaglia acatou o convite em busca de um novo contrato que lhe propocionasse uma renda maior, pois provalmente em parte por causa de sua fala não lhe rendia grandes contratos. Diante disso, Cardano tentou persuadilo para que lhe revelasse o método de resolução das equações cúbicas, na tentativa de incluí-la na *Pratica* mas esse relutou afirmando que iria ele mesmo publicá-lo no futuro livro. O que deixou Cardano bastante contrariado, passando a ofendê-lo de egoísta, mesquinho, que não tinha interesse no desenvolvimento da humanidade. Tartaglia posteriormente recebera uma carta assinada por um certo nobre italiano, convocando-o para ir a Milão. Ao chegar na cidade, foi recebido pelo Cardano, que lhe suplicou sob solene juramento bíblico de segredo a revelação das fórmulas.

Após terem sido relatadas pelo Tartaglia, e posteriormente Cardano ficara sabendo que Scipione Del Ferro já teria decoberto a fórmula há uns 30 anos, não a tendo publicado. Consequentemente Cardano quebrou todos os juramentos e promessas, e as publicou no seu compêndio *Ars Magna*, embora houvera feito grandes elogios ao Tartaglia, causou-lhe grande revolta e irá, que começou a divulgar que tipo de homem era Cardano, sem palavra, sem honra, desleal, traídor, dentre outros insultos. Após toda essa confusão, no final a

---

<sup>6</sup>Luca Paciolo (1445-1514) era Frei franciscano, matemático italiano dedicado a aritmética, considerado o pai da contabilidade moderna. Publicou sua obra *Sumama de Arithemetica, Geometria, Proportione et Proportionalita* em Veneza em 1494, inspirando e envolvendo os matemáticos da época no desenvolvimento da matemática.

fórmula ficou conhecida até os dias atuais pela fórmula de Cardano. Enquanto a Tartaglia, após se envolver em um desafio para um debate matemático com Ferrari, fiel defensor do seu mestre Cardano, em Milão em 1548, as autoridades universitárias de Bréscia, não ficando satisfeitas com o despenho de Tartaglia, recindiram seu contrato. Tendo voltado a Veneza, onde morreu humilde e esquecido em 1557.

## 2.1 A equação cúbica

### 2.1.1 Fórmula de Cardano

A fórmula de Cardano para resolver as equações cúbicas escritas sob a forma  $x^3 + px + q = 0$ , de acordo com notação algébrica atual é dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (2.4)$$

A demonstração da fórmula de resolução das equações cúbicas pode ser encontrada em vários livros, e de forma bem didática e acessível ao entendimento de qualquer estudante do ensino médio com certa aptidão em matemática ler (ELON, 2012, p.23). Vejamos como funciona a fórmula de Cardano em um exemplo concreto.

**Exemplo 2.1.1** Determinar a solução da equação cúbica  $x^3 - 6x - 9 = 0$ .

**Solução 2.1.1** Temos que  $p = -6$  e  $q = -9$  e substituindo esses valores na equação (2.4) obtemos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{-(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{216}{27}}} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} \Rightarrow x = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Por simples inspeção, constatamos que 3, realmente, é solução da equação dada, e que a fórmula funcionou com esperado.

Vejamos um outro exemplo de uma situação prática em que a fórmula de Cardano começou a levar dúvidas, desafiando o entendimento dos matemáticos da época, das quais levariam uns 200 anos de esforços, das melhores mentes até o início do século XIX onde essas questões foram todas resolvidas.

**Exemplo 2.1.2** Calcule a medida da aresta de um cubo de volume igual a 4 unidades mais que o volume de um paralelepípedo de área da base igual 15 e de mesma altura  $x$ .

**Solução 2.1.2** Na linguagem atual esse problema é descrito pela equação  $x^3 = 15x + 4$ . Cardano ao tentar resolvê-la aplicando a fórmula (2.4) obteve um resultado surpreendente e incompreensível.

Escrevendo a equação na forma  $x^3 - 15x - 4 = 0$ , onde  $p = 15$  e  $q = -4$  teremos como resultado:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano sabia que não existe raiz quadrada de números negativos, no entanto também sabia que  $x = 4$  era solução, que por simples inspeção é fácil constatar, e as duas raízes menos evidentes são  $x = -2 + \sqrt{3}$  e  $x = -2 - \sqrt{3}$ . Chega-se a um impasse, onde de fato existe uma solução e tal problema não pode simplesmente ser ignorado. Nesse ponto, é necessário então compreender o que está acontecendo. Cardano, já admitia raízes negativas de equações, mas considera essas raízes quadradas de números negativos como "sofísticas". Ainda em seu livro *Ars Magna* ele propôs o problema: Se alguém dividir 10 em duas partes de modo que seu produto seja 40, constatará que isto é impossível. No entanto, Cardano diz que o problema pode ser resolvido assim:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 100 \\ 4xy = 160 \end{cases}$$

Subtraindo uma equação da outra obtemos,

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60 \Rightarrow (x - y)^2 = -60 \Rightarrow x - y = \pm\sqrt{-60} = \pm 2\sqrt{-15} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = \pm 2\sqrt{-15} \end{cases} \Rightarrow 2x = 10 \pm 2\sqrt{-15} \Rightarrow \boxed{x = 5 \pm \sqrt{-15}}$$

$$\text{Consequentemente, } y = 10 - x \Rightarrow \boxed{y = 5 \mp \sqrt{-15}}$$

Podemos perceber facilmente que a soma de  $x$  com  $y$  é 10 e seu produto é 40. Contudo, Cardano considera as raízes quadradas de números negativo "sofísticas", e concluiu que o resultado nesse caso era "tão sutil como inútil". Com o devido merecimento dado a ele por ter sido o primeiro matemático a realizar algumas operações com números complexos.

## 2.1.2 Rafael Bombelli - Descobrendo os números complexos

Bombelli nasceu em Bologna na Itália 1526 e morreu provavelmente em Roma em 1572, um engenheiro hidráulico por profissão, interessou-se por matemática envolvendo-se no grande desafio da época que era a solução das equações cúbicas e quárticas sendo pioneiro no estudo sobre os números complexos, tornando-se um dos mais famosos algebristas da história italiana. Era um admirador de *Ars Magna* de Cardano, mas considerava sua escrita não clara. Decidiu, então escrever um livro intitulado de *L'Algebra* publicada em 1572,

Figura 2.4: Rafael Bombelli (1526-1573)



Fonte: <http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2006/11/rafael-bombelli.html>

em Veneza, abordando os mesmos assuntos mas com o cuidado de transcrevê-los de modo simples e claro, onde qualquer iniciante pudesse estudá-lo sem a necessidade de recorrer a outras obras. Tal obra se tornou muito influente diante dos matemáticos italianos.

Ao estudar as publicações de álgebra de sua época, Bombelli teve o que chamou de “*ideia louca*”, pois toda questão parecia apoiar-se em sofismas. Ao resolver a equação  $x^3 - 15x - 4 = 0$  usando a fórmula de Cardano, obteve a solução  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ . Assim como Cardano, considerava essas expressões como sofisticadas, mas percebe que  $x = 4$ , é de fato, uma raiz da equação. Assim, Bombelli não apenas chegou na extração de raiz quadrada de números negativos, mas também na extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida. Então a solução existe, e ela teria de derivar de uma equação onde existe raiz quadrada de números negativos. Na época raiz quadrada de números negativos na álgebra eram dadas como números inexistentes ou impossíveis de resolver. Obstinado, Bombelli acredita na possibilidade de poder encontrar números da forma  $a + \sqrt{-b}$  e  $a - \sqrt{-b}$  que seriam as raízes cúbicas das expressões  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  respectivamente, dado que já conhecia que 4 era raiz. Assim supondo, escreveu

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

Deduzindo que  $a = 2$  e  $b = 1$ . Daí, é simples verificar que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

e

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

Logo,  $x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$  que é o resultado que se esperava obter.

Bombelli constata a importância desse achado. Ele diz: “ *Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número...A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... .*

*Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pode achar a demonstração por meio de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos”. (MILIES, 1993).*

Foi assim que Bombelli, em seu trabalho, criou as regras para trabalhar com  $\sqrt{-1} = +i$  utilizando a expressão *più di meno* e para  $-\sqrt{-1} = -i$  a expressão *meno di meno*. Então ele estabele o que chamava de regras do produto descrita abaixo ao lado da nossa atual notação.

“Più via più di meno fa più di meno”  $\rightarrow (+) \cdot (+i) = +i$ .

“Meno via più di meno fa meno di meno”  $\rightarrow (-) \cdot (+i) = -i$ .

“Più via meno di meno fa meno di meno”  $\rightarrow (+) \cdot (-i) = -i$ .

“Meno via meno di meno fa più di meno”  $\rightarrow (-) \cdot (-i) = +i$ .

“Più di meno via più di meno fa meno”  $\rightarrow (+i) \cdot (+i) = -1$ .

“Meno di meno via più di meno fa più”  $\rightarrow (-i) \cdot (+i) = +1$ .

“Meno di meno via meno di meno fa meno”  $\rightarrow (-i) \cdot (-i) = -1$ .

Em seu trabalho, Bombelli, descreveu adição de números da forma  $x + y\sqrt{-1}$ , e multiplicação dos números complexos, que até então não eram chamados assim, forneceu a correta solução das equações cúbicas nos casos irredutíveis, ou seja, sempre que as três raízes são reais, onde aparecem raízes quadradas de números negativos. Outra contribuição foi o aprimoramento da notação algébrica com o emprego de símbolos em suas expressões matemáticas. Ele utilizava o p(plus) para indicar a soma, m(minus) para subtração, Rq(radix) para raiz quadrada e Rc raiz cúbica.

Por exemplo, Bombelli poderia ter escrito as expressões a seguir como:

a)  $\sqrt{7 + \sqrt{14}} = R_{\perp} 7 p R 14_{\perp}$

b)  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = R_{c\perp} 2 p R q m 121_{\perp}$ .

A partir dos seus estudos foram lançadas as bases para o desenvolvimento desse importante ramo da matemática, com inúmeras aplicações práticas, principalmente na engenharia eletrônica.

## 2.2 René Descartes - Surgimento do termo imaginário

Figura 2.5: René Descartes (1596-1650)



Fonte: <https://www.guiaestudo.com.br/rene-descartes>

Durante o século XVII, René Descartes filósofo, físico e matemático, um racionalista<sup>7</sup> francês autor da célebre frase “cogito ergo sum”, traduzida como “penso, logo existo”. Relacionou a álgebra com a geometria, fato que fez surgir a geometria analítica e o sistema de coordenadas, conhecido hoje como Plano Cartesiano. Em seu livro *La Géométrie* publicado em 1637 introduziu a denominação de números imaginários para  $\sqrt{-1}$ , escrevendo: “*Nem sempre as raízes verdadeiras(positivas) ou falsas(negativas) de uma equação são reais. Às vezes são imaginárias*”. Ficou assim, batizado por Descartes,  $\sqrt{-1}$  de **número imaginário**, que matematicamente não soa muito bem, um quanto inadequado, subjetivo, irreal, etc. Que mais tarde se consagrou conjuntamente com a expressão números complexos. Segundo Garbi, este tropeço do grande e genial Descartes mostra como devemos ser cuidadoso com o emprego das palavras.

Gottfried Wilhelm Leibniz, grande gênio universal do século XVII, considerado como último grande erudito, nasceu em Leipzig na Alemanha em 1646, rival de Isaac Newton na invenção do cálculo. Após os primeiros estudos iniciados pelos matemáticos italianos, Leibniz fica admirado ao escrever  $\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$  uma decomposição imaginária de um número real positivo, apresentando esse resultado surpreendeu a seus contem-

---

<sup>7</sup>O Racionalismo é uma corrente filosófica baseada nas operações mentais para definir a viabilidade e efetividade das proposições apresentadas. Essa corrente surgiu como doutrina no século I antes de Cristo para enfatizar que tudo que é existente é decorrente de uma causa. Muito tempo depois, já na Idade Moderna, os filósofos racionalistas adotaram a matemática como elemento para expandir a ideia de razão e a explicação da realidade.

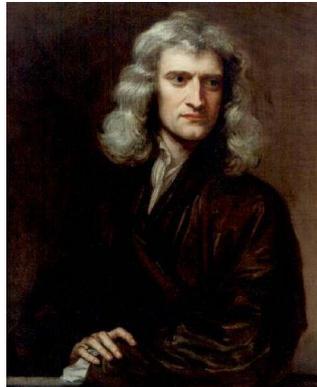
Figura 2.6: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)



Fonte: <http://farolpolitico.blogspot.com/2007/10/leibniz-gottfried-wilhelm-1646-1716.html>

porâneos. No entanto afirmara: “ *que os números imaginários são uma espécie de anfíbio, a meio caminho entre existência e não existência, assemelhando-se nisso ao Espírito Santo na teologia cristã*”. (BOYER, 2012, p.291).

Figura 2.7: Isaac Newton (1642-1727)



Fonte: <https://super.abril.com.br/blog/superblog/adolescente-indiano-resolve-enigma-deixado-por-isaac-newton-ha-300-anos/>

Isaac Newton nasceu prematuramente no dia de Natal de 1642, numa fazenda de seu pai, em Woolsthorpe, na Inglaterra. Considerado um dos maiores gênios da humanidade, e admirado em todo mundo, escreveu celebrimente sobre matemática pura e aplicada, inventor do cálculo diferencial, sistematizou as leis da dinâmica, lei da gravitação universal, teoria das cores e ópticas, entre outras. Amante dos números reais, por permiti-lhe uma visão prática do mundo, não deu nem a mínima para os números complexos, considerando-os como “*impossíveis*”.

Figura 2.8: Abraham De Moivre (1667-1754)



Fonte: <https://matcalc.blogspot.com/2011/05/de-moivre.html>

Abraham De Moivre matemático francês nascido em Vitry, próximo a Paris, que fez carreira profissional na Inglaterra, onde foi professor particular e tornou-se um destacado pesquisador com grandes contribuições no campo da teoria das probabilidades. De Moivre relacionou os números complexos com a trigonometria.

A fórmula a seguir, conhecida como a primeira fórmula de De Moivre faz essa ponte entre os números complexos e a trigonometria.

$$\left(\cos x + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} x\right)^n = \cos(nx) + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen}(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Há uma outra fórmula utilizada para calcular as  $n$ -ésimas raízes de um número complexo  $z$ , indicada por  $\sqrt[n]{z}$ , conhecida como a **segunda fórmula de De Moivre** dada por:

$$\sqrt[n]{|z|} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]. \quad (2.6)$$

Essas duas fórmulas de De Moivre serão demonstradas no próximo capítulo sobre o corpo dos números complexos.

## 2.3 Leonhard Euler - Unidade imaginária $i$

Leonhard Euler, considerado um dos matemáticos mais produtivo de todos os tempos, nasceu na Basileia em 1707 na Suíça. Depois de ensaiar uma carreira no campo da teologia devido ao seu pai ser um ministro religioso(pastor), tendo simpatia pela matemática por ter estudado com Jacques Bernoulli, conseguiu, ao jovem Euler, estudos com Jean Bernoulli e se associou com seus filhos, Nicolaus e Daniel, através destes, tornou-se membro da recém criada Academia de São Petersburg na Rússia. Após o retorno de Daniel Bernoulli a seu país, para ocupar um cadeira de matemática na Universidade de Basileia, Euler assumiu a

Figura 2.9: Leonhard Euler (1707-1783)



Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/leonhard-euler/>

chefia da seção de matemática da Academia por quatorze anos alcançando alto prestígio entre os russos. Aos 28 anos perdeu a visão do olho direito, contudo não diminuiu em nada sua produção matemática. Além disso, a convite de Frederico, O Grande<sup>8</sup> chefiou a seção de matemática da Academia de Berlim, capital da Prússia por 25 anos, devido a sua simplicidade e modéstia o que não correspondiam aos requintes que Frederico esperava, o que lhe causava descontentamentos. Até que, em 1766, retorna à Academia de São Petersburgo permanecendo por dezessete anos. Morreu subitamente em 1783. Curiosamente em toda sua carreira, não ocupou um cargo de professor, tendo publicado 530 trabalhos em vida, deixando manuscritos que foram publicados na Academia de São Petersburgo por mais de 47 anos após sua morte.[6] Euler é admirado por muitos matemáticos até os dias atuais, Laplace<sup>9</sup> dizia aos matemáticos mais novos: “*leiam Euler, leiam Euler, ele é o mestre de todos nós!*”. E como são inúmeras as contribuições de Euler para matemática, e que as tornam demasiadamente longas expô-las todas neste trabalho, destaremos alguns pontos relevantes como as notações utilizadas por ele que usamos ainda hoje:

Notação	Significado
$f(x)$	para funções
$e$	para base dos logaritmos naturais
$\Sigma$	para somatório
$a, b, c$	para os lados de um triângulo $ABC$
$s$	para o semiperímetro do triângulo $ABC$
$\frac{p}{q}$	para probabilidade

Além de deixar uma rica simbologia de notações matemáticas utilizadas até hoje, Euler

---

<sup>8</sup>Frederico II, também chamado de Frederico, o Grande, foi o Rei da Prússia de 1740 até sua morte. Ele é mais conhecido por suas vitórias militares, sua reorganização do exército prussiano, patronagem das artes e o iluminismo na Prússia.

<sup>9</sup>Pierre-Simon de Laplace(1749-1827) grande matemático francês, e profundo admirador de Euler.

desenvolveu o trabalho mais marcante até aquele momento sobre os números complexos. Em 1777, foi ele que pela primeira vez utilizou a letra “  $i$  ” para simbolizar  $\sqrt{-1}$ . Assim uma expressão do tipo  $6 + 8\sqrt{-1}$  passou a ser escrita por  $6 + 8i$ . Através do Cálculo também descobriu a grandiosa fórmula  $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ , sendo  $x$  em radianos. E quando calculou o valor dessa expressão para  $x = \pi$ , obteve

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Considerada a mais bela expressão matemática, pois relaciona numa só expressão os cinco mais importantes números da matemática,  $0, 1, e, \pi$ , e  $i$ . Todavia ainda permanecia com os matemáticos do século XVIII uma certa desconfiança sobre os números complexos, inclusive Euler, apesar de seus esforços mostrando como operar com eles. Declara:

*“Como todos os números concebíveis são maiores ou menores que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis (números reais). E esta circunstância nos conduz ao conceito de tais números, os quais, pela própria natureza, são impossíveis, que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação”.* [5]

Euler ainda resolveu o problema que envolvia os *logarítmos de números negativos*, a ideia equivocada que  $\log(-x) = \log(+x)$  defendida por Jean Le Rond d’Alembert e outros como Jean e Jacques Bernoulli. Em 1747, Euler em carta explica corretamente a d’Alembert a questão que envolvia os logaritmos dos números negativos. A partir da identidade  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  válida para todos os valores de  $\theta$  em radianos, em particular, para  $\theta = \pi$ . Então  $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \ln(-1) = i\pi$ . Assim, os logaritmos de números negativos não são números reais, como acreditam d’Alembert e Jean Bernoulli, mas imaginários puros.

A primeira tentativa de dar um sentido visível aos números imaginários através de uma representação geométrica no plano, foi proposta John Wallis<sup>10</sup> em 1673 publicado no tratado intitulado de Algebra, que os números imaginários puros poderiam ser representados numa reta perpendicular ao eixo real. Mas seus esforços não foram bem sucedidos entre seus contemporâneos. Todavia essa ideia foi retomada por diversos matemáticos independentemente, destacando-se Caspar Wessel, Jean Robert Argand e Gauss foram os pioneiros a notarem tal associação.

## 2.4 Caspar Wessel - Visão geométrica dos complexos

Caspar Wessel, nascido Josrud Noruega em 1745, era um agrimensor e foi o primeiro a perceber associação entre os números imaginários e os pontos reais do plano, devido a um

<sup>10</sup>John Wallis (1616-1703), matemático britânico nasceu no dia 23 de novembro de 1616 em Ashford, Kent, Inglaterra. Contemporâneo de Newton e professor de Oxford, foi um dos matemáticos mais capazes e originais de seu tempo, com trabalhos sobre cônicas, integração além de criar um sistema de ensino para surdos-mudos.

Figura 2.10: Caspar Wessel (1745-1818 )

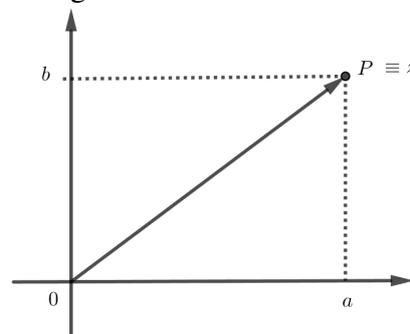


Fonte: <https://alchetron.com/Caspar-Wessel>

artigo intitulado “*On Directionens analytiske Betregning*” (“*Sobre a representação analítica de vetores*”), apresentado à Academia Dinamarquesa de Ciências em 1797 e publicada nas *Atas* dessa Academia em 1799. O artigo mostrava pela primeira vez a associação dos números complexos como pontos reais do plano. Mas esse artigo ficou perdido do mundo matemático até ser descoberto por um antiquário cerca 98 anos depois ser escrito. Sendo republicado no aniversário do centário de seu primeiro aparecimento. Esse atraso no reconhecimento geral da realização de Wessel, explica porque o plano complexo veio ser chamado de *plano de Argand*, em vez de *plano de Wessel*. Segundo o que Wessel escreveu no artigo dizia: *Vamos designar por +1 a unidade retilínea positiva, por  $+ \in$  outra perpendicular à primeira, com a mesma origem; então o ângulo de direção de +1 será  $0^\circ$ , o de  $-1$  será  $180^\circ$ , o de  $\in$  será  $90^\circ$  e o de  $-\in$  será  $-90^\circ$  ou  $270^\circ$ .*[13]

Para indicar o número imaginário  $a + bi$ , podemos representar pelo vetor no plano cartesiano, com origem no sistema de eixos cartesiano e com extremidade no ponto  $P$  de coordenadas  $(a, b)$ , de modo que a parte real  $a$  por um ponto no eixo real, e a parte imaginária  $b$  por um ponto no eixo vertical, denominado eixo imaginário.

Figura 2.11: Plano de Wessel



Fonte: Feito pelo autor usando software geogebra.

A aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  de modo que  $(a, b) \mapsto T(a, b) = a + bi$  é um isomorfismo. Logo,  $\mathbb{C}$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , isto é, tem a mesma estrutura algébrica que  $\mathbb{R}^2$ . Então, existe uma bijeção entre  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$ , onde a cada ponto  $P(a, b)$  do plano estar associado a um único número complexo  $z = a + bi$  e vice-versa. Geometricamente essa situação pode ser representada conforme a figura (2.11).

Jean Robert Argand, nascido em Genebra na Suíça em 1768, era um guarda-livros e um matemático amador, assim como Wessel, Argand percebeu tal associação entre os números da forma  $a + bi$  com pontos do plano cartesiano num artigo intitulado “*Essai sur ia maniere de represénier lesquantités imaginaires dans les construtions géométriques*” publicado em 1806 e mais tarde em 1814, apresentado nos *Annales de Mathématiques de Gergonne*, percebível em pelo menos 7 anos após Wessel ter proposto essa visão geométrica.

Figura 2.12: Jean Robert Argand (1768-1822)



Fonte: <https://images.math.cnrs.fr/Jean-Robert-Argand-1768-1822-et-la.html?lang=fr>

Ele observou que, se multiplicasse  $+1$  por  $i$  obteria  $i$ , e se multiplicasse novamente por  $i$  obteria  $-1$ . Sendo  $i$  interpretado como uma rotação de  $90^\circ$  em sentido anti-horário.

Embora esses trabalhos desenvolvidos por Wessel e Argand dando uma representação geométrica aos números complexos, não obteve grande repercursão entre os matemáticos da época, fato devido a pouca notoriedade de seus desenvolvedores no meio matemático. Coube a Gauss dar o reconhecimento da interpretação geométrica dos números complexos aceita no meio matemático.

## 2.5 Carl Friedrich Gauss - Números Complexos

Carl Friedrich Gauss, nascido 30 de abril de 1777, Brunsvique, Alemanha foi um matemático, astrônomo e físico que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. Aos 21 anos defendia sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstadt sobre o *teorema fundamental da álgebra* que diz: Uma equação polinomial com coeficientes complexos e de grau  $n > 0$  tem pelo menos uma raiz complexa.

Figura 2.13: Carl Friedrich Gauss(1777-1855 )



Fonte:

<http://matematicaleonelevrg.blogspot.com/2013/02/biografia-de-carl-friedrich-gauss.html>

Outros grandes matemáticos Newton, Euler, d’Alembert e Lagrange tentaram provar esse resultado e fracassaram. A ideia por trás da demonstração de Gauss é a substituição de  $z$  na equação polinomial geral  $f(z) = 0$  por  $x + iy$  e separar a seguir as partes real e imaginária da equação fornecendo duas equações  $f(x,y) = 0$  e  $g(x,y) = 0$  nas variáveis reais  $x$  e  $y$ , mostrando que os gráficos cartesianos de tais funções sempre têm um ponto real comum  $(a,b)$ . Seque-se que  $a + bi$  é uma raiz complexa de  $f(z) = 0$ . Ao que parece, Gauss pela demonstração do teorema fundamental da álgebra já conhecia a representação geométrica dos números complexos por volta de 1815. Em 1831, finalmente Gauss escreve um artigo para esclarecer essas controvérsas sobre  $\sqrt{-1}$ .

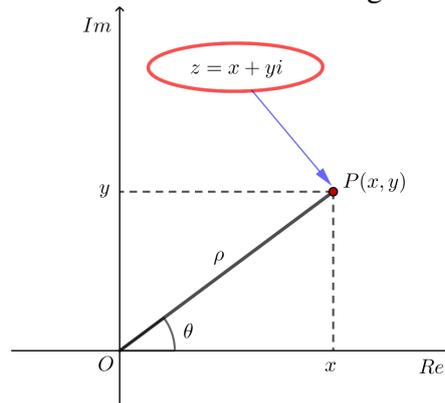
Diz na introdução: “O autor tem considerado há vários anos esta parte importante da matemática sob um ponto de vista diferente, que permite conferir às quantidades imaginárias, como as negativas, uma existência objetiva. Significado intuitivo dos números complexos fica completamente estabelecido e não se precisa mais para admitir essas quantidades mais no domínio da aritmética”.(MILIES, 1993).

A simples ideia de considerar as partes real e imaginária de um número complexo  $a + bi$  com as coordenadas retangulares de um ponto do plano fez com que os matemáticos se sentissem muito mais à vontade com os números imaginários, pois esses números podiam agora ser efetivamente visualizados, no sentido que cada número complexo corresponde um único ponto do plano e vice-versa. Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictícios dos números imaginários foram abandonadas.[6]

O plano onde os números complexos são representados é conhecido por plano de Argand-Gauss. Porém, foi Cauchy (1789-1857), um matemático francês, que em 1820, divulgou para o mundo a representação gráfica dos números complexos no plano cartesiano. Ele deu a essa representação o nome de **diagrama de Wessel-Argand-Gauss**. Além disso, é devido a Gauss que os números da forma  $a + bi$  foram considerados “**números complexos**”.

Gauss em seus estudos sobre a teoria dos números ao tentar desenvolver um resultado comparável a lei da reciprocidade quadrática de Legendre, usando congruência  $x^n \equiv p \pmod{q}$  com  $p$  e  $q$  primos para  $n = 3$  e  $4$  desenvolveu os chamados inteiros de Gauss, números da forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros. Com isso, os problemas de divisibilidades ficaram mais difíceis, pois  $5$  já não é primo, pois pode ser escrito como  $5 = (1 + 2i) \cdot (1 - 2i)$ , onde  $1 + 2i$  e  $1 - 2i$  são “primos” de Gauss.

Figura 2.14: Plano de Wessel-Argand-Gauss



Fonte: Feito pelo autor usando software Geogebra.

## 2.6 William R. Hamilton - Formalidades das operações

William Rowan Hamilton nasceu em 04 de agosto de 1805 em Dublin, Irlanda, falecendo nessa mesma cidade em 2 de setembro de 1865. Matemático, físico e astrônomo irlandês, desde da tenra infância já demonstrava grande talento para os estudos, sendo responsável pela formalidade completa dos números complexos em pares ordenados de números reais. Assim, o número complexo  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i$  um valor tal que  $i^2 = -1$ , pode ser perfeitamente associado ao par ordenado de números reais  $(a, b)$ .

Figura 2.15: William Rowan Hamilton (1805-1865)



Fonte:

<http://www.profcardy.com/matematicos/individuos.php?pid=350>

Para Hamilton era possível realizar adição e multiplicação com dois desses números, sendo cada um deles um polinômio de primeiro grau em  $i$ , e substituindo  $i^2$  por  $-1$  toda vez que aparecesse.

Por conseguinte a adição é escrita na forma:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i .$$

Equivalente à

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) . \quad (2.7)$$

E para operação multiplicação

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i .$$

Equivalente à

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) . \quad (2.8)$$

Esse dois resultados são tomados como definições para as operações de adição e de multiplicação de pares de números complexos. No Capítulo 3 iremos mostrar que o conjunto dos números complexo é um Corpo.

A história mostra que a evolução dos números complexos dá-se pela construção dos números e se mistura a evolução da própria Matemática. Não é algo que saiu da mente de alguns humanos “iluminados”, mas de um esforço gigantesco para justificar e estabelecer relações que elevaram à Matemática a ciência que hoje.

# Capítulo 3

## Corpo dos Números Complexos

### 3.1 Construção dos Números Complexos

A motivação para introduzir os números complexos no Ensino Médio, parte da resolução das equações quadráticas  $ax^2 + bx + c = 0$ , sendo  $a, b, c \in \mathbb{R}$  com  $a \neq 0$  cujo discriminante delta  $\Delta$  é negativo, ou seja,  $\Delta < 0$ , sendo seu valor dado por  $\Delta = b^2 - 4ac$  e apresentando o número  $i$ , tal que  $i^2 = -1$  chamado de **unidade imaginária**, ou ainda,  $i = \sqrt{-1}$ .

Consideremos a equação  $x^2 - 6x + 13 = 0$ , que não tem solução reais, pois seu discriminante  $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16$ .

Buscando as soluções dessa equação:

$$x^2 - 6x = -13 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -13 + 9 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -4.$$

No conjunto dos números reais, essa equação não teria solução porque não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $x - 3 = \sqrt{-4}$ . Porém, no conjunto dos números complexos,  $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$  e obtemos  $x - 3 = \pm 2i$ ; Logo:

$$\begin{cases} x - 3 = 2i \Leftrightarrow x = 3 + 2i \\ \text{ou} \\ x - 3 = -2i \Leftrightarrow x = 3 - 2i \end{cases}$$

Assim, podemos dizer que  $3 + 2i$  e  $3 - 2i$  são as soluções ou raízes de  $x^2 - 6x + 13 = 0$ ; sendo chamados de **números complexos**.

A construção com todo critério dos números complexos a partir dos números reais é um tanto simples, para isso, consideremos a igualdade entre dois números complexos,  $a + bi$  e  $c + di$  dada por  $a = c$  e  $b = d$ , o que lembra a igualdade de pares ordenados  $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$  e  $b = d$ , assim como dadas no Ensino Médio. Este é o ponto de partida para construção dos números complexos. Podemos de acordo com Ensino Médio escrever:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad (3.1)$$

e que

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (3.2)$$

Considerando um número complexo  $z = x + yi$  como sendo um par ordenado  $(x, y)$  de números reais, e suprimindo o símbolo  $i$  podemos definir as operações de igualdade, adição e multiplicação da seguinte maneira:

**Definição 3.1.1 ( Igualdade )** Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundo termos iguais.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d. \quad (3.3)$$

**Definição 3.1.2 ( Adição )** Chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiros e segundos termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \quad (3.4)$$

**Definição 3.1.3 ( Multiplicação )** Chama-se o produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (3.5)$$

**Definição 3.1.4** Consideremos o conjunto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  e nele definimos a adição e a multiplicação como acima em (3.4) e (3.5). O conjunto  $\mathbb{R}^2$ , dotado com essas operações, será denominado *conjunto dos números complexos* e denotaremos por  $\mathbb{C}$ .

É usual representar-se cada elemento  $(x, y) \in \mathbb{C}$  com a letra  $z$ , assim temos:

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y) \text{ sendo } x, y \in \mathbb{R}$$

### 3.1.1 Aplicações I

**Exemplo 3.1.1** Sejam  $z_1 = (1, 3)$ ,  $z_2 = (2, 5)$ , calcular  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$  e  $z_1^2$ .

**Solução 3.1.1** Basta aplicar a definição da adição (3.4) e da multiplicação (3.5), e teremos os resultados:

- $z_1 + z_2 = (1, 3) + (2, 5) = (1 + 2, 3 + 5) = (3, 8)$ .
- $z_1 \cdot z_2 = (1, 3) \cdot (2, 5) = (1 \cdot 2 - 3 \cdot 5, 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2) = (-12, 11)$ .

- $z_1^2 = z_1 \cdot z_1 = (1, 3) \cdot (1, 3) = (1 \cdot 1 - 3 \cdot 3, 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = (-8, 6)$ .

**Exemplo 3.1.2** Sejam  $z_1 = (1, 2)$  e  $z_2 = (3, 4)$ , calcular  $z$  tal que  $z_1 + z = z_2$ .

**Solução 3.1.2** Considere o número complexo  $z = (x, y)$ , temos que:

$$z_1 + z = z_2 \Rightarrow (1, 2) + (x, y) = (3, 4) \Rightarrow (1 + x, 2 + y) = (3, 4) \Rightarrow \begin{cases} 1 + x = 3 \\ 2 + y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Logo,  $z = (2, 2)$ .

**Exemplo 3.1.3** Considere os dados anteriores, determine  $z$  tal que  $z_1 \cdot z = z_2$ .

**Solução 3.1.3** Temos que:  $z_1 \cdot z = z_2 \Rightarrow (1, 2) \cdot (x, y) = (3, 4) \Rightarrow (x - 2y, 2x + y) = (3, 4) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

Portanto,  $z = \left(\frac{11}{5}, \frac{-2}{5}\right)$ .

**Teorema 3.1** As operações em  $\mathbb{C}$  têm as seguintes propriedades: a adição e a multiplicação são comutativas, associativas e têm um elemento neutro:  $(0, 0)$  para a adição e  $(1, 0)$  para multiplicação. Além disso, dado  $(a, b) \in \mathbb{C}$ , seu simétrico existe,  $-(a, b)$ , e é  $(-a, -b)$  e, se  $(a, b) \neq (0, 0)$ , seu inverso existe,  $(a, b)^{-1}$ , e é  $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ . Finalmente a multiplicação é distributiva em relação à adição.

**Demonstração 3.1** Vamos provar primeiro a validade das propriedades em relação a adição. Sejam  $z_1 = (a, b)$ ,  $z_2 = (c, d)$  e  $z_3 = (e, f)$  números complexos sendo suas coordenadas números reais. Fazendo uso da validade dessas propriedades em relação à adição e a multiplicação de números reais, tem-se:

A1. **Comutativa:**  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1 .$$

A2. **Associativa:**  $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ .

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f) = [(a + c, b + d)] + (e, f) = [(a, b) + (c, d)] + z_3 .$$

A3. **Elemento neutro:** Existe um número  $e = (x, y) \in \mathbb{C}$ , tal que  $z + e = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Fazendo  $z = (a, b)$  em  $\mathbb{C}$ , vamos mostrar que existe  $e = (x, y)$  tal que  $z + e = z$ . De fato,

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \Rightarrow (a + x, b + y) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto, existe  $e = (0, 0)$ , chamado de elemento neutro para a adição, que somado a qualquer complexo  $z$  resulta no próprio  $z$ .

Por fins didáticos faremos  $0 = e$ , ou seja,  $0 = (0, 0)$ . Logo  $z + 0 = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

A4. **Simétrico:** Para todo número  $z \in \mathbb{C}$  existe  $z' \in \mathbb{C}$  tal que  $z + z' = 0$ .

Fazendo  $z = (a, b)$  vamos provar que existe  $z' = (x, y)$  tal que  $z + z' = 0$ . De fato,

$$(a, b) + (x, y) = (0, 0) \Rightarrow (a + x, b + y) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$$

Portanto existe  $z' = (-a, -b)$ , chamado de simétrico ou inverso aditivo de  $z$  que somado a qualquer complexo  $z = (a, b)$  resulta em  $0 = (0, 0)$ .

Provemos agora a validade das propriedades para operação multiplicação. São elas:

M1. **Comutativa:**  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = (c, d) \cdot (a, b) = z_2 \cdot z_1.$$

Logo,  $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ .

M2. **Associativa:**  $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ , para todos números  $z_1, z_2$  e  $z_3$  em  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)] = (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= [a \cdot (ce - df) - b \cdot (cf + de), a \cdot (cf + de) + b \cdot (ce - df)] \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= [(ac - bd) \cdot e - (ad + bc) \cdot f, (ad + bc) \cdot e + (ac - bd) \cdot f] \\ &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\ &= [(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3. \end{aligned}$$

M3. **Elemento neutro:** Existe  $u = (x, y) \in \mathbb{C}$  tal que  $z \cdot u = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

Seja  $z = (a, b)$ , vamos mostrar que existe  $u = (x, y)$  tal que  $z \cdot u = z$ .

De fato,

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (x, y) = (a, b) &\Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (a, b) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

portanto existe  $u = (1, 0)$ , denominado de elemento neutro da multiplicação, que multiplicado por qualquer número complexo  $z$  resulta no próprio  $z$ .

Indicaremos por 1 o elemento neutro da multiplicação, isto é,  $1 = u$ , então  $1 = (1, 0)$ .

Logo,  $1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$ .

**M4. Inverso:** Para todo número complexo  $z \in \mathbb{C}^*$  existe  $z_m \in \mathbb{C}$  tal que  $z \cdot z_m = u$ .

Consideremos  $z = (a, b)$ , com  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ , mostraremos que existe  $z_m = (x, y)$ , tal que  $z \cdot z_m = u$ . De fato,

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a^2 + b^2} \\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

Logo, existe  $z_m = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ , denominado inverso ou inverso multiplicativo de  $z$ , quando multiplicado por  $z = (a, b)$  obtemos o elemento neutro  $u = (1, 0)$ . Além disso, como  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$  temos que  $a^2 + b^2 \neq 0$ , consequentemente garante a existência de  $z_m$ .

Por fins didáticos faremos  $z^{-1} = z_m$ , donde  $z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ .

Logo,  $z \cdot z^{-1} = 1, \forall z \in \mathbb{C}^*$ , ou ainda,  $z^{-1} = \frac{1}{z}$ .

Mostraremos em  $\mathbb{C}$  a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

**M5. Distributiva:**  $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] = (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\ &= [a \cdot (c + e) - b \cdot (d + f), a \cdot (d + f) + b \cdot (c + e)] \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)] \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \end{aligned}$$

Assim, verificadas as propriedades A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4, e M5, podemos concluir que as operações de adição e multiplicação definem sobre  $\mathbb{C}$  uma estrutura algébrica de corpo comutativo, portanto  $\mathbb{C}$  é o corpo dos números complexos.

Algebricamente, podemos definir um **corpo** como sendo um conjunto  $\mathbb{K}$  munido com duas operações, denotadas por “+” (adição) e por “ $\cdot$ ” (multiplicação), em que  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  satisfaz todas as propriedades do Teorema 3.1.

Segundo Hefez (2010, p.174), o corpo dos números reais foi criado com objetivo de completar o corpo dos números racionais de modo que equações do tipo  $x^2 = 2$  tivessem soluções. Com isso, muitas lacunas dos racionais, mas não todas, foram preenchidas. Por

exemplo, equações como  $x^2 = -1$  continuam sem solução em  $\mathbb{R}$ . A fim de sanar essa lacuna é que se resolveu após muitas hesitações ampliar o corpo dos números reais, criando o corpo dos números complexos.

## 3.2 Propriedades algébricas

### 3.2.1 Subtração

A subtração entre dois números complexos  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$  é definida em termo do inverso aditivo, decorrente do teorema anterior. Assim, temos:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d)$$

ou seja,

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \quad (3.6)$$

**Exemplo 3.2.1** Dados os números complexos  $z = (11, 8)$  e  $w = (5, 7)$ . Calcular  $z - w$ .

**Solução 3.2.1** Vamos primeiro determinar o inverso aditivo de  $w = (5, 7)$ . Pela propriedade A4,  $w = (5, 7)$  é o inverso aditivo do complexo  $-w$ , então  $z - w = z + (-w) = (11, 8) + (-5, -7) = (11 - 5, 8 - 7) = (6, 1)$ .

Portanto,  $z - w = (6, 1)$ .

**Exemplo 3.2.2** Sabendo que a diferença entre os números complexos  $w$  e  $z = (2, 5)$  é  $d = (-6, 4)$ , determine  $w$ .

**Solução 3.2.2** Seja  $w = (x, y)$ , e  $w - z = d \Leftrightarrow w = d + z$ . Daí, temos

$$(x, y) = (2, 5) + (-6, 4) = (-4, 9) \Rightarrow x = -4 \text{ e } y = 9.$$

Logo,  $w = (-4, 9)$ .

### 3.2.2 Divisão

A divisão entre dois números complexos  $z_1 = (a, b)$  e  $z_2 = (c, d)$ , com  $z_2 \neq 0$  sendo escrita por:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}. \quad (3.7)$$

Perceba que,  $\frac{1}{z_2} = \frac{z_2 \cdot z_2^{-1}}{z_2} = z_2^{-1}$ . Assim,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (a, b) \cdot \left( \frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right) = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right).$$

**Exemplo 3.2.3** Calcule o quociente de  $z = (4, 1)$  por  $w = (2, -3)$ .

**Solução 3.2.3**  $\frac{z}{w} = \frac{(4, 1)}{(2, -3)} = \left( \frac{4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1}{2^2 + (-3)^2}, \frac{1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3)}{2^2 + (-3)^2} \right) = \left( \frac{5}{13}, \frac{14}{13} \right)$

$$\frac{z}{w} = \left( \frac{5}{13}, \frac{14}{13} \right).$$

**Exemplo 3.2.4** Mostre que  $\frac{1}{\frac{1}{z}} = z$ , ( $z \neq 0$ ) com  $z \in \mathbb{C}$ .

**Solução 3.2.4** Basta usarmos o fato que  $z \cdot z^{-1} = 1$  duas vezes para obtermos o resultado esperado.

$$\frac{1}{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{z \cdot z^{-1}}} = \frac{1}{z^{-1}} = \frac{z \cdot z^{-1}}{z^{-1}} = z.$$

**Exemplo 3.2.5** Mostre que produto de qualquer número complexo  $z$  por zero é zero.

**Solução 3.2.5** Basta usarmos a definição (3.5) da multiplicação de dois números complexos. Seque que,

$$z \cdot 0 = (a, b) \cdot (0, 0) = (a \cdot 0 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (0, 0) = 0.$$

Qualquer que seja  $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 3.2.6** Mostre que  $z \cdot w = 0 \Leftrightarrow z = 0$  ou  $w = 0$  para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ .

**Solução 3.2.6** De fato, suponha que  $z \cdot w = 0$  e  $z \neq 0$ . O inverso  $z^{-1}$  existe, e o produto de qualquer número por zero é zero. Daí, temos

$$w = w \cdot 1 = w \cdot (z \cdot z^{-1}) = (z \cdot z^{-1}) \cdot w = z^{-1} \cdot (z \cdot w) = z^{-1} \cdot 0 = 0.$$

## 3.3 Imersão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$

### 3.3.1 $\mathbb{R}$ subconjunto de $\mathbb{C}$

Para isso vamos inicialmente escrever um número complexo  $z = (a, b)$  como sendo  $z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$ , utilizando os pares ordenados com a segunda coordenada nula,  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$  e o número complexo  $(0, 1)$  chamada unidade imaginária.

Seja  $\mathbb{K}$  um subconjunto de  $\mathbb{C}$  formado por pares ordenados cuja segunda coordenada é nula:

$$\mathbb{K} = \{(a, b) \in \mathbb{C} \mid b = 0\}$$

São elementos do conjunto  $\mathbb{K}$  os pares  $(0, 0), (1, 0), (a, 0), (b, 0), (a + b, 0), (a \cdot b, 0), \dots$

Consideremos a seguinte função :  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$  definida por  $f(x) = (x, 0)$ , onde cada  $x \in \mathbb{R}$  é levado ao par  $(x, 0) \in \mathbb{K}$ .

**Proposição 3.3.1** *A função  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$  é bijetora e preserva as operações de adição e de multiplicação, ou seja,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  e  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ . Em particular,  $\mathbb{C}$  é não enumerável.*

**Demonstração 3.3.1** *Mostraremos primeiramente que a função  $f$  é bijetora. Temos:*

- i. Para todo par  $(x, 0) \in \mathbb{K}$  segundo  $f$  existe um correspondente  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = (x, 0)$ , logo  $f$  é sobrejetora.
- ii. Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , com  $x_1 \neq x_2$ , através de  $f$  seus correspondentes de  $(x_1, 0)$  e  $(x_2, 0)$  em  $\mathbb{K}$  são diferentes, de acordo com a igualdade de pares ordenados, logo  $f$  é injetora. Ou ainda,  $f(x_1) = f(x_2) \iff (x_1, 0) = (x_2, 0) \iff x_1 = x_2$ , donde  $f$  é injetora.

Portanto, de acordo com (i) e (ii) a função  $f$  é bijetora.

Segundamente, mostraremos que  $f$  conserva as operações de adição e multiplicação pois:

- a) A soma  $a + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , está associado ao par  $(a + b, 0) \in \mathbb{K}$  que é a soma dos pares  $(a, 0) + (b, 0)$  correspondentes de  $a$  e  $b$ , respectivamente, isto é,

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b).$$

- b) O produto  $a \cdot b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , está associado ao par  $(a \cdot b, 0)$ , que é o produto de  $(a, 0) \cdot (b, 0)$ , correspondentes de  $a$  e  $b$  respectivamente, isto é,

$$f(a \cdot b) = (a \cdot b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b).$$

Assim, em consequência do fato de existir uma bijeção  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$  e sendo mantidas as operações de adição e multiplicação, dizemos que  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{K}$  são isomorfos, o que nos permite identificar  $\mathbb{R}$  como  $f(\mathbb{R})$ .

Devido ao isomorfismo, podemos operar o par  $(x, 0)$  e obtermos resultados semelhantes quando operamos com  $x$ . Logo, podemos escrever a igualdade.

$$x = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por exemplo: Em particular escrever  $0 = (0, 0)$ ,  $5 = (5, 0)$ ,  $-3 = (-3, 0)$  e  $\mathbb{R} = \mathbb{K}$ .

Portanto, o corpo dos números reais passa ser considerado um subconjunto do corpo dos números complexos, isto é,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Considerando essa identificação e adotando o símbolo  $i$  para o número complexo  $(0, 1)$ , o número complexo  $(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$ , de modo que teremos a expressão  $a + bi$ , como no ensino médio.

Perceba que  $i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ , isto é,  $i^2 = -1$ .

Assim, todo número  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  pode ser escrito de modo único como  $z = x + yi$ , ou ainda,  $z = x + iy$ .

Com essa notação, os números complexos do tipo  $x + yi$ , ou ainda *números imaginários*, quando  $x = 0$  são chamados de *imaginários puros* e sendo  $y = 0$  serão ditos *números reais puros* ou simplesmente números reais. Essas denominações decorrem devido a grande resistência ao longo tempo em admitir os números complexos com números. Daí o termo "*imaginário*" vem em sentido de contraposição a "*reais*".

O fato do conjunto  $\mathbb{C}$  ser não enumerável decorre do conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  ser não enumerável sendo uma prova dada pelo *método diagonal de Cantor*<sup>1</sup>, pois, já sabemos que  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Essa demonstração pode ser encontrada.(Jamil, 2013, p. 95). Podemos ainda encontrada uma outra prova que conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  não é enumerável.(Elon, 2010, p. 18).

### 3.3.2 $\mathbb{C}$ é um corpo não ordenado

O corpo  $\mathbb{R}$  com a relação de ordem usual " $<$ " é um corpo ordenado<sup>2</sup> pois sempre é possível estabelecer a relação de ordem  $x < y$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$  e está relacionada com as operações adição e multiplicação e, a completude<sup>3</sup> de  $\mathbb{R}$ . Apesar de ser uma extensão de  $\mathbb{R}$ , não é possível ordenar  $\mathbb{C}$  de modo a estender a ordenação de  $\mathbb{R}$ .

Por exemplo: Os números complexos  $i$  e  $0$ ; tem-se que  $i \neq 0$ . Se  $i > 0$  então,  $i \cdot i > i \cdot 0 \Leftrightarrow -1 > 0$  e se  $i < 0$  então  $i \cdot i > 0 \Leftrightarrow -1 > 0$ . Em ambos os casos a ordem usual de  $\mathbb{R}$  não se verifica. Logo, os números complexos  $i$  e  $0$  não são comparáveis. Portanto,  $\mathbb{C}$  não é um corpo ordenado.

---

<sup>1</sup>Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu no dia 3 de março de 1845 em St.Petesburg, Rússia, e morreu no dia 6 de janeiro de 1918 em Halle, Alemanha. Ele fundou a teoria dos conjuntos e introduziu o conceito de números infinitos com a sua descoberta de números cardinais.

<sup>2</sup>Um corpo  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  em que está definido uma relação de ordem " $<$ " diz-se um **corpo ordenado** quando forem verificadas as seguintes propriedades:

I.  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}, a < b \Rightarrow a + c < b + c$ ;

II.  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}, a < b \text{ e } 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ .

Estas propriedades traduzem a compatibilidade da relação de ordem com as operações de corpo.

<sup>3</sup>Um corpo ordenado  $\mathbb{K}$  chama-se **completo** não-vazio, limitado superiormente,  $\mathbb{X} \subset \mathbb{K}$  possui supremo em  $\mathbb{K}$ . [10]

# Capítulo 4

## Resultados básicos dos números complexos

### 4.1 Forma algébrica

A forma  $z = x + yi$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ , é chamada **forma algébrica** do número complexo  $z$ , onde  $x$  é a parte real e  $y$  é a parte imaginária.

Usaremos a notação:

$x = \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(x + yi)$  para indicar a parte real de  $z$ .

$y = \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(x + yi)$  para indicar a parte imaginária de  $z$ .

Como essa notação, as operações em  $\mathbb{C}$  podem ser escritas das seguintes maneiras:

**Definição 4.1.1** *Adição:*  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ .

**Definição 4.1.2** *Multiplificação:*  $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ .

**Definição 4.1.3** *Subtração:*  $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ .

**Definição 4.1.4** *Divisão:*  $\frac{a + bi}{c + di} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$ .

**Exemplo 4.1.1** *Escrever a expressão  $(4 - i) + i - (6 + 3i)i$  na forma  $a + bi$ .*

**Solução 4.1.1** *Basta aplicarmos a definição de adição e de multiplicação de números complexos.*

$$(4 - i) + i - (6 + 3i)i = 4 - i + i - 6 - 3i^2 = 4 - 6 - 3 \cdot (-1) - i + i = 1$$

**Exemplo 4.1.2** *Mostre que  $\operatorname{Re}[-i \cdot (2 - 3i)^2] = -12$ .*

**Solução 4.1.2** *Temos que,  $(2 - 3i)^2 = (2 - 3i) \cdot (2 - 3i) = 4 - 9 - 6i - 6i = -5 - 12i$ .*

*Daí,  $-i \cdot (-5 - 12i) = 5i + 12i^2 = 5i + 12 \cdot (-1) = -12 + 5i$ .*

*Logo,  $\operatorname{Re}(-12 + 5i) = -12$ .*

## 4.2 As potências de $i$

O cálculo das potências de  $i$  apresentam um comportamento interessante. Vejamos abaixo o resultado desse cálculo para as oito primeiras potências:

- $i^0 = 1$ .
- $i^1 = i$ .
- $i^2 = -1$ .
- $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$ .
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$ .
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$ .
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ .
- $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$ .
- $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$ .

Podemos perceber que essas potências de  $i$  se repetem em períodos de 4. De modo que,  $i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$ . Sendo assim, para calcular as potências de  $i^n$  com  $n \in \mathbb{Z}$ , basta dividir  $n$  por 4 e tomarmos o resto  $r$  dessa divisão, ou seja,  $i^n = i^r$ . Pelo algoritmo da divisão euclidiana dividindo  $n$  por 4 obtemos:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r.$$

**Exemplo 4.2.1** Calcular  $i^{5783992247}$ .

**Solução 4.2.1** Basta determinar o resto da divisão de 5783992247 por 4. Pelo critério de divisibilidade por 4, basta efetuarmos a divisão dos dois últimos algarismos, no caso 47. Agora dividindo 47 por 4 dá resto 3, daí  $i^{5783992247} = i^3 = -i$ .

**Exemplo 4.2.2** Determine o valor de  $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{1789}$ .

**Solução 4.2.2** Perceba que essa soma é formada pelos termos de uma *Progressão Geométrica (P.G.)* de razão  $i$  com 1790 parcelas.

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{1789} = \underbrace{i^0 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{1789}}_{1790 \text{ parcelas}}$$

A soma dos  $n$  termos da P.G. é calculada usando a fórmula

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Seque que,  $S_{1790} = \frac{1 \cdot (1 - i^{1790})}{1 - i}$ , sendo que  $i^{1790} = i^2 = -1$ . Daí,

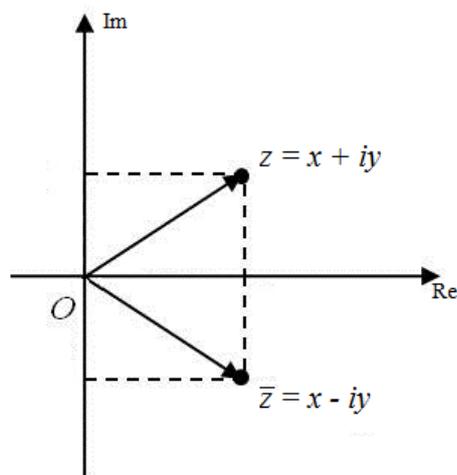
$$S_{1790} = \frac{1 - i^2}{1 - i} = \frac{1 - (-1)}{1 - i} = \frac{2}{1 - i} = 2 \cdot \left( \frac{1}{1^2 + (-1)^2} + \frac{i}{1^2 + (-1)^2} \right) =$$

$$S_{1790} = 2 \cdot \left( \frac{1+i}{2} \right) \Rightarrow S_{1790} = 1 + i.$$

### 4.3 Módulo e conjugado

**Definição 4.3.1** O conjugado do número complexo  $z = x + yi$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}$  é definido como sendo  $\bar{z} = x - yi$ .

Figura 4.1: Conjugado de z



Fonte: Feito pelo autor utilizando Geogebra.

É simples determinar o conjugado de um número complexo pois, basta trocar o sinal da sua parte imaginária. Por exemplo :  $z = -2 + 3i \Rightarrow \bar{z} = -2 - 3i$ .

#### 4.3.1 Propriedades do conjugado

Sejam  $z = x + yi$ ,  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ , três números complexos com  $x, y, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Então

C1.  $\bar{\bar{z}} = z$ .

C2.  $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ .

C3.  $z + \bar{z} = 2 \cdot \text{Re}(z)$ .

$$C4. z - \bar{z} = 2i \cdot Imz.$$

$$C5. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$C6. \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$$

$$C7. \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$C8. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \text{ se } z_2 \neq 0.$$

$$C9. \overline{z^n} = (\bar{z})^n, \text{ se } n \text{ é um inteiro positivo.}$$

### Demonstrações:

$$C1. \bar{\bar{z}} = \overline{x + yi} = x - yi = x + yi = z.$$

$$C2. z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi$$

Pela definição de igualdade entre dois números complexos, temos:

$$y = -y \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0. \text{ Logo, } z = x. \text{ Portanto, } z \in \mathbb{R}.$$

$$C3. z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x = 2 \cdot Re(z).$$

$$C4. z - \bar{z} = x + yi - (x - yi) = 2yi = 2i \cdot Im(z).$$

$$C5. \overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = \overline{(a + c) - (b + d)i} = (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$C6. \overline{z_1 - z_2} = \overline{a + bi - (c + di)} = \overline{(a - c) + (b - d)i} = (a - c) - (b - d)i = (a - bi) - (c - di) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2.$$

$$C7. \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) - (ad + bc)i} = a(c - di) - bi(c - di) = (a - bi) \cdot (c - di) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

$$C8. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1 \cdot \left(\frac{1}{z_2}\right)} \stackrel{C7}{=} \bar{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{1}{c + di}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{c - di}{c^2 + d^2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \frac{c - di}{c^2 + d^2} \\ \overline{\left(\frac{c + di}{c^2 + d^2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{1}{c - di}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{z_2}.$$

$$C9. \text{ Por indução matemática sobre } n \text{ temos: } \overline{z^n} = (\bar{z})^n.$$

Para  $n = 1 \Rightarrow \overline{z^1} = (\bar{z})^1 = \bar{z}$ , é verdadeira.

*Hipótese de indução:* Suponhamos que  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$  seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

Devemos mostrar a veracidade para  $n + 1$ .

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \cdot z} \stackrel{C7}{=} \overline{z^n} \cdot \bar{z} \stackrel{H.I.}{=} (\bar{z})^n \cdot \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}. \quad \square$$

Um resultado importante sobre o emprego do conjugado é com relação as raízes de um polinômio com coeficientes reais.

**Teorema 4.3.1** Se  $P(z)$  é um polinômio de coeficientes reais, então  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ .

**Prova 4.3.1** Se  $P(z) = \sum_{k=0}^n A_k \cdot z^k$ , com  $A_k$  real,  $k = 0, 1, \dots, n$ , temos que  $A_k = \overline{A_k}$ , logo:

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^n A_k \cdot \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n \overline{A_k} \cdot \bar{z}^k \stackrel{C7 \text{ e } C9}{=} \sum_{k=0}^n \overline{A_k \cdot z^k} = \overline{\sum_{k=0}^n A_k \cdot z^k} = \overline{P(z)}.$$

**Corolário 4.3.1** Se um polinômio  $P(z)$  de coeficientes reais admite uma raiz complexa  $a + bi$ , com  $a$  e  $b$  reais, então ele admite também a raiz  $a - bi$ . Em outras palavras, se um número complexo  $z$  é raiz do polinômio, seu conjunto  $\bar{z}$  também o é.

**Prova 4.3.2** Temos que  $P(a - bi) = P(\overline{a + bi})$ . Pelo Teorema 4.3.1, segue que:

$$P(\overline{a + bi}) = \overline{P(a + bi)} = \overline{0} = 0 \Rightarrow P(a - bi) = 0.$$

Portanto, o número complexo  $a - bi$  também é raiz do polinômio.

Uma consequência importante sobre os polinômios de grau ímpar é dada pelo corolário a seguir.

**Corolário 4.3.2** Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem, pelo menos, uma raiz real.

**Prova 4.3.3** Decorre do fato que as raízes não reais ocorre aos pares, isto é, uma raiz e seu conjugado, Corolário(4.3.1). Como o polinômio tem grau ímpar, necessariamente uma é real.

**Exemplo 4.3.1** Determine o polinômio do segundo grau, de coeficientes reais, que admite  $1 - 3i$  como raiz.

**Solução 4.3.1** Pelo Corolário 4.3.1 o número complexo  $1 + 3i$  também é raiz do polinômio. Basta usarmos o fato que, conhecendo as raízes  $x_1$  e  $x_2$  de um polinômio do segundo  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , sua equação fica determinada pela soma  $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  e o produto  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$  das raízes (*relação de Girard*), sob a forma  $p(x) = x^2 - Sx + P$ .

Daí, temos  $S = (1 - 3i) + (1 + 3i) = 2$  e  $P = (1 - 3i) \cdot (1 + 3i) = 10$ .

Logo, o polinômio é  $p(x) = x^2 - 2x + 10$ .

**Exemplo 4.3.2** O polinômio  $P(z)$ , de coeficientes reais é tal que  $P(1 - 2i) = 2 + 3i$ . Determine o valor de  $P(1 + 2i)$ .

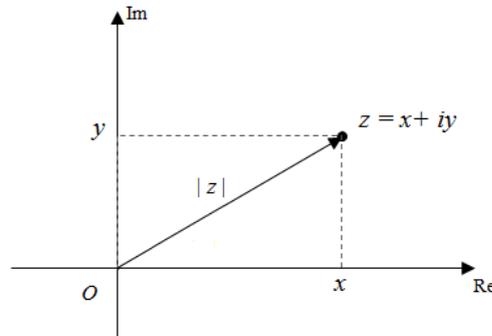
**Solução 4.3.2** Se  $P(z)$  é um polinômio de coeficientes reais, então  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ .

Segue que, se  $z = 1 - 2i$ , então  $P(\bar{z}) = P(1 + 2i) = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i$ .

### 4.3.2 Módulo do número complexo

Chamamos de módulo, valor absoluto ou norma de um número complexo  $z = x + yi$  o número real não negativo  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Figura 4.2: Módulo de  $z$



Fonte: Feito pelo autor utilizando Geogebra.

Geometricamente, podemos perceber, que o módulo representa a **distância** do ponto  $z$  à origem  $(0,0)$ . Resultado que se verifica utilizando o *Teorema de Pitágoras*.

### 4.3.3 Propriedades do módulo

Para quaisquer números complexos  $z$ ,  $z_1$  e  $z_2$  as seguintes propriedades são válidas:

- M1.  $|z| \geq 0$ .
- M2.  $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$  e  $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$ .
- M3.  $|z| = |\bar{z}|$ .
- M4.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ .
- M5.  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .
- M6.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ,  $z_2 \neq 0$ .
- M7.  $|z^n| = |z|^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- M8.  $|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- M9.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ . (*desigualdade triangular*)
- M10.  $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ , ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

$$\mathbf{M11.} \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

**Demonstração 4.1 Prova das propriedades do módulo**

**M1.** Seja  $z = x + yi$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Como  $x^2 \geq 0$  e  $y^2 \geq 0$ , temos que  $x^2 + y^2 \geq 0$ , logo,  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \Rightarrow |z| \geq 0$ .

**M2.** Sendo  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |\operatorname{Re}(z)| \geq \operatorname{Re}(z)$ .

De modo análogo temos:  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |\operatorname{Im}(z)| \geq \operatorname{Im}(z)$ .

**M3.** Sendo  $z = a + bi$  então  $\bar{z} = a - bi$ . Temos que:

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Logo,  $|z| = |\bar{z}|$ .

**M4.** Seja  $z = a + bi$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos que:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |z|^2.$$

**M5.** Pela propriedade **M4** temos,  $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{(z_1 \cdot z_2)} = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2) = (z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot (z_2 \cdot \bar{z}_2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2 \Rightarrow \sqrt{|z_1 \cdot z_2|^2} = \sqrt{(|z_1| \cdot |z_2|)^2}$ .

Portanto, segue que  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

**M6.** Da propriedade **M4** temos,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 = \left( \frac{z_1}{z_2} \right) \cdot \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} \stackrel{\text{C8}}{=} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) \cdot \left( \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \right) = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_1}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \stackrel{\text{M4}}{=} \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2} \cdot \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Portanto,  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ .

**M7.** Pela propriedade **M4** temos,

$$|z^n|^2 = z^n \cdot \overline{z^n} \stackrel{\text{C9}}{=} z^n \cdot (\bar{z})^n = (z \cdot \bar{z})^n \stackrel{\text{M4}}{=} (|z|^2)^n = (|z|^n)^2 \therefore |z^n| = |z|^n$$

Portanto,  $|z^n| = |z|^n$ .

**M8.** Mostraremos por indução matemática sobre  $n$  que

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$$

é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para  $n = 2$  já provamos em **M5** ou seja,  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  é verdadeira.

Hipótese de indução: Suponhamos que  $|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$  seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Iremos mostrar que essa igualdade é verdadeira para  $n + 1$ .

De fato,

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot z_{n+1}| = \underbrace{|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot z_{n+1}|}_{z_p} \stackrel{\text{M5}}{=} |z_p| \cdot |z_{n+1}| =$$

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| \cdot |z_{n+1}| \stackrel{\text{H.I.}}{=} |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n| \cdot |z_{n+1}|.$$

Portanto, a afirmação para  $n + 1$  é verdadeira e conseqüentemente M8 é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**M9. Desigualdade triangular:**  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

$$(|z_1 + z_2|)^2 \stackrel{\text{M3}}{=} (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \stackrel{\text{C5}}{=} (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + (z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2)$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 \stackrel{\text{C3}}{=} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot \text{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \stackrel{\text{M2}}{\leq} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot$$

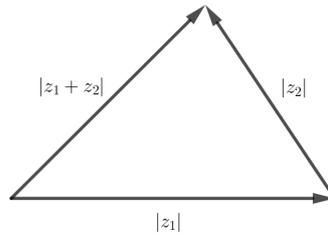
$$|z_1 \cdot \overline{z_2}|$$

$$\stackrel{\text{M5}}{=} |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

$$\text{Daí, } \sqrt{(|z_1 + z_2|)^2} = \sqrt{(|z_1| + |z_2|)^2} \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Geometricamente esse resultado pode ser traduzido pela seguinte afirmação: *Em qualquer triângulo cada lado é menor ou igual a soma dos outros dois lados.* Veja a figura 4.3, como  $z_1$  e  $z_2$  não estão sobre uma mesma direção, para somá-los formamos um triângulo de lados  $|z_1|$ ,  $|z_2|$  e  $|z_1 + z_2|$ .

Figura 4.3: Desigualdade triangular



Fonte: Feita pelo autor usando Geogebra.

Temos que:  $| -z_2 | = | (-1) \cdot z_2 | = | -1 | \cdot |z_2| = 1 \cdot |z_2| = |z_2|$  assim,

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + | -z_2 | = |z_1| + |z_2|$$

Logo,  $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

**M10.** Por indução matemática sobre  $n$  mostraremos que a desigualdade

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ , com  $n \geq 2$ .

Para  $n = 2$  temos  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  que é verdadeira por **M9**.

(Hipótese de indução) Suponhamos que  $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$  seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 2$ . Vamos mostrar para  $n + 1$  a desigualdade

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

também vale.

$$\begin{aligned} \text{De fato, } \underbrace{|z_1 + z_2 + \dots + z_n + z_{n+1}|}_{z_s} &= |z_s + z_{n+1}| \stackrel{M9}{\leq} |z_s| + |z_{n+1}| = \\ &= |z_1 + z_2 + \dots + z_n| \stackrel{H.I.}{\leq} |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|. \text{ Logo é verdadeira.} \end{aligned}$$

Portanto pelo princípio de indução matemática, a desigualdade  $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$  é verdadeira para  $n \geq 2$  com  $n \in \mathbb{N}$ .

**M11.** Vamos escrever  $|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$ . Daí subtraindo  $|z_2|$  em ambos os membros obtemos

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|. \quad (4.1)$$

De modo análogo, escrevendo  $|z_2| = |z_2 + z_1 - z_1| \leq |z_2 + z_1| + |z_1|$  e subtraindo  $|z_1|$  em ambos, obtemos

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$$

Pondo agora o sinal negativo  $(-)$  em evidência obtemos:

$$-(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 + z_2|. \quad (4.2)$$

Das desigualdades (4.1) e (4.2) segue o resultado

$$-(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|.$$

□

## 4.4 Aplicações II

**Exemplo 4.4.1** (FUVEST-2006 2ª fase) Determine os números complexos  $z$  que satisfazem, simultaneamente,  $|z| = 2$ ,  $\text{Im} \left( \frac{z-i}{1+i} \right) = \frac{1}{2}$ , lembretes:  $i^2 = -1$ , se  $w = a + bi$ , com  $a$  e  $b$  reais então  $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\text{Im}(w) = b$ .

**Solução 4.4.1** Se  $z = a + bi$ , com  $a$  e  $b$  reais então:  $|z| = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4$

$$a^2 + b^2 = 4. \quad (4.3)$$

- Calculemos  $\frac{z-i}{1+i} = \frac{(a+bi-1) \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} = \frac{a-ai+bi+b-i-1}{2} =$   
 $= \frac{a+b-1}{2} + \frac{(-a+b-1)}{2} \cdot i$
- Daí, temos que  $Im\left(\frac{z-i}{1+i}\right) = \frac{-a+b-1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -a+b-1 = 1 \Leftrightarrow a-b = -2$   
 $a = b - 2. \tag{4.4}$

- Fazendo a substituição o valor da equação (4.4) em (4.3) obtemos:

$$(b-2)^2 + b^2 = 4 \Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 + b^2 = 4 \Leftrightarrow 2b^2 - 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2b \cdot (b-2) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } b = 2.$$

- Agora quando  $b = 0 \Rightarrow a = -2$  e quando  $b = 2 \Rightarrow a = 0$ .

Portanto, os números complexos são  $z = -2$  ou  $z = 2i$ .

**Exemplo 4.4.2** (ITA - 2014) Se  $z \in \mathbb{C}$ , então  $z^6 - 3|z|^4 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6$  é igual a

- (a)  $(z^2 - \bar{z}^2)^3$ .
- (b)  $z^6 - \bar{z}^6$ .
- (c)  $(z^3 - \bar{z}^3)^2$ .
- (d)  $(z - \bar{z})^6$ .
- (e)  $(z - \bar{z})^2 \cdot (z^4 - \bar{z}^4)$ .

**Solução 4.4.2** Pela propriedade **M4** já vimos que  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ , então temos  $|z|^4 = z^2 \cdot \bar{z}^2$

$$\text{Assim, } z^6 - 3|z|^4 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6 = z^6 - 3z^2 \cdot \bar{z}^2 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6 = \underbrace{z^6 - 3z^4 \cdot \bar{z}^2 + 3z^2 \cdot \bar{z}^4 - \bar{z}^6}_{(z^2 - \bar{z}^2)^3}$$

Logo,  $z^6 - 3|z|^4 \cdot (z^2 - \bar{z}^2) - \bar{z}^6 = (z^2 - \bar{z}^2)^3$ . Portanto, a resposta é a alternativa **(a)**.

**Exemplo 4.4.3** (ITA - 2014) Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$  das afirmações:

- I.  $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ ;
- II.  $(z + \bar{w})^2 - (z - \bar{w})^2 = 4z\bar{w}$ ;
- III.  $|z+w|^2 - |z-w|^2 = 4Re(z\bar{w})$ ;

é (são) verdadeiras:

- (a) ( ) apenas I.  
 (b) ( ) apenas I e II.  
 (c) ( ) apenas I e III.  
 (d) ( ) apenas II e III.  
 (e) ( ) Todas .

**Solução 4.4.3** Considere os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .  
 Temos que:  $|z|^2 = a^2 + b^2$ ,  $|w|^2 = c^2 + d^2$  e

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c) + (b + d)i \quad \text{e} \quad z - w = (a - c) + (b - d)i. \\ |z + w|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 \quad \text{e} \quad |z - w|^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2. \\ \text{Assim, } |z + w|^2 + |z - w|^2 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 = \\ &= 2((a^2 + b^2) + (c^2 + d^2)) = \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2). \end{aligned}$$

Logo, a afirmação I é verdadeira.

$$(z + \bar{w})^2 - (z - \bar{w})^2 = z^2 + 2z\bar{w} + \bar{w}^2 - (z^2 - 2z\bar{w} + \bar{w}^2) = 2z\bar{w} + 2z\bar{w} = 4z\bar{w}$$

Logo, a afirmação também é verdadeira.

Agora,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 - |z - w|^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 - ((a - c)^2 + (b - d)^2) = \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 - (a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2) = 4ac + 4bd = \\ &= 4(ac + bd) = 4\text{Re}(z\bar{w}). \end{aligned}$$

$$\text{Observe que } z \cdot \bar{w} = (a + bi) \cdot (c - di) = ac + bd + (bd - ad)i$$

Daí,  $\text{Re}(z \cdot \bar{w}) = ac + bd$ . Logo, a afirmação III é verdadeira.

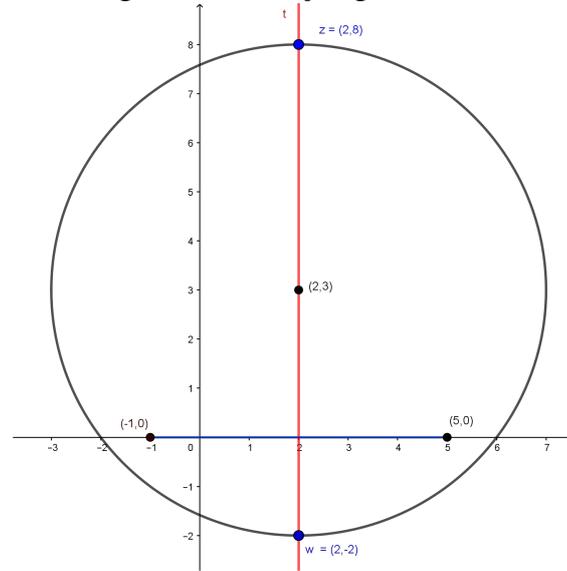
Portanto, a resposta é alternativa (e).

**Exemplo 4.4.4** Resolva o sistema  $\begin{cases} |z - 2 - 3i| = 5 \\ |z + 1| = |z - 5| \end{cases}$

**Solução 4.4.4** A equação  $|z - 2 - 3i| = 5 \Rightarrow |z - (2 + 3i)| = 5$  representa o lugar geométrico dos números complexos que equidistam 5 unidades de  $2 + 3i$ , ou seja, uma circunferência de centro  $(2, 3)$  e raio 5.

Já a equação  $|z + 1| = |z - 5| \Rightarrow |z - (-1)| = |z - 5|$ , representa o lugar geométrico dos números complexos que equidistam dos números  $-1$  e  $5$ , ou seja, a reta mediatriz de equação  $x = 2$ , do segmento de extremidades  $(-1, 0)$  e  $(5, 0)$ , pois  $2 = \frac{-1 + 5}{2}$ . Sendo a solução do sistema os pontos  $(2, 8)$  e  $(2, -2)$  de intersecção da reta mediatriz com a circunferência ilustrada na figura (4.4). Portanto, os números complexos que satisfazem o sistema são  $z = 2 + 8i$  ou  $z = 2 - 2i$ .

Figura 4.4: Solução geométrica



Fonte: Feita pelo autor usando Geogebra.

**Outra maneira de resolver o sistema:** Considere o número complexo  $z = x + yi$ , vamos substituir nas equações modulares do sistema e resolvê-las analiticamente. Então temos:

$$|z - 2 - 3i| = 5 \Rightarrow |x - 2 + (y - 3)i| = 5 \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} = 5 \Rightarrow$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25. \quad (4.5)$$

$$|x + yi + 1| = |x + yi - 5| \Rightarrow |x + 1 + yi| = |x - 5 + yi| \Rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 \Rightarrow 12x = 24 \Rightarrow x = 2.$$

Substituindo  $x = 2$  na equação (4.5), obtemos:

$$(2 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \Rightarrow y - 3 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow y_1 = 8 \text{ ou } y_2 = -2.$$

Portanto, os números complexos que satisfazem o sistema são  $z = 2 + 8i$  ou  $z = 2 - 2i$ .

**Exemplo 4.4.5** Determine um número real  $M$  para  $\left| \frac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2} \right| \leq M$ , quando  $|z| = 2$ .

**Solução 4.4.5** Pela propriedade **M6** o módulo do quociente é igual ao quociente dos módulos, e como  $|-1| = 1$  temos  $\left| \frac{-1}{z^4 + 3z^2 + 2} \right| = \frac{1}{|z^4 + 3z^2 + 2|}$ . Daí, precisamos determinar  $M$  para que

$$\frac{1}{|z^4 + 3z^2 + 2|} \leq M$$

Para garantir isto, necessitamos do menor denominador possível. Fatorando o denominador obtemos:  $z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2 + 1) \cdot (z^2 + 2)$ . Agora escrevendo

$$|z^4 + 3z^2 + 2| = |(z^2 + 1) \cdot (z^2 + 2)| \stackrel{M5}{=} |z^2 + 1| \cdot |z^2 + 2| \stackrel{M11}{\geq} ||z|^2 - 1| \cdot ||z|^2 - 2|$$

Como  $|z| = 2$  temos  $|z^4 + 3z^2 + 2| \geq ||2|^2 - 1| \cdot ||2|^2 - 2| = |4 - 1| \cdot |4 - 2| = 6$ .

$$\text{Assim, } |z^4 + 3z^2 + 2| \geq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{|z^4 + 3z^2 + 2|} \leq \frac{1}{6}.$$

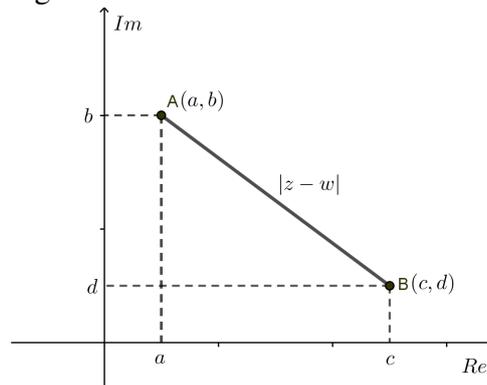
Portanto,  $M = \frac{1}{6}$ .

Vejamos mais uma propriedade do módulo de números complexos: Sendo  $z = a + bi$  e  $w = c + di$  dois números complexos, vamos calcular  $|z - w|$ .

$$|z - w| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}.$$

Ora, tomando os afixos<sup>1</sup> dos números complexos  $z$  e  $w$  e fazendo uso da fórmula da distância de dois pontos no plano cartesiano, temos que  $|z - w|$  representa a distância entre os afixos de  $z$  e  $w$  no plano cartesiano, ou seja,  $|z - w|$  é a **distância** de  $z$  a  $w$  no plano Argand-Gauss.

Figura 4.5: Distância entre dois afixos



Fonte: Feita pelo autor usando Geogebra.

**Observação 4.4.1** Com já definimos o conjugado e o módulo de número complexo, então podemos reescrever a **divisão** entre dois números complexos  $z$  e  $w$ , com  $w \neq 0$  como:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}. \quad (4.6)$$

**Exemplo 4.4.6** Para  $z = 10 - 5i$  e  $w = 6 + 2i$  calculemos  $z/w$ .

**Solução 4.4.6** Multiplicamos o numerador e denominador pelo conjugado  $\bar{w} = 6 - 2i$  e que  $w \cdot \bar{w} = |w|^2$  temos

$$\frac{z}{w} = \frac{10 - 5i}{6 + 2i} = \frac{(10 - 5i) \cdot (6 - 2i)}{(6 + 2i) \cdot (6 - 2i)} = \frac{60 - 10 - 20i - 30i}{6^2 + 2^2} = \frac{50 - 50i}{40}.$$

<sup>1</sup>No plano complexo ou plano de Argand-Gauss o ponto  $P(x, y)$  correspondente a um número complexo  $z = x + yi$ , é chamado de **afixo** de  $z$ .

Colocando o último resultado na forma  $a + bi$ , basta dividirmos a parte real e a parte imaginária do numerador por 40, e simplificando as frações, obtemos:

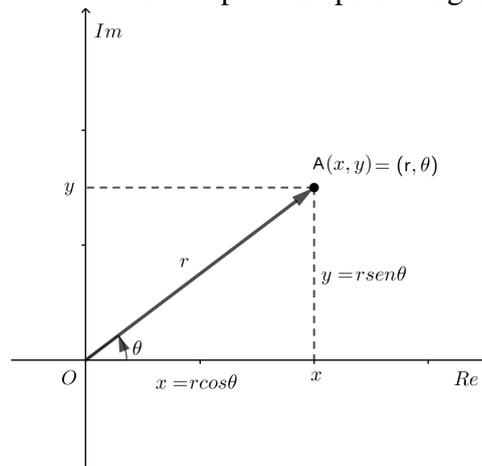
$$\frac{z}{w} = \frac{50}{40} - \frac{50i}{40} = \frac{5}{4} - \frac{5i}{4}.$$

## 4.5 Forma polar ou trigonométrica de um número complexo

Seja  $r$  e  $\theta$  as coordenadas polares do ponto  $(x, y)$  que corresponde a um número complexo  $z = x + yi$  não nulo. Como  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$ , conforme figura (4.6) podemos escrever o número  $z$  na forma polar<sup>2</sup> ou trigonométrica como

$$z = r(\cos\theta) + r(i\sin\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (4.7)$$

Figura 4.6: Coordenadas polar no plano Argand-Gauss



Fonte: Feita pelo autor usando Geogebra.

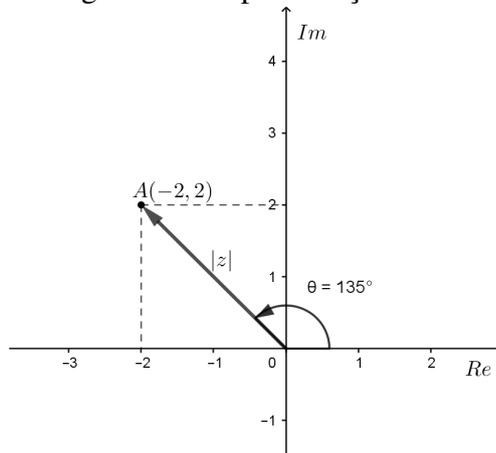
O número real  $r$  é o comprimento do vetor radial que representa o módulo do número complexo  $z$ , ou seja,  $r = |z|$ . Já  $\theta$  indica o ângulo medido em radianos que  $z$  faz com o eixo real **positivo**, sendo  $z$  compreendido como um vetor radial. O ângulo  $\theta$  é chamado um **argumento** de  $z$  e escreveremos  $\theta = \arg(z)$ . É claro que o argumento  $\theta$  não é único, podendo assumir infinitos valores, diferenciados por  $2\pi$ , pois seu valor deve satisfazer as equações  $\cos\theta = \frac{x}{r}$  e  $\sin\theta = \frac{y}{r}$  e as funções seno e cosseno são periódicas de período  $2\pi$ . O **valor principal** de  $\text{Arg}(z)$ , é o único valor  $\theta$  tal que  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Segue que,

<sup>2</sup>O sistema de coordenadas polares, inventada por Isaac Newton, consiste num ponto  $O$ , chamado polo ou origem, e na semirreta horizontal orientada com extremidade  $O$ , chamada eixo polar[17].

$\arg(z) = \text{Arg}(z) + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , também o é. Para determinar o valor principal  $\theta = \text{Arg}(z)$  geralmente fazemos uso de calculadora científica na função inversa  $\tan^{-1}$  mais prático, ou de uma tabela trigonométrica menos comum, salvo se os valores sejam notáveis, tais como:  $\left(30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{rad}, 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{rad}, 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{rad}, 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{rad}, 120^\circ = \frac{2\pi}{3}, \text{etc.}\right)$ . Vale ressaltar de antemão a importância da localização de  $z = x + yi$  no plano complexo, pois usando a calculadora, está fornecendo ângulos que satisfazem  $-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1}(y/x) \leq \frac{\pi}{2}$ , ou seja, ângulos no primeiro e no quarto quadrantes, e se  $z$  estiver no segundo ou terceiro quadrantes devemos fazer a devida correção necessária somando ou subtraindo  $\pi$  a  $\tan^{-1}(y/x)$ , pois,  $\pi$  é o período da função tangente.

**Exemplo 4.5.1** Escrever o número  $z = -2 + 2i$  na forma polar.

Figura 4.7: Representação de  $z$



Fonte: feito pelo autor usando Geogebra.

**Solução 4.5.1** Temos que  $A(-2, 2)$  é o afixo de  $z = -2 + 2i$ , pertencente ao segundo quadrante conforme a figura (4.7) então,  $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |z| = 2\sqrt{2}$ .

O argumento  $\theta$  é tal que:

$$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, para  $-\pi < \theta \leq \pi$  o valor de  $\theta = \text{Arg}(-2 + 2i) = \frac{3\pi}{4}$  e a forma trigonométrica de  $z$  é:

$$z = 2\sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right].$$

Perceba se usássemos a calculadora nos forneceria  $\tan^{-1}\left(\frac{-2}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$  que é um ângulo do quarto quadrante, contudo  $z = -2 + 2i$  está no segundo quadrante. Assim, teremos que somar  $\pi$  ao valor encontrado, ou seja,  $\theta = \frac{-\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ .

### 4.5.1 Operações com números complexos na forma polar

As operações de multiplicação e divisão tornam-se mais simples quando utilizamos a forma polar invés da forma algébrica para efetuá-las, como mostraremos a seguir.

**Teorema 4.5.1** Se  $z_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$  e  $z_2 = r_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ , então

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \quad (4.8)$$

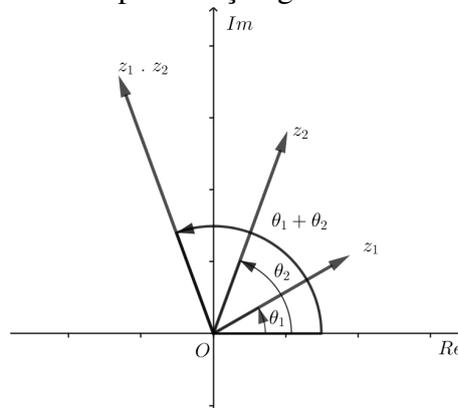
**Prova 4.5.1** Calculando o produto  $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ , obtemos

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot \left[ \underbrace{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2}_{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + i \cdot \left( \underbrace{\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1}_{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \right) \right].$$

Logo,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

Figura 4.8: Representação geométrica de  $z_1 \cdot z_2$



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

A fórmula (4.8) da multiplicação pode ser estendida para um número qualquer de fatores. Sendo  $z_j = r_j \cdot (\cos\theta_j + i \operatorname{sen}\theta_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , teremos [1]

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 r_2 \dots r_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]. \quad (4.9)$$

**Prova:** Vamos usar indução matemática sobre  $n$  para mostrar igualdade (4.9).

Para  $n = 2$ , temos:  $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$  que é verdadeira pelo Teorema (4.5.1).

Suponhamos que

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]$$

seja verdadeira para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ . (*Hipótese de indução*).

Vamos mostrar que para  $n + 1$  a igualdade (4.9) continua verdadeira. De fato,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot z_{n+1} &= \overbrace{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n}^r \cdot \left[ \cos \left( \overbrace{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}^\theta \right) + i \operatorname{sen} \left( \overbrace{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n}^\theta \right) \right] \cdot \\ &= r_{n+1} \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \operatorname{sen} \theta_{n+1}) \stackrel{H.I.}{=} \\ &= r \cdot r_{n+1} \cdot \{ [\cos \theta \cdot \cos(\theta_{n+1}) - \operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen}(\theta_{n+1})] + i \cdot [\cos \theta \cdot \operatorname{sen}(\theta_{n+1}) + \operatorname{sen} \theta \cdot \cos(\theta_{n+1})] \}. \end{aligned}$$

Assim,

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot z_{n+1} = r \cdot r_{n+1} \cdot [\cos(\theta + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta_{n+1})] \Rightarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{n+1} = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{n+1} \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{n+1})].$$

Logo, verdadeira.

Portanto, pelo Princípio de indução a igualdade (4.9) é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 4.5.2** Se  $z_1 = r_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2 \cdot (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ , com  $z_2 \neq 0$ , então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \quad (4.10)$$

**Prova 4.5.2** Temos que  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{r_1 \cdot (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2 \cdot (\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{(r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_2 \operatorname{sen} \theta_2)^2}$ .

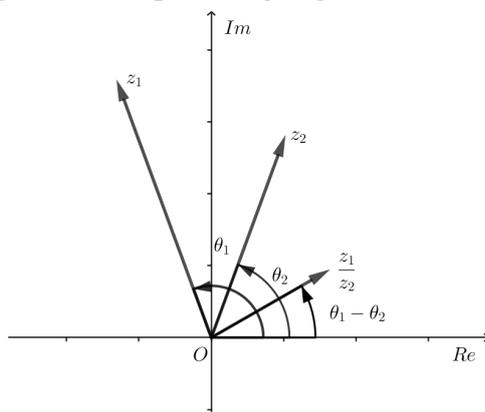
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2^2} \cdot \left[ \frac{\overbrace{\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2}^{\cos(\theta_1 - \theta_2)} + i \cdot \left( \overbrace{\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2}^{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)} \right)}{\underbrace{(\cos \theta_2)^2 + (\operatorname{sen} \theta_2)^2}_1} \right].$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

**Exemplo 4.5.2** Sendo  $z = 4 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{9} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{9} \right)$ , determine o número complexo  $w$  tal que  $w = z \cdot (1 + i\sqrt{3})$ .

Figura 4.9: Representação geométrica de  $\frac{z_1}{z_2}$



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

**Solução 4.5.2** Escrevendo na forma polar o número complexo  $1 + i\sqrt{3}$  obtemos  $2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{3} \right)$ , pois o módulo é  $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$  e  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{1} \right) = \frac{\pi}{3}$ .

Daí

$w = z \cdot (1 + \sqrt{3}) = 4 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{9} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{9} \right) \cdot 2 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{\pi}{3} \right)$ . Pelo Teorema (4.5.1) obtemos,

$$w = 8 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} \right) \right] \Rightarrow w = 8 \cdot \left( \cos \frac{4\pi}{9} + i \cdot \text{sen} \frac{4\pi}{9} \right)$$

**Exemplo 4.5.3** Sejam  $z = 20 \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{5\pi}{3} \right)$  e  $w = 5 \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen} \frac{7\pi}{6} \right)$  determine  $\frac{z}{w}$ .

**Solução 4.5.3** Pelo Teorema (4.5.2) temos que:

$$\frac{z}{w} = \frac{20 \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{5\pi}{3} \right)}{5 \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \text{sen} \frac{7\pi}{6} \right)} = \frac{20}{5} \cdot \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{6} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{6} \right) \right]. \text{ Daí,}$$

segue que

$$\frac{z}{w} = 4 \cdot \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{3} \right).$$

**Proposição 4.5.1** Se  $z \neq 0$  com um argumento igual a  $\theta = \text{Arg}(z)$  então  $-\theta = \text{Arg}(\bar{z})$  é um argumento de  $\bar{z}$ .

**Prova 4.5.1** Escrevendo  $z = r \cdot (\cos\theta + i \sen\theta)$ , e determinando seu conjugado, obtemos  $\bar{z} = r \cdot (\cos\theta - i \sen\theta) = r \cdot (\cos(-\theta) + i \sen(-\theta))$ , fato que se justifica devido a função cosseno ser uma função par, isto é,  $[f(x) = f(-x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}$  e a função seno ser uma função ímpar, isto é,  $[f(-x) = -f(x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 4.6 Rotação

Os números complexos podem ser vistos como pontos ou vetores e uma equação complexa pode ser interpretada geometricamente. A rotação é sem dúvida a principal contribuição dos números complexos à geometria, pois a multiplicação de números complexos é a forma mais simples de obter rotações no plano.

Vejam agora a multiplicação de um número complexo por  $i$ .

**Proposição 4.6.1** Seja  $z \in \mathbb{C}$ ,  $iz$  é o resultado da rotação de  $z$  entorno da origem por um ângulo de  $90^\circ$ .

**Prova 4.6.1** Na figura (4.10) os triângulos retângulos delimitados por  $Oaz$  e  $Oaz'$  são congruentes, pois possuem mesmos catetos, conseqüentemente mesma hipotenusa, daí segue que  $\alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$ .

Seja  $z = a + bi$  um número complexo com  $a, b \in \mathbb{R}$  representado na figura (4.10). Segue que  $iz = i \cdot (a + bi) = ia + bi^2 = -b + ai = z'$ .

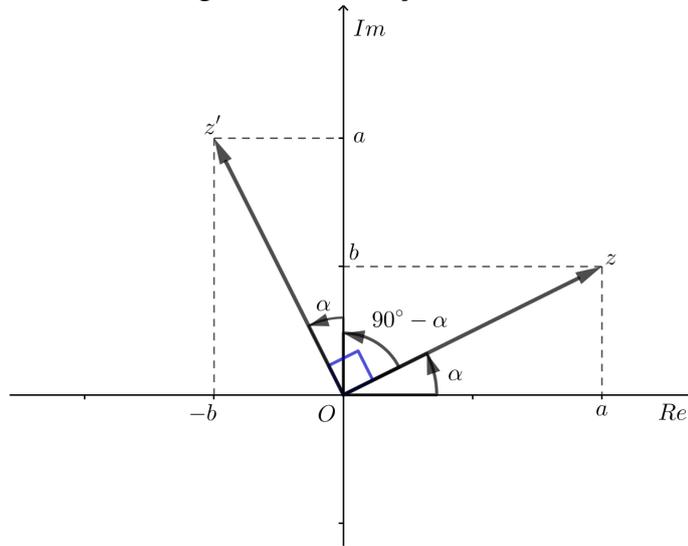
**Exemplo 4.6.1** Um problema clássico é o da “ilha do tesouro” trata-se de localizar um tesouro enterrado numa certa ilha, dadas algumas instruções contidas num mapa antigo. Vejamos:

“Ande da palmeira até a entrada da caverna. Lá chegando, vire  $90^\circ$  à direita e caminhe o mesmo número de passos. No fim desse trajeto, coloque uma marca e retorne à palmeira. Agora, caminhe em direção a pedra. Lá chegando, vire  $90^\circ$  à esquerda e caminhe o mesmo número de passos que foram dados da palmeira até à pedra. Coloque uma marca no fim desse trajeto. O tesouro está no ponto médio dessas marcas”.(CARMO, 2005, p.125).

Quando chegamos à ilha, a palmeira não existia mais. Como fazer para achar o tesouro?

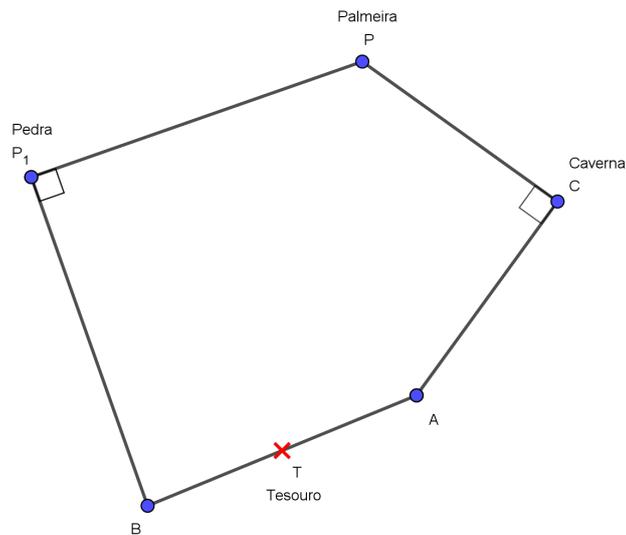
**Solução 4.6.1** Primeiramente vamos construir um esquema(mapa) supondo a localização da dita palmeira num determinado ponto da ilha, conforme a figura (4.11), e seguido as instruções contidas no mapa.

Figura 4.10: Rotação de 90°



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

Figura 4.11: Ilha do Tesouro



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

Vamos calcular o ponto  $A$  utilizando a notação de vetor para representar os números complexos. Temos que  $\vec{CP} = P - C$ . Daí, o vetor  $\vec{CA} = \vec{CP} \cdot i$ , que é obtido devido a rotação de  $90^\circ$  de  $\vec{CP}$ , ou seja, multiplicando  $\vec{PC}$  por  $i$ , segue que

$$A - C = (P - C) \cdot i \Rightarrow A = C - C \cdot i + P \cdot i. \quad (4.11)$$

Calculemos agora o ponto  $B$ . Temos que  $\vec{P_1B} = \vec{P_1P} \cdot (-i)$ , neste o vetor  $\vec{P_1P}$  sofrerá

uma rotação de  $-90^\circ$ , isto é, será multiplicado por  $(-i)$ . Então,

$$\overrightarrow{P_1 B} = \overrightarrow{P_1 P} \cdot (-i) \Rightarrow B - P_1 = (P - P_1) \cdot (-i). \text{ Logo,}$$

$$B = P_1 + P_1 \cdot i - P \cdot i. \quad (4.12)$$

Somando membro a membro as equações (4.11) e (4.12), percebemos que o termo  $P \cdot i$  se cancela, daí obtemos  $A + B = C + P_1 + (C - P) \cdot i$ . Dividindo por 2 encontraremos o tesouro, ou seja, o ponto  $T$ .

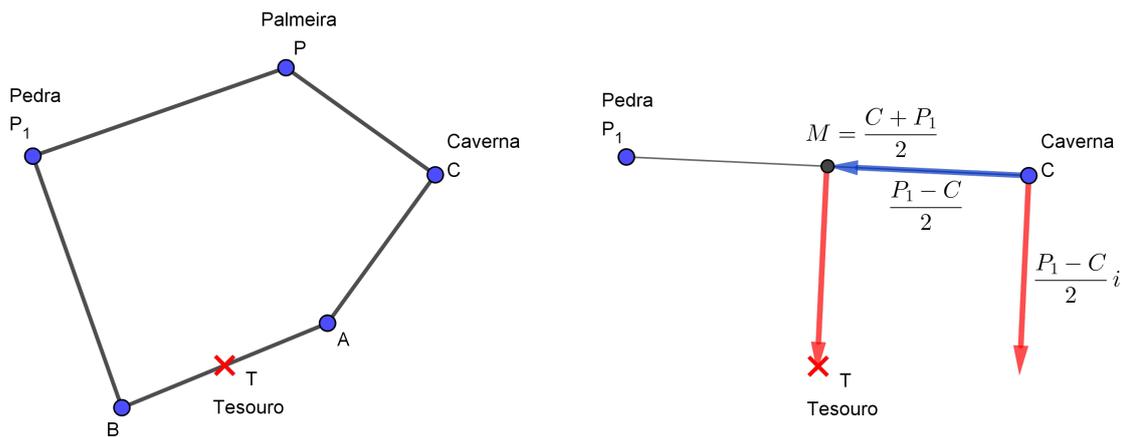
$$T = \frac{A+B}{2} = \frac{C+P_1}{2} + \left(\frac{P_1-C}{2}\right) \cdot i.$$

Ou seja,

$$T = \frac{C+P_1}{2} + \left(\frac{P_1-C}{2}\right) \cdot i.$$

O resulta demonstra que não é necessária a localização da palmeira para encontrar o tesouro, pois o ponto  $P$  que representa a palmeira não aparece na equação. Perceba  $\frac{C+P_1}{2}$  é o ponto médio do segmento que liga a caverna( $C$ ) até a pedra( $P_1$ ), indicaremos por  $M$  e a diferença  $\frac{P_1-C}{2}$  representa a metade do vetor  $\overrightarrow{CP_1}$ , multiplicado por  $i$  sofrerá uma rotação de  $90^\circ$  em torno do ponto  $C$ . Para somar o número complexo  $M$  com o vetor  $\frac{\overrightarrow{CP_1}}{2}i$  basta deslocar o vetor até o ponto  $M$  e resultado será o local exato do tesouro  $T$ , conforme a figura (4.12).

Figura 4.12: Tesouro encontrado



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

Na Revista do Professor de Matemática Nº 47 há um comentário sobre problema da ilha do tesouro, diferenciando apenas pela narrativa de apresentar uma árvore e duas pedras,

invés da palmeira, de uma pedra e uma caverna no mapa, ou seja, é análogo ao problema que resolvemos, e sua provável origem. Vejamos o que diz José Paulo Q. Carneiro:

“ O problema foi inspirado em um exercício do livro *Polynomials*, de E. J. Barbeau, e foi apresentado a professores do ensino médio, alunos de um curso, de formação continuada, sobre números complexos”.

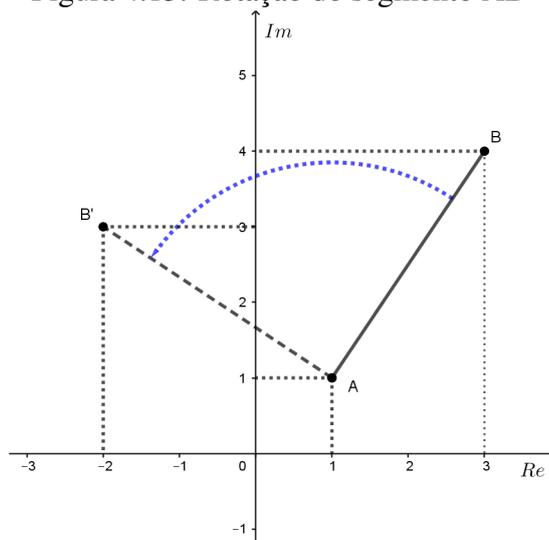
“Mesmo tendo sido apresentado em um curso sobre números complexos, e para “alunos” que tinham bastante experiência, eram professores de Matemática, o problema da ilha do tesouro causou uma comoção. Na verdade, todos admitiram que, se o curso não fosse sobre números complexos, a nenhum dos presentes teria ocorrido a idéia de resolver esse problema usando a álgebra dos números complexos. E, mesmo depois da sugestão para fazê-lo, quase ninguém conseguiu”. (RPM –47).

**Exemplo 4.6.2** Determine a posição no plano complexo do segmento  $AB$  onde  $A(1, 1)$  e  $B(3, 4)$  após sofrer uma rotação de  $90^\circ$  em torno do ponto  $A$ .

**Solução 4.6.2** Os pontos  $A(1, 1)$  e  $B(3, 4)$  representam os afixos dos números complexos  $u = 1 + i$  e  $v = 3 + 4i$ . Sendo a rotação em torno do ponto  $A$ , devemos rotacionar um número complexo  $z = v - u$ , isto é,  $z = 2 + 3i$  em torno de  $u$ . Então, pela Proposição (4.6.1) obtemos  $z \cdot i = -3 + 2i$ . Como essa rotação não ocorre em torno da origem  $(0, 0)$ , devemos somar  $u$  ao resultado obtido, ou seja,  $(-3 + 2i) + (1 + i) = -2 + 3i$ , conforme a figura (4.13).

Portanto, as novas extremidades do novo segmento  $AB'$  são  $B'(-2, 3)$  e o  $A(1, 1)$  que permaneceu fixo.

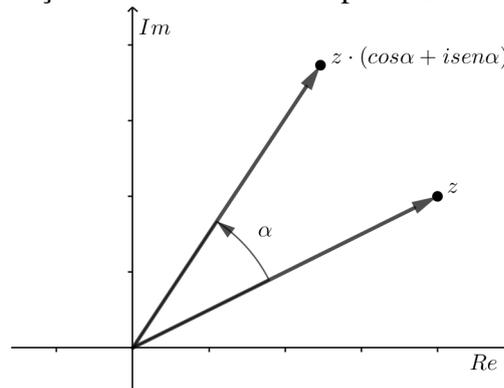
Figura 4.13: Rotação do segmento  $AB$



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

Agora se quisermos obter uma rotação de um ângulo  $\alpha$ , de um número complexo  $z = a + bi = |z| \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ , onde  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  entorno da origem do plano complexo, basta multiplicarmos  $z$  por  $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ , ou seja,  $z \cdot (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ , isto fará com que  $z$  sofra tal rotação. Além disso,  $\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$  tem módulo igual 1, e o produto  $z \cdot (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = z \cdot 1 = |z| \cdot (\cos(\theta + \alpha) + i \operatorname{sen}(\theta + \alpha))$  pela equação (4.8).

Figura 4.14: Rotação de um número complexo  $z$  em torno da origem.



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

**Exemplo 4.6.3** Dado  $z = 1 + \sqrt{3}i$ . Obtenha as coordenadas de  $z$  após sofrer uma rotação de  $60^\circ$  em torno da origem.

**Solução 4.6.3** Temos que  $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$  e  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$ . Então,

$$z = 2 \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}). \text{ Logo, } z \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = 2 \cdot 1 \cdot [\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})] = 2 \cdot (\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}i.$$

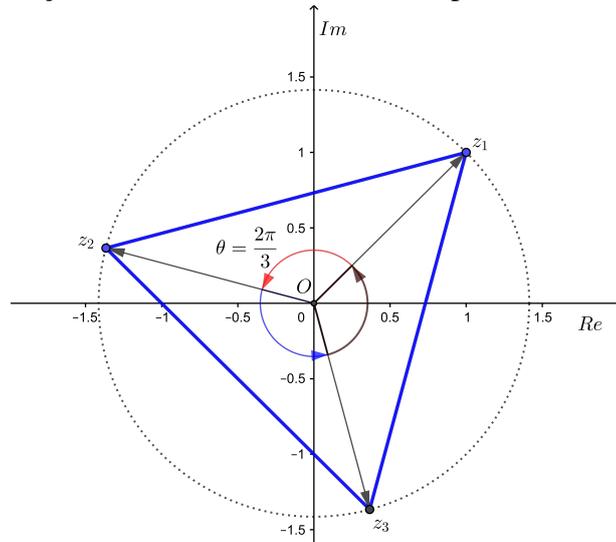
**Exemplo 4.6.4** As representações geométricas de  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$  no Plano de Argand-Gauss são vértices de um triângulo equilátero com centro na origem. Se  $z_1 = 1 + i$ , determinar  $z_2$  e  $z_3$ .

**Solução 4.6.4** Como num triângulo equilátero cada ângulo interno mede  $120^\circ$ , então para obtermos  $z_2$  devemos rotacionar  $\vec{Oz_1}$  de um ângulo  $\frac{2\pi}{3}$  no sentido anti-horário. Logo,  $z_2 = z_1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}\right)$ .

Agora, o valor  $z_3$ , é obtido pela rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  no sentido anti-horário de  $\vec{Oz_2}$ . logo,  $z_3 = z_2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}\right) \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

$$z_3 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right).$$

Figura 4.15: Rotação de  $120^\circ$  de um número complexo  $z$  em torno da origem.



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

## 4.7 Pontenciação de números complexos na forma polar

Já vimos que o produto de dois números complexos  $z_1$ ,  $z_2$  é dado pela equação (4.8). Dado um número complexo  $z = r(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ , calculemos algumas potências desse número.

$$z^0 = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \text{sen} 0) = 1 \cdot (\cos(0 \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(0 \cdot \theta)) .$$

$$z^1 = r(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) = r^1 (\cos 1 \cdot \theta + i \cdot \text{sen} 1 \cdot \theta) .$$

$$z^2 = z \cdot z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) \cdot r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) = r^2 \cdot (\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)) .$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = r^2 \cdot (\cos(2\theta) + i \cdot \text{sen}(2\theta)) \cdot r(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) = r^3 \cdot (\cos(3\theta) + i \cdot \text{sen}(3\theta)) .$$

Podemos perceber que cada resultado apresenta o módulo  $r$  elevado ao expoente de  $z$  e o argumento  $\theta$  multiplicado por esse mesmo expoente. Esse resultado pode ser generalizado através do teorema a seguir.

**Teorema 4.7.1 (Primeira Fórmula de De Moivre)** *Se  $n$  é um inteiro, então*

$$[r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)]^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)]^n . \quad (4.13)$$

**Prova 4.7.1** Seja  $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$ . Para  $n = 0$  ou  $n = 1$ , a fórmula é óbvia.

Já para  $n \geq 1$  segue da equação (4.9), tomando  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ , temos que

$$z^n = z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z = \underbrace{r \cdot r \cdot r \cdot \dots \cdot r}_n \cdot \left( \cos \left( \underbrace{\theta + \theta + \dots + \theta}_{n \text{ parcelas}} \right) + i \cdot \text{sen} \left( \underbrace{\theta + \theta + \dots + \theta}_{n \text{ parcelas}} \right) \right) .$$

Logo  $z^n = [r \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)]^n$ .

Vejamos agora para  $n < 0$ . Temos que  $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$ , sendo  $-n > 0$ . Então,

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{[r \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)]^{-n}} \stackrel{\text{por (4.13)}}{=} \frac{1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \operatorname{sen} 0)}{r^{-n} \cdot [\cos(-n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(-n\theta)]}$$

Pela divisão de números complexo na forma polar dada pela equação (4.10) obtemos:

$$z^n = \frac{1}{r^{-n}} \cdot [\cos(0 - (-n\theta)) + i \cdot \operatorname{sen}(0 - (-n\theta))].$$

Logo,  $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)]$ .

Portanto,  $[r \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n \cdot [\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)]^n$ . ■

**Exemplo 4.7.1** Calcule  $(1 - i\sqrt{3})^5$ .

**Solução 4.7.1** Precisamos calcular o módulo  $r$  de  $1 - i\sqrt{3}$ . Daí,  $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ .

O argumento  $\theta$  é tal que  $\tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{5\pi}{3}$  que é cômgruo com  $\frac{-\pi}{3}$  sendo dado  $-\pi < \theta \leq \pi$ . Então, pela equação (4.13) temos:

$$\begin{aligned} (1 - i\sqrt{3})^5 &= \left[2 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)\right]^5 = 2^5 \cdot \left(\cos\frac{25\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{25\pi}{3}\right) \\ &= 32 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3}\right)\right] \\ &= 32 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 4 \cdot 2\pi\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 4 \cdot 2\pi\right)\right] \\ &= 32 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 32 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Portanto,  $(1 - i\sqrt{3})^5 = 16 + 16\sqrt{3}i$ .

**Exemplo 4.7.2** Seja  $z = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , mostre que:

a)  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$ .

b)  $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)$ .

**Solução 4.7.2** (a)

$$z^n + \frac{1}{z^n} = z^n + z^{-n} = (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)^n + (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)^{-n} \quad \underbrace{=}_{\text{por (4.13)}}$$

$$\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta) + \cos(-n\theta) + i \cdot \text{sen}(-n\theta) = \cos(n\theta) + \cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta) - i \cdot \text{sen}(n\theta).$$

Logo,  $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\theta)$ .

**Solução 4.7.2** (b)  $z^n - \frac{1}{z^n} = z^n - z^{-n} = (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)^n - (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)^{-n} \quad \underbrace{=}_{\text{por (4.13)}}$

$$\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta) - \cos(-n\theta) - i \cdot \text{sen}(-n\theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta).$$

Logo,  $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \cdot \text{sen}(n\theta)$ .

**Exemplo 4.7.3** (ITA -2015) Se  $z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{10}$ , então o valor de  $2 \cdot \arcsen(\text{Re}(z)) + 5 \cdot \arctg(2 \cdot \text{Im}(z))$  é:

a)  $\left(\right) - \frac{2\pi}{3}$ .      b)  $\left(\right) - \frac{\pi}{3}$ .      c)  $\left(\right) \frac{2\pi}{3}$ .      d)  $\left(\right) \frac{4\pi}{3}$ .      e)  $\frac{5\pi}{3}$ .

**Solução 4.7.3** Vamos resolver o problema em três partes.

i) Vamos determinar o quociente desse valor. Pela equação (4.6) temos:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{(1 + \sqrt{3}i) \cdot (1 + \sqrt{3}i)}{(1 - \sqrt{3}i) \cdot (1 + \sqrt{3}i)}\right)^{10} = \left(\frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{4}\right)^{10} = \frac{1}{2^{20}} \cdot (1 + \sqrt{3}i)^{20}$$

ii) Aplicando a primeira fórmula de De Moivre em  $(1 + \sqrt{3}i)^{20}$ , obtemos

$$2^{20} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{3}\right)^{20} \Rightarrow \frac{1}{2^{20}} \cdot 2^{20} \cdot \left(\cos\frac{20\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\frac{20\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{20\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right), \text{ onde } 6\pi = 3 \cdot 2\pi. \text{ Isto significa que houve 3}$$

voltas no círculo, e que o argumento principal desse número complexo é  $\frac{2\pi}{3}$ . Daí,

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow z = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\text{Re}(z)} + i \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{Im}(z)}$$

iii) Agora Calculemos:

$$\arcsen(\operatorname{Re}(z)) = \arcsen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \text{ e}$$

$$\operatorname{arctg}(2 \cdot \operatorname{Im}(z)) = \operatorname{arctg}\left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

Logo,

$$2 \cdot \arcsen(\operatorname{Re}(z)) + 5 \cdot \operatorname{arctg}(2 \cdot \operatorname{Im}(z)) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 5 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-2\pi}{6} + \frac{5\pi}{3}.$$

$$2 \cdot \arcsen(\operatorname{Re}(z)) + 5 \cdot \operatorname{arctg}(2 \cdot \operatorname{Im}(z)) = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Portanto, a resposta é a alternativa **d**.

## 4.8 Radiciação de números complexos

As raízes de um número complexo podem ser obtidas através da primeira fórmula de Moivre, como seque no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.8.1** Calcular as raízes quartas de  $z = -8 + i8\sqrt{3}$ .

**Solução 4.8.1** Temos que:

$$|z| = |-8 + i8\sqrt{3}| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16 \text{ e argumento}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{-8}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Assim, sua forma polar é } z = 16 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

Seja  $w = \rho \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$  uma das raízes quartas de  $z$ . Pela primeira fórmula de De Moivre, temos

$$w^4 = z \Rightarrow \rho^4 \cdot (\cos(4\alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(4\alpha)) = 16 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$$

Segue que,  $\rho^4 = 16 \Rightarrow \rho = 2$  e  $4\alpha = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Daí, obtemos

$$\rho = 2 \text{ e } \alpha = \frac{\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Assim, } w = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ora, para

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$w_0 = \sqrt{3} + i.$$

$$\text{Para } k = 1 \Rightarrow w_1 = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$w_1 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Para

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] = 2 \cdot \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \right) \Rightarrow$$

$$w_2 = -\sqrt{3} - i.$$

Para

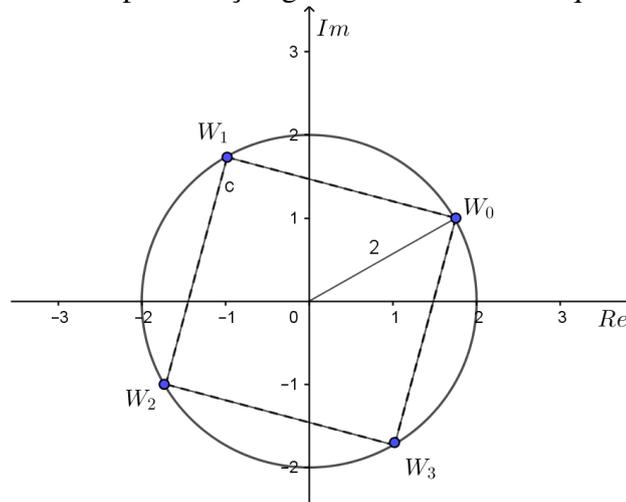
$$k = 3 \Rightarrow w_3 = 2 \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{6} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] = 2 \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right) \Rightarrow$$

$$w_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Portanto, as raízes quartas de  $z = -8 + i8\sqrt{3}$  são:  $\sqrt{3} + i$ ;  $-1 + i\sqrt{3}$ ;  $-\sqrt{3} - i$ ;  $1 - i\sqrt{3}$ .

Se representarmos essas raízes no Plano de Argand-Gauss, obtemos um quadrado inscrito num círculo raio 2 cujos vértices são os afixos das raízes, ilustrado na figura (4.16).

Figura 4.16: Representação geométrica das raízes quartas de  $z$



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

Vejamos agora como calcular raízes de números complexos.

**Definição 4.8.1** Um número complexo  $w$  é raiz  $n$ -ésima de um número complexo  $z$ , denota-se  $\sqrt[n]{z}$ , se, e somente se  $w^n = z$ , com  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 2$ .

Por exemplo: vamos verificar as raízes cúbicas da unidade.

i)  $\sqrt[3]{1} = 1$ , pois  $1^3 = 1$ .

ii)  $\sqrt[3]{1} = \frac{-1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ , pois  $\left( \frac{-1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{-1}{8} + \frac{3i\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8} - \frac{3i\sqrt{3}}{8} = 1$ .

iii)  $\sqrt[3]{1} = \frac{-1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ , pois  $\left( \frac{-1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 = \frac{-1}{8} - \frac{3i\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8} + \frac{3i\sqrt{3}}{8} = 1$ .

**Teorema 4.8.1** Dados um número complexo  $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$  e o número natural  $n (n \geq 2)$  existem raízes  $n$ -ésimas de  $z$  que são da forma

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.14)$$

**Prova 4.8.1** Seja o número complexo  $w = \rho \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$  uma das raízes do número complexo  $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$  não nulo. Então, aplicando definição e a primeira fórmula de De Moivre, temos

$$w^n = (\rho \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha))^n = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta).$$

Aplicando a primeira fórmula de De Moivre obtemos:

$$\rho^n \cdot (\cos(n\alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(n\alpha)) = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta). \text{ Seque que}$$

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}.$$

$$\cos(n\alpha) = \cos\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ e } \operatorname{sen}(n\alpha) = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Perceba que, se  $0 \leq k \leq n-1$ , as raízes não se repetem. Agora, se  $k = m \geq n$  então

$$w_m = w_k, \text{ com } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Portanto,

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A equação (4.14) é conhecida como **segunda fórmula de De Moivre** por alguns escritores de livros do Ensino Médio. A partir desta equação podemos determinar quantas são as raízes  $n$ -ésimas de número complexo  $z$ .

Vamos calcular os valores de  $w_k$  para cada valor atribuído a variável  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right) \right].$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) \right].$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) \right].$$

$$k = 3 \Rightarrow w_3 = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{6\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{6\pi}{n}\right) \right].$$

$\vdots$

$$k = n-1 \Rightarrow w_{n-1} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right) \right].$$

Podemos perceber que os  $n$  valores de  $w$  são todos diferentes entre si no intervalo  $[0, 2\pi)$ . Perceba também que atribuindo valores crescente a  $k$  os argumentos aumentam em

progressão aritmética de razão  $\frac{2\pi}{n}$ , o que nos leva a concluir que os números complexos  $w_k$  estão igualmente distribuídos sobre uma circunferência centrada na origem e de raio  $\sqrt[n]{r}$ . Sendo essas raízes no plano complexo vértices de polígono regular de  $n$  lados inscritos nessa circunferência. Ver o exemplo (4.8.10).

Agora calculando quando  $k = n$  obtemos

$$w_n = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{n \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{n \cdot 2\pi}{n}\right) \right] = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) \right]$$

$$w_n = \sqrt[n]{r} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right) \right] = w_0$$

E se continuarmos a atribuir valores a  $k$  consecutivamente teríamos:

$$k_{n+1} = k_1, \quad k_{n+2} = k_2, \quad k_{n+3} = k_3, \dots$$

De modo geral, se  $k_{n+r}$  com  $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Então, pelo algoritmo da divisão, dividindo o índice  $n+r$  de  $k$  por  $n$ , obtemos  $k_{n+r} = k_r$ .

Logo, todo número complexo  $z$  não nulo admite  $n$  raízes distintas em que todas tem o mesmo módulo  $\sqrt[n]{r}$  e seus argumentos formam uma progressão aritmética onde o primeiro termo é  $\frac{\theta}{n}$  e razão  $\frac{2\pi}{n}$ .

**Exemplo 4.8.2** Calcule  $\sqrt[3]{i}$ .

**Solução 4.8.2** Seja  $w = \rho \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$  uma das raízes cúbicas do número complexo  $z = i$ , que podemos escrever na forma  $z = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ . Pela fórmula de De Moivre (4.13), temos que

$$w^3 = z \Rightarrow \rho^3 \cdot (\cos 3\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 3\alpha) = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}). \text{ Daí, temos}$$

$$\rho^3 = 1 \Rightarrow \rho = 1 \quad \text{e} \quad 3\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Assim, } w = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right].$$

Logo, para calcular as raízes cúbicas de  $i$  devemos atribuir valores a  $k$ .

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

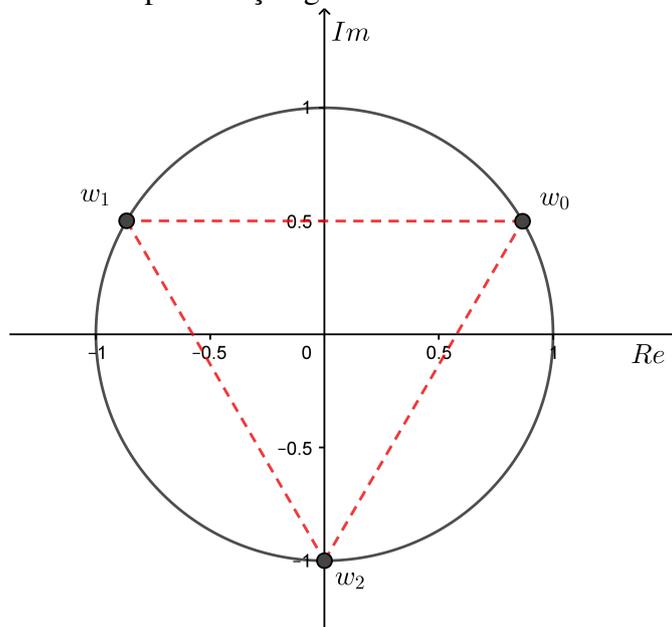
$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow w_2 = 0 - i.$$

Portanto,  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  e  $-i$  são as três raízes cúbicas de  $i$ .

Geometricamente essas raízes  $w_0, w_1, w_2$  no plano Argand-Gauss pertencem a uma circunferência de raio igual 1 e centrada na origem  $(0,0)$  e são vértices de um triângulo equilátero conforme a figura (4.17).

Figura 4.17: Representação geométrica das raízes cúbicas de  $i$



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

**Exemplo 4.8.3** (UFCEG - 2010) José, fã da Matemática, bolou a seguinte estratégia para não esquecer sua senha bancária. Escolheu o número complexo  $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ , e criou uma senha usando o menor inteiro positivo  $n$ , que satisfaz a igualdade  $z^n = -1$ . Esse número  $n$  vale:

- a) 4.                      b) 5.                      c) 3.                      d) 2.                      e) 6.

**Solução 4.8.3** Sendo  $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$  temos:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1;$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}/1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}/1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Logo,  $z = 1 \cdot \left( \cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4} \right)$  e que,  $-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i \cdot \sin\pi)$

Pela fórmula de De Moivre, obtemos:

$$z^n = -1 \Rightarrow 1^n \cdot \left( \cos\frac{3n\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3n\pi}{4} \right) = 1 \cdot (\cos\pi + i \cdot \sin\pi) \Rightarrow$$

$$\frac{3n\pi}{4} = \pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Daí,}$$

$3n\pi = 4\pi + 8k\pi$  e dividindo ambos os lados por  $\pi$  obtemos

$3n = 4 + 8k \Rightarrow n = \frac{4 + 8k}{3}$ . Como  $n$  é o menor número inteiro positivo que deve satisfazer as condições do problema, basta fazermos  $k = 1$  para obtermos o resultado desejado, ou seja,

$$n = \frac{4 + 8 \cdot 1}{3} = 4 \Rightarrow n = 4.$$

Portanto, a solução é a letra **a**.

**Exemplo 4.8.4** (Fuvest-2013) Considere o polinômio  $p(x) = x^4 + 1$ .

- Ache todas as raízes complexas de  $p(x)$ .
- Escreva  $p(x)$  como o produto de dois polinômios do segundo grau, com coeficientes reais.

**Solução 4.8.4** a) Para determinar as raízes do polinômio  $p(x) = x^4 + 1$ , basta fazer  $p(x) = 0$ , ou seja,  $x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{-1}$ . Então, pela fórmula de De Moivre temos:

$$x^4 = -1 \Rightarrow \rho^4 \cdot (\cos(4\alpha) + i \cdot \sin(4\alpha)) = 1 \cdot (\cos\pi + i \cdot \sin\pi) \Rightarrow$$

$$\rho^4 = 1 \Rightarrow \rho = 1 \text{ e } 4\alpha = \pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo,  $x = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right]$ . Seque que,

$$k = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + 0 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right] = \cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como já sabemos que o argumento  $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$  forma uma progressão aritmética, onde o primeiro termo é  $\frac{\pi}{4}$  e razão igual a  $\frac{\pi}{2}$  então,

$$k = 1 \Rightarrow x_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$k = 2 \Rightarrow x_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$k = 3 \Rightarrow x_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, as raízes de  $p(x)$  são  $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ .

b) Temos que  $p(x) = x^4 + 1$  e para escrevê-lo com produto de dois polinômios do segundo grau, vamos usar o método de completar quadrados, geralmente apresentado no 3º ano do Ensino Médio no estudo das cônicas. Para isso, devemos somar e subtrair o termo  $2x^2$  ao polinômio  $x^4 + 1$ , ou seja,

$$x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

Portanto,  $p(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ .

Perceba que poderíamos usar o produto  $(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1) = 0$  para encontrar as raízes do polinômio  $p(x)$  através da "fórmula de Bhaskara".

**Exemplo 4.8.5** (UFV-MG) A área do polígono cujos vértices são as raízes complexas da equação  $(z - 2)^4 = -4$  é igual a:

- a) 9.                      b) 8.                      c) 2.                      d) 6.                      e) 4.

**Solução 4.8.5** Seja  $z - 2 = w$ , então  $w^4 = -4 = 4(\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi)$ . Pela fórmula de De Moivre (4.13), temos:

$w^4 = -4 \Rightarrow \rho^4 \cdot (\cos 4\theta + i \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{sen} 4\theta)) = 4 \cdot (\cos\pi + i \cdot \operatorname{sen}\pi)$ . Daí temos que:

$$\rho = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \text{ e } 4\theta = \pi + k2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Logo,}$$

$$w = \sqrt{2} \cdot \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Do exemplo (4.8.4) temos:  $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ .

Multiplicando cada um desses valores por  $\sqrt{2}$ , obteremos as raízes  $w_k$ .

$$w_1 = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i.$$

$$w_2 = \sqrt{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i.$$

$$w_3 = \sqrt{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - i.$$

$$w_4 = \sqrt{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i.$$

Assim, da equação  $z - 2 = w \Rightarrow z = 2 + w$ , e substituindo os valores de  $w$  obtemos:

Para  $w_1 = 1 + i \Rightarrow z_1 = 3 + i$ .

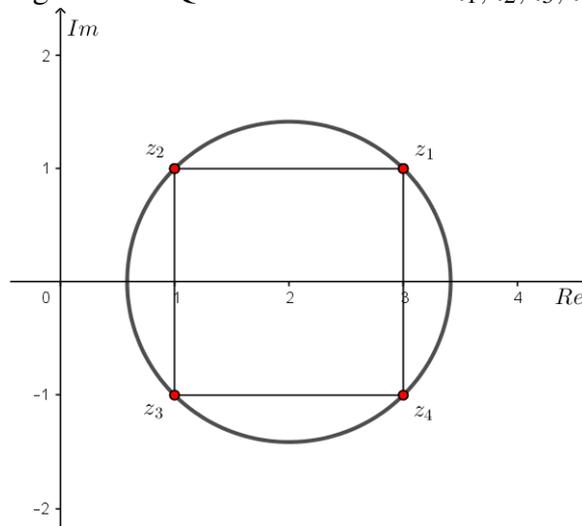
Para  $w_2 = -1 + i \Rightarrow z_2 = 1 + i$ .

Para  $w_3 = -1 - i \Rightarrow z_3 = 1 - i$ .

Para  $w_4 = 1 - i \Rightarrow z_4 = 3 - i$ .

Perceba que os números complexos  $z$  são vértices de um quadrado de lado 2, pois  $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_4| = |z_4 - z_1| = 2$ , cuja área é 4, ilustrado na figura (4.18).

Figura 4.18: Quadrado de vértices  $z_1, z_2, z_3, z_4$



Fonte: Feita pelo autor no Geogebra.

Logo, a solução é a letra **e**.

### 4.8.1 Raízes da Unidade

Da Equação (4.14) quando  $z = 1$  temos:

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1(\cos 0 + i \cdot \sen 0)} = \sqrt[n]{1} \cdot \left[ \cos \left( \frac{0 + k \cdot 2\pi}{n} \right) + i \cdot \sen \left( \frac{0 + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right].$$

Logo, as raízes  $n$ -ésimas da unidade, as quais são indicadas por  $w_k$ , são dadas por:

$$w_k = \cos \left( k \cdot \frac{2\pi}{n} \right) + i \cdot \sen \left( k \cdot \frac{2\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.15)$$

Vamos mostrar que as raízes  $n$ -ésimas da unidade são dadas por:  $1, w, w^2, w^3, \dots, w^{n-1}$ .

De fato, escrevendo  $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  e calculando os  $w_k$  pela equação (4.15) e utilizando a primeira fórmula de De Moivre, obtemos

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \cos\left(0 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(0 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \cos(0) + i \cdot \operatorname{sen}(0) = 1.$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(1 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = w.$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 = w^2.$$

$$k = 3 \Rightarrow w_3 = \cos\left(3 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^3 = w^3.$$

$\vdots$

$$k = n - 1 \Rightarrow w_{n-1} = \cos\left[(n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right] + i \cdot \operatorname{sen}\left[(n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right] = \\ = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^{n-1} = w^{n-1}.$$

Portanto,  $1, w, w^2, w^3, \dots, w^{n-1}$  são as  $n$ -ésimas raízes da unidade.

**Exemplo 4.8.6** Calcular as raízes da unidade para  $n = 8$ .

**Solução 4.8.6** Temos que  $w = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Assim, calculemos  $w^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$ .

$$w^3 = w^2 \cdot w = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$w^4 = w^2 \cdot w^2 = i \cdot i = -1.$$

$$w^5 = w^4 \cdot w = -1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$w^6 = w^4 \cdot w^2 = -1 \cdot i = -i.$$

$$w^7 = w^6 \cdot w = -i \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$w^8 = w^4 \cdot w^4 = -1 \cdot (-1) = 1.$$

Perceba que podemos escrever a equação (4.14) como sendo:

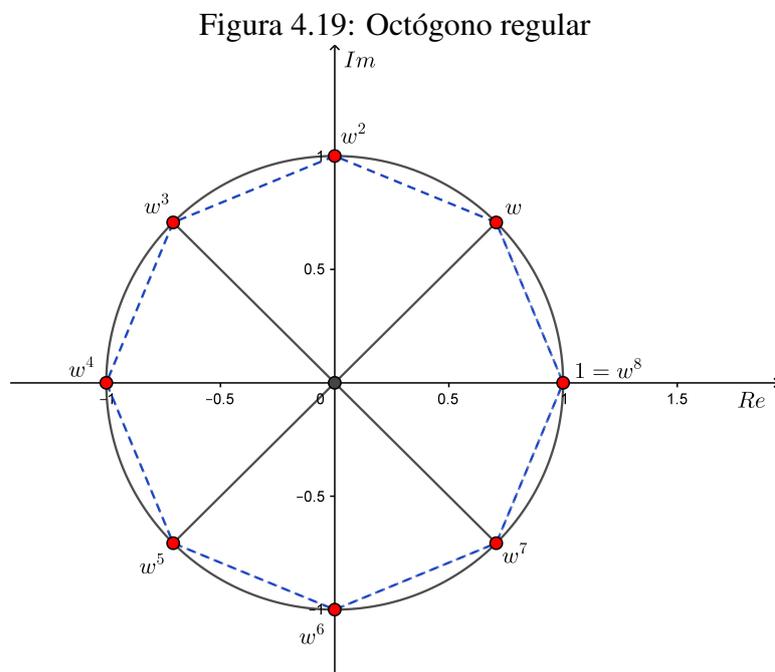
$$w = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right) \cdot \left[\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right] \stackrel{\text{por (4.13)}}{=} \dots$$

$$= \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot \underbrace{\left[ \cos \left( \frac{2\pi}{n} \right) + i \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right]}_w^k = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot w^k.$$

Logo,

$$w = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot w^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (4.16)$$

A representação geométrica das raízes da unidade para  $n = 8$  é um octógono regular cujos vértices pertencem a uma circunferência de raio unitário centrada na origem, figura (4.19).



Fonte: Feito pelo autor usando o Geogebra.

Pela equação (4.16) podemos calcular as raízes  $n$ -ésimas de um número complexo  $z \neq 0$  efetuando o produto de uma das raízes desse número  $w_0 = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right)$  pelas raízes  $n$ -ésimas da unidade,  $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$ .

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left( \cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{n} \right) \cdot w^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.17)$$

**Exemplo 4.8.7** Calcular  $(-1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$ .

**Solução 4.8.7** Vamos primeiramente calcular uma raiz particular de  $(-1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$ .

Seja  $z = \rho \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$  uma raiz quártica de  $-1 + i\sqrt{3}$ . Segue que

$$|-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2;$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ daí temos } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

Então, pela fórmula de De Moivre,

$$z^4 = \rho^4 \cdot (\cos 4\alpha + i \cdot \operatorname{sen} 4\alpha) = 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \Rightarrow$$

$$\rho^4 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt[4]{2}$$

e

$$4\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\text{Assim, } z = \sqrt[4]{2} \cdot \left( \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \right) = \sqrt[4]{2} \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{i}{\sqrt[4]{8}}.$$

As raízes quárticas da unidade são:  $1, w, w^2, w^3$ , onde  $w = \cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$ , ou seja,  $1, w = i, w^2 = -1, w^3 = -i$ .

Agora, as raízes quárticas de  $-1 + i\sqrt{3}$  são dadas por:  $z \cdot 1, z \cdot w, z \cdot w^2$ , e  $z \cdot w^3$ . Logo,

$$z_0 = z \cdot 1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{i}{\sqrt[4]{8}} \right) \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{i}{\sqrt[4]{8}}.$$

$$z_1 = z \cdot w = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{i}{\sqrt[4]{8}} \right) \cdot i = -\frac{1}{\sqrt[4]{8}} + i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}.$$

$$z_2 = z \cdot w^2 = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{i}{\sqrt[4]{8}} \right) \cdot (-1) = -\frac{1}{\sqrt[4]{8}} - i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}.$$

$$z_3 = z \cdot w^3 = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}} + \frac{i}{\sqrt[4]{8}} \right) \cdot (-i) = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} - i \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{8}}.$$

**Exemplo 4.8.8** Prove que  $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$ , onde  $w$  é qualquer raiz  $n$ -ésima da unidade, diferente de 1.

**Solução 4.8.8** Pela fatoração polinomial podemos escrever  $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w}$ , pois pela hipótese dada temos que,  $w \neq 1 \Rightarrow 1 - w \neq 0$  e também que  $w^n = 1$ <sup>3</sup>.

Logo,

$$1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = \frac{1 - 1}{1 - w} = \frac{0}{1 - w} = 0.$$

---

<sup>3</sup>  $w^n = \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(n \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = \cos(2\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(2\pi) = 1.$

**Exemplo 4.8.9** Prove que  $1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1} = \frac{n}{w-1}$ , onde  $w$  é qualquer raiz  $n$ -ésima da unidade, diferente de 1.

**Solução 4.8.9** Seja  $S = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \dots + nw^{n-1}$ . Vamos escrever essa soma da seguinte forma:

$$S = 1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} + w + 2w^2 + 3w^3 + \dots + (n-1)w^{n-1} =$$

$$S = \underbrace{1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1}}_0 + w \cdot [1 + 2w + 3w^2 + \dots + (n-1)w^{n-2}] =$$

$$S = w \cdot [\underbrace{1 + 2w + 3w^2 + \dots + (n-1)w^{n-2} + nw^{n-1}}_S - nw^{n-1}] =$$

$$S = w \cdot (S - nw^{n-1}) = wS - nw^n \Rightarrow wS - S = nw^n \Rightarrow S(w-1) = nw^n \Rightarrow$$

$$S = \frac{nw^n}{w-1} = \frac{n \cdot 1}{w-1} = \frac{n}{w-1}$$

Portanto,  $1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1} = \frac{n}{w-1}$ .

Vamos destacar três propriedades das raízes  $n$ -ésimas da unidade[11].

**Propriedade 4.8.1.1** O produto de duas raízes  $n$ -ésimas da unidade é também uma raiz  $n$ -ésima da unidade.

**Prova 4.8.1.1** Se  $z^n = 1$  e  $w^n = 1$ , então  $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n = 1 \cdot 1 = 1$ .

**Propriedade 4.8.1.2** O inverso de uma raiz  $n$ -ésima da unidade é também uma raiz  $n$ -ésima da unidade.

**Prova 4.8.1.2** Se  $z^n = 1$ , então  $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1^n}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$ .

**Propriedade 4.8.1.3** O quociente entre duas raízes  $n$ -ésimas da unidade é também uma raiz  $n$ -ésima da unidade.

**Prova 4.8.1.3** Se  $z^n = 1$  e  $w^n = 1$ , então  $\left(\frac{w}{z}\right)^n = \frac{w^n}{z^n} = \frac{1}{1} = 1$ .

**Exemplo 4.8.10** Mostre que os  $n$  pontos do  $\mathbb{R}^2$  correspondentes às raízes  $n$ -ésimas da unidade

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \geq 3,$$

são vértices de um polígono regular de  $n$  lados, inscrito numa circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Solução 4.8.10** Seja  $P_k = \left( \cos \frac{2k\pi}{n}, \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right)$  o ponto do  $\mathbb{R}^2$  associado a

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Se  $O = (0, 0)$ , o segmento  $\overline{OP_k} = |z_k| = 1$ . Logo,  $P_k$  pertence à circunferência de centro em  $O$  e raio 1, isto é, a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$ .

Para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-2$  o ângulo central  $P_k \widehat{OP}_{k+1}$  é dado por:

$$P_k \widehat{OP}_{k+1} = \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) = \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

e

$$P_{n-1} \widehat{OP}_0 = 2\pi - \frac{2(n-1)\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

Como os arcos  $\widehat{P_0P_1}, \widehat{P_1P_2}, \dots, \widehat{P_{n-2}P_{n-1}}, \widehat{P_{n-1}P_0}$  são iguais. Então o polígono de vértices  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  inscrito na circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$  é regular.

**Exemplo 4.8.11** Representar  $\sqrt[6]{1}$  geometricamente.

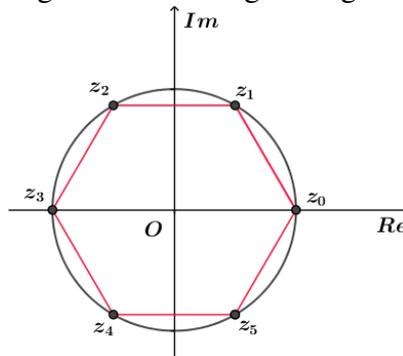
**Solução 4.8.11** As raízes da unidade são dadas  $z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Seque que,

$$z_k = \cos \frac{k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Assim, as raízes sextas da unidade são:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -1, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_5 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Figura 4.20: Hexágono regular



Fonte: Feito pelo autor usando o Geogebra.

## 4.9 Exercícios propostos

**Questão 4.9.1** Determinar  $a$  real para que um dos argumentos de  $a + 3i$  seja igual  $\frac{\pi}{6}$ .

**Questão 4.9.2** Se  $z$  é um número complexo,  $|1 - z|^2 + |1 + z|^2$  é:

- a)  $1 + |z|^2$
- b)  $1 + 2|z|^2$
- c)  $2 + |z|^2$
- d)  $2 + 2|z|^2$
- e)  $2 + 2z^2$

**Questão 4.9.3** Dado  $\theta \in \mathbb{R}$  determine uma forma polar dos seguintes números complexos.

- a)  $z = \cos\theta - i \cdot \sin\theta$ .
- b)  $w = \sin\theta - i \cdot \cos\theta$ .

**Questão 4.9.4** (FUVEST) Sendo  $w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ , qual o valor da soma  $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{61}$ ?

- a)  $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$
- b)  $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$
- c)  $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$
- d) 0
- e) 1

**Questão 4.9.5** (UFPB-2008) Um percurso feito por um atleta, em uma região plana, pode ser representado no plano cartesiano por um segmento de reta  $\overline{AB}$ . Sabendo-se que os pontos  $A$  e  $B$  são as representações geométricas dos números complexos  $z_1 = \frac{2 + 4i^{35}}{3 - i}$  e  $z_2 = 4 + 3i$ , é correto afirmar que esse percurso, em unidades de comprimento, mede:

- a) 6
- b) 4,5
- c) 5,5
- d) 5
- e) 6,5

**Questão 4.9.6** (UFCG - 2010) Um quadrilátero de área  $35\text{cm}^2$  tem como vértices as raízes complexas de um polinômio de grau quatro e de coeficientes reais. Se duas das raízes desse polinômio são os números  $2 + i$  e  $-5 + ni$ , com  $n$  positivo, o valor de  $n$  é:

- a) 2
- b) 3
- c) 7
- d) 5
- e) 6

Observação :  $i = \sqrt{-1}$

**Questão 4.9.7** (IME 2018/2019) Seja  $z$  um número complexo tal que  $\frac{2z}{\bar{z}i}$  possui argumento igual a  $\frac{3\pi}{4}$  e  $\log_3(2z + 2\bar{z} + 1) = 2$ . Determine o número complexo  $z$ .

**Questão 4.9.8** (FUVEST 2012). O polinômio  $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ , em que  $a, b, c, d$  são números reais, tem o número complexo  $1 + i$  como raiz, bem como duas raízes simétricas.

- a) Determine  $a, b, c$  e as raízes de  $p(x)$ .
- b) Subtraia 1 de cada uma das raízes de  $p(x)$  e determine todos os polinômios com coeficientes reais, de menor grau, que possuam esses novos valores como raízes.

**Questão 4.9.9** (ITA - 2014)

- a) Determine o valor máximo de  $|z + i|$ , sabendo que  $|z - 2| = 1, z \in \mathbb{C}$ .
- b) Se  $z_0 \in \mathbb{C}$  satisfaz (a), determine  $z_0$ .

**Questão 4.9.10** Se  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ , determine o valor de  $1 + z + z^2 + \dots + z^{50}$ .

## 4.10 A fórmula de Euler

A fórmula de Euler nos permite escrever a relação entre a expressão  $\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta$  em termos da exponencial  $e^{i\theta}$  ou  $\exp(i\theta)$  complexa. Euler demonstrou que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta. \quad (4.18)$$

Segundo [7] a partir da fórmula de De Moivre que diz:

$$(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta). \quad (4.19)$$

Tomando  $(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$  por  $f(\theta)$ , a fórmula (4.18) pode ser reescrita como  $[f(\theta)]^n = f(n\theta)$ , que representa uma propriedade das funções exponenciais (caracterização da função

exponencial) [12]. E isso pode ter levado Euler a conjecturar, embora não o pareça à primeira vista, que deveria ter algum tipo de função exponencial complexa por trás desse resultado.

Nos Cursos de Cálculo são vistos como obter a constante de Euler  $e$  e a expansão da função exponencial  $e^x$ , da função seno e da função cosseno em série de Taylor<sup>4</sup>, e nesse trabalho vamos apenas usar os resultados para verificar a veracidade da fórmula de Euler.

Vamos expressar as funções relacionadas na fórmula de Euler utilizando as séries de Taylor, que são verdadeiras para todos os valores de  $x \in \mathbb{R}$ . Então, temos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.20)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (4.21)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (4.22)$$

O cálculo do valor da constante de Euler  $e$ , é obtido através na equação (4.20) quando tomamos  $x = 1$ , sendo o valor  $e = 2,71828\dots$ , ou seja,  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Vamos substituir a variável  $x$  real nas equações (4.21) e (4.22) pela variável  $\theta$  real, apenas para fins didáticos na obtenção da fórmula de Euler. Seque que

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (4.23)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (4.24)$$

Agora, vamos verificar quanto vale a expressão  $e^{i\theta}$  na expansão em série de potências dada pela equação (4.20). Então,

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (4.25)$$

Devemos agora agrupar os termos da equação (4.25) de maneira a obtermos as expressões de senos e cossenos. Seque que,

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$e^{i\theta} = \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots}_{\cos\theta} + i \cdot \left( \underbrace{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots}_{\sin\theta} \right)$$

<sup>4</sup>Brook Taylor (1685-1731) Matemático inglês, desenvolveu a expansão das funções em série de potências publicado em 1715 Sua expressão  $f(x+a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}\frac{x^n}{n!}$ . [2]

Portanto,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \quad (4.26)$$

Além disso,

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta. \quad (4.27)$$

Por outro lado, para calcularmos a exponencial contendo um expoente qualquer complexo  $z = x + iy$ , como queremos que as propriedades usuais das potências com números reais continuem válidas para expoentes complexos, ou seja,  $e^{n+m} = e^n \cdot e^m$ . Logo, podemos definir

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (4.28)$$

Daí, podemos ainda determinar a *parte real*,  $\operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y$  e a *parte imaginária*,  $\operatorname{Im}(e^z) = e^x \operatorname{sen} y$ .

**Exemplo 4.10.1** Mostre que:

$$\text{I) } \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

$$\text{II) } \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

**Solução 4.10.1** (I) Somando membro a membro as equações (4.26) e (4.27) obtemos,

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta + \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta = 2 \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

(II) Subtraindo membro a membro a equação (4.26) pela equação (4.27) obtemos,

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta - (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) = 2i \cdot \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

**Exemplo 4.10.2** Mostre que o produto de potências exponenciais  $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ .

**Solução 4.10.2** Sendo  $e^{i\theta_1} = \cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1$  e  $e^{i\theta_2} = \cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2$  então,

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + i (\cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \quad (4.29)$$

**Exemplo 4.10.3** Mostre que  $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ .

**Solução 4.10.3**  $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{e^{i\theta_1} \cdot e^{-i\theta_2}}{e^{i\theta_2} \cdot e^{-i\theta_2}} = \frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i(\theta_2-\theta_2)}} = \frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^{i \cdot 0}} = \frac{e^{i(\theta_1-\theta_2)}}{e^0} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$

Logo,

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \quad (4.30)$$

Através da equação (4.26), podemos reescrever um número complexo  $z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$  na forma exponencial complexa, ou forma polar. Segue que,  $z = r \cdot \underbrace{(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)}_{e^{i\theta}}$

$$z = r e^{i\theta}. \quad (\text{forma polar}) \quad (4.31)$$

Usando a forma polar podemos calcular o produto, o quociente entre dois números complexos de modo simples, visto que a exponencial é simples de ser manuseada. vejamos:

Dados dois números complexos  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ . Temos

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} \underset{\text{por (4.29)}}{=} r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Logo,

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \quad (4.32)$$

Podemos perceber na equação (4.32) que os módulos se multiplicam e os argumentos se somam.

De modo semelhante a divisão também torna-se simples.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \underset{\text{por (4.30)}}{=} \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \quad (4.33)$$

O inverso multiplicativo do número complexo  $z = r e^{i\theta}$  não nulo.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 e^{i \cdot 0}}{r e^{i\theta}} \underset{\text{por (4.33)}}{=} \frac{1}{r} e^{-i\theta}. \text{ Logo,}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}. \quad (4.34)$$

Em relação ao conjugado de  $z = r e^{i\theta}$  temos que  $\bar{z} = r e^{-i\theta}$ .

**Exemplo 4.10.4** Mostre que  $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ .

**Solução 4.10.4** Na fórmula de Euler,  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \text{sen}\theta$ , calculando o valor quando temos  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , obtemos,

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i \Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

$$\text{Agora, } i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{(-1)\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Logo, } i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Esse resultado é bastante curioso, pois a potência da unidade imaginária, cujo expoente é unidade imaginária resulta num número real.

Por outro lado, a potência  $i^i$  pode assumir infinitos valores<sup>5</sup>, se tomarmos

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \text{Resultado obtido por Euler.}$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi)} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)}_0 + i \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi\right)}_1 = i.$$

Logo,

$$i^i = \left(e^{i(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi)}\right)^i = e^{i^2(\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi)} = e^{(-\frac{\pi}{2} \pm 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Exemplo 4.10.5** Calcule o valor na fórmula de Euler quando  $\theta = \pi$ .

$$\text{Solução 4.10.5 } \theta = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1 + i \cdot 0 = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0.$$

A expressão  $e^\pi + 1 = 0$  é considerada a mais famosa de todas na matemática, pois reúne numa só fórmula os cinco números mais importantes, ou seja, 0, 1,  $e$ ,  $\pi$  e  $i$ .

**Exemplo 4.10.6** Mostre que  $e^{3+7\pi i} = -e^3$ .

$$\begin{aligned} \text{Solução 4.10.6} \quad & \text{Pela equação (4.28) temos } e^{3+7\pi i} = e^3 \cdot e^{7\pi i} = \\ & = e^3 \cdot (\cos 7\pi + i \operatorname{sen} 7\pi) = e^3 \cdot [\cos(\pi + 3 \cdot (2\pi)) + i \operatorname{sen}(\pi + 3 \cdot (2\pi))] = \\ & = e^3 \cdot (-1 + 0) = -e^3. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.10.7** Se  $z = 16e^{i\pi}$  e  $w = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ , calcular  $\frac{z}{w}$ .

**Solução 4.10.7** Como os números complexos  $z$  e  $w$  já estão na forma polar basta aplicarmos a equação (4.33) para obtermos o resultado. Seque que

$$\frac{z}{w} = \frac{16e^{i\pi}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = 8 e^{i(\pi - \frac{\pi}{2})} = 8 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i.$$

**Exemplo 4.10.8** Demonstre que  $e^{\ln z} = r e^{i\theta}$ .

**Solução 4.10.8** Sabemos que o argumento  $\theta = \theta + 2k\pi$  para  $k = 1, 2, 3, \dots$ , então,

$$\begin{aligned} e^{\ln z} &= e^{\ln(re^{i\theta})} = e^{\ln r + \ln(e^{i\theta})} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r + i(\theta + 2k\pi)} = \\ &= e^{\ln r} \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i(2k\pi)} = r e^{i\theta} \cdot [\cos(2k\pi) + i \operatorname{sen}(2k\pi)] = r e^{i\theta} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } e^{\ln z} = r e^{i\theta}.$$

<sup>5</sup>A exponencial de  $z^w$  sendo  $z, w \in \mathbb{C}$  são funções multiformes ou multivalentes, isto é, para um valor dado da variável  $z$ , associam dois ou mais números  $w = f(z)$  distintos. Estas funções podem ser consideradas como formadas por ramos, cada um dos quais é uma função unívoca do número  $z$ . ÁVILA (2008, p.71).

# Capítulo 5

## Equações diferenciais ordinárias de segunda ordem

### 5.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Neste capítulo faremos um estudo das equações diferenciais lineares de segunda ordem no caso em que suas equações características apresentarem raízes complexas. Além disso, faremos um estudo de casos nos fenômenos físicos envolvendo vibrações mecânicas e elétricos via equações diferenciais.

Para entender esse capítulo sobre Equações Diferenciais Ordinárias, se faz necessário ter estudado a disciplina de Cálculo I, geralmente cursada nos primeiros períodos nos Cursos de Engenharias e das Ciências Exatas da natureza. Pois, envolve o conceito de limites e derivadas de uma função na resolução dos problemas. Neste ponto, aprofundamos no entendimento dos fenômenos que envolvem movimentos oscilatórios, suas equações e suas soluções. Haja vista que movimentos oscilatórios, também são trabalhados durante o Ensino Médio, por exemplo: um sistema massa-mola acoplados.

As equações diferenciais começaram com o estudo do Cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante o século XVII. Graças a Newton com seu desenvolvimento do Cálculo e elucidação dos princípios básicos da mecânica, forneceu a base para aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler.

Uma única equação diferencial pode servir de modelo matemático para muitos fenômenos diferentes. A equação diferencial linear de segunda ordem  $ay'' + by' + cy = f(t)$  aparece na análise de problemas na Física, Engenharia, Química e Biologia [17].

**Definição 5.1.1** Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação do tipo

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (5.1)$$

em que temos uma função incógnita  $y = y(t)$  e suas derivadas. Sendo que  $t$  é a variável

independente e  $y = y(t)$  é variável dependente, e a notação  $y^{(n)}$  indica a derivada de ordem  $n$  da função  $y = y(t)$ .

A **ordem** de uma Equação Diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.

**Exemplo 5.1.1** A Equação Diferencial  $y''' - 5ty'' + 4y' = t^2$ , é de **terceira ordem** para  $y = y(t)$ , pois  $y'''$  corresponde a maior derivada da função, ou seja, a sua terceira derivada.

Vamos supor que é sempre possível resolver uma Equação Diferencial Ordinária dada em função da maior derivada, isto é,

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (5.2)$$

**Definição 5.1.2** Uma solução da Equação Diferencial Ordinário (5.2) no intervalo  $\alpha < t < \beta$  é uma função  $\phi$  tal que  $\phi', \phi'', \dots, \phi^{(n)}$  existem e satisfazem

$$\phi^{(n)} = f \left[ t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)} \right]. \quad (5.3)$$

Para todo  $t$  em  $\alpha < t < \beta$ .

Vejam os casos que nos interessam neste trabalho que são as Equações Diferenciais Ordinárias lineares de segunda ordem.

**Definição 5.1.3** Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f \left( t, y, \frac{dy}{dt} \right), \quad (5.4)$$

em que  $f$  é alguma função dada,  $t$  a variável independente, representando o tempo, variável independente em fenômenos físicos.

**Definição 5.1.4** A equação (5.4) é dita linear se a função  $f$  tem a forma

$$f \left( t, y, \frac{dy}{dt} \right) = g(t) - p(t) \frac{dy}{dt} - q(t)y, \quad (5.5)$$

isto é, se  $f$  é linear em  $y$  e  $y' = \frac{dy}{dt}$ , sendo  $g, p$  e  $q$  funções especificadas da variável  $t$  que não dependem de  $y$ .

Podemos agora reescrever a equação (5.4) como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t). \quad (5.6)$$

em que a linha  $(')$  indica a diferenciação em relação a  $t$ .

A equação (5.6) pode aparecer da seguinte forma

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t). \quad (5.7)$$

Se  $P(t) \neq 0$ , dividimos a equação (5.7) por  $P(t)$ , obtendo assim, a equação (5.6). Em que temos,  $p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}$ ,  $q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}$  e  $g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}$ .

Agora, se a equação (5.4) não for da forma (5.6) ou (5.7), então ela é dita *não linear*, sendo consideradas relativamente difíceis, sendo resolvidas por métodos numéricos.[3].

**Definição 5.1.5** Um problema de valor inicial (PVI) consiste em uma equação diferencial como equações (5.6) ou (5.7), junto com um par de condições iniciais  $y(t_0) = y_0$ , e  $y'(t_0) = y'_0$ , onde  $y_0$  e  $y'_0$  são números dados.

**Definição 5.1.6** Uma equação diferencial linear de segunda ordem é dita **homogênea** se a função  $g(t) = 0$  na equação (5.6) ou  $G(t) = 0$  na equação (5.7). Caso contrário, é dita não homogênea.

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0. \quad (5.8)$$

Uma solução para uma Equação Diferencial é uma função que satisfaz identicamente à equação. A solução mais geral possível que admite uma equação diferencial é denominada solução geral, enquanto que outra solução é chamada uma solução particular.

**Exemplo 5.1.2** *Considere os casos a seguir*

- $y(t) = \sin t$  é uma solução particular de  $y'' + y = 0$ .
- $y(t) = A \sin t + B \cos t$  é uma solução geral de  $y'' + y = 0$ , sendo  $A$  e  $B$  constantes.

### 5.1.1 Existência e unicidade de solução

Dada uma Equação diferencial ordinária linear de segunda, o resultado mais esperado é sobre a solução da equação. É quase inevitável as perguntas sobre a solução da equação, que simplificamos em três.

- Será que ela tem solução?
- Se tiver solução, será que esta solução é única?
- Existe uma solução que satisfaz a alguma condição especial?

Para responder a estas perguntas, existe o Teorema de Existência e Unicidade de solução que nos garante resposta para algumas das questões desde que as equações diferenciais tenham algumas características.

Devemos considerar que descobrir uma solução para uma Equação Diferencial é algo semelhante ao cálculo de uma integral, e sabemos que existem integrais que não possuem primitivas, isto é, uma função que possa ser escrita de forma analítica ou através de uma expressão. Dessa forma, não é de se esperar que todas as equações diferenciais possuam soluções.

O Teorema de Existência e Unicidade de solução garante que a Equação Diferencial Linear de segunda ordem com duas condições adicionais dadas abaixo:

i.  $a(t) y'' + b(t) y' + c(t) y = d(t)$

ii.  $y(t_0) = y_0$

iii.  $y'(t_0) = y_1,$

possui uma única solução, desde que as funções  $a = a(t)$ ,  $b = b(t)$ ,  $c = c(t)$  e  $d = d(t)$  sejam contínuas e  $a = a(t)$  seja não identicamente nula num intervalo real que contenha o ponto  $t_0$ .

A prova do Teorema da Existência e Unicidade de soluções de equação pode ser vista Boyce (2002, p.56).

Este estudo será concentrado nas equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem, em que funções  $P(t)$ ,  $Q(t)$  e  $R(t)$  são constantes, logo obteremos a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5.9}$$

em que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  são constantes dadas.

**Exemplo 5.1.3** Encontrar a solução da equação  $y'' - y = 0$ .

**Solução 5.1.1** Comparando a equação  $y'' - y = 0$  com a equação (5.6) temos  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -1$ . Agora pela equação devemos procura uma função  $y(t)$  que a derivada segunda desta seja igual a própria função. Este critério é atendido pela função exponencial  $y_1(t) = e^t$  assim como  $y_2(t) = e^{-t}$ . Com um certo amadurecimento podemos constatar que se multiplicarmos por uma constante qualquer, essas soluções  $k_1y_1(t) = k_1e^t$  e  $k_2y_2(t) = k_2e^{-t}$ , sendo  $k_1, k_2$  constantes, também obteremos uma solução. Vejamos:

$$k_1y_1(t) = k_1e^t \Rightarrow k_1y_1'(t) = k_1e^t \text{ e } k_1y_1''(t) = k_1e^t. \text{ Assim,}$$

$$y_1''(t) - y_1(t) = k_1e^t - k_1e^t = 0$$

e

$$k_2y_2(t) = k_2e^{-t} \Rightarrow k_2y_2'(t) = -k_2e^{-t} \text{ e } k_2y_2''(t) = k_2e^{-t}. \text{ Logo,}$$

$$k_2y_2''(t) - k_2y_2(t) = k_2e^{-t} - k_2e^{-t} = 0.$$

Note que a somar das soluções particulares  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  da equação  $y'' - y = 0$  também é uma solução. Verifiquemos se  $y = k_1e^t + k_2e^{-t}$  é solução.

$$y = k_1 e^t + k_2 e^{-t} \Rightarrow y' = k_1 e^t - k_2 e^{-t} \Rightarrow y'' = k_1 e^t + k_2 e^{-t}. \text{ Logo,}$$

$$y'' - y = k_1 e^t + k_2 e^{-t} - (k_1 e^t + k_2 e^{-t}) = 0$$

Portanto, a combinação linear dessas funções também é solução.

Fazendo uso das condições iniciais, podemos determinar as constantes  $k_1, k_2$  de forma particular dentre o conjunto infinito dessa família de soluções. Por exemplo.

Se  $y(0) = 2$  e  $y'(0) = -1$  são condições iniciais que satisfazem a solução da  $y'' - y = 0$ . Então fazendo  $t = 0$  na solução  $y = k_1 e^t + k_2 e^{-t}$  obtemos

$$y(0) = k_1 e^0 + k_2 e^{-0} = 2 \Rightarrow k_1 + k_2 = 2 \quad (\text{i})$$

$$y'(0) = k_1 e^0 - k_2 e^{-0} = -1 \Rightarrow k_1 - k_2 = -1 \quad (\text{ii})$$

Resolvendo o sistema de equações formado pelas equações (i) e (ii) obtemos,  $k_1 = \frac{1}{2}$  e  $k_2 = \frac{3}{2}$ .

Portanto, a solução particular dadas as condições iniciais é  $y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}$ .

## 5.2 Equação Característica

Vamos seguir o raciocínio desenvolvido na resolução da equação diferencial  $y'' - y = 0$  e buscar soluções exponenciais para equação (5.9) do tipo  $y = e^{rt}$ , onde  $r$  é um parâmetro a ser calculado. Primeiramente calculemos as derivadas da função solução  $y = e^{rt}$ , isto é,  $y' = r e^{rt}$ ,  $y'' = r^2 e^{rt}$ . Agora substituindo os valores de  $y$ ,  $y'$  e  $y''$  na equação (5.9), obtemos:

$$ar^2 e^{rt} + br e^{rt} + ce^{rt} = 0 \Rightarrow (ar^2 + br + c) \cdot e^{rt} = 0 \text{ daí, como } e^{rt} \neq 0, \text{ então,}$$

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (5.10)$$

A equação (5.10) é chamada de **equação característica** associada a equação diferencial linear homogênea (5.9). Podemos entender que o parâmetro  $r$  é uma raiz da equação polinomial (5.10), conseqüentemente  $y = e^{rt}$  é uma solução da equação (5.9). Segue que a equação polinomial (5.10) com coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  reais possui duas raízes que podem ser reais distintas, ou reais e iguais ou complexas conjugadas. Para nosso estudo vamos considerar o caso, em que raízes da equação característica sejam números complexos. Vamos verificar a eficácia do método através do exemplo.

**Exemplo 5.2.1** Encontrar a solução geral de  $y'' - 5y' + 6y = 0$ .

**Solução 5.2.1** Devemos supor que a função  $y(t) = e^{rt}$  seja solução. Assim,  $r$  tem que ser raiz da equação característica associada a equação. Segue que

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ ou } r = 3$$

Como o problema não apresenta as condições iniciais, então de acordo com o Teorema da Existência e Unicidade não é possível uma a solução única da equação diferencial. Daí, teremos uma família de soluções dadas por:

$$y(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{3t}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

**Definição 5.2.1** *Sejam  $p$  e  $q$  funções contínuas em um intervalo aberto  $I$  para todo  $t \in I$ . Então, para qualquer função  $\phi$  duas vezes diferenciável em  $I$ , a função*

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi \quad (5.12)$$

*é chamada operador diferencial.*

Perceba que  $L[\phi]$  é uma função em  $I$ . Então, o valor  $L[\phi]$  em um ponto  $t$  de  $I$  é dado por:

$$L[\phi] = \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t).$$

**Exemplo 5.2.2** Se  $p(t) = 3t^2$ ,  $q(t) = 5 + t$  e  $\phi(t) = \cos t$ , então

$$L[\phi(t)] = (\cos t)'' + 3t^2(\cos t)' + (5 + t)\cos t$$

$$L[\phi(t)] = -\cos t - 3t^2 \sin t + (5 + t)\cos t.$$

**Teorema 5.1 (Princípio da superposição)** *Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação diferencial  $L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ , então a combinação  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ .*

**Prova:** Ver (BOYCE, 2002, p.75).

### 5.3 Raízes complexas da equação característica

Consideremos novamente a equação diferencial linear homogênea

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (5.13)$$

onde  $a, b, c$  são números reais dados. Mostramos na seção (5.2) que ao buscar soluções da forma  $y = e^{rt}$  nos leva a um número  $r$  que é raiz da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (5.14)$$

Se tivermos o valor do discriminante  $b^2 - 4ac$  positivo, teremos duas raízes  $r_1, r_2$  distintas, e que nos leva a solução geral do tipo

$$y(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t}. \quad (5.15)$$

Suponhamos que o discriminante  $b^2 - 4ac$  seja negativo, neste caso teremos duas raízes que são números complexos conjugados. Vamos representá-la por:

$$r_1 = \lambda + i\mu, \quad r_2 = \lambda - i\mu. \quad (5.16)$$

em que  $\lambda$  e  $\mu$  são números reais. Logo, as soluções exponenciais correspondentes são:

$$y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t}, \quad y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t}. \quad (5.17)$$

Pela **fórmula de Euler** que apresentamos na seção (4.10) temos que,  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ . Agora, substituindo a variável  $\theta$  por  $\mu t$  na fórmula de Euler podemos definir

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t. \quad (5.18)$$

Considerando que precisamos ampliar a exponencial complexa para um expoente complexo qualquer da forma  $(\lambda + i\mu)t$ . Então temos

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{i\mu t} \quad (5.19)$$

Agora, pela equação (5.18) obtemos que

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{i\mu t} = e^{\lambda t} \cdot (\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) \quad (5.20)$$

Ou ainda,

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot \cos \mu t + i e^{\lambda t} \cdot \operatorname{sen} \mu t \quad (5.21)$$

### 5.3.1 Soluções reais

As funções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  dadas pela equação (5.17) são soluções da equação (5.13). Por serem soluções que envolvem números complexos, tendo em vista que se buscarmos soluções reais, pois a própria equação (5.17) os coeficientes são números reais. Essa solução será obtida aplicando o princípio da superposição que diz: qualquer combinação linear de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  é solução. Pela equação (5.21), temos:

$$y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot (\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t)$$

e

$$y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot (\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t). \text{ Seque que,}$$

$$y_1(t) + y_2(t) = e^{\lambda t} \cdot (\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) + e^{\lambda t} \cdot (\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t)$$

e portanto,

$$y_1(t) + y_2(t) = 2e^{\lambda t} \cos \mu t. \quad (5.22)$$

Também temos,  $y_1(t) - y_2(t) = e^{\lambda t} \cdot (\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) - e^{\lambda t} \cdot (\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t)$  o que implica

$$y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \quad (5.23)$$

Ora, se desconsiderarmos as constantes 2 e  $2i$  pois, podem ser quaisquer constantes (princípio da superposição), neste caso, tomando as constantes iguais a 1, iremos obter duas soluções reais, ou seja,

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t \quad e \quad v(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \quad (5.24)$$

Perceba que as funções  $u$  e  $v$  são as partes real e imaginária respectivamente de  $y_1(t)$ . Portanto, como as soluções são linearmente independentes<sup>1</sup> pelo princípio da superposição, a solução geral da equação (5.9) é dada por  $y(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$ , onde  $c_1, c_2$  são constantes quaisquer, ou seja,

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \quad (5.25)$$

**Exemplo 5.3.1** Encontrar a solução geral da equação diferencial  $y'' + 6y' + 13y = 0$ .

**Solução 5.3.1** A equação característica é  $r^2 + 6r + 13 = 0$ . Resolvendo a equação obtemos:

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i \Rightarrow r_1 = -3 + 2i, \quad r_2 = -3 - 2i$$

Assim, temos  $\lambda = -3$  e  $\mu = 2$ . Pela equação (5.25) a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-3t} \cos 2t + c_2 e^{-3t} \operatorname{sen} 2t$$

**Exemplo 5.3.2** Encontrar a solução do problema de valor inicial

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \quad (5.26)$$

**Solução 5.3.2** A equação característica é  $16r^2 - 8r + 145 = 0$ . Resolvendo a equação obtemos:

$$r = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 9280}}{32} = \frac{8 \pm \sqrt{-9216}}{32} = \frac{8 \pm 96i}{32} = \frac{1}{4} \pm 3i. \text{ Daí,}$$

$$r_1 = \frac{1}{4} + 3i, \quad r_2 = \frac{1}{4} - 3i. \text{ Assim, temos } \lambda = \frac{1}{4} \text{ e } \mu = 3.$$

Logo, pela equação (5.25), a solução geral da equação diferencial linear homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{\frac{1}{4}t} \cos 3t + c_2 e^{\frac{1}{4}t} \operatorname{sen} 3t. \quad (5.27)$$

<sup>1</sup>Duas funções  $f, g$  são ditas linearmente independentes num intervalo  $I$  se existirem duas constantes  $k_1$  e  $k_2$ , tais que,  $k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0$  implicar em  $k_1 = k_2 = 0$  para todo  $t$  em  $I$ . Caso contrário, são linearmente dependentes.

Como o problema traz as condições iniciais (PVI) então, calculemos a primeira condição fazendo  $t = 0$  na equação (5.27). Temos

$$y(0) = c_1 \underbrace{e^{\frac{1}{4} \cdot 0} \cos 3 \cdot 0}_1 + c_2 \underbrace{e^{\frac{1}{4} \cdot 0} \operatorname{sen} 3 \cdot 0}_0 = -2 \Rightarrow c_1 = -2$$

Para aplicarmos a segunda condição inicial, derivamos em relação a  $t$  a equação (5.28). Daí obtemos

$$y'(t) = \left(\frac{c_1}{4} + 3c_2\right) e^{\frac{1}{4}t} \cos 3t + \left(-3c_1 + \frac{c_2}{4}\right) e^{\frac{1}{4}t} \operatorname{sen} 3t \quad (5.28)$$

Fazendo  $t = 0$  na equação (5.28), obtemos

$$y'(0) = \frac{c_1}{4} + 3c_2 = 1$$

Como o valor de  $c_1 = -2$ , segue que  $\frac{-2}{4} + 3c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$

Substituindo na equação (5.27) os valores calculados de  $c_1 = -2$  e  $c_2 = \frac{1}{2}$ , dadas as condições iniciais obtemos a solução geral da equação diferencial linear (5.26).

$$y(t) = -2e^{\frac{1}{4}t} \cos 3t + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}t} \operatorname{sen} 3t \quad (5.29)$$

Essa solução apresenta um comportamento oscilatório, devido aos fatores trigonométrico  $\cos 3t$  e  $\operatorname{sen} 3t$  que vai aumentando exponencialmente a medida que a variável  $t$  aumenta, conforme a figura (5.1), obtida através do software *Geogebra*, que ainda apresenta as oscilações para  $t < 0$ , sendo que nos fenômenos físicos a variável tempo sempre positiva.

**Observação 5.3.1** Cada uma das soluções  $u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t$  e  $v(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t$  apresentadas em (5.24) representam oscilações, devido a presença dos fatores  $\cos \mu t$  e  $\operatorname{sen} \mu t$  assim, como crescem ( $\lambda > 0$ ) ou decaem ( $\lambda < 0$ ) exponencialmente, isto é, depende do sinal de  $\lambda$ , ao não ser, se tivermos  $\lambda = 0$ , neste caso, oscilam o tempo todo, nem aumentando ou diminuindo.

**Exemplo 5.3.3** Encontrar a solução geral de  $y'' + 16y = 0$ .

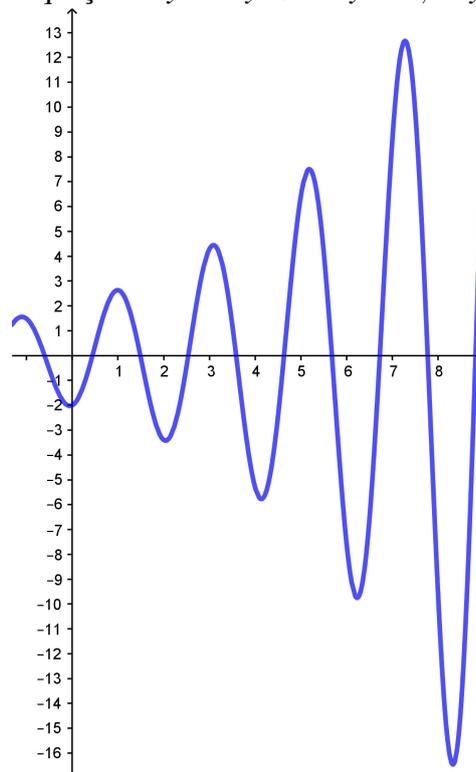
**Solução 5.3.3** A equação característica é  $r^2 + 16 = 0 \Rightarrow r_1 = 0 + 4i$  e  $r_2 = 0 - 4i$ . Daí, temos que  $\lambda = 0$  e  $\mu = 4$ . Como  $\lambda = 0$ , a solução não apresenta o fator exponencial. Logo, a solução geral é:

$$y(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t. \quad (5.30)$$

Considere o PVI, em que tenhamos as constantes  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 3$ . Substituindo na equação (5.30), obtemos a solução

$$y(t) = 2 \cos 4t + 3 \operatorname{sen} 4t. \quad (5.31)$$

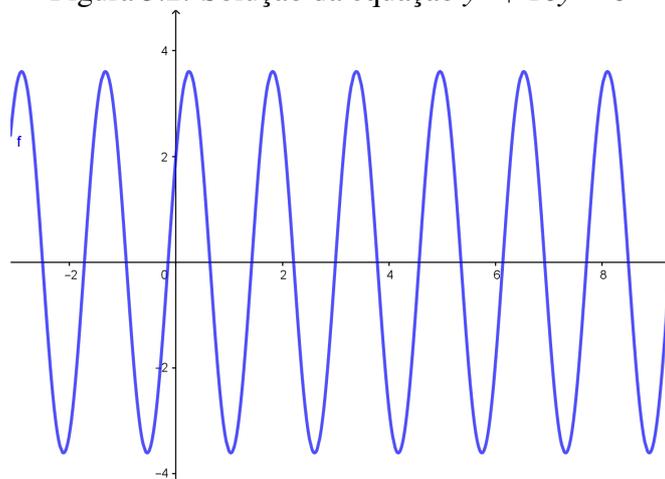
Figura 5.1: Solução da equação  $16y'' - 8y' + 145y = 0$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 1$



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

Perceba, que a solução gráfica da equação (5.31) representada na figura (5.2), oscila o tempo todo, nem aumentando ou diminuindo. Na Engenharia Elétrica, chama-se essa oscilação(sinal) de *portadora* de um transmissor de sinal analógico.

Figura 5.2: Solução da equação  $y'' + 16y = 0$



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

**Observação 5.3.2** Vamos tornar uma análise mais simples para função  $y(t) = A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)$ , em relação a amplitude e periodicidade da função  $y(t)$ . Reescrevendo a função  $y(t)$  na forma

$$y(t) = R \sin(\mu t + \phi). \quad (5.32)$$

em que  $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Seque que, existe  $\phi \in [0, 2\pi)$  chamado ângulo de fase definido por

$$\sin \phi = \frac{A}{R}, \quad \cos \phi = \frac{B}{R}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{A}{B}.$$

De fato. Temos que,

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \left(\frac{A}{R}\right)^2 + \left(\frac{B}{R}\right)^2 = \left(\frac{A^2}{R^2}\right) + \left(\frac{B^2}{R^2}\right) = \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2} = 1.$$

Agora, desenvolvendo a equação (5.32) pela adição da função seno temos:

$$y(t) = R \sin(\mu t + \phi) = R (\sin \phi \cos(\mu t) + \sin(\mu t) \cos \phi)$$

$$y(t) = R \left[ \frac{A}{R} \cdot \cos(\mu t) + \sin(\mu t) \frac{B}{R} \right]$$

$$y(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \left[ \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \cos(\mu t) + \sin(\mu t) \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right]$$

$$y(t) = A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t).$$

Fazendo uma análise da função  $y(t) = R \sin(\mu t + \phi)$ , temos:

- A periodicidade ou período da função seno é dado  $T = \frac{2\pi}{\mu}$ .
- A amplitude da função é  $R$ , valor quando  $\sin(\mu t + \phi) = 1$ .
- O coeficiente  $\mu$  representa a frequência.
- O ângulo  $\phi$  é a fase, depende das condições iniciais,  $t = 0$ .

Estes resultados serão aplicados na análise dos movimentos oscilatórios que serão tratados na próxima seção.

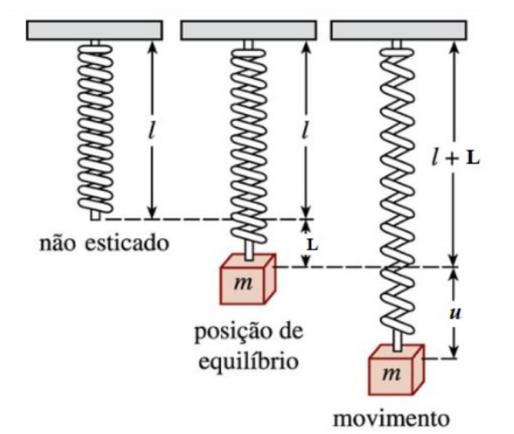
## 5.4 Vibrações Mecânicas

Vamos aplicar a equação diferencial linear de segunda com coeficientes constantes  $ay'' + by' + cy = g(t)$ , dadas condições iniciais  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$  para estudar os fenômenos físicos vibratórios num sistema de uma massa acoplada a uma mola e num circuito elétrico RLC simples. É claro, que neste trabalho não esgotaremos todas as aplicações possíveis, mas apenas os aspectos matemáticos comuns a esses dois fenômenos físicos. Nossa discussão será em torno da interpretação física das constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  das funções  $y$  e  $g(t)$  nos fenômenos vibratórios.

### 5.4.1 Sistema massa mola acoplados

Considere um corpo de massa  $m$  em uma das extremidades de mola vertical presa a um suporte de comprimento original igual a  $l$  quando a mola não esticada, conforme a figura (5.3). O corpo preso a mola provoca um alongamento  $L$  da mola para baixo, sentido positivo, até alcançar a posição de equilíbrio. Neste ponto, existem duas forças agindo sobre o corpo, a força gravitacional, ou força peso, que estica a mola para baixo, e tem módulo igual ao produto  $mg$ , onde  $g$  representa a aceleração da gravidade provocada pela massa da Terra, que indicaremos por  $w$ . A outra força que indicaremos por  $F_r$  é exercida pela mola que puxa para cima, está é considerada uma força restauradora, conforme figura (5.4).

Figura 5.3: Sistema massa mola



Fonte: <https://slideplayer.com.br/slide/5257105/>

Suponhamos que o deslocamento  $L$  da mola provocado pelo corpo seja pequeno, neste caso, a força  $F_r$  da mola é proporcional ao deslocamento  $L$  sofrido. Este fato na Física é conhecida pela Lei de Hooke<sup>2</sup>, simplesmente enunciada por  $F_r = -kL$ , onde  $k$  é a constante da mola, ou constante de elasticidade da mola, que esta ligada diretamente com as características físicas do material da mola. O sinal negativo que aparece é devido ao fato da força  $F_r$  ser para cima. Como a massa em equilíbrio a resultante das forças que agem sobre ela é zero, isto é,  $w + F_r = 0$ . Logo,

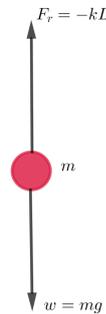
$$mg - kL = 0 \quad (5.33)$$

Vamos mostrar que uma equação diferencial de segunda ordem, descreve o movimento vibratório de uma massa acoplada a uma mola. Usando a Lei de Hooke, que descreve o

---

<sup>2</sup>Robert Hooke (1635-1703) Físico e inventor inglês, publicou essa lei em 1658. A ideia de atar uma mola a um volante de relógio, causando movimentos oscilatório que permite a um relógio marca unidades de tempo. O conceito da mola em equilíbrio levou a invenção do relógio de bolso por Christian Huygens em 1674. Hooke acusou Huygens de ter roubado sua invenção.

Figura 5.4: Diagrama de força do sistema massa mola



Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

movimento de um corpo preso a mola, onde a força restaurado é pela dinâmica de Newton ( $F = ma$ ). Sendo  $\mu$  a função que descreve o deslocamento da mola,  $a$  a aceleração  $a = \frac{d^2u(t)}{dt^2} = u''(t)$ . Então, temos

$$mu''(t) = -ku. \quad (5.34)$$

Se considerarmos a existência de uma força de amortecimento agindo contrário ao movimento do corpo e proporcional à velocidade  $F_d = -\gamma u'(t)$ ,  $\gamma > 0$ , obtemos

$$mu''(t) = -ku - \gamma u'(t). \quad (5.35)$$

Podemos considerar ainda uma outra força externa  $F(t)$ , agindo sobre o movimento do sistema. Assim, temos

$$mu''(t) = -ku - \gamma u'(t) + F(t). \quad (5.36)$$

Portanto, a equação do sistema massa mola é de fato uma Equação Diferencial Linear de segunda ordem, com coeficientes constantes dada por:

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku = F(t). \quad (5.37)$$

Vamos analisar os fenômenos vibratórios decorrentes dessa equação nos casos em temos  $F(t) = 0$ , pois já assiste ao propósito do nosso Trabalho de Conclusão do Curso.

Se o corpo de massa  $m$  for deslocado para baixo, a partir da sua posição de equilíbrio (sentido positivo) de uma quantidade que denotaremos por  $u(t)$  e for solto, a força restauradora neste caso de dinâmica, é dada pela **Segunda Lei de Newton**, ou seja,  $F = ma$ , onde  $a$  é a aceleração  $\frac{d^2u(t)}{dt^2} = u''(t)$ . Suponhamos que o sistema não haja forças de retardamento agindo sobre ele e que a massa vibre livremente, então podemos igualar  $F$ , a resultante das forças restauradora  $F_r$  e  $w$ . Seque que,

$$mu''(t) = -k(L + u) + mg = -ku \underbrace{-kL + mg}_0 = -ku$$

$$mu''(t) = -ku \Rightarrow mu''(t) + ku = 0$$

$$mu''(t) + ku = 0 \quad (5.38)$$

Dividindo a equação (5.38) por  $m$ , obtemos  $u''(t) + \frac{k}{m}u = 0$ . Fazendo  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , temos

$$u''(t) + \omega^2 u = 0. \quad (5.39)$$

A Equação (5.39) caracteriza o movimento do sistema massa mola, chamado de **vibrações livres não amortecidas** ou simplesmente movimento harmônico simples. Sendo a equação (5.39) uma equação diferencial linear de segunda ordem, sua equação característica é  $r^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow r_1 = i\omega$  e  $r_2 = -i\omega$ . Logo, sua solução geral é

$$u(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (5.40)$$

Para fazer uma análise da equação (5.40) é conveniente buscar solução do tipo

$$u(t) = R \cos(\omega t - \delta). \quad (5.41)$$

Desenvolvendo a equação (5.41), usando a fórmula da diferença da função cosseno, e comparando com a equação (5.40) obtemos:

$$u(t) = R \cos \delta \cos \omega t + R \sin \delta \sin \omega t = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \text{ Temos que:}$$

$$A = R \cos \delta, \quad B = R \sin \delta.$$

Logo,

$$R^2 = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{tg } \delta = \frac{B}{A}$$

Podemos destacar duas grandezas importantes o **período** ( $T$ ) que é tempo de uma vibração completa do movimento e **frequência** ( $\omega$ ) que significa o número de vibrações completas por unidade de tempo que o movimento vibratório ocorre. Como a função cosseno é periódica de período  $2\pi$ , então da equação (5.34) temos:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5.42)$$

A frequência circular,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  denominada de *frequência angular de vibrações* dada em radianos por unidade de tempo, indica com frequência angular essa solução ocorre. Por se trata de um movimento vibratório não amortecido é também conhecida por **frequência natural**. O afastamento máximo da massa de sua posição de equilíbrio, representada na

equação (5.41) por  $R$  é chamado **amplitude** do movimento. E  $\delta$  é chamado de *fase*, ou ângulo de fase, mede o deslocamento da onda a partir de sua posição normal, ou seja,  $\delta = 0$ . [3]

**Exemplo 5.4.1** Resolver e interpretar o problema de valor inicial

$$u''(t) + 16u = 0, \quad u(0) = 10, \quad u'(0) = 0. \quad (5.43)$$

**Solução 5.4.1** O problema trata-se de um movimento vibratório não amortecido em que uma massa é puxada para baixo 10 unidade de comprimento da sua posição de equilíbrio, dado que  $u(0) = 10$  e logo após é solta a a partir do repouso, isto é, a velocidade inicial  $u'(0) = 0$ .

Do Exemplo 5.3.3 da seção (5.3.1), temos que a solução geral é

$$u(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sen 4t . \quad (5.44)$$

Aplicando as condições iniciais do problema, isto é,  $t = 0$  na equação (5.44) obtemos:

$$u(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 10 \Rightarrow c_1 = 10$$

Assim,

$$u(t) = 10 \cos 4t + c_2 \sen 4t . \quad (5.45)$$

Agora, precisamos derivar em relação a  $t$  a equação (5.45) para aplicarmos a segunda condição inicial  $u'(0) = 0$ . Daí temos

$$u'(t) = -40 \sen 4t + 4c_2 \cos 4t. \text{ Logo,}$$

$$u'(0) = -40 \cdot 0 + 4c_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Portanto, a equação do movimento vibratório não amortecido é

$$u(t) = 10 \cos 4t . \quad (5.46)$$

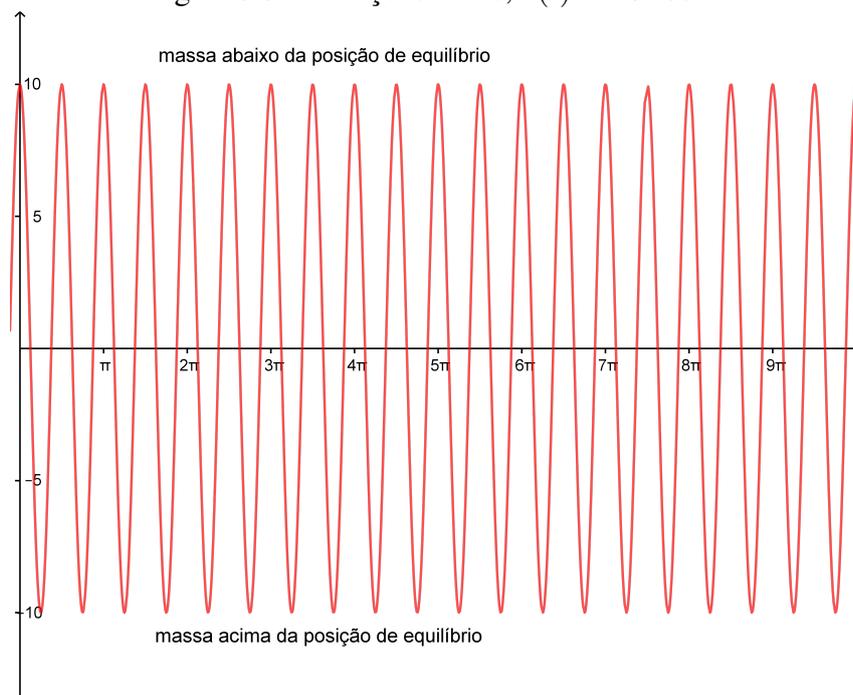
A solução mostra que após o sistema ser colocado em movimento, ele permanece em movimento indefinidamente com uma amplitude  $R = 10$ , oscilando em cada lado da posição de equilíbrio  $u = 0$ , como mostrado na figura (5.5) . Além disso, o período  $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  segundos e a frequência natural  $\omega = 4$  hertz.

## 5.4.2 Vibrações livres amortecidas

Nesta subseção, incluindo agora o efeito do amortecimento  $\gamma$ , a equação do movimento é

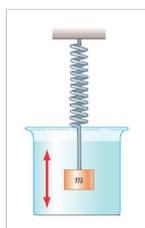
$$mu'' + \gamma u' + ku = 0. \quad (5.47)$$

Figura 5.5: Vibrações livres,  $u(t) = 10 \cos 4t$



Fonte: Feita pelo autor utilizando o Geogebra.

Figura 5.6: Movimento amortecido



Fonte: <https://slideplayer.com.br/slide/5190427/>

Vamos analisar o efeito da variação na constante de amortecimento  $\gamma$  para valores atribuídos a massa  $m$  e constante  $k$ . A equação característica é

$$r^2 + \frac{\gamma}{m}r + \frac{k}{m} = 0, \quad (5.48)$$

sendo

$$r_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}, \quad r_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} \quad (5.49)$$

Agora, dependendo do valor do discriminante  $\gamma^2 - 4mk$ , a solução  $u$  terá uma das formas:

$$\gamma^2 - 4mk > 0 \Rightarrow u = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} \quad (5.50)$$

ou

$$\gamma^2 - 4mk = 0 \Rightarrow u = (A + Bt)e^{\frac{-\gamma}{2m}t}. \quad (5.51)$$

$$\gamma^2 - 4mk < 0 \Rightarrow u = e^{\frac{-\gamma}{2m}t}(A \cos \mu t + B \sin \mu t), \quad \mu = \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} > 0. \quad (5.52)$$

1º. **Caso:**  $\gamma^2 - 4mk > 0$ . Nessa situação dizemos que o sistema **superamortecido**, pois as constantes  $m$ ,  $\gamma$  e  $k$  são sempre positivas, sendo  $\gamma^2 > \gamma^2 - 4mk$ . Logo, se  $\gamma^2 - 4mk \geq 0$  e teremos suas raízes  $r_1$ ,  $r_2$  negativas e dadas pela equação (4.42). Mediante a isso, temos uma mola relativamente fraca ou uma massa muito pequena frente a forte resistência.

Portanto, quando  $t \rightarrow \infty$  então  $u \rightarrow 0$  independentemente das constantes  $A$  e  $B$ , faz com que as oscilações tende a parar devido a perda de energia provada pela forte resistência.

2º. **Caso:**  $\gamma^2 - 4mk = 0$ . Nessa situação dizemos que o movimento é **criticamente amortecido** apresentando um comportamento semelhante ao movimento superamortecido, devemos salientar que qualquer diminuição no valor de  $\gamma$ , teremos raízes  $r_1$ ,  $r_2$  complexas. Perceba se  $t \rightarrow \infty$  então  $u \rightarrow 0$ , isso devido ao fator exponencial  $e^{\frac{-\gamma}{2m}t}$ .

3º. **Caso:**  $\gamma^2 - 4mk < 0$ . Nessa situação o sistema é considerado **subamortecido**, pois o coeficiente de amortecimento é pequeno se comparado a constante de elasticidade da mola. Para examinarmos esse caso, consideremos as constantes  $A = R \cos \delta$  e  $B = R \sin \delta$  onde  $R > 0$  e  $\delta \in [0, 2\pi]$ , e substituindo na equação (5.52), obtemos:

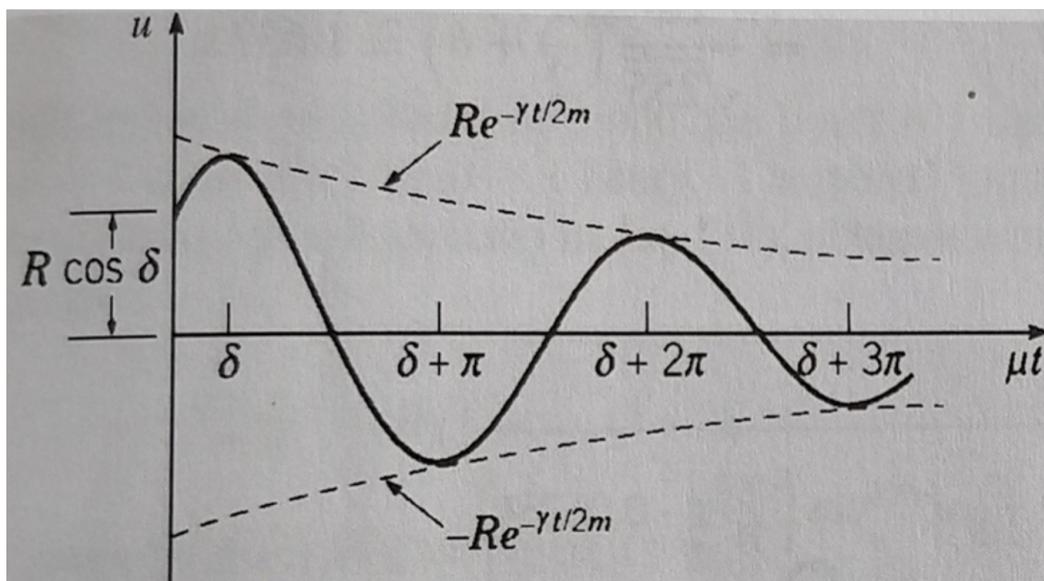
$$u = e^{\frac{-\gamma}{2m}t}(R \cos \delta \cos \mu t + R \sin \delta \sin \mu t)$$

Que podemos reescrever essa equação usando o cosseno da diferença entre dois termos na seguinte forma

$$u = R e^{\frac{-\gamma}{2m}t} \cos(\mu t - \delta). \quad (5.53)$$

Essa equação (5.53), nos diz que a massa ficará vibrando em torno da sua posição de equilíbrio  $\mu = 0$  contidas entre as curvas  $\pm R e^{\frac{-\gamma}{2m}t}$  ilustrada na figura (5.7). A medida que o tempo aumenta as vibrações vão diminuindo. Além disso, o fator  $R$  dependente de  $m$ ,  $\gamma$ ,  $k$  e das condições iniciais. O parâmetro  $\mu$  determina a frequência onde massa vibra para baixo e para cima, não sendo um movimento periódico,  $\mu$  é chamada de **quase frequência**.

Figura 5.7: Movimento amortecido dado por  $u = R e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos(\mu t - \delta)$



Fonte: Boyce(2002, p. 103).

Se compararmos  $\mu$  com a frequência  $\omega = \frac{k}{m}$  do movimento vibratório sem amortecimento obtemos

$$\frac{\mu}{\omega} = \frac{\frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m}}{\frac{k}{m}} = \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4km}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{8km} \quad (5.54)$$

Situação só válida quando  $\frac{\gamma^2}{4km}$  for muito pequena. Nesse caso, o sistema é considerado “pouco amortecido”. Essa situação de pouco amortecimento, faz com que a frequência de vibração diminua rapidamente. O valor  $T_d = \frac{2\pi}{\mu}$  é chamado **quase período**. A relação entre  $T_d$  e  $T$  é dada por:

$$\frac{T_d}{T} = \frac{\omega}{\mu} = \left( \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4km}} \right)^{-1} \approx 1 + \frac{\gamma^2}{8km}. \quad (5.55)$$

Sendo que novamente devemos ter  $\frac{\gamma^2}{4km}$  pequeno para a aproximação da expressão (5.48) seja válida. Das expressões (5.54) e (5.55) é possível estabelecer um significado para o quociente  $\frac{\gamma^2}{4km}$ . Não é só  $\gamma$  que decide se um movimento vibratório é pouco ou muito amortecido, mas o valor  $\gamma^2$  em relação  $4km$ . Logo, se  $\frac{\gamma^2}{4km}$  for pequeno o efeito do amortecimento é desprezado no cálculo da quase frequência e do quase período do movimento.

Se o cálculo for preciso, então não devemos desconsiderar a força de amortecimento. Por outro lado, aumentando  $\frac{\gamma^2}{4km}$  então  $\mu$  diminui e  $T_d$  aumenta, pois  $\mu \rightarrow 0$  e  $T_d \rightarrow \infty$  quando  $\gamma \rightarrow 2\sqrt{km}$ . Esse valor é conhecido como **amortecimento crítico**, enquanto para valores maiores de  $\gamma$  é chamado de **superamortecido**. Nesse casos, dados pelas equações (5.50) e (5.51) nessa ordem, a massa volta a posição de equilíbrio mas, não oscila em torno dela como para  $\gamma$  pequeno[3].

**Exemplo 5.4.2** *Um peso de 0,5 kg é atado a uma mola de comprimento 1,5 m de comprimento. Na posição de equilíbrio, o comprimento da mola é de 2,48 m. Se o peso for suspenso e solto a partir do repouso de um ponto 2 m acima da posição de equilíbrio, encontre o deslocamento  $u(t)$  se é sabido ainda que o meio oferece resistência numericamente igual à velocidade instantânea.*

**Solução 5.4.2** O alongamento da mola depois que o peso é atado é  $2,48 - 1,5 = 0,98$  m. Seque-se pela lei de Hooke que  $0,5 \cdot 9,8 = k(0,98)$ , assim  $k = 5N/m$ .

Logo, a equação diferencial associada ao movimento é dada por  $m u''(t) = -ku - \gamma u'(t)$ . Assim, temos  $0,5u''(t) = -5u - u'(t) \Rightarrow [0,5u''(t) + u'(t) + 5u = 0] \div (0,5) \Rightarrow$

$$u''(t) + 2u'(t) + 10u = 0. \quad (5.56)$$

A equação (5.56) está sujeita às condições iniciais:  $u(0) = -2$  (acima da posição de equilíbrio) e  $u'(0) = 0$ .

Temos que a equação característica é  $r^2 + 2r + 10 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 + 3i$  e  $r_2 = -1 - 3i$ . Então, podemos concluir que o sistema é subamortecido e pela equação (5.45) tem como solução,

$$u(t) = e^{-t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t). \quad (5.57)$$

Das condições iniciais temos:

$$u(0) = e^0(c_1 \cos 3 \cdot 0 + c_2 \sin 3 \cdot 0) = -2 \Rightarrow c_1 = -2.$$

Substituindo na equação (5.57), o valor  $c_1 = -2$ , e calculando a segunda condição inicial, obtemos

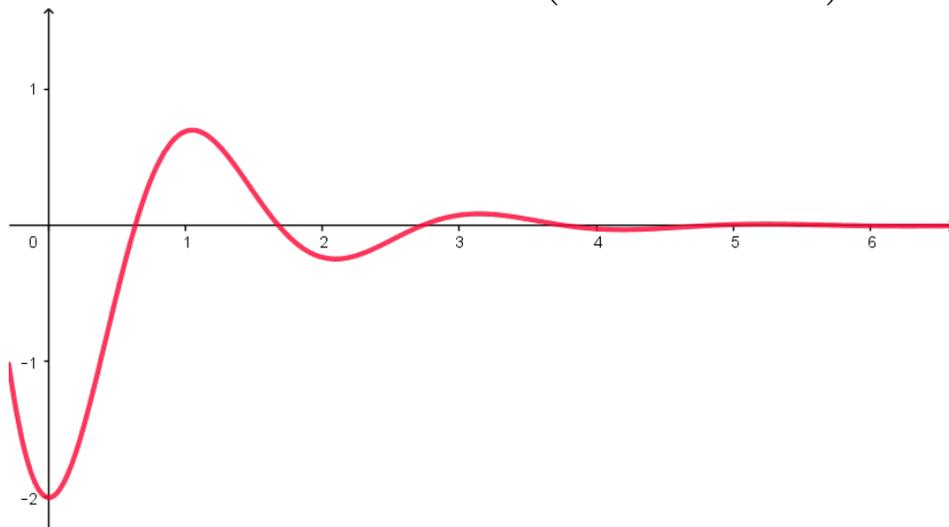
$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t}(-2 \cos 3t + c_2 \sin 3t) \Rightarrow \\ u'(t) &= e^{-t}(6 \sin 3t + 3c_2 \cos 3t) - e^{-t}(-2 \cos 3t + c_2 \sin 3t) \Rightarrow \\ u'(0) &= e^{-0}(6 \sin 3 \cdot 0 + 3c_2 \cos 3 \cdot 0) - e^{-0}(-2 \cos 3 \cdot 0 + c_2 \sin 3 \cdot 0) = 3c_2 + 2 = \\ 0 &\Rightarrow c_2 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(t) = e^{-t} \left( -2 \cos 3t - \frac{2}{3} \sin 3t \right). \quad (5.58)$$

O gráfico de  $u(t)$  é exibido na figura (5.8).

Figura 5.8: Gráfico de  $u(t) = e^{-t} \left( -2 \cos 3t - \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3t \right)$

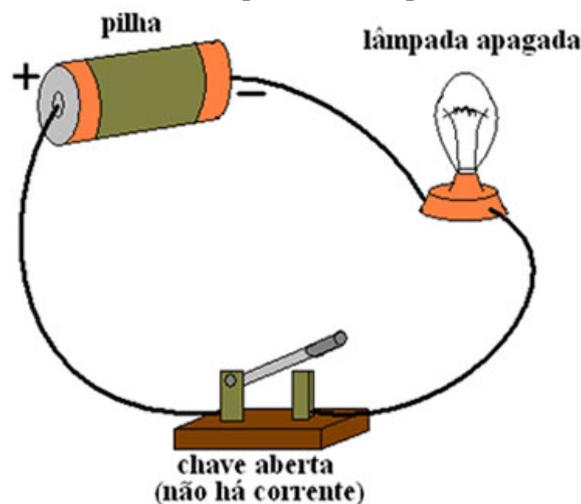


Fonte: Feito pelo autor usando Geogebra.

## 5.5 Circuito Elétrico

**Definição 5.5.1** Um circuito elétrico é um conjunto de caminhos que permite a passagem da corrente elétrica, onde aparecem alguns dispositivos elétricos (resistores, indutores e capacitores, etc.) ligados a um gerador (fonte).

Figura 5.9: Circuito composto de lâmpada, chave e pilha



Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/circuito-simples.htm>

**Definição 5.5.2** Um resistor ou resistência é um dispositivo elétrico que limita a corrente

elétrica em um circuito. Tem por unidade de medida ohms de símbolo  $\Omega$ .

Figura 5.10: Resistor



Fonte: <http://randysresistors.com/>

A lei de Ohm<sup>3</sup> estabelece que a tensão entre os terminais de uma resistência é diretamente proporcional à corrente que flui através dela.

$$V_r(t) = R i(t), \quad R \geq 0. \quad (5.59)$$

**Definição 5.5.3** Um capacitor é um componente de circuito que consiste em duas superfícies condutoras separadas por um material não condutor, ou dielétrico, e por finalidade armazenar cargas elétricas.

Figura 5.11: Capacitor



Fonte: <https://www.sabereletrica.com.br/entenda-o-funcionamento-dos-capacitores/>

A carga ( $q$ ) no capacitor é proporcional à tensão ( $V_c$ ) imposta em seus terminais, tal que

<sup>3</sup>A lei de Ohm é assim denominada em homenagem ao físico alemão Georg Simon Ohm (1787-1854), que estabeleceu a relação tensão corrente para uma resistência. Assim, pelos resultados pioneiros de seu trabalho, a resistência elétrica recebeu como unidade o seu nome.[16]

$$q(t) = C V_c(t) \Rightarrow V_c(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad C \geq 0. \quad (5.60)$$

Onde a constante de proporcionalidade  $C$  chamada de capacitância é medida em coulombs por volt ou *farads*<sup>4</sup>(F).

**Definição 5.5.4** Um indutor é um componente de circuito que consiste de um fio condutor usualmente com a forma de bobina.



Fonte: <https://www.mundodaeletrica.com.br/o-que-e-um-indutor/>

Num indutor, a variação de um campo magnético produz uma tensão( $V_l$ ) que é proporcional à taxa de variação com o tempo da corrente que o produziu, isto é,

$$V_l = L \frac{d i(t)}{dt}, \quad L \geq 0. \quad (5.61)$$

A constante de proporcionalidade  $L$  é chamada de indutância, sendo medida em *henry*<sup>5</sup>(H).

Vamos agora aplicar as equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, a um circuito RLC simples cujo fluxo de corrente elétrica  $i(t)$ , mostrado na figura (5.13).

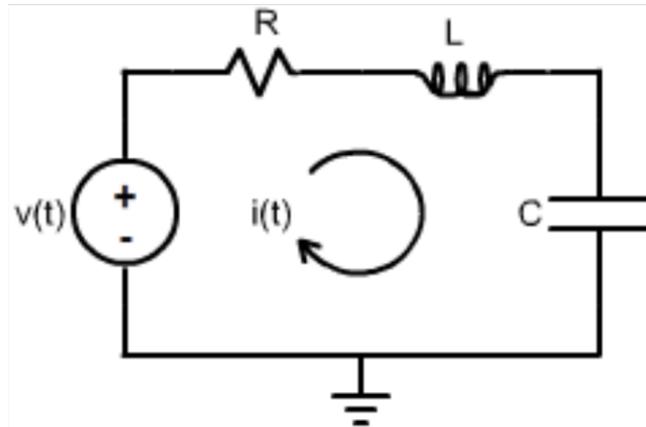
**Definição 5.5.5** Corrente elétrica é razão entre a taxa de variação da carga com o tempo, isto é,

$$i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (5.62)$$

<sup>4</sup>Nome dado em homenagem ao físico inglês Michael Faraday (1791-1867)

<sup>5</sup>Nome dado em homenagem ao inventor americano Joseph Henry (1787-1854).

Figura 5.13: Circuito RLC simples



Fonte: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/>

O fluxo de corrente elétrica<sup>6</sup> num circuito é regido pela lei Kirchhoff<sup>7</sup> diz que: *Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual a soma das quedas de tensão no resto do circuito.*

Temos que:

$$V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = v(t). \quad (5.63)$$

Então, fazendo as substituições das equações (5.59), (5.60) e (5.61) na equação (5.63), obtemos

$$L \frac{d i(t)}{dt} + R i(t) + \frac{q(t)}{C} = v(t). \quad (5.64)$$

Substituindo o valor da equação (5.62) na equação (5.64) obtemos

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = v(t). \quad (5.65)$$

Ou ainda,

$$L q''(t) + R q'(t) + \frac{1}{C} q(t) = v(t). \quad (5.66)$$

Para alguma carga  $q$ . As condições iniciais são:

<sup>6</sup>A unidade adotada para a intensidade da corrente no SI é o ampère (A), em homenagem ao físico francês Andre Marie Ampère, e designa coulomb por segundo (C/s).

<sup>7</sup>Kirchhoff (1824-1887) professor em Breslau, Heidelberg e Berlim foi um dos maiores físico do século dezenove. Ele descobriu as leis básicas que regem um circuito elétrico em torno de 1845, enquanto estudante em konigsberg.[3]

$$q(t_0) = q_0, \quad q'(t_0) = i(t_0) = i_0. \quad (5.67)$$

Diante disso, precisamos saber a carga no capacitor e a corrente em algum instante inicial  $t$ . podemos obter a equação diferencial para corrente  $i(t)$  derivando a equação (5.66) em relação a  $t$  e depois usando a equação (5.62) para substituir o valor  $\frac{dq(t)}{dt}$ . Segue que,

$$Li''(t) + R i'(t) + \frac{1}{C}i(t) = v(t). \quad (5.68)$$

Por outro lado, com condições iniciais

$$i(t_0) = i_0, \quad i'(t_0) = i'_0. \quad (5.69)$$

Da equação (5.64), temos:

$$L i'_0 + R i_0 + \frac{1}{C} q_0 = v(t_0).$$

Seque que

$$i'_0 = \frac{v(t_0) - R i_0 - C^{-1} q_0}{L}. \quad (5.70)$$

Logo, podemos calcular  $i'_0$  pela carga e correntes iniciais, que são fisicamente medidas.

O importante desse resultado é que o fluxo de corrente elétrica no circuito é descrito por um problema de valor inicial (PVI), que tem precisamente a mesma forma descrita no movimento de um sistema massa-mola. Um vez sabendo resolver equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes, podemos interpretar os resultados como movimentos vibratórios, ou situações que levem ao mesmo problema.

Agora, se  $v(t) = 0$  então, pela equação (5.66) temos  $Lq''(t) + R q'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0$  cuja equação característica é

$$Lr^2 + R r + \frac{1}{C} = 0. \quad (5.71)$$

Sendo  $R \neq 0$  então, dependendo do valor do discriminante  $R^2 - 4\frac{L}{C}$ , teremos um resultado análogo ao sistema massa-mola já visto na seção (5.4.2). Assim o circuito elétrico é:

1. **Superamortecido** se  $R^2 - 4\frac{L}{C} > 0$ .
2. **Criticamente amortecido** se  $R^2 - 4\frac{L}{C} = 0$ .
3. **Subamortecido** se  $R^2 - 4\frac{L}{C} < 0$ .

Em qualquer um dos três casos, percebemos que a solução geral terá o fator  $e^{-\frac{R}{2L}t}$ . Logo, para tempo muito longo, isto é,  $t \rightarrow \infty$  temos  $q(t) \rightarrow 0$ . No circuito subamortecido, quando  $q(0) = q_0$ , a carga do capacitor oscila a medida que o tempo aumenta, ou seja, capacitor carrega e descarrega. Se  $v(t) = 0$  e  $R = 0$ , o circuito é não amortecido, e as vibrações elétricas não se aproximam de zero, a medida que o tempo passa, conforme o Exemplo (5.4.1) da seção (5.4.1). Neste caso, dizemos que o circuito é harmônico simples.

**Exemplo 5.5.1** Num circuito elétrico temos uma indutância de 0,1 henry, uma resistência de 20 ohms e uma capacitância de 25 microfarads (1 microfarad =  $10^{-6}$  farad). Determinar a carga  $q$  e a corrente  $i$  no tempo  $t$  nos seguintes casos: (a)  $q(t) = 0,05$  coulomb e  $i(t) = 0$ , quando  $t = 0$ . (b)  $q(t) = 0,05$  coulomb e  $i(t) = 0,2$  ampères quando  $t = 0$ .

**Solução 5.5.1** (a) Substituindo os dados  $L = 0,1$  H,  $R = 20\Omega$  e  $C = 25\mu C$  na equação (5.65) do circuito RLC temos:

$$0,1 \frac{d^2q(t)}{dt} + 20 \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{25 \cdot 10^{-6}}q(t) = 0. \quad (5.72)$$

Dividindo a equação (5.72) por 0,1, obtemos

$$\frac{d^2q(t)}{dt} + 200 \frac{dq(t)}{dt} + 400000q(t) = 0. \quad (5.73)$$

A equação característica é:

$$r^2 + 200r + 400000 = 0. \quad (5.74)$$

Sendo as raízes  $r_1 = -100 + 100\sqrt{39}i$  e  $r_2 = -100 - \sqrt{39}i$ . Segue que,

$$q(t) = e^{-100t} \left( c_1 \cos 100\sqrt{39}t + c_2 \sen 100\sqrt{39}t \right). \quad (5.75)$$

Derivando a equação (5.75) em relação a  $t$ , obtemos:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \left[ (\sqrt{39} c_2 - c_1) \cos 100\sqrt{39}t - (\sqrt{39} c_1 + c_2) \sen 100\sqrt{39}t \right]. \quad (5.76)$$

Sabemos que  $q = 0,05$  e  $i = 0$  quando  $t = 0$ . Então, pela equação (5.75) temos

$$0,05 = e^{-100 \cdot 0} [c_1 \cos (100\sqrt{39} \cdot 0) + c_2 \sen (100\sqrt{39} \cdot 0)] \Rightarrow c_1 = 0,05.$$

Pela equação (5.76), temos

$$i = 0 \Rightarrow [(\sqrt{39} c_2 - c_1) \cos (100\sqrt{39} \cdot 0) - (\sqrt{39} c_1 + c_2) \sen (100\sqrt{39} \cdot 0)] \Rightarrow \sqrt{39} c_2 - 0,05 = 0 \Rightarrow c_2 = 0,008.$$

Portanto,

$$q(t) = e^{-100t} [0,05 \cos(624,5t) + 0,008 \sen(624,5t)]$$

e

$$i(t) = -32e^{-100t} \sen(624,5t).$$

(b) Temos agora que  $q(t) = 0,05$ ,  $i(t) = -0,2$  quando  $t = 0$ . Daí, substituindo nas equações (5.75) e (5.76) e simplificando os resultados, obtemos

$$c_1 = 0,05 \quad e \quad c_2 = 0,0077.$$

Portanto,

$$q(t) = e^{-100t} [0,05 \cos(624,5t) + 0,0077 \operatorname{sen}(624,5t)]$$

e

$$i(t) = e^{-100t} [-0,2 \cos(624,5t) - 32 \operatorname{sen}(624,5t)].$$

Podemos concluir que, a carga  $q$  e a corrente  $i$  são transitórios, tornando-se desprezíveis muito rapidamente.

# Capítulo 6

## Conclusões

Ao longo desse Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado PROFMAT tentamos apresentar a beleza da matemática por trás desses fabulosos números, outrora foram considerados impossíveis, inexistentes, sutis como inúteis, imaginários, dentre outros nomes nada amigáveis, e por fim Números Complexos até os dias atuais, que para muitos ainda, desprovidos do seu contado, da beleza deles, pode gerar alguns contra tempos nas suas mentes, digamos assim.

Fico Feliz por poder conhecer mais os detalhes do universo dos Números Complexos e apresentá-lo nesse nosso trabalho. Um dos fatos curiosos que ficou marcado, é saber que não foram as equações polinomiais do segundo grau, quando o discriminante é negativo, que levaram ao descobrimento dos números complexos e sim, as equações polinomiais do terceiro grau através de muitas intrigas e orgulhos feridos sobre uma fórmula de resolvê-las.

Mostramos a construção dos números complexos, mas o caminho a ser trilhado para levá-los ao Ensino Médio tornasse árduo, pois temos uma demanda de jovens, que pensam mais fotografias, vídeos, redes sociais, drogas violência e sexo do que pensar por dez minutos na resolução de problemas que levem a cálculos com mais de 3 linhas numa folha de caderno escolar.

Mas cabe a nós professores e a muitos, o desafio de transformar através do saber crítico, acreditando sem desanimar na educação como única forma de transformar uma sociedade, em algo melhor. Porém tudo isso só funciona se houver amor em tudo que fazemos e Deus.

Por fim, como os números complexos são números que só podem ser representados num plano, a não ser, se forem reais puros ou imaginários puros, que mesmo assim não deixam de estarem no mesmo plano, e pela estranheza dos nomes até os dias atuais, e por ser um curioso nato e gostar de dar nomes a tudo que observo, característica própria, que me leva a aprender e decorar as coisas, fórmulas e resultados, lugares, deixo aqui registrado aos Números Complexos, um outro batismo chamado-os de **Números Planares**, talvez a sonoridade não seja boa, por enquanto, mas longe de mim tentar convercer, particularmente me agrada.

# Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, Geraldo; *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2008.
- [2] Boyer, Carl B., Merzbach, Uta C.; *História da Matemática*, Tradução da terceira edição americana. Editora Edgar Blucher Ltda. São Paulo, 2015.
- [3] Boyce, William E. , DiPrima, Richard C.; *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Sétima Edição. Editora LTC, Rio de Janeiro, 2002.
- [4] Churchill, Ruel V., Brown, James Ward; *Variáveis Complexas e Aplicações*. 9ª edição. Editora Amgh. São Paulo, 2015.
- [5] Carmo, Manfredo Perdigão, Morgado, Augusto César, Wagner, Eduardo; *Trigonometria Números Complexos*. 3ª Edição. Editora SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [6] Eves, Howard; *Introdução à História da Matemática*. Editora UNICAMP. Campinas-SP, 2004.
- [7] Garbi, Gilberto G.; *O Romance das Equações Algébricas*. 4ª Edição. editora Livraria da Física. São Paulo, 2010.
- [8] Ferreira, Jamil; *A construção dos Números*. 3ª Edição, Editora SBM, Textos Universitários, Rio de Janeiro, 2013.
- [9] Lima, Elon Lages; *Meu Professor de Matemática*. 6ª Edição. Editora SBM, Rio de Janeiro, 2012.
- [10] Lima, Elon Lages; *Análise Real volume 1. Funções de uma variável*. 10ª Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [11] Lima, Elon Lages, Carvalho, Paulo Cezar Pinto, Wagner, Eduardo, Morgado, Augusto César; *A Matemática do Ensino Médio volume 3*. 6ª Edição, SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- [12] Lima, Elon Lages, Carvalho, Paulo Cezar Pinto, Wagner, Eduardo, Morgado, Augusto César; *A Matemática do Ensino Médio volume 1*. 9ª Edição, SBM, Rio de Janeiro, 2009.

- [13] Milies, César Polcino; *A Emergência dos Números Complexos*, Revista do Professor de Matemática, N°24, Ano 1993. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/24/2.htm>>. Acesso em 14 fev 2019.
- [14] Roque, Tatiane Marins, Carvalho, João Bosco Pitombeira de; *Tópicos em história da Matemática*. SBM, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2012.
- [15] Normas da ABNT – NBR 6023: *Elaboração de referências*, (2000). Disponível em <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR6023.pdf>>. Acesso em 15 out 2014.
- [16] Irwin, J. David , Nelms, R. Mark; *Análise Básica de Circuitos para Engenharia*. Décima Edição, LTC, Rio de Janeiro, 2013.
- [17] Zill, Dennis G. ,Shanahan, Patrick D.; *Curso Introdutório à Análise Complexa com Aplicações*. Segunda, Editora LTC, Rio de Janeiro, 2011.
- [18] Instituto Tecnológico de Aeronáutica. Disponível em: <http://www.vestibular.ita.br/>. Acesso em: 15/05/2019.
- [19] Universidade Federal de Campina Grande. Disponível em: <http://mat.ufcg.edu.br/pgmat/>. Acesso em: 05/04/19.
- [20] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira Legislação e Documentos. Disponível em: <https://enem.inep.gov.br> Acesso em: 20/06/2019.
- [21] Fundação Universitária para o Vestibular. Disponível em: <https://acervo.fuvest.br/fuvest/index.html> . Acesso em: 20/ 06/2019.
- [22] Universidade Estadual da Paraíba. Disponível em: <http://departamentos.uepb.edu.br/matematica/>. Acesso em: 20/06/2019.
- [23] Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base> . Acesso em: 21/06/2019.