Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Grandezas proporcionais e regra de três composta: uma equivalência entre o esquema das flechas e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Esmar Machado da Trindade

Teresina – PI

2019

Esmar Machado da Trindade

Dissertação de Mestrado:

Grandezas proporcionais e regra de três composta: uma equivalência entre o esquema das flechas e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof°. Dr. Afonso Norberto da Silva

Teresina – PI
2019

T832g Trindade, Esmar Machado da.
Grandezas proporcionais e regra de três composta: uma equivalência entre o esquema das flechas e o Teorema Fundamental da Proporcionalidade / Esmar Machado da Trindade. - 2019.
66f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, 2019.
"Orientador(a): Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva."

1. Regra de Três Composta. 2. Proporcionalidade.
3. Teorema Fundamental da Proporcionalidade. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca Central da UESPI
Grasielly Muniz Oliveira (Bibliotecária) CRB 3/1067

ESMAR MACHADO DA TRINDADE

GRANDEZAS PROPORCIONAIS E REGRA DE TRÊS COMPOSTA: UMA EQUIVALÊNCIA ENTRE O ESQUEMA DAS FLECHAS E O TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de Concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Afonso Norberto da Silva
Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Presidente
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

Roberto Arruda Lima Soares
Prof. Dr. Roberto Arruda Lima Soares – Examinador
Instituto Federal do Piauí – IFPI

Pitágoras Pinheiro de Carvalho
Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho – Examinador
Universidade Estadual do Piauí – UESPI

TERESINA
Setembro/2019

Dedico este trabalho a todos aqueles que de alguma forma acreditaram no meu potencial e que me guiaram até aqui.

Agradecimentos

Agradeço a Jesus por me permitir e dar forças para chegar onde cheguei e por no meu caminho pessoas como Afonso Noberto da silva ao qual estendo meus agradecimentos.

Agradeço a uma desconhecida, que a com um ato de altruísmo me permitiu estar aqui hoje. Obrigado, ele não foi esquecido e tento honrá-lo a todo momento.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar três técnicas de resolução de problemas de regra três composta, isto é, resolução de problemas de proporcionalidade envolvendo três ou mais grandezas proporcionais. As três técnicas são: redução parcial à unidade; redução total à unidade; e pelo esquema de flechas. E também apresentar, como consequência deste estudo, que resolver tais problemas pelo esquema de flechas equivale resolvê-los pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Palavras-chave: Regra de Três Composta, Proporcionalidade, Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Abstract

The objective of this paper is studying and presenting three techniques of compound three rule problems solving, that is, proportionality problems solving involving three or more proportional quantities. The three techniques are: partial reduction to unit, total reduction to unit, and the arrow scheme. It also aims to present the consequence of this study, which states that solving such problems by the arrow scheme is equivalent to solving them by the Fundamental Proportionality Theorem.

Keywords: Compound Three Rule, Proportionality, Fundamental Proportionality Theorem.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

A idéia de fazermos um trabalho voltado para a resolução de problemas de regra de três composta veio da necessidade de responder uma antiga pergunta que havíamos feito a um professor: por que o esquema das flechas na resolução de problemas de regra de três composta funciona? Na busca da resposta, fizemos um breve estudo de como os povos antigos lidavam com problemas de proporcionalidade, apresentado no capítulo 1 deste trabalho, onde destacamos os povos egípcios, babilônicos e gregos cujo referencial teórico é baseado em (EVES, 2011) e (BOYER, 1974) ; de como Eudoxo definia proporção baseado em (RPM07, 2010) visto no capítulo 2; no capítulo 3 apresentamos a definição atual de proporção bem como algumas de suas propriedades, também fizemos um estudo da Teoria Fundamental da Proporcionalidade, capítulo 4, cujo referencial teórico é baseado completamente em (LIMA, 2012), e finalmente no capítulo 5 apresentamos três técnicas de resolução de problemas de regra de três composta, isto é, problemas de proporcionalidade que envolvem três os mais grandezas proporcionais. Apresentamos inicialmente a técnica de redução parcial à unidade, depois a técnica de redução total à unidade e por último apresentamos a técnica do esquema de flechas e de como ele equivale ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Na busca daquela resposta, também constatamos que muitos trabalhos já tinham sido feito a respeito do assunto proporção e proporcionalidade dos quais destacamos os trabalhos feitos por (SILVA, 2015), na qual ele apresenta uma nova proposta de abordagem sobre o tema proporcionalidade para alunos do sétimo ano do ensino fundamental, tendo como objetivo principal o reconhecimento, por parte dos alunos, através de definições, se determinadas grandezas são proporcionais , caso sejam, se é uma relação de proporcionalidade direta ou inversa; por (SILVA, 2012) onde faz um estudo sobre proporções segundo os pontos de vista de Nicómaco e Boécio e faz uma relação entre esses e Os Elementos, de Euclides. por (FLORIANI, 2014), neste estudo ele descreve e caracteriza várias estratégias que estudantes do ensino básico utilizam para resolver problemas multiplicativos; em (AMARAL, 2014) encontramos um estudo aprofundado do Teorema Fundamental da Proporcionalidade bem como uma rápida análise de como alguns livros didático abordam a relação entre duas grandezas proporcionais; destacamos também (OLIVEIRA, 2017), em cujo trabalho é identificado e analisado as dificuldades dos alunos do sétimo ano do ensino fundamental no que se diz respeito ao aprendizado de razão e proporção.

Nesta busca por respostas não encontramos nenhum trabalho que tratasse exclusivamente de como mostrar o funcionamento das técnicas de resolução de problemas de regra de três composta (pelo menos não encontrados por nós) como nós propomos aqui, e temos assim, o principal ponto de relevância de nosso trabalho, que sustentado pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade nos deixam mais seguros ao apresentar as técnicas de resolução aos nossos alunos em sala de aula. Outro ponto de relevância é o de apresentar, como consequência dos nossos estudos , que resolver os problemas de regra de três composta através do esquema de flechas equivale a resolvê-lo pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

Capítulo 1

Proporcionalidade e proporção entre os povos antigos.

As origens da matemática, aritmética ou geométrica, são mais antigas que a arte de escrever , por isso neste capítulo faremos um pequeno resumo de como alguns povos antigos, egípcios, mesopotâmicos e gregos, já detentores de um certo grau de escrita, lidavam com problemas de proporcionalidade. Limitaremos a apresentar apenas alguns pontos mais relevantes para nós, deixando claro que há com certeza em outras fontes muito o que se ler sobre o tema. Essa limitação se dará de forma que apresentemos algumas idéias a cerca dos procedimentos usados para resolução de tais problemas.

1.1 Egito

A civilização egípcia prosperou no vale do rio Nilo, atualmente Egito, teve início por volta do ano 4.000 a.C. [figura 1.1]

A matemática egípcia era voltada para as necessidades práticas do cotidiano, de onde se destaca o calendário baseado nas cheias do rio Nilo e na engenharia de construção. Boyer escreve:

> [...] os egípcios eram louvavelmentes precisos nas contas e nas medições. As pirâmides exibem tão alto grau de precisão na construção e na orientação que lendas mal–fundamentadas surgiram em tono delas. A sugestão, por exemplo, que a razão do perímetro da base da "Grande Pirâmide" (de Khufu ou ou Quéops) para a altura foi conscientemente posta no valor de 2π está claramente em desacordo com a geometria egípcia. (BOYER, 1974)

A matemática egípcia chegou até nós através de papiros. Um certo número deles de algum

Figura 1.1: Imagem do antigo egito

Fonte: <https://sites.google.com/site/nahistoriageral/idade-antiga/egito-antigo>

modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de 3.500 anos. Um desses foi comprado, em 1858, por um antiquário escocês, Henry Rhind, por isso é chamado de Papiro de Rhind, ou de Ahmes [figura 1.2], em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 a. C..

Figura 1.2: Papiro de Rhind

Fonte: <http://mundomatematicodocaldas.blogspot.com/2013/10/papiro-de-rhind.html>

Muitos dos problemas encontrados no Papiro de Ahmes mostra claramente o conhecimento de manipulações equivalentes à regra de três. O problema 63, por exemplo, pede que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas sendo que as quantidades estão na proporção prolongada $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$, em notação atual. A solução é encontrada fazendo o quociente de 700 pela soma das frações na proporção. Neste caso, o quociente de 700 por $\frac{7}{4}$ é encontrado multiplicando 700 pelo recíproco do divisor, que é $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$, em frações unitárias. O resultado é 400; calculando $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ de 400 são obtidas as parcelas de pães requeridas. O processo de resolução desse problema é atualmente chamado de "divisão em partes diretamente proporcionais", portanto, está caracterizado um latente raciocínio proporcional nesse povo.

O problema 63 é do tipo aritmético, porém, há outros problemas que não se referem a um objeto concreto, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$ onde a, b e c são conhecidos e x é o termo desconhecido, por exemplo, o problema 24 pede o valor de **aha** sabendo que **aha** mais um sétimo de **aha** dá 19, em notação atual $x + \dfrac{x}{7} = 19$, onde a incógnita é chamada de **aha**. Ahmes resolveu esse problema usando o método da falsa posição que consistia em atribuir um valor convenientemente escolhido, falso, para aha, as operações à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado então é comparado ao resultado que se pretende e usando proporção, chega-se à resposta correta. No problema 24 o valor suposto para a incógnita é o 7 de modo que $x + \dfrac{x}{7} = 8$, sabendo–se que $8 \cdot \left(2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) = 19$, a solução pedida , então, é obtida multiplicando-se 7 por $2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}$, que expressa em frações unitárias é $16 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}$. Se ao supor *aha* igual a 7 tem-se do lado esquerdo igualdade $7 + \dfrac{7}{7} = 8$, então que valor devo supor a *aha* para que tenhamos 19 nesse lado esquerdo? Considerando que o valor de *aha* é diretamente proporcional ao valor encontrado no lado esquerdo, então bastaria encontrar um número que multiplicado por 8 resulte 19, ora pois, $\dfrac{19}{8}$ esse número, que em fração unitária é $\dfrac{19}{8} = \dfrac{16}{8} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{16}{8} + \dfrac{2}{8} = 2 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4}$. Façamos essas correspondências no esquema abaixo,

$$\begin{array}{rcl}
\text{valores de } \textit{aha} & \longrightarrow & \text{lado esquerdo} \\
7 & \longrightarrow & 8, \text{falso valores} \\
\downarrow \times \dfrac{19}{8} & & \times \dfrac{19}{8} \downarrow \\
7 \cdot \dfrac{19}{8} & \longrightarrow & 19,\ \text{valores corretos}
\end{array}$$

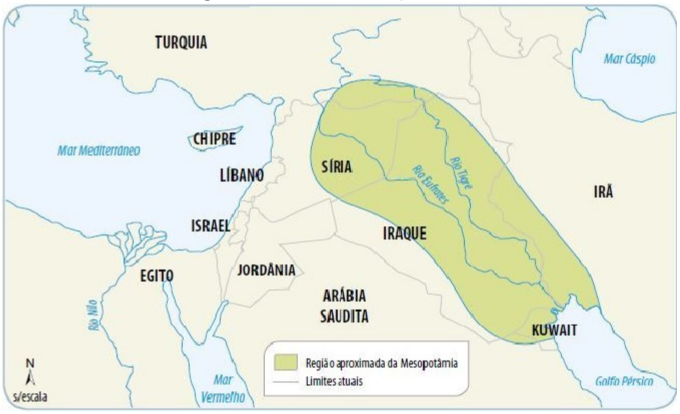
assim como $8 \cdot \dfrac{19}{8} = 8 \cdot \left(2 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4}\right) = 19$ devemos ter como valor correto para $7 \cdot \dfrac{19}{8} = 7 \cdot \left(2 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4}\right) = 19$.

Uma observação acerca da escolha do 7. Poderíamos escolher qualquer valor, haja visto que quando usamos a incógnita x já estamos informando esse fato. A sua escolha é conveniente por que obtemos um número inteiro no lado esquerdo da igualdade.

1.2 Mesopotâmia

Considerada o berço da civilização, a Mesopotâmia compreende um conjunto de povos que viveram nos vales dos rios Tigres e Eufrates, no que hoje corresponde ao território do Iraque e regiões adjacentes da Síria, Turquia e Irã, no período que se estende aproximadamente, do ano de 3500 a.C. até o começo da era Cristã. Dentre os reinos mesopotâmicos merece destaque aquele baseado na cidade de Babilônia. [figura 1.3],

Figura 1.3: Mesopotâmia



Fonte: <https://www.coladaweb.com/historia/mesopotamia>

Segundo (EVES, 2011), os arqueólogos que estudam a Mesopotâmia já desenterraram mais de 500.000 de tabuletas de argila, das quais, cerca de 400 delas foram identificadas como estritamente matemáticas, sendo quase a metades eram tábuas matemáticas e o restante eram tipos de problemas matemáticos, voltados para matemática comercial e agrária, geometria e álgebra, quer de natureza prática ou não. Dentre os textos de problemas matemáticos destacamos dois deles: O primeiro pede o lado de um quadrado se a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número 14;30 (em notação sexagesimal). Em notação atual, sendo x a medida do lado desse quadrado, resolver o problema equivale resolver a equação $x^2 - x = 870$. a solução é:

"tome a metade de 1 que é $0;30$; multiplique por $0;30$ o que dá 14.30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado."

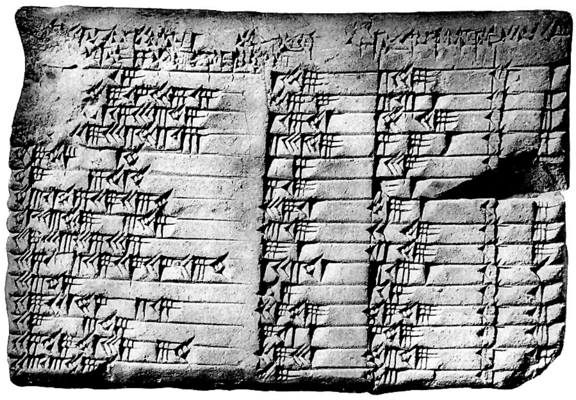
A solução, é óbvio, equivale à fórmula $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)+q} + \frac{p}{2}$ para uma raiz da equação $x^2 - px = q$ texto resolve a equação $11x^2 + 7x = 6;15$. Na solução, primeiro ele multiplica os dois membros da equação por 11, obtendo,

$$11 \cdot (11x^2) + 11 \cdot (7x) = 11 \cdot (6;15) \implies (11x)^2 + 7 \cdot (11x) = 1,8;45$$
$$\implies y^2 + 7y = 1,8;45$$

onde $y = 11x$ a solução desta última equação equivale resolver a equação $y^2 + py = q$ onde uma das raízes é $y = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right) + q} + \frac{p}{2}$, e fazendo $x = \frac{y}{11}$ obtém a solução da equação original usando a técnica descrito no primeiro problema. Observamos que ao multiplicar a equação original por 11 ele usou o princípio multiplicativo das igualdades que é um raciocínio proporcional, pois transforma uma equação em outra equivalente.

Os babilônios também sabiam que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais, ou seja, eles já conheciam o teorema de Pitágoras muito antes dele ser descoberto! Isso se deve ao fato da curiosa tábua de Plimpton-322 [figura 1.4], escrita entre 1900 e 1600 a.C. Nela encontramos alguns dos Chamados ternos pitagóricos.

Figura 1.4: Tábua de Plimpton 322 – Original



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322>

O conteúdo principal do Plimpton 322 é uma tabela de números, com quatro colunas e quinze linhas, em notação sexagesimal babilônica. A quarta coluna é apenas uma linha de números em ordem de 1 a 15. A segunda e terceira colunas são totalmente visíveis na tableta. No entanto, a ponta da primeira coluna foi quebrada, e há duas consistente extrapolações para o que poderia ser a falta de dígitos; estas interpretações diferem apenas em saber se cada série começa ou não com um dígito adicional igual a 1. Com as diferentes extrapolações mostradas entre parênteses, esses números são os seguintes: [Tabela 1.1]

Mas adiante veremos como os gregos lidaram com os ternos pitagóricos que são exemplos

(1)59:00:15	1:59	2:49	1
(1)56:56:58:14:50:06:15	56:07	120:25	2
(1)55:07:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
(1)53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	4
(1)48:54:01:40	1:05	1:37	5
(1)47:06:41:40	5:19	8:01	6
(1)43:11:56:28:26:40	38:11	59:01	7
(1)41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	8
(1)38:33:36:36	8:01	12:49	9
(1)35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	10
(1)33:45	45	1:15	11
(1)29:21:54:02:15	27:59	48:49	12
(1)27:00:03:45	2:41	4:49	13
(1)25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	14
(1)23:13:46:40	56	1:46	15

Tabela 1.1: Plimptom 332 traduzida
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322>

de proporcionalidade na babilônia, muito antes deles serem descobertos.

Os babilônicos também tinha conhecimento de três médias. Se b é a média de a e c onde $a < c$, então as três quantidades estão relacionadas por uma das proporções seguintes, a aritmética $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a}$, a geométrica, $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b}$, a subcontrária (harmônica), $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$ e a "proporção áurea" que relaciona duas delas, O primeiro de dois números está para sua média artmética como a média harmônica está para o segundo número.

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c} = \frac{\frac{b-a}{c-b}}{c}$$

1.3 Grécia

A Grécia está situada no sudeste da Europa, no sul da península Balcânica. A Grécia é circulada ao norte pela Bulgária, pelo Macedônia do Norte e pela Império Persa; ao oeste pelo mar Jônico; ao sul pelo mar Mediterrâneo e a leste pelo mar Egeu e pela Turquia [figura 1.5]

Figura 1.5: Grécia

Fonte: <http://radiomaffei.blogspot.com/2013/02/alguns-mapas-da-grecia-antiga.html>

Dentre as civilizações antigas que mais se destaca é a grega, quase não há registros e nem fontes originais da primitiva matemática grega. A história dos 300 primeiros anos da matemática grega foi ofuscada pela grandeza dos Elementos de Euclides, escritos por volta de 300 a.C. , segundo (EVES, 2011).As fontes de estudos da matemática grega pré–Euclides é quase toda obtida de forma indireta através do chamado **Sumário Eudemiano**, de Proclo. Esse sumário é um breve resumo do desenvolvimento da matemática grega até Euclides. Nesse sumário continha descrições sobre os feitos de Tales, de Mileto e Pitágoras de Samos. Fundadores das Escolas Ioniana e Pitagórica, respectivamente.

Enquanto na Mesopotâmia e no Egito a matemática era essencialmente voltada para as atividades práticas, essas duas escolas passaram perguntarem como e o porquê das coisas. Com Tales, a geometria passou a ser estudada de forma abstrata e dedutiva e a filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que as causas últimas das várias características do homem e da matéria são os números inteiros e frações desses, números racionais, "todas as coisas são números", segundo Pitágoras. Essa filosofia sofreu um abalo quando Pitágoras descobriu a irracionalidade do número $\sqrt{2}$, não só por que vai contra sua crença filosófica mas também porque desmonta toda a teoria das proporções dessa escola , que era baseada nas grandezas comensuráveis. Esse contratempo seria resolvido por Eudoxo, como veremos em **2.2**.

Na tabela de Plimpton-322, parametrizada [Tabela 1.2], temos $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$. Onde u e v são primos entre si, um é par e o outro é ímpar e $u > v$. Assim, se $u = 32$ e $v = 15$ (linha 8) $a = 960$, $b = 799$ e $c = 1249$. Essa parametrização é considerada um dos maiores feitos gregos.

Uma das descobertas dos pitagóricos é a Teoria das Proporcionais. Acredita-se que Pitágoras tenha tomado conhecimento das três médias aritmética, a geométrica e a harmônica e da "proporção áurea" que relaciona duas delas, na Mesopotâmia. Porém, os pitagóricos generalizaram esse trabalho acrescentando mais sete novas médias, perfazendo assim um total de dez médias. Se b é a média de a e c onde $a < c$, então as três quantidades estão relacionadas por uma das proporções seguintes (BOYER, 1974).

(1) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{a}$

(2) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{b}$

(3) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{a}{c}$

(6) $\dfrac{b-a}{c-b} = \dfrac{c}{b}$

(7) $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{c}{a}$

(8) $\dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{c}{a}$

u	*v*	Cateto *a*	Cateto *b*	Hipotenusa *c*
2	1	4	3	5
9	4	72	65	97
12	5	120	119	169
14	5	140	171	221
15	8	240	161	289
20	9	360	319	481
25	12	600	481	769
32	15	960	799	1249
48	25	2400	1679	2929
50	27	2700	1771	3229
54	25	2700	2291	3541
75	32	4800	4601	6649
81	40	6480	4961	8161
125	54	13500	12709	18541

Tabela 1.2: Tábuas com os termos Pitagóricos
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Plimpton$_3 22$

(4) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$

(5) $\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$

(9) $\frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a}$

(10) $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$

As quais representam segundo (SILVA, 2012):

(1) Proporção Aritmética crescente

(2) Proporção Geométrica crescente

(3) Proporção Harmônica crescente

(4) Subcontrária à Harmônica

(5) Contrária à Geométrica 1

(6) Contrária à Geométrica 2

(7) (7ª - primeira de quatro)

(8) (8ª - segunda de quatro)

(9) (9ª - terceira de quatro)

(10) (10ª - quarta de quatro)

Esses fatos mostram bem o conhecimento proporcional entre os gregos.

A obra Os Elementos, atribuída a Euclides, 300 a.C., é uma das mais influentes na História da Matemática servindo como o principal livro para o ensino de matemática (especialmente geometria) desde a data da sua publicação até o fim do século XIX ou início do século XX. Nessa obra, os princípios do que é hoje chamado de geometria euclidiana foram deduzidos a partir de um pequeno conjunto de axiomas. São treze livros, um deles, o livro V, é dedicado apenas a uma Teoria das Proporções. (EVES, 2011)

Capítulo 2

Proporção (para Eudoxo)

Neste capítulo faremos uma exposição das idéias de razão entre grandezas comensuráveis e a definição de Proporção, de Eudoxo, bem como a demonstração do Teorema de tales para grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Eudoxo (viveu entre 408 a 355 a.C.) é considerado por alguns como o maior dos matemáticos gregos clássicos, e em toda a antiguidade, perdendo apenas para Arquimedes. Ele rigorosamente desenvolveu o Método da Exaustão, de Antífona, um precursor do cálculo integral. (EVES, 2011)

2.1 A idéia de razão

Ao encher tanque de combustível de meu carro percebo que ele, em sua capacidade máxima, suporta $20\mathrm{L}$ de álcool e $40\mathrm{L}$ de gasolina, juntos.

Uma forma de relacionar o volume de álcool com o volume de gasolina é através de uma razão.

O volume de álcool (A) está para o volume de gasolina (G) na razão de 20 para 40, e se escreve,

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{G}} = \frac{20}{40}$$

tomando o $\mathrm{mdc}(20, 40) = 20$ (20 litros) e dividindo numerador e denominado da razão $\frac{20}{40}$ por ele então, podemos reescrever o segundo membro da igualdade acima na forma reduzida

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}$$

Essa última igualdade nos informa que para cada 1 litro de álcool que foi colocado no tanque de combustível foram colocados, também, 2 litros de gasolina.

Ao colocar combustível no carro de minha filha percebi que o volume de álcool (A_f) está para o volume de gasolina (G_f) na mesma razão, isto é,

$$\frac{A_f}{G_f} = \frac{1}{2}$$

Então podemos concluir que ela colocou $60L$ de combustível em seu carro?

A resposta é: não necessariamente, a razão $\frac{1}{2}$ apenas nos diz que para cada 1 litro de álcool colocados no tanque foram colocados 2 litros de gasolina, nada nos diz quanto à capacidade máxima do tanque. Para sabermos quantos litros de combustível foram colocados no carro dela, precisamos de mais uma informação, quer seja o volume de álcool, quer seja o volume de gasolina colocado no seu carro.

Agora, se tomarmos $u = mdc(A_f, G_f)$ então, u caberá 1 vezes em A_f e 2 vezes em G_f, isto é,

$$A_f = 1 \cdot u \qquad \text{e} \qquad G_f = 2 \cdot u.$$

Somando membro a membro essas duas últimas igualdades, obtemos,

$$A_f + G_f = 3 \cdot u$$

Ora, essa igualdade nos diz que u cabe uma 3 vezes em $A_f + G_f$, em outras palavras, $A_f + G_f$ é um múltiplo de três, que são os número, $3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15, \ldots$. Assim se tomarmos $u = 15$, por exemplo, teremos:

$$\begin{aligned} A_f + G_f &= 3 \cdot u \\ &= 3 \cdot 15 \\ &= 45, \end{aligned}$$

ou seja, ela teria colocado 45 litros de combustível no seu carro, dos quais

$$\begin{aligned} A_f &= 1 \cdot u = 1 \cdot 15 = 15 \\ G_f &= 2 \cdot u = 2 \cdot 15 = 30, \end{aligned}$$

15L teriam sido de álcool e 30L de gasolina. E então,

$$\frac{A_f}{G_f} = \frac{15}{30}.$$

Assim $60\text{L} = A + G \neq A_f + G_f = 45\text{L}$.

Agora definiremos razão entre grandezas. Antes, vamos relembrar a definição de igualdade entre duas frações para isso usaremos a definição dada por (RPM05, 2010).

Definição 2.1 (Igualdade de frações). *Sejam $\frac{m}{n}$ e $\frac{m'}{n'}$ duas frações com m, n, m' e n' inteiros positivos, dizemos que elas são iguais se, e somente se, $m \cdot n' = m' \cdot n$, e se escreve,*

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Longleftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n \tag{2.1}$$

Definição de razão entre grandezas comensuráveis (RPM07, 2010). Considere duas grandezas, A e B, de mesma espécie e medidas na mesma unidade (ambas segmentos de reta, áreas, volumes, massa, etc....).

Definição 2.2. *Diz que A está para B na razão $\frac{m}{n}$ e se escreve*

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$$

se existe u tal que

$$A = m \cdot u \qquad e \qquad B = n \cdot u \tag{2.2}$$

sendo u a unidade de medida de A e de B, isto é, u cabe m vezes em A e n vezes em B, com m e n inteiros positivos.

Nos certificaremos agora, se a definição dada tem significado único e preciso. Ou seja, se existem outros u', unidade de medida de A e de B, e inteiros m' e n' tais que

$$A = m' \cdot u' \qquad \text{e} \qquad B = n' \cdot u' \tag{2.3}$$

Pela definição dada, a razão de A para B seria o número $\frac{m'}{n'}$, nada contra, desde que $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, isto é, $m \cdot n' = m' \cdot n$

(i). Mostraremos primeiro que se (2.2) e (2.3) ocorrerem então, $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow m \cdot n' = m' \cdot n$.

De fato, multiplicando em (2.2) $A = m \cdot u$ por n, obtemos:

$$\begin{aligned} n \cdot A &= n \cdot (m \cdot u) \\ &= m \cdot (n \cdot u) \\ &= m \cdot B \end{aligned}$$

Substituindo nessa última igualdade os valores obtidos em (2.3), tem-se que

$$\begin{aligned} n \cdot (m' \cdot u') &= m \cdot (n' \cdot u') \\ (n \cdot m') \cdot u' &= (m \cdot n') \cdot u' \\ n \cdot m' &= m \cdot n' \\ \frac{m}{n} &= \frac{m'}{n'} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

(ii). Mostraremos agora que se (2.1) e (2.2) ocorrerem, então $A = m' \cdot u'$ e $B = n' \cdot u'$. De fato, multiplicando em (2.2) $A = m \cdot u$ por n, obtemos

$$n \cdot A = m \cdot B,$$

como antes.

Agora dividindo A em m' unidades de medida iguais a um certo u', e B em n' unidades de medida iguais a u' encontramos $A = m' \cdot n'$ que é a primeira relação em (2.3). Substituindo $A = m' \cdot u'$ em $n \cdot A = m \cdot B$, teremos,

$$\begin{aligned} m \cdot B &= n \cdot A \\ &= n \cdot (m' \cdot u') \\ &= (m' \cdot n) \cdot u' \end{aligned}$$

Por outro lado substituindo $m' \cdot n = m \cdot n'$, por (2.1), na igualdade abaixo, obtemos

$$\begin{aligned}(m \cdot n') \cdot u' = m \cdot B &\implies m \cdot (n' \cdot u') = m \cdot B \\ &\implies n' \cdot u' = B \\ &\implies B = n' \cdot u'\end{aligned}$$

que é a última igualdade de (2.3), assim fica demonstrado (ii). Por (i) e (ii) fica demonstrado que a Definição 2 dada tem significado único e preciso. $\square$

Definição 2.3. *Diz–se que A está para B na razão $\dfrac{m}{n}$ se, e somente se, $n \cdot A = m \cdot B$, isto é,*

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n} \iff n \cdot A = m \cdot B$$

Mostrar que Definição 2 implica Definição 3 já está demonstrado, mostraremos agora que Definição 3 implica Definição 2. De fato, suponhamos que exista inteiro m e n tais que $n \cdot A = m \cdot B$, tomemos u, unidade de medida, de tal forma que

$$A = m \cdot u$$

multiplicando essa última igualdade por n, obtemos

$$\begin{aligned}n \cdot (m \cdot u) = m \cdot B &\implies m \cdot (n \cdot u) = m \cdot B \\ &\implies n \cdot u = B \\ &\implies B = n \cdot u\end{aligned}$$

Dai,

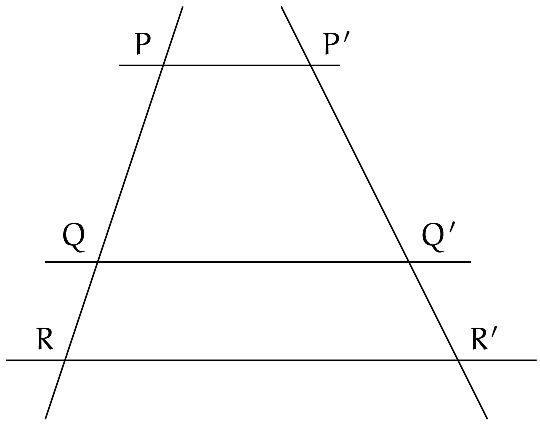
$$\frac{A}{B} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} \iff \frac{A}{B} = \frac{m}{n},$$

assim fica demonstrado que Definição 3 implica Definição 2.

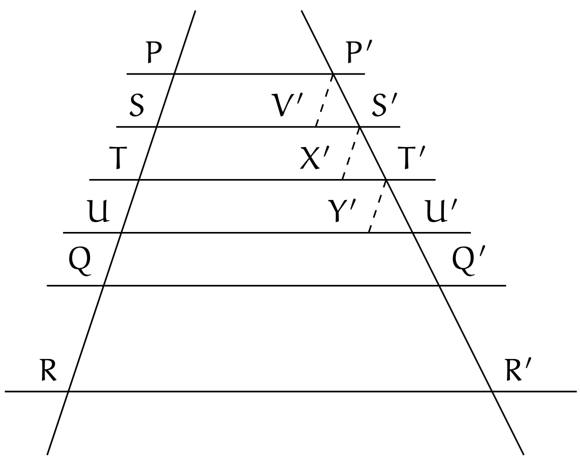
Demonstraremos agora o teorema de Tales supondo todos os segmentos comensuráveis, que diz.

Teorema 2.1 (Teorema de Tales)**.** *Num planos três retas paralelas determinam em duas retas* *transversais segmentos proporcionais. Isso significa, de acordo com o desenho abaixo, que*

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'}$$



Demonstração. Seja u um submúltiplo comum de PQ e QR, de sorte existem m e n tais que $PQ = n \cdot u$ e $QR = m \cdot u$. Sobre PQ marcamos $PS = ST = TU = \ldots = u$, como ilustra o desenho, e traçamos as retas SS', TT', $UU', \ldots$, paralelas a PP'. A seguir traçamos as retas $P'V'$, $S'X'$, $T'Y', \ldots,$ paralelas a PQ. É fácil ver que os triângulos $P'V'S'$, $S'X'T'$, $T'Y'U', \ldots$, são todos congruentes entre si, de sorte os segmentos $P'S' = S'T' = T'U' = \ldots = u'$. Assim sendo, $P'Q' = m \cdot u'$ e $Q'R' = n \cdot u'$, portanto,



$$\frac{PQ}{QR} = \frac{m}{n} = \frac{P'Q'}{Q'R'},$$

isto é,

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{P'Q'}{Q'R'}.$$

$\square$

2.2 Definição de proporção (De Eudoxo)

Nessa definição usaremos como grandeza um segmentos de reta, tal qual como está na definição original de Eudoxo, porém com notações atuais. Esta definição se encontra no Livro V, Os Elementos de Euclides.

Definição 2.4. *Dados quatro segmentos* A, B, C *e* D*, diz–se que* A *está para* B *assim como* C *está para* D*, se quaisquer que sejam* m *e* n *inteiros positivos, então*

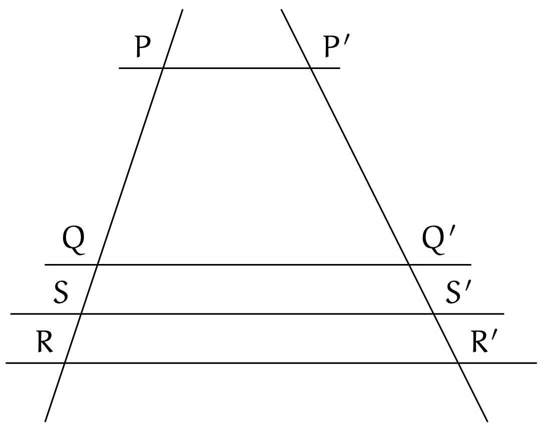
$$n \cdot A > m \cdot B \implies n \cdot C > m \cdot D, \tag{2.4}$$

$$n \cdot A = m \cdot B \implies n \cdot C = m \cdot D, \tag{2.5}$$

$$n \cdot A < m \cdot B \implies n \cdot C < m \cdot D, \tag{2.6}$$

Com essa definição Eudoxo não só resolveu o problema gerado pela descoberta dos números irracionais por Pitágoras como também influenciou na elaboração de uma teoria dos números reais por Dedekind, mais de dois milênios após sua elaboração.

Demonstraremos o Teorema de Tales, supondo, agora, para segmentos incomensuráveis.
1° Caso. Suponhamos que S coincida com R.
2° Caso: Suponhamos que S esteja entre Q e R, suponhamos, também, que exista u, tal que $PQ = m \cdot u$ e $QS = n \cdot u$, m e n inteiros positivos. Daí,



$$\frac{PQ}{QS} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$$

assim

$$n \cdot PQ = m \cdot QS$$

por outro lado

$$m \cdot QS < m \cdot QR$$

logo,

$$m \cdot PQ < m \cdot QR$$

Tracemos a reta SS' paralela a PP' de sorte que $P'Q' = m \cdot u$ e $Q'S' = n \cdot u$, daí,

$$\frac{P'Q'}{Q'S'} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$$

assim

$$n \cdot P'Q' = m \cdot Q'S'$$

por outro lado

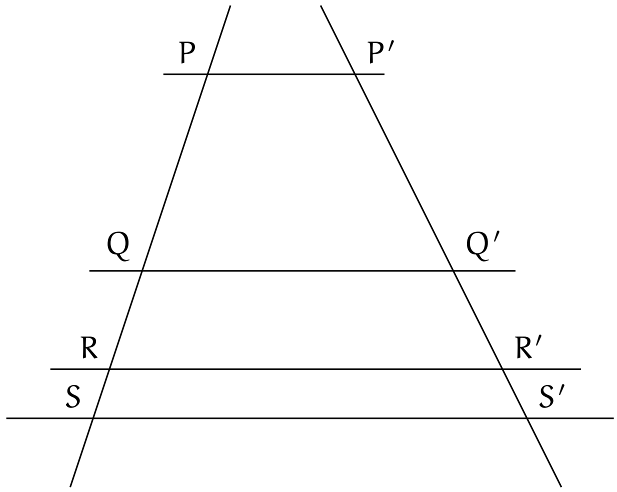
$$m \cdot Q'S' < m \cdot Q'R'$$

logo,

$$m \cdot P'Q' < m \cdot Q'R'$$

assim fica provado o 2° caso.

3º Caso: Suponhamos que R esteja entre Q e S, agora teremos, suponhamos, também, que exista u, tal que $PQ = m \cdot u$ e $QS = n \cdot u$, m e n inteiros positivos. Daí,



$$\frac{PQ}{QS} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$$

assim

$$n \cdot PQ = m \cdot QS$$

por outro lado

$$m \cdot QS > m \cdot QR$$

logo,

$$m \cdot PQ > m \cdot QR$$

Tracemos a reta SS' paralela a PP' de sorte que $P'Q' = m \cdot u$ e $Q'S' = n \cdot u$, daí,

$$\frac{P'Q'}{Q'S'} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$$

assim

$$n \cdot P'Q' = m \cdot Q'S'$$

por outro lado

$$m \cdot Q'S' > m \cdot Q'R'$$

logo,

$$m \cdot P'Q' > m \cdot Q'R'$$

assim fica provado o 3° caso. Fica assim provado o Teorema de Tales para segmentos incomensuráveis de acordo com eudoxo.

Capítulo 3

Razão e Proporção na atualidade

Neste capítulo apresentaremos as definições de razão e de proporção na atualidade bem como algumas de suas propriedades e aplicações.

3.1 Razão

Definição 3.1. *Sejam* $a,\ b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, *o quociente* $\frac{a}{b}$ *é chamado de razão de* a *para* b.

Em se tratando de grandezas, fica claro que essa razão é entre suas medidas e será um número se, para essas grandezas, for possível obter uma submúltiplo comum na mesma unidade de medida. por exemplo, queremos determinar a razão entre as medidas dos lados de dois quadrados, o primeiro com milímetros e o segundo com 8 centímetros. A razão lado do primeiro para o lado do segundo será dado pelo quociente

$$\frac{60\ mm}{8\ cm} = \frac{60\ mm}{80\ mm} = \frac{60}{80}$$

essa razão poderá ser, ainda, dada de outras formas, por exemplo, na sua forma irredutível,

$$\frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

Caso essa razão seja entre grandezas de espécies diferentes teremos que manter as unidades de medidas inicialmente usadas, por exemplo. A razão entre o espaço, s, percorrido por um corpo, em linha reta, e o tempo, t, que ele levou para percorrer esse espaço é definida como velocidade (escalar), v, desse corpo (considerando o movimento retilíneo e uniforme). Assim, a velocidade de um corpo, que percorreu, em movimento retilíneo uniforme, $200\ km$ em $2,5\ h$ é dada pela razão $\frac{s}{t}$, ou seja,

$$v = \frac{s}{t} = \frac{200\ \text{km}}{2,5\ \text{h}} = \frac{80\ \text{km}}{1\ \text{h}} = 80\ \text{km/h}$$

3.2 Proporção

Exemplo 3.1. *Suponhamos que tenhamos pago por* $2\ \text{kg}$ *de contra-filé por* R\$ $64,00$. *Perguntamos: Qual o preço de* $4\ \text{kg}$, *desse mesmo corte de carne, sendo que o preço não foi majorado?*

Solução: Observe que o preço (p) de um quilograma desse corte é dado pela razão entre o preço total pago (P) e a massa total comprada (M), isto é, $p = \frac{P}{M}$ assim,

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\text{R\$ } 64,00}{2\ \text{kg}} = \text{R\$ } 32,00/\text{kg},$$

ou seja, pagaremos R\$ $32,00$ por quilograma.

Como o preço por quilograma não foi majorado, pagaremos pelos 4 kg,

$$(4\ \text{kg}) \cdot (\text{R\$ } 32,00) = \text{R\$ } 128,00,$$

seja, pagaremos R\$ $128,00$.

Ora, o preço a pagar por quilograma é constante e como as razões $\frac{\text{R\$ } 64,00}{2\ \text{kg}}$ e $\frac{x}{4\ \text{kg}}$ representam o mesmo valor, isto é, são iguais, daí,

$$\frac{x}{4\ \text{kg}} = \frac{\text{R\$ } 64,00}{2\ \text{kg}},$$

suprimindo as unidades de medidas, obtemos a igualdade entre duas frações

$$\frac{x}{4} = \frac{64}{2},$$

essa última igualdade é uma equação do 1º grau na incógnita x, assim reduzindo-a ao mesmo denominador multiplicando o primeiro membro por $\frac{2}{2} = 1$, obtemos a equação equivalente

$$\frac{x}{4} = \frac{128}{4} \Longrightarrow x = 128,$$

isto é, pagaremos R\$ $128,00$.

Definição 3.2. *Sejam* $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ *com* $b \neq 0$ *e* $d \neq 0$*, dizemos que eles estão em proporção, na ordem dada, se, e somente se,* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$*. Isto é,* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *é condição necessária e suficiente para que se tenha* $a \cdot d = b \cdot c$*.*

Resolvamos o exemplo (3.1) usando proporção, a partir de

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} &= \frac{64}{2} \\ 2 \cdot x &= 4 \cdot 64 \\ 2 \cdot x &= 256 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x &= \frac{1}{2} \cdot 256 \\ x &= 128. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. *Sejam* a*,* b *e* c *inteiros positivos. sendo* $a \leqslant b \leqslant c$ *e* b *a média aritmética simples de* a *e* c*, qual o valor da razão* $\frac{b-a}{c-b}$*?*

Solução: Como b é a média aritmética simples de a e c, devemos ter $b = \frac{a+c}{2}$ ou equivalentemente, $\frac{b}{1} = \frac{a+c}{2}$, aplicando a definição de proporção,

$$2 \cdot b = a + c. \tag{3.1}$$

Agora, multiplicando a razão $\frac{b-a}{c-b}$ por $\frac{2}{2} = 1$ obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{c-b} &= \frac{2 \cdot (b-a)}{2 \cdot (c-b)} \\ &= \frac{2 \cdot b - 2 \cdot a}{2 \cdot c - 2 \cdot b} \qquad \text{e substituindo por (3.1)} \\ &= \frac{a + c - 2 \cdot a}{2 \cdot c - (a+c)} \\ &= \frac{c-a}{c-a} \\ &= 1. \end{aligned}$$

ou

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a}.$$

Essa última proporção já era conhecida na Babilônia e a mais de cinco milênios! O que nos deixa maravilhados com esse conhecimento, haja visto as dificuldade do manuseio desses valores, pois escrita era rudimentar e não se usava letras para representar números de forma geral.

3.3 Propriedades das proporções

Exemplo 3.3. *A soma das idades de Aldo e Bartolomeu é 100. Sabendo-se que a idade Aldo está para a idade de Bartolomeu na razão $\frac{2}{3}$, determine a idade de cada um.*

Resolveremos esse problema de duas maneiras,primeiro usando um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas e depois usando uma propriedade das proporções.
Primeira solução: Sejam a e b as idades de Aldo e Bartolomeu, respectivamente, então

$$\begin{cases} a+b=100 \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

isolando a, na primeira equação, $a = 100 - b$,e substituindo esse valor na segunda equação obtemos $\frac{100-b}{b} = \frac{2}{3}$ e agora, usando a definição de proporção, temos

$$3 \cdot (100 - b) = 2 \cdot b \Longrightarrow 300 - 3b = 2b \Longrightarrow 5b = 300$$

e portanto $b = 60$, isto é, a idade de Bartolomeu é 60 anos e consequentemente a de Aldo é 40 anos
Segunda solução: No sistema $\begin{cases} a+b=100 \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$, tomemos a segunda equação e adicionemos a ambos os membros da igualdade obtemos assim

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{2}{3} + 1 \Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{2+3}{3}$$

substituindo $a + b = 100$ nessa última igualdade, e aplicando a definição de proporção temos

$$\frac{100}{b} = \frac{5}{3} \Longleftrightarrow 5b = 300$$

e como antes temos $b = 60$ e $a = 40$, são as idades de Bartolomeu e Aldo, respectivamente.

De modo geral podemos mostrar que se $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}^*$, então

P_1: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{c \pm d}{d}$;

P_2: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a \pm b}{a} = \dfrac{c \pm d}{c}$;

P_3: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a \pm b}{c \pm d} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$;

P_4: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{d^2} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

Demonstração. P_1: Mostraremos que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$. Adicionando 1 a ambos membros da igualdade $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{b}{b} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \end{aligned}$$

Demonstrar que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$, basta adicionar -1 a ambos os membros da igualdade $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ e proceder como no caso anterior.

Demonstração de (P_2): $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a \pm b}{a} = \dfrac{c \pm d}{c}$. A igualdade $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ pode ser reescrita como $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$. Multiplicando ambos os membros dessa última igualdade por $\dfrac{b \cdot d}{a \cdot c}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{b \cdot d}{a \cdot c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{b \cdot d}{a \cdot c} \cdot \frac{a}{b} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{b \cdot d \cdot c}{a \cdot c \cdot d} = \frac{b \cdot d \cdot a}{a \cdot c \cdot b} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{b \cdot c \cdot d}{a \cdot c \cdot d} = \frac{a \cdot d \cdot b}{a \cdot c \cdot b} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{c} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{a} \cdot \frac{d}{c} \cdot \frac{b}{b} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \end{aligned}$$

por P_1

$$\frac{b+a}{a} = \frac{d+c}{c} \Longleftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

portanto

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

Do mesmo modo que foi demonstrado a segunda parte de P_1 se demonstra a segunda parte de P_2, ou seja,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

Demonstração de P_3: Demonstremos que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a \pm b}{c \pm d} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. A segunda igualdade sai da própria definição de igualdade. Demonstraremos a primeira igualdade, ou seja, que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$. De fato, pela definição de proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

adicionando ao primeiro membro dessa igualdade $a \cdot b$ e ao segundo $a \cdot b$ obtemos

$$\begin{aligned} a \cdot d = b \cdot c &\Longleftrightarrow a \cdot b + a \cdot d = a \cdot b + b \cdot c \\ &\Longleftrightarrow a \cdot (b+d) = b \cdot (a+c) \\ &\Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \\ &\Longleftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Do mesmo modo se demonstra que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Demonstração de P_4: De fato, elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ obtemos $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \left(\dfrac{c}{d}\right)^2$ que equivale a $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{d^2}$, assim fica demonstrado a primeira igualdade. Demonstraremos agora segunda igualdade. Multiplicando ambos os membros da igualdade $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ por $\dfrac{c}{d}$ obtemos $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{c}{d}$ que equivale a $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{c^2}{d^2}$ e como $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{d^2}$ segue que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{c^2}{d^2} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$. □

Exemplo 3.4. *A área de retângulo é de* $80\ \mathrm{cm}^2$*. Sabe-se que a largura está para comprimento na razão de* $\dfrac{1}{5}$*. Calcule as dimensões desse retângulo.*

Primeira solução: Sejam a e b as medidas da largura e do comprimento, respectivamente. Assim , de acordo com o enunciado temos o seguinte sistemas de equações do primeiro grau nas incógnitas a e b.

$$\begin{cases} a \cdot b & = 80 \\ \dfrac{a}{b} & = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Resolveremos esse sistema de duas maneiras. Primeira solução: Aplicando a definição de proporção na igualdade $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{5}$ obtemos, $5 \cdot a = b$ que substituído na primeira igualdade dá

$$a \cdot (5 \cdot a) = 80 \Longrightarrow 5 \cdot a^2 = 80 \Longrightarrow a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$$

substituindo esse valor em $5 \cdot a = b$, obtemos $b = 20$, ou seja, a medida da largura é $4\ cm$ e do comprimento $20\ cm$.

Segunda solução: Do sistema $\begin{cases} a \cdot b & = 80 \\ \dfrac{a}{b} & = \dfrac{1}{5} \end{cases}$ tomemos a segunda equação $\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}$ ela equivale a $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{5}$, multiplicando ambos os membro dessa equação por a obtemos $a \cdot \dfrac{a}{1} = a \cdot \dfrac{b}{5}$ ou $a^2 = \dfrac{a \cdot b}{5}$ e como $a \cdot b = 80$, segue que $a^2 = \dfrac{80}{5}$, isto é, $a^2 = 16$ e portanto $a = 4$ que substituído em $a \cdot b = 80$ dá $4 \cdot b = 80$, ou $b = 20$ e portanto o retângulo tem por medida da largura $4\ cm$ e do comprimento $20\ cm$.

Capítulo 4

Grandezas proporcionais

Neste capítulo trataremos do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Todas as demonstrações e afirmações estão em (LIMA, 2012)

Suponhamos que duas grandezas x e y se relacionem de tal modo que a cada valor especificado de x corresponde um valor bem determinado de y. Nesse caso dizemos que y é função de x, $y = f(x)$.

Para os valores x_1 e x_2, da grandeza x, correspondem os valores $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, da grandeza. Se $x_1 < x_2$ implicar $y_1 < y_2$ diremos que y é uma função crescente de x. Se, todavia, $x_1 < x_2$ implicar $y_1 > y_2$, diremos que y é função decrescente de x.

4.1 Grandezas diretamente proporcionais

Definição 4.1. *Diz-se que y é diretamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

1ª) y é função crescente de x;

2ª) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente da grandeza, o valor correspondente de y ficará também multiplicado por n.

Em termos matemáticos: $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, *para todo valor de x e todo $n \in \mathbb{N}$.*

Para facilitar nosso trabalho, de agora em diante lidaremos apenas com grandezas cujas medidas são números positivos.

Exemplo 4.1. *Seja x o volume e y a massa de uma porção de líquido homogêneo. A massa y é diretamente proporcional ao volume x.*

De fato, aumentando o volume a massa também aumentará, além do mais multiplicar o volume x por n equivale adicionar n volumes iguais a x, isto é, $n \cdot x = x + x + x + \ldots + x$, onde o segundo membro dessa igualdade possui n parcelas iguais a x. Para cada volume x corresponde a massa y, e para parcelas iguais a n se fará corresponderem a n parcelas iguais a y, ou seja, $y + y + y + \ldots + y = n \cdot y$. Assim, teremos $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, para todo x e para todo n natural.

Importante salientar que y pode ser uma função crescente sem que e seja diretamente proporcional a x.

Por exemplo, a área de um quadrado é função crescente do lado porém, se dobramos o lado, a área fica multiplicada por quatro (em vez de dois).

Observamos que na definição de grandezas diretamente proporcionais dada por meio de duas condições, a primeira não é o suficiente, isto é, a segunda não é consequência dela. Mas, poderia a segunda condição implicar a primeira?

Se existissem apenas números racionais, ou seja, se duas grandezas da mesma espécie fossem sempre comensuráveis, então da igualdade $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ válida para todo x e todo n natural, poderíamos concluir que $y = f(x)$ é função crescente. Isto é o que mostraremos agora mas, antes vejamos o seguinte.

Lema 4.1. *Se* $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ *para todo* $x > 0$ *e todo* n *natural, então* $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ *para todo número racional* $r = \dfrac{p}{q}$, *onde* p *e* q *são naturais.*

Demonstração. Temos

$$
\begin{aligned}
q \cdot f(r \cdot n) &= f(q \cdot r \cdot x) \\
&= f\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot x\right) \\
&= f(p \cdot x) \\
&= p \cdot f(x) \\
f(r \cdot n) &= \frac{p}{q} \cdot f(x) \\
&= r \cdot f(x)
\end{aligned}
$$

Agora mostraremos que a condição $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ implica a função $y = f(x)$ é crescente. Para isto, consideremos $x < x_1$. Então, $x_1 = c \cdot x$, onde $c > 1$. Se o número c fosse irracional (ou seja, se as grandezas x e x_1 fossem comensuráveis), teríamos $f(x_1) = f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ e dai $f(x) < f(x_1)$ porque $c > 1$, e portanto $y = f(x)$ é crescente. $\square$

Entretanto, poderia ocorrer que c seja irracional (por exemplo x pode ser lado e x_1 a diagonal de um quadrado), e então não poderíamos utilizar o lema acima. O teorema abaixo, que é o resultado fundamental a respeito das grandezas proporcionais, esclarece a questão.

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *As seguintes afirmações a respeito de* $y = f(x)$ *são equivalentes:*

1) y *é diretamente proporcional a* x*;*

2) para todo real $c > 0$*, tem-se* $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$*;*

3) existe um número k*, chamado a "constante de proporcionalidade" entre* x *e* y*, tal que* $f(x) = k \cdot x$ *para todo* x*.*

Demonstração. 1)$\Longrightarrow$ 2). Suponhamos, por absurdo, que $y = f(x)$ seja diretamente proporcional a x mas que se consiga achar um número real c tal que $f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x)$. Suponhamos inicialmente que $f(c \cdot x) < c \cdot f(x)$, isto é, $\dfrac{f(c \cdot x)}{f(x)} < c$. Entre dois números reais quaisquer existe sempre um número racional. Podemos então achar r racional tal que $\dfrac{f(c \cdot x)}{f(x)} < r < c$, o que significa $f(c \cdot x) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$. O Lema 1 nos permite reescrever essas desigualdades como $f(c \cdot x) < f(r \cdot x) < c \cdot f(x)$. Mas a desigualdade $f(c \cdot x) < f(r \cdot x)$, juntamente com o fato de que $r < c$, está em contradição com a hipótese que y seja diretamente proporcional a x, e ser portanto uma função crescente em x. Suponhamos então que $f(c \cdot x) > c \cdot f(x)$, isto é, $\dfrac{f(c \cdot x)}{f(x)} > c$, e como entre dois números reais quaisquer sempre existe um racional, seja r esse racional de modo que $\dfrac{f(c \cdot x)}{f(x)} > r > c$, ou $f(c \cdot x) > f(r \cdot x) > c \cdot f(x)$. Porém, a desigualdade $f(c \cdot x) > f(r \cdot x)$, juntamente com o fato de ser $r > c$, está em contradição com a hipótese de que y seja diretamente proporcional a x, e ser, portanto, uma função crescente de x. Logo só podemos ter $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$.

2)$\Longrightarrow$ 3). Tomemos $k = f(1)$. Então, em virtude de 2) usada com x em lugar de c, temos $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = k \cdot x$, logo $f(x) = k \cdot x$.

3)$\Longrightarrow$ 1). Por estarmos lidando apenas com grandezas cujas medidas são números positivos. Logo, $k = f(1) > 0$. Então, $x < x_1$ implica $k \cdot x < k \cdot x_1$, ou seja, $f(x) < f(x_1)$, portanto,

$y = f(x)$ é crescente em x. Além disso,

$$f(n \cdot x) = k \cdot n \cdot x = n \cdot (k \cdot x) = n \cdot f(x).$$

Portanto, y seja diretamente proporcional a x. $\square$

4.2 Grandezas inversamente proporcionais

Definição 4.2. *Diz-se que y é inversamente proporcional a x quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

1º) $y = f(x)$ é uma função decrescente de x;

2º) ao se multiplicar x por um numero natural n, o valor corresponde y fica dividido n por, isto é, $f(n \cdot x) = \dfrac{f(x)}{n}$ para todo x e todo n natural.

Por exemplo, o tempo necessário para ir, em linha reta, de um ponto A para um ponto b, com velocidade constante, é inversamente proporcional a essa velocidade. De fato, esse tempo diminui quando se aumenta a velocidade. além disso, ele reduz-se à metade, a um terço, a um quarto etc... quando se duplica , triplica , quadruplica etc... a velocidade

Teorema 4.2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). *As seguintes afirmações a cerca de $y = f(x)$ são equivalentes:*

1) y é inversamente proporcional a x;

2) para todo número real $c > 0$, tem-se $f(c \cdot x) = \dfrac{1}{c} \cdot f(x)$;

3) Existe k, chamado "fator de proporcionalidade entre x e y, tal que $f(x) = k \cdot \dfrac{1}{x}$ para todo x.

Uma demonstração para esse teorema poderá ser visualizada em [AMARAL,2014]

4.3 Observações a respeito dos Teoremas Fundamentais da Proporcionalidade

Os teoremas acima significam que , do ponto de vista estritamente matemático, tanto faz escolhermos a definição que demos em 4.1. e em 4.2., que corresponde à condição 2) dos teoremas ou aquela dada pela condição 3): "y é diretamente (ou inversamente) proporcional a x quando existe uma constante k tal que $y = k \cdot x$ $\left(\text{ou } y = k \cdot \frac{1}{x}\right)$".

Do ponto de vista da aplicabilidade, entretanto, essas duas maneiras de definir proporcionalidade não são equivalentes. Nos problemas, a tarefa de verificar se y é diretamente (ou inversamente) proporcional a x é mais facilmente executada com as definições dadas em 4.1. e em 4.2. Quanto à condição 3), a fórmula $y = k \cdot x$ nem sempre é dada, cabendo a nós deduzi-la e, para isso, precisamos conhecer as propriedades das grandezas relacionadas. Além disso, se já estamos em posse da fórmula $y = k \cdot x$, pouco importa saber sobre proporcionalidade; a fórmula já nos dá tudo que precisamos saber. As fórmulas $y = k \cdot x$ e $y = k \cdot \frac{1}{x}$ nos conduzem a outra maneira de definir o mesmo conceito, que é o seguinte.

Definição 4.3. *Sejam x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n valores assumidos pela grandeza x e y_1, y_2, y_3, $\ldots$, y_n os valores correspondentes da grandeza y, respectivamente. Dizemos que y é diretamente proporcional a x se, e somente se,*

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k,$$

onde k é a constante de proporcionalidade. De fato, afirmar que $y_1 = k \cdot x_1$, $y_2 = k \cdot x_2$, $y_3 = k \cdot x_3, \ \ldots, \ y_n = k \cdot x_n$, equivale a

$$\frac{x_1}{y_1} = k, \frac{x_2}{y_2} = k, \frac{x_3}{y_3} = k, \ \ldots, \ \frac{x_n}{y_n} = k$$

que equivale a

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = k.$$

Definição 4.4. *Sejam x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n valores assumidos pela grandeza x e y_1, y_2, y_3, $\ldots$, y_n os valores correspondentes da grandeza y, respectivamente. Dizemos que y é inversamente proporcional a x se, e somente se,*

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \ldots = x_n \cdot y_n = k,$$

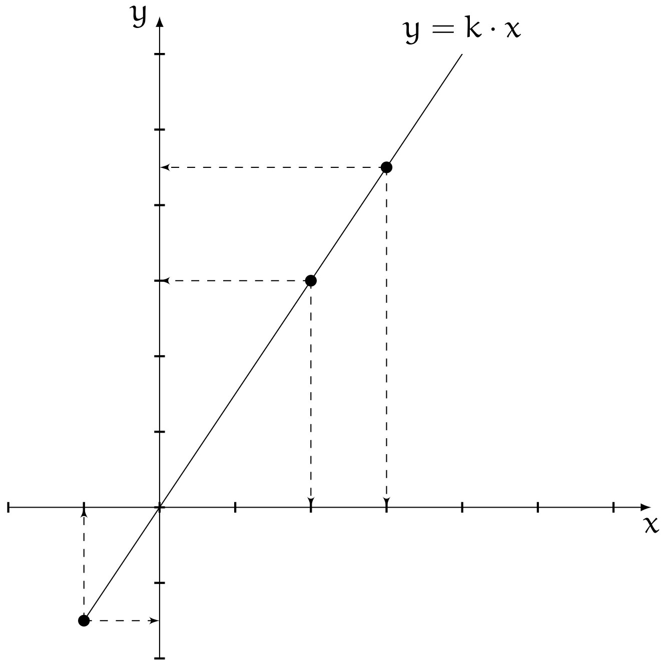
onde k é a constante de proporcionalidade. De fato, afirmar que $y_1 = \frac{k}{x_1}$, $y_2 = \frac{k}{x_2}$, $y_3 = \frac{k}{x_3}, \ \ldots, \ y_n = \frac{k}{x_n}$ equivale a:

$$x_1 \cdot y_1 = k, x_2 \cdot y_2 = k, x_3 \cdot y_3 = k, \ \ldots, \ x_n \cdot y_n = k$$

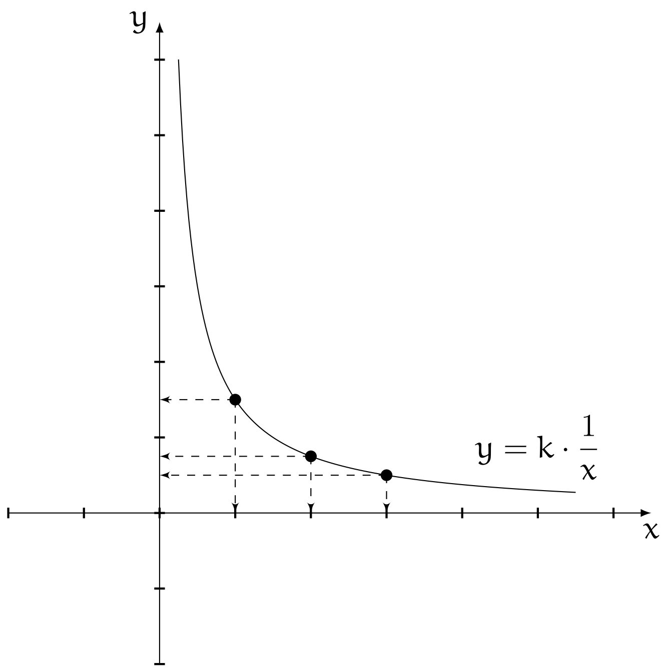
que equivale a

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = x_3 \cdot y_3 = \ldots = x_n \cdot y_n = k.$$

O esboço do gráfico das função $y = k \cdot x$, conforme especificada acima, é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas, o gráfico abaixo.



No caso da função $y = k \cdot \dfrac{1}{x}$ o esboço seria uma hipérbole como no gráfico abaixo:



4.4 Grandezas proporcionais a várias outras

Em um grande número de problemas tem-se uma grandeza z, de tal modo relacionada com outras, digamos, $x,\ y,\ u,\ v$ e w, que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para z. Então dizemos que z é uma função das variáveis $x,\ y,\ u,\ v$ e w e escrevemos $z = f(x,\ y,\ u,\ v,\ w)$.

Nessas condições, diz-se que z é diretamente proporcional a x quando:

1º) para quaisquer valores fixados de $x,\ y,\ u,\ v$ e w, a grandeza z é uma função crescente de x, isto é, a desigualdade $x_1 < x_2$ implica

$$f(x_1,\ y,\ u,\ v,\ w) < f(x_2,\ y,\ u,\ v,\ w);$$

2º) para quaisquer $x,\ y,\ u,\ v,\ w$ e n natural tem-se

$$f(n \cdot x,\ y,\ u,\ v,\ w) = n \cdot f(x,\ y,\ u,\ v,\ w).$$

Analogamente, diz-se que z é inversamente proporcional a x quando:

1º) para quaisquer valores fixados de $x,\ y,\ u,\ v$ e w, a grandeza z é uma função decrescente de x, isto é, a desigualdade $x_1 < x_2$ implica

$$f(x_1,\ y,\ u,\ v,\ w) > f(x_2,\ y,\ u,\ v,\ w);$$

2º) para quaisquer $x,\ y,\ u,\ v,\ w$ e n natural tem-se.

$$f(n \cdot x,\ y,\ u,\ v,\ w) = \frac{1}{n} \cdot f(x,\ y,\ u,\ v,\ w).$$

O teorema seguinte resume os Teoremas 4.1 e 4.2 no caso de uma função de várias variáveis. Para fixar as idéias, serão consideradas apenas as variáveis $x,\ y,\ u,\ v$ e w mas é claro que vale para qualquer número de variáveis.

Teorema 4.3. *Seja* $z = f(x,\ y,\ u,\ v,\ w)$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1) z *é diretamente proporcional a* x, y *e inversamente proporcional a* $u,\ v,\ w$*;*

2) existe uma constante k *tal que* $z = k \cdot \dfrac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w}$.

Demonstração. Suponhamos válida a afirmação 1) e ponhamos $k = f(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$. Em virtude dos Teorema 1 e 2, temos:

$$
\begin{aligned}
z &= f(x,\ y,\ u,\ v,\ w) \\
&= f(x \cdot 1,\ y,\ u,\ v,\ w) \\
&= x \cdot f(1,\ y,\ u,\ v,\ w) \\
&= x \cdot y \cdot f(1,\ 1,\ u,\ v,\ w) \\
&= \frac{x \cdot y}{u} \cdot f(1,\ 1,\ 1,\ v,\ w) \\
&= \frac{x \cdot y}{u \cdot v} \cdot f(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ w) \\
&= \frac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w} \cdot f(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1) \\
&= k \cdot \frac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w}.
\end{aligned}
$$

Reciprocamente, se vale a afirmação 2) então 1) é obviamente verdadeira. □

Assim, como consequência desse Teorema (e também da definição) que uma grandeza é diretamente (ou inversamente) proporcional a várias outras se, e somente se, é diretamente (ou inversamente) proporcional ao produto dessas outras.

Por exemplo, a área $A = A(x, y)$ de um retângulo de base x e altura y é diretamente proporcional a x e y. Verificaremos para x; Para y é feito de modo análogo.

Temos, se $x_1 < x_2$ então $A(x_1, y) < A(x_2, y)$ porque o retângula de base x_1 e altura y está contido no retângulo de base x_2 e mesma altura y. Além disso, o retângulo de base $n \cdot x$ e altura y se decompõe como reunião de n retângulos justapostos de base n e altura y, logo

$$A(n \cdot x, y) = n \cdot A(x, y),$$

segue do Teorema 3 que existe uma constante k tal que $A(x, y) = k \cdot x \cdot y$, onde $k = A(1, 1)$ é a área do retângulo de base e altura iguais a 1, quadrado de lado unitário. mas o quadrado de lado 1 é tomado como unidade de área, logo $A(1, 1) = 1$ e portanto $k = 1$ e $A(x, y) = x \cdot y$.

A chamada "Lei da Gravitação Universal" (de Newton) diz que "*a matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância*". Isto que dizer que um corpo de massa m_1 e outro de massa m_2, situados a uma distância d um do outro, se atraem com uma força de cuja intensidade F é diretamente proporcional m_1 e m_2, e inversamente proporcional a d^2. Segue-se do Teorema 3 que

$$F = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2},$$

onde k depende do sistema de unidades adotado.

4.5 Grandezas proporcionais e regra de três simples

Alguns problemas de proporcionalidade são resolvidos por uma regra que se baseia nas fórmulas $y = k \cdot x$ e $y = k \cdot \frac{1}{x}$. Após confirmado a proporcionalidade (direta ou inversa) entre as grandezas y e x e sendo conhecido três dos quatro valores x_1, x_2 da grandeza x e os correspondentes valores, y_1 e y_2 da grandeza y, temos, no caso da proporcionalidade direta

$$y_1 = k \cdot x_1 \qquad \text{e} \qquad y_2 = k \cdot x_2$$

ou

$$\frac{y_1}{x_1} = k \qquad \text{e} \qquad \frac{y_2}{x_2} = k,$$

donde, comparando essas duas igualdade, obtemos;

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2},$$

ora o quarto valor está bem definido , pois conhecemos três destes quatro valores são conhecidos. Observe que não há necessidade de conhecimento do valor da constante de proporcionalidade k.

No caso da Proporcionalidade inversa esta última igualdade seria

$$y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2.$$

É importante observar que, ao aplicar um modelo matemático para resolver problemas de natureza real, devemos ter em mente os limites de validez desse modelo. Em particular, quando afirmamos que uma grandeza qualquer y é inversamente proporcional a outra grandeza x, devemos deixar claro que isto se dá dentro de um certo limite de variação de y e x.

Por exemplo, o caso dos número de operários e o tempo de construção de uma casa. Se y é o número de operários necessários para se construir uma casa em x dias, observamos que essa duas grandezas são inversamente proporcionais, pois dobrando o número de operários o tempo corresponde para se construir essa casa ficará reduzido à metade, isto é $2 \cdot y$ operários corresponderá a um tempo de $\frac{x}{2}$, supondo ainda que a capacidade de produção dos operários sejam iguais. Dobrando o número de operários novamente, teríamos $4 \cdot y$ operários e o tempo de construção da casa estaria reduzido a $\frac{x}{4}$, se procedermos assim continuadamente haveria em certo momento $2^n \cdot y$ operários construindo a casa e portanto o tempo de construção da mesma estaria reduzido a $\frac{x}{2^n}$, n natural. Ora, para o número n suficientemente grande o tempo de construção estaria próximo de 1 segundo, tempo que não daria para colocar um tijolo dessa casa.

Problema 4.1. *O preço a pagar por* 10 *canetas é* R\$ $25,00$. *Supondo que não houve variação no preço quanto se pagaria por* 20 *dessas canetas?*

Organizando no esquema abaixo, onde x é o preço a pagar pelas 20 canetas, temos:

número de canetas	preço (em R$)
10	25
20	x

Como aumentando o número de canetas eu pagarei mais por elas e como dobrando o número de canetas o preço pago por elas também dobrará, então o custo das canetas é grandeza diretamente proporcional à grandeza número de canetas dai,

$$\begin{aligned} 10 \cdot x &= 20 \cdot 25 \\ x &= \frac{500}{10} \\ &= 50 \end{aligned}$$

Pagar-se-ia R\$ $50,00$.

Problema 4.2. *Uma família composta de* 6 *pessoas tem, na dispensa, alimentos suficientes para o seu consumo durante* 20 *dias, mas recebeu inesperadamente* 2 *parentes. Supondo que* *eles ficarão por tempo indeterminado, e que todos se alimentam com quantidades iguais e ainda que não se altere a quantidade de alimentos, então em quanto tempo os alimentos estarão esgotados?*

Fonte: <https://brainly.com.br/tarefa/6144963>

Organizando esses dados no esquema abaixo onde y é o novo tempo de duração.

número de pessoas	tempo (em dias)
6	20
8	y

Aumentando o número de pessoas o tempo de duração do alimento, que tem quantidade fixa, será menor e se dobramos o número de pessoas o número de dias será reduzido à metade. Logo a grandeza número de pessoas e inversamente proporcional à grandeza tempo de duração do alimento, dai

$$\begin{aligned} 8 \cdot y &= 6 \cdot 20 \\ y &= \frac{120}{8} \\ &= 15 \end{aligned}$$

ou seja, daria para 15 dias.

Outra forma de resolver os problemas citados é pelo método da redução à unidade o qual veremos agora.

Seja a grandeza y diretamente proporcional a grandeza x.

Sabendo que o valor y_1, da grandeza y, corresponde ao valor x_1, da grandeza x. Queremos saber: y_2, da grandeza y, corresponde a qual valor x_2, da grandeza x? A técnica de redução à unidade consiste em levar x_1 à unidade e logo em seguida levar esse valor unitários ao valor x_2 por meio de sucessivas multiplicações e/ou divisões,e procedendo desse mesmo modo e simultaneamente com seus respectivos valores y_1 e y_2 .Observe o esquema abaixo.

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{Valores para a grandeza } x & & \text{Valores da grandeza } y & \\
 & x_1 & \rightarrow & y_1 & \\
\div x_1 & & & & \div x_1 \\
 & 1 & \rightarrow & \dfrac{y_1}{x_1} & \\
\cdot x_2 & & & & \cdot x_2 \\
 & x_2 & \rightarrow & \dfrac{x_2 \cdot y_1}{x_1} &
\end{array}
$$

Como ao valor x_2 corresponde-se o valor y_2, segue que $y_2 = \dfrac{x_2 \cdot y_1}{x_1}$. Como y é diretamente proporcional a x então , pelo Teorema 4.1, existe um número k, tal que $y = k \cdot x$, logo $y_1 = k \cdot x_1$, donde $k = \dfrac{y_1}{x_1}$. Concluímos assim que, usar a técnica de redução à unidade consiste em encontrar primeiramente o fator de proporcionalidade e só depois encontrar o valor da incógnita.

Resolvendo o problema 4.1 por redução à unidade. O preço a pagar por 10 canetas é R$ 25,00 . Supondo que não houve variação no preço quanto se pagaria por 20 dessas canetas? As grandezas envolvidas neste problemas , como já visto, são diretamente proporcionais. Assim, usando a técnica de redução à unidade e aplicando a Definição temos:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & \text{Números de caneta} & & \text{Preço a pagar (R\$)} & \\
 & 10 & \rightarrow & 25 & \\
\div 10 & & & & \div 10 \\
 & 1 & \rightarrow & \dfrac{25}{10} & \\
\cdot 20 & & & & \cdot 20 \\
 & 20 & \rightarrow & 50 &
\end{array}
$$

Ou seja, pelas 20 canetas pagarei R$50,00

Uma família composta de 6 pessoas tem, na dispensa, alimentos suficientes para o seu consumo durante 20 dias, mas recebeu inesperadamente 2 parentes.Supondo que eles ficarão por tempo indeterminado, e que todos se alimentam com quantidades iguais e ainda que não se altere a quantidade de alimentos, então em quanto tempo os alimentos estarão esgotados? Como já observado o tempo de duração do alimento e o número de pessoas são grandezas inversamente proporcionais e por isso devemos observar o exposto na definição na Definição 4.2

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Número de pessoas} & & \text{tempo de duração do alimento} & \\ & 6 & \rightarrow & 20 & \\ \div 6 & & & & \cdot 6 \\ & 1 & \rightarrow & \dfrac{20}{6} & \\ \cdot 8 & & & & \div 8 \\ & 8 & \rightarrow & 15 & \end{array}$$

Além da regra de três simples temos a regra de três composta, que são problemas originados quando uma grandeza se relaciona com outras duas ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais. Esse tipo de problema veremos no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Grandezas proporcionais e regra de três composta

Neste capítulo mostraremos três técnicas de resolução de problemas de regra de três composta,isto é, problemas de proporcionalidade que envolvem três ou mais grandezas proporcionais, ou diretas ou inversas ou ambas simultaneamente. A primeira será por meio de redução à parcial unidade e a segunda por meio de redução total à unidade e a terceira por meio do esquema de flechas, por último resolveremos um problema usando as três técnicas e o Teorema 4.3. Limitaremos a apresentação da resolução a apenas cinco grandezas, obviamente valerá para tantas grandezas quanto se queira.

Consideraremos nos três casos que a grandeza z seja diretamente proporcional às grandezas x e y, e inversamente proporcional às grandezas u e w. Esteja z_1 bem definido para os valores $x_1,\ y_1,\ u_1,\ w_1$ e desejamos conhecer o valor de z_2 quando ocorrer $x_2,\ y_2,\ u_2,\ w_2$.

5.1 Redução parcial à unidade

Esta técnica consiste em levar o valor inicial de uma grandeza A até seu valor unitário (valor 1) e depois deste levá-lo ao valor que desejamos encontrar por meio de sucessivas multiplicações. Porém, devemos levar em consideração a relação, de proporcionalidade direta ou inversa, que existe entre ela e as outras grandezas envolvidas no problema. Essas multiplicações deverão ser feita simultaneamente na grandeza a qual estamos relacionando ela, ou seja, se multiplicarmos uma grandeza B por n a grandeza A deverá ser multiplicada por n no caso que sejam diretamente proporcionais e multiplicada por $\frac{1}{n}$ se forem inversamente proporcionais.

Reiteramos o fato de lidarmos sempre com grandezas cujos valores são sempre positivos. Usaremos a notação $A\alpha B$ e $A\alpha^{-1}B$ para indicar que as grandezas A e B são diretamente e inversamente proporcionais , respectivamente. Observamos que ao multiplicar duas grandezas estamos supondo fixadas as demais.

Resolveremos esse problema usando a tabela abaixo.

Tabela 5.1:

	Operação Multiplicação	z_1	Produto	x_1	y_1	u_1	w_1
$z\alpha x$	$\frac{1}{x_1}$		$\frac{z_1}{x_1}$	1			
$z\alpha x$	$\frac{z_1}{x_1}$ e 1 por x_2	z_2	$\frac{z_1 \cdot x_2}{x_1}$	x_2			
$z\alpha y$	$\frac{z_1 \cdot x_2}{x_1}$ e y_1 por $\frac{1}{y_1}$		$\frac{z_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot y_1}$		1		
$z\alpha y$	$\frac{z_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot y_1}$ e 1 por y_2	z_2	$\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2}{x_1 \cdot y_1}$		y_2		
$z\alpha^{-1}u$	u_1 por $\frac{1}{u_1}$ e $\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2}{x_1 \cdot y_1}$ por u_1		$\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1}{x_1 \cdot y_1}$			1	
$z\alpha^{-1}u$	1 por u_2 e $\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1}{x_1 \cdot y_1}$ por $\frac{1}{u_2}$	z_2	$\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2}$			u_2	
$z\alpha^{-1}w$	w_1 por $\frac{1}{w_1}$ e $\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2}$ por w_1		$\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2}$				1
$z\alpha^{-1}w$	1 por w_2 e $\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2}$ por $\frac{1}{w_2}$	z_2	$\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2 \cdot w_2}$				w_2
		z_2	$\frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2 \cdot w_2}$	x_2	y_2	u_2	w_2

Fonte: Autor

A última linha nos diz que $z = \frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2 \cdot w_2}$ quando ocorrer $x_2,\ y_2,\ u_2,\ w_2$.

Pelo Teorema 4.3 sabemos que z é proporcional a $\frac{x \cdot y}{u \cdot w}$, ou seja, existe uma constante k, tal que $z = k \cdot \frac{x \cdot y}{u \cdot w}$. Onde

$$z_1 = k \cdot \frac{x_1 \cdot y_1}{u_1 \cdot w_1} \iff k = \frac{z_1 \cdot u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1}$$

notemos que esse valor de k é conhecido, pois todos os valores no segundo membro dessa última igualdade também são. Também temos que

$$z_2 = k \cdot \frac{x_2 \cdot y_2}{u_2 \cdot w_2},$$

substituindo nessa última igualdade o valor k obtemos

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{z_1 \cdot u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1} \cdot \frac{x_2 \cdot y_2}{u_2 \cdot w_2} \\ &= \frac{z_1 \cdot u_1 \cdot w_1 \cdot x_2 \cdot y_2}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2 \cdot w_2 b} \end{aligned}$$

que é exatamente a igualdade encontrada usando a técnica de redução à unidade.

5.2 Redução total à unidade

O Teorema 4.3 nos diz que sendo z diretamente proporcional a x, y e inversamente proporcional a u, w, então existe uma constante k tal que $z = k \cdot \frac{x \cdot y}{u \cdot w}$. Donde tiramos que z é diretamente proporcional a $\frac{x \cdot y}{u \cdot w}$, sendo assim:

- z_1 é diretamente proporcional a
$$\frac{x_1 \cdot y_1}{u_1 \cdot w_1}, \tag{5.1}$$
- z_2 é diretamente proporcional a
$$\frac{x_2 \cdot y_2}{u_2 \cdot w_2}. \tag{5.2}$$

De (5.1) temos que $\frac{x_1 \cdot y_1}{u_1 \cdot w_1}$ implica z_1. Logo pela Definição 4.1., multiplicando $\frac{x_1 \cdot y_1}{u_1 \cdot w_1}$ e z_1 por $\frac{u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1}$ vem que

$$\frac{x_1 \cdot y_1}{u_1 \cdot w_1} \cdot \frac{u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1} = 1 \Longrightarrow z_1 \cdot \frac{u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1}$$

Novamente por Definição 4.1, multiplicando 1 e $z_1 \cdot \frac{u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1}$ por $\frac{x_2 \cdot y_2}{u_2 \cdot w_2}$ tem-se que

$$\frac{x_2 \cdot y_2}{u_2 \cdot w_2} \Longrightarrow z_1 \cdot \frac{u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1} \cdot \frac{x_2 \cdot y_2}{u_2 \cdot w_2}$$

Porém por (5.2) o valor $\frac{x_2 \cdot y_2}{u_2 \cdot w_2}$ implica z_2 e como os valores z_1, x_1, y_1, u_1, w_1, x_2, y_2, u_2, w_2 são dados só poderemos ter

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 \cdot \frac{u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1} \cdot \frac{x_2 \cdot y_2}{u_2 \cdot w_2} \\ &= \frac{z_1 \cdot x_2 \cdot y_2 \cdot u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1 \cdot u_2 \cdot w_2} \end{aligned}$$

Observamos que nesta técnica primeiro obtemos o valor da constante $k = z_1 \cdot \dfrac{u_1 \cdot w_1}{x_1 \cdot y_1}$ e só depois obtivemos o valor da incógnita z_2.

5.3 O esquema de flechas

Esta técnica consiste em organizar, em nosso caso, as grandezas $z,\ x,\ y,\ u,\ w$ em uma linha, na linha seguinte e imediatamente abaixo dessas grandezas colocamos os respectivos valores iniciais $z_1,\ x_1,\ y_1,\ u_1,\ w_1$ e na linha seguinte os valores $z_2,\ x_2,\ y_2,\ u_2,\ w_2$ conforme tabela abaixo

z	x	y	u	w
z_1	x_1	y_1	u_1	w_1
z_2	x_2	y_2	u_2	w_2

Em seguida colocamos uma seta na grandeza incógnita em qualquer sentido, de cima para baixo ($\downarrow$) ou de baixo para cima ($\uparrow$). Colocaremos ela no sentido de baixo para cima ($\uparrow$). Agora faremos as relações entre cada grandeza e a grandeza incógnita, mas somente entre esta e as outras, duas a duas. Ao fazer uma comparação supomos que os valores das demais estão fixados. As setas colocadas nas outras grandezas deverão ser colocadas de acordo com o tipo de relação entre a grandeza incógnita e ela. Setas com mesmo sentido indicam que as grandezas que foram comparada à grandeza incógnita são diretamente proporcionais, caso contrário são inversamente proporcionais.Coloquemos então as outras setas.

Como z é diretamente proporcional às grandezas x, y, estas últimas deverão ficar com a seta no sentido de baixo para cima ($\uparrow$); e como z é inversamente proporcional às grandezas u, w, estas deverão ficar com as setas no sentido de cima para baixo ($\downarrow$), veja tabela seguinte.

z ($\uparrow$)	x ($\uparrow$)	y ($\uparrow$)	u ($\downarrow$)	w ($\downarrow$)
z_1	x_1	y_1	u_1	w_1
z_2	x_2	y_2	u_2	w_2

Agora faremos a seguinte igualdade. No primeiro membro da igualdade colocaremos a razão entre os valores da incógnita , na ordem dada na tabela. No segundo membro faremos o produto das razões entre cada um dos valores de cada grandeza, porém devemos ficar atentos para a ordem que deverão ficar os valores nas razões, se a grandeza for diretamente proporcional a razão manterá a ordem da tabela, caso contrário a razão deverá ser invertida. assim obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{y_1}{y_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{w_2}{w_1} \\
&= \frac{x_1\cdot y_1\cdot u_2\cdot w_2}{x_2\cdot y_2\cdot u_1\cdot w_1} \\
z_2\cdot x_1\cdot y_1\cdot u_2\cdot w_2 &= z_1\cdot x_2\cdot y_2\cdot u_1\cdot w_1 \\
z_2 &= \frac{z_1\cdot x_2\cdot y_2\cdot u_1\cdot w_1}{x_1\cdot y_1\cdot u_2\cdot w_2}
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.3 sabemos que z é diretamente proporcional a $\frac{x\cdot y}{u\cdot w}$, ou seja, existe uma constante k, tal que $z = k\cdot\frac{x\cdot y}{u\cdot w}$. logo,

$$z_1 = k\cdot\frac{x_1\cdot y_1}{u_1\cdot w_1} \qquad \text{e} \qquad z_2 = k\cdot\frac{x_2\cdot y_2}{u_2\cdot w_2}$$

Dividindo a segunda igualdade pela primeira e cancelando a constante obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{z_2}{z_1} &= \frac{\frac{x_2\cdot y_2}{u_2\cdot w_2}}{\frac{x_1\cdot y_1}{u_1\cdot w_1}} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_2\cdot y_2}{u_2\cdot w_2}\cdot\frac{u_1\cdot w_1}{x_1\cdot y_1} \\
z_2 &= \frac{z_1\cdot x_2\cdot y_2\cdot u_1\cdot w_1}{x_1\cdot y_1\cdot u_2\cdot w_2}
\end{aligned}$$

igualdade esta que é exatamente a encontrada na técnica do esquema de flechas. A seguir resolveremos um problema aplicando essas técnicas e pelo Teorema 4.3.

5.4 Resolvendo um problema

Resolveremos aqui um dos chamados problemas tradicionais usando as técnicas descritas em 5.1., 5.2. 5.3. e pelo Teorema 3.

Problema 5.1. *Numa gráfica existem 3 impressoras off set que funcionam, ininterruptamente e no mesmo ritmo, 10 horas por dia, durante 4 dias, imprimindo 240.000 folhas. Tendo-se quebrado uma das impressoras e necessitando-se imprimir, em 6 dias, 480.000 folhas, quantas* *horas por dia deverão funcionar, ininterruptamente, as duas máquinas restantes? (MORGADO, 2006)*

Solução pelo teorema 4.3: Colocando o número de horas trabalhadas como função do número de máquinas, do número de dias trabalhados e do número de folhas impressas e como esse número de horas trabalhadas é inversamente proporcional ao número de máquinas e ao número de dias trabalhados e diretamente proporcional ao número de folhas impressas, então

$$f(3,\ 4,\ 240.000) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 240.000 \cdot f(1,\ 1,\ 1) = 10$$

ou seja,

$$f(1,\ 1,\ 1) = 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{240.000} \tag{5.3}$$

por outro lado, temos

$$f(2,\ 6,\ 480.000) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 480.000 \cdot f(1,\ 1,\ 1) = x \tag{5.4}$$

Substituindo (5.3) em (5.4) obtemos

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 480.000 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{240.000} \\ &= 10 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{480.000}{240.000} \\ &= 20, \end{aligned}$$

isto é, seriam necessários 20 horas por dia de trabalho.

Solução utilizando a técnica das flechas: O número de horas trabalhadas por dia é diretamente proporcional ao número de folhas impressas e inversamente proporcional ao número de impressoras e ao número de dias trabalhados, assim que nos dá 20 horas por dia de trabalho.

Tabela 5.2:

Nº de impressoras (↑)	Horas por dia (↓)	Dias trabalhados (↑)	Folhas impressas (↓)
3	10	4	240.000
2	x	6	480.00

Fonte: Autor

$$\frac{10}{x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{240.000}{480.000}$$

$$x = 10 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{480.000}{240.000}$$

que nos dá 20 horas por dia de trabalho.

Solução por redução parcial à unidade: Abreviando: Número de horas: H; Número de dias: D; Número de impressoras: I; e Folhas impressas: F tem-se

	Operação Multiplicação	H	Produto	I	D	F
		10		3	4	240.000
$H\alpha^{-1}I$	3 por $\frac{1}{3}$ e 10 por 3		$10 \cdot 3 = 30$	1		
$H\alpha^{-1}I$	1 por 2 e 30 por $\frac{1}{2}$		$30 \cdot \frac{1}{2} = 15$	2		
$H\alpha^{-1}D$	4 por $\frac{1}{4}$ e 15 por 4		$15 \cdot 4 = 60$		1	
$H\alpha^{-1}D$	1 por 6 e 60 por $\frac{1}{6}$		$15 \cdot 4 = 60 \cdot \frac{1}{6} = 60$		6	
$H\alpha F$	240.000 por $\frac{1}{240.000}$ e 10 por $\frac{1}{240.000}$		$10 \cdot \frac{1}{240.000} = \frac{1}{24.000}$			1
$H\alpha F$	1 por 480.000 e $\frac{1}{24.000}$ por 480.000		$\frac{1}{24.000} \cdot 480.000 = 20$			480.000
		20		2	6	480.000

Solução por redução total à unidade: Pelo Teorema 4.3 sendo z diretamente proporcional a x e inversamente proporcional a y e w, então existe uma constante k tal que $z = k \cdot \frac{x}{y \cdot w}$, assim fazendo $z_1 = 10$, $x_1 = 240.000$, $y_1 = 3$ e $w_1 = 4$, $x_2 = 480.000$, $y_2 = 2$ e $w_2 = 6$, temos

$$10 = k \cdot \frac{240.000}{3 \cdot 4} \Longleftrightarrow 10 = k \cdot 20.000; \tag{5.5}$$

$$z_2 = k \cdot \frac{480.000}{2 \cdot 6} \Longleftrightarrow z_2 = k \cdot 40.000 \tag{5.6}$$

De (5.5) vem $10 = k \cdot 20.000$, ou seja, o valor 20.000 implica 10, pela definição(1) em 4.1.

multiplicando esses dois valores por $\dfrac{1}{20.000}$ tem-se que

$$\frac{1}{20.000} \cdot 20.0000 = 1 \implies \frac{1}{20.000} \cdot 10 = \frac{1}{2.000}$$

Novamente pela definição(1) em 4.1., multiplicando 1 e $\dfrac{1}{2.000}$ por 40.000 vem que

$$40.000 \implies 40.000 \cdot \frac{1}{2.000} = 20$$

Porém por (5.6) o valor 40.000 corresponde o valor z_2, portanto $z_2 = 20$, isto é, necessários 20 horas por dia de trabalho.

5.5 Observações relativas ao uso dessas técnicas de resolução de problemas de regra de três composta.

Qualquer que seja a técnica de resolução apresentada aqui percebe-se claramente a necessidade do conhecimento das relações de proporcionalidade direta e/ou inversa e de acordo com a atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) essa habilidade esta estabelecida a partir do 7° ano.

> " Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.(EF07MA17)"

A técnica de redução parcial à unidade poderá perfeitamente ser inserida no 7° ano,pois ela requer apenas essa habilidade.
A técnica do esquema de flechas também requer apenas conhecimento das relações de proporcionalidade direta e/ou inversa. Portanto, ela poderá ser inserida no 7° ano.
A técnica de redução total á unidade requer, além do conhecimento das relações de proporcionalidade direta e/ou inversa, o conhecimento das técnicas de resoluções de equações polinomiais do primeiro grau e da idéia de variável o que já faz parte do conhecimento adquirido a partir do 7° ano. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) observamos as habilidades:

> "(EF07MA13) Compreender a idéia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da idéia de incógnita."

> "(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1° grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade."

Daí, essa técnica poderá ser usada a partir do 7° ano.
A técnica funcional , aquela que se usa diretamente o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pela sua própria natureza só poderá ser usada quando o aluno tiver noção de função tema o qual só será abordado no Ensino Médio, e portanto tal técnica só poderá ser utilizada neste momento.

Capítulo 6

Considerações Finais

Como percebemos nos capítulos iniciais deste trabalho, o pensamento proporcional é utilizado consciente ou não de forma prática ou não desde quando se iniciou registros da matemática entre os povos antigos , embora não tenhamos como verificar acreditamos que mesmo antes disso tal pensamento era já utilizado.

O pensamento proporcional já é percebido desde cedo, a partir do momento que aprendemos a falar, o dobro, o triplo, ...etc, já se percebe naturalmente pensamento proporcional. O estudo da proporcionalidade desde muito cedo está inserido na Educação Básica, ao resolver um problema de multiplicação, o aluno pode se deparar com uma situação em que a idéia operatória seja proporcionalidade. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) que estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo da escolaridade básica, o discente deverá ser capaz de resolver problemas formais de proporcionalidade a partir do 4° ano onde é proposto que ele saiba

> Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos. (**EF04MA06**)

No 5° ano do Ensino Fundamental é trabalhado a ideia de grandezas diretamente proporcionais, o documento propõe que o aluno seja habilitado a

> Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros. (**EF05MA12**)

E previsto também, que ele consiga resolver problemas envolvendo a partição de um todo em duas partes proporcionais, a base solicita que ao sair dos anos iniciais do Ensino Fundamental os alunos consigam resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da idéia de razão entre as partes e delas como o todo, como está escrito na habilidade 13 do 5° ano.

Já no 6° ano o aluno deve adquirir a habilidade de analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área. (**EF06MA29**)

No 7° ano há uma formalização e um estudo aprofundado de problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, a base solicita que o discente seja capaz de

> Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas. (**EF07MA17**)

No 8° ano no eixo temático de álgebra está programado o ensino da variação de grandeza diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais com a finalidade de que os alunos possam identificar a natureza da variação de duas grandezas expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (**EF08MA12**) e resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. (**EF08MA13**)

No 9° ano são reforçados os estudos e as resoluções de problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas. A base prevê que o aluno ao sair do Ensino Fundamental possa

> Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas. (**EF09MA08**)

Então concluímos que por se só o tema Grandezas Proporcionais e Regra de Três composta já tem sua própria relevância.

Ao realizar este trabalho outras perguntas surgiram e ficaram sem respostas tais como: por que se utiliza o esquema das flechas em detrimento da técnica de redução parcial à unidade no sétimo ano? porque ainda trabalhamos com proporções na resolução de problemas envolvendo duas grandezas proporcionais? Porém ao concluirmos este trabalho acreditamos estar contribuindo de forma significativa para o ensino haja visto que com ele muitos professores, assim como eu me perguntava, que ainda se perguntam porque o esquema das flechas funciona obterão a resposta.

Referências Bibliográficas

AMARAL, Antônio C.: GRANDEZAS PROPORCIONAIS: um estudo aprofundado para uma melhor compreensão da fórmula $f(x) = ax$ como modelo matemático para os problemas de proporcionalidade direta. In: *Universidade Federal do Piauí* (2014)

BNCC: *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. – URL <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>

BOYER, Carl B.: *História da matemática. Tradução Eva F. Gomide.* Universidade de São Paulo : Editora da Unicamp, 1974

EVES, Howard: *Introdução à história da matemática. Tradução Hygino H. Domingues.* Campinas : Editora da Unicamp 5ª Edição., 2011

FLORIANI, Edson F.: Resolução de problemas de proporcionalidade: um estudo com alunos do ensino fundamental e médio. In: *Universidade do Itajaí* (2014)

LIMA, Elon L.: *Meu professor de matemática e outras histórias*. 2012

MORGADO, Augusto C.: *matemática básica: teoria e mais 750 questões*. 2006

OLIVEIRA, Sandro F.: Preparando o aluno de ensino fundamental para o aprendizado de razões e proporções. In: *Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada* (2017)

RPM05: *Revista do professor de matemática 05.* 2010. – URL <https://www.mat.ufrgs.br/~backes/AnexosPDF/IntRC-2018/RPM05\%20Grandezas\%20incomensuraveis\%20e\%20numeros\%20irracionais.pdf>

RPM07: *Revista do professor de matemática 07.* 2010. – URL <https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm7.pdf>

SILVA, Davidson Moura L.: Uma análise do ensino de proporcionalidade no ensino fundamental: realidade e perspectiva. In: *Universidade Federal de São Carlos* (2015)

SILVA, Diana Paula C.: Alguns marcos históricos relativos a um conceito matemático elementar: um esetudo sobre proporções. In: *Universidade de Minho* (2012)