ANTONIO CARLOS MENDES

ALGUMAS EXPERIÊNCIAS ALGÉBRICAS E GRÁFICAS COM POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

ANTONIO CARLOS MENDES

ALGUMAS EXPERIÊNCIAS ALGÉBRICAS E GRÁFICAS COM POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título *Magister Scientiae*.

APROVADA: em 15 de abril de 2013.

Valéria Martins da Rosa

Ariane Piovezan Entringer

Kennedy Martins Pedroso
(orientador)

AGRADECIMENTOS

A Deus por todas as oportunidades que me ofereceu durante a minha vida e principalmente pelo livramento que tive na época que estava escrevendo essa dissertação.

Aos meus familiares pelo apoio e compreensão que me deram sempre. Em especial a minha esposa Maria José Nunes Mendes pela correção ortográfica e gramatical desse trabalho.

Aos colegas pelo apoio e incentivo durante a realização do curso. Antes não nos conhecíamos, tornamos colegas e agora amigos para toda a vida.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFV pela perseverança, otimismo e empenho pela nossa transformação educacional e crescimento na aprendizagem matemática.

Aos membros da banca examinadora pelos comentários e sugestões apresentadas pela melhoria desse trabalho.

Ao professor Doutor Kennedy Martins Pedroso orientador dessa dissertação haja visto o volume de oportunidades, orientações e sugestões que me ofereceu durante nossos encontros.

A SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e aos idealizadores desse curso pela oportunidade que tive na realização desse sonho.

RESUMO

MENDES, Antonio Carlos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2013. **Algumas Experiências Algébricas e Gráficas com Polinômios Trigonométricos.** Orientador: Kennedy Martins Pedroso.

São muitos os desafios que o ensino e, em especial, o ensino de matemática impõe nos dia de hoje. Nosso trabalho foi elaborado na perspectiva de apresentar a professores e alunos do Ensino Médio uma alternativa para o ensino desses temas. Inicialmente foram elaborados algumas considerações sobre o ensino de trigonometria, os objetivos pretendidos, definição do público alvo, considerações metodológicas e possíveis desdobramentos do mesmo. Em seguida o trabalho apresenta uma síntese teórica dos assuntos estudados, relacionando situações algébricas com suas representações gráficas. Para a aplicação do tema em sala de aula foi elaborado um Guia do Aluno e para auxiliar o professor nesta tarefa foi eleborado o Guia do Professor. Este material procura oferecer ao educando condições de construir progressivamente a sua aprendizagem e aos professores a oportunidade de abordar o tema de forma diferenciada e de agregar ao Ensino Médio o estudo dos Polinômios Trigonométricos, com ênfase na construção de seus gráficos usando programas de geometria dinâmica e a observação que as mudanças nos diversos parâmetros proporcionam nos respectivos gráficos. Vale ressaltar que a proposta de ensino apresentada é sugerida como uma situação intermediária entre o Ensino de Trigonometria e Números Complexos realizados em nossas escolas e, respectivamente, os processos mais avançados de interpolação trigonométrica e as séries de Fourier, respectivamente.

ABSTRACT

MENDES, Antonio Carlos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, April de 2013. **Some Experiences with Algebraic and Graphical Trigonometric Polynomials.** Advser: Kennedy Martins Pedroso.

There are many challenges that teaching and in particular the teaching of mathematics requires us today. Our work was done in view of present teachers and high school students an alternative to the teaching of these subjects. Initially developed some considerations on teaching trigonometry, the intended objectives, target audience definition, methodological considerations and possible consequences of the same. Then the paper presents a theoretical synthesis of the subjects studied, relating algebraic situations with their graphic representations. For the application of the subject in the classroom has produced a guide to assist the student and the teacher in this task was eleborado the Teacher's Guide. This material seeks to offer learners conditions progressively construct their learning and teachers the opportunity to address the issue differently and add to the high school study of Trigonometric Polynomials, with emphasis on building your graphics programs using dynamic geometry and note that changes in various parameters provide the respective graphs. It is worth mentioning that the proposed teaching presented is suggested as an intermediate situation between the Teaching of Trigonometry and Complex Numbers made in our schools and the most advanced processes trigonometric interpolation and Fourier series, respectively.

Sumário

INTRODUÇÃO

Nossa experiência em sala de aula, as conversas informais que temos com colegas de profissão e os constantes relatos de nossos alunos nos levam a afirmar que Matemática é a disciplina considerada mais difícil da Educação Básica e dentro desta, um dos grandes desafios que encontramos é no ensino de Trigonometria.

Este trabalho propõe apresentar uma alternativa para o enriquecimento desse ensino a partir de algumas "Experiências Algébricas e Gráficas com Polinômios Trigonométricos".

Como afirma Elon Lages Lima, no livro a Matemática do Ensino Médio, Volume 1,

> O professor de Matemática, principalmente aquele que atua no chamado Segundo Grau, no escasso tempo que lhe resta da faina diária de preparar suas aulas, conta praticamente como uma única fonte de referência: o livro texto que adota (ou outros, que dele pouco diferem).

Nos dias de hoje o professor pode contar também com uma ferramenta importante na preparação de suas aulas que é o material disponível na Internet, onde encontramos materiais de excelente qualidade a alguns em que essas que deixam a desejar.

Mesmo assim, a extenuante jornada de trabalho a que somos submetidos na rede pública da Educação Básica, sobretudo nas redes estaduais e municipais e ainda nas redes particulares de ensino, dificulta ou mesmo impede um uso mais eficaz desta ferramenta, a internet.

Uma análise superficial dos livros didáticos usados em nossas escolas nos indica que o estudo de Polinômios Trigonométricos não é estudado ou é abordado de forma insuficiente. Porém as noções básicas do ensino de trigonometria são apresentados de forma satisfatória, como as definições das razões trigonométricas no triângulo retângulo, a definição do seno e cosseno dos arcos considerados notáveis (30º, 45º e 60º), o ciclo trigonométrico, as demais funções trigonométricas, redução ao primeiro quadrante, a relação fundamental da trigonometria, as fórmulas de adição e da multiplicação de arcos, identidades trigonométricas, equações e inequações trigonométricas elementares e as leis do seno e do cosseno.

Pensando em elaborar um material que venha acrescentar a esse ensino novos elementos realizamos esse trabalho, que basicamente está estruturado da seguinte forma:

- **Capítulo 1: CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE TRIGONOMETRIA E A PROPOSTA DE TRABALHO** relata algumas considerações sobre o Ensino de Trigonometria e apresenta a proposta de trabalho, com uma descrição geral da mesma, relação de objetivos, o público alvo, os pré-requisitos necessários para o estudo da Unidade Temática elaborada para aplicação no Ensino Médio, os materiais e tecnologias necessários na aprendizagem do assunto, recomendações metodológicas, enumeração de algumas dificuldades prevista e descrição de algumas continuações ou desdobramentos.

- **Capítulo 2: ESTUDO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO** apresenta uma revisão dos conceitos destas funções, o conceito de radiano, e as variações gráficas que ocorrem quando os parâmetros α e k são modificados nas funções dos tipos $f(x) = \alpha cos(kx)$ e $f(x) = \alpha sen(kx)$. Apresenta ainda o estudo das senoides do tipo $f(x) = a + bcos(cx + d)$ ou $f(x) = a + bsen(cx + d)$ destacando as variações que alterações de cada um desses parâmetros proporcionam nos respectivos gráficos.

- **Capítulo 3: ESTUDO DOS MONÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DE GRAU 1** estuda os monômios trigonométricos da forma $p(x) = \alpha cos(x) + \beta sen(x)$ como uma composição das funções $f(x) = \alpha cos(x)$ e $g(x) = \beta sen(x)$. Neste estudo há a preocupação com as modificações nesses parâmetros proporcionam em $p(x)$. Também é estudado os máximos e mínimos dos monômios trigonométricos.

- **Capítulo 4: ESTUDO DOS MONÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DE GRAU** $k > 1$. Estudo semelhante ao realizado no capítulo anterior, porém acrescenta a observação sobre a variação do parâmetro k, acarretando modificações no período de $p(x)$.

- **Capítulo 5: ESTUDO DOS POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS.** Descreve as características dos polinômios trigonométricos. Nestas características há uma definição das retas horizontais de máximo e mínimo e dos pontos de inflexão. Os valor máximos e mínimos de p(x), tanto locais como absolutos são pesquisados com o uso do *GeoGebra*. O estudo passa ser mais intuitivo através da observação do que formal, porém há preocupação de justificar as conclusões obtidas.

- **Capítulo 6. TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS.** Esse capítulo enfatiza a aplicação da trigonometria no estudo dos números complexos, com a aplicação da representação desses números na forma trigonométrica trazendo vantagens para as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação dos mesmos. Apresenta o significado geométrico da multiplicação dos números complexos, a definição da função de Euler como uma função que se comporta como uma função exponencial.

- **Capítulo 7. INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL TRIGONOMÉTRICA E APLICAÇÕES A FENÔMENOS BIOLÓGICOS E FÍSICOS.** A interpolação polinomial trigonométrica é apresentada de forma sucinta como um aproximação por polinômios trigonométricos, que é obtida através da resolução de um sistema linear de equações. O Capítulo apresenta também uma síntese das aplicações do tema em estudo a fenômenos biológicos e físicos bem como para modelar outras situações de nosso cotidiano.

- **Capítulo 8: GUIA DO ALUNO.** O Guia do aluno pode ser considerado como a coroação deste trabalho. Com o propósito de ser um material para o uso em sala de aula foi elaborada uma Unidade Temática composta por três Situações Problema Geradoras (SPGs), Situações Problemas Orientadas (SPOs) e Atividades Complementares. Esta Unidade Temática propõe-se fornecer ao aluno condições de construir a sua aprendizagem. Dá ênfase às principais características das funções trigonométricas, dos polinômios trigonométricos e a aplicação da trigonometria no estudo dos números complexos.

- **Capítulo 9. GUIA DO PROFESSOR.** Este guia apresenta as orientações metodológicas para a execução das atividades propostas no Guia do Aluno, os objetivos do estudo, considerações sobre o processo de avaliação, resolução de todos os exercícios constantes do Guia do Aluno e considerações sobre a maioria destes exercícios. O principal objetivo deste Guia é orientar o professor na aplicação da Unidade Temática construída no guia do aluno.

A Unidade Temática desenvolvida a nível do Ensino Médio procurou oferecer condições ao educando, sempre que possível, para comprovação matemática das conclusões obtidas a partir da observação dos resultados na resolução dos exercícios.

Como ferramenta fundamental na construção do conhecimento pelo aluno foi sugerido o uso do software de geometria dinâmica, sobretudo o *GeoGebra*, pelo fato de ser um programa gratuito, presente na maioria dos computadores de nossas escolas e pela gama de possibilidades que esse oferece , esse software pode ser encontrado no site: www.geogebra.org/cms/ (*GeoGebra* versão 4.2).

Jackson Ribeiro em seu livro Matemática, Ciência e Tecnologia (Editora Scipione 2011) ressalta que:

> Embora o instrumento mais relevante do impacto da tecnologia seja o computador, ele, em si não constitui o centro da questão. As experiências vão além do saber lidar com as máquinas. Cada vez mais o cidadão está imerso em um grande número de informações que circulam rapidamente e de maneira mais eficiente, o que tem exigido novas competências por parte dele e, consequentemente, uma nova posição da escola e da Matemática.

Com base nessa reflexão podemos afirmar que agregar o uso dos recursos tecnológicos em nossas aulas é mais do que torná-las atraentes e dinâmicas, é oferecer ao educando a construção do conhecimento dentro de um aparato tecnológico presente em nossas vidas.

Além disso os Parâmetros Curriculares Nacionais nos orientam que:

> Para isso, habilidades como selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemático que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites e a adequação das tecnologias em diferentes situações. Assim, [...] aprender matemática no Ensino Médio deve ser mais que memorizar resultados dessa ciência e a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculado ao saber fazer Matemática e de um saber matemático (PCNEM, 2000, p.41).

São esses objetivos os propósitos norteadores da Unidade Temática que produzimos: oferecer condições ao aluno de exercitar a criatividade e o raciocínio, produzindo conhecimento matemático com o uso de alguns recursos tecnológicos disponíveis em nosso meio.

Capítulo 1

O ENSINO DA TRIGONOMETRIA E A PROPOSTA DE TRABALHO

1.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

O aluno normalmente tem o seu primeiro contato com o estudo das funções trigonométricas no que hoje chamamos de 9º ano do Ensino Fundamental. Esta introdução, de maneira geral, se faz pela definição no triângulo retângulo das razões seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos.

Considerando que todos os triângulos cujos ângulos têm a mesma medida são semelhantes entre si essas razões tornam-se ferramenta valiosa para o cálculo de distâncias inacessíveis. Essa aplicação prática é utilizada em todos os nossos livros didáticos.

Usando as definições destas razões no triângulo equilátero e no quadrado, encontram-se os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º, 45º e 60º, que são chamados de ângulos notáveis. Os demais valores, são apresentados ao aluno, na maioria das vezes, em tabelas e sem uma demonstração de como foram obtidos. Em algumas exceções encontram-se estes valores de forma experimental, construindo alguns triângulos retângulos, medindo seus ângulos e lados calculando assim o valor aproximado das razões trigonométricas solicitadas. Veja, por exemplo, Imenes & Lellis, 2009, p. 163.

No Ensino Médio o estudo de Trigonometria é estendido a ângulos maiores que 90º, de forma que sejam mantidas as relações básicas. O aluno tem contato com o ciclo trigonométrico e uma nova unidade de medida, o radiano.

Nesse momento, defini-se os valores para as funções seno e cosseno e consequentemente para as demais funções trigonométricas em um intervalo de 0 a 360º. Também define-se o sentido anti-horário como sentido positivo da medida de arcos ou ângulos.

Considerando o número de voltas (maior que um) conceitua-se arcos côngruos, o que permite encontrar os valores do seno e do cosseno para qualquer ângulo e definir a periodicidade dessas funções.

Neste momento o estudante tem contato com uma nova "unidade" para medida de arcos, o radiano, com as conhecidas transformações entre graus e radianos. Porém, sem a definição clara de que esta unidade nos dá a medida do arco como um número real, isto pode causar alguma confusão conceitual no aluno, como por exemplo, $\pi = 180^{\underline{o}}$, conforme temos observados em nossas aulas de trigonometria.

O aluno do ensino médio estuda ainda algumas equações, inequações e funções trigonométricas. Trabalha com as fórmulas para adição de arcos e arco duplo. Neste momento lhe é proporcionado a oportunidade de perceber que conhecendo, o seno de um ângulo, pode-se calcular o seno de vários outros, por exemplo, o $sen(105^{\underline{o}})$ pode ser calculado a partir dos valores de $sen(60^{\underline{o}})$ e $sen(45^{\underline{o}})$.

Normalmente encerra-se o estudo de trigonometria na educação básica com o estudo das relações trigonométricas no triângulo qualquer.

O estudo de Algumas Experiências Geométricas e Gráficas com Polinômios Trigonométricos, conforme pretendemos demonstrar neste texto pode contribuir para uma melhor compreensão destes assuntos, acrescentando ao ensino atual desta matéria uma nova visão sobre este tópico e uma melhor compreensão conceitual. Sua contextualização pode contribuir de forma significativa para o entusiasmo do alunado quando realizar este estudo.

1.2 PROPOSTA DE TRABALHO

1.2.1 DESCRIÇÃO GERAL

Este texto foi elaborado como Dissertação no Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, desenvolvido pele Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) na Universidade Federal de Viçosa (UFV).

Procuramos desenvolver uma proposta inovadora e diferenciada de sequência de aulas abordando o tema "ALGUMAS EXPERIÊNCIAS ALGÉBRICAS E GRÁFICAS COM POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS" para o enriquecimento do estudo de Trigonometria e de Números Complexos no Ensino Médio.

Este estudo avança ao propor para o Ensino Médio o estudo de Polinômios Trigonométricos, com suas características destacadas a partir do comportamento gráfico realizado com programas de geometria dinâmica.

Para isso, elaboramos uma unidade temática sobre esses assuntos que consiste no "GUIA DO ALUNO" e no "GUIA DO PROFESSOR" com atividades de nossa autoria e de outros autores, que foram adaptadas para que o aluno seja protagonista de sua aprendizagem.

O GUIA DO ALUNO apresenta algumas atividades na modalidade de "Estudo Dirigido" com a característica da obtenção intuitiva dos conceitos. Na medida do possível a formalização matemática é feita pelo próprio aluno. Assim, invertemos a sequência didática comum em nossos livros e aulas: demonstração feita pelo professor (normalmente presente no livro), resolução de alguns exemplos e uma lista de exercícios feita pelo aluno.

Acreditamos que agindo desta forma contribuiremos para nosso aluno seja criativo, dinâmico e desenvolva o gosto pela Matemática à medida que passa entender que essa é o resultado de um processo de construção do conhecimento.

O GUIA DO PROFESSOR apresenta considerações metodológicas sobre o processo de ensino e de avaliação, os objetivos que se pretende alcançar, resolução dos exercícios do Guia do Aluno e comentários sobre os mesmos.

Antecedendo a elaboração da Unidade Temática o texto apresenta um estudo teórico, algébrico e gráfico sobre as funções seno e cosseno, monômios trigonométricos, polinômios trigonométricos do primeiro grau, polinômios trigonométricos de grau dois, polinômios trigonométricos de grau maior que 2, trigonometria e números complexos, interpolação trigonométrica e aplicações da trigonometria nas diversas áreas do saber humano.

Procuramos desenvolver uma metodologia baseada no estudo da teoria utilizando os exemplos necessários para compreender os conceitos envolvidos.

A manipulação de software de geometria dinâmica é amplamente utilizada em todo o trabalho, contribuindo na visualização de exemplos e exercícios e na formação conceitual que se pretende alcançar.

O trabalho foi elaborado na **modalidade elaboração de propostas de atividades educacionais.** A seguir apresentamos os objetivos, o público alvo, os pré-requisitos, materiais e tecnologias, recomendações metodológicas, dificuldades previstas e possíveis continuações ou desdobramentos.

1.2.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é estudar Polinômios Trigonométricos, atentando para suas características algébricas e gráficas, com uma linguagem e exposição que beneficiem o entendimento de alunos e professores do Ensino Médio. Mais precisamente o trabalho apresenta vários exemplos de Polinômios Trigonométricos evidenciando propriedades da soma, multiplicação por escalar e variação de coeficientes, tendo os gráficos construídos em computador como apoio no entendimento dessas funções. Também serão estudadas algumas aplicações a fenômenos biológicos e físicos, em que a interpolação por polinômios trigonométricos é uma das principais ferramentas.

O GUIA DO PROFESSOR apresenta uma descrição dos objetivos específicos que a execução em sala de aula desta unidade temática pretende atingir.

A proposta pedagógica apresentada procura inovar nos seguintes aspectos:

- Fornecimento ao educando de ferramentas para uma melhor compreensão do conceito de radiano, para isso os aplicativos de geometria dinâmica "desenrolando o seno" e "Função de Euler" são fundamentais.

- Uso do software de geometria dinâmica, sobretudo o *GeoGebra,* na construção dos gráficos e de seus recursos na modificação de parâmetros. A partir da observação o aluno é incentivado na formulação de conclusões sobre as propriedades dos temas estudados.

- Demonstração pelo próprio aluno das conclusões obtidas pela observação na construção de gráficos e na resolução de exercícios.
- Estudo no Ensino Médio dos Polinômios Trigonométricos, enfatizando suas características, propriedades e aplicações.
- Utilização da representação trigonométrica dos Números Complexos, e sua aplicação na multiplicação, potenciação e no cálculo de raízes desses números.
- Valorização da Matemática como ferramenta eficaz para representar e compreender situações do nosso cotidiano.

1.2.3 PÚBLICO ALVO

A proposta de trabalho apresentada tem como público alvo alunos do terceiro ano do Ensino Médio que tenham feito um estudo de Trigonometria e de Números Complexos.

Portanto a proposta não visa substituir o ensino desses temas na forma que é realizado em nossas escolas e sim, contribuir de forma significativa para a melhoria do mesmo.

O texto também pode ser útil a alunos que estão se preparando para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) ou vestibulares e mesmo alunos de graduação que pretendem rever esse assunto.

A unidade temática proposta também pode ser realizada ainda em duas etapas. A primeira quando do Ensino de Trigonometria, que em algumas escola é realizado no primeiro ano em outras no segundo ano e a segunda quando do estudo de Números Complexos no 3º ano do Ensino Médio. Nos dois casos este estudo pode ser feito simultaneamente com esses temas ou após a realização desses.

1.2.4 PRÉ-REQUISITOS

A unidade temática proposta para alunos do Ensino Médio. Espera-se que esse aluno tenha conhecimentos básicos de matemática elementar trabalhada em todo o Ensino Fundamental.

Para que o aluno possa desenvolver a contento as atividades propostas no GUIA DO ALUNO é importante que seu conhecimento prévio englobe, de forma plena ou parcial os seguintes itens.

- Compreensão das condições para semelhança de figuras geométricas planas, em especial os casos de semelhança de dois ou mais triângulos.
- Conhecimento das relações métricas no triângulo retângulo.

- Compreensão dos conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo do triângulo retângulo.
- Conhecimento do conceito matemático de função.
- Saber representar em um plano cartesiano um ponto dada as suas coordenadas.
- Saber o significado dos conceitos de arcos côngruos ou congruentes.
- Saber reduzir um arco (2º ao 4º quadrante) ao primeiro quadrante e definir os valores de seu seno e cosseno.
- Saber esboçar um gráfico em um plano cartesiano a partir de um conjunto de pontos desse gráfico reconhecendo as situações mínimas para que esses possibilitem uma boa representação da função.
- Conhecer o ciclo trigonométrico bem como o seno e cosseno dos ângulos considerados notáveis.
- Ter noções elementares de informática.
- Conhecer as relações trigonométricas fundamentais.
- Conhecer as fórmulas de adição e subtração das funções seno e cosseno.
- Ter noções de Números Complexos e suas representações retangular e na forma trigonométrica.

1.2.5 MATERIAIS E TECNOLOGIAS

Para uma boa execução do trabalho proposto é imprescindível o uso de recursos computacionais sobretudo o software *GeoGebra*, que é um programa de geometria dinâmica gratuito presente na maioria dos computadores de informática de nossas escolas.

O uso de um programa de geometria dinâmica é fundamental na manipulação das diversas funções cujos gráficos foram construídos a partir de seus parâmetros.

Obviamente modificações nesses parâmetros acarretarão mudanças em seus gráficos, como translações e dilatação ou compressão, consequentemente mudanças na imagem e no período destas funções. A observação gráfica destas modificações é a estratégia escolhida para que o aluno vá aos poucos (re)formulando sua compreensão dos conceitos que estão sendo trabalhados.

No livro Recursos Computacionais no Ensino de Matemática os autores afirmam que:(GIRALDO; CATEANO; MATTOS, 2012, p. 39)

A ideia não é simplesmente usar o software para verificar o que está certo ou errado no gráfico da função. Em lugar disso, a visualização no software deve ser explorada para motivar reflexões e conjecturas sobre as funções, que devem ser verificadas posteriormente por meio de ferramentas matemáticas. Essa observação está alinhada com o objetivo mais geral de **usar o computador para promover aprendizagem matemática sólida o suficiente para permanecer e se transferir para outras situações - mesmo sem o apoio da máquina.**

Wellerson Quintaneiro em sua tese de mestrado "Representações e Definições Formais em Trigonometria no Ensino Médio" defendida na Universidade Federal do Rio de Janeiro (2 009, p. 62) constata que

> Com a ajuda de software de geometria dinâmica consigamos um ambiente mais propício no que diz respeito a relacionar e desenvolver alguns conceitos trigonométricos, até mesmo devido às características de ambientes informatizados, quanto à dinâmica e interatividade.

Wellerson Quintaneiro cita ainda Maria Alice Gravina e Lúcia Maria Santorosa que em seu artigo "A Aprendizagem Matemática em Ambientes Informatizados afirmam que:

Disponível em: < http//www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie98/117.html>. Acesso em 25 de janeiro de 2013.

> Um ambiente informatizado oferece suporte às concretizações e ações mentais do aluno; isto se materializa na representação dos objetos matemáticos na tela do computador e na possibilidade de manipular estes objetos via sua representação. Vê-se assim o ambiente favorecendo a construção de conjecturas, o que exige raciocínios mediados pelo constante processo de assimilação versus acomodação. É claro que a construção do conhecimento vai além e não se realiza enquanto a argumentação matemática explícita não torna evidente o 'porquê desta propriedade'. Mas a percepção de modelos é o início para o pensamento puramente teórico sobre o funcionamento das coisas.

Assim o recurso computacional com a utilização de software de geometria dinâmica é parte fundamental no desenvolvimento do trabalho, como instrumento essencial na construção do conhecimento demostrando a riqueza e a beleza do saber matemático que pode ser feito com recursos tecnológicos relativamente simples e acessíveis.

1.2.6 RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS

O GUIA DO PROFESSOR apresenta orientações metodológicas e considerações sobre as mesmas. Nesta seção apresentamos sucintamente algumas recomendações para o uso da Unidade Temática em sala de aula.

A principal preocupação que tivemos na elaboração das atividades da Unidade Temática foi de proporcionar ao aluno condições de ser o protagonista de sua aprendizagem. Assim evitamos o procedimento didático de apresentação da matéria e resolução de alguns exemplos pelo professor e em seguida resolução de uma lista de exercícios pelo aluno.

A Unidade temática consiste basicamente em Situações Problemas Geradoras (SPGs), Situações Problemas Orientadas (SPOs) e Atividades Complementares.

As SPGs têm o objetivo de estimular o aluno para o estudo do tema. Provavelmente os alunos não resolverão ou resolverão estas atividades parcialmente. Aqui cabe ao professor o cuidado para que este fato não seja um fator desestimulador da aprendizagem e sim um desafio para ao estudar a Unidade Temática o educando adquira novos conhecimentos e no final da mesma volte nas SPGs e as resolva convenientemente.

As SPOs têm o propósito de oferecer ao aluno condições de ir gradativamente construindo o seu conhecimento. Muitas destas atividades são elementares mas que aos poucos criam condições para o aluno obter um saber mais elaborado.

Algumas atividades foram elaboradas na modalidade de estudo dirigido, permitindo que o aluno construa o seu conhecimento. Neste momento cabe ao professor no papel importante de orientador da aprendizagem ficar atento para possíveis dificuldades que os alunos apresentem, discutindo com eles caminhos para a superação dessas dificuldades.

As Atividades Complementares, em sua maioria, consistem em uma lista de exercícios extraídos do ENEM e de Vestibulares, procurando contextualizar o assunto estudado e consolidar o conhecimento construído durante a vida escolar do aluno e no estudo da Unidade Temática.

Para um bom aproveitamento deste estudo seria ideal que cada aluno estivesse a sua disposição um terminal de computador, preferencialmente em um laboratório de informática, de forma que as atividades feitas com o auxílio de programas de geometria dinâmica sejam atividades individuais.

As atividades de elaboração das conclusões que o texto propõe e as atividades complementares podem e dever ser realizadas em grupo de forma que ao interagir com seus colegas, defendendo seu ponto de vista o aluno possa evoluir na capacidade de argumentação matemática.

1.2.7 DIFICULDADES PREVISTAS

Em relação aos materiais necessários para a aplicação da Unidade Temática é provável que em algumas escolas, a escassez de computadores e a ausência de um laboratório de informática sejam algumas das dificuldades encontradas pelos professores.

É de conhecimento público que a grande maioria de nossas escolas recebem dos programas governamentais computadores, sem no entanto a devida preparação do espaço físico para receber esses equipamentos e sem a assistência técnica necessária.

No caso da escassez dos equipamentos o professor pode organizar sua turma para a realização das atividades em grupos, preferencialmente de dois alunos por processador. A ausência desses equipamentos na escola praticamente inviabiliza a realização do trabalho conforme foi planejado, uma vez que a alternativa seria a realização pelo professor das atividades que utilizam o software de geometria dinâmica, com o acompanhamento dos alunos, que neste caso teriam uma atitude mais passiva no processo de aprendizagem.

Outra dificuldade esperada é a falta de conhecimento prévio dos alunos, como por exemplo, relacionar um ponto do plano cartesiano com suas coordenadas, sobretudo quando uma delas é zero. Assim, alguns alunos quando perguntados sobre quais são o seno e o cosseno de $\frac{\pi}{2}rad$ representado no plano cartesiano têm dificuldade de responder que o cosseno é igual a zero. A superação destas dificuldades pode ser realizada com o auxílio do professor ou mesmo de colegas do aluno, a partir de uma revisão dos conteúdos que são pré-requisitos para esta aprendizagem.

É necessário que o professor esteja atento a todo o processo de aprendizagem para superar estas possíveis dificuldades de forma que essas não comprometam o êxito do trabalho.

A dificuldade de precisão na marcação no software dos valores indicados nas atividades, pode levar o aluno a uma certa frustração quanto a sua expectativa de que o programa é infalível e nos fornece todas as respostas de nosso trabalho. Mais uma vez a atuação do professor é fundamental na discussão com seus alunos sobre a limitação do software e sobre o seu papel no processo de aprendizagem.

Outras dificuldades que podem surgir durante a aplicação da Unidade Temática são dificuldades encontradas pelos alunos nas atividades que envolvem a demonstração de resultados previamente formulados. Uma delas é o aluno pensar que é desnecessário essa demonstração e outra, são dificuldades inerentes ao próprio processo de construção da prova matemática. No primeiro caso, o professor deve fazer uma reflexão com o aluno sobre a construção do conhecimento matemático, no segundo caso, deve estar atento para auxiliar os alunos a superarem as dificuldades encontradas no momento em que essas surgirem.

1.2.8 POSSÍVEIS CONTINUAÇÕES OU DESDOBRAMENTOS

Este trabalho foi elaborado pensando em contribuir para a melhoria do Ensino de Trigonometria na Educação Básica, sobretudo na modalidade do Ensino Médio.

Reconhecemos nossas limitações ao propor um alternativa de tamanha envergadura e sabemos que essa proposta pode ser aperfeiçoada em diversos aspectos.

Apresentamos algumas sugestões para a melhoria deste trabalho:

- Elaborar nas SPOs mais atividades contextualizadas.
- Aprofundar o estudo de Interpolação Trigonométrica.
- Acrescentar uma abordagem histórica durante a aplicação da Unidade Temática. Essa abordagem contribuirá para um debate mais amplo sobre a reflexão e a discussão sobre a

produção do conhecimento científico, como atividade humana, sempre em construção e que as teorias científicas apesar de uma metodologia própria e rigorosa foram construída ao longo da história da humanidade. Que os méritos de um matemático ou de uma geração de matemáticos em uma descoberta são indiscutíveis mas, como disse Isaac Newton "*Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes*", ou seja o conhecimento prévio que esses usaram foram fundamentais para a nova descoberta. Acontecimento semelhante surge todos os dias em nossas de aulas quando redescobrimos e provamos resultados que até o momento nos eram desconhecidos.

- Compartilhar essa experiência com outros professores de Matemática.

Esperamos que esse trabalho possa dar ao nosso aluno um pouco do prazer que o estudo de Matemática nos proporciona.

Esta proposta pode tornar realidade com a ajuda de colegas que têm esses mesmos ideais e utilizarem a Unidade Temática que desenvolvemos.

Utilizando as atividades que considerarem adequadas, aprimorando as que apresentam alguma imperfeição ou substituindo-as por outras, estaremos contribuindo para que o nosso aluno cresça em suas competências matemáticas, entre essas a formulação de conclusões a partir da observação de casos específicos e a busca da demonstração desses resultados, mesmo que essa não seja alcançada no nível de ensino em que ele se encontra. Porém, o fato de querer saber mais, comprovar matematicamente o que aprendeu já é extremamente gratificante para nós professores que acreditamos na melhoria do ensino como um todo, em especial deste conteúdo que nos fascina.

Capítulo 2

ESTUDO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO.

2.1 CARACTERÍSTICAS DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO.

2.1.1 - ESTUDO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO.

Definição 1. Definimos a função seno com parâmetros a e k como a função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real $asen(kx)$, com $a \neq 0$ e $k \neq 0$,ou seja, $f(x) = asen(kx)$.

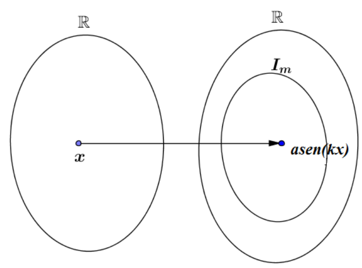


Figura 2.1.1:
Diagrama ilustrando a função $f(x) = asen(kx)$.

Definição 2. Da mesma forma definimos a função cosseno com parâmetros a e k como a função real de variáveis reais que associa a cada número real x o valor real $acos(kx)$, com $a \neq 0$ e $k \neq 0$,ou seja, $f(x) = acos(kx)$.

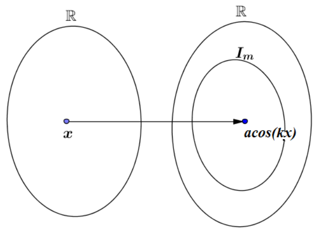


Figura 2.1.2:
Diagrama ilustrando a função $f(x) = acos(kx)$.

Consideremos inicialmente o estudo das funções seno e cosseno com os parâmetros $a = 1$ e $k = 1$.

A função trigonométrica seno de um ângulo agudo θ de um triângulo retângulo é definida como a razão entre o cateto oposto a θ e a hipotenusa do mesmo. Desta forma, em um triângulo retângulo ABC, sendo $\overline{BC}$ a hipotenusa deste triângulo e $\overline{AC}$ o cateto oposto ao ângulo θ temos:

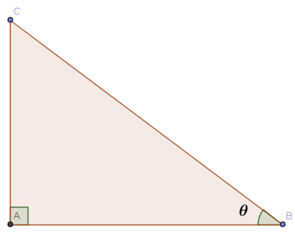


Figura 2.1.3:
$$sen(\theta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Como todos os triângulos retângulos cujos ângulos agudos têm medidas θe $(90^{\underline{o}} - \theta)$ são semelhantes entre si, esta relação depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos.

"A vantagem desta ideia simples, porém engenhosa, é a seguinte. Usando triângulos pequenos, podemos construir uma tabela da função seno" (CARMO, MORGARDO, WAGNER, 2005, p. 8).

O próximo passo é tentar ampliar este conceito para seno de ângulos maiores que $90^{\underline{o}}$ o que normalmente é feito em um círculo orientado chamado de ciclo trigonométrico, onde o seno de um ângulo central θ é a ordenada do arco correspondente. Desta forma ficam definidos os valores de seno de θ de 0 a $360°$.

Um arco de um radiano ($1rad$) é um arco cujo comprimento retificado é igual ao raio da circunferência (DANTE, 2008, p. 209). Esta medida não depende da unidade de medida de comprimento considerada.

Considerando um número de voltas maior que um, defini-se o seno de ângulos cujos arcos correspondem ao comprimento de qualquer número real, sendo que arcos que possuem as mesmas extremidades são chamados de arcos côngruos ou congruentes. Consequentemente, os valores de seno de θ se "repetirão" de 360° em 360°, o que dá a periodicidade de função igual a 2π.

Assim a função seno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = sen(x)$, sendo o seu domínio os números reais, sua imagem o intervalo dos números reais compreendidos de -1 a 1, não é injetiva e nem sobrejetiva.

Considerando que $sen(x) = -sen(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que ela é uma função ímpar.

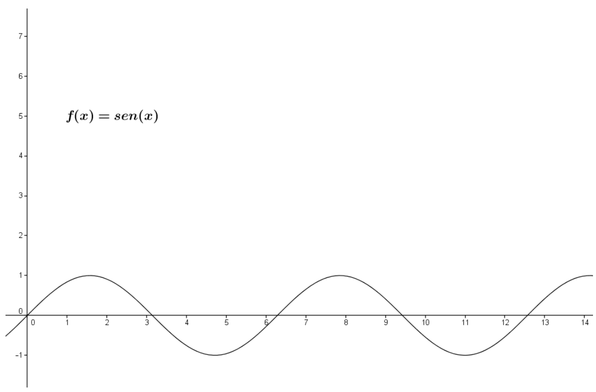


Figura 2.1.4: Gráfico da função $f(x) = sen(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função seno é uma curva chamada senoide.

Definição 3. Chamamos de amplitude o valor máximo dado a uma função, assim a função $f(x) = sen(x)$ possui amplitude igual a 1.

A função trigonométrica cosseno de um ângulo agudo θ de um triângulo retângulo é definida como a razão estre o cateto adjacente a θ e a hipotenusa do mesmo. Assim em um triângulo retângulo ABC, sendo $\overline{BC}$ a hipotenusa e $\overline{AB}$ o cateto adjacente ao ângulo θ temos:

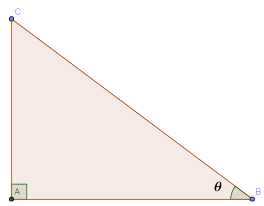


Figura 2.1.5: $cos(\theta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

De forma análoga às definições dadas para a função seno, procedemos com a função cosseno e obtemos os valores desta função de um arco correspondente a qualquer número real.

A diferença entre as características da função seno e cosseno , é que esta é uma função par, ou seja $cos(x) = cos(-x)$ e sua curva chamada de cossenoide, não é uma nova curva e sim uma senoide transladada de $\frac{\pi}{2}$ para a direita.

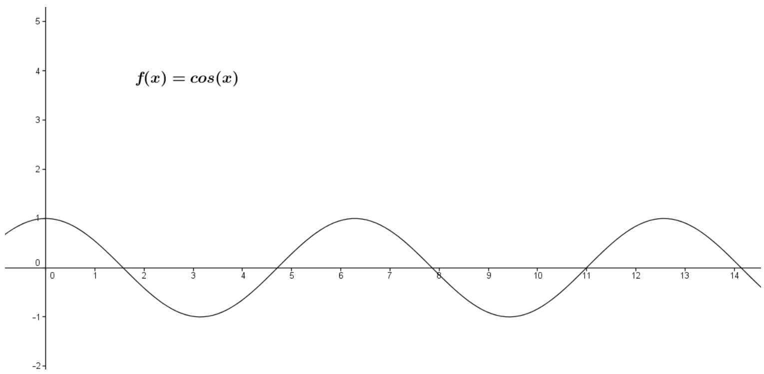


Figura 2.1.6: Gráfico da função $f(x) = cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

A figura a seguir mostra em um mesmo sistema de eixos os gráficos de $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$. Observa-se que $sen(x) = -cos(x + \frac{\pi}{2})$.

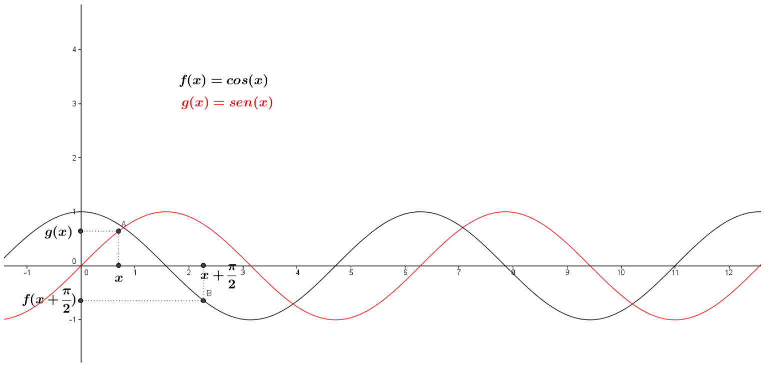


Figura 2.1.7:
Gráficos das funções $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = sen(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

2.1.2 ESTUDO DA VARIAÇÃO DO PARÂMETRO α NAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Considerando as funções $f(x) = \alpha cos(kx)$ e $g(x) = \alpha sen(kx)$ e realizando variações no parâmetro α ocorrerá nas funções estudadas uma "dilatação" vertical das mesmas, com consequente mudança em suas imagens, ou seja, em seus valores máximos e mínimos.

Assim, por exemplo, comparando a função $g(x) = sen(kx)$ cuja imagem é o intervalo $[-1, 1]$ com a função $h(x) = \alpha sen(kx)$ obtemos uma função cuja imagem é o intervalo $[-\alpha, \alpha]$ com $\alpha \in \mathbb{R} - 0$, caracterizando uma função de amplitude igual a $|\alpha|$.

As funções seno e cosseno,mesmo coma variação do parâmetro α, continuam sendo funções de domínio real, periodicidade igual a 2π, se $k = 1$, e seus gráficos interceptam o eixo das abscissas nos mesmos pontos, ou seja, possuem as mesmas raízes ou zeros.

O gráfico a seguir ilustra estas variações.

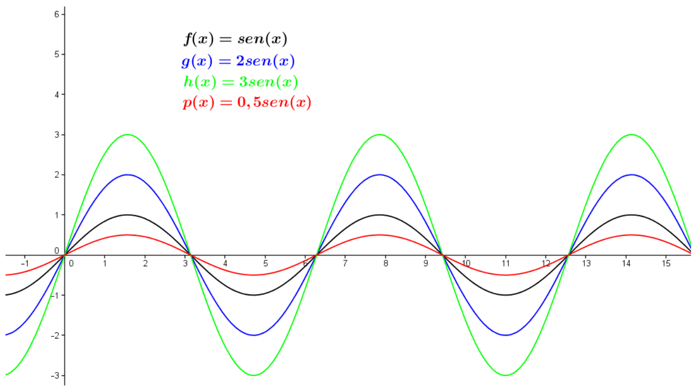


Figura 2.1.8:
Gráficos de funções da forma $f(x) = \alpha sen(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Observamos nos gráficos das funções do tipo $f(x) = \alpha sen(x)$ que essas têm periodicidade igual a 2π, amplitude igual a $|\alpha|$ e interceptam o eixo das abscissas nos pontos $(0 + k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

O gráfico da figura abaixo destaca a amplitude das funções do tipo $f(x) = \alpha sen(x)$ com $a < 0$ sendo estas amplitudes iguais a $|\alpha|$.

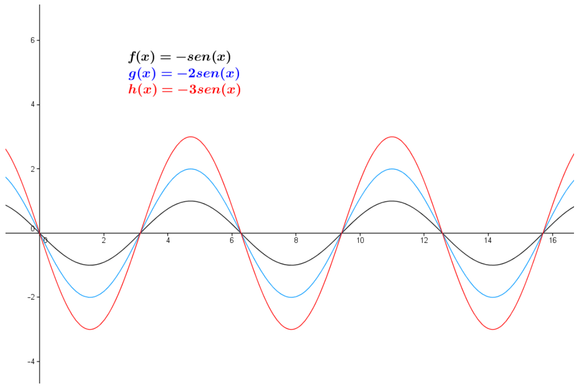


Figura 2.1.9:
Gráficos de funções da forma $f(x) = \alpha sen(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}_-$

O próximo gráfico estuda o comportamento da funções do tipo $f(x) = \alpha cos(x)$ e ilustram que este é idêntico aos da funções do tipo $f(x) = \alpha sen(x)$ em relação ao período, a imagem e a amplitude. Porém, as raízes ou zeros são os pontos $(0 + 2k\pi, 0)$ e $(\pi + 2k\pi, 0)$.

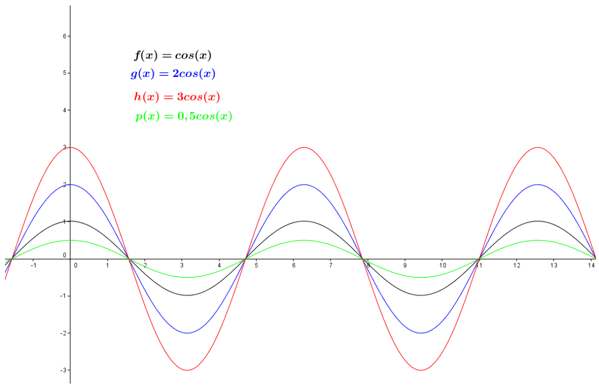


Figura 2.1.10:
Gráficos de funções da forma $f(x) = \alpha cos(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Nos próximos gráficos temos funções do tipo $f(x) = \alpha cos(kx)$ e $f(x) = \alpha sen(kx)$. Podemos observar que são funções de domínio real, período $P = \frac{2\pi}{k}$ e imagem $I_m = [-a, a]$. Também visualiza-se que essas funções possuem as mesmas raízes ou zeros.

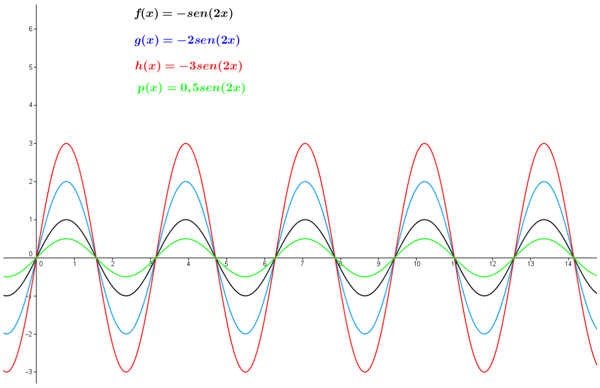


Figura 2.1.11:
Gráficos de funções da forma $f(x) = \alpha sen(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

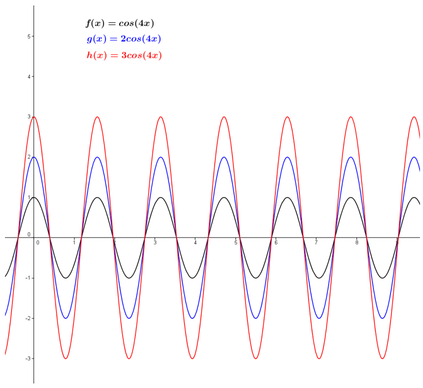


Figura 2.1.12:
Gráficos de s funções da forma $f(x) = \alpha cos(4x)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

2.1.3 ESTUDO DAS VARIAÇÕES DO PARÂMETRO k NAS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Considerando as funções $f(x) = \alpha cos(kx)$ e $g(x) = \alpha sen(kx)$ e realizando variações no parâmetro k ocorrerá nas funções estudadas uma "dilatação" horizontal das mesmas, com consequente mudança no período destas funções.

Assim, por exemplo, comparando a função $g(x) = sen(x)$ cuja período é 2π com a função $h(x) = sen(kx)$ obtemos uma função cujo período é igual a $\frac{2\pi}{k}$. Isto ocorre pois fazendo $kx = 2\pi$, temos que $x = \frac{2\pi}{k}$.

Desta forma ficam definidas as raízes ou zeros da função seno e cosseno, que são: $x = \frac{\pi}{2k} + 2K\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{2k} + 2K\pi$ para a função $p(x) = \alpha cos(kx)$ e $x = 0 + 2K\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{k} + 2K\pi$ para a função $P(x) = \alpha sen(kx)$. Nas duas situações $K \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Os gráficos a seguir são exemplos destas propriedades.

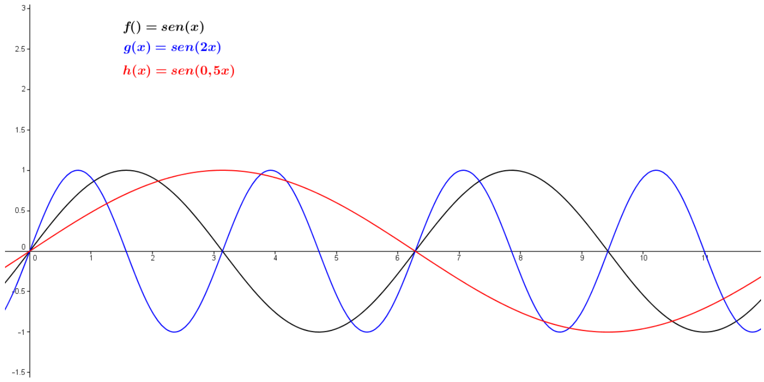


Figura 2.1.13:
Gráficos de funções da forma $f(x) = sen(kx)$. $k \in \mathbb{R}_+$.

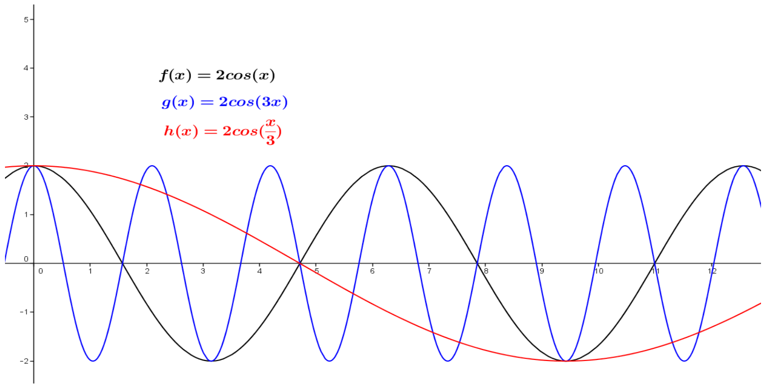


Figura 2.1.14:
Gráficos de funções da forma $f(x) = 2sen(kx)$, $k \in \mathbb{R}_+$.

2.2 SENÓIDES DO TIPO $y = a + bsen(cx + d)$.

Consideremos as funções do tipo $y = a + bsen(cx + d)$ ou do $y = a + bcos(cx + d)$. São funções de domínio real e as variações dos parâmetros a, b, c ou d proporciona modificações no período ou na imagem destas funções..

Como $-1 \leq sen(\theta) \leq 1$ e $-1 \leq cos(\theta) \leq 1$ a imagem destas funções fica definida no intervalo $[a-1, a+1]$ e o período é dado por $P = \frac{2\pi}{|c|}$. Além disso, uma variação apenas no parâmetro d gera nos gráficos destas funções uma translação horizontal.

Há uma simetria em relação a reta $y = a$ quando nos gráficos das funções $y = a + bsen(cx + d)$ ou $y = a + bcos(cx + d)$ o parâmetro b é substituído pelo seu simétrico.

Os gráficos destas funções também são considerados senoides. Apresentamos na próxima figura os gráficos das funções $f(x) = sen(2x)$ e $g(x) = sen(2x + \frac{\pi}{4})$ destacando o deslocamento horizontal do gráfico de $g(x)$ comparado com o gráfico de $f(x)$.

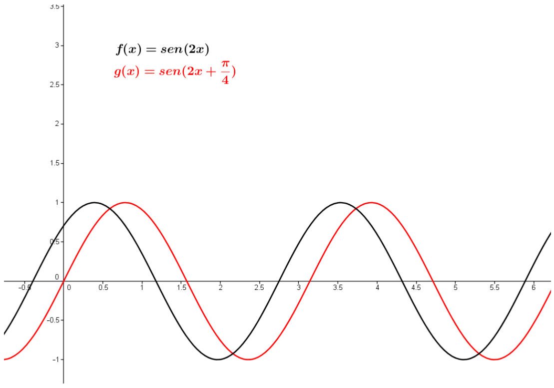


Figura 2.2.1:
Gráficos das funções: $f(x) = sen(2x)$ e $g(x) = (2x + \frac{\pi}{4}\ )$.

A figura seguinte destaca a simetria dos gráficos de $f(x) = 2 + 3cos(x + \frac{\pi}{2})$ e $g(x) = 2 - 3cos(x + \frac{\pi}{2})$ em relação à reta $y = 2$.

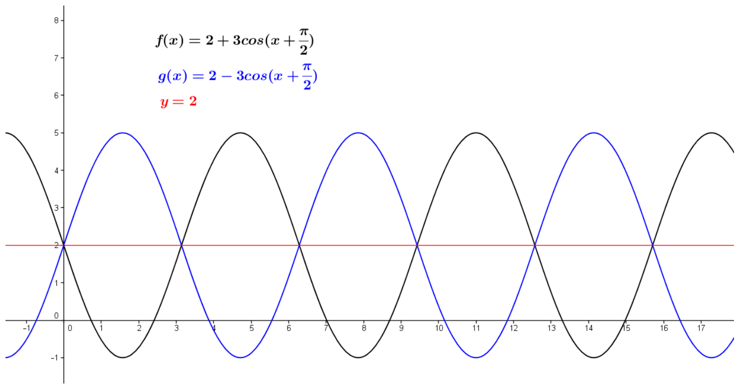


Figura 2.2.2:
Gráficos das funções: $f(x) = 2 + 3cos(x + \frac{\pi}{2})$, $g(x) = 2 - 3cos(x + \frac{\pi}{2})$ e $y = 2$.

Capítulo 3

ESTUDO DOS MONÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DE GRAU 1

Definição 4. Definimos por **Monômio Trigonométrico** as funções da forma $p(x) = \alpha cos(kx) + \beta sen(kx)$.

O parâmetro k define **o grau** do Monômio Trigonométrico.

As funções que assumem a forma $p(x) = \sum a_k cos(kx) + b_k sen(kx)$ chamamos de **Polinômios Trigonométricos**, onde a soma é finita e $k = 1, 2, 3, ..., m$. O monômio trigonométrico de maior grau de um Polinômio Trigonométrico define o **grau deste polinômio**.

Consideremos o monômio trigonométrico de grau 1 definido pela função $f(x) = cos(x) + sen(x)$. O gráfico deste monômio trigonométrico no plano cartesiano é:

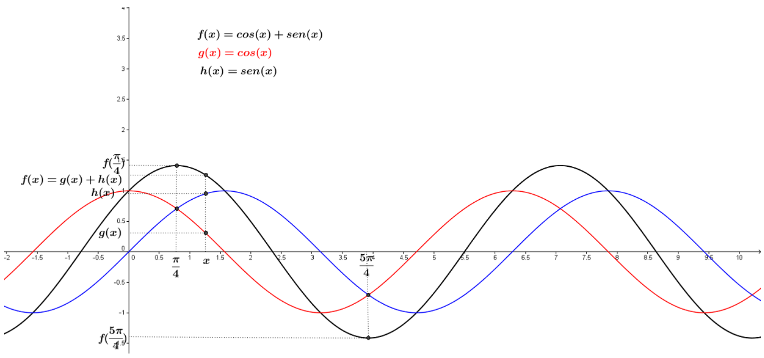


Figura 3.0.1: Gráfico do monômio trigonométrico $f(x) = cos(x) + sen(x)$ comparado com os gráficos das funões $g(x) = cos(x)$ e $h(x) = sen(x)$.

Esta função está definida para todos os números reais.

Nesta função temos: $cos(x) + sen(x) = cos(2\pi x) + sen(2\pi x)$, portanto é uma função periódica de período $P = 2\pi$, o que nos permite restringir o seu estudo, no intervalo de 0 a 2π pois o comportamento desta função se "repete" em todo o seu domínio.

Definição 5. Dizemos que um ponto de coordenas $(x_m, f(x_m))$ é um **valor máximo** de uma função $f = f(x)$, com $x_m \in D(f)$ e $f(x_m) \in Im(f)$, quando $f(x_m) \geq f(x)$ para todo

$x \in D(f)$. Da mesma forma, um ponto de coordenas $(x_m,\ f(x_m))$ é um **valor mínimo** de uma função $f = f(x)$, com $x_m \in D(f)$ e $f(x_m) \in Im(f)$, quando $f(x_m) \leq f(x)$, para todo $x \in D(f)$.

Os **valores máximos e mínimos** do monômio trigonométrico $f(x) = cos(x) + sen(x)$ ocorrem quando $sen(x)$ e $cos(x)$ assumem os mesmos valores, a saber, quando $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$, o que nos proporciona uma imagem para esta função definida no conjunto $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

A definição destes valores, máximos e mínimos decorre do fato de que:

a) $Sen(x)$ e $cos(x)$, quando $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ assumem valores positivos e quando x "cresce" o valor de $senx$ também cresce, porém, fato contrário, ocorre com $cosx$, garantindo o valor máximo quando há a igualdade entre esses valores.

b) Quando x pertence ao intervalo $[\frac{\pi}{2},\pi]$ temos $sen(x) = sen(\pi - x)$ e $cos(x) = -cos(\pi - x)$ e quando x pertence a $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ temos $sen(x) = -sen(2\pi - x)$ e $cos(x) = cos(2\pi - x)$, o que impede que nestes intervalos a função tenha valores máximos ou mínimos.

c) Quando x pertence a $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ os valores de $sen(x)$ e $cos(x)$ são negativos e a medida que x cresce, o valor de $sen(x)$ decresce e fato contrário acontece com $cos(x)$, o que proporciona um valor mínimo quando $sen(x)$ e $cos(x)$ são iguais.

d) O gráfico da função $p(x) = \alpha cos(x) + \beta sen(x)$ é uma composição dos gráficos das funções $p_1(x) = \alpha cos(x)$ e $p_2(x) = \beta sen(x)$.

A próxima figura (3.0.2) é uma ilustração gráfica da composição da função $p(x) = 2cos(x) + 4sen(x)$ através das funções $p_1(x) = 2cos(x)$ e $p_2(x) = 4sen(x)$.

Para a obtenção das ordenadas dos pontos destacados no gráfico de $p(x) = 2cos(x) + 4sen(x)$ usamos o método de adição de ordenadas dos gráficos de $p_1(x) = 2cos(x)$ e $p_2(x) = 4sen(x)$, correspondentes a uma mesma abscissa.

Em seu primeiro período positivo ($0 \leq x \leq 2\pi$) $p(x)$ posui duas raízes ou zeros. Estas, pertencem respectivamente aos intervalos $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$ e $\frac{7\pi}{4} < x < \frac{11\pi}{6}$.

A tabela a seguir mostra para alguns valores o resultado de $p(x)$ como composição das funções $p_1(x)$ e $p_2(x)$. Sendo $p(x) = 2cos(x) + 4sen(x)$, $p_1(x) = 2cos(x)$ e $p_2(x) = 4sen(x)$.

x	$cos(x)$	$p(x) = 2cos(x)$	$sen(x)$	$p_2(x) = 4sen(x)$	$p(x) = 2cos(x) + 4sen(x)$
0	1	2	0	0	2
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	2	2+$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2$\sqrt{2}$	3$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2$\sqrt{3}$	2+$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	0	1	4	4
$\frac{2\pi}{3}$	-$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	2$\sqrt{3}$	-1+2$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	-$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	-$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	2	2-$\sqrt{3}$
π	-1	-2	0	0	-2
$\frac{7\pi}{6}$	-$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-$\sqrt{3}$	-$\frac{1}{2}$	-2	-2-$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	-$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-$\sqrt{2}$	-$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-2$\sqrt{2}$	-3$\sqrt{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	-$\frac{1}{2}$	-1	-$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-2$\sqrt{3}$	-1-2$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	0	-1	-4	-4
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	-$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-2$\sqrt{3}$	1-2$\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	-$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-2$\sqrt{2}$	-$\sqrt{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	-$\frac{1}{2}$	-2	-2+$\sqrt{3}$
2π	1	2	0	0	2
$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	2	2+$\sqrt{3}$
$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2$\sqrt{2}$	3$\sqrt{2}$

A próxima tabela descreve o comportamento do monômio $p(x) = 2cos(x) + 4sen(x)$ próximos de seus valore máximos.

x	$cos(x)$	$p_1(x) = 2cos(x)$	$sen(x)$	$p_2(x) = 4sen(x)$	$p(x) = 2cos(x) + 4sen(x)$
1,080	0,471	0,942	0,881	3,527	4,469
1,090	0,462	0,924	0,886	3,546	4,470
1,100	0,453	0,907	0,891	3,564	4,471
1,110	0,444	0,889	0,895	3,582	4,471
1,115	0,440	0,880	0,898	3,592	4,472
1,120	0,435	0,871	0,900	3,600	4,471

Observa-se que a função considerada, é uma função de domínio real, possui período igual a 2π e amplitude igual a $2\sqrt{5} \simeq 4,472$, consequentemente sua imagem é o intervalo $[-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$

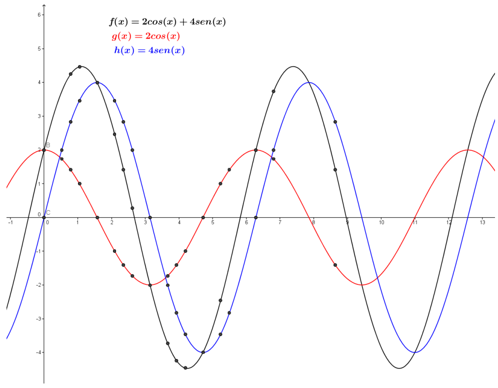


Figura 3.0.2:
Gráfico do monômio trigonométrico $f(x) = 2cos(x) + 4sen(x)$ obtido pela composição das funções $g(x) = 2cos(x)$ e $h(x) = 4sen(x)$.

3.1 ESTUDO DOS MONÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DO 1º GRAU COM VARIAÇÃO DO PARÂMETRO α

A variação do parâmetro α no polinômio trigonométrico p(x) = $\alpha cos(x) + \beta sen(x)$ provoca nesta função uma modificação em sua imagem, consequentemente em seus valores máximos e mínimos.

Desta forma, a parcela $\alpha cos(x)$ tem um contribuição mais efetiva na definição da imagem deste monômio, que passa ser: [-$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$]. Por exemplo a imagem da função $p(x) = 2cos(x) + sen(x)$ é $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

Como $cos(\frac{\pi}{2}+Kx) = 0$ temos que os monômios trigonométricos desta forma se encontram nos pontos de abscissas $(\frac{\pi}{2} + K\pi)$, $K \in \mathbb{Z}$

O período destas funções é 2π.

A seguir gráficos que exemplificam o comportamento do monômio trigonométrico quando há a variação do parâmetro α.

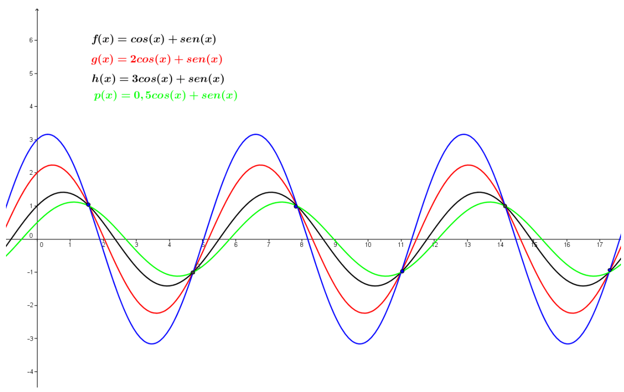


Figura 3.1.1:
Gráficos comparitivos de alguns monômios trigonométricos da forma $p(x) = \alpha cos(x) + sen(x)$.

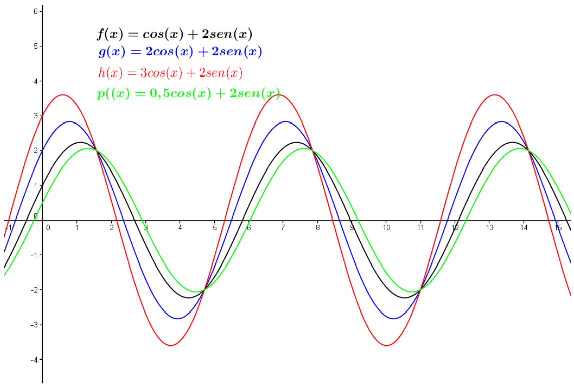


Figura 3.1.2:
Gráficos comparitivos de alguns monômios trigonométricos da forma $p(x) = \alpha cos(x) + 2sen(x)$.

3.2 ESTUDO DOS MONÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DO 1º GRAU COM VARIAÇÃO DO PARÂMETRO β

De forma análoga ao estudado na variação do parâmetro α a modificação do parâmetro β no polinômio trigonométrico $p(x) = \alpha cos(x) + \beta sen(x)$ provoca nesta função uma modificação em sua imagem, consequentemente em seus valores máximos e mínimos.

Desta forma, a parcela $\beta cos(x)$ tem um contribuição mais efetiva na definição da imagem deste monômio que é definida no intervalo [-$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$]. Por exemplo a imagem da função $p(x) = cos(x) + 3sen(x)$ é [-$\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$].

Como $sen(0 + Kx) = 0$ temos que os monômios trigonométricos desta forma se encontram nos pontos de abscissas $(0 + K\pi)$.

O período destas funções é 2π.

A seguir gráficos que exemplificam o comportamento do monômio trigonométrico quando há a variação do parâmetro β.

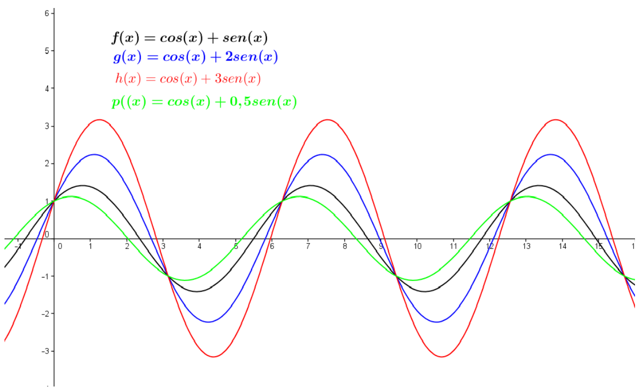


Figura 3.2.1:
Gráficos comparitivos de alguns monômios trigonométricos da forma $p(x) = cos(x) + \beta sen(x)$.

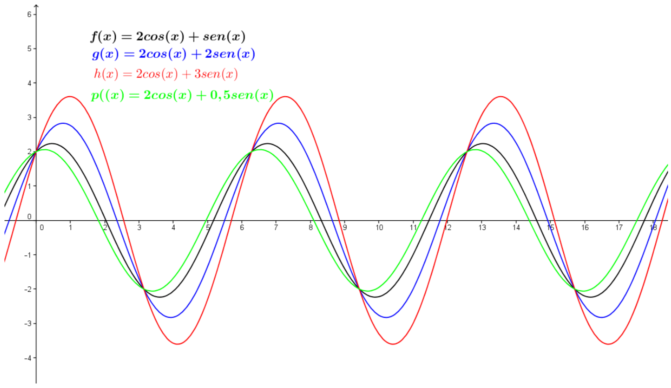


Figura 3.2.2:
Gráficos comparitivos de alguns monômios trigonométricos da forma
$p(x) = 2cos(x) + \beta sen(x)$.

3.3 MÁXIMOS E MÍNIMOS DOS MONÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Neste momento temos uma preocupação de como definir os valores máximos do polinômio $p(x) = \alpha sen(x) + \beta cos(x)$.

Para isso, precisamos do seguinte teorema.

Teorema 6. *Se a e b são constantes reais, então os valores máximos e mínimos do monômio trigonométrico $p(x) = acos(nx) + bsen(nx)$ são respectivamente:*

Valor máximo: $\sqrt{a^2 + b^2}$

Valor mínimo: $-\sqrt{a^2 + b^2}$

Demonstração. Consideremos o triângulo retângulo ABC, retângulo em C indicado na figura:

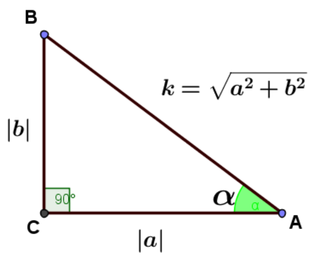


Figura 3.3.1:
Triângulo retângulo ABC. $\overline{AC} = |a|$ e $\overline{BC} = |b|$

Temos:

$cos(\alpha) = \frac{|a|}{k}$, e $sen(\alpha) = \frac{|b|}{k}$.

Consideremos as seguintes situações:

1) $a \geq 0$ ou $b \geq 0$. Temos,

$acos(nx) + bsen(nx) = k.[\frac{|a|}{k}cos(nx) + \frac{|b|}{k}sen(nx)]$.

Segue que,

$acos(nx) + bsen(nx) = \sqrt{a^2+b^2}[cos(\alpha)cos(nx) + sen(\alpha)sen(nx)]$

$= \sqrt{a^2+b^2}cos(nx-\alpha)$.

Considerando que,

$-1 \leq cos(nx-\alpha) \leq 1$,

concluímos que os valores máximos e mínimos de $p(x)$ são.

Valor máximo: $\sqrt{a^2+b^2}$,

Valor mínimo: $-\sqrt{a^2+b^2}$.

2) $a \leq 0$ ou $b \geq 0$ .Temos,

$acos(nx) + bsen(nx) = k.[\frac{|a|}{k}.(-1).cos(nx) + \frac{|b|}{k}sen(nx)]$.

Segue que;

$acos(nx) + bsen(nx) = \sqrt{a^2+b^2}[-cos(\alpha)cos(nx) + sen(\alpha)sen(nx)]$

$= -\sqrt{a^2+b^2}[cos(\alpha)cos(nx) - sen(\alpha)sen(nx)]$

$= \sqrt{a^2+b^2}cos(nx+\alpha)$.

Considerando que,

$-1 \leq cos(nx+\alpha) \leq 1$,

concluímos que os valores máximos e mínimos de $p(x)$ são:

Valor máximo: $\sqrt{a^2+b^2}$,

Valor mínimo: $-\sqrt{a^2+b^2}$.

3) $a \geq 0$ ou $b \leq 0$. Temos,

$acos(nx) + bsen(nx) = k.[\frac{|a|}{k}cos(nx) + \frac{|b|}{k}.(-1).sen(nx)]$

Segue que,

$acos(nx) + bsen(nx) = \sqrt{a^2+b^2}[cos(\alpha)cos(nx) - sen(\alpha)sen(nx)]$

$= \sqrt{a^2+b^2}cos(nx+\alpha)$.

Considerando que,

$-1 \leq cos(nx+\alpha) \leq 1$,

concluímos que os valores máximos e mínimos de p(x) são:

Valor máximo: $\sqrt{a^2+b^2}$,

Valor mínimo: $-\sqrt{a^2+b^2}$.

4) $a \leq 0$ ou $b \leq 0$. Temos,

$acos(nx) + bsen(nx) = k.[\frac{|a|}{k}.(-1).cos(nx) + \frac{|b|}{k}.(-1).sen(nx)]$.

Segue que,

$acos(nx) + bsen(nx) = -\sqrt{a^2+b^2}[cos(\alpha)cos(nx) + sen(\alpha)sen(nx)]$

$= -\sqrt{a^2+b^2}cos(nx-\alpha)$.

Considerando que,

$-1 \leq cos(nx-\alpha) \leq 1$,

concluímos que os valores máximos e mínimos de $p(x)$ são:

Valor máximo: $\sqrt{a^2+b^2}$

Valor mínimo: $-\sqrt{a^2+b^2}$. $\square$

Capítulo 4

ESTUDO DOS MONÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DE GRAU MAIOR QUE 1

4.1 VARIAÇÃO DO PARÂMETRO k

A variação do parâmetro k no monômio trigonométrico da forma $p(x) = \alpha cos(kx) + \beta sen(kx)$ proporciona uma modificação em seu período que pode ser definido por $P = \frac{2\pi}{k}$. Por este motivo temos uma "dilatação" horizontal no gráfico deste monômio.

Teorema 7. *O período de* $p(x) = \alpha cos(kx) + \beta sen(kx)$ *é* $P = \frac{2\pi}{k}$.

Demonstração. Seja P o período de $p(x)$=$\alpha cos(kx) + \beta sen(kx)$.

Temos que:

$p(0) = p(0 + P)$.

Calculando $p(0)$ e $p(0 + P)$, como,

$p(x) = acos(kx) + bsen(kx)$, temos

$p(0) = a$,

$p(0 + P) = a[cos(0 + kP) + bsen(0 + kP)]$

$= a[cos(0).cos(kP) - sen(0)sen(kP)] + b[sen(0)cos(kP) + sen(kP)cos(0)]$

$= acos(kP) + bsen(kP)$

Logo $acos(kP) + bsen(kp) = a$.

Usando a comparação polinomial temos:

$acos(kP) + bsen(kP) = a$

Caso 1) Se $a = 0$; então:

$bsen(kP) = 0$,

$sen(kP) = sen(0) = sen(2\pi)$ e

$P = \frac{2\pi}{k}$.

Caso 2) Se $a \neq 0$; então:

$cos(kP) = 1$,

$cos(kP) = cos(2\pi)$ e

$P = \frac{2\pi}{k}$ □

Como o arco $(2x)$ pode ser redefinido, por exemplo, como $2x = a$, temos que sua imagem é o intervalo [-$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$], conforme foi demonstrado no capítulo anterior.

Seus gráficos são coincidentes nos pontos $((0 + 2K\pi), \alpha)$ uma vez que $sen(0) = 0$ e $cos(0) = 1$, $(K \in \mathbb{Z})$

Vejamos alguns exemplos de gráficos dos monômios do tipo p(x) = $\alpha cos(kx)$+ $\beta sen(kx)$ com variação do parâmetro k.

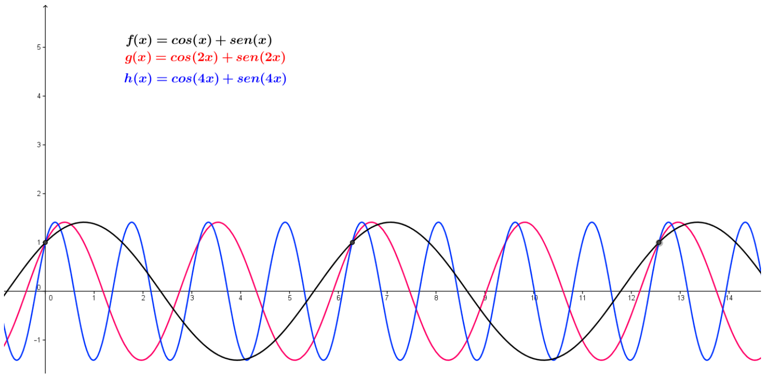


Figura 4.1.1: Exemplos de gráficos da forma $p(x) = cos(kx) + sen(kx)$.

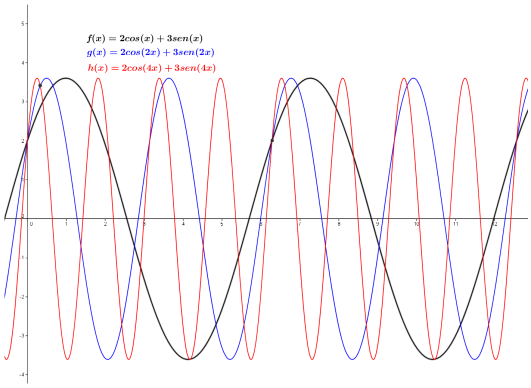


Figura 4.1.2: Exemplos de gráficos da forma $p(x) = 2cos(kx) + 3sen(kx)$.

4.2 VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS α ou β

A variação em um dos parâmetros α ou β proporciona nas funções que representam os monômios trigonométricos do tipo $p(x) = \alpha cos(kx) + \beta sen(kx)$ uma modificação nas imagens destas funções, consequentemente uma "dilatação vertical" das mesmas. A imagem de cada uma destas funções é definida pelo intervalo [-$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$].

O período destas funções é dado por $P = \frac{2\pi}{k}$.

A seguir gráficos com a variação dos parâmetros α e β.

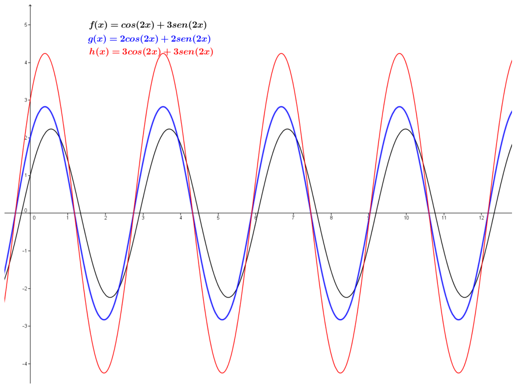


Figura 4.2.1:
Exemplos de gráficos da forma $p(x) = \alpha cos(2x) + \beta sen(2x)$.

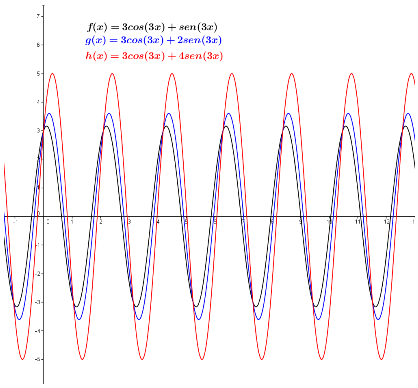


Figura 4.2.2:
Exemplos de gráficos da forma $p(x) = 3cos(3x) + sen(3x)$.

Capítulo 5

ESTUDO DOS POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

5.1 POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DE GRAU 1

A soma algébrica de diversos monômios trigonométricos formam um polinômio trigonométrico que podemos definir da seguinte forma:

Definição 8. Às funções que assumem a forma $p(x) = a_o + \sum [a_k cos(kx) + b_k sen(kx)]$ chamamos de polinômios trigonométricos, onde a soma é finita e $k = 1, 2, 3, ..., m$.

O grau de um polinômio trigonométrico é o maior valor atribuído ao parâmetro k dado na definição 8. Assim os polinômios em que $k = 1$, ou seja, $p(x) = a_0 + asen(x) + bcos(x)$ onde o termo a_0 é um valor constante, são considerados polinômios trigonométricos do primeiro grau e os polinômios em que o maior valor de k no desenvolvimento das funções da forma $p(x) = \sum_{k=1}^{3} a_k cos(kx) + b_k sen(kx)$ é 3, são considerados polinômios do terceiro grau.

O comportamento de um polinômio trigonométrico do primeiro grau é semelhante ao comportamento dos monômios trigonométricos de mesmo grau estudados na seção anterior. Porém, como α_o é um valor constante diferente de zero temos uma translação na representação do gráfico do polinômio $p(x) = \alpha_0 + \alpha cos(x) + \beta sen(x)$ se comparado com o gráfico do monômio trigonométrico $p(x) = \alpha cos(x) + \beta sen(x)$. Neste caso, a imagem da função que define o polinômio trigonométrico é o intervalo $[-\sqrt{2} - \alpha_0, \sqrt{2} + \alpha_0]$. A figura a seguir representa a comparação gráfica do polinômio trigonométrico $p(x) = 2 + cos(x) + sen(x)$ com o monômio trigonométrico $p(x) = cos(x) + sen(x)$.

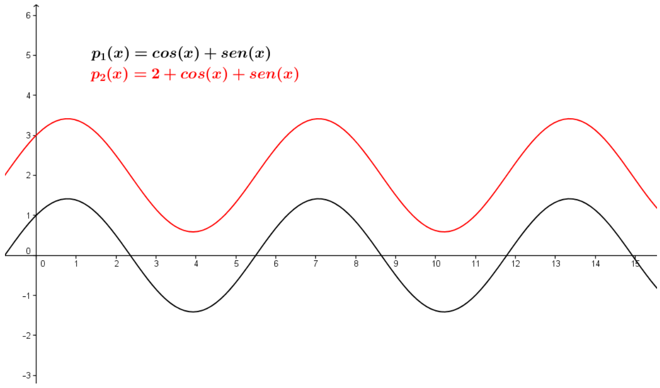


Figura 5.1.1:
Comparação gráfica do monômio $p_1(x) = cos(x) + sen(x)$ e o polinômio $p_2(x) = 2 + cos(x) + sen(x)$.

O domínio e o período dos monômios e dos polinômios trigonométricos de primeiro grau são respectivamente o conjunto dos números reais e 2π.

5.2 RAÍZES OU ZEROS DOS POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DO PRIMEIRO GRAU

Consideremos o polinômio trigonométrico do primeiro grau $p(x) = acos(x)+bsen(x)+c$ podemos encontrar as raízes ou zero deste polinômio da seguinte forma:

$acos(x) + bsen(x) = -c$.

Como $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$, podemos dividir os dois membros desta equação por $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ obtendo a seguinte equação:

$\frac{a}{r}cos(x) + \frac{b}{r}sen(x) = \frac{-c}{r}$. (1)

Considerando que $(\frac{a}{r})^2$+ $(\frac{b}{r})^2$=1, existe um número real θ de forma que $sen(\theta) = \frac{b}{r}$ e $cos(\theta) = \frac{a}{r}$.

Substituindo esses valores em (1) obtemos a seguinte equação:

$cos(\theta).cos(x) + sen(\theta).sen(x) = cos(x - \theta) = \frac{-c}{r}$.

Fazendo: $cos(\alpha) = \frac{-c}{r}$ concluímos que, $x = (\alpha + \theta) + 2K\pi$, sendo $K \in \mathbb{Z}$.

5.3 POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS DO 2º GRAU

Consideremos o polinômio trigonométrico $p(x) = acos(x) + bsen(x) + ccos(2x) + dsen(2x)$. Esta função polinomial trigonométrica é uma função de domínio real e periódica cujo período é igual a 2π.

De fato, seja P o período de $p(x)$, portanto $P = 2\pi$.

Logo, $p(0) = p(0 + P)$

Calculando $p(0)$ e $p(0+P)$ temos,
$p(0) = a + c$,
$p(0+P) = acos(P) + bsen(P) + ccos(2P) + dsen(2P)$.
Como $p(0) = p(0+P)$ e usando a igualdade polinomial, temos:
Caso 1) Para $a \neq 0$, $c \neq 0$ e $b = d = 0$, temos:
$acos(P) + ccos(2P) = a + c$.
O que nos fornece:
$cos(P) = 1$ o que implica $P = 2\pi$ e (1)
$cos(2P) = 1$ o que implica $P = \pi$. (2)
Como 2π é período de (1) e de (2) concluímos que $P = 2\pi$.
Caso 2) Para $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos:
$acos(P) + bsen(P) + dsen(2P) = a$.
Logo, $cos(P) = 1 = cos(2\pi)$.
O que nos fornece $P = 2\pi$, (1)
$bsen(P) = 0$ o que implica em $sen(P) = 0$,
Logo, $sen(P) = sen(2\pi)$
O que nos fornece $P = 2\pi$ e (2)
$dsen(2P) = 0$, o que implica em:
$sen(2P) = sen(2\pi)$
Logo, $P = \pi$. (3)
Como 2π é período de (1), (2) e (3) temos que $P = 2\pi$.
Caso 3) Para $c = a = 0$, $b \neq 0$ e $d \neq 0$ temos:
$bsen(P) + dsen(2P) = 0$.
Logo, $sen(P) = 0 = sen(2\pi)$, o que implica que $P = 2\pi$ e (1)
$sen(2P) = 0 = sen(2\pi)$ o que implica $P = \pi$. (2)
Como 2π é período (1) e de (2) temos que $P = 2\pi$.
Caso 4) Para $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que:
$acos(P) + bsen(P) + ccos(2P) + dsen(2P) = a + c$, ou seja,
$acos(P) + ccos(2P) = a + c$, que nos fornece:
$acos(P) = a$ o que implica que $P = 2\pi$, (1)
$ccos(2P) = c$ o que implica $P = \pi$ e (2)
$bsen(P) = 0$ o que implica que $P = 2\pi$. (3)
Como 2π é período de (1), (2) e de (3), concluímos que $P = 2\pi$.
Caso 5) Para $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, temos:
$bsen(P) + ccos(2P) + dsen(2P) = c$, que nos fornece:
$bsen(P) = 0$ o que implica que $P = 2\pi$, (1)
$dsen(2P) = 0$ o que implica que $P = \pi$ e (2)
$ccos(2P) = 1$ o que implica que $P = \pi$. (3)
Como 2π é período (1), (2) e (3) temos que $P = 2\pi$.

Caso 6) Para $a \neq 0$ e $b = c = d = 0$, temos:

$acos(P) = a$, o que implica em $P = 2\pi$.

Caso 7) Para $c \neq 0$ e $a = c = d = 0$, temos:

$ccos(2P) = c$, o que implica em $P = \pi$. Logo, 2π também é período de $p(x)$.

Definimos ***por retas de máximo e de mínimo*** as retas horizontais em que o gráfico de $p(x)$ podem atingir, mas nunca ultrapassam.

Os polinômios trigonométricos do 2º grau possuem retas de máximo e de mínimo, respectivamente, em $y = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$ e em $y = -(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})$. Estas retas ocorrem pelo fato do polinômio considerado ser uma composição de dois monômios trigonométricos, de primeiro e segundo grau, com valores máximos, respectivamente, $\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{c^2 + d^2}$.

O gráfico a seguir representa o polinômio trigonométrico $p(x) = 2cos(x) + senx + 3cos(2x) + 4sen(2x)$.

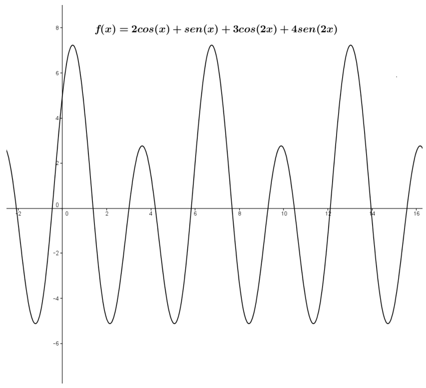


Figura 5.3.1:
Polinômio trigonométrico $p(x) = 2cos(x) + senx + 3cos(2x) + 4sen(2x)$.

Uma análise do gráfico de p(x) demonstra que este possui valores ***máximos e mínimos***, tanto ***absolutos*** como ***locais*** e também ***pontos de inflexões***.

Consideramos o ponto $A = (a, f(a))$ do gráfico de $p(x)$ como **máximo local** quando houver no domínio de $p(x)$ um intervalo aberto I contendo A de forma que $f(a) \leq f(x)$.

Da mesma forma consideramos o ponto $B = (b.f(b))$ do gráfico de $p(x)$ como **mínimo local** quando houver no domínio de $p(x)$ um intervalo aberto I contendo A de forma que $f(b) \geq f(x)$.

Esses pontos, $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, são considerados máximos ou mínimos locais, respectivamente, pois fixamos a nossa atenção em um intervalo aberto I . Se $x \notin I$, $f(x)$ pode assumir valores maiores ou menores que $f(a)$ ou $f(b)$.

Dizemos que $p(x)$ tem **concavidade voltada para cima**, em um intervalo aberto $I \subset D(p(x))$, se o gráfico de $p(x)$ tiver nesse intervalo um ponto de mínimo local ou absoluto. De forma análoga, dizemos que $p(x)$ tem **concavidade voltada para baixo**, em um intervalo aberto $I \subset D(p(x))$, se o gráfico de $p(x)$ tiver nesse intervalo um ponto de máximo local ou absoluto.

Um ponto $C = (c, f(c))$ do gráfico de p(x) é considerado ponto de inflexão se houver um intervalo aberto $I =]m, n[$, $C \in I$, tal que a concavidade de $p(x)$ tenha nomes contrários nos intervalos $]m, c[$ e $]c, n[$.

Neste capítulo faremos um estudo destes pontos de inflexão e uma investigação intuitiva dos máximos e mínimos de $p(x)$.

Nos próximos gráficos apresentamos o estudo do polinômio trigonométrico $p(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(2x)$ obtido pelo método da adição de ordenadas, relativas a uma mesma abscissa. Os dois primeiros gráficos representam os monômios trigonométricos $p_1(x) = cosx + senx$ e $p_2(x) = cos(2x) + sen(2x)$ através da composição, pelo método da adição de ordenadas, respectivamente dos gráficos de $f(x) = cosx$ e $g(x) = senx$ e $f_1(x) = cos(2x)$ e $g_1(x) = sen(2x)$.

O terceiro gráfico representa o polinômio trigonométrico
$p(x) = cosx + senx + cos(2x) + sen(2x)$ obtido da composição de $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

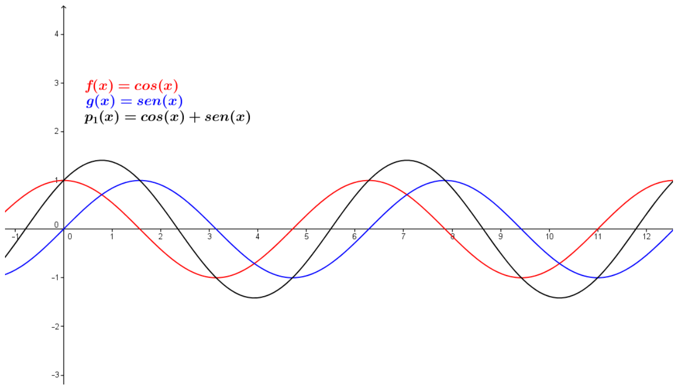


Figura 5.3.2:
Gráficos das funções: $f(x) = cos(x)$, $g(x) = sen(x)$ e $p_1(x) = cosx + senx$.

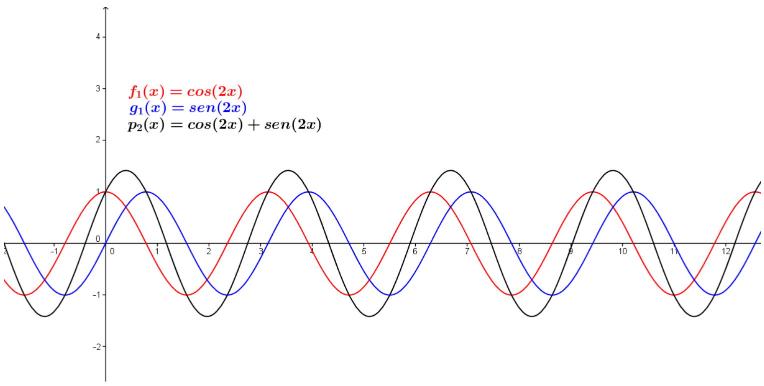


Figura 5.3.3:
Gráficos das funções: $f_1(x) = cos(x)$, $g_1(x) = sen(x)$ e $p_2(x) = cosx + senx$.

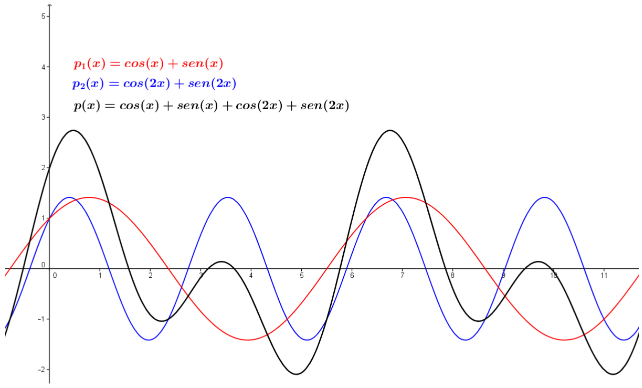


Figura 5.3.4:
Gráficos das funções: $p_1(x) = cosx + senx$, $p_1(x) = cos(2x) + sen(2x)$ e $p(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(2x)$.

O monômio trigonométrico $p_1(x)$ atinge seu valor máximo nos pontos de coordenadas $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\sqrt{2})$ e da mesma forma o monômio $p_2(x)$ atinge o seu valor máximo nos pontos de coordenadas $(\frac{\pi}{8},\ \sqrt{2})$.

Pela análise do gráfico anterior podemos conjecturar que o primeiro valor máximo de abscissa positiva deste polinômio ocorre em um ponto que essa pertencente ao intervalo $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}]$. Porém, intuitivamente percebemos que esta se encontra mais próxima de $\frac{\pi}{8}$, quando o monômio de segundo grau $p_2(x)$ atinge o seu valor máximo considerando o seu domínio no intervalo $[0, 2\pi]$.

Da mesma forma observamos que os pontos de inflexão ocorrem nas proximidades de quando $p_1(x) = p(x)$

Neste caso vamos considerar o arco $\theta = 2x$ para $0 < \theta < 4\pi$.

Temos: $\theta= \frac{3\pi}{4}$, $\theta= \frac{7\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$ e $\theta = \frac{15\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{8}$, $x = \frac{7\pi}{8}$, $x = \frac{11\pi}{8}$ e $x = \frac{15\pi}{8}$.

No próximo gráfico destacamos as retas verticais $x = \frac{3\pi}{8}$, $x = \frac{7\pi}{8}$ e $x = \frac{11\pi}{8}$ e $x = \frac{15\pi}{8}$ e os pontos de inflexão no gráfico de $p(x) = cosx + senx + cos(2x) + sen(2x)$.

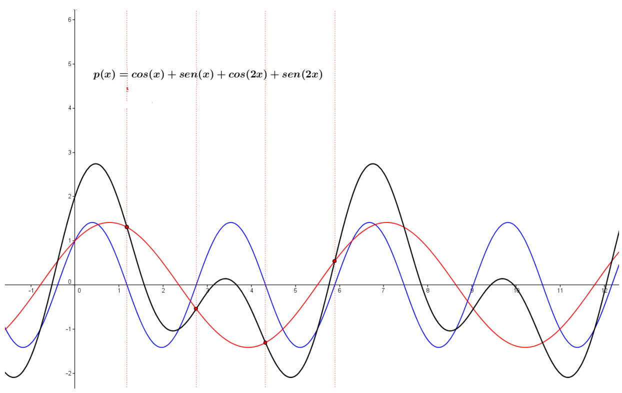


Figura 5.3.5:
Gráfico de $p(x) = cosx + senx + cos(2x) + sen(2x)$.

Vale destacar que $p(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(2x)$, em cada um de seus períodos possui quatro raízes reais. Modificações nos coeficientes deste polinômio podem proporcionar alteração no número de raízes deste polinômio, quando considerados cada um de seus períodos.

Fazendo uma análise do valor numérico de p(x) obtido nas "proximidades" de $x = \frac{\pi}{8}$, temos:

$x(emgraus)$	$cos(x)$	$sen(x)$	$cos(2x)$	$sen(2x)$	$p(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(2x)$
22º	0,9722	0,3746	0,7431	0,6691	2,7140
24º	0,9135	0,4067	0,6691	0,7431	2,7324
26	0,4384	0,8988	0,6157	0,7880	2,7409
27	0,891	0,454	0,5878	0,809	2,7418
28	0,8829	0,4695	0,5592	0,829	2,7406
29	0,8746	0,4848	0,5299	0,848	2,7373

Esta "proximidade" do valor máximo de p(x) em relação ao máximo de $p_2(x)$ leva a uma conjectura de que quando os coeficientes a, b, c e d de $p(x)$ são iguais o monômio do maior grau de $p(x)$ tem um papel mais decisivo na definição deste valor máximo.

A seguir apresentamos alguns gráficos de polinômios trigonométricos do 2º grau, com a variação de seus coeficientes de forma que em cada polinômio estes coeficientes tenham o mesmo valor positivo. Observa-se que os pontos de inflexão ocorrem nas proximidades de pontos que têm as mesmas abscissas.

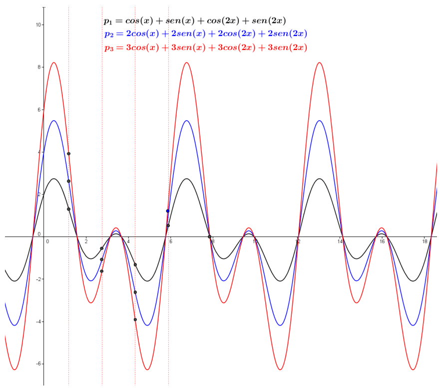


Figura 5.3.6:
Gráficos de polinômios da forma $p(x) = acos(x) + asen(x) + acos(2x) + asen(2x)$.

Analisando o comportamento gráfico dos polinômios trigonométricos do 2º grau em que os coeficientes $a = c \neq b = d$ constatamos que o polinômio possui comportamento idêntico ao que foi estudado quando a =b =c= d, ou seja, os pontos de inflexão de $p(x)$ ocorrem nas proximidades dos pontos em que $p(x) = p_1(x)$, sendo $p_1(x)$ o monômio do 2º grau. O gráfico da figura ilustra esta observação e destaca as retas horizontais de máximo e de mínimo.

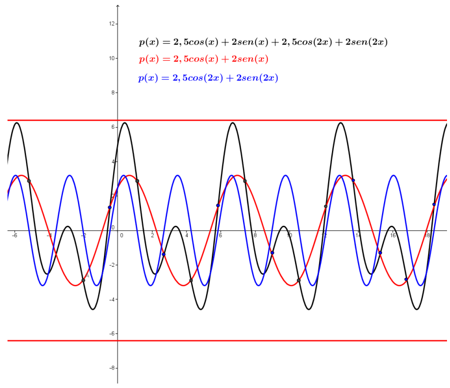


Figura 5.3.7:
Gráficos das funções $p(x) = 2,5cos(x) + 2sen(x) + 2,5cos(2x) + 2sen(2x)$, $p_1(x) = 2,5cos(x) + 2sen(x))$ e $p_2(x) = 2,5cos(2x) + 2sen(2x)$.

Destacamos no próximo gráfico as retas horizontais y = $\sqrt{a^2+b^2}$+$\sqrt{c^2+d^2}$e y = -($\sqrt{a^2+b^2}$+$\sqrt{c^2+d^2}$) e os pontos de inflexão de $p(x)$ ilustrando o fato de que com todos coeficientes diferentes entre si, o polinômio trigonométrico do 2º grau tem comportamento idêntico ao estudado até aqui.

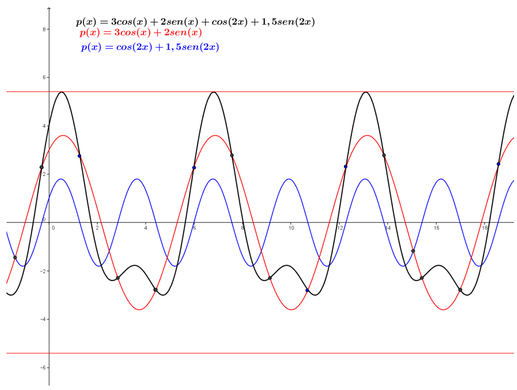


Figura 5.3.8:
Gráficos das funções $p(x) = 3cos(x) + 2sen(x) + cos(2x) + 1,5sen(2x)$, $p_1(x) = 3cos(x) + 2sen(x))$ e $p_2(x) = cos(2x) + 1,5sen(2x)$.

Observe que os polinômios trigonométricos do 2º grau, em cada um de seus períodos possuem 4 pontos de inflexão. A maior parte destes pontos ocorrem nas proximidades dos pontos em que este polinômio é igual ao seu monômio do 1º grau.

5.4 POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS GRAU MAIOR QUE 2

No estudo dos polinômios trigonométricos de grau k maior 2 podemos destacar as seguintes características.

1) São funções de domínio real.

2) São funções periódicas $P = \frac{2\pi}{mdc(m_1, m_2, ..., m_n)}$, Onde $m_1, m_{2,...}, m_n$ são os graus de cada monômio trigonométrico que compõe $p(x)$.

O período do seu primeiro monômio trigonométrico é: $P_1 = \frac{2\pi}{m_1}$.

De fato: $p(0) = p(0 + P_1)$. Assim, como

$p_1(x) = a_1 cos(m_1 x) + b_1 sen(m_1 x)$, temos

$p(0) = a_1$,

$p(0 + P_1) = a_1[cos(0 + m_1 P_1) + b_1 sen(0 + m_1 P_1)] =$

$= P_1 a[cos(0).cos(m_1 P_1) - sen(0) sen(m_1 P_1)] + b_1[sen(0) cos(m_1 P_1) + sen(m P_1) cos(0)] =$

$= a_1 cos(m_1 P_1) + b_1 sen(m P_1)$.

Usando a comparação polinomial temos:

1)Se $a_1 = 0$. Temos,

$b_1 sen(m_1 P_1) = 0 = sen(2\pi)$,

$P_1 = \frac{2\pi}{m_1}$

2) Se $a_1 \neq 0$. Temos,

$a_1 cos(m_1 P_1) = a_1$, logo

$cos(m_1 P_1) = 1$, o que implica

$cos(m_1 P_1) = cos(2\pi)$, e, portanto

$P_1 = \frac{2\pi}{m_1}$.

Realizando o mesmo raciocínio com os demais monômios trigonométricos de $p(x)$ encontramos os seguintes períodos para cada um desses monômios:

$P_2 = \frac{2\pi}{m_2}$, $P_3 = \frac{2\pi}{m_3}$, ..., $P_n = \frac{2\pi}{m_n}$.

Considerando que $p(x)$ é uma composição de seus monômios trigonométricos e ainda;

$m_1.P_1 = 2\pi$, $m_2.P_2 = 2\pi$, ... , $m_n.P_n = 2\pi$,

concluímos que 2π é um dos períodos de $p(x)$.

Existe um número real P de forma que $mdc(m_1, m_2, ..., m_n).P = 2\pi$.

Assim:

$P = \frac{2\pi}{mdc(m_1, m_2, ..., m_n)}$

Existem números reais α_1 , α_2 , ..., α_n de forma que:

$\alpha_1 P_1 = P$, $\alpha_2 P_2 = P$, ... , $\alpha_n P_n = P$.

O que nos permite concluir que P também é um dos períodos de $p(x)$.

2) Conjectura:

Os polinômios trigonométricos possuem retas de máximo e retas de mínimo, respectivamente em $y = \sum_{k=1}^{k}(\sqrt{a_k^2 + \beta_k^2})$ e $y = -\sum_{k=1}^{k}(\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2})$.

3) Conjectura:

Considerando o polinômio trigonométrico de grau k, em que todos os seus coeficientes são iguais a 1, exceto o termo independente igual a zero, o polinômio possui $2k$ raízes no intervalo $[0, 2\pi]$.

4) Conjectura:

Seus pontos de inflexão ocorrem nas proximidades dos pontos em que $p(x)$ coincide com os seus respectivos monômios trigonométricos, principalmente com o seu monômio trigonométrico de menor grau. Este fato pode ser observado nos gráficos das figuras 5.4.1, 5.4.2 e 5.4.3 logo a seguir.

5) Conjectura:

Considerando apenas o intervalo $[0, 2\pi]$ estes polinômios possuem $2k$ pontos de inflexão. Portanto, quanto maior o grau de p(x) este "oscila" mais rapidamente que um polinômio trigonométrico de menor grau.

Estas características permitem imaginar que o termo de maior grau do polinômio é decisivo no estudo de seu comportamento gráfico, ou seja, uma variação neste termo provoca maiores modificações do que a mesma variação em um termo de grau menor.

Os polinômios trigonométricos são utilizados principalmente para aproximação de funções mais complicadas que descrevem fenômenos periódicos.

O modo de aproximar depende do critério de proximidade adotado. Na análise numérica são usados vários critérios de proximidade. Um desses métodos de aproximação é a interpolação polinomial trigonométrica.

O próximo gráfico apresenta o polinômio trigonométrico do terceiro grau $p(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(2x) + cos(3x) + sen(3x)$ destacando seus pontos de inflexão, que ocorrem nas proximidade de $p(x) = p_1(x)$ ou $p(x) = p_3(x)$ sendo $p_1(x)$, e $p_3(x)$ respectivamente os monômios de 1º e 3º grau que compõe $p(x)$.

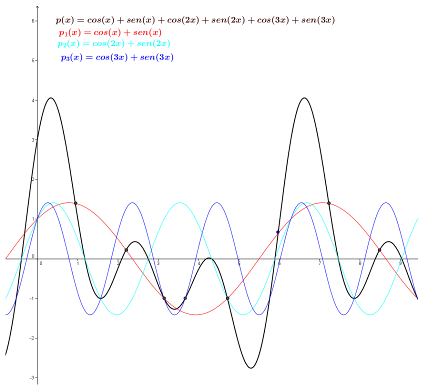


Figura 5.4.1:
Gráficos do polinômio trigonométrico $p(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(2x) + cos(3x) + sen(3x)$ e de seus monômios trigonométricos.

Nos próximos gráficos temos um polinômio do terceiro grau da forma $p(x) = acos(x) + bsen(x) + ccos(2x) + dsen(2x) + ecos(3x) + fcos(3x)$ comparado com os gráficos dos monômios trigonométricos $p_1(x) = acos(x) + bsen(x)$,$p_2(x) = ccos(2x) + dsen(2x)$ e $p_3(x) = ecos(3x) + fcos(3x)$. Chama a atenção o fato de que os pontos de inflexão de $p(x)$ ocorrem nas proximidades dos pontos em que $p(x) = p_1(x)$.

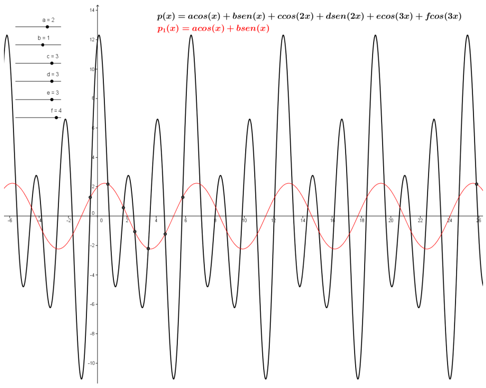


Figura 5.4.2: Gráficos do polinômio trigonométrico $p(x) = 2cos(x) + sen(x) + 3cos(2x) + 3sen(2x) + 3cos(3x) + 4sen(3x)$ e do monômio $p_1(x) = 2cos(x) + sen(x)$.

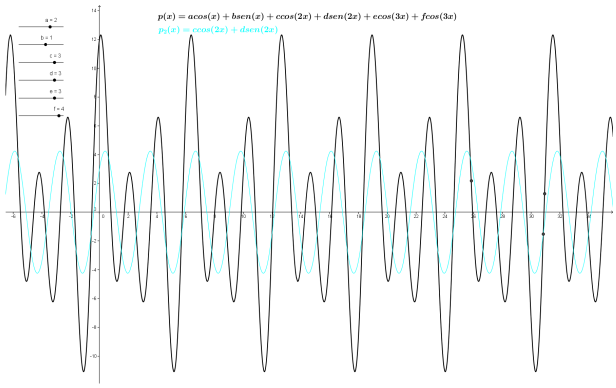


Figura 5.4.3: Gráficos do polinômio trigonométrico $p(x) = 2cos(x) + sen(x) + 3cos(2x) + 3sen(2x) + 3cos(3x) + 4sen(3x)$ e do monômio $p_2(x) = 3cos(x) + 3sen(x)$.

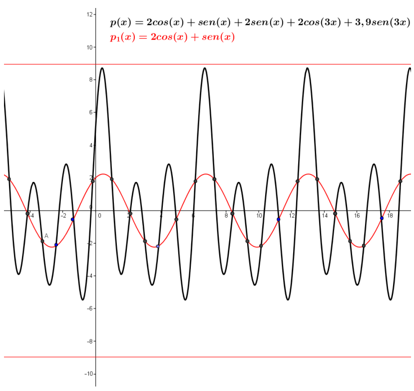


Figura 5.4.4: Gráfico do polinômio trigonométrico $p(x) = 2cos(x) + sen(x) + cos(2x) + 2sen(2x) + 2cos(3x) + 3,9cos(3x)$ e do monômio $p_1(x) = 2cos(x) + sen(x)$.

A próxima figura compara o polinômio trigonométrico de terceiro grau em que todos coeficientes são iguais a um com um polinômio trigonométrico de mesmo grau com coeficientes diferentes. Constata-se em um período de $p(x)$ e de $p_1(x)$ a manutenção do número de pontos de inflexão e modificações no número de raízes de $p(x)$.

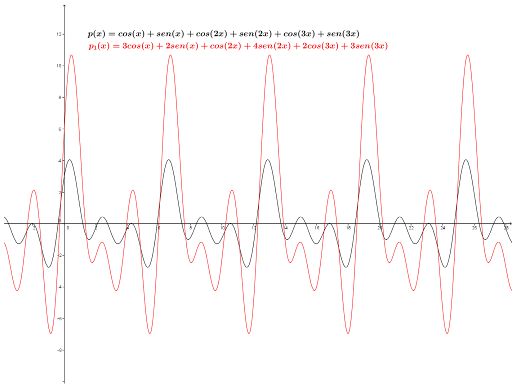


Figura 5.4.5:
Gráficos do polinômio trigonométrico
$p(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(2x) + cos(3x) + sen(3x)$ e do polinômio $p_1(x) = 3cos(x) + sen(x) + 2cos(2x) + 4sen(2x) + 2cos(3x) + 3sen(3x)$.

A seguir temos o gráfico do polinômio trigonométrico do 5 º grau $p(x) = 3cos(x) + sen(x) + cos(5x) + sen(5x)$ e seus monômios trigonométricos. A figura ilustra ainda as retas horizontais $y = (\sqrt{10} + \sqrt{2})$ e $y = -(\sqrt{10} + \sqrt{2})$.

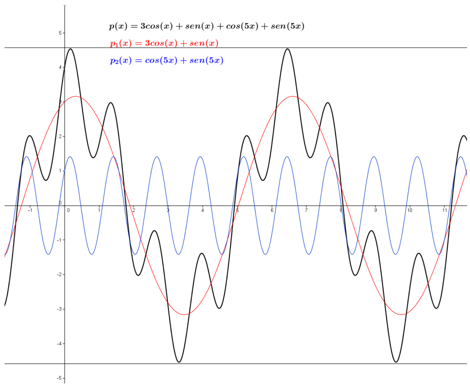


Figura 5.4.6:
Gráficos do polinômio trigonométrico $p(x) = 3cos(x) + sen(x) + cos(5x) + sen(5x)$, dos monômios $p_1(x) = 3cos(x) + sen(x)$ e $p_2(x) = cos(5x) + sen(5x)$.

A seguir comparamos os gráficos de dois polinômios trigonométricos de 4º grau, o primeiro com coeficientes diferentes e o segundo com coeficientes igual a um. Pela observação desta figura conjecturamos que no intervalo $[0, 2\pi]$ os polinômios mantêm o mesmo número de pontos de inflexão, porém há modificações no número de raízes.

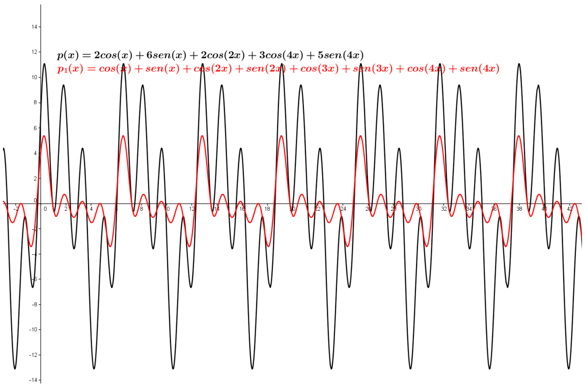


Figura 5.4.7:
Gráficos dos polinômios trigonométricos
$p(x) = 2cos(x) + 6sen(x) + 2cos(2x) + 3cos(4x) + 5sen(4x)$ e do polinômio
$p_1(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(2x) + cos(3x) + sen(3x) + cos(4x) + sen(4x)$.

A seguir observamos um polinômio trigonométrico de 5º grau e o seu monômio trigonométrico de menor gruau (grau 2). A figura ressalta a presença dos pontos de inflexão nas proximidades dos pontos em que $p(x) = p_1(x)$. Destaca também as retas de máximo e de mínimo calculadas conforme estabelecido anteriormente.

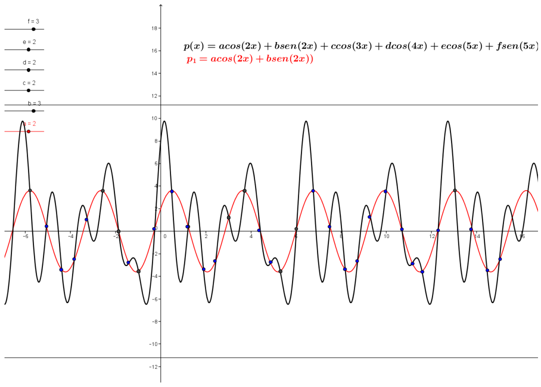


Figura 5.4.8:
Gráficos do polinômio trigonométrico
$p(x) = 2cos(2x) + 3sen(3x) + 2cos(3x) + 2cos(4x) + 2cos(5x) + 3sen(5x)$ e do monômio
$p_1(x) = 2cos(2x) + 3sen(2x)$.

O próximo gráfico é um exemplo do período de $p(x) = 2cos(4x) + sen(4x) + cos(8x) + 2sen(8x)$, onde $P = \frac{2\pi}{mdc(4,8)}$.

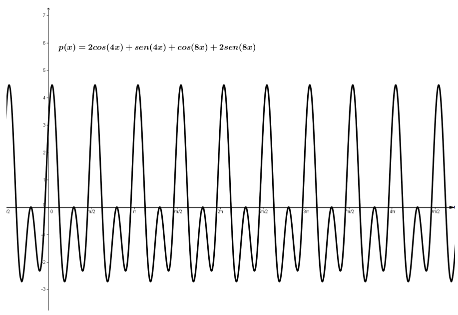


Figura 5.4.9:
Gráfico do polinômio $p(x) = 2cos(4x) + sen(4x) + cos(8x) + 2sen(8x)$.

Capítulo 6

TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

Definição. Um número complexo z pode ser representado na forma $a + bi$, em que a e b são números reais e i é um símbolo com a propriedade que $i^2 = -1$.

O número complexo $a + bi$ pode também ser representado em um plano, chamado plano de Argand ou Argand-Gaus, por pontos definidos pelo par ordenado (a, b), como indicado na figura.

No plano de Argand, o eixo horizontal é denominado de eixo real e o eixo vertical é definido como imaginário.

Os pontos A, B e C indicam respectivamente os números complexos i, $3 + 4i$ e $-2 - 2i$.

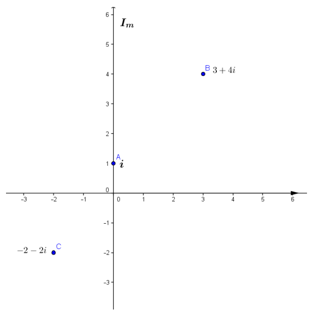


Figura 6.0.1:
Representação no plano de Argand dos números i, $3 + 4i$ e $-2 - 2i$.

Definição. O módulo ou valor absoluto de $z = a + bi$ é a sua distância até a origem do plano de Argand. Da figura seguinte obtemos que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

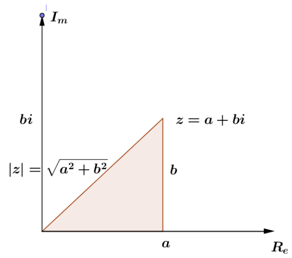


Figura 6.0.2:
Representação geométrica da definição do módulo de um número complexo .

6.1 FORMA POLAR.

Definição. Todo número complexo $z = a+bi$ pode ser considerado um ponto (a, b) do plano de Argand e também pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r \geqslant 0$, da seguinte forma.

De fato.

Pela figura anterior podemos definir:

$$a = rcos(\theta) \qquad e \qquad b = rsen(\theta)$$

Assim, podemos escrever qualquer número complexo da seguinte forma:

$$z = a + bi = rcos(\theta) + r[sen(\theta)i] = r[cos(\theta) + isen(\theta)]$$

Onde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $tg(\theta) = \frac{b}{a}$.

O número θ é chamado argumento de z, e escrevemos $\theta = arg(z)$.

Esta forma polar abre no estudo dos números complexos uma nova perspectiva para multiplicação e divisão destes números e consequentemente uma nova perspectiva para a potenciação. Vejamos:

Sejam dois números z_1 e z_2 complexos escritos na forma polar, sendo:

$$z_1 = r_1[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)] \text{ e } z_2 = r_2[cos(\theta_2) + isen(\theta_2)],$$

temos:

$$z_1 z_2 = \{r_1[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)][r_2(cos(\theta_2) + isen(\theta_2)\}$$

$$= r_1 r_2[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)][cos(\theta_2) + isen(\theta_2)]$$

$$= r_1r_2[cos(\theta_1)cos(\theta_2) + cos(\theta_1)isen(\theta_2) + isen(\theta_1)cos(\theta_2) + i^2sen(\theta_1)sen(\theta_2)]$$

$$= r_1r_2[cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2) + icos(\theta_1)sen(\theta_2) + sen(\theta_1)cos(\theta_2)]$$

$= r_1r_2[(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$.

Esta forma permite calcular potências de um número complexo $z = a + bi$.

Por exemplo:

$$z^3 = r^3[cos(3\theta) + iseno(3\theta)].$$

A forma trigonométrica dos números complexos nos fornce condições para a interpretação geométrica da multiplicação desses números.

Inicialmente constatamos que se x é um número qualquer então:

$$cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = -sen(x) \text{ e}$$

$$sen(x + \tfrac{\pi}{2}) = cos(x) \ .$$

Mostremos que os triângulos OP_1P e OQ_1Q representados na próxima figura são congruentes.

Por construção temos os ângulos $O\widehat{P_1}P = O\widehat{Q_1}Q = \frac{\pi}{2}$.

Como $P_1\widehat{O}P + \frac{\pi}{2} = A\widehat{O}Q$ e

$\frac{\pi}{2} + Q_1\widehat{O}Q = A\widehat{O}Q$

Temos: $P_1\widehat{O}P = Q_1\widehat{O}Q$.

Consequentemente os ângulos $O\widehat{P_1}P$ e $O\widehat{Q_1}Q$ têm a mesma medida.

Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$ concluímos que os triângulos $O\widehat{P_1}P$ e $O\widehat{Q_1}Q$ são congruentes.

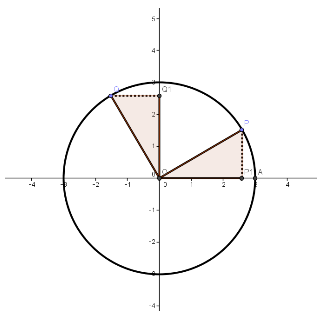


Figura 6.1.1:
Triângulos conguentes OP_1P e OQ_1Q .

Assim, em valor absoluto concluímos que:

$$\left|cos(x + \tfrac{\pi}{2})\right| = \left|\overline{QQ_1}\right| = \left|\overline{PP_1}\right| = |senx|,$$

$$\left|sen(x + \tfrac{\pi}{2})\right| = \left|\overline{OQ_1}\right| = \left|\overline{OP_1}\right| = |cosx|.$$

Considerando que os arcos x e $(x+\frac{\pi}{2})$ estão em quadrantes adjacentes, obtemos:

$$cos(x+\tfrac{\pi}{2}) = -sen(x) \text{ e } sen(x+\tfrac{\pi}{2}) = cos(x).$$

A demonstração anterior feita no primeiro quadrante é válida para qualquer quadrante.

Consideremos a multiplicação de dois complexos unitários, isto é, de módulo 1. Estes complexos unitários $w_1 = cos(\theta_1) + isen(\theta_1)$ e $w_2 = cos(\theta_2) + isen(\theta_2)$ são representados por dois pontos do círculo unitário $(r = 1)$.

Como,

$$\begin{aligned} iw_1 &= i[cos(\theta_1) + isen(\theta_1)] \\ &= icos(\theta_1) + i^2 sen(\theta_1) \\ &= icos(\theta_1) - sen(\theta_1) \\ &= -sen(\theta_1) + icos(\theta_1) \\ &= cos(\theta_1 + \tfrac{\pi}{2}) + isen(\theta_1 + \tfrac{\pi}{2}) \ . \end{aligned}$$

e, considerando outro complexo unitário $w_2 = cos(\theta_2) + isen(\theta_2)$, temos

$$w_1 w_2 = [cos(\theta_2) + isen(\theta_2) w_1 = w_1 cos(\theta_2) + iw_1 sen(\theta_2) \ ,$$

isto é, o vetor que representa $w_1 w_2$ é soma (diagonal do paralelogramo) dos vetores perpendiculares $cos(\theta_2) w_1$ e $sen(\theta_1) w_1$. Tomando num sistema de coordenadas xOy, cujo eixo Ox coincide com Ow_1, obtemos que o ângulo de w_1 com $w_2 w_1$ é θ_2. O que nos permite concluir que multiplicar w_1 por i significa efetuar no ponto w_1 uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$. Ou seja multiplicar dois complexos unitários w_1e w_2 é dar um deles uma rotação positiva de ângulo igual a outro ângulo.

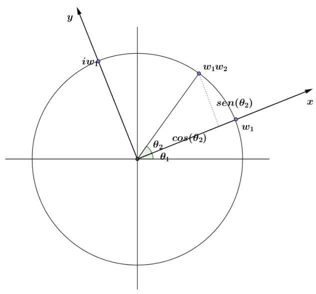


Figura 6.1.2:
Representação geométrica da multiplicação dos números complexos $w_1 w_2$.

No caso dos complexos não serem unitários, escreveremos $z_1 = r_1 w_1$, $z_2 = r_2 w_2$, com $|w_1| = |w_2| = 1$, e o produto será simplesmente

$$z_1z_2 = r_1w_1r_2w_2 = r_1r_2w_1w_2$$

Em outras palavras, efetua-se o produto dos complexos unitários correspondentes, como a cima, e multiplica-se o resultado pelo número real r_1r_2.

A consequência mais importante da interpretação que acabamos de estabelecer é o seguinte teorema que pode ser considerado o teorema fundamental da trigonometria (CARMO, MORGARDO, WAGNER, 1992, p. 81).

Teorema. *(fórmulas de adição da Trigonometria). Se x e y são reais quaisquer:*

$cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$

$sen(x + y) = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x)$

Demonstração. Se x e y satisfazem à condição:

$0 \leq x \leq 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$,

escreveremos:

$w_1 = cos(x) + isen(x)$, $\qquad w_2 = cos(y) + isen(y)$

Pela interpretação geométrica do produto, w_1w_2 é obtido de w_1 dando-lhe uma rotação positiva de ângulo y. Portanto,

$$w_1w_2 = cos(x + y) + isen(x + y). \tag{1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} w_1w_2 &= cos(x)cos(y) + icos(x)sen(y) + isen(x)cos(y) + i^2sen(x)sen(y) \\ &= cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y) + i[cos(x)sen(y) + sen(x)cos(y)] \end{aligned} \tag{2}$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (1) e (2), obtemos:

$cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$

$sen(x + y) = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x)$

o que demonstra o teorema neste caso.

Se x e y são quaisquer, achamos números inteiros k e l, tais que

$0 \leq x + 2k\pi = x' < 2\pi$, $\qquad 0 \leq y + 2l\pi = y' < 2\pi$. $\square$

Por definição, $cos(x) = cos(x')$, $sen(x) = sen(x')$, $cos(y) = cos(y')$ e $sen(y) = sen(y')$. Além disso, é imediato que $cos(x + y) = cos(x' + y')$ e $sen(x + y) = sen(x' + y')$. Como as relações estão demonstradas para x' e y', segue-se que elas são verdadeiras para x e y.

Quando consideramos o círculo trigonométrico (C) como um subconjunto

$$C = \{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$$

do plano complexo, a aplicação $E : \mathbb{R} \rightarrow C \subset \mathbb{C}$, toma a forma

$$E(x) = cos(x) + isen(x),$$

$$E(x + y) = cos(x + y) + isen(x + y).$$

Usando as fórmulas de adição podemos verificar que

$$E(x+y) = E(x).E(y).$$

Portanto, E é uma função complexa que se comporta como uma exponencial. Isto levou Euler, em homenagem a quem indicamos a função a cima por E (CARMO, MORGARDO, WAGNER, 1992, p. 89), a propor a definição

$$e^{ix} = cos(x) + isen(x).$$

No tempo de Euler (1707-1783), as funções complexas não eram bem entendidas, e a definição acima levantou várias controvérsias, principalmente por levar a conclusões inesperadas, tais como, $e^{i\pi} = -1$. Posteriormente, com melhor conhecimento das funções complexas, verificou-se que a definição de Euler é a única possível, se quisermos manter para os complexos as propriedades válidas nos reais (CARMO, MORGARDO, WAGNER, 1992, p. 89).

O seguinte teorema é uma homenagem ao matemático francês Abraham de Moivre (1667 - 1754).

Teorema 9. *(TEOREMA DE MOIVRE). Se $z = r(cos\theta + isen\theta)$ e n um inteiro positivo, então:*

$$z^n = r^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)].$$

Demonstração. $[r(cos\theta + isen\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$. □

Também podemos usar o teorema de Moivre para encontrar as raízes n-ésimas de números complexos.

Seja um número complexo w, tal que:

$w^n = z.$

Escrevendo esses dois números na fórmula polar temos:

$w = s[cos(\phi) + isen(\phi)]$ e $z = r[cos(\theta) + isen(\theta)]$,

usando o teorema de Moivre temos:

$s^n[cos(n\phi) + isen(n\phi)] = r[cos(\theta) + isen(\theta)].$

A igualdade entre entre esses dois números complexos mostra que.

$s^n = r$ ou $s = r^{\frac{1}{n}}$,

e ainda,

$cos(n\phi) = cos(\theta)$ e $sen(n\phi) = sen(\theta)$.

Do fato de que seno e cosseno têm período igual a $\theta + 2k\pi$ segue que:

$n\phi = \theta + 2k\pi$ isto é $\phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$.

Assim:

$w = r^{\frac{1}{n}}[cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta+2k\pi}{n})].$

RAÍZES DE UM NÚMERO COMPLEXO: Seja z = $r\left(cos\theta + isen\theta\right)$ e n um número positivo. Então z tem n raízes n-ésimas distintas, da forma

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

onde k = 0, 1, 2, ... , n-1.

Este capítulo foi adaptado a partir do estudo das importantes obras: Cálculo (STEWART, 2009) e Trigonometria e Números Complexos (CARMO, MORGARDO, WAGNER, 1992) .

Capítulo 7

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL TRIGONOMÉTRICA E APLICAÇÕES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

7.1 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL TRIGONOMÉTRICA

Interpolação é um processo que permite adquirir um novo conjunto a partir de um conjunto de dados pontuais conhecidos.

A interpolação permite construir uma função que aproximadamente se "ajuste" nestes dados pontuais, normalmente discretos, obtidos a partir de uma amostragem, observação ou experimento.

A aproximação de funções pode ser considerada para substituir o cálculo moroso de uma função complexa por funções mais simples.

São três tipos de interpolação:

1) Interpolação linear.

2) Interpolação polinomial.

3) Interpolação trigonométrica.

A interpolação linear consiste em aproximar uma função num intervalo por uma função linear, ou seja, utilizando polinômios de primeiro grau. A interpolação polinomial acontece quando a função interpoladora é um polinômio algébrico de grau maior que 1.

A interpolação trigonométrica consiste numa aproximação com polinômios trigonométricos, isto é, uma soma de cossenos e senos de um período dado. Assim a interpolação trigonométrica é ferramenta apropriada para a interpolação de funções periódicas.

Como definimos os polinômios trigonométricos têm a forma

$$p(x) = a_o + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\right]$$

cuja expressão que define este polinômio tem $2n+1$ coeficientes indeterminados a saber: a_0,a_1, ..., a_n, b_0,b_1, ..., b_n e temos como objetivo calcular tais coeficientes de forma que a função passe pelos $2n+1$ pontos da forma.

$$p(x_k) = y_k,\ k = 1, 2, ..., 2n + 1.$$

Como as funções trigonométricas são periódicas de período igual a 2π, podemos assumir que:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{2n+1} \leq 2\pi.$$

Os coeficientes ficam assim determinados pelas equações $p(x_k) = y_k,\ k = 1, ..., n$ as quais definem um sistema de $2n + 1$ equações lineares e que terá uma única solução se todos os pontos x_k forem diferentes. A solução pode ser escrita em forma similar a interpolação polinomial de Lagrange:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} y_k \prod_{m=1, m\neq k}^{2n+1} \frac{sen\frac{1}{2}(x - x_m)}{sen\frac{1}{2}(x_k - x_m)}.$$

Usando identidades trigonométricas prova-se que esta expressão é um polinômio trigonométrico.

7.2 APLICAÇÕES A FENÔMENOS BIOLÓGICOS E FÍSICOS

Nesse seção faremos um breve relato sobre algumas aplicações da trigonometria em diversos ramos do saber humano. Essa interação entre conhecimento matemático e as necessidades sociais está presente em nossa história desde as nossas primeiras ciclizações. Kennedy (1 992, p. 1) , nos ensina que:

> A trigonometria, talvez mais que outros ramos da matemática, desenvolveu-se como resultado de uma interação contínua e fértil entre oferta e demanda: a oferta de teorias matemáticas aplicáveis e técnicas acessíveis em qualquer momento e a demanda de uma única ciência aplicada, a astronomia. A relação era tão íntima que só no século XVII tornou-se proveitoso considerar os dois assuntos como separados. Assim, a história da trigonometria mostra em seu interior o crescimento embrionário de três partes clássicas da matemática: álgebra, análise e geometria.

Uma das origens da trigonometria está na necessidade de medir distâncias, sobretudos as inacessíveis, que em geral não podem ser obtidas diretamente. Tornou-se necessário a construção de técnicas elementares para a solução destes problemas, com uso de instrumentos que possam nos dar algumas medidas de distâncias e ângulos.

Estas técnicas baseiam se em relacionar os lados de um triângulo ou seus ângulos, permitindo a partir do conhecimento de alguns (três) destes valores obter os demais.

Na física encontramos diversas aplicações das funções trigonométricas como no caso na composição (decomposição) de forças através da soma vetorial com o uso do método do paralelogramo, bem como na determinação da "direção de um vetor cartesiano", chamados de ângulos diretores coordenados de um vetor.

Esta decomposição é utilizada em diversos campos como energia e trabalho, potência e rendimento, quantidade de movimento e impulso, estática dos corpos rígidos e hidrostática.

Ainda na física encontramos a utilização dos conceitos oriundos da trigonometria em situações como as leis da refração e no eletromagnetismo.

Uma das principais características de uma função trigonométrica é a sua periodicidade, assim é natural que procuremos ajustar a resultados de experimentos, fenômenos naturais, acontecimentos sociais, ou mesmo situações econômicas, que têm esta características a uma função trigonométrica.

São exemplos de fenômenos ou situações que têm este comportamento:

1. O ciclo menstrual cujas fases são determinadas pela produção hormonal feminina.

2. A conjugação da atração gravitacional entre os corpos do sistema Terra-Lua-Sol e rotação da Terra em torno de seu eixo são os principais fatores responsáveis pela ocorrência do fenômeno das marés, no qual as águas do mar atingem limites máximos e mínimos com determinada regularidade.As atrações gravitacionais do Sol e da Lua sobre a Terra causam, em geral, duas marés altas por dias em cada ponto da Terra, separadas por cerca de 12 horas. De fato, se for observada uma maré alta às 10 horas da manhã, por exemplo, a próxima maré ocorrerá por volta de 22h12, ou seja, cerca de 12 min além das 12 horas de diferença. (MELLO, especial para a Folha).

3. O Movimento Harmônico Simples (MHS) caracterizado pelo movimento de um corpo em trajetória retilínea (MHS), com oscilação em torno de um ponto de equilíbrio. Os MHS são fenômenos periódicos no tempo. As constantes a, b, c e d (das funções $y = a + bsen(cx + d)$ ou do $y = a + bcos(cx + d)$) são substituídas por constantes que representam aspectos relevantes do MHS. A constante a é nula, pois considera-se que o sistema de coordenadas tem origem na posição de equilíbrio (centro de oscilação); b é a amplitude A do movimento a partir do centro de oscilação, c é a frequência angular ω, d é a fase inicial φ_0; e o argumento do seno (ou cosseno), ou seja $\omega t + \varphi_0$, é chamado de movimento no tempo t. Dessa forma, a equação do espaço no MHS é comumente apresentada como $x = Asen(\omega t + \varphi_0)$. (DANTE, 2008, p. 237).

4. As ondas, sejam do mar, sonoras, sejam eletromagnéticas (luz, micro-ondas, raios X, etc.), também são fenômenos periódicos descritos por senoides. Neste caso, são fenômenos periódicos no espaço, sendo que onda se caracteriza por uma amplitude A, um comprimento λ, uma velocidade de propagação v e uma frequência f (ou período T). O comprimento de onda λ é a distância entre duas cristas, ou seja, é o período da senoide, e não deve ser confundido com o período T do movimento da onda. A equação da

onda no momento inicial da propagação pode ser descrita por $y = Asen(kx)$, sendo o parâmetro k chamado de número da onda. (DANTE, 2008, p. 237).

5. Na medicina as funções trigonométricas são utilizadas no monitoramento da frequência cardíaca, isto é, o número de batimentos cardíacos em um período de tempo geralmente medido em bpm (batimento por minuto). Deste monitoramento pode verificar-se a pressão sanguínea ou arterial de uma pessoa (MELLO, especial para a folha).

6. As funções trigonométricas seno e cosseno aplicados à área de eletrônica para análise de circuitos com excitação senoidal. Estas funções quando seus parâmetros são alterados já que, muitas das aplicações em diferentes áreas do conhecimento são modeladas por funções trigonométricas do tipo $y = a+bsen(cx+d)$ e $y = a+bcos(cx+d)$ sendo a, b, c e d constantes reais. Os gráficos dessas funções podem ser obtidos alongando, comprimindo, transladando e refletindo apropriadamente cada gráfico, a partir das funções $y = sen(kx)$ e $y = cos(kx)$ respectivamente (ALBÉ, FILIPPSEN, p. 4).

7. De uma forma empírica pode-se usar as funções trigonométricas para modelar situações como as temperaturas médias de uma cidade ou região ao longo do ano.

8. A Sigla GPS é a abreviatura para Global Positioning System, que significa sistema de posicionamento global. Alves escreveu um importante artigo "A Matemática dos GPS" sobre esse sistema tão útil nos nossos dias (RPM 59, p. 17). Resumidamente ele nos mostra que:

> O estudo da esfera e seus elementos fica naturalmente contextualizado quando exploramos sua associação com o globo terrestre. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em importantes ideias geométricas, e o estabelecimento das relações entre eles conduzem a problemas geométricos relevantes.

O artigo faz uma descrição detalhada de como esse sistema funciona, enumera diversas situações em que é utilizado por nossa sociedade e apresenta os princípios matemáticos utilizados.

Inicialmente faz uma representação de uma superfície esférica em coordenadas cartesianas e apresenta um teorema em que se "quatro esferas se intersectam e seus centros são coplanares, então essa intersecção consiste em um único ponto.

A representação da esfera como coordenadas cartesianas considera a origem do sistema cartesiano, o eixo Ox positivo cortando o meridiano de Greenwich, o eixo Oy positivo cortando o meridiano de longitude 90°E e o eixo Oz positivo apontando para o polo norte.

Finalmente apresenta um exemplo onde é calculado as coordenadas geográficas de um ponto P do espaço e uma aplicação a uma situação real.

A figura a seguir, transcrita do artigo "A matemática do GPS" e os resultados obtidos a partir dessa demonstram algumas utilizações dos conceitos estudados em trigonometria nesse processo, conhecida os coordenadas cartesianas de um ponto P localizado no espaço.

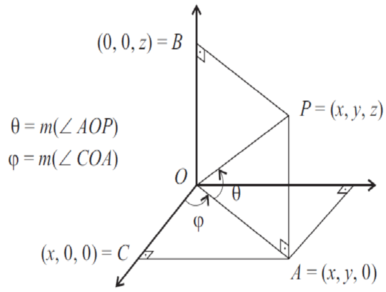


Figura 7.2.1:
Coordenadas cartesianas do ponto P localizado no espaço.

Desta forma temos:

$cos(90° - \theta) = sen(\theta) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e $cos(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Há apenas um valor para θ e o valor de φ também é único, o que fornece as coordenadas geográficas latitude e longitude, a elevação é calculada subtraindo do valor de z a medida do raio da terra.

A situação prática apresentada no artigo utiliza as coordenadas de quatro satélites localizados no espaço, para resolver um sistema de quatro equações e quatro variáveis que representam as esferas que se intersectam e têm os centros coplanares. A solução desse sistema determina o único ponto de intersecção dessas esferas. As coordenadas geográficas desse ponto representa sua localização na superfície terrestre.

Capítulo 8

GUIA DO ALUNO

UNIDADE TEMÁTICA: ESTUDO DOS POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS E SUAS APLICAÇÕES

8.1 APRESENTAÇÃO

Prezado aluno.

O Estudo de Trigonometria é uma parte da matemática de interesse prático, pois é grande a variedade de problemas que podem ser resolvidos utilizando-se essa teoria.

Sempre esteve ligado às necessidades práticas da humanidade, primeiro na solução de problemas onde são necessários a realização de medidas inacessíveis ou que devem ser realizadas de formas indiretas, depois como ferramenta importante no desenvolvimento da astronomia e nos dias atuais sua aplicabilidade está presente em diversos campos do saber humano, como a física e a engenharia.

Nesta unidade tentaremos modelar alguns problemas com o conhecimento que você tem adquirido ao longo de sua vida escolar, sobretudo com os conceitos estudados em trigonometria e números complexos.

Ao elaborarmos esta unidade pensamos em você, isso mesmo, mesmo sem conhecê-lo pensamos que você é uma aluno inteligente e ávido por adquirir novos conhecimentos. Mesmo que você não goste de matemática procuramos desenvolver atividades que lhe proporcione prazer em estudar matemática à medida em que irá (re)descobrindo os conceitos estudados. O que procuramos fazer é desenvolver ferramentas que lhe proporcione essas descobertas.

Procuramos fundamentar nosso trabalho no seu conhecimento prévio. Pretendemos substituir as atividades puramente mecânicas e repetitivas por atividades criativas e vinculadas à realidade, dando-lhe oportunidade de desenvolver os próprios conceitos, ao invés da simples memorização de fórmulas e resoluções de exercícios repetitivos. Para tornar possível esse objetivo, utilizaremos, na medida do possível, textos e situações de outros conteúdos, proporcionando-lhe, uma ação interdisciplinar e preparando-o para a vivência da cidadania.

Inicialmente, você encontrará Situações Problemas Geradoras. São atividades que você deve tentar resolver antes do estudo desta unidade. Se não conseguir não se preocupe, guarde suas resoluções e no final da unidade tente resolvê-las novamente e compare com sua resolução inicial. Esperamos que ao fazer esta comparação você perceba o quanto evoluiu no estudo deste tópico.

Em seguida, trabalharemos as Situações Problemas Orientadas, são atividades propostas que o desafiarão a adquirir novos conhecimentos, mas não se preocupe, muitas delas serão na forma de estudo dirigido e os conceitos formados de forma gradativa. Com certeza,você consegurá resolvê-las.

Também utilizaremos softwares como ferramentas úteis em nosso estudo. Esperamos que os recursos computacionais utilizados tornem a aprendizagem mais dinâmica e eficaz.

Finalmente, apresentaremos uma lista de atividades complementares, que esperamos que você consiga resolvê-las de forma independente a partir dos conhecimentos adquiridos nas atividades orientadas.

A seguir apresentamos uma lista de sugestões que podem ser úteis em seus estudos.

1. Trabalhar, sempre que possível, em grupo;

2. Ler atentamente o problema. Identificar as informações conhecidas e o que se quer determinar;

3. Familiarizar-se com o problema, abordando inicialmente casos particulares e observando regularidades, isto é, se os resultados obtidos nesses casos estão sujeitos a alguma regra ou regularidade;

4. Verificar se já resolveu algum problema semelhante. Caso a resposta seja afirmativa, verificar como isso o ajudaria a abordar o problema agora posto. Procure relacionar as situações apresentadas ou o assunto tratado, com alguma situação semelhante ocorrida em sua vida;

5. Identificar os dados do problema e o que se quer determinar;

6. Expressar o símbolo que representa a quantidade a determinar em função dos símbolos que representa a quantidade variável, ou dos símbolos que representam variáveis, se for o caso;

7. Discutir e responder as questões colocadas por seu professor ou pelo problema, pois elas o orientarão e o conduzirão à resolução do problema. Mas, atenção, não espere de seu professor a solução do problema, já que não é essa a intenção;

8. Trabalhar em grupo é discutir com seus integrantes cada etapa dos procedimentos anteriores, expondo o seu raciocínio da forma mais clara possível;

9. Comparar as soluções obtidas em seu grupo com outros grupos;

10. Caso tenha cometido algum erro procure saber o exato momento em que isso ocorreu e procure contorná-lo.

8.2 OBSERVAÇÕES

1. O Professor estará sempre atento aos seus questionamentos e a sua participação, que é fundamental para a sua aprendizagem;

2. Você deve fazer as atividades para aprender. Como cada pessoa uma maneira de aprender, você deve procurar a sua;

3. O professor, no momento adequado, trabalhará a síntese do assunto abordado nesta unidade. Procurará nesse momento organizar de forma mais sistemática o que foi aprendido e explorar mais profundamente o tema.

4. Mesmo que você não perceba uma aplicação imediata nesse aprofundamento, estará conhecendo um modo de se produzir conhecimento em Matemática. Num primeiro momento ela, a Matemática, se presta a responder a algumas questões e noutros se encarrega de propor novas perguntas.

Queremos provar-lhe que na Matemática as fórmulas significam a síntese de um raciocínio e não um recurso para não raciocinar. Esperamos com isso tornar o estudo deste assunto bem interessante e agradável para você, tornando-o sujeito ativo do processo de aprendizagem.

Bons estudos.

8.3 SITUAÇÕES PROBLEMAS GERADORAS (SPG)

1 - (ENEM 2010) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros do centro da terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por:

$$r(t) = \frac{5865}{1+0,15.cos(0,06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

(a) 12 765 km

(b) 12 000 km

(c) 11 730 km

(d) 10 965 km

(e) 5 865 km

2 - A tabela seguinte apresenta as temperaturas médias da cidade de Curitiba no período de 1963 a 1990, de acordo com o Banco de dados climáticos do Brasil, obtidos pela Embrapa (www.bdcclima.cnpm.br/resultados). Represente graficamente estes dados através de um gráfico de linhas, em seguida procure determinar qual é a função que pode ser usada

para aproximar o comportamento das temperaturas médias ao longo do ano. (Adaptado de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática).

Mês	Temperatura (ºC)
Janeiro	19,6
Fevereiro	19,9
Março	19,0
Abril	16,7
Maio	14,6
Junho	12,2
Julho	12,8
Agosto	14,0
Setembro	15,0
Outubro	16,5
Novembro	18,2
Dezembro	19,3
Total	197,8
Média	16,5

3 - (MacK - SP) Uma pessoa realiza um MHS (Movimento Harmônico Simples) segundo a equação $x = 0,2.cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t)$ no SI. A partir da posição de elongação máxima. Qual é o menor tempo que essa partícula gastará para passar pela posição de equilíbrio?

8.4 SITUAÇÕES PROBLEMAS ORIENTADAS

1 - Nesta atividade você vai comparar o valor do seno de um ângulo θ com o valor do cosseno de $(\theta + \frac{\pi}{2})$. Para isso escolhemos alguns ângulos e você completará a tabela seguinte escrevendo estes valores. Nesta atividade você poderá consultar tabelas trigonométricas e se necessário estabelecer os valores pedidos através da redução ao primeiro quadrante.

θ	$sen(\theta)$	$\theta + \frac{\pi}{2}$	$cos(\theta + \frac{\pi}{2})$
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{2\pi}{5}$			
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{2\pi}{3}$			
$\frac{6\pi}{5}$			

Observando os resultados desta tabela podemos imaginar que $sen(\theta)$ ...... $-cos(\theta + \frac{\pi}{2})$. (complete com $=$ ou $\neq$).

2 - Na atividade anterior você chegou através de uma observação a uma conclusão, que $sen(\theta)$ ...... $-cos(\theta + \frac{\pi}{2})$. A seguir você provará matematicamente este resultado. Se for necessário, reveja em seu livro de matemática os conceitos estudados no tópico trigonometria no ciclo trigonométrico.

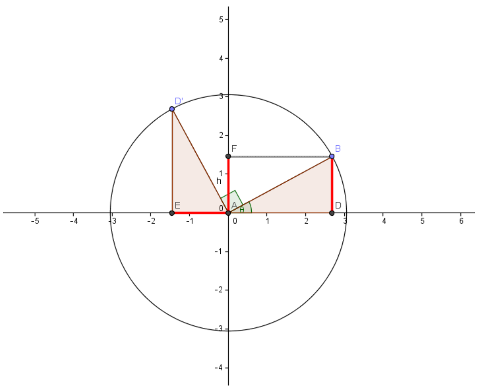


Figura 8.4.1:

Na figura acima temos os triângulos retângulos ADB, retângulo em $\widehat{D}$ e a AD'E retângulo em $\widehat{D'}$. Nestes triângulos os ângulos B$\widehat{A}$D e A$\widehat{D'}E$ são .... Consequentemente os ângulos $A\widehat{B}D$ e E$\widehat{A}$D também têm as mesmas medidas. Portanto os triângulos ADB e D' EA são semelhantes.

Considerando que $\overline{AB} = \overline{AD'}$ = r, concluímos que a constante de semelhança $k = 1$, portanto estes triângulos são .... com as seguintes correspondências entre seus ângulos e entre os seus lados:

$A\widehat{B}D =$ .... e $\overline{AD} =$ ....

$D\widehat{A}B =$ .... e $\overline{BD}=$ ....

$A\widehat{D}B =$ .... e $\overline{AB}=$ ....

Observando o retângulo ADBF concluímos que $\overline{DB}=$ .... $= sen(\theta)$

Temos ainda que $\overline{DB} =$ .... $= -cos(\theta + \frac{\pi}{2})$

Portanto: $sen(\theta) =$ ....

3 - As atividades anteriores permitiram que você chegasse a um importante resultado em nosso estudo. A seguir você vai esboçar em um sistema cartesiano o gráfico da funções $f(x) = sen(x)$ a partir de valores definidos na tabela. Em seguida, usando os resultados anteriores, esboce no mesmo sistema cartesiano, o gráfico da função $g(x) = cos(x)$.

x	sen(x)
0	
$\frac{\pi}{2}$	
π	
$\frac{3\pi}{2}$	
2π	
$\frac{5\pi}{2}$	
3π	

O gráfico que você esboçou para a função seno é uma curva chamada senoide. Observando atentamente os gráficos das funções seno e cosseno responda a seguinte pergunta:

O gráfico da função cosseno, quando comparado com a função seno é uma nova curva ou é o gráfico da função seno transladado horizontalmente? Justifique sua resposta.

4 - Dizemos que uma função é par quando $f(x) = f(-x)$ e que uma função é ímpar quando $f(x) = -f(-x)$. Considere as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ e defina qual das duas é função par e qual é função ímpar.

5 - A amplitude de uma função é o valor máximo que ela adquiri. Utilize o software *GeoGebra* para representar as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$. Observando os gráficos que você construiu defina o domínio, a imagem e a amplitude de cada uma destas funções.

Para construir estes gráficos no *GeoGebra* digite inicialmente no campo entrada (entrada de comandos) a função $y = cos(x)$ depois aperte a tecla enter. Realize o mesmo procedimento com a função $y = sin(x)$

6 - As funções periódicas são aquelas nas quais os valores da função se repetem para determinados valores da variável independente. Considerando a função $y = f(x)$ para cada período determinado pelos valores de x, iremos obter valores repetidos para a variável dependente y.

Ao analisar os gráficos construídos nos exercícios anteriores você deve ter observado que as funções seno e cosseno são periódicas de período $P = 2\pi$. Isto deve ao fato de que os arcos x e $2k\pi$ são côngruos. Considerando as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ e a periodicidade destas funções, determine os valor de x que fazem:

a) $f(x) = 0$

b)$f(x) = 1$

c) $g(x) = 0$

d) $g(x) = 1$

e) $f(x) = -1$

f) $g(x) = -1$

g) $f(x) = g(x)$

h) $f(x) = -g(x)$

Conhecendo o gráfico de uma função, podemos realizar nesse gráfico algumas transformações. Nos exercícios seguintes você estudará nos gráficos das funções trigonométricas apresentadas três transformações básicas: simetria, translação(vertical ou horizontal) e dilatação ou compressão.

A simetria em relação eixo das abscissas que comumente definimos como eixo x, quando obtemos uma função $g(x)$ de forma que $f(x) = -g(x)$. Do mesmo modo, a simetria em relação ao eixo das ordenadas, que comumente chamamos de eixo dos y, quando a função $g(x) = f(-x)$.

A translação horizontal ocorre quando a função $f(x)$ é transformada em uma função $g(x)$ de forma que $g(x) = f(x+a)$ e translação vertical ocorre quando obtemos $g(x) = f(x) + a$.

A dilatação ou compressão horizontal acontece quando $g(x) = f(ax)$. Nos casos em que vamos estudar se $a > 1$ ou $a < -1$ essa transformação é uma compressão e se $0 < a < 1$ ou $-1 < a < 0$ temos uma dilatação.

Da mesma forma a dilatação ou compressão vertical é realizada quando $g(x) = af(x)$. Se $a > 1$ ou $a < -1$ temos uma dilatação e se $0 < a < 1$ 0u $-1 < a < 0$ temos uma compressão.

Nos próximos exercícios vamos estudar algumas destas transformações nas funções trigonométricas.

7 - Construa no *GeoGebra* o gráfico da função $f(x) = asen(x)$. Para esta construção siga os seguintes passos:

- Digite no campo entrada a expressão $a = 1$.
- Digite no campo entrada a equação $y = a*sin(x)$, que representa a função $y = asen(x)$.
- Na janela álgebra selecione a expressão $a = 1$. Aparecerá na janela gráfica um seguimento de reta com a descrição $a = 1$.

- Novamente na janela álgebra selecione a expressão $a = 1$. Clique com o botão direito do mouse, depois em propriedades escolha a opção controle deslizante: determine os seguintes parâmetros; mínimo igual a um, máximo a sua escolha e incremento igual a um.

- No campo entrada digite a equação $y = sin(x)$, em seguida pressione a tecla enter.

- Na janela álgebra selecione a equação $y = sen(x)$ e procedendo de forma análoga ao que foi feito nos itens anteriores escolha uma outra cor para o gráfico desta função.

- Na barra de ferramentas escolha a opção mover, no seguimento da janela gráfica selecione a expressão $a = 1$ e faça modificações nos valores de a. Observe estas modificações e responda.

a) O que acontece no gráfico da função $f(x) = asen(x)$ quando você modifica os valores de a?

b) Qual é o domínio da função $y = asen(x)$?

c)Qual é a imagem da função $y = asen(x)$?

d) Comparando a função $y = asen(x)$ $(a \neq 1)$ com a função $y = sen(x)$ há modificações no período destas funções?

8 - Utilize a mesma construção anterior, porem modifique o incremento para 0,1 (no geogebra digite 0.1) e escolha os valores mínimo igual a zero e máximo igual a 1, de forma que $0 < a < 1$. Realize modificações no parâmetro a e responda as seguintes perguntas.

a) O que acontece no gráfico da função $f(x) = asen(x)$ quando você modifica os valores de a?

b) Qual é o domínio da função $y = asen(x)$?

c) Qual é a imagem da função $y = asen(x)$?

d) Comparando a função $y = asen(x)$ $(a \neq 1)$ com a função $y = sen(x)$ há modificações no período destas funções?

9 - Construa no *GeoGebra* o gráfico da função $f(x) = acos(x)$. Para esta construção realize os mesmos procedimentos do exercício 7 substituindo $sin(x)$ por $cos(x)$. Responda às seguintes perguntas.

a) O que acontece no gráfico da função $f(x) = acos(x)$ quando você modifica os valores de a?

b) Qual é o domínio da função $y = acos(x)$?

c)Qual é a imagem da função $y = acos(x)$?

d) Comparando a função $y = acos(x)$ $(a \neq 1)$ com a função $y = cos(x)$ há modificações no período destas funções?

10 - Utilize a mesma construção anterior, porém modifique o incremento para 0,1 (no *GeoGebra* digite 0.1) e escolha os valores mínimo igual a zero e máximo igual a 1, de forma que $0 < a < 1$, realize modificações no parâmetro a e responda as seguintes perguntas.

a) O que acontece no gráfico da função $f(x) = acos(x)$ quando você modifica os valores de a?

b) Qual é o domínio da função $y = acos(x)$?

c)Qual é a imagem da função $y = acos(x)$?

d) Comparando a função $y = acos(x)$ $(a \neq 1)$ com a função $y = cos(x)$ há modificações no período destas funções?

11 - Siga as orientações para construir o gráfico da função f :$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen(2x)$.

- Substitua na equação $f(x) = sen(2x)$ a expressão $(2x)$ pela variável t.
- Expresse a variável x em função de t.
- Complete a tabela com os valores correspondentes e em seguída esboce o gráfico solicitado.

x	$t = 2x$	$f(x) = sen(2x) = sen(t)$
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	
	$\frac{5\pi}{2}$	
	3π	
	$\frac{7\pi}{2}$	
	4π	

- Esboce no mesmo sistema cartesiano o gráfico da função $g(x) = sen(x)$.
- Compare os gráficos das funções $g(x) = sen(x)$ e $f(x) = sen(2x)$ e responda as seguintes perguntas:

a) Qual é a imagem de cada uma destas funções?

b) Qual é o período da função $f(x) = sen(2x)$?

c) Este período é o mesmo da função $g(x) = sen(x)$?

d) Se a sua resposta anterior foi negativa, procure justificar por que houve mudança no período da função?

12 - Realize o mesmo procedimento do exercício anterior para as funções:

a) $f(x) = sen(\frac{x}{2})$

b) $f(x) = sen(4x)$

c) $f(x) = sen(\frac{x}{3})$

13 - Utilizando os conceitos que você adquiriu nas atividades de 1 a 3 e os resultados obtidos no exercício 11 esboce o gráfico da função $f(x) = cos(2x)$. Em seguída defina o domínio, a imagem e o período desta função.

14 - Vamos usar o *GeoGebra* para representar famílias de funções do tipo $y = sen(ax)$.

- Defina no campo de entrada do *GeoGebra* a função $y = sin(ax)$
- Digite no campo de entrada do *GeoGebra* a função $y = sen(x)$. *Escolha cores diferentes para os dois gráficos.*
- Digite no campo de entrada $a = 1$
- Na janela álgebra selecione a expressão $a = 1$. Aparecerá na janela gráfica um seguimento de reta com a descrição $a = 1$.
- Defina os valores 0 e 10 como mínimos e máximos de a.
- Faça modificações no parâmetro a e observe o que acontece com o gráfico de $y = sen(ax)$ em relação ao gráfico de $y = sen(x)$.
- Responda as seguintes perguntas?

a) Qual é o domínio das funções $f(x) = sen(ax)$?

b) Qual é a imagem e qual é o período destas funções?

15 - Analisando as atividades 11 e 14, diga quais são as vantagens e as desvantagens de usar um software de geometria dinâmica na construção dos gráficos dessas funções?

16) Em seu caderno esboce o gráfico da função y = $|sen2x|$. Em seguida determine a imagem e o período desta função.

17) Complete as tabelas com as palavras crescente ou decrescente de acordo com o comportamento das funções em cada quadrante.

a) $y = sen(x)$

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	π	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	2π
$sen(x)$	0		1		0		-1		0

b) $y = cos(x)$

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	π	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	2π
$cos(x)$	1		0		-1		0		1

18) Em seu caderno faça o esboço do gráfico das seguintes funções. Procure solucionar este exercício sem o auxílio de tabelas ou de programas de geometria dinâmica.

a) $y = 1 + sen(x)$

b) $y = 3 + 2cos(x)$

Nas próximas atividade vamos usar o *GeoGebra* para representarmos funções do tipo f$(x) = a + bsen(cx + d)$ ou $f(x) = a + bsen(cx + d)$ e analisar modificações em cada um destes parâmetros.

19) faça o que se pede:

- No campo entrada do programa digite $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 1$.
- Selecione cada um destes parâmetros de forma que o seu respectivo seletor (seguimento de reta) apareça na área de trabalho.
- Digite no campo entrada a função: $f(x) = y = a + b * sin(cx + d)$ que corresponde a função $y = bsen(cx + d)$.
- Selecione o gráfico da função $f(x) = bsen(cx + d)$ e escolha uma cor para este gráfico.
- Digite no campo de entrada a função $y = sen(x)$.
- Realize modificações no parâmetro a e anote em seu caderno as suas conclusões, destacando as alterações que ocorrem no domínio, na imagem e no período desta função, descreva também o que ocorre nestes gráficos quando o parâmetro b é modificado em relação a translação (vertical ou horizontal) e também a dilatação ou compressão dos mesmos.
- Faça modificações nos parâmetros b e d e anote suas conclusões. Proceda como no item anterior.

20 - Repita as orientações da questão anterior para a função $y = bcos(cx + d)$.

21 - Utilizando os gráficos que você construiu nos exercícios 19 e 20, considerando ainda $b \neq 1$, responda às seguintes perguntas.

a) O que acontece com o gráfico dessas funções quando $c = 0$?

b) Se $c \neq 0$ que ocorre nestes gráficos quando alteramos o parâmetro c?

22 - Considerando a função $y = bsen(cx + d)$ e as observações dos exercícios anteriores, responda às seguintes questões?

a) Qual é o seu domínio?

b) Qual é a sua imagem?

c) Qual é o seu período?

23 - Esboce em um mesmo sistema de eixo cartesiano os gráficos das seguintes funções e observe o comportamento destes gráficos em relação ao eixo das abscissas:

a) $f(x) = 2sen(x + \frac{\pi}{2})$

b) $g(x) = -2sen(x + \frac{\pi}{2})$

24 - Nas questões anteriores você definiu o período da função $y = a + bsen(cx + d)$. Esta definição se deu com base na observação que você fez durante a realização dessas atividades. Agora você vai provar matematicamente este resultado. (Adaptado, Gelson Iezzi, Volume 3, página 26-c).

- Faça $dx + c = m$.
- A função $m = cx + d$ é uma função afim. Portanto é uma função sobrejetora, isto é, o seu contradomínio é igual ao conjunto imagem. Sendo $m = cx + d$, uma função de $\mathbb{R}\to \mathbb{R}$. Dizemos que quando x "percorre" $\mathbb{R}$ m também percorre $\mathbb{R}$, porém $sen(m)$ percorre o intervalo $[-1, 1]$. Com base nestas informações, complete as seguintes frases:

a) $bsen(m)$ percorre o intervalo ....

b) $y = a + bsen(m)$ percorre o intervalo ...., que é a imagem de y.

c) Para que m complete um período é necessário que m varie de .... a ....

Então:

$m = 0 \Rightarrow bx + c = 0 \Rightarrow x =$ .... (1)

$m = 2\pi \Rightarrow bx + c = 2\pi \Rightarrow x =$ ....(2)

Fazendo (2) menos (1) temos:

$P=$

Conclusão: O período da função $f(x) = y = d + asen(bx + c)$ é $P =$ ......

25 - Com base nos conceitos que você estabeleceu nas atividades anteriores, esboce o gráfico, determine o período e a imagem das seguintes funções definidas de $\mathbb{R}\to R$

$a)f(x) = -sen(x)$

$b)f(x) = 3cos(x)$

$c)f(x) = -2cos(x)$

$d)f(x) = 1 + 2sen(3x)$

26 - Você foi solicitado esboçar o gráfico da função $f(x) = 2.cos(x - \frac{\pi}{4})$, definida de $\mathbb{R}\to R$, a partir de uma tabela. Para auxiliá-lo foi sugerido que você fizesse a seguinte substituição $t = x - \frac{\pi}{4}$ de forma que t seja respectivamente igual a 0, $\frac{\pi}{2}$,π , $\frac{3\pi}{2}$ e 2π. Quais os valores você escolheria para a variável x?

27 - Faça o esboço do gráfico, determine o período e a imagem da função $f : \mathbb{R} \to R$ dada por $f(x) = 1 + 2.sen(2x - \frac{3\pi}{4})$

28 - Utilize as construções que você realizou nos exercícios 19 e 23. Acrescente a esta construção o gráfico da função $g(x) = a - bsen(cx + d)$, use cores diferentes para os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$. Os gráficos de $f(x)$ são simétricos em relação ao eixos das abscissas? Justifique sua resposta.

Definimos monômio trigonométrico as funções da forma $p(x) = \alpha cos(kx) + \beta sen(kx)$. O parâmetro k ($k \in \mathbb{N}*$) define o grau do monômio trigonométrico.
Assim o monômio trigonométrico $p(x) = 3cos(x) + 2sen(x)$ é um monômio trigonométrico de grau 1 e o monômio trigonométrico $p(x) = cos(5x) + 3sen(5x)$ é um monômio trigonométrico de grau 5.

29 - Neste exercício você fará o esboço do gráfico do monômio $p(x) = cos(x) + sen(x)$. Considere o domínio $D = [0, 2\pi]$. Para auxiliá-lo neste esboço utilize os dados da seguinte tabela.

x	$cos(x)$	$sen(x)$	$p(x) = sen(x) + cos(x)$
0			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{5\pi}{4}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			

30 - Refaça o exercício anterior usando o *GeoGebra*, porém agora a função $p(x)$ é definida de $\mathbb{R} \rightarrow R$. Observando o gráfico de $p(x) = cos(x) + sen(x)$, defina sua imagem e a sua periodicidade. Para a definição da imagem desta função siga as instruções.

- Construa na mesma janela gráfica que você construiu a função $p(x) = senx + cosx$ os gráficos das funções $f(x) = cos(x)$ e $g(x) = sen(x)$.
- Observe nos gráficos da função $p(x) = cos(x) + sen(x)$ que esta função associa um ordena $y = p(x)$ que é a soma $f(x) + g(x)$.
- Observe que os valores máximos e mínimos de p(x) ocorrem quando $f(x) = g(x)$. No exercício 6 você determinou quando isso ocorre, ou seja quando $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$.
- Calcule os valores de: $p(\frac{\pi}{4})$ e $p(\frac{5\pi}{4})$. Esses são os valores máximos e mínimos de $p(x)$.

31 - Neste exercício você vai analisar a variação do parâmetro α na construção de alguns gráficos de monômios do tipo p(x) = $\alpha cos(kx)$+ $\beta sen(kx)$. Ou seja, os parâmetros β e k permanecerão constante. Para isso, proceda conforme as seguintes instruções.

- Digite no campo entrada do *GeoGebra* $a = 1$
- Digite no campo entrada do *GeoGebra* um valor para b ($b \in \mathbb{N}*$), a sua escolha.
- Faça o mesmo procedimento anterior para o parâmetro k .

- Ainda no campo entrada do Geogebra digite a equação $y = a * cos(k * x) + b * sin(k * x)$.

- Selecione o parâmetro a de forma que o seletor que proporciona variações neste parâmetro apareça na área de trabalho.

- Movimente o parâmetro a no gráfico que você construiu e responda às seguintes questões.

a) Quando há a variação do parâmetro a no monômio trigonométrico $p(x) = acos(kx) + bsen(kx)$ este gráfico recebe quais tipos de modificações?

b) Você observou que há uma translação horizontal quando alteramos o valor de a. Justifique por que esta translação ocorre?

32 - Refaça o exercício anterior mantendo fixos os parâmetros a e k, variando o parâmetro b. Observe quais são as alterações que modificações deste parâmetro provoca em $p(x)$ e escreva as suas conclusões.

33 - Ainda utilizando a construção que você fez no exercício 31, realize modificações no parâmetro k. Proceda como no exercício anterior.

34 - Considerando o monômio $p(x) = acos(kx) + bsen(kx)$ definido no conjuntos do números reais, defina o seu período.

35 - Usando o Geogebra, construa em uma mesma janela gráfica os gráficos dos seguintes monômios trigonométricos: $p_1(x) = 2co(x)$; $p_2(x) = 3sen(x)$ e $p_3(x) = 2cos(x) + 3sen(x)$. Escolha cores diferentes para cada um destes gráficos. Assinale um ponto A em $p_1(x)$, um ponto B em $p_2(x)$ e um ponto C em $p_3(x)$ com as seguintes coordenadas: $A = (a, p_1(a))$; $B = (a, p_2(a))$ e $C = (a, p_3(a))$. Responda às seguintes questões:

a) Qual é a relação que há entre $p_3(a)$ em relação aos valores $p_1(a)$ e $p_2(a)$?

b) Movimente o ponto A de forma que este atinja ou fique bem próximo do máximo $p_3(x)$.

c) Movimente o ponto A de forma que este atinja ou fique bem próximo do mínimo $p_3(x)$.

d) Escreva os valores aproximados destes máximos e mínimos e compare com o valor aproximado de $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

36 - Uma das preocupações que temos ao estudar o monômio trigonométrico $p(x) = acos(nx) + bsen(nx)$ é definição de sua imagem. Nesta atividade vamos reencontrar um resultado que nos permite determinar os valores máximos e mínimos destes monômios. Para isso você vai demonstrar o seguinte teorema, nas situações em que a e b são números positivos (os demais casos são demonstrados de forma análoga).

Teorema. *Se a e b são constantes reais, então os valores máximos e mínimos do monômio trigonométrico $p(x) = acos(nx) + bsen(nx)$ são respectivamente:*

Valor máximo:$p(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$

Valor mínimo: $p(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}$

Considere o triângulo retângulo indicado na figura.

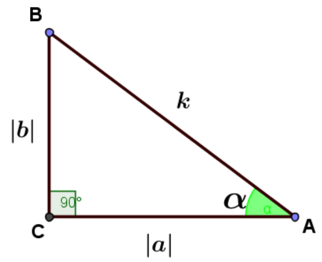


Figura 8.4.2:

Faça o que se pede:

a) Usando o teorema de Pitágoras calcule o valor de k.

b) Expresse em função os valores de $cos(\alpha)$ e $sen(\alpha)$

c) Considere o monômio trigonométrico $acos(nx) + bsen(nx)$. Multiplique cada termo dessa expressão por $\frac{k}{k}$. o monômio trigonométrico assume a seguinte forma:

$acos(nx) + bsen(nx)$=..(1)

No segundo membro da equação (1) coloque k em evidência obtendo a equação (2)

Substitua em (2) $\frac{a}{k}$ e $\frac{b}{k}$ pelos valores encontrados na letra **b** e k pelo valor encontrado na letra **a** obtendo a equação (3). (observe que a e b são números positivos).

Lembre-se que $cos(m - n) = cos(m)cos(n) + sen(m)sen(n)$. Use essa informação e substitua em 3 a expressão $cos(nx)cos(\alpha) + sen(nx)sen(\alpha)$ por $cos(nx - \alpha)$.

Considerando que -1$\leq cos(nx - \alpha) \leq 1$ para quaisquer valores de x, temos que o máximo e o mínimo de $p(x)$ ocorre quando $cos(nx - a) = 1$ ou $cos(nx - a) = -1$.

Portanto os valores máximo e mínimos de $p(x)$ são:

37 - Calcule os valores máximos e mínimos dos seguintes monômios trigonométricos.

a) $p(x) = 5cos(x) + 6sen(x)$

b) $p(x) = sen(x) + 3cos(x)$.

38 - Resolva as seguintes equações trigonométricas, considerando suas soluções no intervalo de $[0, 2\pi]$.

Dica: Encontre em cada equação o valor de $tg(x)$. Consulte uma tabela trigonométrica para encontrar o valor do arco do primeiro quadrante cujo módulo é igual a $tg(x)$. Encontre os arcos correspondentes em seus respectivos quadrantes. Transforme-os em radianos.

a) $6cos(x) + 5sen(x) = 0$

b) $cos(x) - 3sen(x) = 0$

39 - Usando o GeoGebra esboce os gráficos dos monômios trigonométricos abaixo. Assinale em seus gráficos os pontos correspondentes às raízes ou zeros, máximos e mínimos. Compare estes gráficos com os resultados dos exercícios 37 e 38.

a) $p(x) = 5cos(x) + 6sen(x)$

b) $p(x) = sen(x) - 3cos(x)$

40 - Usando o GeoGebra represente em uma mesma janela gráfica os gráficos dos seguintes monômios trigonométricos; $p_1(x) = cos(x) + sen(x)$; $p_2(x) = cos(2x) + sen(2x)$, $p_3(x) = cos(4x) + sen(4x)$. Compare os gráficos de$p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$. Faça o que se pede:

a) Defina o conjunto imagem destes monômios.

b) Determine o período de cada um destes monômios.

c) Considerando o intervalo de $[0, 2\pi]$ quantas raízes ou zeros tem cada um destes monômios?

41 - Faça o que se pede e responda as questões seguintes:

- Digite no campo de entrada do Geogebra os seguintes valores: $a = b = c = k = 1$.
- Selecione estes parâmetros de forma que os respectivos seletores apareçam na área de trabalho.
- No campo de entrada digite a seguinte equação: $y = c + acos(kx) + bsen(kx)$
- No seletor do parâmetro k, vá em propriedades e escolha mínimo e incremento igual a 1. Escolha livremente o valor máximo de k.
- Faça modificações nos parâmetros de $y = c + acos(kx) + bsen(kx)$, porém, realize modificações em apenas um parâmetro de cada vez.

a) Quais são as modificações gráficas que ocorrem quando variamos cada um dos parâmetros a, b, c ou k?

b) Qual é o período de $p(x)$?

c) faça $c > \sqrt{a^2 + b^2}$ e observe o número de raízes de $p(x)$.

c) Quantas raízes ou zeros tem $p(x)$ considerando o intervalo $[0, 2\pi]$ e $c \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

Definição. As funções que assumem a forma $p(x) = a_o + \sum [a_k cos(kx) + b_k sen(kx)]$ chamamos de polinômios trigonométricos, onde a soma é finita e $k = 1, 2, 3, ..., m$.
O maior valor do parâmetro k define o grau do polinômio trigonométrico.

42 - Nesta atividade você desenvolverá um procedimento para encontrar as raízes ou zeros de um polinômio trigonométrico do primeiro grau.

Considere o polinômio $p(x) = acos(x) + bsen(x) + c$.

As soluções da equação $acos(x)+bsen(x) = -c$ (1) são as raízes ou zeros deste polinômio.

Lembre-se que $\sqrt{a^2+b^2} > 0$. Portanto divida todos os termos desta equação por r (considere) $r = \sqrt{a^2+b^2}$obtendo a equação (2)

Como $\frac{a^2+b^2}{r^2} = 1$, existe um número real θ de forma que que $sen(\theta) = \frac{b}{r}$e $cos(\theta) = \frac{a}{r}$.

assim: $a =$ .... e $b =$ ....

Substitua estes valores na equação (2).

Como $cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sen(a).sen(b)$ a equação anterior assume o seguinte aspecto.

Fazendo $cos(\alpha)= \frac{-c}{r}$ concluímos que $x =$ ....

43 - No exercício anterior por que consideramos $r = \sqrt{a^2+b^2}$. O que acontece quando $r > 1$?

44 - Usando a fórmula desenvolvida no exercício 42 encontre as raízes ou zeros do polinômio $p(x) = \sqrt{3}.cos(x) + sen(x) - 1$ conforme as orientações.

- Faça $p(x) = 0$ e "passe" -1 para o segundo membro.
- Encontre o valor de r.
- Divida a equação por r (observe que $r > 0$)
- Observe que $sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ e $cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Considere $\theta = \frac{\pi}{6}$
- Portanto $cos(\frac{\pi}{6} - x) =$ .....
- Como $cos(\frac{\pi}{3}) = cos(\frac{5\pi}{3}) =$ ..... temos duas possibilidades para θ. Assim a equação pode ser reescrita da seguinte forma:
- $cos(\frac{\pi}{6} - x) = cos....$ ou $cos(\frac{\pi}{6} - x) = cos....$
- Portanto: $x =$ .... ou ou $x =$ ......
- Observe que os valores encontrados pertencem ao ao primeiro período negativo de $p(x)$. Encontre essas soluções no primeiro período e dê a solução geral destas equações.

45 - Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações.

a) $cos(x) - \sqrt{3}sen(x) = 1$

b) $2cos(x) + sen(x) = 1$

Dica: Nesta atividade você precisará consultar uma tabela de razões trigonométricas e trabalhar com valores aproximados de seno e cosseno.

Leia atentamente as seguintes informações:

1. Chamamos de polinômio trigonométrico do 2º grau os polinômios da forma $p(x) = e + acos(x) + bsen(x) + ccos(2x) + dsen(2x)$.

2. Quando ocorre uma mudança do sentido da concavidade (para cima ou para baixo) do gráfico de uma função temos um ponto de inflexão.

3. Definiremos por assíntota uma reta em que o gráfico de uma função "aproxima" desta reta sem no entanto atingi-la.

Nos próximos exercícios você fará um estudo dos polinômios trigonométricos do 2º grau.

46 - Siga as instruções, observe atentamente os resultados obtidos e responda às questões apresentadas:

- No campo de entrada do *GeoGebra* digite: $a = b = c = c = d = e = 1$

- Digite ainda as seguintes funções: $f(x) = acos(x) + bsen(x)$, $g(x) = acos(2x) + bsen(2x)$ e $h(x) = acos(x) + bsen(x) + ccos(2x) + dcos(2x)$.

- Determine os seguintes pontos: $A = (e, f(e))$, $B = (e, g(e))$ e $C = (e, h(e))$.

- Selecione o parâmetro e de forma que o seu seletor apareça na área de trabalho. Faça modificações no valor de e.

a) Qual é o período de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$?

b) Considere apenas um período de $h(x)$. Diga quantas raízes ou zeros possui $h(x)$. Determine também quantos pontos de inflexão esta função possui.

c) Movimente o valor de e até que o ponto C atinga os valores máximos e mínimos de $h(x)$. Escreva estes valores máximos e mínimos(aproximados). Procure explicar por que estes valores ocorrem nesses pontos.

d) Observe os pontos em $h(x) = f(x)$ e veja que estes são os pontos inflexão $h(x)$, determine esses pontos (considere o arco $\theta = 2x$ no intervalo $[0, 4\pi]$).

e) Use o Geogebra para fazer o esboço em um mesmo sistema cartesiano dos gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

47 - Usando a construção realizada no exercício anterior, faça modificações em seus parâmetros. Responda às seguintes questões.

a) Considerando apenas um período, alterações em seus parâmetros modificam o número de raízes de $h(x)$?

b) Os pontos de inflexão continuam ocorrendo quando $h(x) = f(x)$?

c) Justifique as respostas anteriores.

48 - Usando ainda a construção do exercício 46, considere o polinômio $h(x)$ da seguinte forma:

$h(x) = acos(x) + bsen(x) + acos(2x) + bsen(2x)$.

Movimente os valores do parâmetro e, de modo que $h(x)$ atinga seus valores máximos e mínimos.

a) Escreva os máximos e mínimos (aproximados) de $h(x)$.

b) Digite no campo de entrada do Geogebra as expressões: $y = sqrt(a^2+b^2)+sqrt(c^2+d^2)$ e $y = -[sqrt(a^2+b^2)+sqrt(c^2+d^2)]$ que correspondem respectivamente às equações

$y = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$ e $y = -(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})$.

Movimente os parâmetros de $h(x)$ e observe o comportamento do gráfico de $h(x)$ em relação às duas retas horizontais obtidas. Escreva suas conclusões justificando-as.

49 - Usando ainda a construção do exercício 46, considere o polinômio $h(x)$ da seguinte forma:

$h(x) = acos(x) + asen(x) + bcos(2x) + bsen(2x)$.

Movimente os valores do parâmetro e, de modo que $h(x)$ atinga seus valores máximos e mínimos.

a) Escreva os máximos e mínimos (aproximados) de $h(x)$.

b) Observe os pontos de inflexão de $h(x)$ e anote suas conclusões.

c) Digite no campo de entrada do Geogebra as expressões: $y = sqrt(a^2+b^2)+sqrt(c^2+d^2)$ e $y = -(sqrt(a^2+b^2)+sqrt(c^2+d^2))$ que correspondem respectivamente às equações

y = $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$ e y= -($\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$).

Movimente os parâmetros de $h(x)$ e observe o comportamento do gráfico de $h(x)$ em relação às duas retas horizontais obtidas. Escreva suas conclusões justificando-as.

50 - Esboce em seu caderno os gráficos das seguintes funções.

a) $p(x) = sen(x) + 2sen(2x)$

b)$p(x) = 1 + cos(x) + sen(2x)$

c) $p(x) = cos(x) + cos(2x) + sen(2x)$

d) $p(x) = -2 + 2cos(x) + 3sen(2x)$

51 - Neste exercício estudaremos o comportamento de um polinômio trigonométrico de grau 3, Faça o que lhe for solicitado.

- Digite no campo de entrada do GeoGebra a expressão $y = cosx + sinx + cos(2x) + sin(2x) + cos(3x) + sin(3x)$.

- Digite a=0 e em seguida digite o ponto $A = (a, f(a))$.

- Digite as equações $y = 3 * sqrt(2) e y = -3 * sqrt(2)$.

- Resolva no intervalo $[0, 2\pi]$ a equação $cos(3x) = -sen(3x)$. Assinale em seu gráfico as retas verticais correspondentes a cada uma destas soluções.

- Movimente o ponto A e observe seus valores máximos e mínimos aproximados.

- Responda as seguintes questões considerando o polinômio $p(x) = cosx + senx + cos(2x) + sen(2x) + cos(3x) + sen(3x)$.

a) Escreva a imagem (valores aproximados) de $p(x)$?

b) Qual é o período deste polinômio?

c) Considerando o intervalo $[0, 2\pi]$ quantas raízes tem este polinômio?

d) Quais são os pontos de inflexão de $p(x)$? (escreva valores aproximados para as ordenadas destes pontos).

52- Considere agora o polinômio $p(x) = cos(x)+sen(x)+cos(2x)+5sen(2x)+2cos(3x)+3sen(3x)$. Faça a comparação gráfica deste polinômio com o polinômio do exercício anterior. Alterando os valores dos coeficientes destes polinômios, quais são as modificações que ocorrem em seus gráficos? Quais são as características que permanecem as mesmas?

53- Considere o polinômio do exercício anterior, determine suas retas de máximo e mínimo horizontais.

54-Usando o *GeoGebra* represente graficamente os seguintes pares de polinômios trigonométricos. Escreva em seu caderno o período, a imagem (valores aproximados) e o número de pontos de inflexão (considerando apenas um período) de cada um destes polinômios. Observe também quantas raízes ou zeros tem estes polinômios .

a) $p_1(x) = sen(x) + sen(2x) + cos(5x)$ e $p_2(x) = sen(x) + 2sen(2x) + 4cos(5x)$

b) $p_1(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(4x)$ e $p_2(x) = cos(x) + 3sen(x) + cos(2x) + 3sen(4x)$

55- Determine as assíntotas horizontais de cada um dos polinômios do exercício anterior.

56 - Nesta atividade você vai trabalhar com os dados climáticos de Belo Horizonte. Esses dados podem ser obtidos no site indicado abaixo. Qual o tipo de função que pode ser usada para aproximar o comportamento do gráfico que representa as temperaturas médias anuais? Como essas temperaturas médias são periódicas, é possível imaginar uma função trigonométrica que possa ser ajustada ao gráfico das temperaturas médias (adaptado de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática).

(www.bdclima.cnpm.embrapa.br/resultados)

Considere a função $T(x) = a + bsen(cx + d)$ e construa no *GeoGebra* os seguintes passos:

- Introduza no campo Entrada os pontos $(x, T(x))$ correspondentes aos valores tabelados para os meses x e para as temperaturas médias.

- Ajuste a janela de visualização geométrica para uma variação horizontal (eixo do tempo t em meses) de -1 a 13 e vertical (eixo das temperaturas T em graus Celsius) de -1 a 30.

- No campo de entrada digite os parâmetros $a = b = c = d = 1$

- Construa o gráfico da função $T(x) = a + bsen(cx + d)$, digitando a expressão no campo Entrada.

- Ajuste os valores dos parâmetros de a a d de forma que o gráfico das temperaturas médias de Belo Horizonte se aproxime de $T(x)$.

- Responda às seguintes questões?

a) Escreva a equação que você encontrou para T(x).

b) Qual é a temperatura média anual de Belo Horizonte?

c) Qual é a maior temperatura média mensal? Qual é a menor?

d) Em quais meses ocorreram temperatura média mensal mais próxima da média anual?

e) O parâmetro a é muito próximo da temperatura média anual. Por quê?

f) O parâmetro b é muito próximo da metade da variação das temperaturas médias mensais. Por quê?

g) O parâmetro c é muito próximo de $\frac{2\pi}{12}$. Por quê?

h) O parâmetro d possui uma relação com o mês em que a temperatura média média mensal foi mais próxima da temperatura média anual. Qual seria essa relação?

57 - Considere uma outra cidade brasileira, pode ser a cidade que você reside ou próxima de sua residência. Refaça o exercício anterior com os dados desta cidade.

58 - Nesta atividade você vai desenvolver um aplicativo denominado Desenrolando o Seno. Este aplicativo permitirá que você tenha uma percepção intuitiva de medidas angulares em radianos, bem como dos seus respectivos senos. Siga as instruções do seguinte protocolo de construção digitando no campo de entrada do GeoGebra.(adaptado de Recursos computacionais no ensino de matemática)

1. O = (0,0)

Propriedades desse ponto: na aba básico habilitar a opção fixar objeto.

2. C = (-1,0)

Propriedades desse ponto: na aba básico habilitar a opção fixar objeto.

3. c = Círculo[C,O]

Propriedades desse círculo: na aba básico desabilitar exibição de rótulo, na aba estilo mudar o estilo de linha para tracejado.

4. A=(2π, 0)

Propriedades desse ponto: na aba básico habilitar a opção fixar objeto.

5. P = Ponto[Segmento[O,A]]

Propriedades desse ponto: na aba cor escolher vermelho, na aba estilo escolher espessura da linha 5; movimente esse ponto horizontal até abscissa 1.

6. radiano = Segmento[O,P]

Propriedades desse segmento: na aba básico em exibir rótulo escolher a opção valor, na aba cor escolher verde escuro, na aba estilo escolher espessura de Linha 9.

7. Q = Girar[O,radiano,C]

Propriedades desse ponto: na aba básico escolher vermelho.

8. grau = Ângulo[O,C,Q]

Propriedades desse ângulo: n aba básico em exibir rótulo escolher valor, na aba estilo escolher tamanho 50.

9. cc = Arco[c,O,Q]

Propriedades desse arco: na aba básico desabilitar exibir rótulo, na aba cor escolher verde escuro, na aba estilo escolher espessura de linha 9.

10. h=Reta[Q,EixoX]

Propriedades dessa reta: na aba básico desabilitar exibição de rótulo, na aba estilo escolher estilo de linha pontilhado.

11. v = Perpendicular[P,EixoX]

Propriedades dessa reta: na aba básico desabilitar exibição de rótulo, na aba estilo escolher estilo de linha pontilhado.

12, seno=Função[sin(x),x(O),x(A)]

Propriedades desse gráfico: na aba cor escolher vermelho, na aba estilo escolher espessura de linha 9.

59 - Movimente o ponto P obtendo os arcos OCQ indicados na tabela abaixo (usando o aplicativo que você construiu no exercício anterior) . Anote na tabela o valor da abscissa P correspondente a cada arco indicado.

Arco $0CQ$	Valor da abscissa P
0º	
45º	
135º	
180º	
210º	
270º	
360º	

Você deve ter observado que um arco de 180 º corresponde a aproximadamente $3,14rad$ e que a circunferência mede aproximadamente $6,28rad$. É possível provar que a circunferência mede aproximadamente $6,28rad$ (que nós chamamos de 2π), refaça a tabela anterior escrevendo a correspondência que existe entre os arcos AOQ e seu valor em πrad.

Arco $0CQ$	$\pi rad.$
0º	
45º	
135º	
180º	
210º	
270º	
360º	

60 - Assinale no aplicativo desenrolando o seno o ponto B intersecção entre a reta v (perpendicular ao eixo OX) e o gráfico dos senos. Complete a tabela a baixo relacionando cada arco com o valor da ordenada do ponto B (esse valor é o seno do arco considerado).

Arco OCQ	$sen(OCQ)$
0º	
30º	
45 º	
60º	
90º	
120º	
210°	
310°	
345º	

61 - Escreva os valores em (radiano) cujos senos são iguais a:

a) 0

b) 1

c) -1

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Definição. Todo número complexo $z = a + bi$ pode ser considerado um ponto (a, b) do plano de Argand e também pode ser representado em coordenadas polares (r, θ) com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$.

Assim, podemos escrever qualquer número complexo da seguinte forma:

$$z = a + bi = rcos\theta + (rsen\theta)i = r(cos\theta + isen\theta)$$

Nos próximos exercícios você trabalhará com a forma trigonométrica dos números complexos e fará importantes descobertas.

62 - Represente cada um dos seguintes números complexos Z na forma trigonométrica.

a) $Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Z_1 está situado no ..... quadrante.

Temos: $r =$ ....

$sen(\theta) =$ .... e $cos(\theta) =$ .... portanto $tg(\theta) =$ .... podemos concluir que $\theta =$ ....

Assim: $Z_1 =$ ....

b) $Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Z_2 está situado no ..... quadrante.

Temos: $r =$ ....

$sen(\theta) =$ .... e $cos(\theta) =$ .... portanto $tg(\theta) =$ .... podemos concluir que $\theta =$ ....

Assim: $Z_2 =$ ....

63- Efetue a multiplicação Z_1Z_2 na forma trigonométrica. Represente este resultado na forma retangular.Represente ainda Z_1, Z_2 e Z_1Z_2 no mesmo plano cartesiano.

64 - Com base na observação nos resultados dos exercícios anteriores complete as seguintes frases.

a) O módulo do produto de produto de dois números complexos é o .... produto de seus módulos e o argumento do produto é a .... de seus argumentos.

b) Multiplicar dois complexos unitários Z_1 e Z_2 significa, geometricamente dá a um deles uma .... positiva de ângulo igual ao ângulo do outro.

65- Exprimir cada um dos seguintes números complexos Z na forma trigonométrica.

a)$Z_1 = -1 + i\sqrt{3}$.

Z_1 está situado no ..... quadrante.

Temos: $r =$ ....

$sen(\theta) =$ .... e $cos(\theta) =$ .... portanto $tg(\theta) =$ .... podemos concluir que $\theta =$ ....

Assim: $Z_1 =$ ....

b) $6\sqrt{3} + 6i$.

Z_2 está situado no ..... quadrante.

Temos: $r =$ ....

$sen(\theta) =$ .... e $cos(\theta) =$ .... portanto $tg(\theta) =$ .... podemos concluir que $\theta =$ ....

Assim: $Z_2 =$ ....

66 - Efetue a multiplicação Z_1Z_2 (indicados no exercício anterior) na forma trigonométrica. Observe o módulo e o argumento de Z_1Z_2 em relação aos módulos e aos argumentos de Z_1 e de Z_2. Anote suas conclusões.

67 - Prove as afirmações que você fez nos exercícios 64 e 65.

Dica: Faça $Z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $Z_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$

68 - Efetue as operações indicadas, dando o resultado na forma trigonométrica e na forma retangular.

a) $2[cos(50^{\underline{o}}) + isen(50^{\underline{o}})]X3[cos(40^{\underline{o}}) + isen(40^{\underline{o}})]$

b) $10[cos(305^{\underline{o}}) + isen(305^{\underline{o}})]X2[cos(55^{\underline{o}}) + isen(55^{\underline{o}})]$

69 - Se $Z = a + bi$, prove que $Z^3 = r^3(cos3\theta + isen(3\theta)$

70 - Considerando $Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ calcule Z^3.

A FUNÇÃO DE EULER E A MEDIDA DE ÂNGULOS EM RADIANOS

Sejam IR o conjunto dos números reais e C o círculo unitário de centro na origem: C = {(x, y) em IR^2 | x^2+ y^2 = 1}. A função de Euler E: IR $\rightarrow$ C faz corresponder a cada número real t o ponto E(t) = (x, y) de C do seguinte modo:

• E(0) = (1, 0).

• Se t > 0, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto (1, 0), um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de (1, 0) para (0, 1) pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado E(t).

• Se t < 0, E(t) será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento |t|, que parte do ponto (1, 0) e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler E: IR $\rightarrow$ C pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto 0 em IR caia sobre o ponto (1, 0) em C.

Escrevendo A = (1,0), O = (0,0) e para cada t em $\mathbb{R}$, P = E(t), dizemos nesse caso o ângulo AOP mede t radianos.

Adaptado de: http://www.uff.br/cdme/ftr/ftr-html/ftr-euler-br.html

71 - Neste exercício você vai construir um aplicativo para visualizar a imagem $E(t)$ em C da função de Euler. Esta imagem muda de acordo com a escolha de t em $\mathbb{R}$.

Digite no campo de entrada do *GeoGebra* os seguintes comandos.

- Comprimento=0. Em propriedades, na aba controle deslizante escolher mínimo 0, máximo 6.28 e incremento 0.01. Na aba cor, escolher vermelho, na aba estilo escolher espessura 5 e na opção largura escolher 1000 px.
- $O = (0, 0)$. Em propriedades escolher a opção fixar objeto.
- Escolher na barra de ferramentas a opção círculo dado centro e raio e construir círculo de centro O e raio 1.
- $J = (1, 0)$
- $K = (1, 0)$
- $U = (1, 0)$
- A=Girar[K, comprimento, O]
- Segmento[O, A]
- Ângulo[U, O, A]
- Reta[A, Eixo$Y$]

- Reta[A, Eixo$X$]
- $y = sen(a)$
- ArcoCircular[O, K, A], na aba cor, escolher vermelho, na aba estilo escolher espessura 5.

72 - Usando o aplicativo que você construiu escreva os valores (aproximados) relacionando em radianos as medidas dos seguintes arcos dados em graus.

Arcos(graus)	Arcos (em radianos)
25°	
32°	
65°	
123º	
240º	
312º	

73 - Escreva os valores correspondentes (medidas aproximadas) em graus das medidas dos seguintes arcos dados em radianos (use o aplicativo que você construiu)

a) $1rad$

b) $2rad$

c) $0,5rad$

d) $3,5rad$

74) Provavelmente você expressou as medidas acima em graus no sistema de numeração decimal. Porém, um grau é dividido em 60 minutos e um minuto é dividido em 60 segundos, semelhante ao nosso sistema hora-minuto-segundo. Expresse as medidas das letras a e d do exercício anterior em graus com seus respectivos submúltiplos.

75 - Considere o círculo trigonométrico (C) como um subconjunto C = $\{x \in \mathbb{C}; |x| = 1\}$do plano complexo a aplicação E: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, toma a forma $E(x+y) = cos(x+y) + isen(x+y)$. Usando as fórmulas de adição verifique que $E(x+y) = E(x).E(y)$

Temos: $cos(x+y) =$ .... e $sen(x+y) =$ ....

Assim a equação $E(x) = cos(x+y) + isen(x+y)$ assume a seguinte forma:

Desenvolvendo temos:

Substituindo -1 por i^2 a equação toma a seguinte forma:

Fatorando por agrupamento temos:

Conclusão:

Portanto, E é uma função complexa que se comporta como uma exponencial. Isto levou Euler (em homenagem a quem indicamos a função a cima por E) a propor a definição

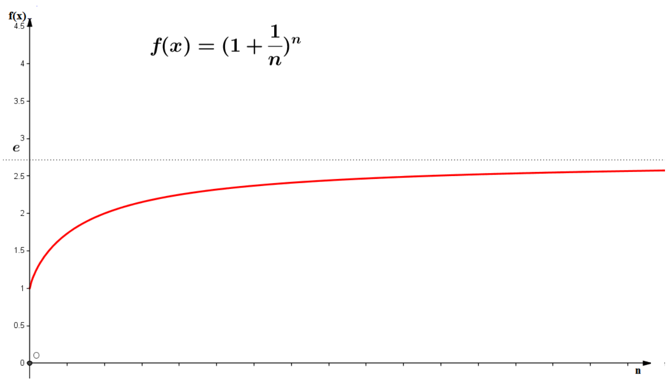
$$e^{ix} = cosx + isenx.$$

76 - Neste exercício você vai analisar o comportamento da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$quando n se torna suficientemente grande. Para isso você vai precisar de uma calculadora, de preferência cientifica para auxiliá-lo em seus cálculos. Complete a tabela abaixo colocando o valor aproximado de $(1 + \frac{1}{n})^n$ com pelo menos 5 casas decimais.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	
2	
3	
4	
...	...
10	
11	
12	2,61304
...	...
360	
...	
1000	

Calcule ainda $(1 + \frac{1}{n})^n$ para $n = 10^5$.

Se você continuar fazendo estes cálculos para valores de n cada vez maiores verá que o resultado se aproxima cada vez mais do número 2,71828182845904523533602874.... Este número é um número irracional que chamamos de e. O gráfico a seguir ilustra este comportamento:

Figura 8.4.3: 

Esse número irracional "e" é útil quando estudamos algumas questões da função exponencial e também é aplicado em ciências biológicas, teoria das probabilidades, matemática financeira, estatística e economia. (adaptado de Jackson Ribeiro).

77 - Admitindo a fórmula de Euler calcule:

a) $e^{2\pi i}$

b) $e^{\frac{\pi i}{4}}$

c) $e^{\frac{\pi i}{2}}$

d) $e^{i\pi}$

Usando a fórmula de Euler podemos provar o seguinte teorema, que nos permite calcular potências de números complexos.

TEOREMA DE MOIVRE. Se $z = r(cos\theta + isen\theta)$ e n um inteiro positivo, então:

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)).$$

Demonstração. $[r(cos\theta + isen\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(cos(n\theta)+isen(n\theta)$ □

Também podemos usar o teorema de Moivre para encontrar as raízes n-ésimas de números complexos.

Seja um número complexo w, tal que:

$w^n = z.$

Escrevendo esses dois números na fórmula polar temos:

$w = s(cos\phi + isen\phi)$ e $z = r(cos\theta + isen\theta).$

Usando o teorema de Moivre temos:

$s^n(cosn\phi + isenn\phi) = r\,(cos\phi + isen\phi).$

A igualdade entre entre esses dois números complexos mostra que.

$s^n = r$ ou $s = r^{\frac{1}{n}}.$

e

$cos(n\phi) = cos(\theta)$ e $sen(n\phi) = sen(\theta)$

De fato que seno e cosseno têm período igual a $\theta + 2k\pi$ segue que:

$n\phi = \theta + 2k\pi$ ou $\phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$.

Assim:

$w = r^{\frac{1}{n}}[cos(\frac{\theta+2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta+2k\pi}{n})].$

RAÍZES DE UM NÚMERO COMPLEXO:

Seja $z = r\,(cos\theta + isen\theta)$ e n um número positivo. Então z tem n raízes n-ésimas distintas.

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]$$

onde $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

78 - Use o teorema de Moivre, calcule as potências e expresse os resultados na fórmula retangular.

a) $(1+i\sqrt{3})^4 =$

b) $(\sqrt{3}$-$i)^5$=

79) Achar as raízes indicadas na fórmula retangular.

a) Raízes quadradas de $2-2i\sqrt{3}$.

b) Raízes quartas de $-8-8i\sqrt{3}$.

c) Raízes cúbicas de $-4\sqrt{2}+4i\sqrt{2}$

d) Raízes cúbicas de 1.

80) Usando os resultados da letra d do exercício anterior calcule:

a)$(R_2)^2$

b) $(R_3)^2$

c) R_1R_2

8.5 ATIVIDADES COMPLEMENTARES

1 - (Enem 2012) Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3' 0" a leste do Meridiano de Greenwich.

Dado: 1° equivale a 60' e 1' equivale a 60". PAVARIN, G. Galileu, fev. 2012 (adaptado)

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude na forma decimal é

A) 124,02°.

B) 124,05°.

C) 124,20°.

D) 124,30°.

E) 124,50°.

2 - (Enem 2009) - Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.

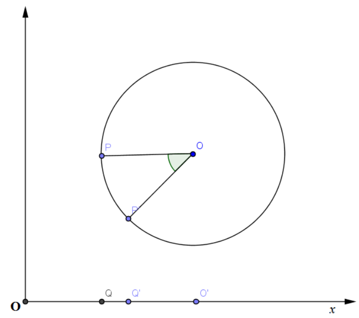


Figura 8.5.1:

Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por:

A) $r[1 - sen(\frac{d}{r})]$.

B) $r[1 - cos(\frac{d}{r})]$.

C) $r[1 - tg(\frac{d}{r})]$.

D) $rsen(\frac{r}{d})$.

E) $rcos(\frac{r}{d})$.

3 - Um exemplo de relação que pode ser modelada por uma função trigonométrica é a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um certo indivíduo em função do instante de coleta dessa medida.O gráfico indicado abaixo representa uma investigação desse tipo onde se analisa a situação clínica de um paciente, sendo P a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (em milímetros de mercúrio: mmHg) e t o tempo (em segundos).

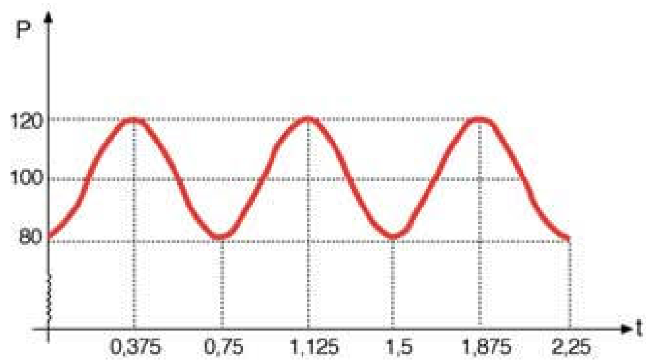


Figura 8.5.2:

Responda as seguintes questões.

a) Qual é período da função $P(t)$?

b) Considerando que um ciclo completo equivale a um batimento cardíaco, quantos batimentos cardíacos tem esse paciente por minuto?

c) O período da função trigonométrica é $p = \frac{2\pi}{k}$, qual é o valor de k para que a função tenha o período que você respondeu na letra a?

d) Qual é o domínio e a imagem de $p(t)$?

e) Escreva uma função da forma $p(t) = a + bcos(kt)$ que represente $p(t)$.

4 - A oscilação das marés é um fenômeno natural provocado pela interação gravitacional entre a Terra, a Lua e o Sol. Essa interação faz com que as águas dos oceanos se desloquem em direção a certas regiões do globo, provocando subidas e descidas no nível dos mares ao redor do planeta.

Os dados da próxima tabela foram obtidos no site da marinha do Brasil indicado a seguir e relatam a previsão das alturas das marés para os dias 01 a 03 de janeiro de 2013. Usando os dados da tabela e um programa de geometria dinâmica construa um gráfico do tipo $f(t) = a + bsen(ct + d)$ que representa estes dados. Responda as seguintes perguntas:

(http://www.mar.mil.br/dhn/chm/tabuas/50170Jan2013.htm)

a) Qual é o domínio, a imagem e o período de $f(t)$?

b) Escreva a expressão que você obteve para $f(x)$.

Data	Horas	Tempo(h)	Altura da maré(m)
01/01/2013	4h28min	4,5	1,1
	11h56	12	0,4
	15h58min	16	1,1
02/01/2013	0h9min	24	0,2
	04h45min	29	1,0
	12h41min	37	0,5
	16h34min	40,5	1,1
03/01/2013	01h56min	50	0,3
	05h56min	54	0,9
	13h26min	61,5	0,5
	17h13min	65	1,1

Observação: Usamos valores aproximados para o tempo em horas.

5-(Uff 2004) No processo de respiração do ser humano, o fluxo de ar através da traqueia, durante a inspiração ou expiração, pode ser modelado pela função F, definida, em cada instante t, por $F(t) = Msen(wt)$. A pressão interpleural (pressão existente na caixa torácica), também durante o processo de respiração, pode ser modelada pela função P, definida, em cada instante t, por $P(t) = L - F(t + a)$. As constantes a,L, M e w são reais, positivas e dependentes das condições fisiológicas de cada indivíduo. (AGUIAR, A.F.A., XAVIER, A.F.S. e RODRIGUES, J.E.M. Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas, ed. HARBRA Ltda. 1988.(Adaptado).

Um possível gráfico de P, em função de t, é:

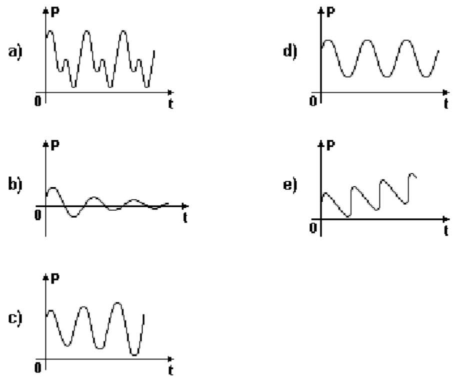


Figura 8.5.3:

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

(Ufpe 2004) O PIB (Produto Interno Bruto, que representa a soma das riquezas e dos serviços produzidos por uma nação) de certo país, no ano $2000 + x$, é dado, em bilhões de dólares, por $P(x) = 500 + 0,5x + 20cos(\frac{\pi x}{6})$ onde x é um inteiro não negativo.

6. Determine, em bilhões de dólares, o valor do PIB do país em 2004.

7. Em períodos de 12 anos, o PIB do país aumenta do mesmo valor, ou seja, $P(x+12) - P(x)$ é constante. Determine esta constante (em bilhões de dólares).

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES.
(Unb 2000 - Adaptado)
Volume de ar em um ciclo respiratório.
O volume total de ar, em litros, contido nos dois pulmões de um adulto em condições físicas normais e em repouso pode ser descrito como função do tempo t, em segundos, por $V(t) = \frac{3.(1-cos(0,4\pi t))}{2\pi}$. O fluxo de ar nos pulmões, em litros por segundo, é dado por $v(t) = 0,6sen(0,4\pi t)$. Os gráficos dessas funções estão representados na figura adiante

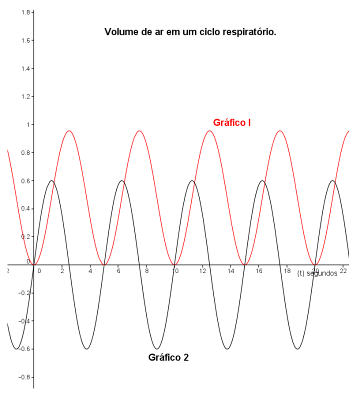


Figura 8.5.4:

8 - Com base nas informações do texto, julgue os itens a seguir.
(1) O gráfico I representa $V(t)$ e o gráfico II, $v(t)$.
(2) O volume máximo de ar nos dois pulmões é maior que um litro.

(3) O período de um ciclo respiratório completo (inspiração e expiração) é de 6 segundos.

(4) A frequência de $v(t)$ é igual à metade da frequência de $V(t)$

9 - Com base nas informações do texto, julgue os itens a seguir, com respeito ao fluxo de ar nos pulmões.

(1) O fluxo é negativo quando o volume decresce.

(2) O fluxo é máximo quando o volume é máximo.

(3) O fluxo é zero quando o volume é máximo ou mínimo.

10 -(Puccamp 2005) O subir e descer das marés é regulado por vários fatores, sendo o principal deles a atração gravitacional entre Terra e Lua. Se desprezássemos os demais fatores, teríamos sempre o intervalo de 12,4 horas entre duas marés altas consecutivas, e também sempre a mesma altura máxima de maré, por exemplo, 1,5 metros. Nessa situação, o gráfico da função que relacionaria tempo (t) e altura de maré (A) seria semelhante a este:

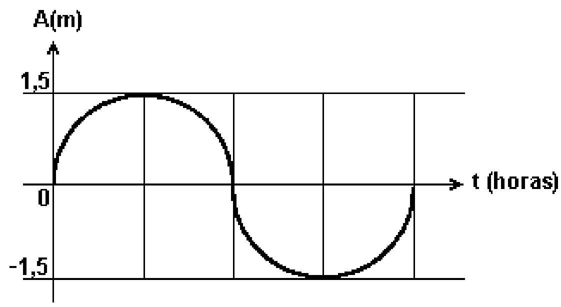


Figura 8.5.5:

O fenômeno das marés pode ser descrito por uma função da forma $f(t) = a.sen(b.t)$, em que A é medido em metros e t em horas. Se o intervalo entre duas marés altas sucessivas é 12,4 horas, tendo sempre a mesma altura máxima de 1,5 metros, então:

(A) $b = \frac{5\pi}{31}$

(B) $a + b = 13,9$

(C) $a - b = \frac{\pi}{1,5}$

(D) $a.b = 0,12$

(E) $b = \frac{4\pi}{3}$

11 - (Fuvest 95) O menor valor de $\frac{1}{(3-cos(x))}$, com x real, é:

(A) $\frac{1}{6}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) 1.

(E) 3

12 - (Unitau 95) Indique a função trigonométrica $f(x)$ de domínio $\mathbb{R}$; $Im = [-1, 1]$ e período π que é representada, aproximadamente, pelo gráfico a seguir:

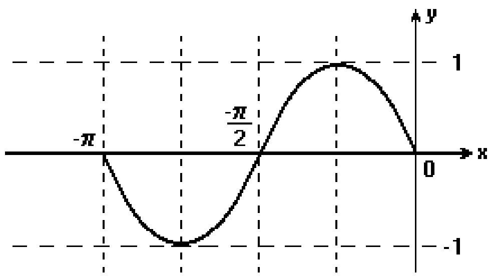


Figura 8.5.6:

(A) $y = 1 + cos(x)$.

(B) $y = 1 - sen(x)$.

(C) $y = sen(-2x)$.

(D) $y = cos(-2x)$.

(E) $y = -cosx$

13-(Unesp 98) Sabe-se que h é o menor número positivo para o qual o gráfico de $y = sen(x - h)$ é:

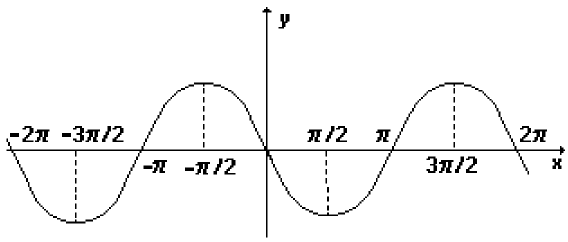


Figura 8.5.7:

Então, $cos(\frac{2h}{3})$ é igual a:

(A) - $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(B) - $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) -$\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

(E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14 - (Uel 2001) O gráfico abaixo corresponde à função:

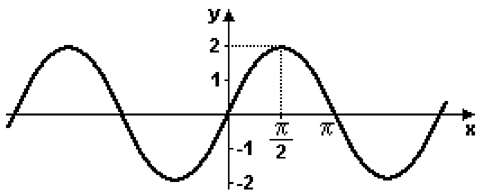


Figura 8.5.8:

(A) $y = 2sen(x)$

(B) $y = sen(2x)$

(C) y = $sen(x) + 2$

(D) $y = sen(\frac{x}{2})$

(E) $y = sen(4x)$

15 - O valor máximo do monômio trigonométrico $p(x) = 2cos(x) + 5cos(x)$ é:

(A)7

(B)$\frac{5}{2}$

(C) $\sqrt{29}$

(D) 1

(E) $\frac{2}{5}$

16 - (Mackenzie 98) A função real definida por $f(x) = a.cos(kx)$, $a > 0$ e $k \in IR$ tem período 7πe conjunto imagem $[-7, 7]$. Então, $a.k$ vale:

(A) 7

(B) $\frac{7}{2}$

(C) 2

(D) $\frac{2}{7}$

(E) 14

17 - (UCMG) A forma trigonométrica do número complexo $y = 4\sqrt{3} + 4i$ é:

(A) $8(cos30º + isen30º)$

(B) $8(cos45º + isen45º)$

(C) $8(cos60º + isen60º)$

(E) $8(cos120º + isen120º)$

(F) $8(cos150º + isen150º)$

18- (UEMT) Sejam os complexos $Z_1 = 4(cos60º + isen60º)$ e $Z_2 = \frac{1}{2}(cos90º + isen90º)$. A forma algébrica do complexo $Z = Z_1.Z_2$ é:

(A) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

(C) -$\sqrt{3} - i$

(D) -$\sqrt{3}+i$

(E) -$2\sqrt{3}+2i$

19- (Fasp) O valor de $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)^{10}$ é:

(A) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(B)$1+i$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$+$\frac{1}{2}i$

(D)$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

20 - Cacule as raízes quartas de $-8+i\sqrt{3}$.

Na letra d da SPO 77 você encontrou para $e^{i\pi}$ o valor -1. Este resultado na época de Euler causou muitas controvérsias pois levava a uma conclusão inesperada. Nas próximas atividades você observará que a sequência $(1+\frac{i\pi}{n})^n$ se aproxima mais e quanto for necessário de $e^{i\pi}$, para isso vamos estudar o comportamento da sequência $(1+\pi i)$, $(1+\frac{\pi i}{2})^2$, $(1+\frac{\pi i}{3})^3$, $(1+\frac{\pi i}{4})^4$, ...

21 - Considere o número complexo $Z_1 = 1 + i\pi$, represente no plano de Argand-Gaus e na forma trigonométrica. Represente também o vetor $\overrightarrow{AZ_1}$, sendo A a origem do plano de Argand-Gaus

22 - Considere o número complexo $Z_1 = 1 + \frac{i\pi}{2}$. Use o *GeoGebra* para representar os números Z_1 e $Z_{2=}(Z_1)^2$, os vetores $\overrightarrow{AZ_1}$ e $\overrightarrow{AZ_2}$, e os seguimentos $\overline{BZ_1}$ e $\overline{Z_1Z_2}$. Para isso siga os seguintes paços:

1 - Digite no campo entrada do *GeoeGebra* o ponto $A = (0, 0)$

2 - Digite no campo entrada do *GeoeGebra* o ponto $B = (1, 0)$

3- Na barra de ferramentas escolha a opção números complexos.

4 - Digite no campo de entrada z_1=1+$\pi * i/2$

5 - Digite no campo de entrada z_2=(1+$\pi * i/2$)^2

6 - Na barra de ferramentas escolha a opção vetor definido por dois pontos e construa os vetores $\overrightarrow{AZ_1}$ e $\overrightarrow{AZ_2}$.

7 - Na barra de ferramentas escolha a opção seguimento de reta definido por dois pontos e construa os seguimentos $\overline{BZ_1}$ e $\overline{Z_1Z_2}$.

23 - Nesta atividade você procederá de forma análoga a construção que fez no exercício 22 para representar os números complexos $Z_1 = 1 + \frac{i\pi}{3}$, $Z_2 = (Z_1)^2$e $Z_3 = (Z_1)^3$. Represente os vetores $\overrightarrow{AZ_1}$, $\overrightarrow{AZ_2}$ e $\overrightarrow{AZ_3}$ e os seguimentos $\overline{BZ_1}$, $\overline{Z_1Z_2}$ e $\overline{Z_2Z_3}$.

24 - Se continuarmos investigando o comportamento da sequência $Z_1 = (1 + \pi i)$, $Z_2 = (1 + \frac{\pi i}{2})^2$, $Z_3 = (1 + \frac{\pi i}{3})^3$, Z$_4$ =$(1 + \frac{\pi i}{4})^4$, ..., $Z_n = (1 + \frac{i\pi}{n})^n$ para valores cada vez maiores de n, qual será o valor de Z_n? Proceda como nos exercícios anteriores e represente essas sequências para:

a) $n = 4$

b) $n = 5$

25 - O site da RPM (Revista do Professor de Matemática) www.rpm.org.br/cms/ disponibiliza uma visualização dinâmica para n indo de 1 a 25. Acesse esse aplicativo e faça modificações nos valores de n e observe o que acontece com o número Z_n. Escreva as suas conclusões.

Observação: As atividades extraídas de vestibulares foram obtidas no site:

http://diadematematica.com/modules/myiframe/index.php?iframeid=184

Capítulo 9

GUIA DO PROFESSOR.

UNIDADE TEMÁTICA: ESTUDO DOS POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS E SUAS APLICAÇÕES

9.1 INTRODUÇÃO

Esta unidade temática visa orientar a aplicação do estudo correspondente ao ensino de polinômios trigonométricos, utilizando uma visão que pretende adaptar o ensino de matemática à realidade educacional atual. Não nos interessa apenas a memorização de fórmulas ou aquisição de vícios, na ânsia de resolver listas de exercícios sem uma visão global dos aspectos envolvidos no assunto. Queremos fornecer condições para que o aluno possa interagir com o material e a partir de seus conhecimentos, adaptá-los e organizá-los de forma a construir novos saberes.

Assim motivados, esperamos que eles possam ter um interesse maior pelo assunto e em consequência produzir seus próprios resultados.

Nesta visão, o papel do professor será o de orientador e acima de tudo, motivador em potencial, para que o raciocínio do aluno seja sempre colocado em evidência. Através da tentativa, da vontade de solucionar problemas e da capacidade de discutir resultados, é que estaremos formando cidadãos condizentes com a sociedade moderna.

Aqui, voltamos a reforçar a nossa ideia principal sobre esta proposta metodológica, que visa principalmente uma participação ativa dos alunos, e para isto, é extremamente importante que o professor evite a ansiedade de transmitir resultados prontos. Não deve ser colocada em evidência a quantidade, mas sim a qualidade dos resultados que estamos buscando.

Ao elaborarmos esta unidade temática estamos conscientes de nossas limitações e falhas, por isso, é importante que o professor faça uma análise cuidadosa do material e ao aplicá-lo procurar esclarecer dúvidas e eventuais erros de interpretação que o texto possa induzir, além de buscar abordar novas situações relacionadas com o tema e que não foram abordadas ou foram abordadas insuficientemente.

Sugerimos que, antes de aplicar o módulo, expliquem sucintamente aos alunos quais os motivos principais de estudar o tema proposto, o que se pretende avaliar, como será conduzida a avaliação, bem como a razão da proposta metodológica em que se aprende mais fazendo do que vendo fazer.

É extremamente importante que se explique aos alunos o papel das situações problemas geradoras e das orientadas. No que se refere às situações geradoras, elas devem ser encaradas como um desafio não a ser vencido agora, e sim no final do módulo. Seu objetivo é motivar o aluno para o estudo do tema. Estas atividades geradoras, que provavelmente os alunos não resolverão em um primeiro momento ou as resolverão parcialmente ou mesmo de uma forma muito trabalhosa.

Neste momento é importante o professor estar atento para não deixar que estas atividades sirvam de desestímulo para os mesmos, ressaltando que no final da unidade eles conseguirão resolvê-las e até mesmo, comparar as novas formas de resolução com as que eles apresentou inicialmente.

Isso nos sugere a ideia de apenas usá-las como um pré-teste para avaliar o conhecimento do aluno e após aplicação do módulo, como pós-teste e avaliação. A não compreensão dessa ideia pelo aluno pode frustá-lo e fazer com que ele desanime ao invés de motivar a trabalhar a unidade temática.

Quanto às Situações Problemas Orientadas, nos propusemos a elaborar atividades que os alunos terão condições de resolver e ao mesmo tempo estarão, gradativamente, elaborando a fundamentação teórica deste assunto.

Salientamos também que não se trata de um trabalho definitivo e sim de um conjunto de sugestões para o estudo dos Polinômios Trigonométricos e de algumas aplicações da trigonometria no ensino de números complexos. Embora seja uma proposta inovadora, esta não pretende substituir o Ensino de Trigonometria como é feito em nossas escolas, mas tem a preocupação de ser um recurso adicional no ensino desse conteúdo. Como dissemos anteriormente, motivador para o aluno e na medida do possível contextualizado.

Deixamos para os exercícios complementares um aprofundamento do assunto e algumas atividades com um nível mais elaborado. Esperamos que essa unidade temática possa lhe ser útil e ajude a adequar o ensino desse tema à realidade de nossos alunos e de nossa atual situação educacional propiciando um maior aproveitamento e uma aprendizagem mais eficaz.

9.2 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A METODOLOGIA DA UNIDADE TEMÁTICA.

Ao elaborarmos esta unidade temática, procuramos tratar os assuntos de uma forma diferente da que é tradicionalmente trabalhada.

Procuramos na medida do possível situações relacionadas ao cotidiano e à vivência dos alunos.

Hoje, as tecnologias digitais estão presentes em praticamente todos os setores da atividade humana, portanto nesta unidade temática procuramos essas tecnologias com o uso de softwares gratuitos de geometria dinâmica, sobretudo o *GeoGebra*, que tem recursos fundamentais no estudo que pretendemos realizar.

Como afirmam Giraldo, Caetano e Mattos, (2 012, concepção do material),

> o foco de nosso trabalho não está nos recursos computacionais utilizados e sim nas atividades em si e nos conceitos que elas pretendem que o aluno adquira. Assim, é fundamental evitar que os alunos formem uma ideia como "critério absoluto de validação de fatos matemáticos", mas que os resultados devem sempre ser interpretados à luz de argumentos matemáticos.Assim, as atividades propostas pretendem conduzir o aluno a conclusões de generalizações matemáticas, que em alguns momentos serão usadas sem o auxílio do computador.

O uso dos programas de geometria dinâmica não é a única alternativa que propomos para tornar o ensino de matemática mais prazeroso e eficaz. Mas com certeza é uma ferramenta importante nos dias atuais. Procuramos utilizar essa ferramenta associada a formas tradicionais de ensino e a busca da demonstração, pelo aluno, de resultados obtidos previamente.

9.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O PROCESSO DE AVALIAÇÃO.

As avaliações fornecem ao professor oportunidade de reorientar seu trabalho futuro, esclarecendo aspectos que eventualmente tenham sido mal formulados, que induzam raciocínios imprecisos ou que não ajude satisfatoriamente aos alunos na construção de seus conhecimentos.

Assim propomos uma avaliação que ultrapasse o simples ato de aplicar uma lista de exercícios e atribuir nota aos alunos de acordo com a quantidade que acertaram. Avaliar deve ser uma atividade cotidiana e que sirva de instrumento para colher informações e fazer uma análise crítica do trabalho. Para isso os alunos devem estar conscientes desse conceito, até mesmo, para que eles possam desvincular da avaliação o conceito de "punição" e assim, desenvolverem plenamente. Coerentes com essa ideia, sugerimos alguns itens que podem ser utilizados na avaliação dos alunos através desta unidade temática.

Após o estudo do tema, os alunos deverão ser capazes de:

- Esboçar ou construir em um plano cartesiano os gráficos das funções seno e cosseno reconhecendo as suas principais características como periodicidade, amplitude, o domínio e a imagem.

- Resolver equações trigonométricas elementares.

- Identificar as transformações que as mudanças nos parâmetros das funções trigonométricas do tipo $f(x) = a + bcos(cx + d)$ ou $f(x) = a + bsen(cx + d)$ proporcionam em seus gráficos.

- Reconhecer as modificações que as alterações dos parâmetros dos monômios trigonométricos apresentam em seus gráficos.
- Calcular os valores máximos e mínimos dos monômios trigonométricos.
- Resolver equações trigonométricas do tipo $acos(x) + bsen(x) + c = 0$.
- Reconhecer em um polinômio trigonométrico de grau maior que 1 as suas principais características como periodicidade, assíntotas horizontais e pontos de inflexão.
- Reconhecer as modificações que os parâmetros dos polinômios trigonométricos de grau maior que um proporcionam em seus gráficos.
- Aplicar os conhecimentos adquiridos no estudo da unidade temática em situações do cotidiano, modelando-as através de uma relação matemática adequada ou que aproxime de suas características.
- Usar o software GeoGebra para definir valores máximos e mínimos aproximados dos polinômios trigonométricos de grau maior que 1.
- Definir radiano como sendo uma unidade de medida identificada com o comprimento do raio da circunferência.
- Definir radiano como sendo o ângulo cujo arco correspondente é igual ao raio da circunferência.
- Usar a forma polar dos números complexos para efetuar multiplicações, calcular potências e raízes.
- Entender o significado geométrico da multiplicação de dois números complexos unitários.

Como queremos avaliar o aluno, não apenas através da resolução das atividades, mas observando se ele desenvolveu um conjunto de habilidades que propomos trabalhar, destacamos algumas:

• Se ele foi capaz de sistematizar as diversas situações apresentadas e generalizar sua aplicação;

• Se ele foi capaz de associar a linguagem escrita à linguagem Matemática e vice-versa;

• Se ele relacionou as diversas situações problemas abordadas com fatos do cotidiano;

• Utilizou estratégias pessoais e não convencionais ao resolver situações problemas;

• Comunicou com clareza suas ideias e as justificou de maneira conveniente;

• Teve participação ativa perguntando ou respondendo, argumentando na defesa de suas ideias ou quando convencido, foi capaz de modificá-las;

• Utilizou ideias e sugestões do grupo no sentido de elaborar novas ideias e aprimorar argumentos;

- Aplicou conceitos aprendidos na construção de novos conceitos;
- Foi capaz de estabelecer analogias, perceber regularidades, criar convenções.

9.4 ORIENTAÇÕES METODOLÓGICAS

Ao elaborarmos a unidade temática, procuramos tratar os assuntos de uma forma diferente da que é tradicionalmente trabalhada.

Através da aplicação das situações geradoras e das situações orientadas, queremos que o aluno desenvolva a compreensão dos conceitos matemáticos, as capacidades de raciocínio, de comunicação e a criatividade.

As Situações Problemas Geradoras (SPG) apresentadas no início da unidade temática têm o proposito inicial de serem instrumentos motivadores para o estudo do conteúdo. Têm também o objetivo de possibilitar ao aluno que após o estudo deste conteúdo possa resolvê-las novamente e avaliar o progresso que este estudo lhe proporcionou.

Por isso, o professor deve estar atento para que a não realização destas atividades ou mesmo a sua realização parcial não seja um fator desmotivador para o aluno.

As Situações Problemas Orientadas (SPO) têm um caráter diferente das SPGs. O principal objetivo dessas atividades é a (re)construção do conhecimento.

Apresentamos algumas atividades bem elementares, porém de forma gradativa estas permitem que o aluno construa ou consolide o seu conhecimento.

Algumas destas atividades foram elaboradas na modalidade de Estudo Dirigido e outras através do método faça se assim. Nas duas situações incentiva-se o aluno à observação dos resultados e à formulação dos conceitos envolvidos.

Na medida do possível procuramos proporcionar ao educando a oportunidade de demonstrar matematicamente os resultados construídos na resolução dos exercícios. Desta forma procuramos criar condições para que o aluno seja protagonista de sua aprendizagem.

No entanto, esta unidade temática não tem o propósito de substituir o ensino de trigonometria apresentado em nossos livros didáticos, pelo contrário, nosso principal objetivo é de oferecer uma alternativa a mais na aprendizagem deste conteúdo, usando para isso ferramentas pouco utilizadas na educação básica.

Procuramos construir ou enfatizar alguns conceitos fundamentais no estudo de trigonometria, como uma conceituação precisa de radiano, as propriedades das funções seno e cosseno, as variações que parâmetros proporcionam nos gráficos destas funções, dos monômios trigonométricos e dos polinômios trigonométricos.

Também procuramos enfatizar as vantagem da utilização da representação polar dos números complexos na realização de algumas operações e na obtenção de resultados importantes para a matemática.

A contextualização foi apresentada de forma que o aluno possa perceber a utilização prática do conteúdo em situações do cotiano.

Parte dessa unidade temática pode ser utilizada quando do estudo de trigonometria e parte pode ser utilizada após o estudo dos números complexos.

Outro alvo desta unidade temática são alunos da educação básica, ou mesmo de alguns cursos de graduação que já realizaram um estudo formal de trigonometria e números complexos e pretendem aprofundar seus estudos.

O uso de Software de geometria dinâmica é amplamente incentivado. No nosso caso, optamos pela utilização do *GeoGebra* que é um programa computacional livre e presente na maioria dos computadores dos laboratórios de informática de nossas escolas.

Para facilitar o trabalho do professor, apresentaremos alguns comentários sobre os problemas geradores e a maioria dos problemas orientados.

A parte teórica foi desenvolvida a partir das atividades apresentadas e podem ser enriquecidas com comentários ou outras atividades propostas pelo professor.

É aconselhável que os alunos salvem suas construções em um Disco Rígido Externo (HD), pendrive ou outro dispositivo móvel.

9.5 RESOLUÇÕES DAS SITUAÇÕES-PROBLEMAS GERADORAS.

1 - RESOLUÇÃO:

$cos(0,06t) = -1.$

$r(t) = \frac{5865}{1-0,15},$

$r(t) = \frac{5865}{0,85},$

$r(t) = 6900.$

$cos(0,06t) = 1.$

$r(t) = \frac{5865}{1+0,15},$

$r(t) = \frac{5865}{1,15},$

$r(t) = 5100.$

Logo: $S = 6900 + 5100 = 12000$. Alternativa B.

COMENTÁRIOS.

O importante na resolução deste exercício é que o aluno relacione os valores máximos e mínimos da função cosseno, com o apogeu e o perigeu do satélite.

2 - RESOLUÇÃO:

A SPO 55 apresenta os passos para a construção do gráfico que proporciona uma modelagem adequada para estes dados.

Resposta: $16,5 + 3,85sen(0,52x - 5,2).$

COMENTÁRIOS.

Este exercício apresenta a construção de uma função que se ajusta, mesmo que aproximadamente a uma situação real.

O professor pode aproveitar uma destas atividades (SPG 02 ou SPO 55) para relacionar este assunto com o estudo de outras disciplinas.

Exemplificando, no caso dos índices pluviométricos de uma cidade, quais as épocas do ano há maior escassez de chuvas? Esta escassez leva à necessidade de racionamento de água? Havendo esta necessidade qual o período do ano em que deve ocorrer?

Outras atividades que podem ser sugeridas aos alunos como pesquisa.

1) Conceituar e definir as unidades de medidas.

a) Precipitação pluviométrica.

b) Armazenamento hídrico.

c) Evapotranspiração Real.

d) Deficiência Hídrica.

e) Excedente Hídrico.

2) Propor medidas preventivas para evitar danos materiais e mesmo perca de vidas humanas, durante acontecimentos climatológicos excepcionais como secas prolongadas ou período chuvoso em excesso.

3 - RESOLUÇÃO:

O movimento da partícula está representado pela função do tipo $p(x) = a + bcos(cx + d)$. Nesse caso temos: $a = 0$, $b = 0,2$, $c = \frac{1}{2}$ e $d = \frac{\pi}{2}$. O período dessa função é: $P = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$. O valor máximo de p(t) é $p(t) = \sqrt{(0,2)^2} = 0,2$. Resolvendo a equação $x = 0,2.cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t) = 0,2$, encontramos $t = -1 + 4k$, o movimento adquire a condição de equilíbrio quando $p(t) = 0 + 4k$. Se $t = 0$ temos $p(t) = 0$. De $t = -1$ (máxima elongação) a $t = 0$ (posição de equilíbrio) temos $\frac{1}{4}$ do período. Logo o tempo solicitado é 1 segundo.

COMENTÁRIOS: Além de contextualizar o estudo desse tema, essa SPG utiliza vários conceitos estudados no Guia do Aluno, como período o de uma função trigonométrica, valor máximo de um monômio trigonométrico e resolução de equações trigonométricas elementares. Por ser uma SPG optamos por não inserir na questão as opções de resposta oferecida aos vestibulandos que são: a)0,5s; b)1 s; c) 2 s; d) 4 s; e) 8 s.

9.6 RESOLUÇÕES DAS SITUAÇÕES-PROBLEMAS ORIENTADAS.

1-Resolução:

θ	$sen(\theta)$	$\theta + \frac{\pi}{2}$	$cos(\theta + \frac{\pi}{2})$
$\frac{\pi}{6}$	0,500	$\frac{2\pi}{3}$	-0,500
$\frac{\pi}{4}$	0,707	$\frac{5\pi}{4}$	-0,707
$\frac{2\pi}{5}$	0,951	$\frac{9\pi}{5}$	-0,951
$\frac{\pi}{2}$	1,000	π	-1,000
$\frac{2\pi}{3}$	0,500	$\frac{7\pi}{6}$	-0,500
$\frac{6\pi}{5}$	-0,588	$\frac{17\pi}{10}$	0,588

2 - Resolução:

Conclusão inicial: $sen(\theta)$ =- $cos(\theta + \frac{\pi}{2})$.

Na figura temos os triângulos retângulos ADB, retângulo em $\hat{\hat{D}}$ e a $AD'E$ retângulo em $\widehat{D'}$. Nestes triângulos os ângulos $B\widehat{A}D$ e $A\widehat{D'}E$ são congruentes . Consequentemente os ângulos $A\widehat{B}D$ e $E\widehat{A}D$ também têm as mesmas medidas. Portanto os triângulos ADB e $D'EA$ são semelhantes.

Considerando que $\overline{AB} = \overline{AD'} = r$, concluímos que a constante de semelhança $k = 1$, portanto estes triângulos são congruentes com as seguintes correspondências entre seus ângulos e entre os seus lados:

$A\widehat{B}D = D'\widehat{A}E$ e $\overline{AD} = \overline{D'E}$.

$D\widehat{A}B = A\widehat{D'}E$ e $\overline{BD}= \overline{AE}$.

$A\widehat{D}B = A\widehat{E}D'$e $\overline{AB}= \overline{AD'}$.

Observando o retângulo ADBF concluímos que $\overline{DB} = \overline{AF} = sen(\theta)$.

Temos ainda que $\overline{DB} = |\overline{AE}| = -cos(\theta + \frac{\pi}{2})$.

Portanto: $sen(\theta) = -cos(\theta + \frac{\pi}{2})$.

3 - Resolução:

x	$sen(x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0
$\frac{5\pi}{2}$	1
3π	-1

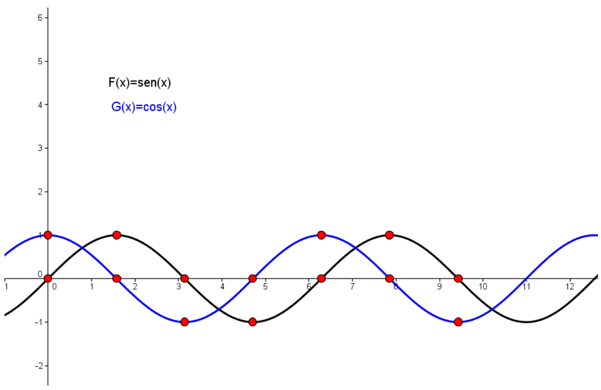


Figura 9.6.1:

Resposta: O gráfico da função cosseno é uma translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda do gráfico da função seno.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 1 a 3.

Estas atividades proporcionam ao aluno, gradativamente, condições para concluir que $sen(x) = -cos(x + \frac{\pi}{2})$, primeiro através da observação, depois da demonstração matemática.

4 - Resolução:

A função seno é uma função ímpar, isto é $\forall x \in \mathbb{R}$, $sen(x) = -sen(-x)$. A função cosseno é uma função par pois $cos(x) = cos(-x)$.

COMENTÁRIOS.

O aluno pode chegar a estas conclusões pela observação dos gráficos ou do ciclo trigonométrico. É uma atividade que permite a revisão dos conceitos de funções pares ou ímpares.

5 - Resolução:

São funções de domínio real, amplitude igual a 1 e imagem $Im = [-1, 1]$.

6 - Resolução:

a) $x = (0 + 2k\pi)$ ou $x = (\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $x = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $x = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ ou $x = (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $x = (0 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

e) $x = (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

f) $x = (\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

g) $x = (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$ ou $x = (\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

h) $x = (\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$ ou $x = (\frac{7\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

COMENTÁRIOS.

Esta atividade permite que o educando resolva algumas equações trigonométricas elementares usando o ciclo trigonométrico e a redução ao primeiro quadrante.

7 - Resolução:

a) Há uma dilatação vertical com modificações na imagem de f(x).

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $[-a, a]$.

d) Não há modificações no período de $f(x)$.

8 - Resolução.

a) Há uma compressão vertical com modificações na imagem de $f(x)$.

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $[-a, a]$.

d) Não há modificações no período de $f(x)$.

9 - Resolução.

a) Há uma dilatação vertical com modificações na imagem de $f(x)$.

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $[-a, a]$.

d) Não há modificações no período de $f(x)$.

10 - Resolução.

a) Há uma compressão vertical com modificações na imagem de $f(x)$.

b) $D = \mathbb{R}$.

c) $[-a, a]$.

d) Não há modificações no período de $f(x)$.

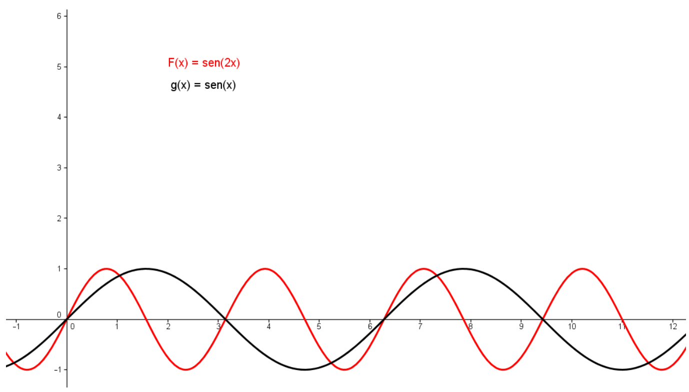
COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 7 a 10.

São atividades que permitem ao estudante rever as principais características das funções seno e cosseno e relacionar essas características quando há a variação do parâmetro a nas funções $f(x) = asen(x)$ ou $g(x) = acos(x)$.

11 - Resolução:

Fazendo $t = 2x \Leftrightarrow x = \frac{t}{2}$.

x	$t = 2x$	$f(x) = sen(2x) = sen(t)$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{2}$	3π	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	-1
2π	4π	0

Figura 9.6.2: 

a) A imagem é mesma para as duas funções. $Im = [-1, 1]$.

b) Período: $P = \pi$.

c) Não. Houve modificação no período da função.

d) O período da função f(x) = sen(t) é igual a 2π.Como $x = \frac{t}{2}$ temos que este fica dividido por 2, logo a função $f(x) = sen(2x)$ tem período $P = \pi$.

12 - Resolução:

a) Fazendo $t = \frac{x}{2}$ temos $x = 2t$.

x	$t = \frac{x}{2}$	$f(x) = sen(\frac{x}{2}) = sen(t)$
0	0	0
π	$\frac{\pi}{2}$	1
2π	π	0
3π	$\frac{3\pi}{2}$	-1
4π	2π	0
5π	$\frac{5\pi}{2}$	1
6π	3π	0
7π	$\frac{7\pi}{2}$	-1
8π	4π	0

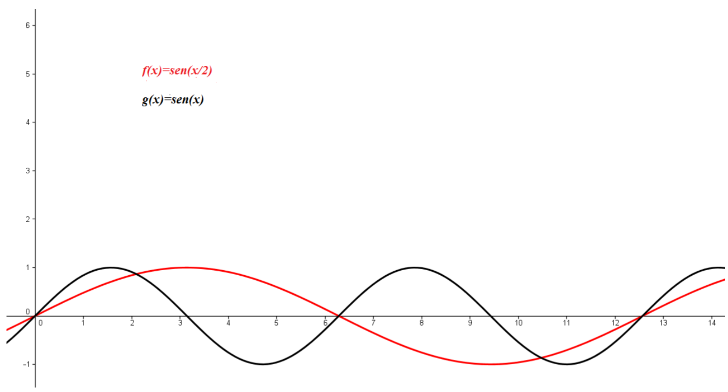


Figura 9.6.3:

$f(x)$ tem imagem $Im = [-1, 1]$, período: $P = 4\pi$, pois $x = \frac{t}{2}$ temos que 2π fica dividido por $\frac{1}{2}$.

b) Fazendo $t = 4x$, temos $x = \frac{t}{4}$.

x	t = $4x$	$f(x) = sen(4x) = sen(t)$
0	0	0
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{4}$	π	0
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	2π	0
$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	3π	0
$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{2}$	-1
π	4π	0

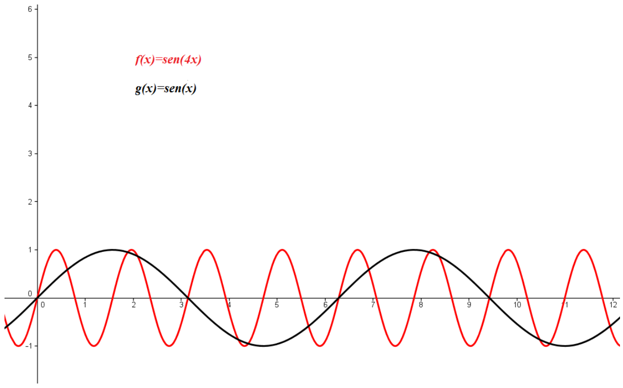


Figura 9.6.4:

$f(x)$ tem imagem $Im = [-1, 1]$, período: $p = \frac{\pi}{2}$, pois $x = \frac{t}{4}$ temos que 2π fica dividido por 4.

c) Fazendo$t = \frac{x}{3}$, temos $x = 3t$.

x	$t = \frac{x}{3}$	$f(x) = sen(\frac{x}{3}) = sen(t)$
0	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	1
3π	π	0
$\frac{9\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
6π	2π	0
$\frac{15\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	1
9π	3π	0
$\frac{21\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2}$	-1
12π	4π	0

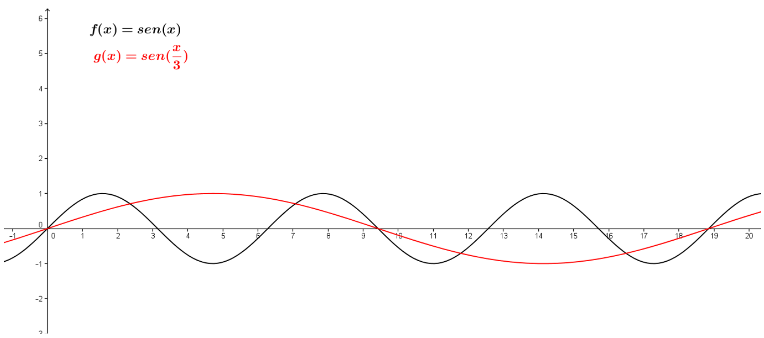
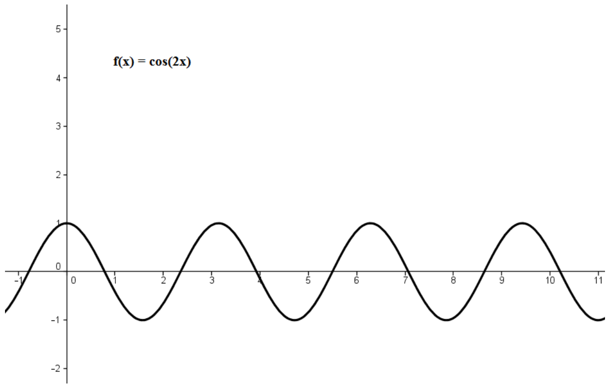


Figura 9.6.5:

f(x) tem imagem $Im = [-1, 1]$, período:$P = 6\pi$, pois $x = 3t$ temos que o período da função $sen(\theta)$ é igual a 2π como a função dada é $sen(\frac{x}{3})$ o período desta função é $2\pi : \frac{1}{3}$.

13 - Resolução:

Figura 9.6.6: 

$D = \mathbb{R}$, $Im = [-1, 1]$ e período $P = \pi$.

14 - Resolução:

a) $D = \mathbb{R}$.

b) $Im = [-1, 1]$ e $P = \frac{2\pi}{a}$.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 11 a 14.

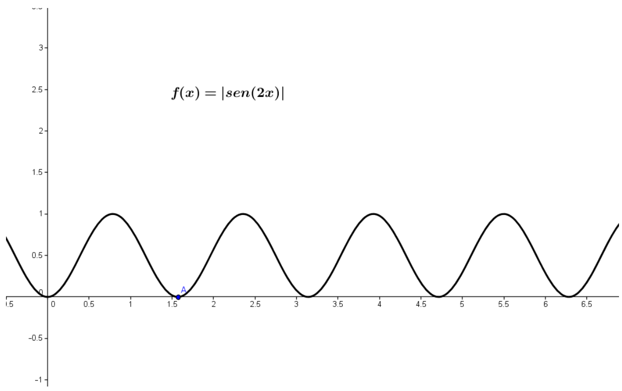
Estas atividades permitem o aluno pesquisar a variação do parâmetro k nas funções seno e cosseno ocasionando modificações nos períodos das mesmas.Isto ocorre pois fazendo $kx = 2\pi$, temos que $x = \frac{2\pi}{k}$.

15 - Resposta. (Pessoal do aluno).

Uma Resposta:

As vantagens estão relacionadas ao dinamismo e praticidade na construção dos gráficos e na obtenção dos resultados. Uma das desvantagens é que esta pode proporcionar ao educando uma visão parcial do problema. Esta visão parcial pode ser superada com o auxílio de algumas tabelas e a generalização matemática.

16 - Resolução:

Figura 9.6.7: 

$y = |sen(2x)|$ tem Im = [0,1] e período $P = \frac{\pi}{2}$.

COMENTÁRIOS:

É uma atividade que proporciona ao aluno oportunidade de rever conceitos da função modular.

17 - Resolução:

a) $y = sen(x)$.

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	π	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	2π
sen(x)	0	crescente	1	decrescente	0	decrescente	-1	crescente	0

b)$y = cos(x)$.

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	π	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	2π
$cos(x)$	1	decrescente	0	decrescente	-1	crescente	0	crescente	1

COMENTÁRIOS:

O objetivo desta atividade é estudar o comportamento das funções seno e cosseno nos diversos quadrantes. Posteriormente será útil na determinação dos valores máximos e mínimos do monômio trigonométrico $p(x) = cos(x) + sen(x)$.

18 - Resposta:

a)

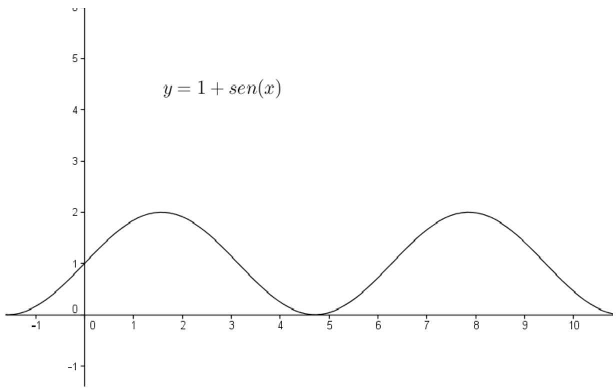


Figura 9.6.8:

b)

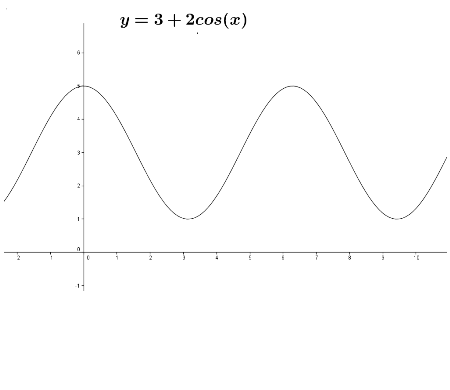


Figura 9.6.9:

COMENTÁRIOS:

Nas atividades anteriores o aluno estudou o comportamento das funções seno e cosseno com a variação de seus parâmetros. Nesta atividade ele utiliza estes conhecimentos para o esboço dos gráficos sem o auxílio de programas de geometria dinâmica ou tabelas.

19 - Resposta:

Modificações no parâmetro a ocasiona mudança na imagem de $f(x)$ mantendo o domínio e o período da mesma. No caso do parâmetro b, se $b > 1$ temos uma dilatação vertical no gráfico de $f(x)$, se $0 < b < 1$ temos uma compressão deste gráfico. As alterações em d proporcionam uma translação horizontal no gráfico de $f(x)$. Mudanças simultâneas em b e d fornecem a $f(x)$ translações verticais e horizontais.

20 - Resposta idêntica à questão anterior.

21 - Respostas:

a) $c = 0,\ f(x) = 1$ cujo gráfico é uma reta horizontal.

b) Alterações em c ocasionam translações horizontais no gráfico de $f(x)$.

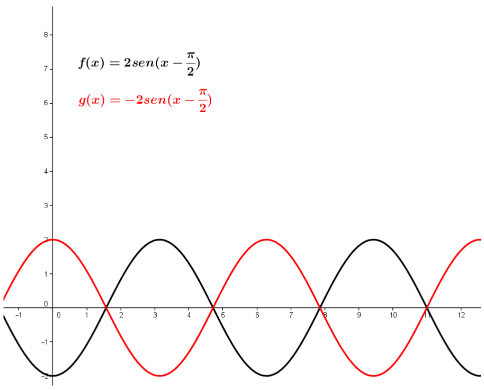
22 - Respostas:

a) $D = \mathbb{R}$.

b) $Im = [-b, b]$.

c) $p = \frac{2\pi}{c}$.

23 - Resolução:

Figura 9.6.10: 

Resposta: $f(x)$ e $g(x)$ são simétricos em relação ao eixo das abscissas, ou seja $f(x) = -g(x)$.

24 - Resolução:

a) $bsen(m)$ percorre o intervalo $[-b, b]$.

b) $y = a + bsen(m)$ percorre o intervalo $[a - b, a + b]$, que é a imagem de y.

c) Para que m complete um período é necessário que m varie de 0 a 2π .

Então:

$m = 0 \Rightarrow bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-c}{b}$. (1)

$m = 2\pi \Rightarrow bx + c = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi - c}{b}$.(2)

Fazendo (2) menos (1) temos: $\frac{2\pi - c}{b} - (-\frac{c}{b}) = \frac{2\pi}{b}$.

$P = \frac{2\pi - c}{b} - (-\frac{c}{b}) = \frac{2\pi}{b}$.

Conclusão: O período da função $f(x) = y = d + asen(bx + c)$ é $p = \frac{2\pi}{b}$.

25 - Respostas:

a) $y = -sen(x)$.

$P = 2\pi$ e $Im = [-1, 1]$.

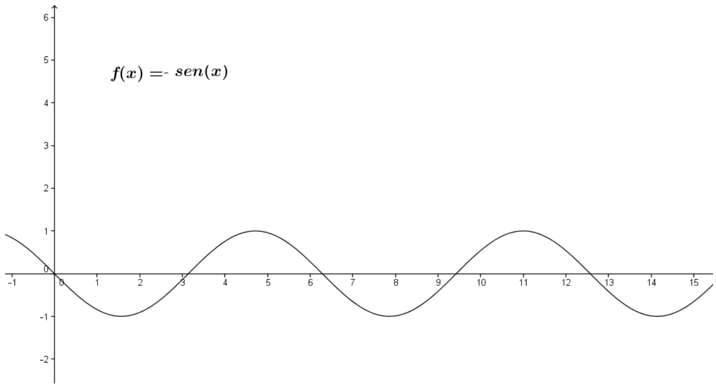


Figura 9.6.11:

b) $y = 3cos(x)$.
$P = 2\pi$ e $Im = [-3, 3]$.

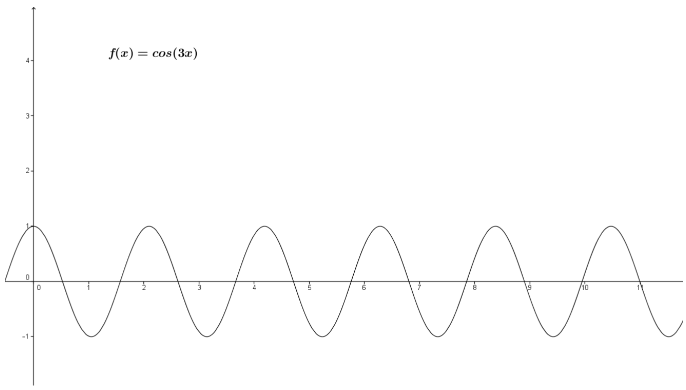


Figura 9.6.12:

c) $f(x) = -2cos(x)$.
$P = 2\pi$ e $Im = [-2, 2]$.

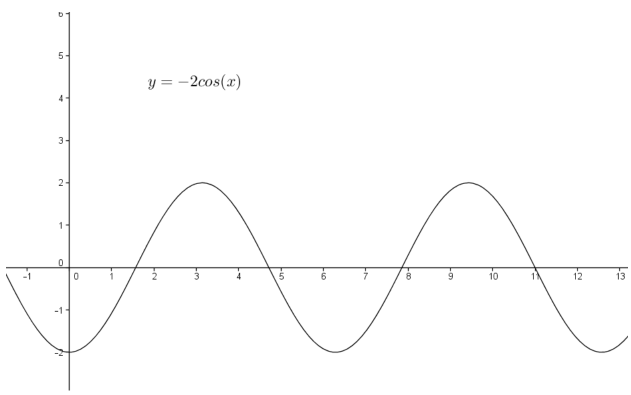


Figura 9.6.13:

d) $f(x) = 1 + sen(3x)$.

$P = \frac{2\pi}{3}$ e $Im = [-1, 3]$.

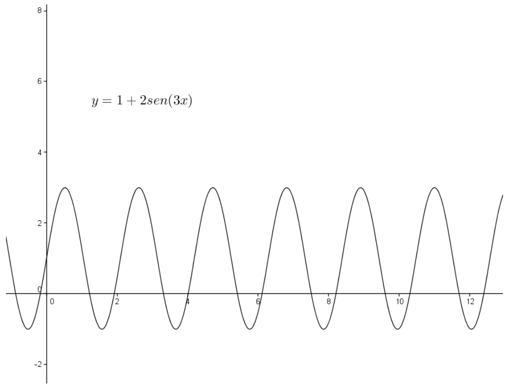


Figura 9.6.14:

26 - Resposta:

Resolvendo as equações temos respectivamente: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$ e $x = \frac{9\pi}{4}$.

27 - Resolução:

$P = \pi$ e $Im = [-1, 3]$.

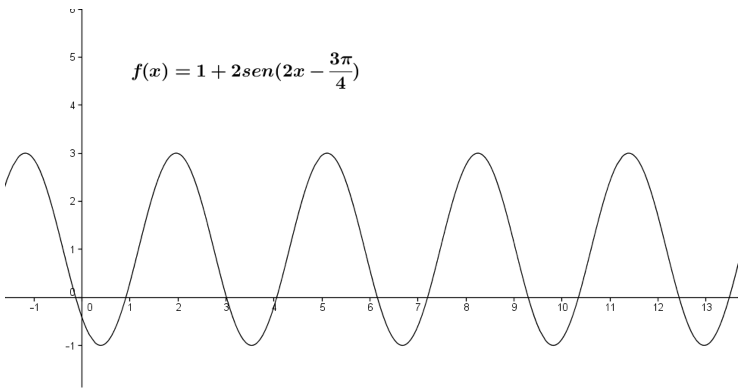


Figura 9.6.15:

28 - Resposta:

Os gráficos são simétricos em relação ao eixo das abscissas quando $a = 0$. Neste caso temos $f(x) = -g(x)$.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 20 a 28.

Estas questões permitem o estudante avaliar as transformações nos parâmetros a, b, c e d e as modificações que estas proporcionam nas senoides do tipo $y = a + bsen(cx + d)$ ou $cos(x) = a+bcos(cx+d)$. Outro propósito destas atividades é definir o período destas funções, que é realizado primeiro pela observação dos gráficos, depois demonstrado matematicamente.

29 - Resolução:

x	$cos(x)$	$sen(x)$	$p(x) = sen(x) + cos(x)$
0	1	0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	1
π	-1	0	-1
$\frac{5\pi}{4}$	-$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-$\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	-1
2π	1	0	1

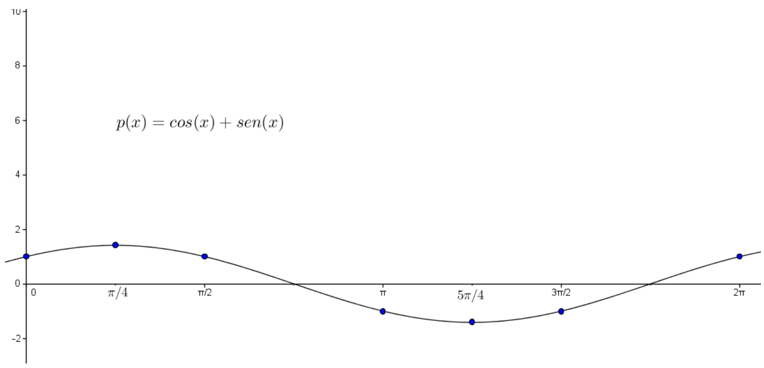


Figura 9.6.16:

30 - Pelo exercício anterior temos $p(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ e $p(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$. A imagem de $p(x)$ é o intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e o período é 2π.

31 - Resposta:

a) Translação vertical e horizontal.

b) Havendo mudanças no parâmetro a $p(x)$ adquire novas abscissas e ordenadas, o que ocasiona as translações horizontais e verticais.

32 - Resposta:

Havendo mudanças no parâmetro b , $p(x)$ adquire novas abscissas e ordenadas, o que ocasiona as translações horizontais e verticais.

33- Resposta:

Alterações no parâmetro k proporciona mudanças no período de $p(x)$.

34 - Resposta:

$P = \frac{2\pi}{k}$.

35 - Resposta:

a) $p_3(a) = p_1(a) + p_2(a)$.

b) Máximo de $p_3(x) \simeq 3,61$.

c) Mínimo de $p_3(x) \simeq -3,61$.

d) $\sqrt{13} \simeq 3,61$, os valores máximos e mínimos de $p_3(x)$ em módulo são próximos de $\sqrt{13}$ e $-\sqrt{13}$.

36 - Resolução:

a) $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) $cos(\alpha) = \frac{|a|}{k}$.

$sen(\alpha) = \frac{|b|}{k}$.

c) $acos(nx) + bsen(nx) = \frac{k}{k}acos(nx) + \frac{b}{k}bsen(nx)$. (1)

$acos(nx) + bsen(nx) = k.[\frac{|a|}{k}cos(nx) + \frac{|b|}{k}sen(nx)]$. (2)

$acos(nx) + bsen(nx) = \sqrt{a^2 + b^2}[cos(\alpha)cos(nx) + sen(\alpha)sen(nx)]$.(3)

$acos(nx) + bsen(nx) = \sqrt{a^2 + b^2}cos(nx - \alpha)$.

Considerando que:

$-1 \leq cos(nx - \alpha) \leq 1$.

Concluímos que os valores máximos e mínimos de $p(x)$ são:

Valor máximo: $p(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Valor mínimo: $p(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}$.

37 - Resolução:

a) $\sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

b) $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

38) Resolução:

a) $5sen(x) = -6cos(x)$.

$\frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{-6}{5} \Longleftrightarrow tg(x) = \frac{-6}{5} = -1,2$.

Como $tg(x)$ é um número negativo temos x é um arco dos $2^{\underline{o}}$ e $4^{\underline{o}}$ quadrante. Consultando uma tabela trigonométrica encontramos que um arco com um valor aproximado de sua tangente igual a 1,2 é um arco de 51º, cujos arcos correspondentes nos 2º e 4º quadrante são respectivamente 131º e 311º. Transformando estas medidas em radianos obtemos respectivamente $x \simeq 2,28$ e $x \simeq 5,42$.

b) $cos(x) = 3sen(x)$.

$\frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{1}{3} \Longleftrightarrow tg(x) \simeq 0,333...$.

Como $tg(x)$ é um número positivo temos x é um arco dos 1º e 3º quadrante. Consultando uma tabela trigonométrica encontramos que um arco com valor aproximado de sua tangente igual a 0,333... é um arco de 72º e seu correspondente no 3º quadrante é 252º. Transformando estas medidas em radianos obtemos respectivamente $x \simeq 1,26$ e $x \simeq 4,39$.

39) Respostas:

a)

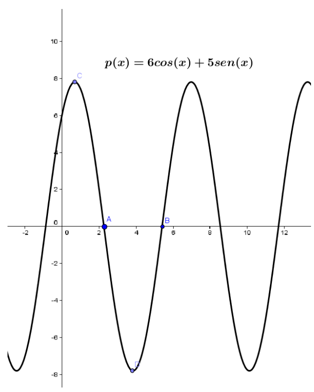


Figura 9.6.17:

b)

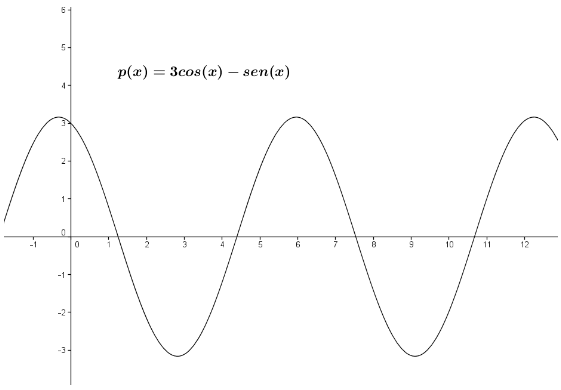


Figura 9.6.18:

A representação gráfica confirma os resultados obtidos nos exercícios 37 e 38.

40) Resolução:

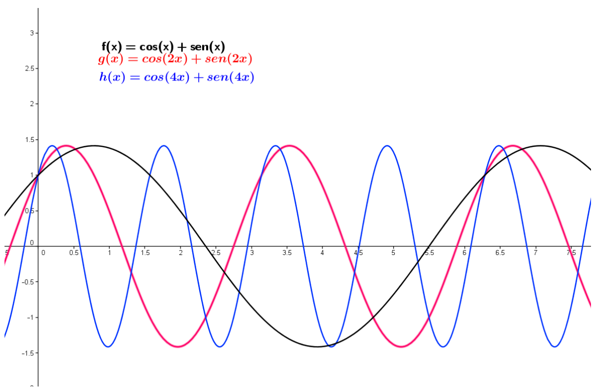


Figura 9.6.19:

a) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

b) p$_1(x)$ período $P = 2\pi$.

$p_2(x)$ período $P = \pi$.

$p_3(x)$ período $P = \frac{\pi}{2}$.

c) $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ têm respectivamente duas, quatro e oito raízes.

41 - Respostas:

a) Variações em a ou b proporcionam no gráfico de $p(x)$ dilatação (ou compressão) horizontal e vertical. Modificações em c resultam em translações verticais e em k, dilatação (ou compressão) horizontais com mudanças no período de $p(x)$.

b) $P = \frac{2\pi}{k}$.

c) Se $c > \sqrt{a^2 + b^2}$ $p(x)$ não tem raízes reais.

d) $2k$ raízes reais.

42 - Resolução:

$p(x) = acos(x) + bsen(x) + c.$

$$acos(x) + bsen(x) = -c. \qquad (1)$$

$\sqrt{a^2+b^2} > 0$. Portanto divida todos os termos desta equação por r (considere) $r = \sqrt{a^2+b^2}$.

$\frac{acos(x)}{r} + \frac{bsen(x)}{r} = \frac{-c}{r}$. (2)

Como $\frac{a^2+b^2}{r^2} = 1$, existe um número real θ de forma que que $sen(\theta) = \frac{b}{r}$ e $cos(\theta) = \frac{a}{r}$.

assim: $a = rcos(\theta)$ e $b = rsen(\theta)$.

Substitua estes valores na equação (2).

$\frac{rcos(\theta)cos(x)}{r} + \frac{rsen(\theta)sen(x)}{r} = \frac{-c}{r}$.

$cos(\theta)cos(x) + sen(\theta)sen(x) = \frac{-c}{r}$.

Como $cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sen(a).sen(b)$ a equação anterior assume o seguinte aspecto.

$cos(\theta - x) = \frac{-c}{r}$ç

Fazendo$cos(\alpha) = \frac{-c}{r}$ concluímos que $x = \alpha + \theta$.

43 - Resposta:

Como $sen(\theta) = \frac{b}{r}$ e $cos(\theta) = \frac{a}{r}$ consideramos r é o raio e a hipotenusa de um triângulo retângulo definido no ciclo trigonométrico, cujo raio $r = 1$. Se tivermos $r > 1$ a equação não tem solução.

44 - Resolução:

$\sqrt{3}.cos(x) + sen(x) - 1 = 0$.

$\sqrt{3}.cosx + sen(x) = 1$.

$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \Leftrightarrow r = 2$.

$\frac{\sqrt{3}.cos(x)}{2} + \frac{sen(x)}{2} = \frac{1}{2}$.

Como $sen(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ e $cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ temos $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Temos ainda $cos(\frac{\pi}{3}) = cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

Segue que:

$cos(\frac{\pi}{6} - x) = cos(\frac{\pi}{3})$ ou $cos(\frac{\pi}{6} - x) = cos(\frac{5\pi}{3})$

$\frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6} - x = \frac{5\pi}{3}$

$x = -\frac{\pi}{6}$ | $x = -\frac{3\pi}{2}$

$\frac{-\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$. | $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2}$.

S = $\{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

45 - Resolução:

a) $cos(x) - \sqrt{3}sen(x) = 1$.

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow r = 2$.

$\frac{cos(x)}{2} - \frac{\sqrt{3}sen(x)}{2} = \frac{1}{2}$.

considerando $cos(\theta) = \frac{1}{2}$ e $sen(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ temos que $\theta = \frac{5\pi}{3}$.

Como: $cos(\frac{\pi}{3}) = cos(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.

$cos(\frac{5\pi}{3} - x) = cos(\frac{\pi}{3})$ ou $cos(\frac{5\pi}{3} - x) = cos(\frac{5\pi}{3})$

$\frac{5\pi}{3} - x = \frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3} - x = \frac{5\pi}{3}$

$x = \frac{4\pi}{3}$. | $x = 0$.

S = $\{x = 0 + 2k\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $2cos(x) + sen(x) = 1$.

$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

$\frac{2cos(x)}{\sqrt{5}} + \frac{sen(x)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

como $cos(\theta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $sen(\theta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ temos que $\theta \simeq 27^{\underline{o}}$ em radianos temos $\theta \simeq \frac{3\pi}{20}$.

considerando $cos(63^{\underline{o}}) = cos(297^{\underline{o}}) \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Transformando 63º e 297º em radiano obtemos $cos(\frac{7\pi}{20}) = cos(\frac{33\pi}{20}) \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Assim.

$cos(\frac{3\pi}{20} - x) = cos(\frac{7\pi}{20})$ ou $cos(\frac{3\pi}{20} - x) = cos(\frac{33\pi}{20})$

$\frac{3\pi}{20} - x = \frac{7\pi}{20}$ $\quad$ $\frac{3\pi}{20} - x = \frac{33\pi}{20}$

$x = \frac{-\pi}{5}$. $\quad$ $x = -\frac{3\pi}{2}$

.Fazendo:

$-\frac{\pi}{5} + 2\pi = \frac{9\pi}{5}$. $\quad$ $\frac{-3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2}$.

Temos:

S = $\{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \frac{9\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 29 a 45.

São atividades que se propõe ao estudo dos monômios trigonométricos e do polinômio trigonométrico do primeiro grau. Inicialmente os exercícios procuram desenvolver a construção gráfica desses monômios a partir da composição de gráficos das funções cosseno e seno, em seguida procuram enfatizar quais são as alterações que modificações nos diversos parâmetros ocasionam nos gráficos em estudo.

A SPO 36 proporciona ao aluno oportunidade de demonstrar um teorema que propicia a determinação dos máximos e mínimos dos monômios trigonométricos cujo resultado é utilizado na SPO 37. Nesta atividade o aluno demonstra a validade do teorema nos casos em que os coeficientes a e b são positivos. O professor pode dividir a turma em grupos e pedir que cada grupo demonstre os demais casos. Da mesma forma a SPO 42 incentiva o aluno na demonstração de um procedimento para encontrar as raízes ou zeros de um polinômio trigonométrico de 1º grau, as atividades seguintes utilizam este resultado.

46 - Respostas:

a) Os períodos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são respectivamente 2π,π e 2π.

b) $h(x)$ tem duas raízes e 4 pontos de inflexão em cada um de seus períodos.

c) Valor máximo 2,74 e valor mínimo -2,09. Estes valores ocorrem quando as somas $f(x) + g(x)$ atingem seus máximos e mínimos.

d) Fazendo $cos(2x) + sen(2x) = 0$ temos:

$cos(2x) = -sen(2x)$.

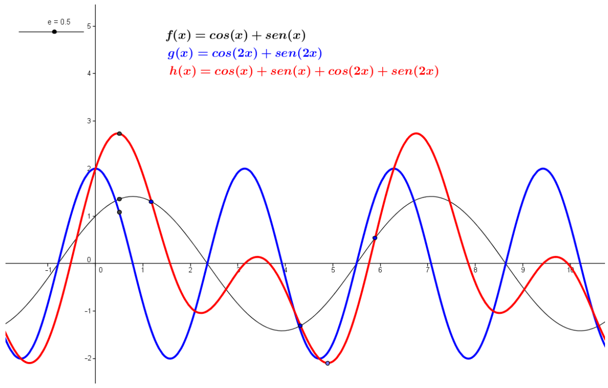
Substituindo $2x$ por θ e calculando θno intervalo $[0, 4\pi]$ temos:

$cos(\theta) = -sen(\theta)$.

$\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = \frac{7\pi}{4}$, $\theta = \frac{11\pi}{4}$ e $\theta = \frac{15\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{8}$, $x = \frac{7\pi}{8}$, $x = \frac{11\pi}{8}$ e $x = \frac{15\pi}{8}$.

Assim: $h(\frac{3\pi}{8}) \simeq 1,3$, $h(\frac{7\pi}{8}) \simeq -0,54$, $h(\frac{11\pi}{8}) \simeq -1,31$ e $h(\frac{15\pi}{8}) \simeq 0,54$.

e)

Figura 9.6.20: 

47 - Respostas:

a) Sim, há modificações no número de raízes de $h(x)$.

b) Não. Os pontos de inflexão podem ocorrer quando $h(x) \neq f(x)$.

c) Os valores dos parâmetros de $h(x)$ são fundamentais na determinação do número de raízes e na localização dos pontos de inflexão.

48 - Respostas:

a) Individual.

b) $h(x)$ não atinge as retas horizontais definidas, pois estas foram obtidas somando os máximos e mínimos de $f(x)$ e $g(x)$, portanto o máximo de $h(x)$ é menor que $y = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$ e o mínimo de $h(x)$ é maior que $y = -(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})$.

49 - Respostas:

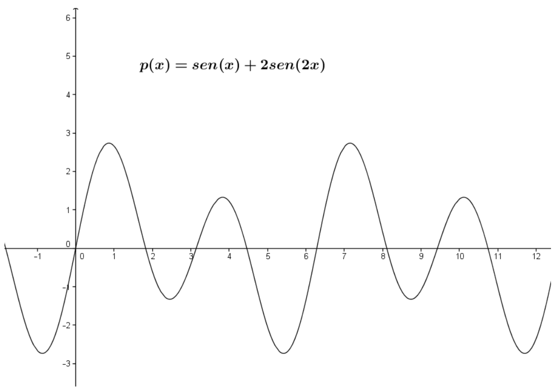
a) Individual.

b) Os pontos de inflexão ocorrem quando $h(x) = f(x)$.

c) $h(x)$ não atinge as retas horizontais definidas, pois estas foram obtidas somando os máximos e mínimos de $f(x)$ e $g(x)$, portanto o máximo de $h(x)$ é menor ou igual que $y = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$ e o mínimo de $h(x)$ é maior que $y = -(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})$.

50) Respostas:

a)

Figura 9.6.21: 

b)

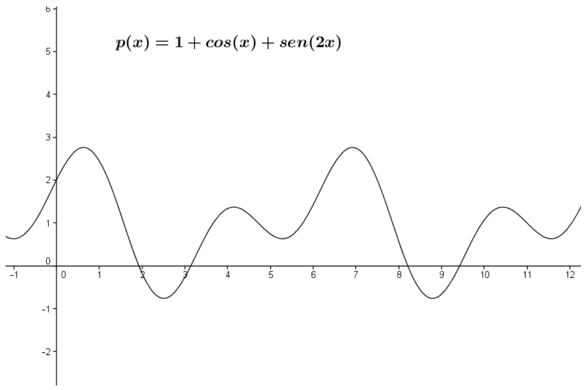


Figura 9.6.22:

c)

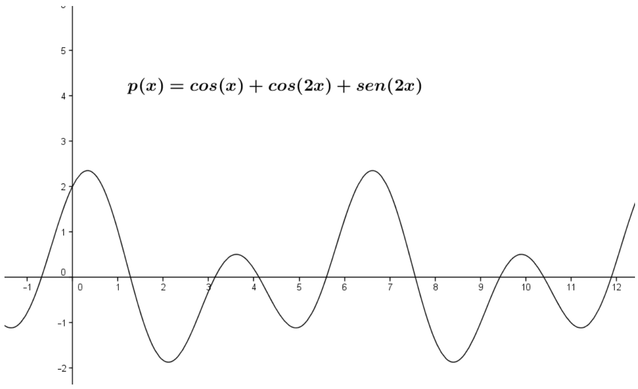


Figura 9.6.23:

d)

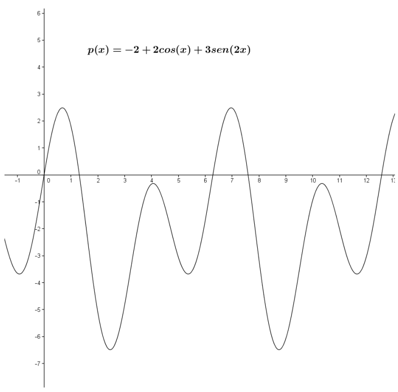


Figura 9.6.24:

51 - Resolução e respostas:

$cos(3x) = -cos(3x)$.

Fazendo $3x = \theta$ temos:

$cos(\theta) = -sen(\theta)$.

$\theta = \frac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$, assim $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{12}$.

Considerando valores de θ no intervalo $[0, 6\pi]$ temos os seguintes valores para x:

$x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{12}$, $x = \frac{11\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{19\pi}{12}$ e $x = \frac{23\pi}{12}$.

a) $Im = [-2,76; 4,05]$.

b) $P = 2\pi$.

c) 6 raízes reais.

d) ($\frac{\pi}{4}$, 2,41); ($\frac{7\pi}{12}$,-0,66); ($\frac{11\pi}{12}$, -0,34); ($\frac{5\pi}{4}$, -0,41) ; ($\frac{19\pi}{12}$, -2,07) e ($\frac{23\pi}{12}$, 1,07).

52 - Resposta:

O período destes polinômios permanecem o mesmo, as demais características são modificadas.

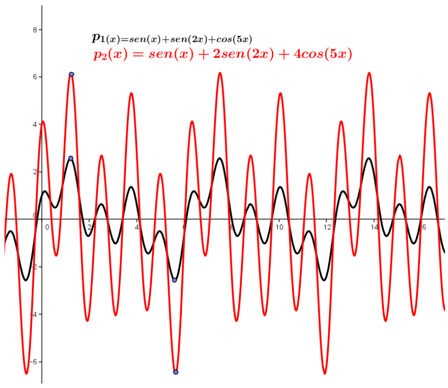
53) Resolução:

$y = \sqrt{1^2 + 1^2} + \sqrt{1^2 + 5^2} + \sqrt{2^2 + 3^2} \Rightarrow y = \sqrt{2} + \sqrt{26} + \sqrt{13}$.

As retas de máximo e de mínimo são: y= $\sqrt{2} + \sqrt{26} + \sqrt{13}$ e y= -($\sqrt{2} + \sqrt{26} + \sqrt{13}$).

54) Resolução:

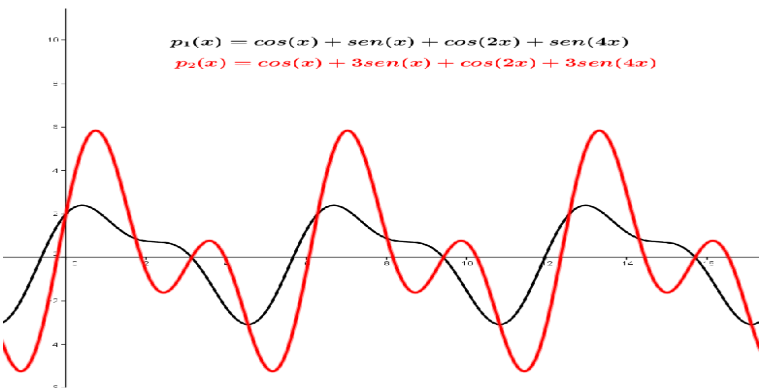
a)

Figura 9.6.25: 

p$_1(x)$: P= 2π, Im = [-2,56, 2,57], tem 6 raízes e 10 pontos de inflexão.

p$_2(x)$: P= 2π, Im = [-6,45, 6,10], tem 10 raízes e 10 pontos de inflexão.

b)

Figura 9.6.26: 

$p_1(x)$: $p = 2\pi$, $Im = [-3,01, 3,03]$, tem 8 raízes e 8 pontos de inflexão.

$p_2(x)$: $p = 2\pi$, $Im = [-6,88, 5,77]$, tem 8 raízes e 8 pontos de inflexão.

55) Resolução:

a) $p_1(x) = sen(x) + sen(2x) + cos(5x)$,

$y = \sqrt{1^2} + \sqrt{1^2} + \sqrt{1^2} = 3.$

retas de máximos e de mínimos: $y = -3$ e $y = 3$.

$p_2(x) = sen(x) + 2sen(2x) + 4cos(5x)$,

$y = \sqrt{1^2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{4^4} = 7$,

retas de máximos e de mínimos: $y = -7$ ou $y = 7$.

b) $p_1(x) = cos(x) + sen(x) + cos(2x) + sen(4x)$,

$y = \sqrt{1^2} + \sqrt{1^2} + \sqrt{1^2} + \sqrt{1^2} = 4$,

retas de máximos e de mínimos: $y = -4$ ou $y = 4$,

$p_2(x) = cos(x) + 3sen(x) + cos(2x) + 3sen(4x)$,

$y = \sqrt{1^1} + \sqrt{3^2} + \sqrt{1^2} + \sqrt{3^2} = 8$,

retas de máximos e de mínimos: $y = -8$ ou $y = 8$.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 46 a 55.

Nestas atividades realizamos o estudo dos polinômios trigonométricos do 2º grau (SPOs 46 a 50) e sobre polinômios trigonométricos de grau maior que 2.

É introduzido um conceito de retas de máximo e retas de mínimo e de pontos de inflexão de uma função.

A partir deste momento, no estudo dos polinômios trigonométricos, é trabalhada uma abordagem mais intuitiva. O uso de Software de geometria dinâmica é amplamente utilizado e o aluno é convidado a realizar modificações nos parâmetros e observar quais são as alterações que essas modificações proporcionam nos respectivos gráficos.

As atividades proporcionam ao aluno condições de determinar o período, a imagem (aproximada), o número de raízes e de pontos de inflexão de um polinômio trigonométrico.

Na SPO 48 o aluno foi orientado na construção das retas de máximo e mínimo de um polinômio trigonométrico de grau 2. A SPO 53 tem o propósito que ele utilize o conhecimento adquirido anteriormente para obter as restas de máximo e mínimo um polinômio de grau 3.

A SPO 55 tem como propósito a comparação de polinômios em que todos os coeficientes a_k e b_k são iguais a 1, com polinômios em que pelo menos um destes coeficientes são diferentes de 1, o que ocasiona mudança no número de raízes e de pontos de inflexão do polinômio e a permanência do período igual a 2π.

Embora a abordagem seja bem intuitiva, o aluno é estimulado justificar suas conclusões.

56) Respostas:

a) $p(x) = 21,1 + 2,4sen(0,7x + 0,4)$.

b) 21,1°C.

c) Maior temperatura média mensal: 23ºC, menor temperatura média mensal: 18,1°C.

d) Abril, setembro e outubro.

e) O parâmetro a proporciona uma translação vertical no gráfico de $t(x)$. Um valor próximo da média mensal posiciona este gráfico próximo dos pontos obtidos experimentalmente.

f) Variação das temperaturas médias mensais: 23°C - 18,1ºC = 4,9. 4,9:2 = 2,45. Consideramos $b = 2,4$. Modificações em b provoca uma dilatação (ou compressão) vertical no gráfico de $t(x)$. Valores de b próximos da metade da variação das temperaturas médias mensais "aproximam" o gráfico de $t(x)$ dos valores obtidos experimentalmente.

g) $t(x)$ é uma função periódica cujo período é $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

h) $d = 0,4$, um dos meses em que a temperatura média mensal foi mais próxima da média anual é o mês de abril, o 4º mês do ano.

57) Individual.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 56 e 57.

São atividades interessantes que relacionam o assunto estudado com uma situação de nosso cotidiano, contextualizando o mesmo, permitindo ao educando buscar um modelo matemático para dados obtidos experimentalmente.

58) Construção do aplicativo 'Desenrolando o Seno'. Orientações no guia do aluno.

59) Resposta:

Arco $0CQ$	Valor da abscissa P
0º	0
45º	0,79
135º	2,36
180º	3,14
210º	3,67
270º	4,73
360º	6,28

Arco $0CQ$	$\pi rad.$
0º	0
45º	$\frac{\pi rad}{4}$
135º	$\frac{3\pi rad}{4}$
180º	πrad
210º	$\frac{7\pi rad}{6}$
270º	$\frac{3\pi rad}{2}$
360º	$2\pi rad$

60) Respostas.

Arco OCQ	seno(OCQ)
0º	0
30º	0,5
45 º	0,71
60º	0,87
90º	1
120º	0,87
210°	-0,5
310°	-0,76
345º	-0,25

61) Respostas:

a) $(k\pi)rad$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

e) $(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 58 a 61.

A SPO 58 orienta o aluno na construção do aplicativo desenrolando o seno. As demais SPOs visam relacionar o seno de um arco com suas medidas em graus e em radianos. Outra preocupação na elaboração destas atividades foi a consolidação do conceito da medida de um arco expressa em radiano como um número real.

62) Resolução:

a) $Z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Z_1 está situado no 1º quadrante.

Temos: $r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$,

$sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos(\theta) = \frac{1}{2}$ portanto $tg(\theta) = \sqrt{3}$ podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Assim: $Z_1 = cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3})$.

b) $Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

Z_2 está situado no 2 º quadrante.

Temos: $r = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

$sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos(\theta) = \frac{-1}{2}$ portanto $tg(\theta) = -\sqrt{3}$ podemos concluir que $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Assim: $Z_2 = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})$.

63) $Z_1Z_2 = [cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3})].[cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})]$

$Z_1Z_2 = cos(\frac{\pi}{3})cos(\frac{2\pi}{3}) + icos(\frac{\pi}{3})sen(\frac{2\pi}{3}) + i(sen(\frac{\pi}{3})cos(\frac{2\pi}{3}) + i^2sen(\frac{\pi}{3})sen(\frac{2\pi}{3})$

$Z_1Z_2 = cos(\frac{\pi}{3})cos(\frac{2\pi}{3}) - sen(\frac{\pi}{3})sen(\frac{2\pi}{3}) + i[cos(\frac{\pi}{3})sen(\frac{2\pi}{3}) + sen(\frac{\pi}{3})cos(\frac{2\pi}{3})$

$Z_1Z_2 = cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})$

$Z_1Z_2 = cos(\pi) + isen(\pi)$.

Na forma retangular: $Z_1Z_2 = -1$.

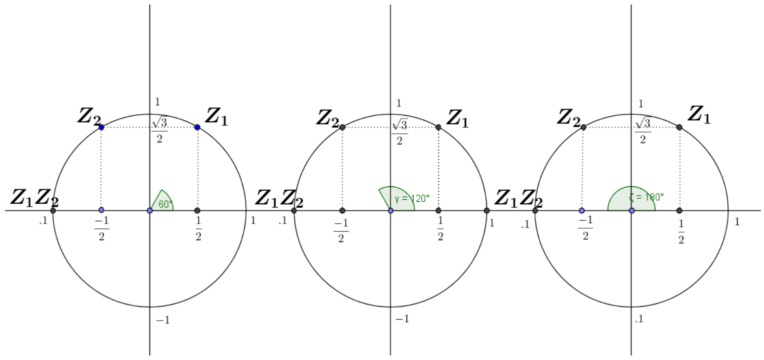


Figura 9.6.27:

64) Resposta:

a) O módulo do produto de dois números complexos é o módulo do produto de seus módulos e o argumento do produto é a soma de seus argumentos.

b) Multiplicar dois complexos unitários Z_1 e Z_2 significa, geometricamente dá a um deles uma rotação positiva de ângulo igual ao ângulo do outro.

65) Resolução:

a) $Z_1 = -1 + i\sqrt{3}$.

Z_1 está situado no 2º quadrante.

Temos: $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$,

$sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos\theta = \frac{-1}{2}$ portanto $tg\theta$= -$\sqrt{3}$ podemos concluir que θ= $\frac{2\pi}{3}$.

Assim: $Z_1 = 2[cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})]$.

b) $6\sqrt{3} + 6i$.

Z_2 está situado no 1º quadrante.

Temos: $r = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2} = 12$.

$sen\theta = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ e $cos\theta = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$portanto $tg\theta$= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ podemos concluir que θ= $\frac{\pi}{6}$.

Assim:$Z_2 = 12[cos(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{6})]$.

66) Resolução:

$Z_1Z_2 = 2[cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})].12[cos(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{6})]$

$Z_1Z_2 = 24[cos(\frac{2\pi}{3})cos(\frac{\pi}{6}) + icos(\frac{2\pi}{3})sen(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{2\pi}{3})cos(\frac{\pi}{6}) + i^2sen(\frac{2\pi}{3})sen(\frac{\pi}{6})]$

$Z_1Z_2 = 24[cos(\frac{2\pi}{3})cos(\frac{\pi}{6}) - sen(\frac{2\pi}{3})sen(\frac{\pi}{6}) + i[cos(\frac{2\pi}{3})sen(\frac{\pi}{6}) + sen(\frac{2\pi}{3})cos(\frac{\pi}{6})]$

$Z_1Z_2 == 24[cos(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) + isen(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6})]$

$Z_1Z_2 == 24[cos(\frac{5\pi}{6}) + isen(\frac{5\pi}{6})]$.

Representando na forma retangular.

$Z_1Z_2 = -12\sqrt{3} + 12i$.

O módulo de Z_1Z_2=$|Z_1|$. $|Z_2|$ e o argumento de Z_1Z_2 é igual a soma do argumento de Z_1 com o argumento de Z_2.

67) Resolução:

Fazendo $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, temos:

$z_1z_2 = [r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)][r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)]$

$z_1z_2 = r_1r_2[(cos\theta_1 + isen\theta_1)(cos\theta_2 + isen\theta_2)]$

$z_1z_2 = r_1r_2[(cos\theta_1cos\theta_2 + cos\theta_1isen\theta_2 + isen\theta_1cos\theta_2 + i^2sen\theta_1sen\theta_2)]$

$z_1z_2 = r_1r_2[(cos\theta_1cos\theta_2 - sen\theta_1sen\theta_2 + i(cos\theta_1sen\theta_2 + sen\theta_1cos\theta_2)]$

$z_1z_2 = r_1r_2[(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$.

68) Resolução:

a) $6[cos(90°) + isen(90°)] = 6i$.

b) $20[cos(360° + isen(360°)] = 20$.

69) Resolução:

$Z^2 = r^2[cos(2\theta) + isen(2\theta)]$.

$Z^3 = Z^2.Z = r^3[cos(3\theta) + isen(3\theta)]$.

70) Resolução:

Temos: $cos(\theta) = \frac{1}{2}$ e $sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $tg(\theta) = \sqrt{3}$ portanto $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$r = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

$z^3 = 1^3([cos(180^{\underline{o}})+isen(180°)] = 1$.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs 62 a 70.

Antecedendo estas SPOs há um pequeno texto no guia do aluno que relaciona um número complexo representado na forma retangular com a sua representação trigonométrica. As SPOs 62 e 65 utilizam esta relação. As demais SPOs dão ênfase à multiplicação de números complexos e o educando é incentivado encontrar esses produtos usando a representação trigonométrica dos números complexos, primeiro realizando as operações e em seguida (SPO 67) demonstrando um resultado geral que proporciona facilidade na obtenção desses produtos. As SPOs seguintes utilizam este resultado na multiplicação e potenciação de números complexos.

Também é trabalhado a interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos, principalmente os números complexos chamados unitários.

71) Este exercício é a construção do aplicativo da função Euler cujas instruções encontra-se no guia do aluno.

72) Resolução:

Arcos(graus)	Arcos (em radianos)
25°	0,43
32°	0,56
65°	1,13
123º	2,15
240º	2,19
312º	5,45

73) Resolução:

a) $1rad = 57,3°$.

b) $2rad = 114,59°$.

c) $0,5rad = 28,65°$.

d) $3,5rad = 200,54º$.

74) Resolução:

a) $1rad = 57,3°$.

$\frac{3}{10}$ de 60 = 18.

Portanto $1rad = 57,3° = 57°18'$.

d) $3,5rad = 200,54º$.

$\frac{54}{100}$ de 60 = 32,4'.

$\frac{4}{10}$ de 60 = 24.

Portanto $3,5rad = 200°32'24''$.

75) Resolução:

$E(x) = cos(x) + isen(x)$.

Temos: $cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)esen(x + y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y)$.

Assim a equação $E(x) = cos(x + y) + isen(x + y)$ assume a seguinte forma:

$E(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y) + i[sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x)]$.

Desenvolvendo temos:

$E(x) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y) + isen(x)cos(y) + icos(x)sen(y)$.

Substituindo -1 por i^2 a equação toma a seguinte forma:

$E(x + y) = cos(x)cos(y) + i^2sen(x)sen(y) + isen(x)cos(y) + icos(x)sen(y)$.

Fatorando por agrupamento temos:

$E(x + y) = cos(x)cos(y) + icos(x)sen(y) + isen(x)cos(y) + i^2sen(x)cos(y)$.

$E(x + y) = cos(x)[cos(y) + isen(y)] + isen(x)[cos(y) + icos(y)]$.

$E(x + y) = [cos(x) + isen(x)][cos(y) + isen(y)]$.

Conclusão:

$E(x + y) = E(x).E(y)$.

76) Resolução:

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
...	...
10	2,59374
11	2,60419
12	2,61304
...	...
360	2,71452
...	
1000	2,71692

$(1+\frac{1}{n})^n$para $n = 10^5 = 2,71826.$

77) Resolução:

a) $e^{2\pi i} = cos(2\pi) + isen(2\pi)$,

$e^{2\pi i} = 1.$

b) $e^{\frac{\pi i}{4}} = cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4})$,

$e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$

c) $e^{\frac{\pi i}{2}} = cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2})$,

$e^{\frac{\pi i}{2}} = i.$

d) $e^{i\pi} = cos(\pi) + isen(\pi)$,

$e^{i\pi} = -1.$

78) Resolução:

a) $(1 + i\sqrt{3})^4 =$

$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2.$

$cos(\theta) = \frac{1}{2}$, $sen(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, portanto θ= $\frac{\pi}{3}$.

$(1 + i\sqrt{3}) = cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3}).$

$(1 + i\sqrt{3})^4 = 2^4[cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3})]$,

$(1 + i\sqrt{3})^4 = 16(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$,

$(1 + i\sqrt{3})^4 = 16(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$,

$(1 + i\sqrt{3})^4 = -8 - 8\sqrt{3}i.$

b) $(\sqrt{3}$-$i)^5$=

$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2.$

$cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,$sen(\theta) = \frac{-1}{2}$, portanto θ= $\frac{11\pi}{6}$.

$(\sqrt{3} - i) = cos(\frac{11\pi}{6}) + isen(\frac{11\pi}{6}).$

$(\sqrt{3} - i)^5 = 2^5[cos(\frac{55\pi}{6}) + isen(\frac{55\pi}{6})].$

como $\frac{55\pi}{6}$=$\frac{48\pi}{6}$ + $\frac{7\pi}{6}$ temos que $\frac{55\pi}{6}$ é côngruo com $\frac{7\pi}{6}$.

$(\sqrt{3}-i)^5 = 32(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$,
$(\sqrt{3}-i)^5 = -16\sqrt{3} - 16i$.
79) Resolução:
a) Raízes quadradas de $2 - 2i\sqrt{3}$.
Escrevendo $2 - 2i\sqrt{3}$ na forma trigonométrica:
$r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$.
$cos(\theta) = \frac{1}{2}$ e $sen(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ portanto $\theta = \frac{5\pi}{3}$.
$2 - 2i\sqrt{3} = 4[cos(\frac{5\pi}{3}) + isen(\frac{5\pi}{3})]$,
$2 - 2i\sqrt{3} = 4[cos(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi) + isen(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi)]$,
$(2 - 2i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}}[cos(\frac{5\pi}{6} + k\pi) + isen(\frac{5\pi}{6} + k\pi)]$,
$(2 - 2i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = 2[cos(\frac{5\pi}{6} + k\pi) + isen(\frac{5\pi}{6} + k\pi)]$.
Fazendo$k = 0$ e 1 as raízes são:
$R_1 = 2[cos(\frac{5\pi}{6}) + isen(\frac{5\pi}{6})]$,
$R_1 = 2(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$,
$R_1 = -\sqrt{3} + i$.
$R_2 = 2[cos(\frac{11\pi}{6}) + isen(\frac{11\pi}{6})]$,
$R_2 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$,
$R_2 = \sqrt{3} - i$.
b) Raízes quartas de $-8 - 8i\sqrt{3}$.
$r = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16$
$cos(\theta) = \frac{-1}{2}$ e $sen(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ portanto $\theta = \frac{4\pi}{3}$.
$-8 - 8i\sqrt{3} = 16[cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3})]$,
$-8 - 8i\sqrt{3} = 16[cos(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi) + isen(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi)]$,
$(-8 - 8i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}}[cos(\frac{\pi}{3} + \frac{k}{2}\pi) + isen(\frac{\pi}{3} + \frac{k}{2}\pi)]$,
$(-8 - 8i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}} = 2[cos(\frac{\pi}{3} + \frac{k}{2}\pi) + isen(\frac{\pi}{3} + \frac{k}{2}\pi)]$.
Fazendo $k = 0$, 1, 2 e 3 as raízes são:
$R_1 = 2[cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3})]$,
$R_1 = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$,
$R_1 = -1 + \sqrt{3}i$.
$R_2 = 2[cos(\frac{5\pi}{6}) + isen(\frac{5\pi}{6})]$,
$R_2 = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$,
$R_2 = -\sqrt{3} + i$.
$R_3 = 2[cos(\frac{\pi}{3} + \pi) + isen(\frac{\pi}{3} + \pi)]$,
$R_3 = 2[cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3})]$,
$R_3 = 2(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$,
$R_3 = -1 - \sqrt{3}i$.
$R_4 = 2[cos(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2})]$,
$R_4 = 2[cos(\frac{11\pi}{6}) + isen(\frac{11\pi}{6})]$,
$R_4 = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}$-$\frac{1}{2}i)$,

$R_4 = \sqrt{3}$-i .

c) Raízes cúbicas de $-4\sqrt{2}+4i\sqrt{2}$,

$r = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2} = 8$,

$cos(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ e $sen(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ portanto $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

$-4\sqrt{2}+4i\sqrt{2} = 8[cos(\frac{3\pi}{4}) + isen(\frac{3\pi}{4})]$,

$-4\sqrt{2}+4i\sqrt{2} = 8[cos(\frac{3\pi}{4}+2k\pi) + isen(\frac{3\pi}{4}+2k\pi)]$,

$(-4\sqrt{2}+4i\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}[cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})]$,

$(-4\sqrt{2}+4i\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}}[cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})]$.

Fazendo $k = 0$, 1 e 2 as raízes são:

$R_1 = 2[cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4})]$,

$R_1 = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$,

$R_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

$R_2 = 2[cos(\frac{11\pi}{12}) + isen(\frac{11\pi}{12})]$.

$R_3 = 2[cos(\frac{19\pi}{12}) + isen(\frac{19\pi}{12})]$.

d) Raízes cúbicas de 1.

$r = 1$.

$cos(\theta) = 1$ e $sen(\theta) = 0$, portanto $\theta = 0$.

$1 = 1[cos(0) + isen(0)]$,

$1 = 1[cos(0+2k\pi) + isen(0+2k\pi)]$,

$1^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}}[cos(0+\frac{2k\pi}{3}) + isen(0+\frac{2k\pi}{3}]$.

Fazendo $k = 0$, 1 e 2 temos:

$R_1 = 1^{\frac{1}{3}} = 1$.

$R_2 = 1^{\frac{1}{3}}[cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}]$,

$R_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$R_3 = 1^{\frac{1}{3}}[cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3}]$,

$R_3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

80) Resolução:

a) $(R_2)^2 = cos(2.\frac{2\pi}{3}) + isen(2.\frac{2\pi}{3})$.

$(R_2)^2 = cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3})$.

$(R_2)^2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

b) $(R_3)^2 = cos(2.\frac{4\pi}{3}) + isen(2.\frac{4\pi}{3})$

$(R_3)^2 = cos(\frac{8\pi}{3}) + isen(\frac{8\pi}{3})$

como $\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$ temos que $\frac{8\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$ são côngruos.

$(R_3)^2 = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{3\pi}{3})$.

$R_3 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

c)$R_2R_3 = [cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})]$,

$R_2R_3 = [cos(2\pi) + isen(2\pi)]$,

$R_2R_3 = 1$.

COMENTÁRIOS SOBRE AS SPOs as SPOs 71 a 80.

A SPO 71 orienta o aluno na construção do aplicativo da função Euler que é utilizado nas SPOs 72 e 73, que além de relacionar graus com radianos, proporcionam uma melhor compreensão do conceito de radiano, como foi trabalhado nas atividades que utilizaram o aplicativo desenrolando o seno.

Porém o principal objetivo destas atividades é demonstrar que a função E se comporta como uma exponencial $E(x+y) = E(x).E(y)$. Este resultado é demonstrado na SPO 75. A SPO 76 tem o propósito de oferecer ao aluno o significado do número **e** como limite da expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ quando **n** torna-se suficientemente grande. A SPO 77 utiliza a fórmula de Euler admitindo que ela é válida. Nas atividades complementares (21 a 25) o aluno trabalhará novamente esse assunto e usará uma visão geométrica de $e^{i\pi} = -1$

Em seguida o guia do aluno apresenta a demonstração do teorema de Moivre, único que não é demonstrado pelo próprio aluno, e as demais atividades utilizam este teorema no cálculo de potências e raízes de números complexos.

9.7 ATIVIDADES COMPLEMENTARES

1- Resolução:

$124°3'0" = 124° + (\frac{3}{60})° == 124° + 0,05° = 124,05°$.

Letra B.

2 - Resolução:

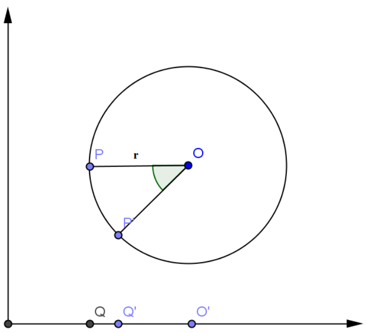


Figura 9.7.1:

Pela figura temos: Circunferência de centro O, ponto P' de forma que a distância $\overline{PP'}$= d < r, ângulo $P\widehat{O}P' = \frac{d}{r}$.

Consideremos Q' a projeção de P' sobre o eixo OX, e da mesma forma O' a projeção de O.

Temos que as distâncias $\overline{QO'}$ e $\overline{Q'Q}$ medem respectivamente r e $rcos(\frac{d}{r})$.

$QQ' = r - rcos(\frac{d}{r}) = r(1 - cos(\frac{d}{r})$.

Resposta: Letra B.

3- Respostas:

a) $p = 0,75$.

b) 80 batimentos por minuto.

$60 : 0,75 = 80.$

c) $\frac{2\pi}{k} = 0,75 \Longrightarrow k \simeq 8,38.$

d) $D = \mathbb{R}_+$ e $Im = [80, 120].$

e) $p(t) = 100 - 20cos(8,38t).$

4- Respostas:

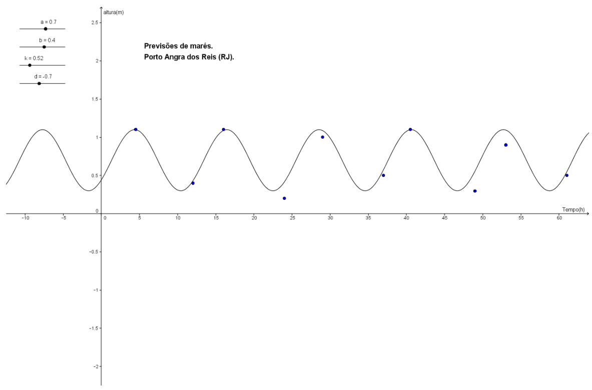


Figura 9.7.2:

a) $D = \mathbb{R}_+$, $p = \frac{2\pi}{12}$ e $Im = [0,4; 1,1].$

b) $f(t) = 0,7 + 0,4sen(0,52t - 0,7).$

5 - Resposta: Letra D.

Resolução:

$F(t) = msen(wt).$

$f(t + a) = Msen(wt + wa).$

$P(t) = L - Msen(wt + wa).$

P((t) é uma senoide de período $p = \frac{2\pi}{w}$, imagem $[-1 + L, 1 + L]$, Domínio $D = \mathbb{R}_+$. Modificações em L e M ocasionam translações verticais e modificações em w e a proporcionam translações horizontais. O gráfico da letra D é o único que atende a estas características.

6 - Resolução:

$P(x) = 500 + 0,5x + 20cos(\frac{\pi x}{6}),$

$P(4) = 500 + 0,5.4 + 20cos(\frac{4\pi}{6}),$

$P(4) = 500 + 2 + 20.(-0,5),$

$p(4) = 492.$

Resposta: 492 bilhões de dólares.

7 - Resolução:

$P(0) = 500 + 0 + 20cos(0),$

$P(0) = 500 + 20.1,$

$P(0) = 520.$

$P(12) = 500 + 6 + 20.cos(2\pi),$

$P(12) = 506 + 20.1,$

$P(12) = 526.$

$P(12) - P(0) = 526 - 520 = 6.$

Resposta: 6 bilhões de dólares.

8 - Resolução:

Considerando $V(t) = \frac{3.(1-cos(0,4\pi t))}{2\pi}$ temos:

A imagem da função $y = cos(0,4\pi t)$ é $Im = [-1,1]$, portanto $V(t)$ assume seus valores máximos e mínimos quando $cos(4\pi t) = 1$ ou $cos(4\pi t) = -1$. Quando $cos(4\pi t) = 1$, $V(t) = 0$ e assume seu valor mínimo, $cos(4\pi t) = -1$, $V(t) = \frac{6}{2\pi} < 1$ e assume seu valor máximo.

O período de $V(t)$ é $P = \frac{2\pi}{0,4\pi} = 5.$

A imagem da função $y = 0,6sen(0,4\pi t)$ é $Im = [-1,1]$, portanto $v(t)$ assume seus valores máximos e mínimos quando $sen(4\pi t) = 1$ ou $sen(4\pi t) = -1$. Quando $sen(4\pi t) = 1$, $v(t) = 0,6$ e assume seu valor máximo. $sen(4\pi t) = -1$, $v(t) = 0,6$ e assume seu valor mínimo.

O período de $v(t)$ é $P = \frac{2\pi}{0,4\pi} = 5.$

Resposta: A primeira afirmação é verdadeira e as demais são falsas.

9 - Resolução.

Uma análise do gráfico permite concluir que a segunda afirmativa é falsa, as demais são verdadeiras.

10- Resolução:

$P = \frac{2\pi}{b} \Longrightarrow P = \frac{2\pi}{12,4}.$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2,5 temos: $P = \frac{5\pi}{31}.$

Resposta: Letra (A).

11 - Para $\frac{1}{(3-cos(x))}$ seja mínimo, a expressão $(3 - cos(x))$ deve ser máxima, isso ocorre quando $cos(x) = -1$. Temos: $\frac{1}{3-(-1)} = \frac{1}{4}.$

Resposta: Letra (B)

12 - Resolução:

$P = \pi$ e $P = \frac{2\pi}{|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{2\pi}{k} = \pi \Longrightarrow k = 2$ ou $k = -2$.

Considerando que $sen(0) = sen(-\pi) = sen(2\pi) = sen(-2\pi) = 0$, concluímos que esta é uma função seno. Como a imagem é $Im = [-1,1]$ temos que $y = sen(-2x)$.

Resposta: Letra D

13- Resolução:

O gráfico de $y = sen(x - h)$ tem uma translação horizontal de πrad para a esquerda, consequentemente $h = \pi$.

$cos(\frac{3\pi}{2}) = \frac{-1}{2}.$

Resposta: Letra C.

14 - Resolução: Temos uma função de domínio Real, período igual a 2π e $Im = [-2,2]$. Como $f(\frac{\pi}{2}) = 2sen(\frac{\pi}{2})$ temos que $f(x) = 2sen(x)$.

Resposta: Letra A.

15 - Resolução:

Valor máximo: $V_m = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$

Resposta: Letra (C).

16 - Resolução:

$P = \frac{2\pi}{k} \Longrightarrow k = \frac{2}{7}$.

$Im = [-7, 7]$, o que significa que a função $y = cos(\frac{2}{7}x)$ foi multiplicada por 7. Logo $a = 7$ e $a.k = 2$

17 - Resolução:

θ é um arco do 1º quadrante.

$r = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} \Longrightarrow r = 8$.

$sen(\theta) = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$cos(\theta) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

$\theta = \frac{\pi}{3} = 60º$.

$Z = 8(cos(60º) + isen(60º)$.

Resposta: Letra (C)

18 - Resolução:

$Z = Z_1.Z_2 \Longrightarrow Z = 4.\frac{1}{2}[cos(60º + 90º) + isen(60º + 90º)]$,

$Z = 2.(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2})$,

$Z = -\sqrt{3} + i$.

Resposta: Letra (D)

19- Resolução:

$r = \sqrt{(\sqrt{\frac{3}{2}})^2 + (\frac{1}{2})^2} \Longrightarrow r = 1$.

$cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$e $sen(\theta) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$.

$Z^{10} = 1^{10}[cos(\frac{10\pi}{6}) + isen(\frac{10\pi}{6})]$,

$Z^{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

Resposta: Letra (E).

20 - Resolução:

$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} \Longrightarrow r = 16$.

$cos\theta = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2}$e $sen(\theta) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ logo $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$Z = -8 + 8\sqrt{3} = 16[cos(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi) + isen(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)]$.

$Z^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}}[cos(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})]$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$Z^{\frac{1}{4}} = 2[cos(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})]$, $k = 0, 1, 2, 3$.

$R_1 = 2.[cos(\frac{\pi}{6}) + isen(\frac{\pi}{6})] = \sqrt{3}$+i.

$R_2 = 2.[cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})] = -1 + i\sqrt{3}$.

$R_3 = 2.[cos(\frac{7\pi}{6}) + isen(\frac{7\pi}{6})] = \sqrt{3} - i$.

$R_4 = 2[cos(\frac{5\pi}{3}) + isen(\frac{5\pi}{3})] = 1 - i\sqrt{3}$.

21- Resolução:

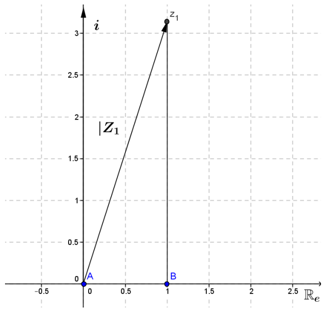


Figura 9.7.3:

$Z_1 = 1 + \pi i.$
$|Z_1| = r = \sqrt{1^2 + \pi^2}.$
$cos(\theta) = \frac{1}{r} \cong 0,303$e $sen(\theta) = \frac{\pi}{r} \cong 0,951.$
$\theta \cong 72°.$
$Z_1 = cos(\theta) + isen(\theta).$
22 - Resolução:

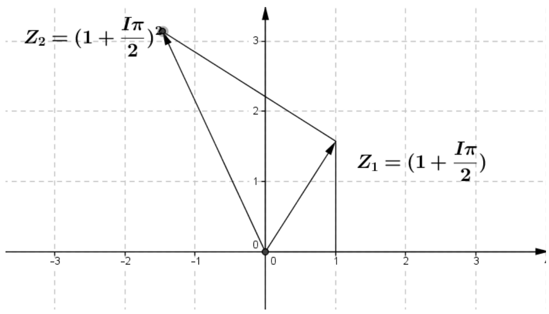


Figura 9.7.4:

23 - Resolução:

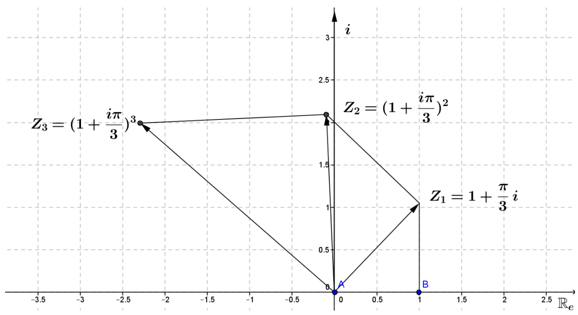
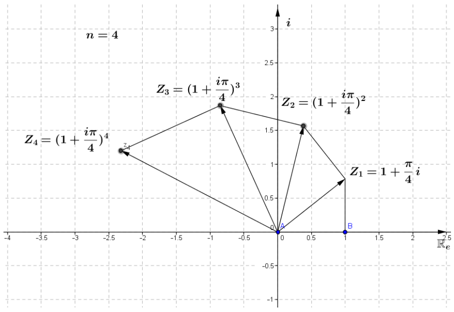
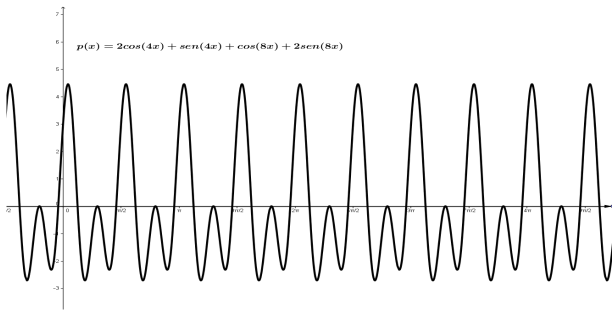


Figura 9.7.5:

24 - Resolução:
a)

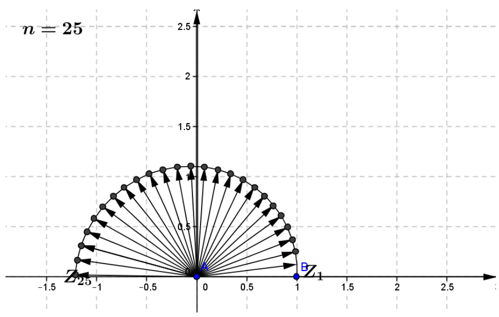
Figura 9.7.6: 

b)

Figura 9.7.7: 

25 - Uma Resposta:

Para um valor muito grande de n, termos $|Z_n|$ muito próximo de 1, e os n vetores do plano irão "percorrer um semicírculo" conforme ilustrado nas figuras dos exercícios anteriores e na próxima figura. Portanto para valores muito grande de n a representação dos complexos Z_1, Z_2 , Z_3, ..., Z_n no plano Argand-Gaus se aproxima do semicírculo de centro (0,0) e raio 1. No aplicativo é notável o aparecimento do semicírculo o que nos "mostra" geometricamente que $e^{i\pi} = -1$ e uma das razões do número πestar presente na fórmula de Euler.

Figura 9.7.8: 

Capítulo 10

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que a maioria dos professores da educação básica têm a preocupação de proporcionar a nossos alunos uma educação de qualidade, sobretudo aos alunos da escola pública que comprovadamente tem recebido um ensino aquém das expectativas de nossa sociedade. O nosso educando, ao ingressar-se no Ensino Médio, apresenta uma série de lacunas em sua formação que devem ser superadas

Historicamente, o Ensino de Matemática é visto como desafiador e como privilégio de alguns poucos iluminados com o dom de aprender este conteúdo. Foi pensando em vencer estes desafios e superar estes mitos que elaboramos esse trabalho.

Reconhecemos as limitações do mesmo, mas também sabemos do mérito que possui na perspectiva do melhoria do ensino, sobretudo o ensino de trigonometria.

Desta forma escolhemos uma linha de trabalho intermediária entre o ensino de trigonometria e números complexos a nível de ensino médio e um estudo mais avançado deste tema que englobe a interpolação trigonométrica e as séries de Fourier. Acreditamos que ao estudar a Unidade Temática que foi proposta no Capítulo 10 o aluno obterá um preparo melhor para este estudo mais avançado e também melhores condições de realizar com sucesso avaliações de concursos, de vestibulares e do ENEM.

Por isso acreditamos ser importante a inclusão nesse estudo das aplicações dos números complexos à trigonometria, função de Euler e a constatação de que essa quando aplicada aos números complexos funciona como uma função exponencial.

Com este propósito os capítulos de dois a nove constroem progressivamente a base teórica das atividades do Guia do Aluno, que foi elaborado na perspectiva do educando ser protagonista de sua aprendizagem.

Assim, evitou-se nesse guia a exposição de definições, demonstrações acabadas e uma lista de exercícios repetitivos. Pelo contrário, incentivou-se a observação do processo de resolução dos exercícios, seus resultados, e a formulação conceitual bem como as demonstrações desses conceitos feitas pelo próprio aluno, obviamente com o auxílio do material.

Temos a expectativa de que o educando, ao interagir com esse material possa ter uma aprendizagem significativa, reconheça na matemática uma ferramenta útil para o desenvolvimento da humanidade e também, os que ainda não tenham entusiasmo no estudo deste conteúdo perceba que esse pode ser prazeroso.

Procuramos usar os recursos computacionais como instrumento útil para a aprendizagem. Reconhecemos que esses recursos nos dias atuais são imprescindíveis para a melhoria do ensino e estímulo a aprendizagem, quando agiliza o trabalho em relação as atividades feitas com lápis e papel. A manipulação dos parâmetros permite uma formulação mais rápida dos conceitos que pretendemos atingir.

Reconhecemos que o dinamismo dos programas de geometria dinâmica facilitam a compreensão dos conceitos estudados, o que permite um melhor aproveitamento quando se busca uma explicação matemática (prova) para esses conceitos. No entanto sabemos da limitação do uso desses programas, assim como é limitado uma aula expositiva ou mesmo um livro didático, por isso a defesa da ideia de que uma ferramenta complementa a outra.

Atendendo essa preocupação a Unidade Temática elaborada procura oferecer ao alunos essas possibilidades, uso do software de geometria dinâmica, atividades desenvolvidas com lápis e papel e atividades que buscam a demonstração matemática dos resultados encontrados.

No entanto, não menosprezamos e nem duvidamos da importância e da eficácia das formas tradicionais de apresentação desses conteúdos em nossas escolas e em nossos livros didáticos. Sabemos que o material que elaboramos é um subsídio complementar a esse estudo, não o substitui, mas é mais uma ferramenta a nossa disposição na gratificante tarefa que temos de ensinar matemática aos jovens de nossas escolas.

Ousamos à medida que propomos no Ensino Médio conteúdos que não são ensinados e avançamos quando elaboramos uma Unidade Temática construída na perspectiva de que o educando construa o próprio conhecimento.

Obviamente o papel do professor nessa proposta torna-se mais desafiador e estimulante, à medida que este deve estar atento para que seu aluno faça a formulação conceitual precisa, matematicamente falando, e quando isso não ocorrer estar apto a lhe assessorar para a obtenção correta desses conceitos.

Referências Bibliográficas

[1] ALBÉ M. Q.; FILIPPSEN F.M.J. **Função trigonométrica: Um enfoque aplicado ao ensino técnico**. Novo Hamburgo RS. Disponível em: http://www.liberato.com.br/upload/arquivos/0131010717393616.pdf . Acesso em: 07 dez. 12.

[2] **BRASIL,** Secretaria de Educação Média e Tecnologia. (2000). **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. (Ensino Médio). Brasília: MEC/SEMT**.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 17 dez. 12.

[3] ALVES S. **A Matemática do GPS**. Revista do Professor de Matemática Nº 59 - SBM. Rio de Janeiro - 2006.

[4] AYRES, F. **Trigonometria Plana e Esférica**. São Paulo - Rio de Janeiro: Editora McGRAW-HILL do Brasil, 1973.

[5] CARARO A.C.; FERREIRA L. D. D. **Interpolação de efemérides GPS**. Curitiba: Artigos Curitiba, 2011. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1982-21702011000200004&script=sci_arttext . Acesso: 17 set. 12.

[6] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C. WAGNER, E.; **Trigonometria e Números Complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[7] DANTE L. R. **Matemática Dante.** Volume único. São Paulo: Ática, 2008.

[8] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[9] GIOVANNI J. R.; BONJORNO J. R. **Matemática Completa**. Volumes 2 e 3. São Paulo: FTD, 2005.

[10] GIRALDO V.; CAETANO P.; MATTOS F. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**.Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] GONZALES F.J.P. **Cálculo vectorial series de fourier variable compleja**. Granada: Universidade de Granada, 2007.

[12] GRANJA C. E. S. C.; MELLO J. L. P. **Olhando novamente a identidade** $e^{i\pi}+1=0$. Revista do Professor de Matemática Nº 78 -SBM. Rio de Janeiro - 2012.

[13] IEZZI G. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Volume 3. São Paulo: Atual, 1985.

[14] IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática 9º ano**. São Paulo: Moderna, 2009.

[15] KENNEDY, E. S.**Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula:Trigonometria**. São Paulo: Atual, 2001.

[16] LIMA E. L et al. **A Matemática do Ensino Médio volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[17] LIMA E. L. **O que é o número** π. Revista do Professor de Matemática Nº 6 - SBM. Rio de Janeiro - 1985.

[18] MACHADO P. A. M.; Lourêdo A. T. **Valores irracionais das funções trigonométricas**. Revista do Professor de Matemática Nº 46 - SBM. Rio de Janeiro - 2001.

[19] MELLO J. L. P. **Exemplos práticos da aplicação das Funções Trigonométricas**. São Paulo: Folha de São Paulo, 2007. Disponível em: http://www.profgarcia.xpg.com.br/Aplicacoes_praticas_da_Trigonometria.htm . Acesso: 18 out. 12.

[20] MIRANDA M. **Associando um polinômio a expressões algébricas e trigonométricas**. EUREKA Nº 33 -SBM. Rio de janeiro - 2011 .

[21] OLIVEIRA F.C; MOREY B. B. **História da matemática nas aulas de trigonometria**. VIII encontro nacional de educação matemática. Recife: SBEM 2004. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/RE22239839449.pdf. Acesso: 21 jan. 13.

[22] PEDROSA D. P. F. **Interpolação**.Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, disponível em: http://www.dca.ufrn.br/~diogo/FTP/dca0304/interpolacao.pdf . Acesso: 21 jan 13.

[23] QUINTANEIRO W. **Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.Disponível em: < http//www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie98/117.html>. Acesso em: 25 jan 13.

[24] RIBEIRO J. **Matemática, Ciência, Linguagem e Tecnologia**. São Paulo: Editora scipione, 2011.

[25] RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1971.

[26] SILVA D. N. **Física Paraná**. São Paulo: Editora Ática, 2000.

[27] STEWART J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learnig, 2009.

[28] ZYGMUND, A. **Trigonometric Series**. 3rd Edition, Cambridge Univ. Press, 2003.