



Universidade Estadual da Paraíba  
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional



LAIRTON GERALDO FORMIGA ALVES

**UMA ABORDAGEM SOBRE O TRIÂNGULO EQUILÁTERO  
PARA O ENSINO BÁSICO.**

CAMPINA GRANDE-PARAÍBA  
Setembro de 2019

LAIRTON GERALDO FORMIGA ALVES

**UMA ABORDAGEM SOBRE O TRIÂNGULO EQUILÁTERO  
PARA O ENSINO BÁSICO.**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE-PARAÍBA  
Setembro de 2019

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

A474a Alves, Lairton Geraldo Formiga.  
Uma abordagem sobre o triângulo equilátero para o ensino básico [manuscrito] / Lairton Geraldo Formiga Alves. - 2019.  
108 p. : il. colorido.  
Digitado.  
Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2019.  
"Orientação : Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Coordenação do Curso de Matemática - CCT."  
1. Educação básica. 2. Ensino de Geometria. 3. Triângulo equilátero. I. Título  
21. ed. CDD 516

LAIRTON GERALDO FORMIGA ALVES

**UMA ABORDAGEM SOBRE O TRIÂNGULO EQUILÁTERO  
PARA O ENSINO BÁSICO.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 13/09/2019

**BANCA EXAMINADORA**



Profª Dra. Luciana Roze de Freitas (orientadora)  
Universidade Estadual da Paraíba



Profª Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes (Membro interno)  
Universidade Estadual da Paraíba



Profª Dra. Claudilene Gomes da Costa (Membro externo)  
Universidade Federal da Paraíba

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado desde o primeiro momento forças e coragem para concluir mais esta etapa de meus estudos, pela proteção dada nas inúmeras viagens realizadas a Campina Grande, pois sem ele nada disso seria possível.

A minha família, pela compreensão de minha ausência em muitas sextas feiras durante esses dois anos, ao apoio e incentivo em todos os momentos.

Aos meus colegas de curso aos quais tenho o maior apreço e admiração.

A minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dra. Luciana Roze Freitas pela compreensão, orientação e dedicação na conclusão desse trabalho e a todos os professores do PROFMAT pelos ensinamentos.

A CAPES, que disponibilizou auxílio financeiro, tão importante durante esses dois anos.

A Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), por ter me dado essa oportunidade de cursar o PROFMAT.

*“(...)se imaginássemos um caso em que fosse acordado que um triângulo de dimensões dadas deveria existir, mas sem nada nos dados de onde o tipo de triângulo poderia ser derivado, teria que ser dito que Deus produziria um triângulo equilátero (...)”*

Gottfried Wilhelm Leibniz

Este trabalho consiste numa pesquisa feita a partir de uma proposta de ensino, abordando dentro do ensino da geometria o triângulo equilátero, pois este fornece um contexto rico que pode ser bastante explorado. Sabemos que o estudo de geometria é de fundamental importância ao longo da experiência educacional do aluno no que diz respeito aos conhecimentos necessários para várias áreas. Entendemos também que o estudo da Geometria, de maneira mais investigativa, já na Educação Básica proporciona um conhecimento mais coerente e efetivo para o aluno, no sentido de aplicação, contextualização, utilidade e principalmente como agente motivador de forma como enxerga a matemática. O objetivo dessa pesquisa é analisar aspectos avançados do triângulo equilátero, propondo a inserção de teoremas e propriedades através de discussões, utilizando as demonstrações como agentes motivadores da aprendizagem e dando outra perspectiva, que se distancia da forma engessada que esse tópico é visto, não esquecendo o papel do triângulo equilátero na história, e o quanto esse polígono está presente muito significativamente nos principais eventos da história universal. O triângulo equilátero pode ser estudado usando apenas os rudimentos da matemática, e há certa tentação de descartá-lo como matematicamente trivial. No entanto, existem aspectos do triângulo equilátero que são matematicamente profundos e incrivelmente belos. Vamos explorar nesse trabalho algumas das muitas facetas desta brilhante jóia que é o triângulo equilátero.

**Palavras-chave:** Educação. Ensino. Geometria. Triângulo Equilátero.

## ABSTRACT

This work consists in a research made from a teaching proposal addressing within the teaching of geometry the equilateral triangle, because It provides a rich context that can be widely explored. We know that geometry studies have paramount importance throughout the student's educational experience on the regard to the knowledge needed for various areas. We also understand that the studies of geometry, in a more investigative way, already in basic education, provides a more coherent and effective knowledge for the student, in the sense of explication, contextualization, usefulness and mainly as a motivator agent of way to see the math. The objective of this research is to analyze the advanced aspects of the equilateral triangle, proposing the insertion of theorems properties through discussions using the demonstrations as motivators of learning and giving another perspective, which distances itself from the shape that this topic is seen no forgetting the role of the equilateral triangle in the history and how much this polygon is present very significantly in the main events of universal history. The equilateral triangle can be studied using only the rudiments of mathematics and there is a certain temptation to discard it as mathematically trivial, however, there are aspects of the equilateral triangle that are profound and incredible beautiful. Let's explore in this work some of the many facets of this.

**Keywords:** Education. Teaching. Geometry. Equilateral Triangle.



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Problema matemático babilônico em um tablete de argila. . . . .	21
2.2	Pirâmide de Dahshur . . . . .	22
2.3	Pirâmides de Gizé. . . . .	22
2.4	Papiro Rhind, Problemas 49 – 55. . . . .	23
2.5	Papiro Rhind, Problemas 57 – 60. . . . .	23
2.6	Papiro Rhind, triângulo equilátero. . . . .	23
2.7	Tetraktys pitagórica. . . . .	25
2.8	Papyrus Oxyrhynchus. . . . .	26
2.9	Método de construção de um triângulo equilátero. . . . .	27
2.10	Cena mesolítica em Lepenski Vir nos portões de ferro, Danúbio. . . . .	28
2.11	Base das casas por Dragoslav Srejavic. . . . .	28
2.12	The Gherkin, arranha-céu comercial em Londres. . . . .	29
2.13	“Bola de Golfe” no EPCOT no Walt Disney World. . . . .	29
2.14	A Última Ceia, Da Vinci. . . . .	30
2.15	Ceia em Emaús, Pontormo. . . . .	30
2.16	Estrela de Davi. . . . .	30
2.17	Triângulo equilátero, simbolismo para os Hindus. . . . .	31
2.18	O Olho de Hórus. . . . .	32
2.19	Poliedros de Platão. . . . .	32
3.1	Entes primitivos da geometria. . . . .	34
3.2	Semirretas de origem em $P$ . . . . .	35
3.3	$V$ vértice do ângulos. . . . .	36
3.4	Ângulo convexo . . . . .	36
3.5	Ângulo não-convexo. . . . .	36
3.6	Ângulo $A\widehat{V}B$ . . . . .	37

3.7	Classificação de ângulos. . . . .	37
3.8	Ângulos opostos ao vértices. . . . .	38
3.9	Intersecção dos ângulos $\widehat{BAC}$ , $\widehat{CBA}$ e $\widehat{ACB}$ . . . . .	39
3.10	Classificação quanto aos ângulos. . . . .	39
3.11	Classificação quanto aos lados. . . . .	40
3.12	Medianas . . . . .	40
3.13	Alturas . . . . .	41
3.14	Bissetrizes do triângulo. . . . .	41
3.15	Mediatrizes do triângulo. . . . .	42
3.16	Triângulos congruentes. . . . .	42
3.17	Lado-ângulo-lado. . . . .	43
3.18	Ângulo-lado-ângulo. . . . .	43
3.19	Ângulos da base congruentes. . . . .	44
3.20	Triângulo é isósceles. . . . .	44
3.21	Lado-lado-lado. . . . .	45
3.22	$\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle A'B'C'$ . . . . .	45
3.23	$\triangle CDE$ e $\triangle CAB$ são semelhantes. . . . .	46
3.24	Paralela à reta $AC$ , pelo ponto $E$ , cortando o lado $AB$ no ponto $F$ . . . . .	46
3.25	Caso de semelhança: Ângulo-ângulo. . . . .	47
3.26	Caso de semelhança: Lado-Ângulo-Lado. . . . .	48
3.27	Caso de semelhança: Lado-Lado-Lado. . . . .	48
3.28	Soma de dois ângulos quaisquer de um triângulo. . . . .	48
3.29	Ângulo externo de um triângulo. . . . .	49
3.30	Teorema do ângulo externo. . . . .	49
3.31	O maior lado opõe-se ao maior ângulo. . . . .	50
3.32	O lado é menor que a soma dos outros dois. . . . .	51
3.33	Área de um triângulo. . . . .	51
3.34	O triângulo $ABC$ é acutângulo. . . . .	52
3.35	O $\triangle ABC$ é acutângulo. . . . .	53
3.36	$\widehat{A} < 90^\circ$ . . . . .	55
3.37	$\widehat{A} > 90^\circ$ . . . . .	56
3.38	Quadrilátero inscrito. . . . .	58
3.39	Relação de Ptolomeu: Quadrilátero inscrito. . . . .	59
3.40	Desigualdade de Ptolomeu: $PDAE$ é inscritível. . . . .	60
4.1	Triângulo equilátero. . . . .	62
4.2	Triângulo equiângular. . . . .	63
4.3	Três medianas de um triângulo equilátero. . . . .	63

4.4	Subdivisão de um triângulo equilátero em relação as medianas. . . . .	64
4.5	Triângulo equilátero: Mediana é também bissetriz e altura. . . . .	65
4.6	As alturas, bissetrizes, mediatrizes e medianas tem o mesmo comprimento. . . . .	65
4.7	Ponto comum as bissetrizes, medianas e alturas. . . . .	66
4.11	Construção do triângulo equilátero dado um lado. . . . .	70
4.12	Construções de um triângulo equilátero 1º método. . . . .	71
4.13	Construções de um triângulo equilátero 2º método. . . . .	72
4.14	Justificativa da construções de um triângulo equilátero 2º método. . . . .	73
4.15	Simetria em triângulos. . . . .	73
4.16	Simetria em torno de eixos . . . . .	74
4.17	Simetrias rotacionais . . . . .	74
5.1	$P$ ponto qualquer do $\triangle ABC$ . . . . .	76
5.2	Triângulos: $\triangle APB$ , $\triangle APC$ e $\triangle BPC$ . . . . .	76
5.3	Prova do Teorema de Viviani. . . . .	77
5.4	$P$ pertencente a circunferência circunscrita a um triângulo equilátero $ABC$ . . . . .	78
5.5	Triângulo $PBD$ equilátero. . . . .	78
5.6	$ADE$ é equilátero. . . . .	79
5.7	Paralelogramo $PCED$ . . . . .	79
5.8	$PA = PB + PC$ . . . . .	80
5.9	$P$ no plano do $\triangle ABC$ . . . . .	81
5.10	Rotação de $60^\circ$ do $\triangle ABC$ em torno de $C$ . . . . .	81
5.11	$P$ pertence lado do $\triangle ABC$ . . . . .	82
5.12	Rotação de $60^\circ$ do $\triangle ABC$ em torno do vértice $C$ . . . . .	82
5.13	$P$ pertence a região exterior ao $\triangle ABC$ . . . . .	82
5.14	Rotação de $60^\circ$ do segmento $PC$ em torno do ponto $C$ . . . . .	82
5.15	$A$ , $P$ e $P'$ são colineares. . . . .	83
5.16	$S + S_1 = S_2 + S_3$ . . . . .	84
5.17	Teorema de Eutrigon. . . . .	85
5.18	Três triângulos equiláteros a partir dos lados de um triângulo qualquer. . . . .	86
5.19	Triângulo de Napoleão. . . . .	87
5.20	Perpendicular baixada de $G$ relativa ao lado $AB$ . . . . .	87
5.21	Perpendicular baixada de $E$ relativa ao lado $AC$ . . . . .	87
5.22	Triângulo $EAG$ , $\ell$ em função dos lados $a$ , $b$ e $c$ . . . . .	88
5.23	Ponto de Fermat. . . . .	90
5.24	Ponto $M$ no plano do $\triangle ABC$ . . . . .	92
5.25	Pontos onde as trissetrizes se interceptam. . . . .	94
5.26	O $\triangle XYZ$ é equilátero. . . . .	94

5.27	Ângulos internos do $\triangle XEF$ em função de $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$ .	95
5.28	Teorema do ângulo externo nos triângulos $XFC$ e $XEB$	95
5.29	$\triangle XDE$ e $\triangle XDF$ são retângulos em $D$ .	96
5.30	$\widehat{AYC}$ e $\widehat{AZB}$ em função de $\alpha$ , $\beta$ e $\gamma$ .	96
5.31	Altura do triângulo $ABC$	97
5.32	Ângulos da base dos triângulos $\triangle BXZ$ e $\triangle CYX$ .	99
A.1	Triângulo de Morley	106
A.2	Ferramenta polígono do GeoGebra	106
A.3	Ferramenta ângulo do GeoGebra.	107
A.4	Ferramenta ângulo com amplitude fixa do GeoGebra.	107
A.5	Ferramenta reta do GeoGebra.	107
A.6	Ferramenta intersecção do GeoGebra.	107
A.7	Ferramenta polígono regular do GeoGebra.	108

## LISTA DE SÍMBOLOS

A lista a seguir descreve vários símbolos que serão usados mais tarde no corpo do trabalho

$< , >$  Desigualdade: menor que e maior que.

$[ABC]$  Área de um triângulo de vértices A, B e C.

$\alpha, \beta$  e  $\gamma$  Medidas de ângulos.

$\widehat{AB}$  Arco de extremidades nos pontos A e B.

$\ell$  Medida do lado de um triângulo equilátero

$\equiv$  Congruência.

$\iff$  Se e somente se.

$\implies$  Implica; se ... então.

$\neq, =$  diferente, igual.

$\overline{AB}$  Medida do segmento de extremidades nos pontos A e B.

$\overline{AB} = c, \overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$  Medidas dos lados do triângulo de vértices A, B e C.

$\perp$  Perpendicular

$\sim$  Semelhança.

$\square$  Fim de uma demonstração.

$\triangle ABC$  Triângulo com vértices nos pontos A, B, e C.

$\hat{A}$  ângulo de vértice no ponto A.

$\widehat{ABC}$  Ângulo de vértice em B.

$a_3$  Apótema de um triângulo equilátero.

$AB$  Segmento com extremidades nos pontos A e B.

$C(ABC)$  Circunferência que passa pelos pontos A, B e C.

$h$  Medida da altura de um triângulo equilátero

$p$  O semi-perímetro do triângulo (metade do perímetro)

$R$  e  $r$  Raio da circunferência circunscrita e inscrita respectivamente a um triângulo equilátero.

$S$  Área de um triângulo qualquer.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**a.C.** Anos antes de Cristo.

**CAPES** Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

**https** Protocolo de Transferência de Hipertexto Seguro.

**LDB** Lei de Diretrizes e Bases da Educação.

**p.** Páginas.

**PCN** Parâmetros Curriculares Nacionais.

**PROFMAT** Mestrado Profissional em Matemática.

**SBM** Sociedade Brasileira de Matemática.

**UEPB** Universidade Estadual da Paraíba.

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	Apresentação do Tema . . . . .	16
1.2	Objetivos . . . . .	17
1.2.1	Objetivo geral . . . . .	17
1.2.2	Objetivos específicos . . . . .	17
1.3	Estrutura do trabalho . . . . .	18
<b>2</b>	<b>A geometria e o triângulo equilátero</b>	<b>20</b>
2.1	Alguns antecedentes históricos . . . . .	20
2.1.1	Breve contextualização . . . . .	20
2.1.2	A geometria babilônica . . . . .	21
2.1.3	A geometria egípcia . . . . .	21
2.1.4	A geometria grega . . . . .	23
2.1.5	Os Elementos de Euclides . . . . .	25
2.2	O triângulo equilátero na arquitetura . . . . .	27
2.2.1	Lepenski Vir . . . . .	28
2.2.2	Arquitetura moderna . . . . .	28
2.3	Geometria sagrada . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Conhecimentos Prévios</b>	<b>34</b>
3.1	Conceitos fundamentais da geometria plana . . . . .	34
3.1.1	Ponto, reta e plano . . . . .	34
3.1.2	Segmento de reta . . . . .	35
3.1.3	Semirreta . . . . .	35
3.1.4	Ângulos . . . . .	36
3.1.5	Ângulos opostos ao vértices . . . . .	38



3.2	Triângulos: definição, classificações e propriedades . . . . .	38
3.2.1	Classificação quanto aos ângulos . . . . .	39
3.2.2	Classificação quanto aos lados . . . . .	39
3.2.3	Elementos de um triângulo . . . . .	40
3.2.4	Congruência de triângulos . . . . .	42
3.2.5	Semelhança de triângulos . . . . .	45
3.2.6	Desigualdades entre os elementos de um triângulo . . . . .	48
3.2.7	Área de um triângulo . . . . .	51
3.3	Tópicos de trigonometria e geometria básica . . . . .	52
3.3.1	A Lei dos senos . . . . .	52
3.3.2	A Lei dos cossenos . . . . .	54
3.3.3	Identidade trigonométrica . . . . .	57
3.3.4	Teorema do quadrilátero inscrito . . . . .	58
3.3.5	Teorema de Ptolomeu . . . . .	59
3.3.6	Desigualdade de Ptolomeu . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Construções e Propriedades do Triângulo Equilátero</b>	<b>62</b>
4.1	Propriedades básicas . . . . .	62
4.2	Triângulo equilátero inscrito . . . . .	67
4.3	Triângulo equilátero circunscrito . . . . .	69
4.4	Algumas construções do triângulo equilátero . . . . .	70
4.4.1	Construção de um triângulo equilátero a partir de um lado . . . . .	70
4.4.2	Construções de um triângulo equilátero a partir de uma circunferência	71
4.5	Simetrias de um triângulo equilátero . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Teoremas envolvendo triângulos equiláteros</b>	<b>75</b>
5.1	Teorema de Viviani . . . . .	76
5.2	Teorema de Van Schooten . . . . .	77
5.3	Teorema de Pompeiu . . . . .	81
5.4	Teorema de Eutrigon . . . . .	83
5.5	Teorema de Napoleão . . . . .	85
5.5.1	Ponto de Fermat . . . . .	89
5.6	Teorema de Morley . . . . .	93
	<b>Considerações Finais</b>	<b>100</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>101</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>105</b>

<b>Apêndice A Construções no GeoGebra</b>	<b>106</b>
A.1 Construção do triângulo de Morley . . . . .	106

## 1.1 Apresentação do Tema

Muitas vezes, surgem questionamentos por parte de nossos alunos quando são apresentados à tópicos relativos ao ensino de Geometria e isso acontece principalmente nas primeiras séries do Ensino Médio, pois é comum nos abordarem com hesitação, isso porque, muitas vezes eles não têm conhecimentos prévios dos conceitos e ideias sobre a geometria. Percebemos também que mesmo os alunos que estudaram geometria básica, veem os conteúdos básicos de uma forma rudimentar e superficial. Sabemos que o estudo de geometria pode ser comparado a uma espécie de andaime ao longo da experiência educacional do aluno no que diz respeito aos conhecimentos necessários para várias áreas de conhecimento. Em relação a geometria (FREUDENTHAL, 1973)[17] se expressa da seguinte maneira:

[...] é uma das melhores oportunidades que existem para aprender matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possa de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta [17, p. 407].

Com o advento das novas Leis de Diretrizes e Bases da Educação e dos Parâmetros Curriculares Nacionais, observamos algumas mudanças no que diz respeito a apresentação da geometria nos livros didáticos. Sabemos que essas mudanças não são suficientes para que haja o avanço esperado em relação ao ensino de geometria, principalmente na educação básica. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais,

[...] os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p.55)[7].

Entendemos que o estudo da Geometria, de maneira mais investigativa, já na Educação Básica proporciona um conhecimento mais coerente e efetivo para o aluno, no sentido de aplicação, contextualização, utilidade e principalmente como agente motivador de forma como enxerga a matemática. Geralmente alguns tópicos sobre o triângulo equilátero, é estudado dentro da Trigonometria de forma simplória sem a devida importância. Pois, apesar de ser uma das figuras geométricas, que aparenta ser a mais simples da geometria, tem propriedades surpreendentes que podem ser exploradas de maneira a facilitar a compreensão de vários conteúdos da geometria básica. Pretendemos examinar aspectos avançados do triângulo equilátero inserindo teoremas e propriedades através de discussões usando demonstrações como adereços para estimular a aprendizagem dando uma direção mais atrativa para estudo desse polígono nas aulas de matemática.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo geral

Analisar aspectos avançados do triângulo equilátero, propondo a inserção de teoremas que não são vistos no Ensino Básico, mas sua aplicação tem fundamental importância no avanço dos conhecimentos matemáticos.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Apresentar o triângulo equilátero em outra perspectiva, que se distancia da forma engessada tanto nas aulas de matemática e nos livros didáticos do Ensino básico.
- Apresentar o triângulo equilátero na história, fazendo uma retrospectiva e constatando sua presença significativa na história universal.
- Propor formas e meios de inserir teoremas e propriedades do triângulo equilátero através de discussões, utilizando as demonstrações como agentes motivadores da aprendizagem.
- Dar visibilidade ao estudo da geometria do triângulo equilátero no âmbito do Ensino Médio.

### 1.3 Estrutura do trabalho

No capítulo 2 apresentaremos o papel do triângulo equilátero na história, faremos uma retrospectiva e constataremos o quanto esse polígono está presente muito significativamente nos principais eventos da história universal. Suas aparições remontam aos primórdios da história registrada e o interesse por ele transcendeu as fronteiras culturais. Visualizamos o triângulo equilátero na geometria babilônica e geometria egípcia. Encontramos também em um dos mais antigos documentos matemáticos existentes referências ao triângulo equilátero. Na Grécia antiga, vimos o papel primordial de Tales de Mileto e Pitágoras de Samos para o estudo da geometria. Ao conhecermos “Os Elementos de Euclides”, curiosamente descobrimos que a primeira proposição versa sobre o triângulo equilátero. Voltando a Europa Ocidental em Lepenski Vir próximo ao rio Danúbio, temos o sítio arqueológico localizado na Sérvia onde encontramos as primeiras aparições de padrões com formatos de triângulos equiláteros na história humana. Encontramos o triângulo equilátero presente também, na arquitetura, escultura, pintura e em vários monumentos históricos espalhados pelo mundo. Esta viagem pela História nos proporcionou um contato com as tradições religiosas do Hinduísmo ao cristianismo, então percebemos que essa forma geométrica se estende além do mundo da matemática.

O capítulo 3 do trabalho é uma coleta de alguns dos teoremas, regras e conceitos fundamentais da geometria plana, feita com base em (HARIKI, 1979)[22], que fornece uma visão geral da terminologia envolvida na descrição de um triângulo e os diferentes tipos de triângulos que podemos encontrar no nosso trabalho de pesquisa, são feitas demonstrações de identidades trigonométricas, Lei dos senos, Lei dos cossenos, Teorema do quadrilátero inscrito, Teorema de Ptolomeu com provas apresentadas fazendo uso de conhecimentos prévios da geometria básica.

Introduziremos no capítulo 4 algumas das principais propriedades básicas dos triângulos equiláteros que aparecem em alguns livros didáticos, estes variam de tópicos elementares, como procedimentos de construção, demonstrações de algumas propriedades até os vários tipos de simetria que são estudadas e aparecem numa variedade de contextos, tanto na geometria básica quanto em tópicos mais avançados.

Já no capítulo 5 pensamos que o estudo do triângulo equilátero pode ser explorado por meio de diversas abordagens e aqui estamos propondo formas e meios de inserir, a medida que nos aprofundamos no estudo, teoremas e propriedades surpreendentes desse polígono. Ilustraremos essa ideia através de discussões, utilizando as demonstrações como agentes motivadores da aprendizagem. Vários teoremas e propriedades especiais do triângulo equilátero que geralmente não são válidos em um triângulo arbitrário foram apresentados, como: os teoremas de Napoleão, Morley, Van Schooten, Viviani, Fermat, Pompeiu, Toricelli, Eutigrón. Sabemos que mais importante que os teoremas são suas provas

e ideias, e é nisso que iremos nos concentrar. Os teoremas podem até não parecer úteis a primeira vista, mas no decorrer das demonstrações e com a utilização de determinadas técnicas, percebemos vários tópicos da geometria básica em todas as passagens das demonstrações.

Concluimos com o Apêndice A onde apresentamos o passo a passo da construção do triângulo de Morley no GeoGebra.

## CAPÍTULO 2

# A GEOMETRIA E O TRIÂNGULO EQUILÁTERO

## 2.1 Alguns antecedentes históricos

### 2.1.1 Breve contextualização

Todo conhecimento matemático adquirido pelo homem foi construído paulatinamente durante gerações que o precedeu, possui uma história que chega até nós por meios de registros seculares gravados nos diferentes meios que o conservaram ao longo do tempo, como as pedras, os papiros, os pergaminhos, os papéis, dentre outros. Tais registros nos permitiram conhecer parte dos diversos períodos da história da matemática. Afirmações sobre as origens da matemática seja da aritmética, álgebra ou da geometria são necessariamente arriscadas, pois os primórdios são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos matemáticos em forma escrita (BOYER, 1994)[6]. Como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como: “Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais” e “Por que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos.” Os processos empíricos do Oriente antigo, não foram suficientes o bastante para responder essas questões e não mais bastavam para indagações mais científicas. O homem precisou de mecanismos e instinto para julgar distâncias, ângulos e altura. Historicamente as formas triangulares são tão antigas quanto as antigas civilizações do Egito e da Babilônia e estão entre os primeiros objetos documentados a atrair a atenção dos geômetras, a medida que as civilizações se desenvolviam, esses instintos eram aumentados por observações e procedimentos, obtidos a partir da experiência, experimentação e intuição. Os babilônios eram certamente geômetras habilidosos, e os egípcios desenvolveram uma matemática rica e complexa baseada em pesquisas. Ambas as culturas passariam suas informações para os gregos.

## 2.1.2 A geometria babilônica

Os babilônios substituíram a antiga civilização suméria (4000 – 2000) a.C. por volta de 2000 a.C. Os sumérios já haviam desenvolvido escrita cuneiforme<sup>1</sup> em tabletes de argila. A matemática babilônica foi além da aritmética e desenvolveu ideias básicas em teoria dos números, álgebra e geometria. Os problemas que eles queriam resolver geralmente envolviam estimativas de construção, como perímetros, áreas e outros cálculos geométricos. Essa mensuração prática é descrita abaixo por (BOYER, 1994) [6], e nos leva a crer que os babilônios realmente deveriam estar bem familiarizados com esses cálculos geométricos.

[...] no vale da mesopotâmia havia por essa época uma civilização de alto nível. Ali os sumérios tinham construído casas e templos decorados com cerâmica e mosaicos artísticos em desenhos geométricos. Governantes poderosos uniram os principados locais num império que realizou vastas obras públicas, como um sistema de canais para irrigar a terra e controlar as inundações.[6, p. 18]

Na Figura 2.1 temos em uma pastilha de argila um problema envolvendo triângulo equilátero atribuído aos babilônios por volta de 1900 a.C. (FRIBERG, 2007) [18].

Figura 2.1: Problema matemático babilônico em um tablete de argila.



Fonte: (FRIBERG, 2007).

## 2.1.3 A geometria egípcia

Embora a geometria durante este período ainda estivesse no lado empírico, os egípcios foram capazes de fazer com uma precisão notável o cálculo de área de um quadrado, trapézio, triângulo, círculo, da altura, dos ângulos de uma pirâmide e até mesmo

<sup>1</sup>A escrita cuneiforme é a designação geral dada a certos tipos de escritas feitas com auxílio de objetos em formato de cunha. É juntamente com os hieróglifos egípcios, o mais antigo tipo conhecido de escrita, tendo sido criado pelos sumérios há cerca de 3200 a.C.



do volume de um cilindro. Eles usavam esse conhecimento para qualquer tipo de construção, sejam edifícios, templos e principalmente as pirâmides. Assim, também era nítido o fascínio do povo egípcio pelo triângulo equilátero. Snefru (2613 – 2589)a.C., primeiro faraó da quarta dinastia, construiu a primeira pirâmide não-degrau, conhecida como a pirâmide curvada de Dahshur (Figura 2.2). É notável que, embora tenha começado com um ângulo inclinado de  $60^\circ$  (o que teria produzido uma secção triangular equilátero), a base foi posteriormente ampliada resultando em um ângulo inclinado de aproximadamente  $54^\circ$  (que teria produzido faces triangulares equilaterais), mas, devido à instabilidade estrutural, foi novamente alterada em parte até um declive de  $43^\circ$ . Outras pirâmides foram construídas com uma inclinação de aproximadamente  $52^\circ$ . Embora muitas pirâmides tenham sido construídas na proporção áurea, são construções baseadas no triângulo equilátero (CUNHA, 2009) [12].

Figura 2.2: Pirâmide de Dahshur



Fonte: Site Lugares Históricos[26].

Figura 2.3: Pirâmides de Gizé.



Fonte: Revista Galileu[38].

A pirâmide Curvada de Dahshur tem 102 metros de altura e cerca de 190 metros de diâmetro em cada lado e possui duas entradas, nas direções Norte e Oeste. De fato, a obra acabou servindo de experimento para a conclusão das Pirâmides de Gizé (Figura 2.3), que teriam formatos devidamente alinhados e levariam mais tempo para serem finalizadas. Entretanto, até hoje a pirâmide curvada é objeto de estudo de arqueólogos por sua imensa complexidade histórica, da qual pouco se sabe (GABAGLIA, 1899)[19].

## O Papiro Rhind

Um dos mais antigos documentos matemáticos existentes é o papiro de Rhind, escrito pelo escriba egípcio Ach-mos'e (pronuncia-se Aah-mes) em algum momento entre 1585 a.C. e 1542 a.C. Vários problemas encontrados nestes papiros tinham exemplos de triângulos equiláteros, isósceles e escalenos. Triângulos equiláteros (Figura 2.6), eram visto apenas

em papiros demóticos<sup>2</sup>, normalmente têm um lado como base horizontal e têm seu eixo de simetria colocado verticalmente (Figura 2.5). Os triângulos isósceles, se representando pirâmides, também são posicionados com uma linha de base horizontal. Quando não representam pirâmides, elas têm eixos de simetria colocados na horizontal. Triângulos escalenos (Figura 2.4), ocorrem apenas no caso de triângulos retângulos (EINSELOHR, 1877)[14].

Figura 2.4: Papiro Rhind, Problemas 49 – 55.



Fonte: (EINSELOHR, 1877).

Figura 2.5: Papiro Rhind, Problemas 57 – 60.



Fonte: (EINSELOHR, 1877).

Figura 2.6: Papiro Rhind, triângulo equilátero.



Fonte: (EINSELOHR, 1877).

### 2.1.4 A geometria grega

Sobre o sétimo século a.C. uma relação comercial ativa surgiu entre a Grécia e o Egito, e naturalmente, surgiu um intercâmbio de ideias, bem como de mercadorias. Gregos, sedentos por conhecimento, procuraram os sacerdotes egípcios para instrução, eles tinham uma forte tendência especulativa e sentiam um desejo de descobrir as razões para as coisas. Foi quando a civilização grega começou a se afirmar desenvolvendo um modo particular de pensar e promovendo discussões que exigiam maior clareza com argumentação. Citaremos nessa seção alguns dos grandes nomes, os matemáticos gregos que moldariam o curso da geometria (CAJORI, 2007)[9].

<sup>2</sup>A escrita demótica foi muito usada para relatar assuntos do dia a dia no Egito Antigo. Ao lado da escrita hieroglífica, mais usada pelos escribas egípcios para assuntos religiosos e oficiais, a escrita demótica representava uma evolução da língua falada e era mais simplificada em comparação com a hieroglífica.

## Tales de Mileto

Tales de Mileto (624 – 548 a.C aproximadamente) foi quem introduziu o estudo da geometria na Grécia. Durante a meia-idade ele se engajou em atividades comerciais, que o levaram ao Egito, diz-se que residiu lá e estudou as ciências físicas e a matemática com os sacerdotes egípcios. Dizia-se atribuir a Tales as demonstrações que:

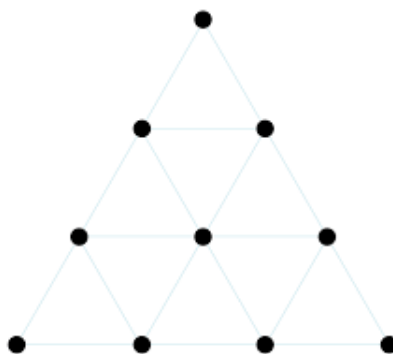
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais, respectivamente a dois ângulos e um lado de outro, então os triângulos são congruentes.
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, ou 180 graus.

Tales não formulou as provas dessas proposições no sentido formal, ele observou os resultados similares de seus cálculos e mostrou por experimentos repetidos que suas proposições e teoremas estavam corretos, e se nenhum de seus cálculos tivesse resultado contrário, ele provavelmente se sentia justificado em aceitar tais resultados como prova, o processo usado era o método por exaustão. Estava ele, sem dúvida, familiarizado com outros teoremas, não registrados pelos antigos. Foi inferido que ele sabia que a soma dos três ângulos de um triângulo era igual a dois ângulos retos e que os lados dos triângulos equiláteros eram proporcionais (EVES, 2008)[16].

## Pitágoras de Samos

Pitágoras (580 – 500 a.C aproximadamente) era natural de Samos, foi responsável pelo surgimento da palavra “matemática”, e sua concepção como um sistema de pensamento baseado em provas dedutivas. Foi também fundador da Escola Pitagórica, onde formularam a teoria das proporções e descobriram as médias aritmética, geométrica e harmônica, descobriram a construção geométrica dos cinco sólidos regulares e muitas outras contribuições. Em resumo, a Geometria Pitagórica cobriu todos os assuntos da obra de Euclides, que compilou e registrou todo o conhecimento existente nesta área, na antiga Grécia. O termo **triângulo**, é atribuído a Pitágoras apesar de Tales por relatos ter citado o termo em suas demonstrações. Acredita-se que Pitágoras teria viajado e pesquisado muito para chegar a definição da figura geométrica, tendo assim, contado com conceitos da Ásia Menor, Egito, Índia e China. De acordo com Pitágoras, a figura do triângulo é a única que pode ser considerada perfeita dentro da geometria, diz-se que os pitagóricos fizeram um juramento sobre um símbolo sagrado chamado tetraktys (Figura 2.7), que é uma representação visual da soma dos quatro primeiros números,  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ , mostrados como pontos dispostos simetricamente em um triângulo (EVES, 2008)[16].

Figura 2.7: Tetraktys pitagórica.



Fonte: (McCARTIN, 2010).

A letra maiúscula delta, no alfabeto grego, é um triângulo equilátero  $\Delta$ , a semelhança entre o delta e os tetraktys pode ser uma coincidência, mas, como resultado dessa semelhança, os tetraktys podem servir como um conveniente lembrete para várias características básicas do sistema ocidental convencional (McCARTIN, 2010) [29]. É atribuído a Pitágoras a descoberta do teorema sobre triângulos retângulos, hoje universalmente conhecida pelo seu nome, esse teorema já era conhecido pelos babilônios, mais de um milênio antes, mas sua demonstração geral pode ter sido dada por Pitágoras. Também pertence a Pitágoras a descoberta de que existem apenas três tipos de polígonos regulares que podem ser colocados de modo a preencher o espaço em volta de um ponto; seis triângulos equiláteros, quatro quadrados e três hexágonos regulares. Pitágoras transformou o estudo da geometria em uma educação liberal, examinando os princípios da ciência desde o início e sondando os teoremas de uma maneira imaterial e intelectual, portanto pode ser discutível. Não podemos negar o papel primordial de Tales e Pitágoras para o estabelecimento dos conhecimentos matemáticos, embora as reconstruções de seus pensamentos se baseiem em narrações fragmentadas e tradições elaboradas nos séculos posteriores (BOYER, 1994) [6]. De acordo com (EVES, 2008):

[...] a história dos 300 primeiros anos da matemática grega foram obscurecidos pela Grandeza dos Elementos de Euclides, escrito por volta de 300 a.C. De fato, essa obra eclipsou tanto os trabalhos matemáticos gregos anteriores que eles acabaram sendo descartados e por fim se perderam para nós. [16, p. 96]

### 2.1.5 Os Elementos de Euclides

O “The Elements” de Euclides é indiscutivelmente a obra de matemática mais influente já escrito, e também tem a distinção de ser a mais antiga continuamente usado no mundo. Por volta de 300 a.C. Euclides escreveu sua obra constituída ao todo por 13 livros,

contendo 465 teoremas e provas, descritos em um estilo claro, lógico e elegante, usando apenas uma bússola e uma borda reta. Sua obra possui muitos resultados envolvendo a matemática elementar, mas o seu primeiro livro é dedicado a geometria plana, curiosamente a primeira proposição versa sobre o **triângulo equilátero**. A Figura 2.8 mostra o papiro de Oxyrhynchus<sup>3</sup>, o qual contém um fragmento do livro “Os Elementos de Euclides” (CAJORI, 2007)[9].

Figura 2.8: Papyrus Oxyrhynchus.



Fonte: Site Ancient Origins[3].

**Proposição 2.1.** Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.

**Prova.** Seja  $AB$  o segmento dado. O que se pede é a construção de um triângulo equilátero tendo  $AB$  como um dos lados. Com centro em  $A$  e distância  $AB$  descrevamos a circunferência  $BCD$  [post. III]<sup>4</sup>; da mesma forma, com centro em  $B$  e distância  $BA$  descrevamos a circunferência  $ACE$  [post. III]; a partir do ponto  $C$ , no qual as circunferências se intersectam, tracemos dois segmentos  $CA$  e  $CB$  até aos pontos  $A$  e  $B$  [post.I]<sup>5</sup> Como o ponto  $A$  é o centro da circunferência  $CDB$ ,  $AC$  é igual a  $AB$  [def. 15]<sup>6</sup>. Da mesma forma, como o ponto  $B$  é o centro da circunferência  $CAE$ ,  $BC$  é igual a  $BA$  [def. 15]. Mas, foi já provado que  $CA$  é igual a  $AB$ . Então, qualquer dos segmentos  $CA$ ,  $CB$  é igual a  $AB$ . Portanto, coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si [Axioma 1]<sup>7</sup>;  $CA$  é também igual a  $CB$ . Os três segmentos  $CA$ ,  $AB$ , e  $BC$  são iguais entre si. O

<sup>3</sup>Papyrus Oxyrhynchus é um fragmento do segundo livro dos Elementos de Euclides em grego. Foi descoberto por Grenfell e Hunt em 1897 em Oxyrhynchus

<sup>4</sup>(Postulado III do livro: Os Elementos de Euclides) É possível descrever uma circunferência com um dado centro e passando por um dado ponto.

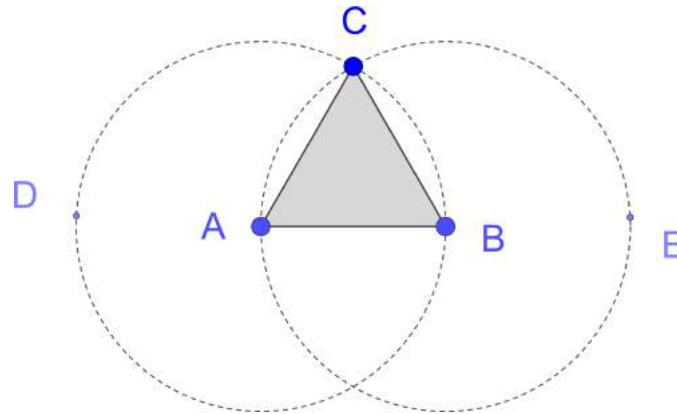
<sup>5</sup>(Postulado I do livro: Os Elementos de Euclides). É possível prolongar um segmento, continuamente, numa linha reta.

<sup>6</sup>(Definição 15 do livro: Os Elementos de Euclides) Um círculo é uma figura plana contida por uma linha tal que todos os segmentos com extremidades nessa linha e num ponto contido na figura são iguais. Este ponto chama-se centro do círculo.

<sup>7</sup>(Axioma 1 do livro: Os Elementos de Euclides) Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

triângulo  $ABC$  é equilátero e tem o segmento  $AB$  como lado (ver Figura 2.9).  $\square$

Figura 2.9: Método de construção de um triângulo equilátero.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

## 2.2 O triângulo equilátero na arquitetura

O homem sempre precisou de abrigo, desde os primórdios das civilizações quando eram nômades, cujas principais ocupações eram caçar e pescar. Para sobreviver, eles mudavam de lugar para lugar com muita frequência. Eles se contentaram em viver em cavernas e outros abrigos temporários. Com o advento da agricultura, os homens puderam se estabelecer em locais mais permanentes e construíram estruturas duradouras para usar como casas. Foi então, que a arquitetura surgiu.

Os triângulos são ferramentas eficazes para a arquitetura e são usados em projetos de edifícios e em outras estruturas, desde que o homem começou a aplicar seus conhecimentos geométricos adquiridos, seja de forma empírica ou teórica. Olhe a sua volta: os triângulos estão em toda parte, qualquer estrutura que exija uma construção forte e rígida depende de triângulos para atingir seu objetivo. Mesmo que eles não sejam óbvios ou até mesmo vistos, os triângulos estão no trabalho onde a força e a rigidez são importantes. O triângulo é o único polígono bidimensional que, se construído de membros rígidos com cantos articulados, tem uma forma absolutamente fixa até os limites de compressão e tração de seus membros. O triângulo fornece resistência e estabilidade. Quando os materiais de construção são usados para formar um triângulo, o desenho tem que ter uma base pesada e o topo é capaz de lidar com o peso por causa da energia distribuída por todo o triângulo. O mais resistente dos triângulos é o equilátero, pois sua simetria ajuda na distribuição de peso, por isso, ele é, de longe, o triângulo mais comumente usado na arquitetura. Exemplos dessa arquitetura já vimos nas Figuras 2.2 e 2.3, pirâmides de Dahshur e Gizé, no Egito. Cada



uma das quatro faces triangulares que formam as pirâmides são triângulos equiláteros. Estes são exemplos da força do triângulo na arquitetura, já que as pirâmides existem há mais de 4.000 anos (LONGMAN, 1842)[25].

### 2.2.1 Lepenski Vir

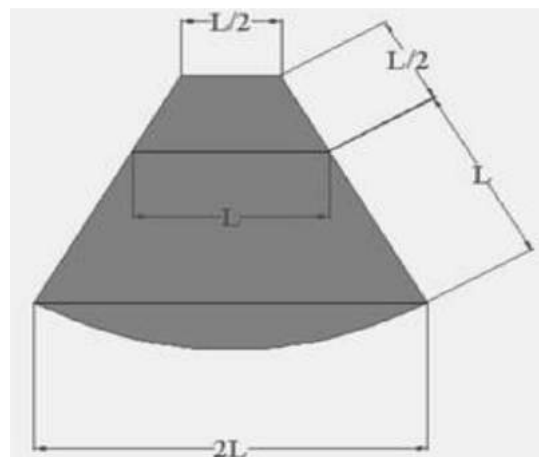
Sabemos que não foi no Egito nem com geômetras famosos como Euclides, Tales e nem tão pouco com Pitágoras as primeiras aparições de padrões com formatos de triângulos equiláteros na história humana. Em Lepenski Vir sítio arqueológicos localizado na Sérvia próximo do rio Danúbio, que data de mais de 9000 anos, a base das casas eram feitas pelo homem, em forma de um setor circular de exatamente  $60^\circ$  truncado para formar um trapézio associado a um triângulo equilátero (Figura 2.11). Todas as casas de Lepenski Vir foram edificadas da mesma maneira e com materiais semelhantes, tem idênticas construções internas e proporções similares e obedecem ao mesmo desenho básico, contudo não têm o mesmo tamanho, são aumentadas ou diminuídas, mas sempre mantendo esse desenho (Figura 2.10). Porque adotaram essa disposição permanece o mistério. O conhecimento do emprego de proporções na pré-história surpreende, pois só se identificava esse nível de competência matemática em culturas que empregavam a escrita, como os sumérios e os egípcios. Somente com os gregos é que a teoria a cerca das proporções tomou uma forma que podemos considerar moderna (ALMEIDA, 2013)[1].

Figura 2.10: Cena mesolítica em Lepenski Vir nos portões de ferro, Danúbio.



Fonte: Site Reddit[36].

Figura 2.11: Base das casas por Dragoslav Srejovic[41].



Fonte: (SREJOVIC, 1969).

### 2.2.2 Arquitetura moderna

Com o passar dos anos, o conhecimento do homem cresceu e os princípios de construção melhoraram. Os homens não estavam mais satisfeitos em construir apenas

casas, eles começaram a projetar túmulos para serem enterrados, monumentos para servir como memoriais, palácios para abrigar os governantes e igrejas onde eles poderiam adorar seus deuses. Para produzir estruturas que eram funcionais, bem como modelos de beleza arquitetônica, os designers tinham que aplicar os princípios geométricos em seu trabalho. As várias formas geométricas forneceram o máximo uso, bem como uma aparência agradável em todos os tipos de arquitetura. Geralmente os arquitetos usavam formas com padrões triangulares para construir seus edifícios por ser um elemento estético e estrutural, e também, por ter natureza adaptativa permitindo estruturas complexas (LONGMAN, 1842)[25]. Nas Figuras 2.12 e 2.13 temos exemplos de arquiteturas modernas com padrões triangulares.

Figura 2.12: The Gherkin, arranha-céu comercial em Londres.



Fonte: Site Xpecial Design[43].

Figura 2.13: “Bola de Golfe” no EPCOT no Walt Disney World.



Fonte: Site INTERCOT[23].

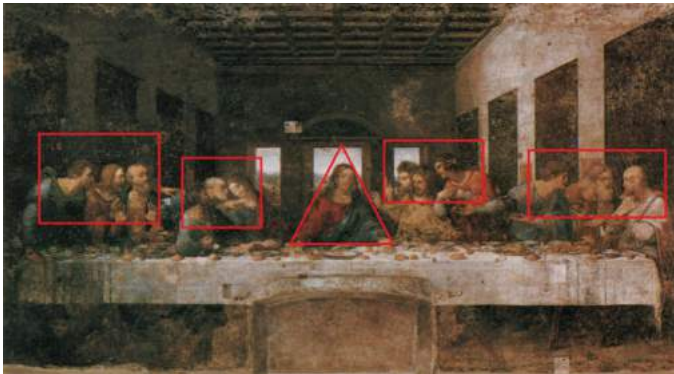
## 2.3 Geometria sagrada

Há também algo misterioso sobre triângulos que se estende além do mundo da matemática. Na doutrina cristã, por exemplo, a trindade (do latim trinitas “tríade”, de trinus “tripla”) é o mistério central da fé. Leonardo da Vinci faz alusão à trindade através do uso de quatro grupos de três apóstolos. Nesta grande obra-prima, o corpo de Jesus é um triângulo equilátero quase perfeito que simboliza a Trindade. Iniciado em 1495 e concluído em 1498, foi pintado na parede dos fundos do refeitório, no Convento de Santa Maria delle Grazie (Figura 2.14). O triângulo equilátero é ainda mais explícito na obra do pintor italiano Jacques Pontorno, em 1525, em Emaús (Figura 2.15). Não apenas a figura de Jesus é um triângulo equilátero, mas um triângulo radiante aparece acima da cabeça de Cristo com a figura de um olho em seu interior, simbolizando o olho de Deus, com o próprio triângulo representando a Santíssima Trindade de Deus o Pai, Deus o Filho



e Deus o Espírito Santo, ponto central de algumas religiões, por exemplo: Tríade Hindu, Taoista, a Trindade Cristã. Esta pintura retrata a ocasião da primeira aparição de Cristo a dois discípulos depois de Sua ressurreição (PEROZIN, 2014)[32].

Figura 2.14: A Última Ceia, Da Vinci.



Fonte: Site Essential Architecture[15].

Figura 2.15: Ceia em Emaús, Pontormo.



Fonte: (PEROZIN, 2014).

Na maçonaria e algumas religiões, principalmente no judaísmo, o triângulo positivo e negativo, formam a estrela de Salomão ou escudo de Davi ou estrela de Davi. Foi ser cimentada como um símbolo judaico quando se tornou uma decoração arquitetônica favorita nos edifícios judaicos durante toda a Idade Média (Figura 2.16). O triângulo isolado, representa a neutralidade. Representa o equilíbrio de três forças divinas. Representa acima de tudo a trindade (PENNICK, 2009)[31].

Figura 2.16: Estrela de Davi.



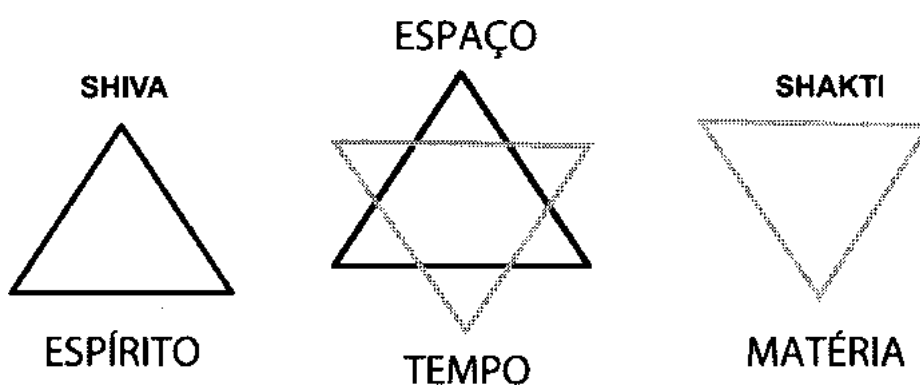
Fonte: (PENNICK, 2009).

Em muitas civilizações foram introduzidas vários elementos simbólicos em torno do triângulo equilátero. Na religião caldéia<sup>8</sup> simbolizava a luz da vida. Na escola de

<sup>8</sup>A Caldéia foi uma nação semítica que existiu entre o final do século X (ou início do IX) e meados do

Pitágoras, a mesma forma significa luz, símbolo de saúde e sabedoria. No antigo Egito era um símbolo de terra boa e fértil. No hinduísmo, triângulo apontando para baixo representava o símbolo da energia feminina (Shakti)<sup>9</sup>(Princípio Shakti ligado à água e ao poder do reino subterrâneo). O triângulo equilátero de ponta para cima era o princípio da energia masculina (Shiva)<sup>10</sup>(Shiva simboliza fogo e poder celestial). Combinados os dois triângulos juntos formará a estrela suprema, que significa a unificação do princípio masculino e feminino (Shiva-Shakti)(vitória do espírito sobre a matéria) Figura 2.17 (PENNICK, 2009)[31].

Figura 2.17: Triângulo equilátero, simbolismo para os Hindus.



Fonte: Site Revista Bibliot3ca[37].

Para os Egípcios os movimentos de Deus começam com um ponto conceitual, o Olho de Horus<sup>11</sup>(ver Figura 2.18), de onde surge a flor da vida cujo fruto é o universo. Dele Deus cria o primeiro espaço virtual do universo, faz isso, projetando-se para fora como um ponto que avança repetindo-se formando uma linha reta, a forma masculina, é o Deus Pai, que manifesta sua energia e sua sabedoria. Sua vontade ativa é transformada pelo Deus Mãe, a substância infinita, que gera no seu interior uma resposta, o Deus filho que regressa com a percepção de um plano virtual reconhecido. Assim os egípcios entendem a trindade, como um processo simultâneo, equilátero, de dados enviados, recebidos. Por isso o triângulo equilátero é a base do tetraedro, o primeiro sólido puro, forma primária, masculina de tudo que foi criado (PEROZIN, 2014)[32].

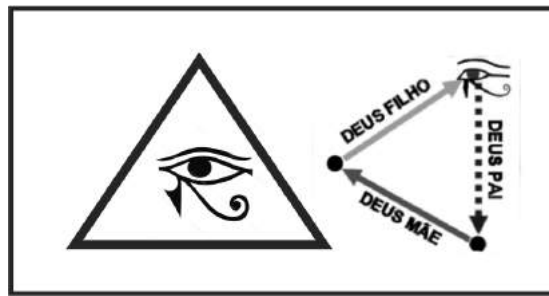
século VI AC, após o qual ela e seu povo foram absorvidos e assimilados à Babilônia. Estava localizada na região no sul da Mesopotâmia, principalmente na margem oriental do rio Eufrates.

<sup>9</sup>O sistema indiano de divindades se refere à Shakti como a manifestação do poder supremo. Shakti, a deusa mãe é considerada a personificação da energia cósmica em sua forma dinâmica. Acredita-se que Shakti seja a força e a energia nas quais o universo é criado.

<sup>10</sup>É um dos deuses supremos do hinduísmo, conhecido também como “o destruidor e regenerador” da energia vital; significa o “benéfico”, aquele que faz o bem. Shiva também é considerado o criador do Yoga (Ioga), devido ao seu poder de gerar transformações, físicas e emocionais, em quem pratica a atividade.

<sup>11</sup>O Olho de Hórus, ou ‘Udyat’, é um símbolo oriundo do Antigo Egito. Dentre seus muitos significados e usos, os mais comuns e genéricos são os de poder e proteção, além da relação com Hórus, o deus dos faraós. É um dos amuletos egípcios mais populares de todos os tempos.

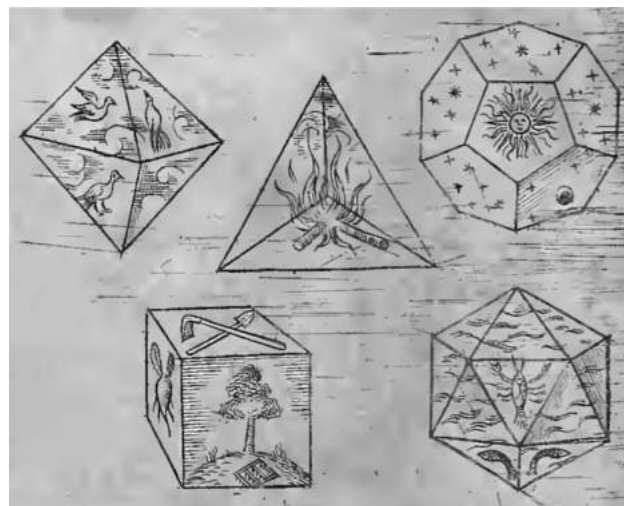
Figura 2.18: O Olho de Hórus.



Fonte: Site Pinterest[34].

Johannes Kepler publicou em seu livro *Harmonices Mundi*, em 1619 (ver Figura 2.19), onde estão ilustrado os cinco sólidos platônicos. Kepler, no entanto, não descobriu os sólidos platônicos, as obras de Platão as mencionam por volta de 360 a.C. Platão acreditava que cada um dos sólidos platônicos estava associado a um elemento em particular: fogo, água, ar e terra. Um sólido platônico (regular) é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares congruentes com o mesmo número de faces se encontrando em cada vértice. Assim, todas as arestas, vértices e ângulos são congruentes. Três dos cinco sólidos platônicos possuem todas as faces sendo triângulos equiláteros, o tetraedro, octaedro e icosaedro. Estes sólidos foram adquirindo ao longo dos tempos diversos significados místicos. Por exemplo, Kepler sentia uma grande admiração e reverência por eles e chegou a tentar explicar os movimentos planetários a partir deles. Além disso, essas formas impressionaram de tal modo Platão que ele usou para descrever, do seu ponto de vista, o mundo perfeito. Platão estabeleceu uma explicação completa da natureza de todas as coisas. Assim concebeu todas as coisas como sendo constituídas por cinco átomos diferentes cada um com a forma de poliedro (McCARTIN, 2010)[29].

Figura 2.19: Poliedros de Platão.



Fonte: Site geometiles.com[20].

Nesse retrospecto histórico, ficamos conhecendo um pouco e vimos o apelo universal do triângulo equilátero. Suas aparições que remontam aos primórdios da história registrada e os interesses por ele, transcendeu as fronteiras culturais e da matemática. Vemos que o triângulo equilátero são especiais não apenas no mundo físico, mas também no mundo intelectual. Não se pode deixar de reconhecer que uma das figuras primárias da geometria plana tenha o devido destaque, não se pode deixar de imaginar os limites de sua força, portanto, daremos nessa pesquisa o protagonismo merecedor para o triângulo equilátero.

## CAPÍTULO 3

### CONHECIMENTOS PRÉVIOS

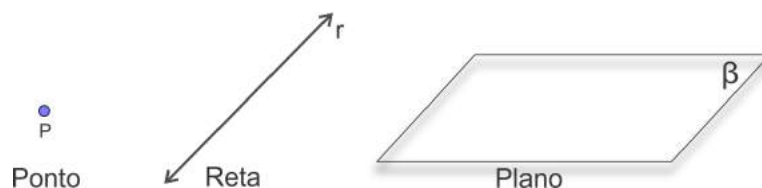
Um triângulo é uma forma com a qual devemos estar familiarizado, pois é uma das formas mais importantes da matemática. Um triângulo tem três lados e três ângulos internos, ele pode ser completamente descrito pelos comprimentos dos três lados e pela medida dos três ângulos. Esse capítulo é a uma coleta de alguns dos teoremas e regras mais fundamentais da geometria plana, feita com base em (HARIKI, 1979) [22], fornecemos uma visão geral da terminologia envolvida na descrição de um triângulo e os diferentes tipos de triângulos que podemos encontrar no nosso trabalho pesquisa.

## 3.1 Conceitos fundamentais da geometria plana

### 3.1.1 Ponto, reta e plano

Na Geometria Plana, admitem-se como primitivo os conceitos de ponto, reta e plano: estes são as figuras geométricas mais simples, a partir das quais são definidas as outras figuras geométricas tais como segmento de reta, semirreta, ângulo, triângulos etc. Representaremos estas figuras fundamentais da seguinte maneira:

Figura 3.1: Entes primitivos da geometria.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Axioma 3.1.** Uma reta tem infinitos pontos e é ilimitada nos dois sentidos.

**Axioma 3.2.** Dados quaisquer dois pontos distintos,  $A$  e  $B$ , existe uma única reta que os contém.

**Definição 3.3.** Se um ponto é comum a duas retas, dizemos que este ponto é um ponto de interseção dessas retas. Duas retas que se interceptam num único ponto são chamadas de retas concorrentes.

**Definição 3.4.** Pontos pertencentes a uma mesma reta são chamados colineares; caso contrário, são chamados não-colineares.

### 3.1.2 Segmento de reta

Dados dois pontos distintos,  $A$  e  $B$ , o conjunto dos pontos  $A$ ,  $B$  e todos os pontos que estão entre  $A$  e  $B$  é chamado de segmento  $AB$ . Se  $A$  e  $B$  são coincidentes, dizemos que  $AB$  é o segmento nulo. Os pontos  $A$  e  $B$  são chamados as extremidades do segmento  $AB$ .

O conceito abstrato de congruência entre segmentos é definido da seguinte maneira:

- Dois segmentos são congruentes<sup>1</sup> se eles têm a mesma medida.

Representaremos congruência entre segmentos  $AB$  e  $CD$  escrevendo  $AB \equiv CD$ ; assim,  $AB \equiv CD \iff AB = CD$ .

**Propriedade 3.5.** (i) (Reflexiva)  $AB \equiv BA$ .

(ii) (Simétrica) Se  $AB \equiv CD \implies CD \equiv AB$ .

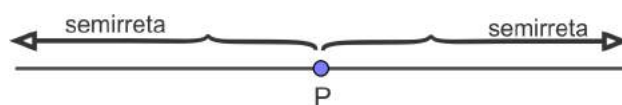
(iii) (Transitiva) Se  $AB \equiv CD$  e  $CD \equiv EF \implies AB \equiv EF$ .

Assim, satisfeitas estas propriedades a relação de congruência entre segmentos é uma relação de equivalência.

### 3.1.3 Semirreta

Um ponto  $P$  qualquer de uma reta  $r$ , divide esta em duas partes denominadas semirretas de origem em  $P$ , essas semirretas são chamadas opostas.

Figura 3.2: Semirretas de origem em  $P$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

<sup>1</sup>Usamos o termo congruentes representando por  $\equiv$ , e não iguais, para distinguir do termo igual, que significa, matematicamente, o mesmo objeto matemático.

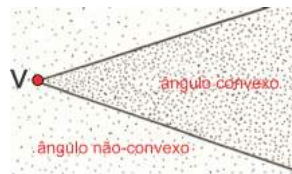
**Proposição 3.6.** As semirretas  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{BA}$  satisfazem as seguintes propriedades:

- $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$  é a reta determinada por  $A$  e  $B$ , isto é, a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .
- $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$  é o segmento  $AB$ .

### 3.1.4 Ângulos

Considere duas semirretas de mesma origem  $V$ . Elas dividem o plano em duas regiões denominadas ângulos. Cada semirreta é chamada lado dos ângulos e o ponto  $V$  é o vértice do ângulos.

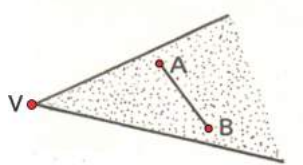
Figura 3.3:  $V$  vértice do ângulos.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

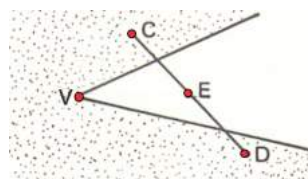
Um ângulo é convexo quando dados dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$  da região do ângulo, o segmento  $AB$  está inteiramente contido nesse ângulo, enquanto no ângulo não-convexo existem dois pontos  $C$  e  $D$  da região do ângulo que são extremidades de um segmento não inteiramente contido nessa região angular (ver Figuras 3.4 e 3.5).

Figura 3.4: Ângulo convexo



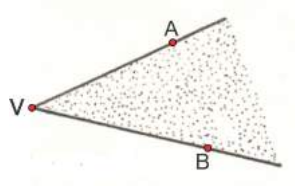
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Figura 3.5: Ângulo não-convexo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

No caso das semirretas opostas, os dois ângulos determinados são semiplanos e, portanto são ângulos convexos denominados rasos. Quando nos referimos ao ângulo  $\widehat{AVB}$ , estamos implicitamente considerando o ângulo convexo (ver figura 3.6).

Figura 3.6: Ângulo  $\widehat{AVB}$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Axioma 3.7.** A todo ângulo está associado um único número real positivo. Este número é zero se, e somente se, o ângulo é constituído por duas semirretas coincidentes.

Utilizamos em geral, o grau ( $^\circ$ ) como unidade de medida.

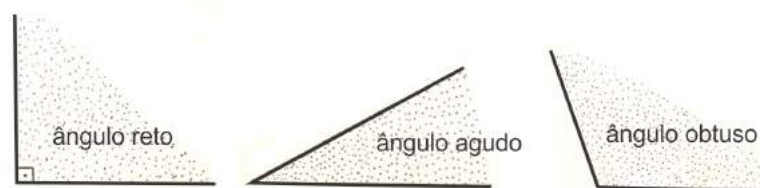
**Axioma 3.8.** Dois ângulos são congruentes se suas medidas são iguais.

Representaremos congruência de ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  escrevendo  $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ ; assim,  $\widehat{A} \equiv \widehat{B} \iff \widehat{A} = \widehat{B}$ .

### Classificação de ângulos

Se a medida de um ângulo convexo é  $90^\circ$ , dizemos que ele é um ângulo reto; se é menor que  $90^\circ$ , dizemos que é um ângulo agudo e se é maior que  $90^\circ$ , dizemos que ele é um ângulo obtuso.

Figura 3.7: Classificação de ângulos.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Definição 3.9.** Dois ângulos são chamados consecutivos se eles têm um lado em comum. Se os outros lados dos ângulos estão em semi-planos opostos, definidos pelo lado comum, esses ângulos são chamados adjacentes.

**Definição 3.10.** Dois ângulos são chamados suplementares se a soma de suas medidas é  $180^\circ$ . O suplemento de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados.

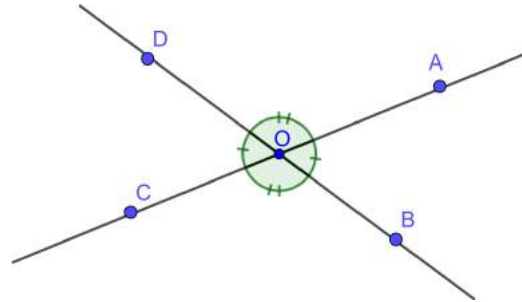


### 3.1.5 Ângulos opostos ao vértices

Ângulos opostos pelo vértice são aqueles em que os lados de um são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

**Teorema 3.11.** Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes

Figura 3.8: Ângulos opostos ao vértices.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Sejam  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{COD}$  dois ângulos opostos pelo vértice. Como o ângulo  $\widehat{AOD}$  é suplementar a ambos, obtemos

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOD} = 180^\circ.$$

Daí,

$$\widehat{COD} + \widehat{AOD} = 180^\circ.$$

Portanto,

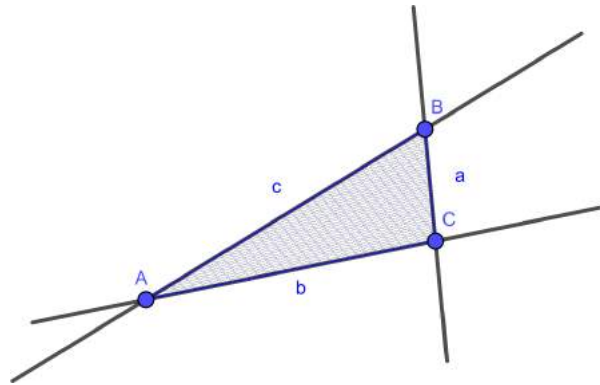
$$\widehat{AOB} = \widehat{COD}.$$

□

## 3.2 Triângulos: definição, classificações e propriedades

Dados 3 pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , não alinhados, a intersecção dos ângulos  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{CBA}$  e  $\widehat{ACB}$  é denominada triângulo de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  (ver Figura 3.9).

Figura 3.9: Intersecção dos ângulos  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{CBA}$  e  $\widehat{ACB}$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

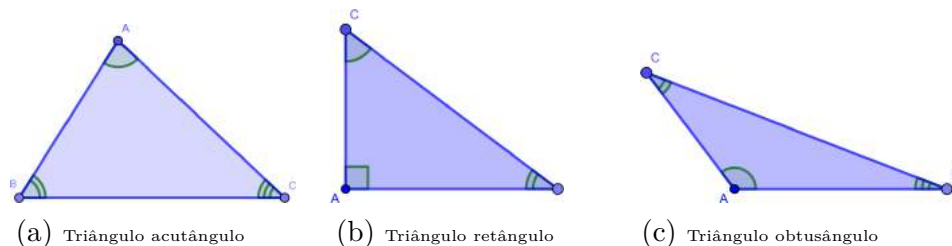
Os segmentos  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  são os lados do triângulo  $ABC$  e seus ângulos são  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{CBA}$  e  $\widehat{ACB}$ . Estes são denotados por  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ , respectivamente. Notação “ $\triangle ABC$ ” lê-se “triângulo  $ABC$ ”. Os comprimentos dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  são, respectivamente, designados por  $c$ ,  $a$  e  $b$ .

### 3.2.1 Classificação quanto aos ângulos

Os triângulos podem ser classificados, com respeito aos ângulos, em acutângulo, retângulo e obtusângulo.

- Um triângulo é acutângulo se tem 3 ângulos agudos.
- Um triângulo é retângulo se tem um ângulo reto.
- Um triângulo é obtusângulo se tem um ângulo obtuso.

Figura 3.10: Classificação quanto aos ângulos.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

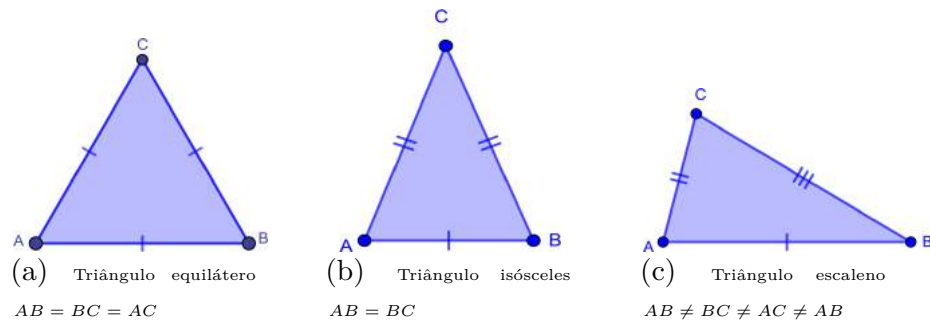
### 3.2.2 Classificação quanto aos lados

Os triângulos podem ser classificados, quanto aos lados em:

- Equilátero, se tem os 3 lados congruentes.

- Isósceles, se tem pelo menos 2 lados congruentes.
- Escaleno, se tem 3 lados, dois a dois, não congruentes.

Figura 3.11: Classificação quanto aos lados.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Num triângulo isósceles, chama-se de base o lado não-congruente e ângulo do vértice o ângulo oposto à base. Observe que todo triângulo equilátero é isósceles.

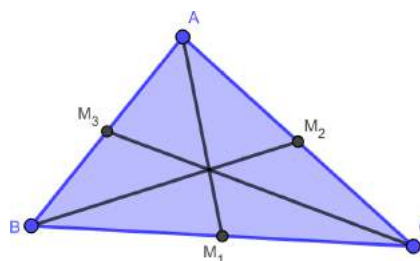
### 3.2.3 Elementos de um triângulo

Destacamos num triângulo os seguintes elementos: mediana, altura, mediatriz e bissetriz.

#### Medianas do triângulo

Seja dado um  $\triangle ABC$ . Se  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  são respectivamente, os pontos médios dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ , então, os segmentos  $AM_1$ ,  $BM_2$  e  $CM_3$  são denominadas medianas do  $\triangle ABC$ .

Figura 3.12: Medianas



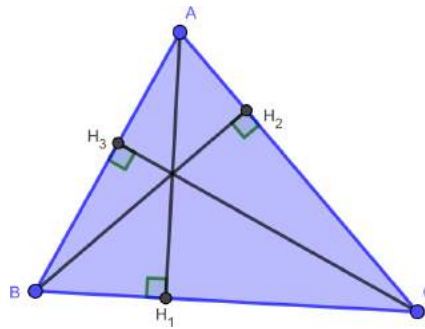
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Pode-se provar que as medianas se interceptam num único ponto chamado *baricentro* do  $\triangle ABC$ .

### Alturas do triângulo

Sejam  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  pés das perpendiculares baixadas, respectivamente, dos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  sobre as retas suporte aos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ . Então os segmentos  $AH_1$ ,  $BH_2$  e  $CH_3$  chamam-se alturas do  $\triangle ABC$ .

Figura 3.13: Alturas



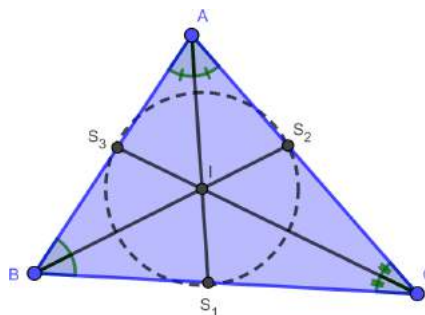
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Pode-se provar que as alturas se interceptam num único ponto chamado *ortocentro* do  $\triangle ABC$ .

### Bissetrizes do triângulo

Sejam as semi-retas  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  as bissetrizes dos ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  do  $\triangle ABC$ , respectivamente. Chamam-se bissetrizes do  $\triangle ABC$  os segmentos  $AS_1$ ,  $BS_2$  e  $CS_3$ , onde  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  são respectivamente, os pontos onde as semi-retas  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  interceptam os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$ .

Figura 3.14: Bissetrizes do triângulo.

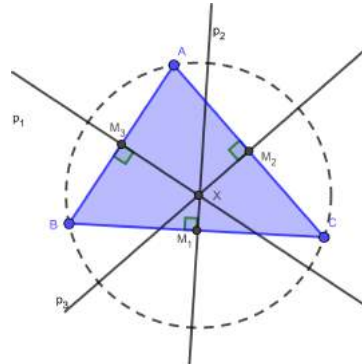


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Pode-se provar que as bissetrizes se interceptam num único ponto  $I$  (*incentro*) equidistante dos pontos  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  portanto, centro da circunferência inscrita ao  $\triangle ABC$ .

## Mediatrizes do triângulo

Figura 3.15: Mediatrizes do triângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

São mediatrizes de um triângulo retas perpendiculares  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  traçadas passando pelo ponto médio de cada um dos seus lados  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  (ver Figura 3.15). Desta forma, um triângulo possui 3 mediatrizes.

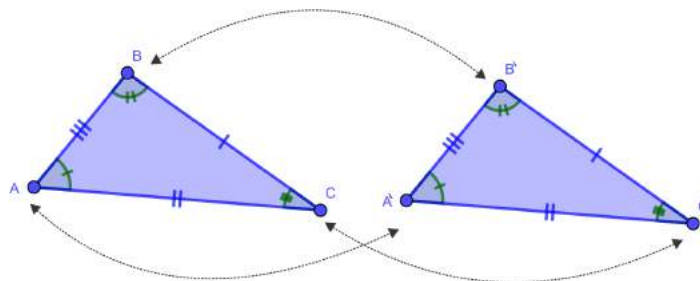
O ponto de encontro dessas três mediatrizes  $X$  é chamado de *circuncentro*. Este ponto, que está a uma mesma distância de cada um dos seus vértices, é o centro da circunferência circunscrita no triângulo.

### 3.2.4 Congruência de triângulos

#### Triângulos congruentes

Dois triângulos são congruentes se tem ordenadamente congruentes os três lados e os três ângulos, ou seja, vai existir uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Figura 3.16: Triângulos congruentes.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$\text{Então: } \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \quad \text{se} \quad \begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

**Observação 3.12.** Em dois triângulos congruentes, são congruentes entre si:

- Os lados opostos a ângulos congruentes;
- Os ângulos opostos a lados congruentes.

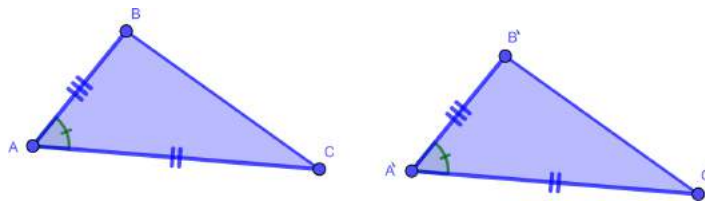
### Casos de congruência

Na definição de congruência de triângulos temos condições que devem ser satisfeitas para que dois triângulos sejam congruentes. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. Estas condições são denominadas casos ou critérios de congruência.

#### Caso: Lado-ângulo-lado (LAL).

**Axioma 3.13** (Caso LAL). Se dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são tais que  $AB \equiv A'B'$ ,  $\widehat{A} = \widehat{A'}$  e  $AC = A'C'$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

Figura 3.17: Lado-ângulo-lado.



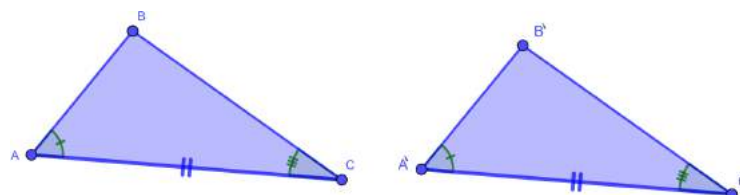
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \widehat{A} = \widehat{A'} \end{cases} \implies \begin{cases} AB = A'B', & AC = A'C', & BC = B'C'. \\ \widehat{A} = \widehat{A'}, & \widehat{B} = \widehat{B'}, & \widehat{C} = \widehat{C'}. \end{cases}$$

#### Caso: Ângulo-lado-ângulo (ALA).

Dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são tais que  $AC = A'C'$ ,  $\widehat{A} = \widehat{A'}$  e  $\widehat{C} = \widehat{C'}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ .

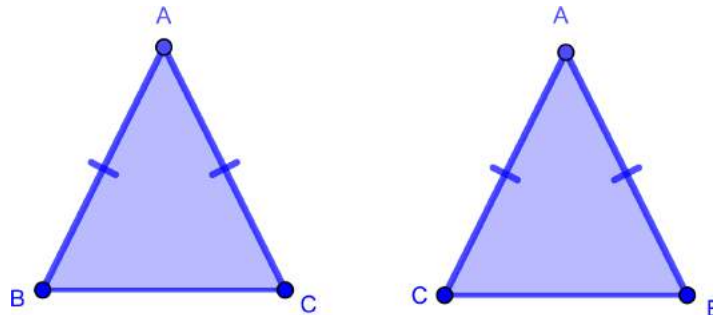
Figura 3.18: Ângulo-lado-ângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Teorema 3.14.** Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Figura 3.19: Ângulos da base congruentes.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** De fato,

$$AB = AC \implies BA = CA.$$

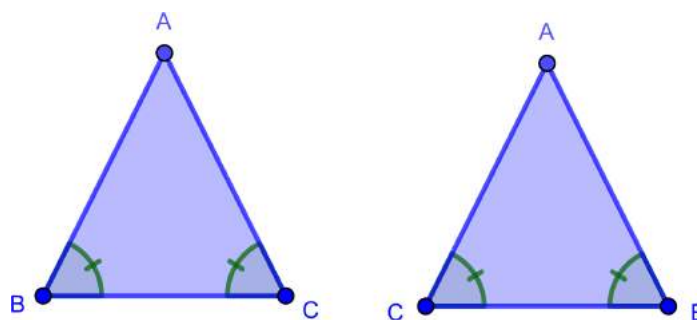
Daí, pela propriedade reflexiva da congruência

$$\hat{A} = \hat{A}.$$

Logo, o  $\triangle BAC \equiv \triangle CAB$  pelo caso *LAL*. Portanto,  $\hat{B} = \hat{C}$ . □

**Teorema 3.15.** Se um triângulo possui dois ângulos agudos congruentes, então esse triângulo é isósceles.

Figura 3.20: Triângulo é isósceles.



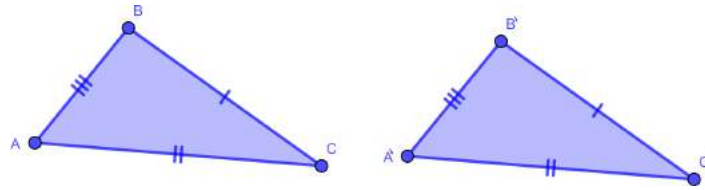
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** De fato, sendo  $\hat{ABC} = \hat{ACB}$  e pela propriedade reflexiva de congruência  $BC = CB$ , portanto  $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$  pelo caso *ALA*, logo  $AB = AC$ . □

**Caso: Lado-lado-lado (LLL).**

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.

Figura 3.21: Lado-lado-lado.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{LLL}} \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \implies \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

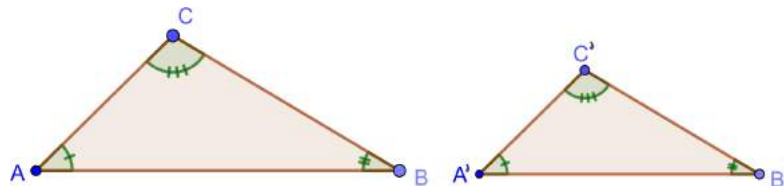
**Proposição 3.16.** Em um triângulo isósceles a mediana relativamente à base é também a bissetriz, mediatriz e altura.

**Prova.** Seja  $ABC$  um triângulo com  $AB = AC$ . Seja  $AD$  a mediana relativamente à base  $BC$ . Considere os triângulos  $ABD$  e  $ACD$ . Como  $D$  é o ponto médio de  $BC$ , então  $BD = CD$ . Além disso  $ABC$  é um triângulo isósceles, o que implica que  $AB = AC$  e  $\hat{B} = \hat{C}$ . Logo, os triângulos  $ABD$  e  $ACD$  são tais que  $AB = AC$ ,  $BD = CD$  e  $\hat{A}BD = \hat{A}CD$ . Pelo caso  $LAL$  de congruência de triângulos, segue que  $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ . Em particular,  $\hat{B}AD = \hat{CAD}$ , o que implica que  $AD$  é a bissetriz do ângulo  $\hat{B}AC$ . Além disso, temos  $\hat{A}DB = \hat{A}DC$ , e como estes ângulos são suplementares, segue que  $\hat{A}DB = \hat{A}DC = 90^\circ$ . Portanto,  $AD$  é altura e também mediatriz do triângulo  $\square$

### 3.2.5 Semelhança de triângulos

$$\text{Dois triângulos } \triangle ABC \text{ e } \triangle A'B'C' \text{ são semelhantes se } \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Indica-se  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  para designar que o  $\triangle ABC$  é semelhante ao  $\triangle A'B'C'$ .

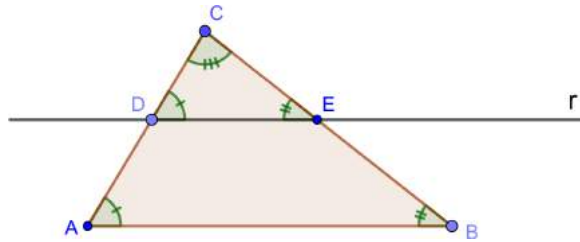
Figura 3.22:  $\triangle ABC$  é semelhante ao  $\triangle A'B'C'$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Teorema 3.17.** Toda reta paralela a um lado de um triângulo e que intercepta os outros lados determina um triângulo semelhante ao primeiro.



Figura 3.23:  $\triangle CDE$  e  $\triangle CAB$  são semelhantes.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** A reta  $r$ , paralela à reta  $AB$ , encontra os lados  $AC$  e  $BC$  nos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente. Vamos mostrar que  $\triangle CDE$  e  $\triangle CAB$  são semelhantes.

De fato, nos dois triângulos os lados correspondentes são proporcionais. Então, pelo Teorema de Tales,

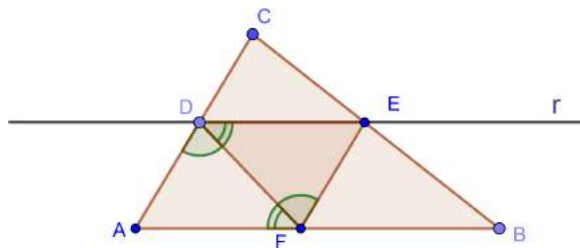
$$\frac{CD}{CE} = \frac{DA}{EB} = \frac{CA}{CB}.$$

Logo, usando uma propriedade das proporções, segue-se que

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}. \quad (3.1)$$

Por outro lado, se traçarmos uma paralela à reta  $AC$ , pelo ponto  $E$ , cortando o lado  $AB$  no ponto  $F$ .

Figura 3.24: Paralela à reta  $AC$ , pelo ponto  $E$ , cortando o lado  $AB$  no ponto  $F$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Logo, pelo Teorema de Tales

$$\frac{CE}{AF} = \frac{EB}{FB} = \frac{CB}{AB} \implies \frac{CE}{AF} = \frac{CB}{AB}.$$

Como  $\triangle ADF \cong \triangle EFD$  pelo caso  $ALA.$ , pois

$$\begin{cases} \widehat{DFE} = \widehat{ADF} \text{ (alternos internos.)} \\ DF \text{ (lado comum.)} \\ \widehat{AFD} = \widehat{EDF} \text{ (alternos internos.)} \end{cases}$$

segue-se que  $AF$  e  $DE$  são congruentes. Portanto,

$$\frac{CE}{DE} = \frac{CB}{AB} \implies \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}. \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2),

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB}.$$

Portanto nos dois triângulos, os ângulos correspondentes são congruentes, isto é

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \hat{C} = \hat{C}.$$

Daí,

$$\triangle CDE \sim \triangle CAB.$$

□

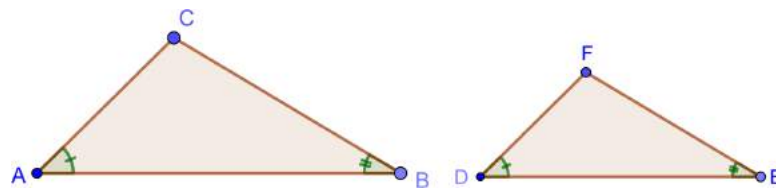
### Casos de semelhança

Como no estudo de congruência de triângulos, é conveniente determinarmos quais as condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. Estas condições suficientes são dadas pelos três casos de semelhanças que seguem.

#### Caso: Ângulo-Ângulo

Sejam dois triângulos  $ABC$  e  $DEF$ . Eles serão semelhantes se, e somente se, dois de seus ângulos forem congruentes.

Figura 3.25: Caso de semelhança: Ângulo-ângulo.



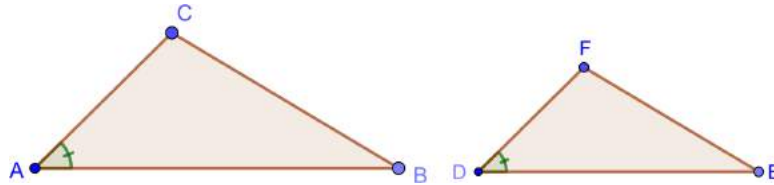
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \end{cases} \implies \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

### Caso: Lado-Ângulo-Lado

Dois triângulos serão semelhantes se, e somente se, eles tiverem dois lados respectivamente proporcionais e se os ângulos formados por esses lados forem congruentes.

Figura 3.26: Caso de semelhança: Lado-Ângulo-Lado.



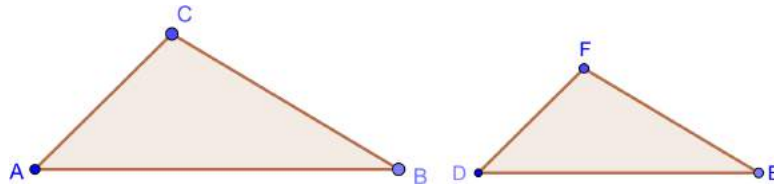
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$\begin{cases} \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \\ \hat{A} = \hat{D} \end{cases} \implies \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

### Caso:Lado-Lado-Lado

Dois triângulos serão semelhantes se, e somente se, eles tiverem os três lados respectivamente proporcionais.

Figura 3.27: Caso de semelhança: Lado-Lado-Lado.



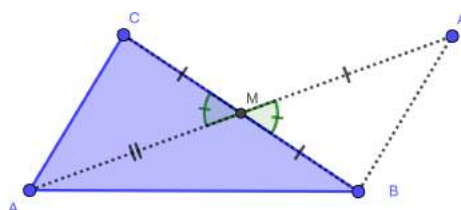
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \implies \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

## 3.2.6 Desigualdades entre os elementos de um triângulo

**Teorema 3.18.** A soma de dois ângulos quaisquer de um triângulo é menor que  $180^\circ$ .

Figura 3.28: Soma de dois ângulos quaisquer de um triângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Vamos mostrar que  $\widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $BC$  e  $A'$  o simétrico de  $A$  com relação a  $M$ .

$$AM = A'M \text{ (por construção)}$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{A'MB} \text{ (oposto ao vértice)}$$

$$MC = MB \text{ ( } M \text{ é ponto médio).}$$

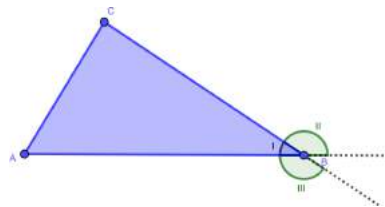
Logo, pelo caso *LAL*,  $\triangle AMC \equiv \triangle A'MB$ . Portanto,  $\widehat{MBA'} = \widehat{MCA}$ . Como o ângulo  $\widehat{ABA'}$  é igual à soma de  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{CBA'}$ ; logo é a soma de  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ . Como o ponto  $A'$  não está na reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , ângulo  $\widehat{ABA'}$  é menor que  $180^\circ$ . Isto implica que  $\widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$ .  $\square$

**Corolário 3.19.** Todo triângulo tem pelo menos dois ângulos agudos.

### Ângulo externo de um triângulo

Os ângulos adjacentes a cada ângulo do triângulo chamam-se ângulos externos do triângulo. Por exemplo, na figura, os ângulos *II* e *III* são ângulos externos; eles são congruentes, pois são opostos pelo vértice. Num triângulo, existem 6 ângulos externos, congruentes, dois a dois.

Figura 3.29: Ângulo externo de um triângulo.

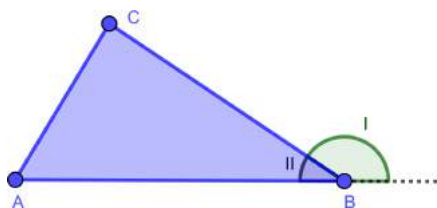


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

### Teorema do ângulo externo

Num triângulo, todo ângulo externo é maior que qualquer ângulo interno não adjacente a ele.

Figura 3.30: Teorema do ângulo externo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Vamos provar que  $I > \hat{A}$ . Temos, Pelo teorema anterior

$$\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ.$$

Temos ainda

$$\hat{B} + \hat{I} = 180^\circ.$$

Logo,

$$\hat{B} + \hat{C} < \hat{B} + \hat{I}.$$

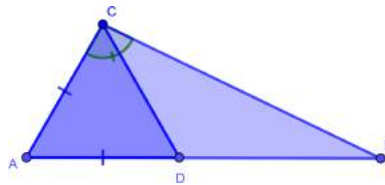
Portanto,

$$\hat{A} < \hat{I}.$$

Prova-se, da mesma forma, que  $\hat{I} > \hat{C}$ . □

**Teorema 3.20.** Num triângulo, se um lado é maior que o outro, então ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Figura 3.31: O maior lado opõe-se ao maior ângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

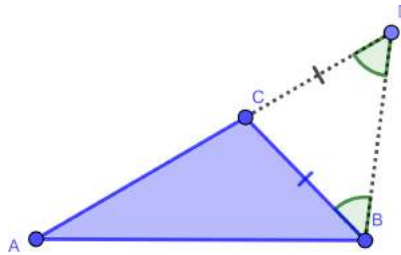
**Prova.** Suponha, como na Figura 3.31, que  $AB > AC$ . queremos provar que  $\hat{C} > \hat{B}$ . Seja  $D$  o ponto de  $AB$  tal que  $AD = AC$ . O  $\triangle ADC$  é isósceles e, portanto,  $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ . O ângulo  $\widehat{ADC}$  é externo ao  $\triangle CDB$ . Portanto,  $\widehat{ADC} > \widehat{DBC}$ . Mas  $\widehat{ACB} > \widehat{ACD} = \widehat{ADC} > \widehat{DBC}$ , isto é,  $\hat{C} > \hat{B}$ . □

É válida também a recíproca: Num triângulo, se um ângulo é maior que outro, então ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

### Teorema da desigualdade triangular

**Teorema 3.21.** Num triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Figura 3.32: O lado é menor que a soma dos outros dois.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Queremos provar que  $AB < AC + CB$ . Tomemos no prolongamento do lado  $AC$ , o ponto  $D$  tal que  $CD = CB$ . Desta forma,  $\triangle BCD$  é isósceles e, assim,  $\widehat{CBD} = \widehat{BDC}$  e  $\widehat{ABD} > \widehat{CBD}$ . Portanto,  $\widehat{ABD} > \widehat{BDC}$ . Pelo teorema anterior,  $AD > AB$ .

Mas,  $AD = AC + CD = AC + CB$ .

Daí,  $AB < AC + CB$ .

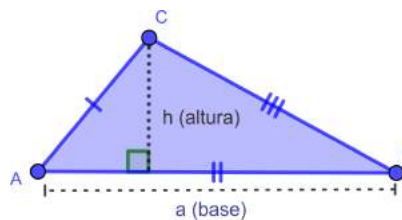
□

Do mesmo modo, podemos provar que  $AC < AB + BC$  e  $BC < AC + AB$ .

### 3.2.7 Área de um triângulo

- A área  $S$  de um triângulo pode ser calculada conhecidos o comprimento da base do triângulo e sua altura, “é dado pela metade da base multiplicada pela altura”,

Figura 3.33: Área de um triângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$S = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}.$$

- Se não é conhecida a altura do triângulo, podemos usar a fórmula de Heron para calcular a área do triângulo. Para um triângulo com lados de comprimento  $c$ ,  $a$  e  $b$ :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Onde  $p$  o semi-perímetro do triângulo e é dado por:  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

### 3.3 Tópicos de trigonometria e geometria básica

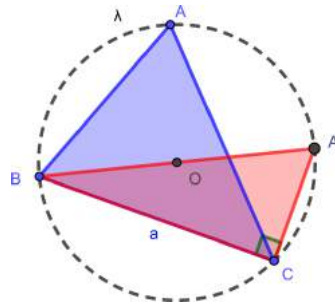
#### 3.3.1 A Lei dos senos

**Proposição 3.22.** Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$  e  $R$  raio da circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ . Então:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R. \quad (3.3)$$

**Prova.** Trataremos apenas o caso em que o triângulo  $ABC$  é acutângulo, pois os outros casos podem ser feitos de modo análogo. Sejam  $\lambda$  o círculo circunscrito ao  $\triangle ABC$  e  $O$  seu centro. Considere o ponto  $A'$  sobre  $\lambda$ , tal que  $A'B$  é um diâmetro de  $\lambda$  (ver Figura 3.34).

Figura 3.34: O triângulo  $ABC$  é acutângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Note que  $A' \neq C$  e  $A' \neq A$ , pois do contrário o  $\triangle ABC$  seria retângulo, já que um de seus lados seria um diâmetro de  $\lambda$ . Assim temos que o  $\triangle A'BC$  é retângulo em  $C$  e, desse modo:

$$\widehat{\text{sen}A'} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\widehat{\text{sen}A'}} = 2R.$$

Agora, veja que  $\widehat{A} = \widehat{A'}$ , pois, sendo ângulos inscritos em  $\lambda$  subtendendo o mesmo arco  $BC$ , temos

$$\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BOC} = \widehat{A'}.$$

Portanto obtemos:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen}A'}} = 2R.$$

Argumentos análogos ao executado acima para o vértice  $A$  pode ser feito com o vértice  $B$  ou o vértice  $C$ , fornecendo as outras as igualdades:

$$\frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = 2R \text{ e } \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R. \quad \square$$

A segunda parte do resultado a seguir traz uma primeira aplicação da Lei dos senos ao cálculo da área de um triângulo.

**Corolário 3.23.** Seja  $ABC$  um triângulo cujos lados  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  medem, respectivamente,  $c$ ,  $b$  e  $a$ . Se  $A[ABC]$  denota a área do  $\triangle ABC$ , então

$$A[ABC] = \frac{bc \widehat{A}}{2} = \frac{ac \widehat{B}}{2} = \frac{ab \widehat{C}}{2}. \quad (3.4)$$

Se  $R$  denota o raio do círculo circunscrito ao  $\triangle ABC$ , temos também que

$$A[ABC] = \frac{abc}{4R}. \quad (3.5)$$

**Prova.** Para a primeira parte isto é, para as fórmulas (3.4), é suficiente estabelecermos a primeira delas, uma vez que as outras duas podem ser obtidas de modo análogo. Primeiramente, o  $\triangle ABC$  é retângulo em  $A$ , podemos ver  $AB$  como base e  $AC$  como altura do  $\triangle ABC$  (ou vice-versa), de sorte que

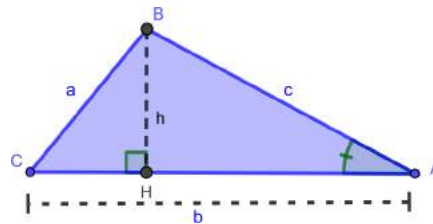
$$A[ABC] = \frac{bc}{2}.$$

Então,

$$A[ABC] = \frac{bc}{2} = \frac{bc \widehat{A}}{2}.$$

Suponha agora, que o  $\triangle ABC$  é acutângulo (ver Figura 3.35). Sendo  $H$  o pé da altura relativa ao lado  $AC$  e  $h = BH$ , temos:

Figura 3.35: O  $\triangle ABC$  é acutângulo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$\widehat{A} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \widehat{A}.$$

Então,

$$A[ABC] = \frac{bh}{2} = \frac{bc \widehat{A}}{2}.$$

O caso em que o  $\triangle ABC$  é obtusângulo é inteiramente análogo e, por isso será deixado



como exercício. Para (3.5), observe que a Lei dos senos dá:

$$\text{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R}.$$

Substituindo tal expressão na primeira igualdade em (3.4), obtemos

$$A[ABC] = \frac{bc \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{2R}.$$

□

### 3.3.2 A Lei dos cossenos

O objetivo desse material é demonstrar e exibir algumas aplicações do teorema abaixo, que é uma generalização do Teorema de Pitágoras, conhecido como Lei dos cossenos. Antes, porém, necessitamos estender a definição de cosseno a ângulos retos e obtusos. Para tanto, considere  $\alpha$  um ângulo obtuso. Temos:

$$\begin{aligned} 90^\circ < \alpha < 180^\circ &\Leftrightarrow -180^\circ < -\alpha < -90^\circ \\ &\Leftrightarrow 0^\circ < 180^\circ - \alpha < 90^\circ. \end{aligned}$$

ou seja,  $180^\circ - \alpha$  é um ângulo. Então, para  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , definimos o cosseno de  $\alpha$  por

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha).$$

Definimos, ainda,  $\cos 90^\circ = 0$ . Mais adiante, estudaremos o cosseno em situações mais gerais e ficará claro o porquê das definições acima.

**Proposição 3.24.** Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $AB = c$ ,  $BC = a$  e  $AC = b$ . Então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}. \quad (3.6)$$

**Prova.** Iniciamos com o caso  $\hat{A} = 90^\circ$ . Como  $\cos 90^\circ = 0$ , temos:

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ = b^2 + c^2.$$

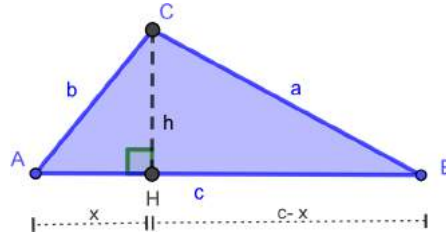
Por outro lado, como o  $\triangle ABC$  é retângulo em  $A$ , o Teorema de Pitágoras garante que

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Então de (3.6) vale nesse caso. Suponha agora, que  $\hat{A} < 90^\circ$ , seja  $H$  o pé da perpendicular

ao segmento  $AB$  passando pelo vértice  $C$ ,  $h = CH$  e  $x = AH$ . Se também tivermos  $\hat{B} < 90^\circ$  a situação é descrita (ver Figura 3.36).

Figura 3.36:  $\hat{A} < 90^\circ$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Como  $HB = c - x$  aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $HCA$  e  $HBC$ , obtemos respectivamente,

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Tais igualdades são equivalentes (também respectivamente) a

$$h^2 = b^2 - x^2 \text{ e } h^2 = a^2 + (c - x)^2,$$

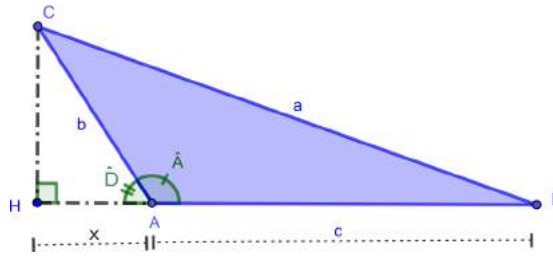
de sorte que  $b^2 - x^2 = a^2 + (c - x)^2$ . Mas,

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 = a^2 + (c - x)^2 &\Leftrightarrow b^2 - \cancel{x^2} = a^2 - c^2 + 2cx - \cancel{x^2} \\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx. \end{aligned}$$

Agora, uma vez que o triângulo  $HCA$  é retângulo (veja novamente a figura anterior), a razão  $\frac{x}{c}$ , entre o cateto oposto ao ângulo  $\hat{A}$  e a hipotenusa do triângulo, é igual a  $\cos \hat{A}$ . Daí, obtemos  $x = c \cos \hat{A}$  e, portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

Quando  $\hat{A} > 90^\circ$ , sejam  $H$  o pé da perpendicular baixada de  $C$  ao prolongamento do lado  $AB$  (ver Figura 3.37).

Figura 3.37:  $\hat{A} > 90^\circ$ 

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Seja  $h = CH$  e  $x = AH$ . Como no caso anterior, o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulos  $HAC$  e  $HBC$  fornece as igualdades

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c + x)^2,$$

ou, ainda,

$$h^2 = b^2 - x^2 \text{ e } h^2 = a^2 - (c + x)^2.$$

A partir delas, temos

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c + x)^2.$$

Também como antes,

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 = a^2 - (c + x)^2 &\Leftrightarrow b^2 - x^2 = a^2 - c^2 - 2cx - x^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cx. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\hat{BAC} > 90^\circ$  (veja novamente a figura), temos

$$\cos(\hat{BAC}) = -\cos(180^\circ - \hat{BAC}) = -\cos(\hat{HAC}).$$

Por outro lado, observando o triângulo  $HAC$ , notamos que  $\frac{x}{b} = \cos(\hat{HAC})$ . Portanto,

$$x = b \cos(\hat{HAC}) = -b \cos \hat{A},$$

e, assim, obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

□

### 3.3.3 Identidade trigonométrica

#### Arco triplo

Vamos mostrar que

$$\operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}(2x).\operatorname{cox} + \operatorname{sen}x.\operatorname{cos}(2x).$$

**Prova.**

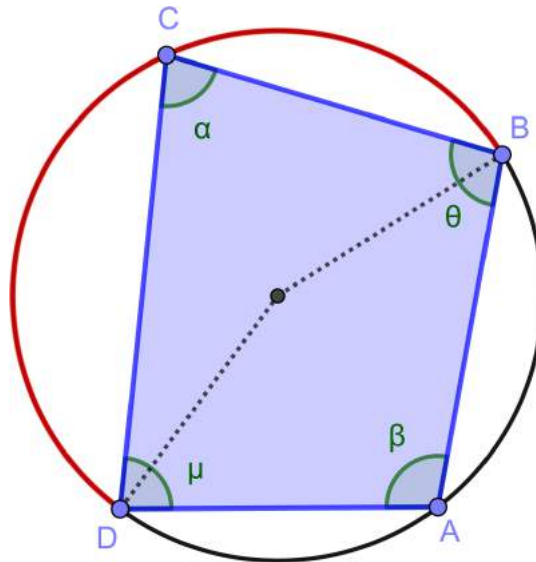
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}3x &= \operatorname{sen}(2x).\operatorname{cox} + \operatorname{sen}x.\operatorname{cos}(2x) \\ &= 2\operatorname{sen}x.\operatorname{cos}^2x + \operatorname{sen}x.(\operatorname{cos}^2 - \operatorname{sen}^2x) \\ &= 2\operatorname{sen}(1 - \operatorname{sen}^2x) + \operatorname{sen}x.\operatorname{cos}^2x - \operatorname{sen}^3x \\ &= 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3x \\ &= 4\operatorname{sen}x \left( \frac{3}{4} - \operatorname{sen}^2 \right) \\ &= 4\operatorname{sen}x \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen}x \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{sen}x \right) \\ &= 4\operatorname{sen}(\operatorname{sen}60^\circ + \operatorname{sen}x) \cdot (\operatorname{sen}60^\circ - \operatorname{sen}x) \\ &= 4\operatorname{sen}x \left[ 2\operatorname{sen} \left( \frac{60^\circ + x}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{60^\circ - x}{2} \right) \right] \cdot \left[ 2\operatorname{sen} \left( \frac{60^\circ - x}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{60^\circ + x}{2} \right) \right] \\ &= 4\operatorname{sen}x \left[ 2\operatorname{sen} \left( \frac{60^\circ + x}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{60^\circ + x}{2} \right) \right] \cdot \left[ 2\operatorname{sen} \left( \frac{60^\circ - x}{2} \right) \cdot \operatorname{cos} \left( \frac{60^\circ - x}{2} \right) \right] \\ &= 4\operatorname{sen}x \left[ \operatorname{sen} \left( 2 \cdot \frac{60^\circ + x}{2} \right) \right] \cdot \left[ \operatorname{sen} \left( 2 \cdot \frac{60^\circ - x}{2} \right) \right] \\ &= 4\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}(60^\circ + x) \cdot \operatorname{sen}(60^\circ - x) \\ &= 4\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}(60^\circ + x) \cdot \operatorname{sen}(120^\circ + x) \\ &= 4\operatorname{sen}x.\operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \operatorname{sen} \left( x + \frac{2\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

□

### 3.3.4 Teorema do quadrilátero inscrito

**Teorema 3.25.** Se um quadrilátero é inscrito numa circunferência, então os ângulos opostos são suplementares.

Figura 3.38: Quadrilátero inscrito.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Pelo teorema do ângulo inscrito, temos que o ângulo  $\alpha$  é igual à metade do arco  $\widehat{BAD}$ , ou seja  $\alpha = \frac{\widehat{BAD}}{2}$ .

Analogamente temos que o ângulo  $\beta$  é igual à metade do arco  $\widehat{BCD}$ , ou seja  $\beta = \frac{\widehat{BCD}}{2}$ .

Além disso, temos que  $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 360^\circ$ , Daí

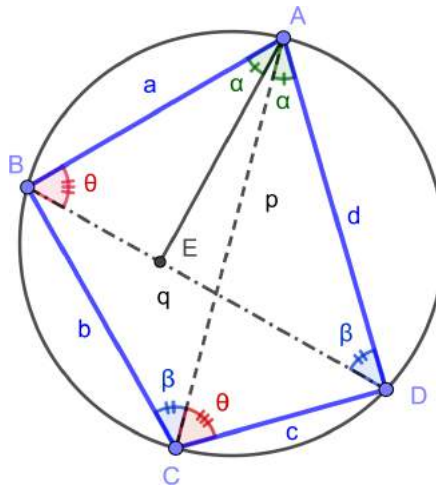
$$\frac{\widehat{BAD}}{2} + \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} \implies \alpha + \beta = 180^\circ$$

Analogamente provamos que  $\theta + \mu = 180^\circ$ , ou ainda observando que como a soma dos ângulos internos de uma quadrilátero é igual a  $360^\circ$ , segue que  $\theta + \mu = 180^\circ$ .  $\square$

### 3.3.5 Teorema de Ptolomeu

**Teorema 3.26.** (Teorema de Ptolomeu) Num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Figura 3.39: Relação de Ptolomeu: Quadrilátero inscrito.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Se  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AC = p$  e  $BD = q$ . Iremos mostrar que  $p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d$

Seja  $E$  um ponto sobre a diagonal  $BD$ , tal que  $\widehat{BAE} = \widehat{CAD} = \alpha$ . Observe que  $\widehat{ACB} = \widehat{EDA} = \beta$ , pelo fato de serem ângulos inscritos a circunferência de mesmo arco  $\widehat{AB}$ . Portanto  $\triangle AED \sim \triangle ABC$ , logo:

$$\frac{ED}{b} = \frac{d}{p} \implies ED \cdot p = b \cdot d. \quad (3.7)$$

De forma similar os triângulos  $\triangle AEB$  e  $\triangle ADC$  também são semelhantes, pois  $\widehat{ACD} = \widehat{ABE} = \theta$ , ângulos inscritos a circunferência de mesmo arco  $\widehat{AD}$ . Daí:

$$\frac{BE}{c} = \frac{a}{p} \implies BE \cdot p = a \cdot c. \quad (3.8)$$

Somando as equações (3.7) e (3.8), teremos:

$$p(ED + BE) = a \cdot c + b \cdot d \implies p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d.$$

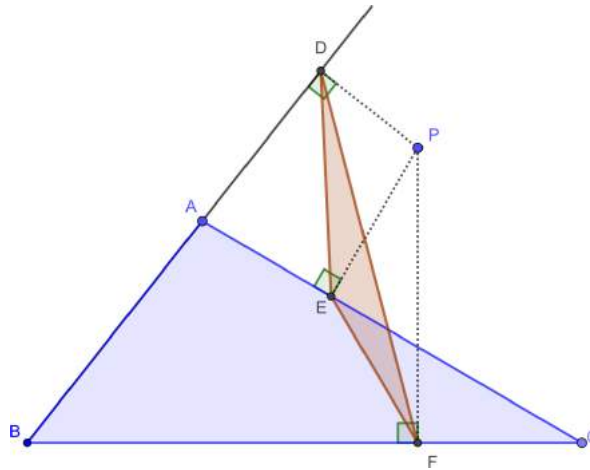
□

### 3.3.6 Desigualdade de Ptolomeu

**Teorema 3.27.** (Desigualdade de Ptolomeu) Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e  $P$  um ponto do plano deste triângulo, então  $AB \cdot CP + BC \cdot AP \geq AC \cdot BP$ . A igualdade ocorre se, e somente se o quadrilátero  $ABCP$  é inscrito.

**Prova.** Sejam  $E \in \overleftrightarrow{AC}$ ,  $F \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $D \in \overleftrightarrow{AB}$ , tais que  $PD \perp \overleftrightarrow{AB}$ ,  $PE \perp \overleftrightarrow{AC}$  e  $PF \perp \overleftrightarrow{BC}$ . Observe que  $\widehat{ADP} + \widehat{AEP} = 180^\circ$ , daí o quadrilátero  $PDAE$  é inscrito com  $AP$  diâmetro do círculo circunscrito, pelo fato de  $\widehat{AEP} = 90^\circ$ . Temos também que  $\widehat{EPD} + \widehat{DAE} = 180^\circ$ , por outro lado  $\widehat{DAE} = 180^\circ - \widehat{A}$ , onde  $\widehat{A}$  é ângulo interno do  $\triangle ABC$ . Logo por substituição  $\widehat{EPD} = \widehat{A}$ .

Figura 3.40: Desigualdade de Ptolomeu:  $PDAE$  é inscrito.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Aplicando a Lei dos senos no  $\triangle PED$ , teremos:

$$\frac{ED}{\text{sen}\widehat{A}} = AP \implies \text{sen}\widehat{A} = \frac{ED}{AP}. \quad (3.9)$$

Já aplicando a lei dos senos no  $\triangle ABC$ , temos:

$$\text{sen}\widehat{A} = \frac{BC}{2R}. \quad (3.10)$$

Sendo  $R$  o raio da circunferência circunscrita ao  $\triangle ABC$ . Comparando as equações (3.9) e (3.10), chegaremos a identidade:

$$ED = \frac{BC \cdot AP}{2R}.$$

Observe que os quadriláteros  $BFPD$  e  $CPEF$  também são inscritíveis, daí por

analogia, segaremos as identidades:

$$FD = \frac{AC \cdot BP}{2R}.$$

e

$$FE = \frac{AB \cdot CP}{2R}.$$

Da desigualdade triangular no triângulo  $DEF$ , temos:

$$FE + ED > FD \implies \frac{AB \cdot CP}{2R} + \frac{BC \cdot AP}{2R} > \frac{AC \cdot BP}{2R}.$$

Logo,

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP > AC \cdot BP.$$

Do teorema de Ptolomeu (3.3.5) temos que:

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP \geq AC \cdot BP.$$

□



## CAPÍTULO 4

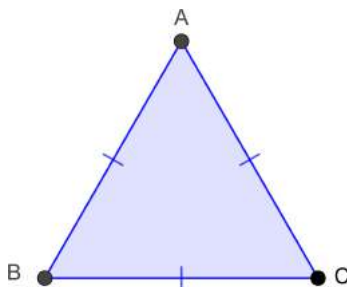
### CONSTRUÇÕES E PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Uma maneira rápida e direta de identificar um triângulo equilátero é comparando as medidas do seus lados. Se os três comprimentos forem iguais, a estrutura do triângulo é determinada. No entanto, isso nem sempre é possível. O triângulo equilátero é o único polígono em que se conhecendo apenas a medida do lado é possível determinar a estrutura completa do polígono. Desta forma, o triângulo equilátero está em companhia do círculo e da esfera cujas estruturas completas são determinadas fornecendo apenas o raio. Tomando como base os livros (DOLCE, 1985)[13] e (HARIKI, 1979)[22], introduziremos neste capítulo algumas construções e propriedades envolvendo triângulo equilátero, que são estudadas e aparecem numa variedade de contextos tanto na geometria básica quanto em tópicos mais avançados e serão bastante úteis no decorrer do nosso trabalho. Os conceitos e resultados gerais, para triângulos quaisquer, foram apresentados no capítulo anterior.

#### 4.1 Propriedades básicas

**Propriedade 4.1.** Se um triângulo é equilátero, então é equiangular.

Figura 4.1: Triângulo equilátero

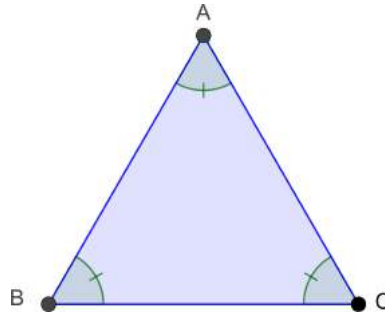


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Pelo teorema do triângulo isósceles (ver Teorema 3.14), dado que  $AB = AC$ , sabemos que  $\hat{B} = \hat{C}$  e da mesma forma se  $AC = BC$  teremos  $\hat{A} = \hat{B}$ . Portanto, pela propriedade da transitividade de congruência (ver Propriedade 3.5)  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ .  $\square$

**Propriedade 4.2.** Se um triângulo é equiangular, então é equilátero.

Figura 4.2: Triângulo equiangular.



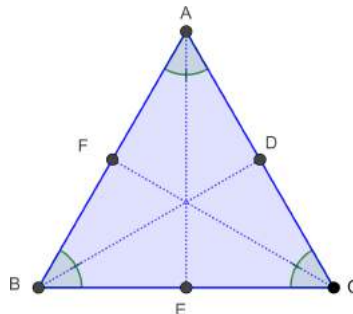
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Do teorema do triângulo isósceles, dado que  $\hat{B} = \hat{C}$ , sabemos que  $AB = AC$ , pelo mesmo teorema temos que e  $AC = BC$ , daí,  $\hat{A} = \hat{B}$  e conseqüentemente  $\hat{A} = \hat{C}$ . Portanto, pela propriedade da transitividade de congruência  $AB = AC = BC$ .  $\square$

Observe que no triângulo equilátero  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$  (Lei angular de Tales). Portanto, é um tipo especial de triângulo isósceles.

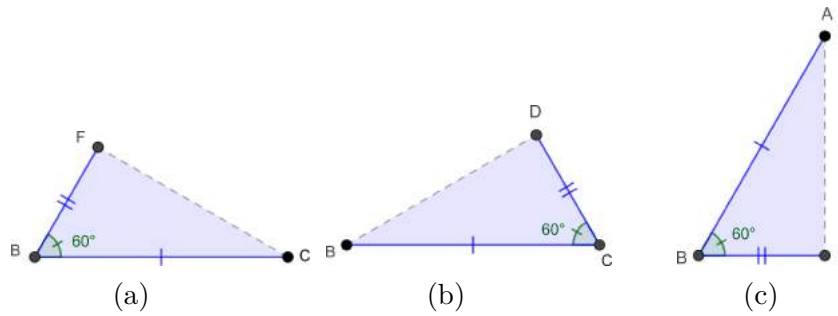
**Propriedade 4.3.** As três medianas de um triângulo equilátero têm comprimentos iguais.

Figura 4.3: Medianas de um triângulo equilátero.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Figura 4.4: Subdivisão de um triângulo equilátero em relação às medianas.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Sejam  $D$ ,  $E$  e  $F$  os pontos médios dos lados  $AC$ ,  $BC$  e  $AB$  respectivos. Se o  $\triangle ABC$  é equilátero, então:

$$AB = AC = BC.$$

Daí,

$$AB = AC.$$

Que é equivalente à,

$$\frac{AB}{2} = \frac{AC}{2}.$$

Portanto,

$$BF = DC. \quad (4.1)$$

Considere agora os triângulos  $BFC$  (Figura 4.4a) e  $CBD$  (Figura 4.4b), onde  $\widehat{CBF} = \widehat{BCD} = 60^\circ$ ,  $BF = CD$  e  $BC$  é lado comum, daí  $\triangle BFC \equiv \triangle CDB$ , pelo caso de congruência ( $LAL$ ). Portanto  $FC = BD$ .

Seja os triângulos  $BFC$  (Figura 4.4a) e  $BEA$  (Figura 4.4c), onde  $\widehat{CBF} = \widehat{AEB} = 60^\circ$ ,  $BF = BE$  e  $BC = BA$ , daí  $\triangle BFC \equiv \triangle BEA$ , pelo caso de congruência ( $LAL$ ). Portanto,  $FC = EA$  e pela propriedade transitiva de congruência  $FC = BD = EA$ .

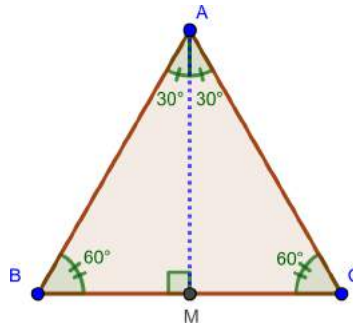
**Propriedade 4.4. Em um triângulo equilátero a mediana é também bissetriz, mediatriz e altura.**

Seja o triângulo equilátero  $ABC$ . Tracemos a mediana  $AM$  relativa ao lado  $BC$  e provemos que  $AM$  é bissetriz e altura.

Considere os triângulos  $ABM$  e  $ACM$ , então:

- $AB = AC$  (pelo fato do  $\triangle ABC$  ser equilátero).
- $BM = CM$  (definição de mediana, pois  $M$  é ponto médio de  $BC$ ).
- $AM$  (lado comum).

Figura 4.5: Triângulo equilátero: Mediana é também bissetriz e altura.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

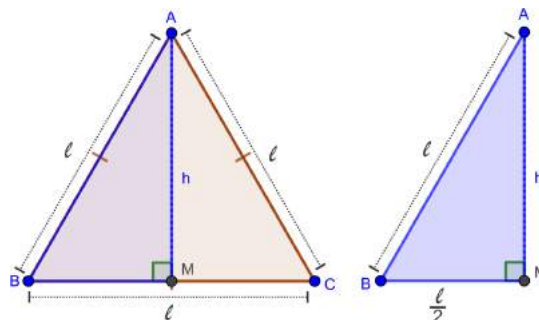
Pelo caso de congruência de triângulos ( $LLL$ ), temos  $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ . Por esses triângulos serem congruentes decorrem que:

1.  $\widehat{BAM} = \widehat{CAM} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$  e daí  $AM$  é bissetriz.
2.  $\widehat{AMB} = \widehat{AMC}$  e que são ângulos adjacentes, congruentes e suplementares, então são ângulos retos, daí  $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$ . Logo,  $AM \perp BC$  e portanto  $AM$ , é altura e mediatriz.

A demonstração da próxima propriedade é decorrente das propriedades 4.3 e 4.4 que acabamos de provar.

**Propriedade 4.5.** As altura, bissetrizes, mediatrizes e medianas de um triângulo equilátero têm o mesmo comprimento.

Figura 4.6: Comprimento da altura  $h$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Vamos encontrar o valor da altura em função das medidas dos lados do triângulo. Para isso, denotaremos como  $\ell$  o comprimento comum dos lados e  $h$  a altura no triângulo equilátero de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  (Figura 4.6).

Fazendo uso do Teorema de Pitágoras<sup>1</sup> encontramos a medida  $h$  da altura em função do lado  $\ell$  do triângulo equilátero. De fato,

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2.$$

Então,

$$\frac{4\ell^2 - \ell^2}{4} = \frac{4h^2}{4}.$$

E, daí,

$$4h^2 = 3\ell^2.$$

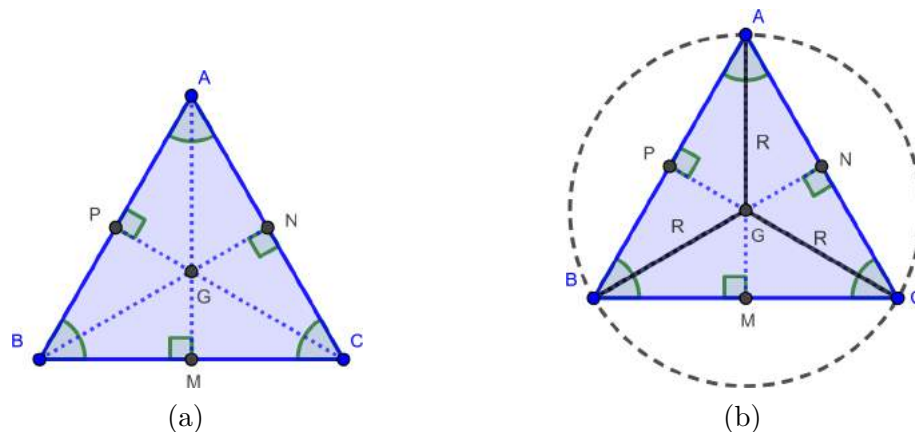
Chegamos a igualdade,

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

A propriedade a seguir decorre da Propriedade 4.4.

**Propriedade 4.6.** No triângulo equilátero o baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro coincidem.

Figura 4.7: Ponto comum as bissetrizes, medianas e alturas.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Este ponto comum equidista dos vértices e, portanto, é centro de uma circunferência que os contém. Para vermos isso, considere o triângulo equilátero  $ABC$  (Figura 4.7a),  $G$  representa o baricentro e  $M$ ,  $N$  e  $P$  são os pontos médios dos lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  respectivamente, já vimos que pelo caso de congruência de triângulos ( $LLL$ ), temos  $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ . observe também que:

- $BM = CM$  (definição ponto médio).

<sup>1</sup>O teorema de Pitágoras é uma relação matemática entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo. Na geometria euclidiana, o teorema afirma que: “Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.”

- $GM$  (lado comum).
- $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$  (por serem ângulos adjacentes, congruentes e suplementares).

Então,  $\triangle BMG \equiv \triangle CMG$  pelo caso  $LAL$ , portanto  $BG = CG$ . Analogamente os triângulos  $AGN$  e  $CGN$  também são congruentes, que nos dá  $AG = CG$ , logo:  $BG = CG = AG = R$ , onde  $R$  é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ , os segmentos  $GP$ ,  $GM$  e  $GN$  são iguais e, portanto,  $G$  é também o centro de uma circunferência de raio  $r$  inscrita no triângulo. A partir de agora chamaremos este ponto comum de centro do triângulo.

**Propriedade 4.7.** A área  $S$  do triângulo equilátero, conhecendo a altura em função da medida do lado  $\ell$ , pode ser encontrada utilizando o resultado:

$$S = \frac{\ell \cdot h}{2}.$$

Daí,

$$S = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2}.$$

Portanto,

$$S = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}.$$

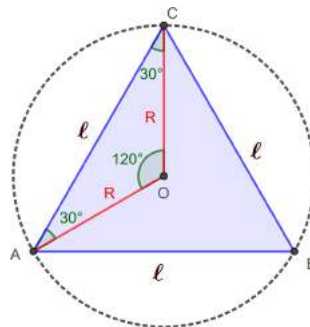
## 4.2 Triângulo equilátero inscrito

Veremos na sequência duas propriedades que envolvem o raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero.

**Propriedade 4.8. Lado em função do raio.**

Seja o  $\triangle ABC$  equilátero inscrito a uma circunferência de raio  $R$ .

Figura 4.8: Triângulo equilátero inscrito.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

No triângulo  $\triangle AOC$  (ver figura 4.8), observe que  $AO = CO = R$ . Por outro lado, o  $\widehat{AOC} = 120^\circ$ , daí aplicando a Lei dos cossenos no  $\triangle AOC$ , teremos

$$AC^2 = AO^2 + CO^2 - 2AO \cdot CO \cdot \cos 120^\circ$$

Fazendo  $AB = \ell$  temos,

$$\ell^2 = R^2 + R^2 + R^2.$$

Então,

$$\ell^2 = 3R^2.$$

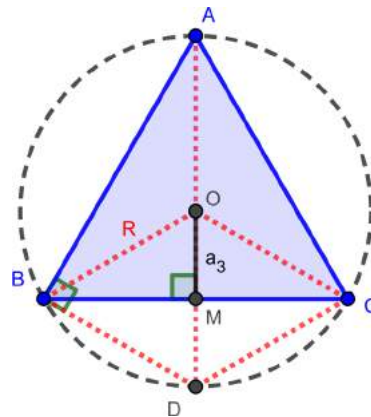
Portanto,

$$\ell = R\sqrt{3}.$$

#### Propriedade 4.9. Apótema em função do raio.

O apótema de um triângulo equilátero é o seguimento de reta que une o circuncentro do triângulo ao ponto médio de qualquer um dos lados, então considere o  $\triangle ABC$  equilátero inscrito a uma circunferência de raio  $R$ .

Figura 4.9: Apótema de um triângulo equilátero em função do raio de um



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Fazendo  $OM = a_3$  onde  $a_3$  representa o apótema, e sendo o quadrilátero  $OBDC$  um losango, temos:

$$OM = \frac{OD}{2}.$$

Logo,

$$a_3 = \frac{R}{2}.$$

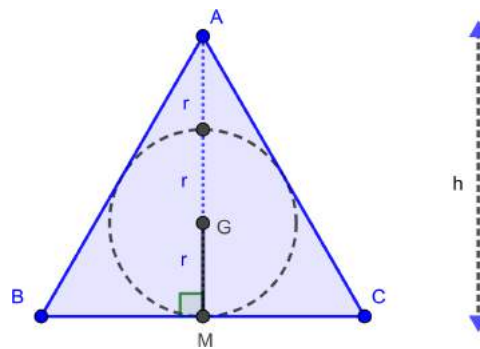
### 4.3 Triângulo equilátero circunscrito

Na sequência duas propriedades que envolvem o raio da circunferência inscrita ao triângulo equilátero.

#### Propriedade 4.10. Apótema em função do raio.

A medida apótema  $OM = a_3$  de um triângulo equilátero é igual a medida do raio  $r$  da circunferência inscrita a ele (ver Figura 4.10). Considere o  $\triangle ABC$  equilátero circunscrito a uma circunferência de raio  $r$ .

Figura 4.10: Triângulo equilátero circunscrito.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

$$a_3 = r.$$

#### Propriedade 4.11. Lado em função do raio.

Como a altura coincide também com a mediana,

$$h = AM = 3r.$$

Então,

$$3r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}.$$

Daí,

$$\ell\sqrt{3} = 6r.$$

Logo,

$$\ell = \frac{6r}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).$$

Portanto,

$$\ell = 2r\sqrt{3}.$$



## 4.4 Algumas construções do triângulo equilátero

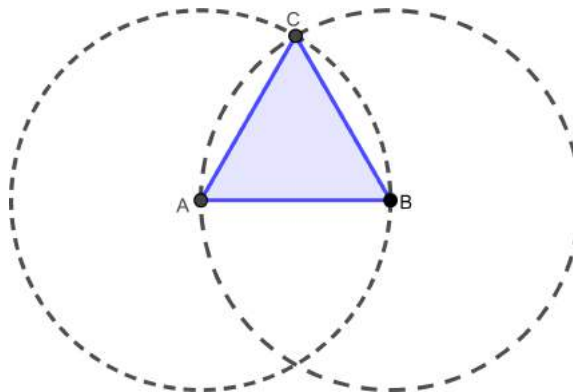
No capítulo anterior apresentamos a construção de um triângulo equilátero tal qual aparece na primeira proposição do primeiro livro de “The Elements” de Euclides, dado o comprimento de um lado. Nessa secção apresentamos uma versão mais didática dessa construção e mais outras duas que são construções de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

### 4.4.1 Construção de um triângulo equilátero a partir de um lado

Existem várias possibilidades para a construção de triângulos equiláteros cuja a medida do lado é conhecida. Pode-se utilizar de régua e compasso, como também softwares, esta construção usa como argumento a propriedade do triângulo equilátero possuir os três lados congruentes, ou seja, possuem o mesmo comprimento. Então o que fazemos é traçar três segmentos congruentes de modo que suas extremidades sejam coincidentes, duas a duas.

- Trace um segmento  $AB$ .
- Com a ponta seca do compasso no ponto  $A$  e uma abertura igual a  $AB$ , descrevemos um arco cujo raio será igual à  $AB$ .
- Com a ponta seca em  $B$  e mesma abertura  $AB$ , descrevemos um outro arco, que intersecta o primeiro no ponto  $C$ .
- Unindo os pontos  $A$  com  $C$ ,  $B$  e  $C$ , obtemos o triângulo equilátero desejado (ver Figura 4.11).

Figura 4.11: Construção do triângulo equilátero dado um lado.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Justificativa:**

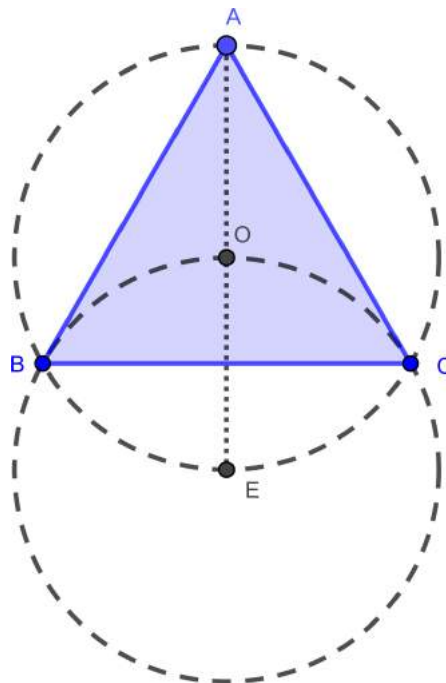
O  $\triangle ABC$  é equilátero, pois,  $B$  e  $C$  pertencem a circunferência com centro em  $A$ . Logo  $AC = AB$ . Por outro lado,  $A$  e  $C$  pertencem a circunferência de centro em  $B$ , daí  $AB = BC$ . Portanto, pela propriedade da transitividade de congruência (ver Propriedade 3.5)  $AB = AC = BC$ .

#### 4.4.2 Construções de um triângulo equilátero a partir de uma circunferência

##### 1º método

- Construa uma circunferência de raio qualquer de centro  $O$ .
- Traçe um diâmetro da circunferência, marcando os pontos  $A$  e  $E$ .
- Com centro em  $E$  e raio  $OA$  ou  $OE$ , traçe um arco que intersecte a circunferência nos dois pontos  $B$  e  $C$ .

Figura 4.12: Construções de um triângulo equilátero 1º método.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Justificativa: O triângulo com vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  é equilátero.**

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  dividem a circunferência em três partes iguais, ou seja, os arcos  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$  e  $\widehat{CA}$  são congruentes (tem a mesma medida). Daí as cordas  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  da

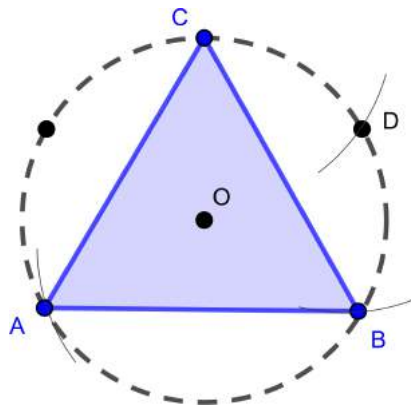
circunferência, também são congruentes. Logo, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices de um triângulo equilátero (os três lados tem medidas iguais) (ver Figura 4.12).

## 2º método

Usaremos nessa construção a propriedade do triângulo equilátero que diz que os três ângulos internos são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida de  $60^\circ$ . Então dividiremos a circunferência em três arcos congruentes, limitadas pelos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

- Construa uma circunferência de raio qualquer de centro  $O$ .
- Marcamos um ponto qualquer na circunferência, por exemplo  $C$ .
- Com raio igual a  $OC$ , posicionamos a ponta seca do compasso em  $C$  e descrevemos um arco, marcando o ponto  $D$  na intersecção com a circunferência.
- Com mesmo raio  $OC$ , com centro em  $D$ , descrevemos um novo arco marcando como  $B$  a intersecção com a circunferência.
- Com raio igual a  $BC$  e com a ponta seca do compasso em  $C$ , descrevemos um arco marcando o ponto  $A$  a intersecção com a circunferência.
- Unindo os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , obtemos o triângulo equilátero (ver Figura 4.13).

Figura 4.13: Construções de um triângulo equilátero 2º método.



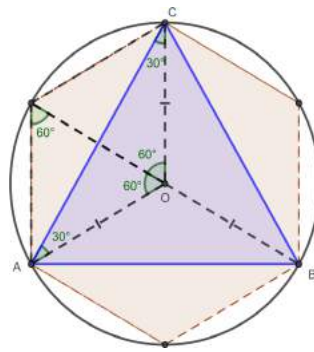
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

## Justificativa:

Cada lado de um hexágono regular forma com o centro da circunferência circunscrita a ele, um ângulo central de medida  $60^\circ$ . Então, cada lado do  $\triangle ABC$  forma com o centro da circunferência circunscrita ele, um ângulo central de medida  $120^\circ$  (ver Figura 4.14). Daí, o  $\triangle AOC$  é isósceles, pois  $OA = OC$  (comprimento do raio). Por outro

lado as medidas dos ângulos  $O\hat{C}A = O\hat{A}C = 30^\circ$  (teorema do ângulo interno de um triângulo). Então,  $\triangle AOC \equiv \triangle BOC \equiv \triangle AOB$ , pelo caso de congruência *LAL*. Logo,  $O\hat{C}B = O\hat{C}A = 30^\circ$ . Então, por substituição  $A\hat{C}B = 60^\circ$ . De maneira similar, temos  $A\hat{C}B = A\hat{B}C = B\hat{A}C = 60^\circ$ , portanto o  $\triangle ABC$  é equilátero.

Figura 4.14: Justificativa da construções de um triângulo equilátero 2º método.



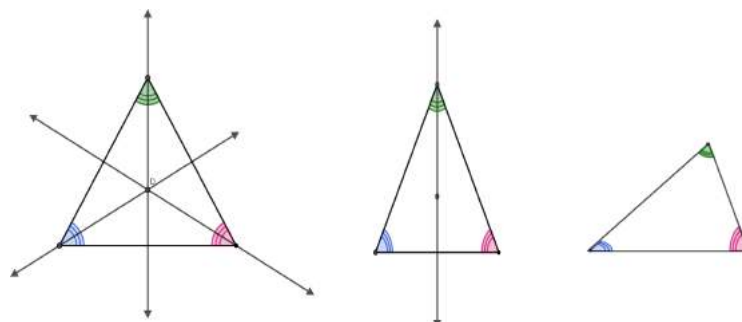
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

## 4.5 Simetrias de um triângulo equilátero

A simetria pode ser observada em algumas formas geométricas e representa semelhança exata da forma em torno de uma determinada linha reta, ponto ou plano. Se, ao rodarmos a figura, invertendo-a, por meios de transformações geométricas associadas a reflexão, rotação ou translação e ela for mapeada ponto por ponto (segundo os princípios da geometria euclidiana) ela é simétrica. É o caso das imagens refletidas por um espelho. O triângulo equilátero, possui 6 simetrias, três linhas de simetrias em que o triângulo é refletido através de linhas que passam pelo vértice e ponto médio do lado oposto (retas que são suportes as alturas, medianas ou bissetrizes) e três simetrias rotacionais em que o triângulo é girado  $0^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  sobre o seu centro (baricentro, icentro, circuncentro ou ortocentro).

Observe que, o triângulo equilátero tem três linhas de simetria (ver Figura 4.15), o triângulo isósceles tem uma linha, e o o triângulo escaleno não tem nenhum.

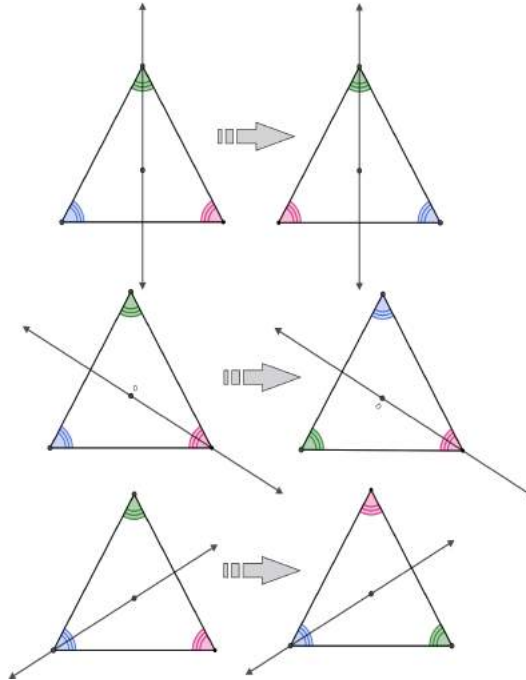
Figura 4.15: Simetria em triângulos.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Observe que, o triângulo equilátero espelhado em torno de cada um desses eixos produz uma simetria (ver Figura 4.16).

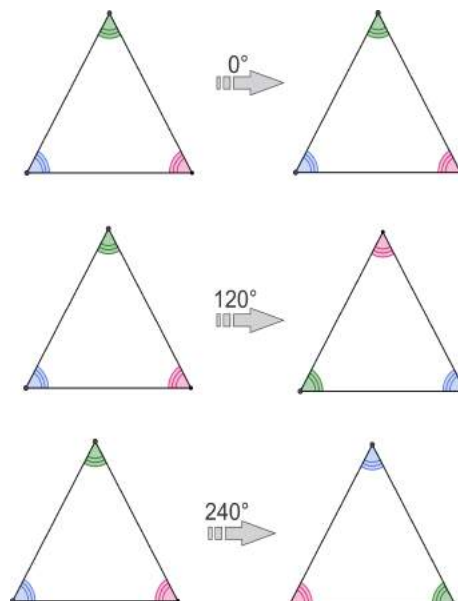
Figura 4.16: Simetria em torno de eixos



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Na Figura 4.17 temos as simetrias rotacionais de um triângulo equilátero que é girado  $0^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  sobre o seu centro.

Figura 4.17: Simetrias rotacionais



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

## CAPÍTULO 5

# TEOREMAS ENVOLVENDO TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

No capítulo anterior vimos propriedades básicas do triângulo equilátero com demonstrações que muitas vezes são negligenciadas ao serem apresentadas para os alunos do ensino básico de uma forma bem simplificada. Mostramos que, podemos introduzir essas propriedades de uma forma detalhada com argumentações e demonstrações. Nesse capítulo, pensamos que o estudo do triângulo equilátero pode ser explorado por meio de diversas abordagens e aqui estamos propondo formas e meios de inserir, a medida que nos aprofundamos no estudo do triângulo equilátero, teoremas e propriedades surpreendentes desse polígono e ilustraremos essa ideia através de discussões e utilizando as demonstrações como agentes motivadores da aprendizagem. Mais importante que os teoremas, são suas provas e ideias, e é nisso que iremos nos concentrar. Os teoremas podem até não parecer úteis a primeira vista, mas no decorrer das demonstrações e com a utilização de determinadas técnicas, percebemos vários tópicos da geometria básica em todas as passagens das demonstrações.

O triângulo equilátero tem algumas propriedades e teoremas especiais que geralmente não são válidos em um triângulo arbitrário. Essas propriedades foram estudadas por muitos matemáticos famosos, como Napoleão, Morley, Van Schooten, Viviani, Fermat, Pompeiu, Torricelli entre outros. Alguns desses teoremas foram descobertos por mim, durante estudos e pesquisas para disciplina Geometria que faz parte da matriz curricular do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Daí tive a ideia de adequar alguns meios de demonstrações para o nível básico, testando e combinando diferentes ferramentas matemáticas, revisitando resultados bem conhecidos da geometria básica como axiomas e propriedades da geometria plana, lei dos senos, lei dos cossenos, identidades trigonométricas, casos de congruência, teorema da área, entre outras. Em uma das seções transportamos o triângulo equilátero para o sistema de coordenadas

cartesianas para dar visibilidade aos seus elementos como as coordenadas dos vértices e dos pontos notáveis onde podemos utilizar softwares educativos como GeoGebra para este fim. Vimos que quanto mais se considera o triângulo equilátero mais pode-se encontrar propriedades e relações adicionais, e esse processo de investigação e descoberta contribuem muito para a melhoria da educação matemática, tanto para com os professores como para alunos no Ensino Médio.

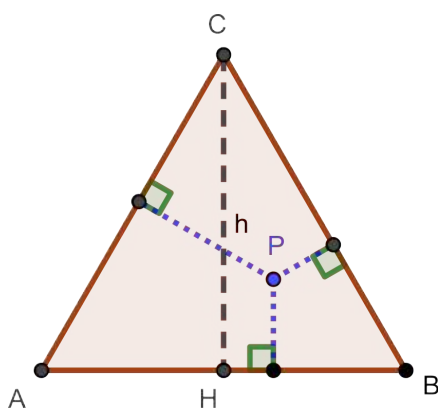
## 5.1 Teorema de Viviani

Vincenzo Viviani (1622 -1703) foi um matemático e físico italiano. Galileo Galilei, ficou tão impressionado com o talento de Viviani que o contratou como um colaborador com apenas 17 anos, sendo seu primeiro biógrafo. Em 1656, Viviani editou a primeira edição das obras coletadas de Galileu. Reconstruiu também escritos de Arquimedes e Euclides. É dele o teorema que apresentaremos abaixo. Teorema esse que destaca uma propriedade surpreendente dos triângulos equiláteros. Veremos duas demonstrações desse teorema. A primeira demonstração é bem simples e pode ser explorado conhecimentos de área de um triângulo (PICKOVER, 2009)[33].

**Teorema 5.1.** A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante e igual à medida da altura do triângulo.

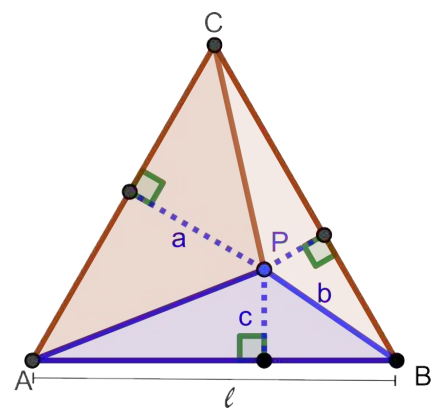
**Prova.** Considere um triângulo equilátero  $\triangle ABC$  de altura  $h$  e lado  $\ell$ , seja  $P$  um ponto qualquer do  $\triangle ABC$  (ver Figura 5.1), denote por  $S_1$  a área do  $\triangle APB$ ,  $S_2$  a área do  $\triangle APC$ ,  $S_3$  a área do  $\triangle BPC$  e  $S$  a área do  $\triangle ABC$  (ver Figura 5.2). Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas das distâncias de  $P$  aos lados  $AC$ ,  $BC$  e  $AB$ , respectivamente.

Figura 5.1:  $P$  ponto qualquer do  $\triangle ABC$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Figura 5.2: Triângulos:  $\triangle APB$ ,  $\triangle APC$  e  $\triangle BPC$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Então,

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

Daí,

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot HC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot c + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot a + \frac{1}{2} \cdot CB \cdot b.$$

Nesse caso, teremos

$$\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot c + \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot b.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \ell (a + b + c).$$

Portanto,

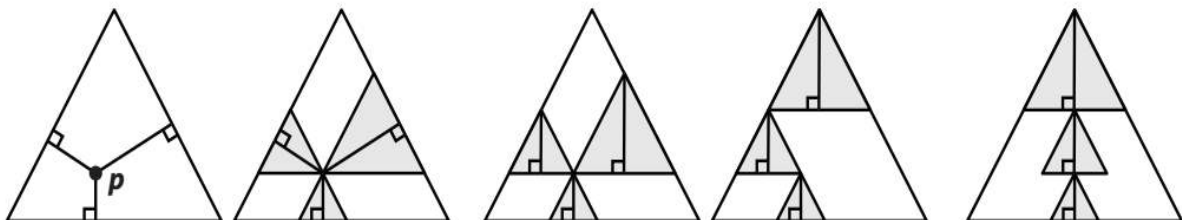
$$h = a + b + c.$$

□

Nessa segunda demonstração que apresentaremos do Teorema de Viviani não precisaremos de palavras (KAWASAKIR, 2005)[24].

**Prova.** .

Figura 5.3: Prova do Teorema de Viviani.



Fonte: (KAWASAKIR, 2005).

□

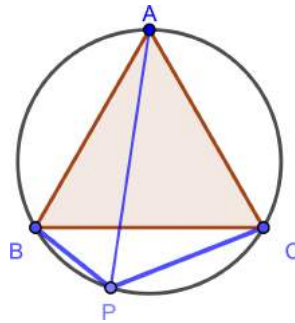
## 5.2 Teorema de Van Schooten

Frans Van Schooten nascido em 1615, em Leyden, Países Baixos, faleceu na mesma cidade em 29 de maio de 1660. Foi um dos principais a promover a propagação da geometria cartesiana [8]. Um de seus teoremas que apresentaremos nessa seção tem como pano de fundo o triângulo equilátero. Veremos duas demonstrações utilizando ferramentas da geometria básica.

**Teorema 5.2.** Para um ponto  $P$  pertencente a circunferência circunscrita a um triângulo equilátero  $ABC$ , o maior dos segmentos  $PA$ ,  $PB$  ou  $PC$  é a soma dos dois segmentos mais curtos, ou seja, sendo  $PA$  o maior segmento então:  $PA = PB + PC$ .



Figura 5.4:  $P$  pertencente a circunferência circunscrita a um triângulo equilátero  $ABC$ .

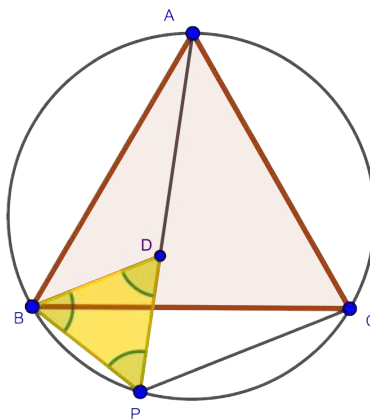


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Dividiremos essa primeira demonstração em etapas, para que se tenha uma abordagem mais didática utilizando passo a passo conhecimentos da geometria básica (ANDREESCU, 2013)[2].

- i) Marque um ponto  $D$  no segmento  $PA$  de tal forma que  $PD = PB$ , provemos que o triângulo  $PBD$  é equilátero (ver Figura 5.5).

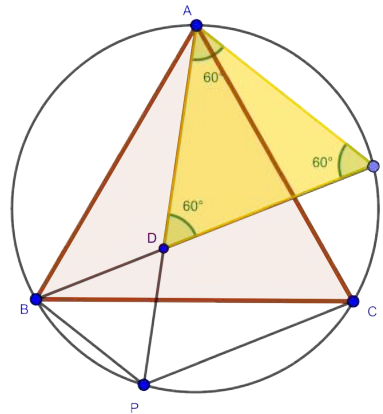
Figura 5.5: Triângulo  $PBD$  equilátero.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

De fato, os ângulos  $\widehat{DPB} = \widehat{APB} = 60^\circ$  (ângulo um inscrito) e  $PD = PB$  (por construção), portanto o triângulo  $PBD$  é isóscele de base  $BD$  e possui seus ângulos das bases iguais, daí pelo teorema dos ângulos internos de um triângulo.  $\widehat{PBD} = \widehat{PDB} = 60^\circ$ . Logo, o triângulo  $PBD$  é equilátero.

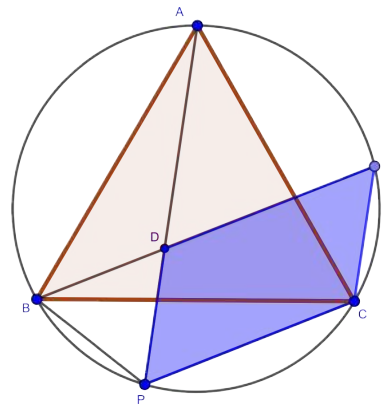
- ii) Trace agora uma corda  $BE$  passando por  $D$ , e vejamos que o triângulo  $ADE$  também é equilátero (ver Figura 5.6).

Figura 5.6:  $ADE$  é equilátero.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Observe que os  $\widehat{AEB} = \widehat{AED} = 60^\circ$  (ângulo inscrito) e  $\widehat{ADE} = \widehat{BDP} = 60^\circ$  (opostos ao vértice  $D$ ), conseqüentemente  $\widehat{DAE} = 60^\circ$  (teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo). Portanto, o triângulo  $ADE$  é equilátero.

iii) Por último provemos que o quadrilátero  $PCED$  (ver Figura 5.7) é um paralelogramo.

Figura 5.7: Paralelogramo  $PCED$ .

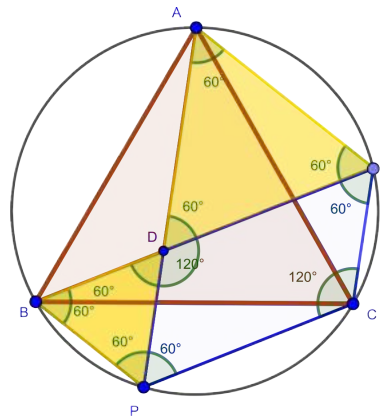
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

De fato,  $\widehat{APC} = \widehat{CPD} = \widehat{BEC} = \widehat{CED} = 60^\circ$  (ângulos inscritos) e  $\widehat{PDE} = 120^\circ$  por ser suplementar ao ângulo  $\widehat{ADE} = 60^\circ$ . Daí,

$$\widehat{PCE} = 360^\circ - (\widehat{DPC} + \widehat{CED} + \widehat{PDE}) = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 120^\circ) = 120^\circ.$$

O que mostra que os ângulos opostos do quadrilátero  $PCED$  são iguais. Portanto, o quadrilátero  $PCED$  é um paralelogramo.

iv) Observando a Figura 5.8, concluiremos neste item a prova do teorema 5.2.

Figura 5.8:  $PA = PB + PC$ 

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

De fato,

$$PA = PD + DA \implies PA = PB + DE \implies PA = PB + PC.$$

□

Faremos uma outra prova do Teorema de Van Schooten de uma forma bem rápida, utilizando o Teorema de Ptolomeu (3.3.5).

**Prova.** De fato, aplicando o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero  $PBAC$  inscrito na circunferência (ver Figura 5.4), temos

$$PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB.$$

Como o  $\triangle ABC$  é equilátero  $AB = AC = BC$ , teremos

$$PA \cdot \cancel{BC} = PB \cdot \cancel{AC} + PC \cdot \cancel{AB}.$$

Portanto,

$$PA = PB + PC.$$

□

O Teorema de Van Schooten abordou o caso quando o ponto  $P$  pertence a circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ . O caso em que o ponto  $P$  não pertence a circunferência será abordado pelo nosso próximo teorema, o Teorema de Pompeiu.

## 5.3 Teorema de Pompeiu

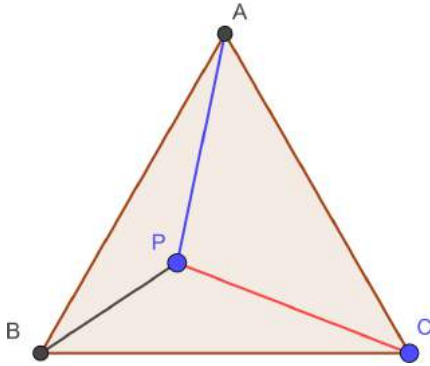
Dimitrie Pompeiu (1873-1954), foi um matemático romeno, cujas contribuições foram principalmente no campo da análise matemática, teoria de funções complexas e mecânica racional. Em um artigo publicado em 1929, ele apresentou uma conjectura desafiadora em geometria integral, hoje amplamente conhecida como o problema de Pompeia. O Teorema que apresentamos aqui que leva seu nome e foi publicado em 1936, é um teorema simples que aborda o “triângulo equilátero” e tem uma demonstração rica em propriedades da geometria plana (QUINES, 2018)[35]. Afirma o seguinte.

**Teorema 5.3.** Dado um triângulo equilátero  $ABC$  no plano e um ponto  $P$  no plano do triângulo  $ABC$ , os comprimentos  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  formam os lados de um triângulo.

Vamos dividir a demonstração em três situações:

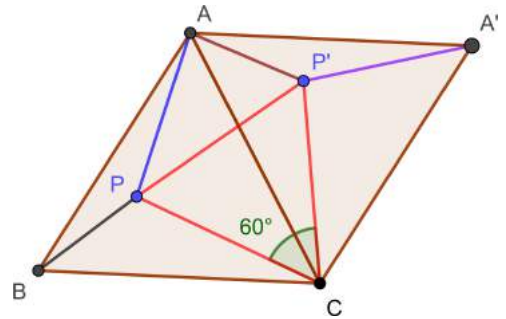
- i) O ponto  $P$  pertence a região interna do triângulo.

Figura 5.9:  $P$  no plano do  $\triangle ABC$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Figura 5.10: Rotação de  $60^\circ$  do  $\triangle ABC$  em torno de  $C$ .

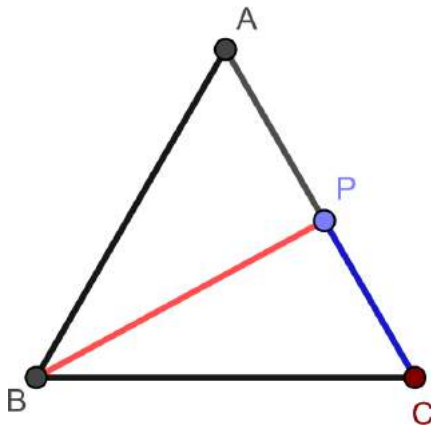


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Rotacionando o triângulo  $60^\circ$  em torno do vértice  $C$  encontraremos  $A'$  e  $P'$  as imagens respectivas de  $A$  e  $P$ . Observe que  $B$  coincide com  $A$  após a rotação. Olhando para o triângulo  $PP'A$  vemos que o lado  $P'A$  é a imagem de  $PB$ , ou seja,  $P'A = PB$  e o triângulo  $PP'C$  é equilátero, pois  $\widehat{PCP'} = 60^\circ$  e  $PC = P'C$  com cada ângulo da base  $PP'$  do triângulo  $PP'C$  medindo  $60^\circ$ . Daí  $PP' = PC$ , então segue que os lados do triângulo  $PP'A$  são  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$ .  $\square$

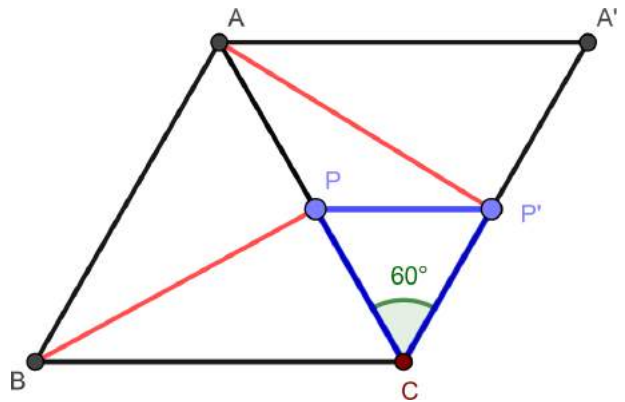
- ii) O ponto  $P$  pertence ao lado do triângulo.

Figura 5.11:  $P$  pertence lado do  $\triangle ABC$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Figura 5.12: Rotação de  $60^\circ$  do  $\triangle ABC$  em torno do vértice  $C$ .

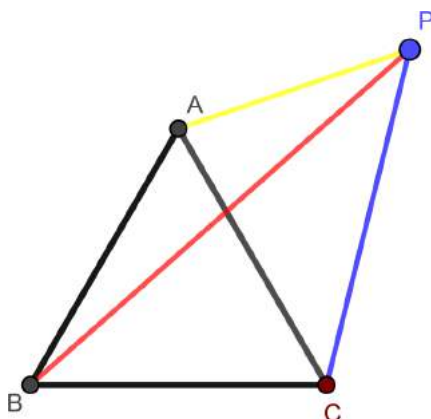


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Rotacionando o triângulo  $60^\circ$  em torno do vértice  $C$  encontraremos  $A'$  e  $P'$  as imagens respectivas de  $A$  e  $P$ . Observe que  $B$  coincide com  $A$  após a rotação. Olhando para o triângulo  $PP'A$  vemos que o lado  $P'A$  é a imagem de  $PB$ , ou seja,  $P'A = PB$  e o triângulo  $PP'C$  é equilátero, pois  $\widehat{PCP'} = 60^\circ$  e  $PC = P'C$  com cada ângulo da base  $PP'$  do triângulo  $PP'C$  medindo  $60^\circ$ . Daí  $PP' = PC$ , então segue que os lados do triângulo  $PP'A$  são  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$ .  $\square$

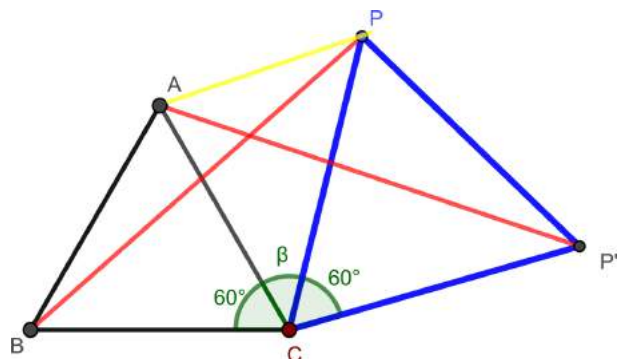
iii) O ponto  $P$  pertence a região exterior ao triângulo.

Figura 5.13:  $P$  pertence a região exterior ao  $\triangle ABC$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Figura 5.14: Rotação de  $60^\circ$  do segmento  $PC$  em torno do ponto  $C$ .



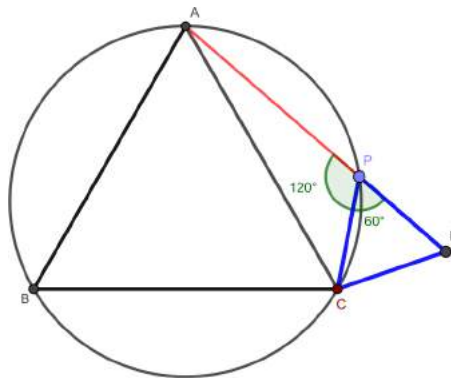
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

**Prova.** Rotacionando em torno do ponto  $C$  segmento  $PC$   $60^\circ$  no sentido horário encontrando  $P'$  e observe que o triângulo  $PCP'$  é equilátero, pois  $PCP'$  é isósceles com  $PC = P'C$  e o ângulo entre eles mede  $60^\circ$ , ou seja,  $\widehat{PCP'} = 60^\circ$ . Daí, os ângulos da base

do  $PP$  também mede  $60^\circ$ . Observe também que o  $\triangle PBC \equiv \triangle ACP'$  pelo caso  $LAL$  com  $BC = AC$ ,  $PC = P'C$  e  $\widehat{PCB} = \widehat{ACP}'$ . por fim observe que o triângulo  $APP'$  possui medidas  $AP$ ,  $PB$  e  $PC$  que são lados de um triângulo de Pompeiu.  $\square$

Segue que  $A$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares se e somente se  $P$  pertencer a circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ , então o triângulo  $PP'A$  é dito degenerado. observe na figura 5.15 que o ângulo  $\widehat{APC} = 120^\circ$  (ângulo inscrito) e o ângulo  $\widehat{CPP}' = 60^\circ$ , pois  $PP'C$  é equilátero.

Figura 5.15:  $A$ ,  $P$  e  $P'$  são colineares.



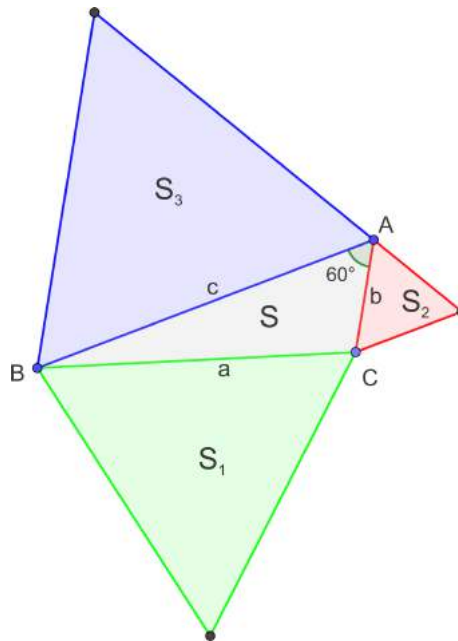
Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

## 5.4 Teorema de Eutrigon

Eutrigon é um triângulo com um ângulo de  $60^\circ$  podendo ter outro ângulo de  $60^\circ$ . Assim teríamos um triângulo equilátero (ROBERTS, 2003)[39]. Nessa secção, iremos oferecer duas demonstrações de um teorema envolvendo o Eutrigon que traz algumas propriedades que se harmoniza com as do Teorema de Pitágoras, mas com o protagonismos para o triângulo equilátero. O lado que se opõe ao ângulo de  $60^\circ$  aqui também chamaremos de “hipotenusa” para fazer uma referência ao Teorema de Pitágora.

**Teorema 5.4** (Teorema de Eutrigon). Se traçamos triângulos equiláteros sobre os lados suportes do eutrigon, a soma da área do triângulo sobre a “hipotenusa” e da área do eutrigon coincide com a soma das áreas dos outros dois triângulo equiláteros.

O teorema afirma que, a soma das áreas  $S$  com  $S_1$  coincide com a soma das áreas  $S_2$  e  $S_3$  (ver Figura 5.16)

Figura 5.16:  $S + S_1 = S_2 + S_3$ .

Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Ofereceremos dois métodos para provar o Teorema de Eutrigon, no primeiro método utilizaremos conhecimentos prévios da geometria básica e no segundo método não precisaremos de palavras:

**Prova.** Queremos mostrar que se  $\hat{A} = 60^\circ \implies S + S_1 = S_2 + S_3$ . De fato, utilizando o teorema da área nas somas  $S + S_1$  e  $S_2 + S_3$ , temos

$$\begin{aligned}
 S + S_1 &= \frac{1}{2}bc \cdot \text{sen}60^\circ + \frac{1}{2}a^2 \cdot \text{sen}60^\circ \\
 &= \frac{1}{2}\text{sen}60^\circ(bc + a^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (bc + a^2) \implies \boxed{S + S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (bc + a^2)}. \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 S_2 + S_3 &= \frac{1}{2}b^2 \cdot \text{sen}60^\circ + \frac{1}{2}c^2 \cdot \text{sen}60^\circ \\
 &= \frac{1}{2}\text{sen}60^\circ(b^2 + c^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (b^2 + c^2) \implies \boxed{S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (b^2 + c^2)}. \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, recorrendo a Lei dos cossenos (3.3.2) e fazendo  $\hat{A} = 60^\circ$ , teremos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ.$$

Então, como  $2 \cos 60^\circ = 1$ , vem

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \implies bc + a^2 = b^2 + c^2$$

Multiplicando ambos os membros da equação por  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , chegaremos a igualdade

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (bc + a^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (b^2 + c^2). \quad (5.3)$$

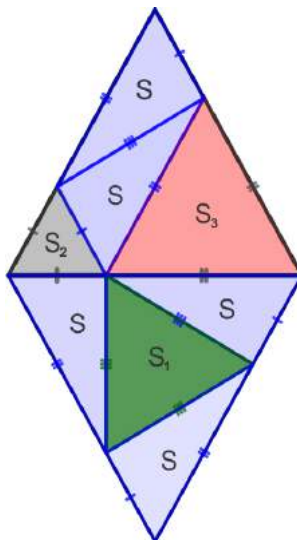
Portando, substituindo (5.1) e (5.2) em (5.3), temos

$$S + S_1 = S_2 + S_3.$$

□

**Prova sem palavras**([ROBERTS, 2003](#))[39].

Figura 5.17: Teorema de Eutrigon.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

□

## 5.5 Teorema de Napoleão

Napoleão Bonaparte (15 de agosto de 1769 a 5 de maio de 1821) foi um general militar e primeiro imperador da França, considerado um dos maiores líderes militares do mundo. Ficou conhecido por suas muitas conquistas durante sua vida. No entanto, é um fato pouco conhecido que Napoleão tinha um interesse pela matemática. Napoleão foi

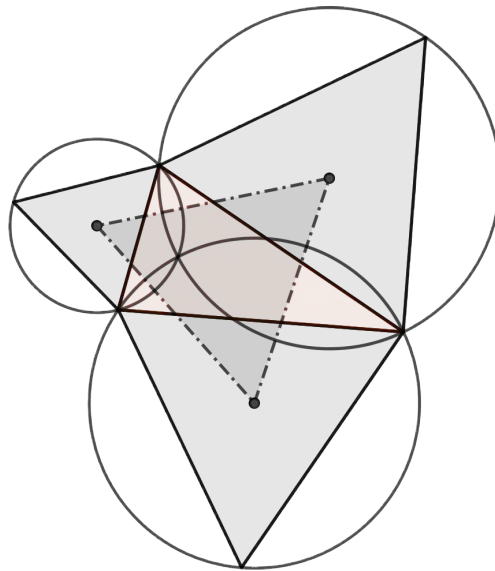


relatado por biógrafos sobre seu talento para matemática desde a infância, e interagiu com grandes matemáticos e cientistas de sua época, incluindo Fourier, Monge, Laplace e Lagrange. Monge e Fourier o acompanharam na expedição de 1798 ao Egito, junto com 150 outros cientistas e engenheiros, com quem Napoleão realizou longas discussões sobre assuntos científicos. Mas, apesar desses relatos, não existem evidências que nos possa levar mais longe e o “Teorema de Napoleão” é, como muitos outros resultados matemáticos, atribuído geralmente a alguém que pouco teve a ver com sua descoberta ou sua prova. Na realidade é um teorema que frequentemente é reinventado e ampliado (CRONIN, 2014)[11].

Usaremos na demonstração feita nessa secção com base em ( MARTINI, 1996)[28], a lei dos cossenos, teorema da área, razões trigonométricas e outros conhecimentos básicos de geometria.

**Teorema 5.5.** Se construirmos três triângulos equiláteros a partir dos lados de um triângulo qualquer, então os centros das circunferências que os circunscrevem são vértices de um triângulo equilátero.

Figura 5.18: Três triângulos equiláteros a partir dos lados de um triângulo qualquer.

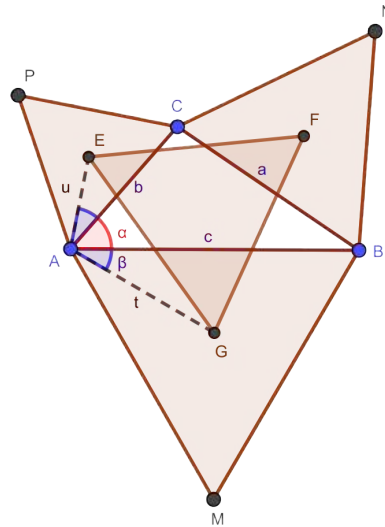


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Para provarmos esse teorema seguiremos algumas etapas, as quais descreveremos a seguir.

**Prova.** Considere um triângulo arbitrário  $ABC$ , denotando os respectivos centros dos triângulos equiláteros voltados para fora, nos lados  $AB$ ,  $AC$ , e  $BC$  por  $E$ ,  $F$  e  $G$ . Com lados de comprimento  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$  (ver Figura 5.19).

Figura 5.19: Triângulo de Napoleão.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

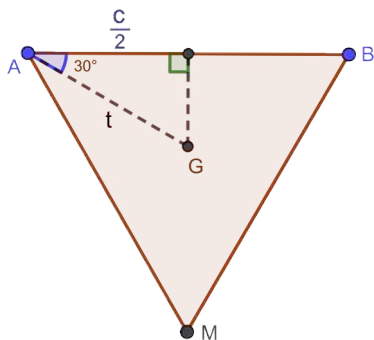
- i) Iremos inicialmente mostrar que nos triângulos equiláteros  $\triangle ABM$  e  $\triangle APC$ ,  $\widehat{EAC} = \widehat{GAB} = \beta = 30^\circ$ , e conseqüentemente  $\widehat{EAG} = \alpha + 60^\circ$ , onde  $\widehat{BAC} = \alpha$ .

De fato, no triângulo equilátero o baricentro coincide com o incentro, ponto onde as bissetrizes se intersectam, portanto  $AG$  e  $AE$  são segmentos suportes as bissetrizes dos ângulos  $\widehat{MAB}$  e  $\widehat{PAC}$  nos respectivos triângulos  $\triangle ABM$  e  $\triangle APC$ , daí

$$\widehat{EAC} = \widehat{GAB} = \beta = 30^\circ.$$

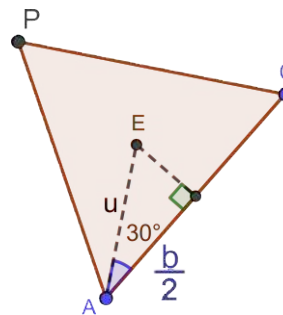
- ii) O objetivo desse item é aplicar as razões trigonométricas para calcular, nos triângulos  $ABM$  e  $ACP$  visto abaixo separadamente (Figura 5.20 e Figura 5.21), as medidas de  $t$  em função de  $c$  e  $u$  em função de  $b$ .

Figura 5.20: Perpendicular baixada de  $G$  relativa ao lado  $AB$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Figura 5.21: Perpendicular baixada de  $E$  relativa ao lado  $AC$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

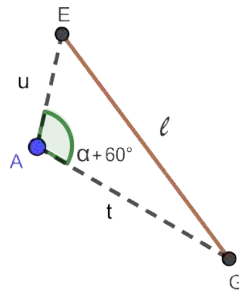
Baixando perpendiculares dos pontos  $G$  e  $E$  aos lados  $AB$  e  $AC$  respectivamente, temos:

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{c}{2}}{t} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{2t} \Rightarrow t = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (5.4)$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{b}{2}}{u} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{2u} \Rightarrow u = \frac{b}{\sqrt{3}}. \quad (5.5)$$

- iii) Recorreremos neste item à fórmula da lei dos cossenos [3.3.2], para podermos encontrar no triângulo  $EAG$ ,  $\ell$  em função dos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  (ver Figura 5.22).

Figura 5.22: Triângulo  $EAG$ ,  $\ell$  em função dos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Fazendo  $\overline{EG} = \ell$ ,  $\overline{AE} = u$  e  $\overline{AG} = t$  e aplicando a lei dos cossenos no triângulo  $EAG$ , temos:

$$\ell^2 = u^2 + t^2 - 2ut \cdot \cos(\alpha + 60^\circ). \quad (5.6)$$

Sabendo que:

$$\cos(\alpha + 60^\circ) = \cos\alpha \cdot \cos 60^\circ - \sin\alpha \cdot \sin 60^\circ = \frac{\cos\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}. \quad (5.7)$$

Então, substituindo as equações (5.4), (5.5) e (5.7) em (5.6).

Teremos,

$$\ell^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \left(\frac{\cos\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{2}\right) = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{bc}{3} \cdot (\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha).$$

Daí,

$$3\ell^2 = b^2 + c^2 - bc(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha).$$

Portanto,

$$3\ell^2 = b^2 + c^2 - bc.\cos\alpha - \sqrt{3}bc\sen\alpha. \quad (5.8)$$

Observe que aplicando a lei dos cossenos, que no triângulo  $ABC$  (ver Figura 5.19) que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha \Rightarrow bc.\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}. \quad (5.9)$$

E no mesmo triângulo  $ABC$ , temos o resultado:

$$2S = bc\sen\alpha \quad (5.10)$$

Onde  $S$  é a área do triângulo  $ABC$ .

Agora substituindo as equações, (5.9) e (5.10) na equação (5.8), termos:

$$3\ell^2 = b^2 + c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right) + 2\sqrt{3}S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}S.$$

Daí,

$$\ell^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}S}{3}$$

Portanto,

$$\ell = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} + \frac{2\sqrt{3}S}{3}}$$

Assim, por simetria, temos conforme necessário que  $\overline{EG} = \overline{EF} = \overline{FG} = \ell$ . Portanto podemos concluir, que o triângulo de vértices  $E$ ,  $F$  e  $G$  (ver Figura 5.19) é equilátero.  $\square$

### 5.5.1 Ponto de Fermat

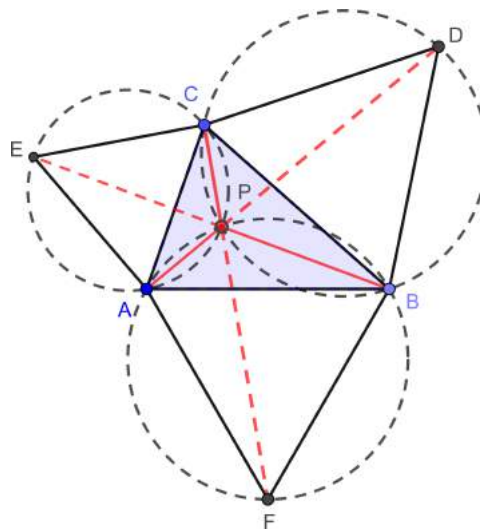
A maioria dos currículos do ensino básico cita dentro do estudo de geometria os quatro pontos notáveis de um triângulo: baricentro, circuncentro, incentro e ortocentro mencionados algumas vezes neste trabalho, o objetivo dessa subsecção é apresentar, um pontos que apesar de sua aplicabilidade é praticamente desconhecido no âmbito do ensino básico, na verdade, eu nunca tinha ouvido falar do ponto de Fermat até os conhecimentos adquiridos no PROFMAT. Portanto, aproveitaremos os conhecimentos prévios do **Teorema de Napoleão** para essa apresentação.

Pierre de Fermat nasceu em 17 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomagne na França, ao se investigar a produção matemática de Fermat, percebe-se facilmente a característica amadora predominante em seus trabalhos. Na verdade, com pouquíssimas

exceções, ele não publicou nada em vida e nem fez qualquer exposição sistemática de suas descobertas e de seus métodos, tinha as questões da matemática mais como desafios a serem resolvidos. Em uma carta a Evangelista Torricelli<sup>1</sup>, Fermat desafiou-o encontrar um ponto dentro de um triângulo  $ABC$  de tal forma que a soma das distâncias deste ponto para cada um dos três vértices seja mínima. Esse ponto é chamado de ponto Fermat (SINGH, 2014) [40].

Torricelli resolveu esse problema, e Viviani<sup>2</sup> publicou a solução em 1659. Primeiro, considere um triângulo  $\triangle ABC$  arbitrário. Assumindo o conhecimento prévio de construções comuns (por exemplo, triângulos, circunferências, etc.), construa um triângulo equilátero em cada lado suporte ao triângulo. Então, construa circunferências ao redor dos três triângulos equiláteros, como mostrado na Figura 5.24. A interseção dos três círculos é a solução, chamada de Ponto de Fermat ou Torricelli (TORRICELLI, 1640)[42].

Figura 5.23: Ponto de Fermat.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Daí, teremos o seguinte teorema.

**Teorema 5.6.** Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e em cada lado construa externamente três triângulos equiláteros  $ABF$ ,  $ACE$  e  $BCD$ .

- i) As três circunferências circunscrita aos triângulos equiláteros se intercepta em um ponto  $P$ , ou seja.  $C(ABF) \cap C(ACE) \cap C(BCD) = \{P\}$ .

<sup>1</sup>Físico e matemático italiano, nasceu em 1608, em Romagna, e morreu em 1647, em Florença. Inventou o barômetro e aperfeiçoou o telescópio e o microscópio. Os seus estudos levaram-no a descobrir os efeitos da pressão atmosférica. No campo da geometria, ajudou ao desenvolvimento do cálculo integral.

<sup>2</sup>Nasceu no dia 5 de abril em Florença, Itália, tendo estudado em uma escola jesuíta. Sua inteligência foi percebida logo cedo e recebeu uma bolsa de estudos do Gran Duque Ferdinando de Medici para a compra de livros matemáticos. Foi aluno de Torricelli e o último discípulo de Galileo.

- ii) Os segmentos  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  são concorrentes em  $P$ , ou seja.  $AD \cap BE \cap CF = \{P\}$
- iii)  $AD = BE = CF = PA + PB + PC$ .
- iv) Para todos os pontos  $M$  no plano do triângulo  $ABC$ ,

$$MA + MB + MC \geq AD = PA + PB + PC.$$

Isto é, o ponto  $P$  minimiza a expressão  $MA + MB + MC$ . Daí, o ponto  $P$  é chamado de ponto Torricelli-Fermat.

**Prova.**

- i) Sejam  $A$  e  $P$  os pontos de intersecção das circunferências  $C(ABF)$  e  $C(ACE)$ . Então, pelo fato do quadrilátero  $APBF$  ser inscrito (Teorema 3.3.4), temos:

$$\widehat{APB} + \widehat{AFB} = 180^\circ \implies \widehat{APB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

De modo análogo, por  $APCE$  ser inscrito, temos:

$$\widehat{APC} + \widehat{AEC} = 180^\circ \implies \widehat{APC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Além disso,

$$\widehat{APB} + \widehat{APC} + \widehat{BPC} = 360^\circ \implies \widehat{BPC} = 120^\circ.$$

Logo,

$$\widehat{BPC} + \widehat{BDC} = 180^\circ.$$

Assim,  $BPCD$  também é inscrito, isto é  $P \in C(BCD)$ . Portanto,

$$C(ABF) \cap C(ACE) \cap C(BCD) = \{P\}.$$

- ii) Basta mostrar que, os pontos  $(C, P, F)$ ,  $(A, P, D)$  e  $(B, P, E)$  são colineares. De fato, sabemos que  $\widehat{APC} = 120^\circ$  e  $\widehat{APF} = \widehat{ABF} = 60^\circ$  (ângulos inscritos ao mesmo arco  $\widehat{AB}$ ). Então,

$$\widehat{APC} + \widehat{APF} = 180^\circ.$$

Daí, os pontos  $C$ ,  $P$ , e  $F$  são colineares. De modo análogo, chegaremos a conclusão que os pontos  $(A, P, D)$  e  $(B, P, E)$  também são colineares. Portanto,

$$AD \cap BE \cap CF = \{P\}.$$

iii) Queremos mostrar que  $CF = PA + PB + PC$ .

Como  $P \in C(AFB)$  e  $\triangle ABF$  é equilátero, pelo teorema de Teorema de Van Schooten (5.2)

$$PF = PA + PB.$$

Assim,

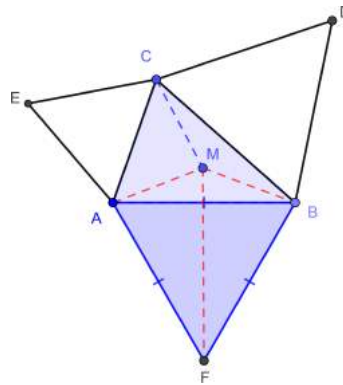
$$CF = PF + PC \implies CF = PA + PB + PC.$$

De modo análogo podemos encontrar o resultado para os segmentos  $AD$  e  $BE$ . Portanto,

$$AD = BE = CF = PA + PB + PC.$$

iv) Seja um ponto qualquer  $M$  no plano do  $\triangle ABC$ .

Figura 5.24: Ponto  $M$  no plano do  $\triangle ABC$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Então, já que  $\triangle ABF$  está contido nesse mesmo plano, aplicaremos a Desigualdade de Ptolomeu (Teorema 3.3.6):

$$AM \cdot BF + AF \cdot BM \geq MF \cdot AB.$$

Pelo fato de  $\triangle ABF$  ser equilátero temos,

$$AM \cdot BF + AF \cdot BM \geq MF \cdot AB \implies AM + BM \geq MF.$$

Daí, somando  $CM$  em ambos lados da desigualdade, teremos:

$$AM + BM + CM \geq CM + MF \implies AM + BM + CM \geq CF.$$

Do item anterior, temos  $CF = PA + PB + PC$ . Logo,

$$AM + BM + CM \geq PA + PB + PC.$$

Portanto, o ponto de um triângulo que minimiza a soma das distâncias até os três vértices é o ponto Toricelli-Fermat.

□

## 5.6 Teorema de Morley

Atribui-se a Frank Morley (1860- 1937), matemático britânico, um dos mais fascinantes teoremas do século XX, tanto pela simplicidade de seu enunciado como pela beleza de sua demonstração, foi descoberto por F. Morley em 1899 e provado em 1914. Faremos nessa secção uma demonstração do Teorema de Morley abordando recurso da geometria com conteúdos do Ensino Básico, tais como a soma dos ângulos dos triângulos, semelhança de triângulos, lei dos senos e identidades trigonométricas (fórmula do arco triplo). Não é possível a construção do triângulo de Morley com régua e compasso, pois as trissetrizes de um ângulo não são alcançáveis. Muitos matemáticos tentaram conceber essa construção de triplicar um ângulo, mas todos falharam, o primeiro matemático a publicar efetivamente uma demonstração da impossibilidade de se efetuarem determinadas construções geométricas apenas com régua e compasso foi o francês Pierre Laurent Wantzel, em 1837. A triseção de um ângulo não é alcançável com régua e compasso. Embora a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão e a raiz quadrada de um número possam ser encontradas usando esse recursos. Em nossa construção foi utilizado como ferramenta o GeoGebra, que torna a trissetrizes de um ângulo possível, não a partir de uma construção euclidiana clássica, mas através de uma construção mais sintética com limites de precisão numérica. Os resultados são suficientes para nos permitir investigar teorema de Morley (BAKER, 2012)[4].

**Teorema 5.7.** Os pontos que intersectam as trissetrizes adjacentes de qualquer triângulo são vértices de um **triângulo equilátero**.

Seguiremos separando a nossa demonstração em algumas etapas:

**Prova.**

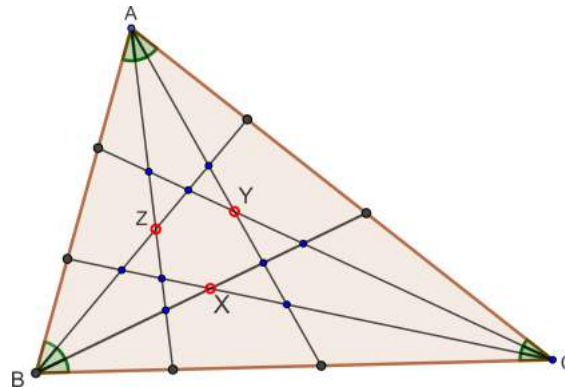
- i) A finalidade dessa etapa é traçar em cada ângulo de um triângulo qualquer duas cervianas distintas de modo que elas dividam o ângulos respectivos em três ângulos



congruentes, destacando os 12 pontos distintos, que são os pontos onde as cervianas (trissetrizes) se interceptam duas a duas.

O passo a passo dessa construção feita GeoGebra esta descrito no Apêndice (A.1).

Figura 5.25: Pontos onde as trissetrizes se interceptam.

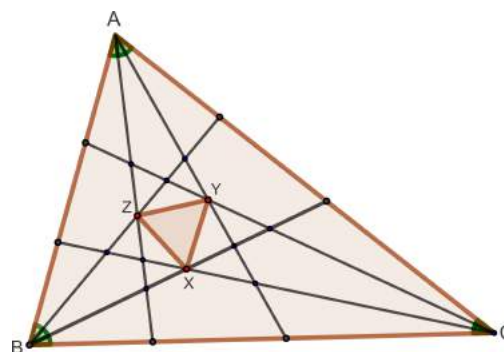


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

- ii) Nessa etapa considerando apenas os pontos representados pelas intersecções das trissetrizes adjacentes, construa o triângulo com vértices em  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . O objetivo é investigar se o triângulo  $XYZ$  é equilátero.

De fato, podemos investigar se o triângulo  $XYZ$  é equilátero, medindo os lados do triângulo para verificar se eles são iguais (use a ferramenta distância, comprimento e perímetro no GeoGebra). Há muitas maneiras de investigar, decolando em qualquer direção que desejar a descoberta vale a viagem.

Figura 5.26: O  $\triangle XYZ$  é equilátero.

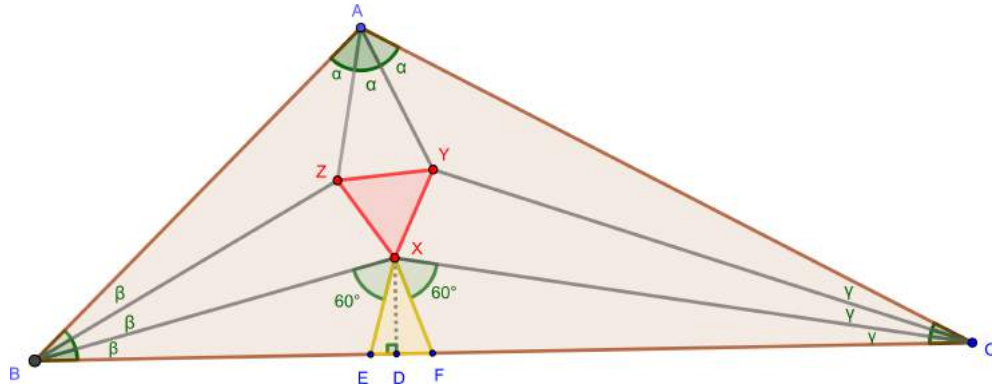


Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

- iii) Considere o triângulo  $ABC$  (Figura 5.27), supondo que os ângulos nos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam respectivamente  $3\alpha$ ,  $3\beta$  e  $3\gamma$ . As trissetrizes adjacentes encontram-se nos pontos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , vértices do  $\triangle XYZ$ . Os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  foram marcados sobre

o segmento  $BC$  de modo que  $\widehat{BXE} = \widehat{FXC} = 60^\circ$  e  $\widehat{XDB}$  seja um ângulo reto. O objetivo dessa etapa é determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo  $XEF$  em função de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Figura 5.27: Ângulos internos do  $\triangle XEF$  em função de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

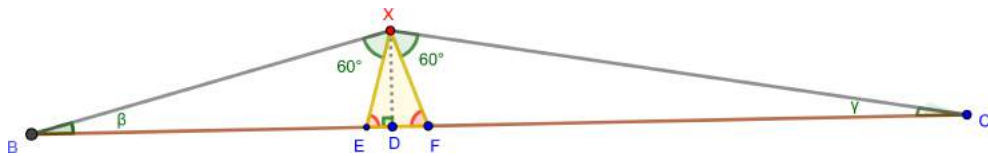
De fato, aplicando o teorema do ângulo externo nos triângulos  $XFC$  e  $XEB$  (Figura 5.28) respectivamente, temos:

$$\widehat{XFE} = \gamma + 60^\circ$$

e

$$\widehat{XEF} = \beta + 60^\circ.$$

Figura 5.28: Teorema do ângulo externo nos triângulos  $XFC$  e  $XEB$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Por outro lado, usando a soma dos ângulos internos do triângulo  $ABC$  (Figura 5.27), então vem:

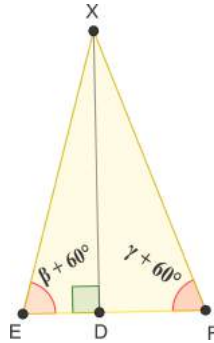
$$3\gamma + 3\beta + 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \gamma + \beta + \alpha = 60^\circ \Rightarrow \gamma + \beta = 60^\circ - \alpha.$$

Aplicando o teorema da soma dos ângulos no triângulo  $EXF$  temos:

$$\widehat{EXF} = 180^\circ - (\beta + 60^\circ + \gamma + 60^\circ) = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha.$$

- iv) Os triângulos  $XDE$  e  $XDF$  são retângulos em  $D$  (Figura 5.29), o propósito desse item é calcular as razões  $\text{sen}(\beta + 60^\circ)$  e  $\text{sen}(\gamma + 60^\circ)$  nos respectivos triângulos retângulos:

Figura 5.29:  $\triangle XDE$  e  $\triangle XDF$  são retângulos em  $D$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

De fato,

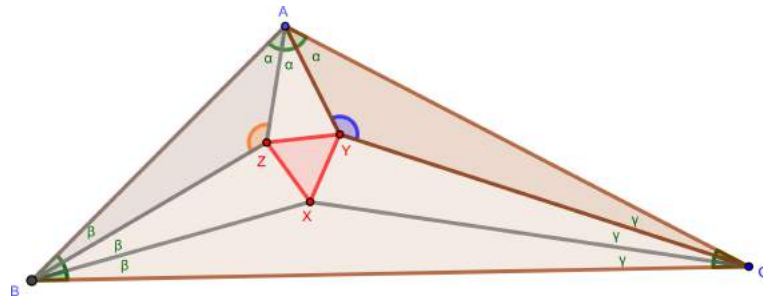
$$\text{sen}(\beta + 60^\circ) = \frac{DX}{XE}. \quad (5.11)$$

e

$$\text{sen}(\gamma + 60^\circ) = \frac{DX}{XF}. \quad (5.12)$$

- v) Nessa etapa a ideia é determinar as medidas dos ângulos  $\widehat{AYC}$  e  $\widehat{AZB}$  em função de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  nos triângulos  $AYC$  e  $AZB$  destacados (Figura 5.30) em seguida usar a lei dos senos para encontrar  $\text{sen}(\widehat{AYC})$  e  $\text{sen}(\widehat{AZB})$ .

Figura 5.30:  $\widehat{AYC}$  e  $\widehat{AZB}$  em função de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Logo,

$$\widehat{AYC} = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (60^\circ - \beta) = \beta + 120^\circ.$$

e

$$\widehat{AZB} = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (60^\circ - \gamma) = \gamma + 120^\circ.$$

Aplicando a lei dos senos (Proposição 3.3.1) em  $\triangle AYC$  e  $\triangle AZB$  teremos:

$$\frac{AC}{\text{sen}(\beta + 120^\circ)} = \frac{AY}{\text{sen}\gamma} \Rightarrow \text{sen}(\beta + 120^\circ) = \frac{AC}{AY} \text{sen}\gamma \quad (5.13)$$

e

$$\frac{AB}{\text{sen}(\gamma + 120^\circ)} = \frac{AZ}{\text{sen}\beta} \Rightarrow \text{sen}(\gamma + 120^\circ) = \frac{AB}{AZ} \text{sen}\beta. \quad (5.14)$$

vi) O objetivo dessa etapa é provar que a altura do triângulo  $ABC$  pode ser expressa por:

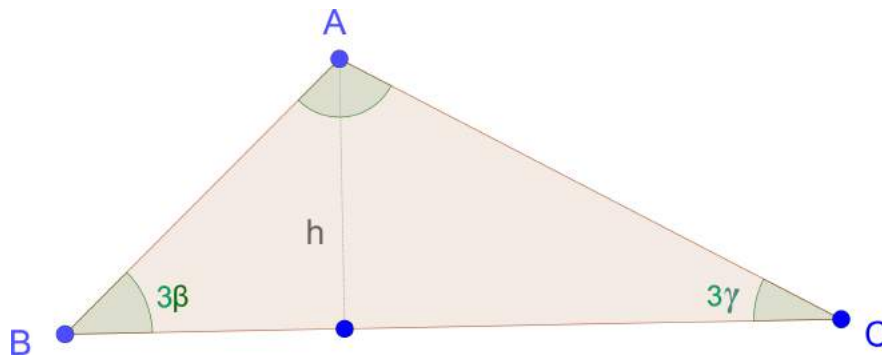
$$h = 4AB \cdot \text{sen}\beta \cdot \frac{DX}{XE} \cdot \frac{AC}{AY} \text{sen}\gamma$$

ou

$$h = 4AC \cdot \text{sen}\gamma \cdot \frac{DX}{XF} \cdot \frac{AB}{AZ} \text{sen}\beta.$$

Vamos utilizar as razões trigonométricas para expressar a altura do triângulo  $ABC$  (Figura 5.31) de duas formas.

Figura 5.31: Altura do triângulo  $ABC$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

Então,

$$h = AB \cdot \text{sen}3\beta = 4AB \cdot \text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\beta + 60^\circ) \cdot \text{sen}(\beta + 120^\circ) \quad (5.15)$$

e

$$h = AC \cdot \text{sen}3\gamma = 4AC \cdot \text{sen}\gamma \cdot \text{sen}(\gamma + 60^\circ) \cdot \text{sen}(\gamma + 120^\circ). \quad (5.16)$$

Utilizaremos na demonstração a identidade trigonométrica(5.13) abaixo que está demonstrada em (3.3.3).

$$\boxed{\text{sen}3x = 4\text{sen}x.\text{sen}(x + 60^\circ).\text{sen}(x + 120^\circ)}. \quad (5.17)$$

Substituindo as equações (5.11) e (5.13) na equação (5.15) teremos:

$$h = 4AB.\text{sen}\beta.\frac{DX}{XE}.\frac{AC}{AY}.\text{sen}\gamma. \quad (5.18)$$

Agora substituindo as equações (5.12) e (5.14) na equação (5.16):

$$h = 4AC.\text{sen}\gamma.\frac{DX}{XF}.\frac{AB}{AZ}.\text{sen}\beta. \quad (5.19)$$

vii) Queremos nesse etapa provar que os triângulos  $XFE$  e  $AZY$  (ver Figura 5.27) são semelhantes.

Comparando as equações (5.18) e (5.19) do item anterior, temos:

$$4AB.\text{sen}\beta.\frac{DX}{XE}.\frac{AC}{AY}.\text{sen}\gamma = 4AC.\text{sen}\gamma.\frac{DX}{XF}.\frac{AB}{AZ}.\text{sen}\beta.$$

Daí,

$$XE.AY = XF.AZ.$$

Portanto,

$$\frac{XE}{XF} = \frac{AZ}{AY}.$$

Veja que  $\triangle XFE \sim \triangle AZY$  pois,  $\widehat{E\hat{X}F} = \widehat{Z\hat{A}Y} = \alpha$  e os lados que o formam são proporcionais, daí

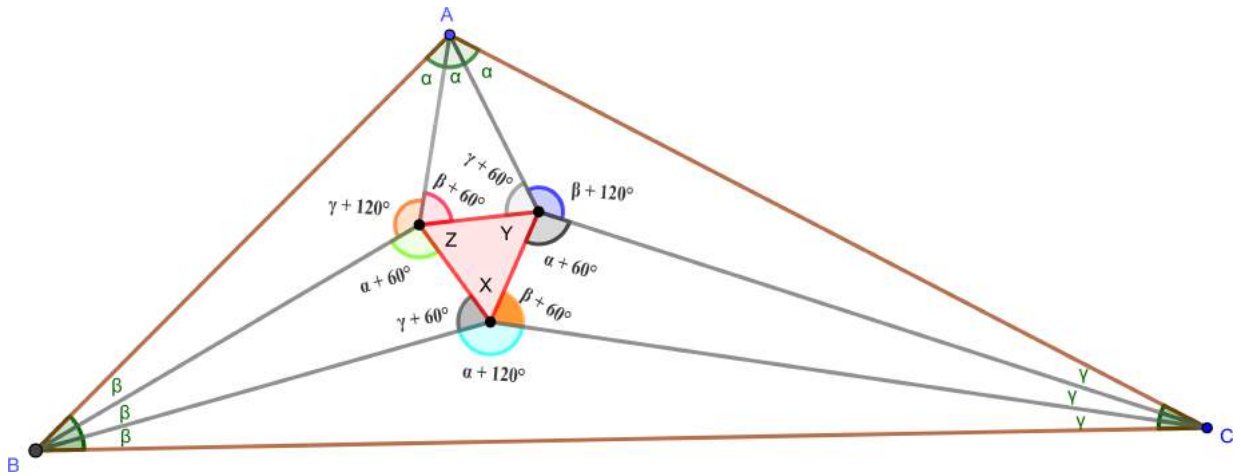
$$\widehat{A\hat{Y}Z} = \widehat{X\hat{F}E} = \gamma + 60^\circ$$

e

$$\widehat{A\hat{Z}Y} = \widehat{X\hat{E}F} = \beta + 60^\circ$$

viii) Sabemos que se procedermos da mesma forma do item anterior encontraremos os ângulos da base dos triângulos  $\triangle BXZ$  e  $\triangle CYX$  (ver Figura 5.32). O objetivo desse item é mostrar que o triângulo  $XYZ$  é equilátero.

Figura 5.32: Ângulos da base dos triângulos  $\triangle BXZ$  e  $\triangle CYX$ .



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

De fato,

$$X\hat{Z}Y + A\hat{Z}Y + A\hat{Z}B + B\hat{Z}X = 360^\circ.$$

Daí,

$$X\hat{Z}Y + \beta + 60^\circ + \gamma + 60^\circ + \alpha + 60^\circ = 360^\circ.$$

Logo,

$$X\hat{Z}Y = 360^\circ - (\beta + 60^\circ + \gamma + 120^\circ + \alpha + 60^\circ).$$

Então,

$$X\hat{Z}Y = 60^\circ.$$

Analogamente,

$$Y\hat{X}Z = 60^\circ.$$

e

$$X\hat{Y}Z = 60^\circ.$$

Portanto, o triângulo  $XYZ$  é equilátero.

□

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não pretendo ter esgotado aqui as discussões sobre o papel do triângulo equilátero dentro do estudo da geometria. Espero, porém, ter fornecido elementos para novas discussões e contribuído para suscitar outros questionamentos sobre o tema. Com essa pesquisa ficou evidente que a geometria quando trabalhada com ênfase em demonstrações de teoremas e propriedades, apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender que é um dos objetivos do ensino da matemática. Não podendo negar também, que no ensino matemática em geral se faz necessário além da compreensão de diversos termos e definições, exercitar a leitura a cerca de curiosidades e fatos históricos relevantes de certos conteúdos apresentados em sala de aula, tendo em vista que o ensino de matemática em geral não se resume apenas em fazer cálculos.

Gostaríamos de ressaltar dois aspectos complementares das explorações e provas apresentadas nessa pesquisa. Por um lado, no que diz respeito aos nossos alunos, eles podem descobrir as propriedades do triângulo equilátero e aplicar esse estudos de teoremas e construções para resolver problemas da vida real fazendo suas conjecturas em termos geométricos simples. Por outro lado, as provas apresentadas fazem uso do conhecimento prévio de muitos tópicos em matemática, incluindo geometria, trigonometria, geometria de coordenadas e desigualdades de números. Isso oferece o oportunidade para professores ou futuros professores verem como as ideias matemáticas estão interligadas. Assim, as explorações sobre o triângulo equilátero apresentadas aqui podem oferecer a eles uma experiência nova dentro do ensino de geometria. Anseio que esse material inspire alunos e professores pois, há muito o que se descobrir dentro do universo dos triângulos equiláteros, tanto no que se refere ao ensino da geometria, como ao ensino em geral.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALMEIDA, Manoel de Campos. **O Nascimento da Matemática: a neurofisiologia e a pré-história da matemática.** 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.
- [2] ANDREESCU, Titu, GELCA, Razvan. **Mathematical Olympiad Challenges,** Ed. Springer Science - Business Media, 2013.
- [3] ANCIENT ORIGINS, **O OXYRHYNCHUS PAPYRI: The Largest Cache of Early Christian Manuscripts Discovered to Date.** 2016. Disponível em: <<https://www.ancient-origins.net/artifacts-ancient-writings/oxyrhynchus-papyri-largest-cache-early-christian-manuscripts-discovered-020982>>. Acesso em: 12 de setembro de 2018.
- [4] BAKER, Charles E. **What is Morley Miracle,** 2012. Disponível em: <<https://math.osu.edu/sites/math.osu.edu/files/Morley.pdf>> Acesso 12 Dezembro 2018.
- [5] BARBOSA, J. L. M., **Geometria Euclidiana Plana.** SBM, 1995.
- [6] BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo, SP: Edgard Blucher LTDA, 1994.
- [7] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, V. 2.** Brasília: MEC / SEF, 1997.
- [8] BRASIL ESCOLA, Frans Van Schooten. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/biografia/frans-van-schooten.htm>>. Acesso em: 10 março 2019.
- [9] CAJORI , Florian. **Uma história da Matemática.** 1ªed. Ciência Moderna, 2007.



- [10] CRILLY, Tony. **50 ideias de matemática que você precisa conhecer**, Publicações Don Quixote, Cordova, Portugal,(outubro 2011).
- [11] CRONIN, V . **Napoleão: uma vida**, Barueri-SP, Amarulys Editora, 2014.
- [12] CUNHA, José Celso. **A História das Construções** - Vol. 1 - Da Pedra Lascada Às Pirâmides de Dahchur. Autêntica Editora, 2009.
- [13] DOLCE, O. POMPEO, J.N. **Fundamentos da Matemática elementar: Geometria Plana**. Vol.9. 6 ed. São Paulo: Atual, 1985.
- [14] EINSELOHR, A. **Ein mathematisches handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum)**. Leipzig: J. C. Hinrichs' Buchhandlung, 1877. Disponível em: <<http://www.archive.org/details/einmathematische00eise>>. Acesso 01 abril 2019.
- [15] ESSENTIAL ARCHITECTURE, **Da Vinci's Last Supper**. 2019. Disponível em: <<http://www.essential-architecture.com/DAVINCI/DV15.htm>>. Acesso em: 21 de janeiro de 2019.
- [16] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.
- [17] FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an Educational Task**. Dordrecht: D.Reidel Publishing Company, 1973.
- [18] FRIBERG, Jöran. **A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical**, Springer Science e Business Media, 2007.
- [19] GABAGLIA, E. de B.R. **O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)**. Rio de Janeiro: Imprensa Americana, 1899.
- [20] GEOMETILES, **Sólidos platônicos: Antiguidade até agora**, 2017. Disponível em: <<https://geometiles.com/platonic-solids-antiquity-now/>>. Acesso em: 20 de janeiro de 2019.
- [21] GREGG, D. Young. **Diagrams in ancient Egyptian geometry Survey and assessment**. Historia da Mhatematica. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086009000081>>. Acesso 01 abril 2019.
- [22] HARIKI, Seiji; ONAGA, Dulce Satiko. **Curso de Matemática** - Volume 1. São Paulo: Editora - Harbra, 1979.

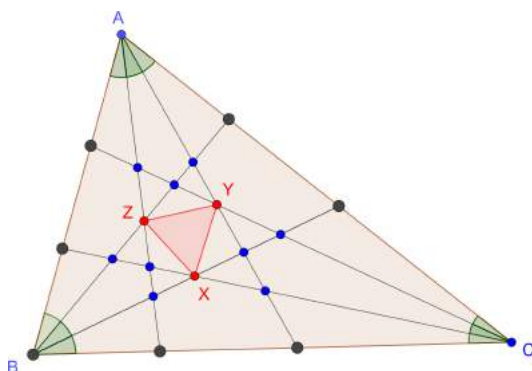
- [23] INTERCOT, **Spaceship Earth**, 2018. Disponível em: <<http://www.intercot.com/themeparks/epcot/futureworld/spaceshipearth/default.asp>>. Acesso em: 18 de janeiro de 2019.
- [24] KAWASAKI, Kem-Ichiroh, prova sem palavras: Teorema de Viviani, **Revista de matemática**, vol. 78, No. 3, 213. Junho de 2005.
- [25] LONGMAN, Brown, “et al”. **An Encyclopædia of Architecture**, historical, theoretical, and practical, 1842.
- [26] LUGARES HISTÓRICOS. **As Pirâmides de Dahshur**, 2018. Disponível em: <<https://www.descobriregipto.com/piramides-de-dahshur/>>. Acesso em: 20 de janeiro de 2019.
- [27] MACAULAY, David. **Construção de uma pirâmide**. Ed Martins,1988.
- [28] MARTINI, H . **On the Theorem of Napoleon and Related Topics Mathematische Semesterberichte** , Vancouver, AAM ,1996.
- [29] McCARTIN, Brian J., **Mysteries of the Equilateral Triangle**, First published, 2010.
- [30] MORGADO, A.C; WAGNER, E. Jorge M.**Geometria I e II**. SBM, 2005.
- [31] PENNICK, Nigel. **Geometria Sagrada**. São Paulo, SP: editora: Pensamento, 2009.
- [32] PEROZIN, Ugo S., **Principais Elementos da Geometria Sagrada**, 2014. Disponível em: <<http://schiperdesign.com.br/wp-content/uploads/2016/03/PROJETO-GENESIS-DA-GEOMETRIA-SAGRADA.pdf>>. Acesso 26 abril 2019.
- [33] PICKOVER, Clifford, **El libro de las matemáticas**. Ed. Librero, 2009. Disponível em: <[http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/teorema\\_de\\_viviani.pdf](http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/teorema_de_viviani.pdf)>. Acesso 09 maio 2019.
- [34] PINTEREST, **El Ojo de Horus dentro del triángulo su significado**, 2018. Disponível em: <<https://br.pinterest.com/pin/204280533081950098/>>. Acesso em: 07 de janeiro de 2019.
- [35] QUINES, Carl Joshua. **Obscure geometry theorems** , 2015. Disponível em: <<https://cjquines.com/files/obscuregeothms.pdf>>. Acesso 10 Dezembro 2018.
- [36] REDDIT, **Lepenski Vir, near the Iron Gates of the Danube**, 2015. Disponível em: <<https://www.reddit.com>>. Acesso em: 17 de janeiro de 2019.

- [37] REVISTA BIBLIOT3CA, **O Triângulo de Sabedoria**, 2018. Disponível em: <<https://bibliot3ca.com/o-triangulo-de-sabedoria/>>. Acesso em: 12 de novembro de 2018.
- [38] REVISTA GALILEU, **Grande Pirâmide de Gizé.**, 2018. Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com/Revista/Common/0,,ERT297672-17770,00.html>>. Acesso em: 12 de dezembro de 2018.
- [39] ROBERTS, Wayne, **Principles of nature: towards a new visual language**, P/L Canberra, 2003. Disponível em: <[https://principlesofnature.com/number\\_geometry\\_connections/new\\_angles\\_on\\_triangles\\_](https://principlesofnature.com/number_geometry_connections/new_angles_on_triangles_)>. Acesso 02 Dezembro 2018.
- [40] SINGH, Simon, **O último teorema de Fermat**, Ed. Record, 13<sup>o</sup> edição, 2008.
- [41] SREJOVIC, Dragoslav. **Vir , nova praistorijska kultura u Podunavlju** , SKZ , Beograd , pp . 42-92, 157, 1969.
- [42] TORRICELI, E., **Opere di Evangelista Torriceilli**, 1640.
- [43] XPECIAL DESIGN, **ARQUITETURA: Gherkin (30 St Mary Axé)**, 2018. Disponível em: <<https://www.xpecialdesign.com.br/arquitetura/gherkin-30-st-mary-axe/>>. Acesso em: 10 de janeiro de 2019.

# Apêndice

## A.1 Construção do triângulo de Morley

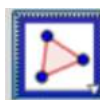
Figura A.1: Triângulo de Morley



Fonte: Elaborado pelo próprio autor, 2019.

- 1º passo: Construa um triângulo qualquer utilizando a ferramenta polígono(Figura A.2) nomeando os seus vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Figura A.2: Ferramenta polígono.



Fonte: Barra de ferramentas do GeoGebra, 2019.

- 2º passo: Medir os ângulos internos do triângulo  $ABC$  usando a ferramenta ângulo(Figura A.3) nomeandos  $\delta$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ .

Figura A.3: Ferramenta ângulo.



Fonte: Barra de ferramentas do GeoGebra, 2019.

- 3º passo: Usar a ferramenta ângulo com amplitude fixa (Figura A.4) para dividir os ângulos internos em três ângulos congruentes.

Figura A.4: Ângulo com amplitude fixa.



Fonte: Barra de ferramentas do GeoGebra, 2019.

- 4º passo: Traçar as retas suportes as trissetrizes dos ângulos internos com a ferramenta reta definida por dois pontos (Figura A.5).

Figura A.5: Ferramenta reta.



Fonte: Barra de ferramentas do GeoGebra, 2019.

- 5º passo: Determinar todos os pontos onde as retas suportes as trissetrizes dos ângulos internos se intersectam usando ferramenta intersecção entre dois objetos (Figura A.6).

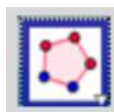
Figura A.6: Ferramenta intersecção.



Fonte: Barra de ferramentas do GeoGebra, 2019.

- 6º passo: Esconder as retas suportes as trissetrizes e outros objetos desnecessário clicando com botão direito sobre cada elemento e desmarca a opção exibir objetos.
- 7º passo: Renomear os pontos  $X$  e  $Y$  e  $Z$  que representa os pontos onde as trissetrizes adjacentes a cada lado se intersectam.
- 8º passo: Construir usando a ferramenta polígono regular (Figura A.7) o triângulo equilátero de vértices  $X$  e  $Y$  e  $Z$ .

Figura A.7: Ferramenta polígono.



Fonte: Barra de ferramentas do GeoGebra, 2019.