UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA- UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT
Dissertação de Mestrado

# JOGOS AFRICANOS: DANDO SIGNIFICADO E AUXILIANDO NO ENSINO DA MATEMÁTICA.

ADRIANA BIANCA BARBOSA DE JESUS

**Salvador-Bahia**
Abril de 2019

# JOGOS AFRICANOS: DANDO SIGNIFICADO E AUXILIANDO NO ENSINO DA MATEMÁTICA.

ADRIANA BIANCA BARBOSA DE JESUS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal da Bahia.

**Orientador:** Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano

**Salvador-Bahia**

Abril de 2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA), com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Jesus, Adriana Bianca Barbosa de

Jogos africanos: dando significado e auxiliando no ensino da Matemática. / Adriana Bianca Barbosa de Jesus . – Salvador, 2019.

f. 101 : il.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia, IME, 2019.

Referências bibliográficas.

1. jogos de tabuleiro africano. 2. Auxiliar na pratica pedagógica. 3. ferramenta para trabalhar conteúdo. I. Bahiano, Carlos Eduardo Nogueira. II. Título.

À minha família, por ser o meu suporte e por ter me ensinado a lutar e a me superar, sempre buscando ser alguém melhor para mim e para os outros, e, em especial, a meu esposo Gustavo e a meu filho Cauã, pelo apoio incondicional e pelo suporte.

Jogos africanos : dando significado e auxiliando no ensino da Matemática.

**ADRIANA BIANCA BARBOSA DE JESUS**

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30/04/2019.

**Banca Examinadora:**

Carlos Eduardo N. Bahiano

Prof. Dr. Carlos Eduardo Nogueira Bahiano(orientador)
UFBA

Profª. Drª. Simone Maria de Moraes
UFBA

Manuela da Silva Souza

Prof.ª Dr.ª Manuela da Silva Souza
UFBA

# Agradecimentos

A Deus, por todos os milagres os quais ele tem me proporcionado e por estar presente, impulsionando-me em todos os momentos da minha vida. Ao meu pai, Walter Xerxes, que, infelizmente, já se foi, sem ver a realização de mais um sonho meu, mas que sempre se orgulhou e incentivou o meu esforço. À minha mãe, Aldelice, que me ensinou a ser forte, a não desanimar nos momentos difíceis, sempre orgulhosa da minha força e sempre confiando em mim. Ao meu esposo Gustavo e a meu filho Cauã, pelo carinho, amor e compreensão e por não medirem esforços para me apoiarem nos momentos difíceis, sempre de forma amorosa, com muita parceria e tolerância para com as minhas ausências. Aos educadores e educadoras do PROFMAT da UFBA, em especial, ao professor e orientador Carlos Bahiano, por sua amizade, por suas importantes contribuições teóricas e pelo incentivo nos momentos mais difíceis, que não foram apenas acadêmicos. Ao meu querido professor e amigo Manoel Rodrigues por sua enorme e necessária ajuda. Aos colegas de mestrado, pelo companheirismo, pela ajuda e pela parceria nos momentos de estresse e também nos momentos mais descontraídos; juntos, conseguimos vencer mais esse desafio. Enfim, a todos que participaram direta ou indiretamente dessa etapa, meu muito obrigada.

Sou grão de rocha Sou o vento que a desgasta
Sou pólen sem insecto
Sou areia sustentando o sexo das árvores
Existo onde me desconheço aguardando pelo meu passado ansiando a esperança do futuro
No mundo que combato morro no mundo por que luto nasço

*Preciso ser um outro para ser eu mesmo*
*Sou grão de rocha Sou o vento que a desgasta*
*Sou pólen sem insecto*
*Sou areia sustentando o sexo das árvores*
*Existo onde me desconheço aguardando pelo meu passado ansiando a esperança do futuro*
*No mundo que combato morro no mundo por que luto nasço*

Mia Couto, in “Raiz de Orvalho e Outros Poemas”

# Resumo

O ensino da matemática e da geometria tem enfrentado muitas dificuldades, seja pelo grau de abstração exigido pela matéria, seja pela atenção, raciocínio lógico, previsão e capacidade analítica necessários para resolver os problemas ou questões. Aliada à necessidade de incentivar o desenvolvimento dessas competências e habilidades e ainda motivar, atrair os alunos através de uma ferramenta poderosa, que são os jogos de tabuleiro, surgiu a oportunidade de também poder trabalhar para uma educação antirracista e uma reeducação étnico-racial. Como a Lei 10.639/03 torna obrigatório, nos estabelecimentos públicos e privados de ensinos fundamental e médio, o ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana, mostrou-se interessante trabalhar com os jogos de tabuleiro africanos que, além de garantirem o trabalho com o currículo e com todas as habilidades e competências citadas, fazem com que os alunos possam conhecer a riqueza histórica, cultural e filosófica da África e a herança deixada pelo povo africano aqui no Brasil. É um processo de valorização de identidade, que faz muita diferença na vida e na construção social do indivíduo, tanto do afrodescendente, quanto dos brasileiros que não o são. O presente estudo objetiva a valorização da história dos afro-brasileiros, através da sugestão de um trabalho que deve ser interdisciplinar e ter como mote a valorização da História e da Cultura africana e afro-brasileira, aliada ao ensino da matemática propriamente dita - através da construção do tabuleiro dos jogos, em que a geometria se faz muito presente e durante a execução desses, em que serão trabalhadas frações, probabilidades, entre outros conteúdos, além de competências e habilidades.

**Palavras-chave:** Jogos Africanos. Currículo. Cultura Afro-Brasileira.

# Abstract

The teaching of mathematics and geometry has faced many difficulties, either by the degree of abstraction required by matter, or by the attention, logical reasoning, prediction, and analytical ability required to solve problems or issues. Coupled with the need to encourage the development of these skills and abilities and to motivate, attract students through a powerful tool, which is board games, the opportunity has also arisen to work for antiracist education and ethnic-racial reeducation. As Law 10.639 / 03 makes it compulsory in public and private establishments for primary and secondary education to teach Afro-Brazilian and African History and Culture, it has been interesting to work with the African board games that, besides guaranteeing the work with the curriculum and with all the mentioned skills and competences, allow the students to know the historical, cultural and philosophical richness of Africa and the heritage left by the African people here in Brazil. It is a process of valuing identity, which makes a lot of difference in the life and social construction of the individual, both Afrodescendants and Brazilians who are not. This study aims to value the history of Afro-Brazilians through the suggestion of a work that should be interdisciplinary and have as a motto the valorization of African and Afro-Brazilian History and Culture, allied to the teaching of mathematics proper - through construction of the board of games, in which geometry becomes very present and during the execution of these, in which will be worked fractions, probabilities, among other contents, in addition to skills and abilities.
**Keywords:** African Games. Curriculum. African Cultura.

# Sumário

# Lista de Figuras

# Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

Os alunos, de maneira geral, veem a matemática como sendo uma disciplina difícil, demonstrando certas dificuldades nas aplicações e na compreensão de diversos conceitos e conteúdos de difícil abstração, como por exemplo as frações, que por mais simples que pareçam, por vezes não é totalmente compreendida pelos alunos.

Os professores têm se deparado com muitas dificuldades por parte dos alunos na aprendizagem da matemática, como a falta de sentido no que estão aprendendo, pois não veem significação prática dos conteúdos e ainda falta para alguns alunos identificação cultural com esse conhecimento. Sem nem ao menos listar todos os problemas estruturais da profissão, sabemos que os professores têm que aprender a lidar com as angústias e superar as adversidades e encontrar caminhos.

Respondendo sobre as dificuldades de aprendizagem quando a sua disciplina teve o pior desempenho, o Professor Elon Lages de Lima, em 1995, respondeu:

> "... a matemática trata de noções e verdades de natureza abstrata. Aliás, essa é uma das razões de sua força e sua importância (...) a generalidade com que valem as proposições matemáticas exige precisão, proíbe ambiguidades e por isso requer mais concentração e cuidado por parte do estudante. Por outro lado, o exercício dessas virtudes durante os anos de escola ajuda a formar hábitos que serão úteis no futuro. A perseverança, a dedicação e a ordem no trabalho são qualidades indispensáveis para o estudo da Matemática (...) O conhecimento matemático é, por natureza, encadeado e cumulativo. Um aluno (...) não será capaz de estudar Trigonometria se não conhecer os fundamentos de Álgebra, nem entenderá esta última se não souber as operações aritméticas(...) ela é importante porque é exata, geral e se ocupa das noções mais básicas da vida humana: número e espaço."(Elon Lages de Lima, RPM nº 28, 1995, 2º quadrimestre de 1995).

Além do que foi afirmado pelo professor Elon, o ensino da matemática desenvolve raciocínio lógico, ajuda a prever resultados e a resolver problemas. Dessa forma, os educadores devem encontrar alternativas para promover a motivação, a confiança, o interesse, a concentração e o sentido na aprendizagem, que é global. Dessa forma, o ensino da matemática deve se identificar com as raízes socioculturais dos alunos, ou seja, a identificação do estudante com o processo histórico de construção e desenvolvimento do conhecimento é fundamental e muito significativo, pois se reconhecer nesse processo eleva a sua autoestima e, dessa forma, ele fica mais suscetível a aprender.

Alguns estudos, apontam que as dificuldades na disciplina podem se dar pela forma com que o professor aborda o assunto ou seja a sua metodologia pode não estar adequada para garantir a apropriação do conteúdo por parte do aluno. Além disso a própria estrutura escolar pode não ser atraente ou preparada para atender um aluno que vive em um mundo tão veloz e tecnológico e por último não podemos perder de vista que a matemática é uma construção social que surge da necessidade de resolver situações do cotidiano, nesse caminho podemos concluir que a matemática no mundo inteiro foi se construindo a partir de demandas particulares de cada cultura, e como o Brasil é composto por diferentes etnias e culturas, os alunos brasileiros também vivem essa diversidade cultural e muitas vezes os professores não se sentem gabaritados para trabalharem essa diversidade cultural já que não trabalharam essa competência nas universidades.

Pensando sobre essas questões, essa pesquisa busca um caminho para refletir sobre as práticas e os problemas, buscar a valorização da pluralidade social e cultural brasileira, como um meio para gerar uma aprendizagem significativa, na qual o aluno se enxergue como parte fundamental e que queira pertencer ao processo de aprendizagem para então melhorar os resultados.

Baseado em tudo o que foi explicitado e partindo de uma situação particular que é o fato de ser soteropolitana, e no caso Salvador ser a cidade mais negra fora da África, resolvi trabalhar com jogos africanos nessa pesquisa, tomando com base o meu próprio exemplo de uma mulher negra que nunca estudou sobre a história da sua própria cultura e que não tinha ideia de como seria importante compreender o quanto a cultura africana é rica em valores culturais que podem ser percebidos, por exemplo, através das regras dos jogos da família Mancala, além disso conhecer e trabalhar com jogos tão antigos e que são extremamente estratégicos, analíticos e trabalham bastante o raciocínio lógico.

Os jogos matemáticos configuram-se como um recurso didático que oferece apoio à representação mental e uma etapa para o caminho da abstração, proporcionando uma experiência algébrica e geométrica aos estudantes. Entretanto, não basta só contar com o material. Lorenzato (2006) comenta que o material didático não é garantia de um bom ensino nem de uma aprendizagem significativa e tampouco chega a substituir o professor. Logo, sua eficiência dependerá do modo com o qual será utilizado, e foi pensando nisso que o presente estudo trabalha com jogos de tabuleiro africanos, por se tratar de um recurso que pode ajudar a resgatar o reconhecimento e igualdade de valorização das raízes africanas da nação brasileira. Além disso, resgata a cultura africana, proporcionando uma maior identificação por parte dos estudantes afro-brasileiros, ao perceber a contribuição dos seus antepassados na construção de conhecimento, e amplia os horizontes dos outros alunos sobre a visão preconceituosa, eurocêntrica e estereotipada sobre a África e os seus descendentes.

A possibilidade de inserir os jogos de tabuleiro no ambiente escolar ainda é um campo pouco explorado, ainda mais se pensarmos em jogos de tabuleiro de origem africana. Espera-se, com essa pesquisa, despertar o interesse dos professores para esse recurso, priorizando enfatizar os jogos de tabuleiro africanos, com base na Lei 10.639/03 (que torna obrigatório, nos estabelecimentos públicos e privados de ensino fundamental e médio, o ensino sobre História e Cultura afro-brasileiras), objetivando auxiliá-los na construção de conceitos matemáticos com os alunos.

Assim, pretende-se, com o presente trabalho, mostrar como esse recurso didático pode ser usado para o ensino de conceitos e conteúdos do currículo matemático de uma maneira diferente e prazerosa, para que o aluno possa trabalhar desde sua construção, passando pela origem histórica desses jogos, compreendendo a sua dinâmica, até chegar a sua aplicação e, consequentemente, apropriação dos conteúdos curriculares através de suas próprias interpretações.

Na perspectiva de desenvolver um trabalho que corrobore uma aprendizagem significativa, preocupado com a diversidade cultural e que garanta a aprendizagem de conteúdos do currículo matemático garantindo o que foi determinado pela Lei 10639/03, essa pesquisa se prôpos a compartilhar com outros profissionais da área uma forma de resgatar a cultura afro-brasileira através dos jogos de tabuleiro africanos, negada por uma educação eurocêntrica, e ao mesmo tempo trabalhar os conteúdos matemáticos desenvolvidos e conceituados através desses jogos. Além de sugerir os conteúdos que podem ser trabalhados em cada um dos jogos, a pesquisa ainda propõe algumas atividades para serem usadas com os alunos envolvendo vários assuntos do currículo matemático.

No primeiro capítulo serão trabalhados os itens que servirão de motivação para a realização desse trabalho, como exemplo o uso de jogos de tabuleiro para tentar aproximar os alunos dessa "Matemática"muitas vezes temida ou até mesmo assustadora, que faz com que professores tentem encontrar uma ferramenta para chegar ao aluno e então construir conceitos e conteúdos. Ainda no primeiro capítulo, além de mostrar como os jogos de tabuleiro são uma excelente ferramenta pedagógica, será mostrado também, como a Lei 10.639/03 é um grande e importante passo no sentido da construção de uma educação com um olhar multirreferencial.

Nos próximos capítulos, inicia-se o trabalho com os jogos africanos, a escolha desses jogos não foi simples e uma das coisas que pesou na escolha foi à necessidade de um jogo que contemplasse o trabalho com geometria, que é um conteúdo difícil de ser apreendido por parte dos alunos e julgado como complicado por boa parte destes, então uma das demandas era melhorar esse quadro, encontrando um jogo que aproximasse o aluno desses conteúdos para que então o aprendizado pudesse ser efetivado. Nesse sentido o Shisima e o jogo Borboleta contemplaram completamente, e para completar os jogos veio o Ayó, da família Mancala com suas especificidades no sentido de trabalhar o raciocínio lógico, de prever situações de jogo e outras tantas características apaixonantes.

No capítulo de cada jogo, trabalha-se a sua descrição, regras, estratégias para desenvolvê-los e a sugestão de atividades que serão adaptadas a depender do seu público e especificidades.

No apêndice, estão as sugestões de conteúdos de geometria plana e análise combinatória necessária para a resolução das atividades propostas e estão também as resoluções destas atividades.

## 1.1 Jogos de tabuleiro

De acordo com Johan Huizinga, autor do livro Homo ludens, publicado em 1938, jogo é:

"uma atividade voluntária exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e alegria e de uma consciência de ser diferente da vida cotidiana".

Os jogos de tabuleiro são uma categoria de jogos que utiliza um alicerce plano, com marcas ou desenhos característicos, condizentes com as regras e com a especificidade de cada jogo. Geralmente são utilizados desenhos que indicam a posição, o percurso e/ou os recursos dos jogadores, bem como outros elementos acessórios como dados, peões ou cartas. A prática dos jogos de tabuleiro envolve uma variação significativa no número de jogadores, havendo jogos com capacidade para dois jogadores e outros, como o War, em que podem participar até seis jogadores.

Os jogos de tabuleiro clássicos têm seu primeiro exemplar encontrado na cidade estado de Ur, capital da Suméria. O Jogo Real de Ur é o jogo mais antigo já encontrado, com cerca de 4.500 anos, e o que ainda possui o conjunto de peças mais completo já achado. Suas regras exatas ainda não foram descobertas, mas puderam ser deduzidas com base em outros jogos semelhantes da mesma época, em registros históricos e em imagens pintadas em paredes ou esculpidas em artefatos antigos. O jogo possui mecânica semelhante ao Gamão e seu objetivo é sair com suas peças do tabuleiro antes que o oponente o faça. É a primeira vez que dados piramidais são inseridos na história (ALMEIDA, 2013, p. 25).

Na África, o mais disseminado jogo de tabuleiro é o Mancala - cuja temática é baseada na colheita e semeadura - criado originalmente para que os trabalhadores rurais jogassem em suas horas vagas (SCHELL, 2008).

O Xadrez, um dos jogos mais populares do mundo, originou-se no século 6 d.C. Suas representações são o peão, o cavalo, o bispo e a torre, e suas regras foram definidas no século XV. Vence o jogo aquele que mata o rei adversário (MASTROCOLLA, 2013).

Na Segunda Guerra Mundial, os jogos de estratégias ganharam espaço no mercado Europeu e com isso a indústria americana teve hegemonia durante a Era do Ouro dos jogos de tabuleiro, entre os anos de 1960 e 1980 (SCHELL, 2008).

Durante a Segunda Guerra Mundial, a Alemanha vivenciou uma forte censura a jogos com temática bélica no país. Enquanto em todo o mundo os Wargames eram o estilo de jogo apreciado, na Alemanha, eles eram estritamente censurados. Desta forma, com a crescente da classe trabalhadora, que possuía mais tempo de lazer, a demanda por jogos de tabuleiro aumentou e o país desenvolveu uma indústria de jogos voltada para o mercado interno que suprisse a necessidade por uma forma de diversão mais barata. Os jogos desenvolvidos já apresentam características próprias e, em 1970, era um mercado setorizado com produtos voltados para os mais diferentes públicos (ALMEIDA, 2013, p. 29).

Nos dias atuais, o mercado para jogos de tabuleiro está em ascensão, tanto nacional como internacionalmente, destacando-se aqueles que têm temáticas marcantes e regras mais enxutas.

### 1.1.1 Tipos de jogos de tabuleiro

Segundo o site Boad Game Geek, os jogos de tabuleiro classificam-se em 8 categorias divididas em: Abstract Games, Customizable Games, Children's Games, Family Games, Party Games, Strategy Games, Thematic Games e War Games.

Os jogos abstratos não seguem um tema estabelecido, seu foco em geral é a mecânica; são dotados de estratégias e estimulam a capacidade lógica e intelectual do jogador. Citam-se como exemplos os jogos de xadrez, gamão e Go.

Os jogos colecionáveis são os de miniatura e os card games (jogos de carta), no qual se monta o próprio baralho e conjunto de cartas antes de começar a jogar. Como exemplos, apresentam-se os jogos Magic e Netrunner.

Já os jogos infantis caracterizam-se por terem regras simples; em geral são associados a franquias de filmes, desenhos e brinquedos. Destinam-se a crianças de até dez anos de idade, havendo como exemplos os jogos Catan e Zooloretto Mini (MASTROCOLLA, 2013).

No que se trata dos jogos de família:

Os Jogos de Família são, basicamente, Jogos de Estratégia com regras mais leves e menos densas. São normalmente indicados para todas as idades e gerações. É comum o público destes jogos incluir desde avós até crianças menores de 10 anos em suas jogatinas. São considerados pelos jogadores assíduos como os melhores getaways do mercado, ou seja, são os melhores jogos para iniciar não-jogadores no universo dos Jogos de Tabuleiro Modernos, por serem mais dinâmicos, interessantes e com o nível de complexidade mediano. Pertencem a essa categoria os jogos Domínio de Carcassonne, Colonizadores de Catan, Coloretto, Takenoko, Ticket to Ride, etc (ALMEIDA, 2013, p. 31).

Os jogos de festa possuem maior interatividade como o Dixit, Perfil, Ouro de Tolo e outros. São mais dinâmicos e proporcionam formação de times; possuem curta duração e regras simples (SCHELL, 2008).

Os jogos de estratégia caracterizam-se pelas várias ações proporcionadas aos jogadores, que necessitam de planejamento e raciocínio lógico para executar as jogadas. Citam-se os jogos de família Mancala, Puerto Rico, Trajan e outros.

Os jogos temáticos são inspirados em obras literárias e filmes. Possuem estratégia ampliada, proporcionando o conflito entre os jogadores e também a eliminação desses durante a partida. Apresentam-se como exemplos Axis & Allies, Battlestar Galactica, Elder Sign, e outros.

Por fim, os jogos de guerra têm como objetivo conquistar territórios através das batalhas e conflitos, o que explora as habilidades individuais dos jogadores devido ao seu caráter estratégico. Exemplo: War

## 1.2 Jogos como ferramenta didática

Na contemporaneidade, vive-se em uma época em que comunicar-se é mais do que uma questão de sobrevivência. Atualmente, a comunicação ultrapassa barreiras geográficas, podendo ser feita de qualquer lugar e a qualquer momento, em tempo real, configurando-se como a base da sociedade.

Há muitas maneiras de comunicação, e uma delas são os jogos, pois eles têm importância nas linguagens gestual, visual, gráfica e verbal. Não é costume utilizar outras formas de aprendizado, além da leitura, da escrita e da resolução de problemas; mas os jogos trazem outra perspectiva, ampliando a aprendizagem.

Cada dicionário traz o seu significado para jogo, mas todos passam a ideia de diversão e brincadeira, importantes em todas as fases da vida. O jogo, no entanto, não é apenas entretenimento, mas também ferramenta de aprendizagem, e, por isso, deve ser visto como algo sério, pois é fundamental para o desenvolvimento. É durante a brincadeira que o aluno vai construindo seu próprio pensamento, sob a orientação de um adulto ou com a colaboração de um companheiro mais eficaz.

A visão sociocultural de inteligência, proposta por Nunes et al. (2009), é de que a escola participe do processo de desenvolvimento da inteligência da criança, oferecendo-lhe acesso a instrumentos e objetos simbólicos, que ampliam sua capacidade de registrar quantidade, lembrar e solucionar problemas, o que facilitará a aprendizagem dos demais conteúdos.

Segundo Piaget (1967, p. 112), "o jogo não pode ser visto apenas como divertimento ou brincadeira para desgastar energia, pois ele favorece o desenvolvimento físico, cognitivo, afetivo e moral".

O desenvolvimento da criança depende do lúdico. O jogo consiste em uma forma de equilíbrio com o mundo, por isso sua forma de assimilação e acomodação pode ser proporcionada através do jogo. O desenvolvimento de atividades lúdicas facilita a aprendizagem, os processos de socialização, de comunicação, de expressão e a construção do conhecimento. De acordo com o PCN:

> "Cabe ao educador, por meio da intervenção pedagógica, promover a realização de aprendizagem com o maior grau de significado possível, uma vez que esta nunca é absoluta, sempre é possível estabelecer relação entre o que se aprende e a realidade, conhecer as possibilidades de observação, reflexão e informação(...)"(PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS- Introducão-Vol.1-p.53)

Através dos jogos, a criança utiliza esquemas de assimilação próprios da infância, já em cada etapa de seu desenvolvimento, a criança tem esquemas específicos para assimilar o meio, a abordagem da realidade.

Utilizar esquemas de assimilação infantil para uma aprendizagem eficiente, garante o desenvolvimento do cognitivo da criança e a apropriação do conhecimento com significado pela mesma, o que genericamente é o objetivo da educação.

Sobre o desenvolvimento cognitivo, Sanchez (2004, p. 174) afirma:

> "Dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; do tipo da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, quanto à prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações. Dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente. Dificuldades quanto as crenças, as atitudes, as expectativas e aos fatores emocionais acerca da matemática. Questões de grande interesse e que, com o tempo, podem dar lugar ao fenômeno da ansiedade para com a matemática e que sintetiza o acúmulo de problemas que os alunos maiores experimentam diante do contato com a matemática. Dificuldades relativas à própria complexidade da matemática, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos. Atrasos cognitivos generalizados ou específicos. Problemas linguísticos que se manifestam na matemática; dificuldades de atenção e motivacionais; dificuldades na memória, etc. Dificuldade originada no ensino inadequado ou insuficiente seja porque a organização do mesmo não está bem sequenciada, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouco motivadora e muito pouco eficaz".

Dessa forma, deve-se lembrar que as dificuldades de aprendizagem no ensino da Matemática podem estar na forma como os professores selecionam os conteúdos, que, em alguns casos, não apresentam sentido para os alunos mas como já foi dito anteriormente não passa só por aí, porém tem algo que os jogos proporcionam que realmente atinge em cheio muitos alunos, a ludicidade.

O lúdico traz a espontaneidade do aprendente, favorecendo o seu desenvolvimento individual, já que exterioriza seus anseios e sentimentos e, com isso, possibilita descobrir o que o cerca. Sobre o assunto, Silva, Silva e Santos (2014, p. 4) afirmam:

> "O lúdico possibilita o estudo da relação da criança com o mundo externo, integrando estudos específicos sobre a importância do lúdico na formação da personalidade. Através da atividade lúdica e do jogo, a criança forma conceitos, seleciona ideias, estabelece relações lógicas, integra percepções, faz estimativas compatíveis com o crescimento físico e desenvolvimento e, o que é mais importante, vai se socializando. A convivência de forma lúdica e prazerosa com a aprendizagem proporcionará à criança estabelecer relações cognitivas às experiências vivenciadas, bem como relacioná-la às demais produções culturais e simbólicas, conforme procedimentos metodológicos compatíveis a essa prática".

Assim, o lúdico na educação passa a ideia de aprendizagem natural, isto é, a criança aprende sem mesmo perceber, com a espontaneidade trazida pelo lúdico.

Considerando as aulas de Matemática, Lara (2003, p. 21) afirma que "[...] as atividades lúdicas podem ser consideradas como uma estratégia que estimula o raciocínio, levando o aluno a enfrentar situações conflitantes relacionadas com seu cotidiano".

Pode-se dizer, portanto, que o lúdico na educação funciona como uma ferramenta a ser utilizada como facilitadora do processo de ensino e aprendizagem, possibilitando uma aprendizagem espontânea e, ainda, a aproximação entre professor e aluno e aluno e aluno.

Silva et al. (2013) elucida que a Matemática lúdica tem como objetivo trazer o aluno para a sala de aula motivado para aprender se divertindo, tornando a aula prazerosa e proveitosa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) visam oferecer padrões de ensino a serem seguidos, padrões esses que são considerados como a melhor forma de transmitir conteúdo para os alunos. Pode-se dizer que os PCN não se limitam apenas à transmissão de conteúdo para os alunos; eles se preocupam com a formação do cidadão, do professor como um educador, tendo em vista a formação holística do aluno. Dessa forma, faz-se necessário que os educadores compreendam a importância de se trabalhar com jogos de tabuleiros, pois, através desses, o educando sente-se presente no ambiente em que está inserido e, ao despertar a sua curiosidade, será fácil orientá-lo na construção do seu conhecimento.

## 1.3 A Lei 10639/03

A Lei 10.639, sancionada em 2003 pelo Presidente da República Luiz Inácio Lula da Silva, que modifica a LDB (Lei de Diretrizes e Bases, 1996) e estabelece a obrigatoriedade, nos ensinos fundamental e médio, público e particular, do ensino da História e Cultura africana e afro-brasileira tem especial importância na medida em que representa um marco histórico na luta antirracista no Brasil e uma transformação da política educacional e social brasileira.

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das relações étnico-raciais e para o ensino de História e Cultura afro-brasileira e africana,

> “a obrigatoriedade de inclusão de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana nos currículos da Educação Básica trata-se de decisão política, com fortes repercussões pedagógicas, inclusive na formação de professores. Com esta medida, reconhece-se que, além de garantir vagas para negros nos bancos escolares, é preciso valorizar devidamente a história e a cultura de seu povo, buscando reparar danos, que se repetem há cinco séculos, à sua identidade e a seus direitos. A relevância do estudo de temas decorrentes da história e cultura afro-brasileira e africana não se restringe à população negra, ao contrário, diz respeito a todos os brasileiros, uma vez que devem educar-se enquanto cidadãos atuantes no seio de uma sociedade multicultural e pluriétnica, capazes de construir uma nação democrática”. (BRASIL, 2004, p.17)

Proporcionar aos estudantes da educação básica o ensino da História e da Cultura africana e afro-brasileira, além de ampliar o ínfimo conhecimento que se tem sobre isso, propõe um novo olhar sobre a história africana e afro-brasileira e suas possíveis relações com o percurso histórico brasileiro, que esteve sempre pautado sobre uma ótica eurocêntrica, pela qual os negros apareciam apenas como escravos. Vale lembrar que o negro africano trazido à força para o Brasil não era essencialmente escravo - termo associado a um ser depreciado, inerte, passivo e submisso , mas sim escravizado. O que faz toda a diferença, pois pensar o negro como escravo, como um objeto, faz com que a sua bagagem cultural e histórica seja menosprezada e vista como inferior, inadequada e marginal. Além de escravizar, para garantir a dominação sobre os negros, foi necessário desqualificar a sua cultura e até mesmo proibir manifestações (culturais, religiosas, etc.) para impor a cultura do colonizador; isso gerou o preconceito e o menosprezo a manifestações da cultura afro-brasileira até os dias de hoje.

A Lei 10.639/03 não surgiu por acaso; ela é resultado de muitas lutas. Em 1970, o movimento negro; em 1980, simpatizantes da causa negra alertaram que a evasão escolar e o déficit de alunos negros se davam pela falta de conteúdos que valorizassem a cultura negra, entre outras causas; em 1990, a Marcha Zumbi dos Palmares reuniu 10 mil negros e negras, que foram entregar um documento com algumas reivindicações ao presidente, em Brasília; e nos anos 2000, o movimento ganhou mais força, o que se consolidou com a aplicação da lei 10.639/03.

A falta de conhecimento da história da África e afro-brasileira, nos currículos escolares brasileiros, aliada à forma como foi construída a identidade cultural do negro desde a colonização do Brasil é uma das bases do racismo que presenciamos hoje no país, um racismo (por vezes) velado, que discrimina e inferioriza a cultura da população negra, mas, ao mesmo tempo, quando é conveniente, faz apropriação cultural.

Com base na lei 10.639/03, tem-se a convicção de que a inclusão desse tema nos conteúdos escolares reconstrói nos alunos e nos professores um resgate ao que de fato a África e os africanos representam na sua essência: um continente riquíssimo cultural, material e cientificamente; e um povo guerreiro, astuto, perseverante e genial. Dessa forma, além de elevar a autoestima dos alunos afro-brasileiros, despertar-se-ia o respeito de todos os alunos por um povo, que, mesmo sendo escravizado, conseguiu, com muita inteligência, preservar sua cultura e religião, e ainda ter forças para se erguer e lutar até hoje por igualdade.

Devido à luta por uma educação que proporcione uma democracia racial nas nossas escolas do Brasil e fundamentando-se na promulgação da lei 10.639/03, torna-se necessário buscar conteúdos e desenvolver propostas pedagógicas que garantam o cumprimento dessa lei.

Nesse contexto, e através do estudo da história e dos aspectos culturais que permeiam os jogos de tabuleiro africanos, os alunos aprendem mais sobre a cultura afro-brasileira, sobre a história e a cultura da África. Desse modo, os jogos africanos são eficazes para trabalhar o currículo da Matemática, contemplando assim a lei 10.639/03.

Os jogos de tabuleiro matemáticos, como recurso didático, são importantes para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e de muitas outras habilidades e competências matemáticas indispensáveis. Além disso, os jogos de tabuleiro africanos, em seus aspectos históricos, filosóficos, culturais e matemáticos, e em sua potencialidade como instrumento de educação matemática, são capazes de aproximar a história e cultura africanas e afro-brasileira da Matemática.

Através da utilização de jogos de tabuleiro africanos como recurso metodológico de ensino, pode-se propagar práticas na perspectiva da reeducação das relações étnico-raciais. Salienta-se aqui, a necessidade de reeducação étnico-racial, porque todos no Brasil foram educados dentro de uma lógica colonizadora que insensibiliza, condena e exclui determinados segmentos humanos em função de seu pertencimento étnico.

## 1.4 Jogos de tabuleiro Africano

O uso dos jogos de tabuleiro africanos, como ferramenta metodológica, tem o papel de aproximar os alunos da cultura africana, que é muito presente na cultura brasileira devido ao processo de escravização. Dessa forma, possui também o objetivo de diminuir o abismo entre os conhecimentos criados pelo preconceito gerado, entre outros motivos, por uma educação baseada em uma única “história”, no caso, a eurocêntrica.

Ao se trabalhar com os jogos africanos, proporciona-se um mergulho na história, na cultura e na filosofia africanas, fazendo com que se estabeleça a transformação de uma educação que tinha trajetória única para uma com multireferencialidade, aumentando assim o repertório identitário da cultura nacional e abrindo possibilidades para que o aluno tenha outros olhares.

Os Jogos de tabuleiro africanos, além de serem utilizados como ferramenta para o ensino do currículo matemático, também ajudam a difundir a cultura africana, tão negada, mas muito necessária, tanto para povo afro-brasileiro, quanto para os que não se consideram assim.

Os jogos africanos trabalham os temas que englobam a cultura afro-brasileira e o lúdico. Além disso, pode ser ferramenta de ensino de várias áreas da Matemática, tais como trigonometria, análise combinatória, frações, geometria, numerações e contagem numérica, ficando a cargo do professor desenvolver estratégias que permitam que o aluno, na medida em que se apropria do jogo e das suas regras, possa ir construindo o conhecimento que vai levar à apropriação dos currículos matemáticos.

Por fim, sabe-se que os jogos são uma excelente estratégia para se trabalhar o lúdico. No caso do jogo de tabuleiro africano, além de cumprir o objetivo, ele se apropria desse lúdico para se aproximar de uma realidade e de uma identidade afro-brasileiras o que, como já foi dito anteriormente nessa pesquisa, vai ao encontro do o que é proposto pela lei 10.639/03. Portanto, cabe ao professor utilizar essa ferramenta de forma interdisciplinar, para que o aluno tenha contato direto com essa cosmovisão africana, a fim de que possa, além de aprender o conteúdo dos aspectos matemáticos inseridos no jogo, de maneira contextualizada, também ser um agente de combate ao preconceito ante-negro e ao apagamento da história e cultura africanas na escola.

# Capítulo 2

# JOGO AFRICANO SHISIMA

O jogo africano Shisima é originário da parte ocidental do Quênia. Na língua tiriki, a palavra shisima quer dizer "extensão de água"; as peças são chamadas de imbalavali ou pulgas-d'água, porque as pulgas-d'água mexem-se tão rápido na água, que é difícil o olhar conseguir acompanhá-las. E é com essa mesma velocidade que os jogadores de Shisima devem mexer as peças no tabuleiro. No Quênia, as crianças desenham o tabuleiro na areia e jogam com tampinhas de garrafa.

Figura 2.1: https://elegbaraguine.wordpress.com/

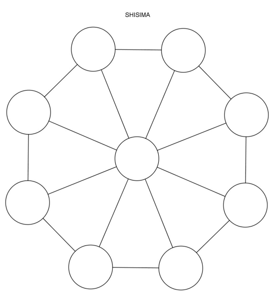



Figura 2.2: http://osalunosquecalculavam.blogspot.com/

## 2.1 Regras do Shisima

- O tabuleiro do jogo Shisima é formado por um octógono regular e como tal apresenta oito triângulos isósceles e congruentes.
- Cada um dos vértices desses oito triângulos isósceles, correspondem a uma casa do jogo, totalizando assim 9 casas que serão preenchidas por 6 peças de duas cores diferentes que representam os dois jogadores oponentes. (três peças para cada jogador)

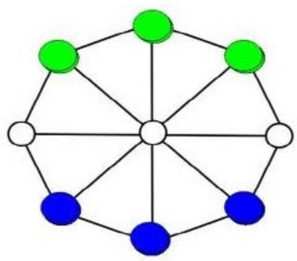


Figura 2.3: http://osalunosquecalculavam.blogspot.com/

- As estratégias desse jogo se assemelham às usadas no jogo de velha que é um jogo bastante conhecido em todo o Brasil, a maior diferença se dá pelo formato do tabuleiro que no caso do jogo africano é um octógono, o que no caso é uma excelente oportunidade de trabalhar circunferência, polígonos regulares e outros assuntos como será trabalhado adiante, já que a utilização do jogo também tem a finalidade de trabalhar os conteúdos matemáticos presentes na construção do tabuleiro e durante a execução das jogadas utilizados pelos alunos.
- O jogo é executado por dois jogadores.
- As peças dos opositores são colocadas no tabuleiro, três de cada lado, como na figura acima, tendo três casas vazias que as separam.
- Cada jogador na sua vez mexe uma de suas peças em linha reta até uma das casas vazias, segundo a sua estratégia, e eles seguem assim se revezando.
- Não é permitido saltar por cima de qualquer peça.
- Se a mesma sequência for repetida por três vezes, o jogo acaba empatado.

- Vence o jogo o primeiro jogador que conseguir alinhar as suas três peças.
- Os jogadores devem se revezar para iniciar o jogo.

### 2.1.1 Estratégia e o Conteúdo a ser trabalhado no jogo Shisima

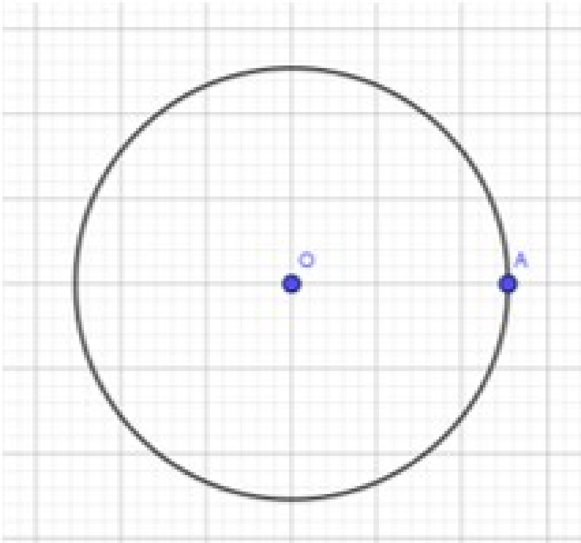
O trabalho com jogos configura-se em uma atividade pedagógica, portanto requer planejamento. Devido a isso, não se deve perder de vista que a escolha por trabalhar com jogos africanos nessa pesquisa tem o objetivo de valorizar e reconhecer a identidade, a cultura e a história dos povos africanos e do seu legado (lei 10639/03) e, ao mesmo tempo, trabalhar os conteúdos matemáticos associados à execução desses jogos dentro de uma perspectiva étnico-racial.

Desse modo, a sugestão dessa pesquisa que não tem a intenção de ser uma fórmula, e sim apenas um modelo que deve se adequar às particularidades de cada escola e/ou educador é que primeiro se leve para a sala alguns jogos Shisima, para serem apresentados aos alunos, inclusive enfatizando a sua origem, apresentando-se as regras. O aluno deve fazer uma leitura das regras e, em seguida, articular a melhor estratégia para vencer o jogo. O professor deve apontar o sentido do jogo. O jogo dura em média 15 minutos, tempo suficiente para os alunos jogarem algumas vezes e apreciarem a atividade.

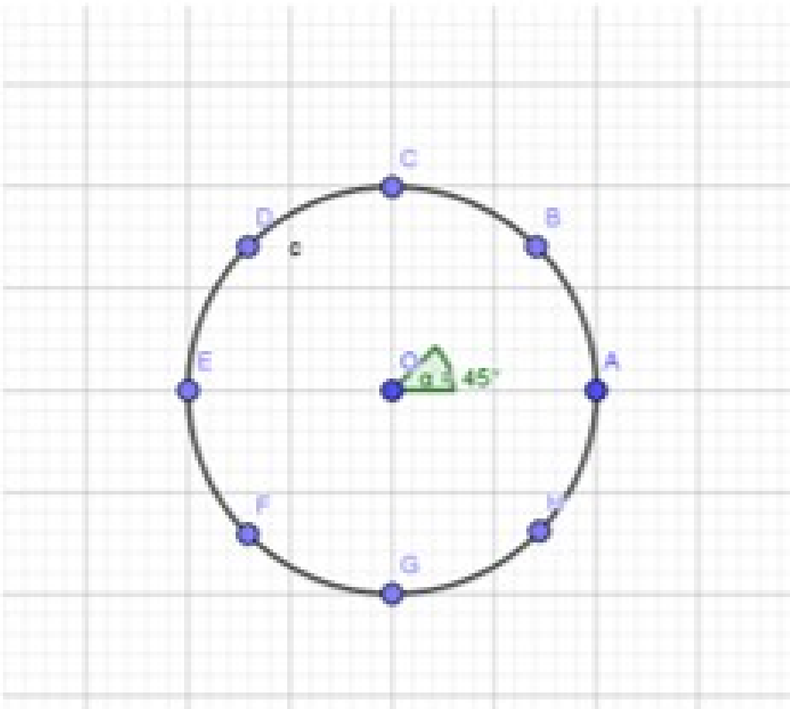
Como esse trabalho deve ser interdisciplinar, enquanto nas aulas de Matemática o aluno se apropria do jogo, das regras, da sua origem, nas aulas de História, Artes e Geografia, o aluno se apropria das características fundamentais do Quênia, dos seus aspectos geográficos, econômicos, sociais, culturais e religiosos, as suas relações com o Brasil, e estuda também sobre as contribuições desse país para a nossa cultura e para a formação da nossa população.

Feito isso, pode-se partir para a etapa de montagem do tabuleiro, o que pode ser feito de várias formas. A construção do tabuleiro do jogo Shisima vai envolver vários assuntos do currículo da matemática; além disso, construir o tabuleiro do jogo com os alunos em sala será uma ótima oportunidade para se usar compasso, transferidor e réguas, sempre associando essas construções aos conteúdos e às definições matemáticas.

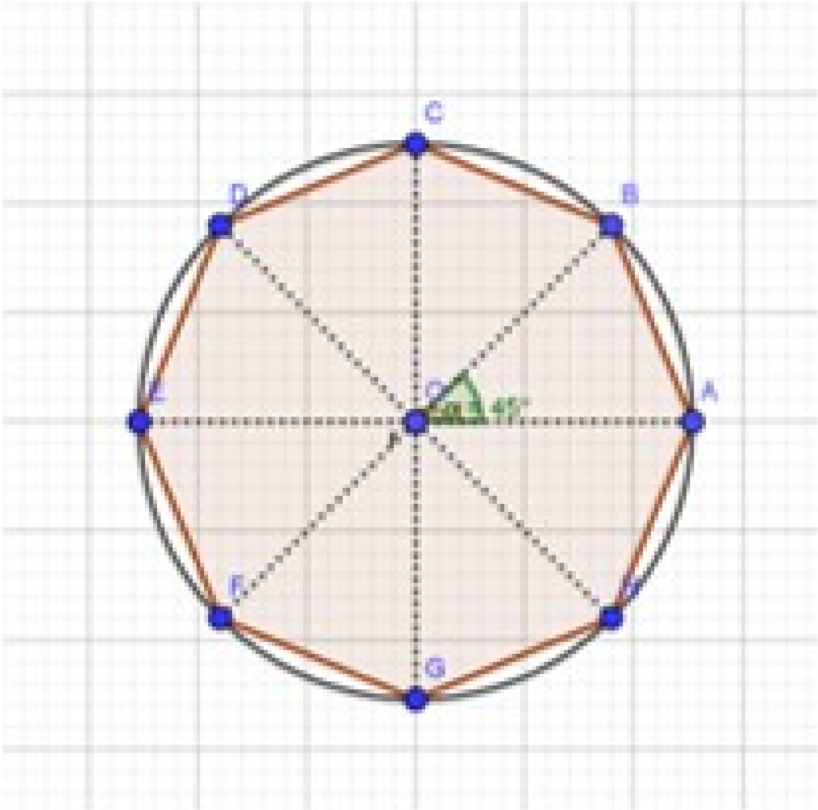
O tabuleiro pode ser confeccionado, por exemplo, utilizando folhas A4 e usando tampas de garrafa PET como as peças. Para construí-lo pode-se fazer uma circunferência usando o compasso.




Escolha um ponto A qualquer e com a abertura do compasso de 45° divida a circunferência em oito arcos congruentes, sempre aproveitando a construção para dialogar com os alunos sobre qual a melhor forma de fazê-la,




Una os pontos gerados na circunferência e una também os pontos diametralmente opostos, encontrando assim um octógono regular inscrito numa circunferência, que representa o tabuleiro do jogo Shisima com suas 9 casas determinadas pelos pontos A, B, C, D, E, F, G, H e O.




Com o tabuleiro construído, aproveite para fazer alguns questionamentos aos alunos.

- Porque foi usado o ângulo de 45°?
- Se usássemos o ângulo de 60° o que mudaria? E de 30°?
- Quantas casas teriam esse novo jogo, construído através de um ângulo de 30°? E de 60°?
- No jogo original cada jogador tem 3 peças, poderia ser 4 para cada jogador? E 2 peças? Explique.

Este seria um excelente momento para fazer uma avaliação diagnóstica sobre o que os alunos estão sabendo de geometria: pontos, retas, segmentos, ângulos, triângulos, polígonos, relações métricas, trigonométricas, lei dos senos e dos cossenos e circunferência.

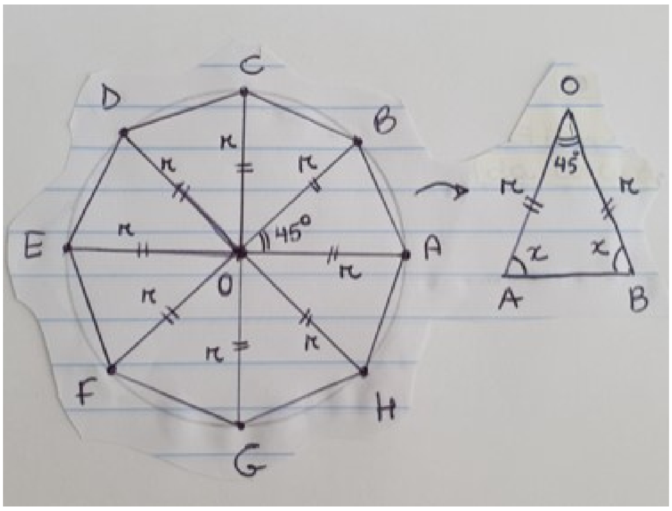
Partindo daí, pode-se introduzir assuntos e conceitos geométricos, capazes de aprimorar as habilidades do aprendiz, como os assuntos sugeridos no apêndice, que trará uma sugestão de conteúdos de geometria plana e análise combinátoria que poderão ser aprofundados com a biografia sugerida.

Depois de trabalhar com os conteúdos, o professor pode aprofundar as discussões, questionando o aluno sobre:

O octógono gerado é formado por oito triângulos. Classifique esse triângulo quanto aos lados e os ângulos, justificando a sua resposta.

Aqui o aluno deve perceber que o ângulo central de cada triângulo vale 45° e como os lados que formam o ângulo de 45° são raios da circunferência circunscrita, então os dois outros ângulos são congruentes e medem 67,5°.

Daí, o triângulo é isósceles e acutângulo.



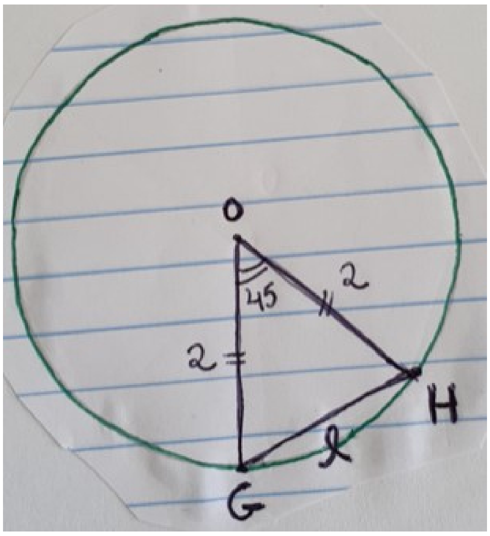

r=Raio da crcunferência circunscrita.

$x + x + 45 = 180 \Leftrightarrow 2x = 135 \Leftrightarrow x = 67,5°$.

Se a medida do raio da circunferência circunscrita ao polígono for 2cm, quanto vale o lado desse octógono?

Aqui o aluno pode usar lei dos cossenos e determinar a medida do lado do octógono.

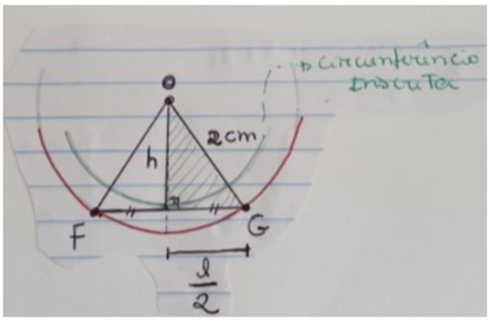
$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet cos45°$




$l^2 = 4 + 4 - 8\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$l^2 = 8 - 4\sqrt{2}$
$l = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$
$l = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Considerando ainda esse octógono de raio da circunferência circunscrita igual a 2cm, quanto vale o raio da circunferência inscrita?

Aqui o aluno deve perceber que o raio da circunferência inscrita é o apótema do polígono e é também a altura do triângulo isósceles portanto sabendo que se o triângulo é isósceles a altura em relação a base é também mediana pode-se usar o valor do lado encontrado na questão anterior para determinar o valor dessa altura através do teorema de Pitágoras.



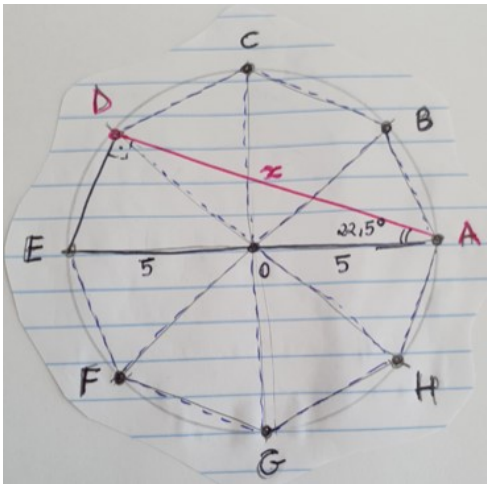

$h^2 = 4 - (\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2$
$h^2 = 4 - (2 - \sqrt{2})$
$h^2 = 4 - 2 + \sqrt{2}$
$h^2 = 2 + \sqrt{2}$

$h = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ cm.
$r_{inscrita} = ápotema = h_{\Delta} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

Sabendo que a medida do raio da circunferência é 5cm, determine a medida da corda AD?

Aqui o aluno deve perceber que a corda AD pode ser determinada através do triângulo ADE retângulo em D (pois, ADE é inscrito numa semicircunferência), e que tem hipotenusa medindo 2R.

Além disso, pode ser usada as relações trigonométricas para determinar AD, já que o ângulo A mede 22,5° ( ângulo inscrito na circunferência). Para determinar o cosseno de 22,5° use a fórmula do arco metade.




$$cos(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1+cos(a)}{2}}$$
$$cos22,5° = \sqrt{\frac{1+cos(45°)}{2}}$$
$$cos22,5° = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$
$$cos22,5° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$
$$cos22,5° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$
$$cos22,5° = \frac{\bar{DA}}{\bar{EA}}$$
$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{X}{10}$$
$$\bar{DA} = X = 5 + \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$\bar{DA} = X = 5 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$cm.

Outra forma de construir o tabuleiro é através de dobraduras (primeiro o aluno faria uma circunferência, com a origem do plano cartesiano como centro), com as quais poderiam ser trabalhados, além de tudo citado acima, coordenadas cartesianas, simetria, bissetrizes, análise combinatória e até trigonometria. Além dos conteúdos utilizados na construção do tabuleiro, ainda há outros que também podem ser trabalhados à medida em que se desenvolve o jogo; entre eles, análise combinatória, probabilidade e função afim. Claro que o professor daria a profundidade de acordo com o seu grupo de trabalho.

Na trigonometria e na Geometria, pode-se notar que os elementos físicos presentes no tabuleiro, e que serão evidenciados durante a construção do mesmo com os alunos, podem ser utilizados para o ensino dessa área matemática. Durante a construção do tabuleiro, é necessário fazer um círculo e, inscrito nele, como vimos acima, constrói-se um octógono que, por sua vez, decompõe-se em oito triângulos isósceles. Cada um desses triângulos isósceles tem a medida dos seus lados congruentes igual à medida do raio da circunferência circunscrita ao octógono, e tem altura relativa à base igual ao raio da circunferência inscrita no mesmo octógono, que também representa o apótema do mesmo. Além disso, pode-se calcular, através dos arcos, o valor dos ângulos internos ao octógono, que são ângulos centrais, daí pode-se traçar a altura desses triângulos em relação à base, gerando assim um triângulo retângulo onde será possível usar relações métricas e trigonométricas para encontrar a medida desse lado ( raio da circunferência circunscrita), a medida da altura (raio da circunferência inscrita) e a metade da base. Também dá para usar as fórmulas do arco metade, já que esse triângulo retângulo tem um dos seus ângulos medindo 22,5°. Ademais, é possível usar outros tópicos da trigonometria para fazer o cálculo do diâmetro da circunferência circunscrita, considerando dois pontos diametralmente opostos e um terceiro ponto do polígono que formem um triângulo inscrito na semicircunferência.

No jogo, podemos contextualizar a matemática implícita para tornar os conceitos significativos, de forma que se obtenha uma aprendizagem com significado e sem perder de vista os aspectos da cultura africana que estão presentes no jogo.

### 2.1.2 Manufatura pedagógica do jogo Shisima

**Título**: Jogo de tabuleiro africano Shisima

**Área de aplicação**: Geometria Plana e Análise Combinatória

**Nível**: Ensino Fundamental( ) Ensino Médio( x ) Ensino Superior( )

**Quantidade de aulas**:
i)Apresentação do jogo, uma hora aula.
ii) Construção e confecção do tabuleiro, duas horas aula.
iii)Atividades, duas horas aula.

Obs: Lembrando que os pré-requisitos devem ser trabalhados antes da execução das atividades.

**Material utilizado na confecção**: cartolina , transferidor, esquadros, compasso e 6 tampinhas de garrafa pet de duas cores diferentes. ( 3 de cada).

**Descrição**: O tabuleiro é composto por um octógono regular que é formado por 8 triângulos isósceles, onde os vértices desses triângulos geram 9 casas de jogo.

### 2.1.3 Atividades usando o jogo Shisima

Ainda sobre a utilização do jogo para trabalhar com o currículo, não se pode perder de vista a possibilidade de criar atividades que trabalhem os conteúdos tendo como base os jogos africanos. Essas atividades podem ser criadas de acordo com o nível de profundidade que cada professor vai dar ao conteúdo, ou de acordo com a série que está trabalhando; as abordagem vão determinar o tipo de questão que será produzida pelo educador.

Abaixo, disponibilizarei algumas atividades que iremos trabalhar com o conteúdo de análise combinatória, geometria e além disso trabalhar estratégia e raciocínio lógico num nível que se adequa melhor ao ensino médio, porém antes de trabalhar essas atividades aproveite para desenvolver ou relembrar conceitos relacionados com a análise combinatória como os que apresento, abaixo:

## 2.2 ATIVIDADE 1

De quantos modos diferentes podemos alinhar três peças de um jogador?

- **Tempo:** 5 minutos.

- **Conceitos:** Raciocínio lógico.

## 2.3 ATIVIDADE 2

De quantas maneiras podemos colocar quatro peças idênticas vermelhas e quatro peças idênticas azuis sobre o tabuleiro de Shisima de modo que a mesma cor não esteja em dois vértices consecutivos do octógono? Não use o centro do tabuleiro.

- **Tempo:** 5 minutos.

- **Conceitos:** Raciocínio lógico e noções básicas de contagem.

## 2.4 ATIVIDADE 3

Dispondo de nove cores distintas de quantos modos podemos colorir os 8 triângulos do tabuleiro Shisima, cada triângulo com uma só cor, se os triângulos cuja fronteira é um lado comum não podem receber a mesma cor?

Obs: Os triângulos do tabuleiro Shisima estão numerados de 1 a 8.

- **Tempo:** 7 minutos.

- **Conceitos:** Princípio multiplicativo e princípio aditivo da análise combinatória.

## 2.5 ATIVIDADE 4

Quantos são os anagramas da palavra SHISIMA?

- **Tempo:** 5 minutos.

- **Conceitos:** Permutação simples.

## 2.6 ATIVIDADE 5

Quantos segmentos de reta podemos formar usando os vétices do octógono?

- **Tempo:** 5 minutos.

- **Conceitos:** Combinação simples.

## 2.7 ATIVIDADE 6

Quantos segmentos orientados podemos formar usando os vétices do octógono, leve em consideração o raciocínio usado na questão anterior?

- **Tempo:** 5 minutos.

- **Conceitos:** Combinação simples.

## 2.8 ATIVIDADE 7

Considere a reta r que corta o tabuleiro do SHISIMA nos três pontos onde não são colocadas as peças no início do jogo, quantos triângulos podem ser formados tendo como vértices algum desses três pontos que determinam a reta ou os outros seis pontos do tabuleiro?

- **Tempo:** 7 minutos.

- **Conceitos:** Princípio multiplicativo, príncipio aditivo e combinação simples.

## 2.9 ATIVIDADE 8

Considerando apenas os vértices do octógono do tabuleiro do jogo Shisima, quantos polígonos convexos podem ser formados usando esses pontos?

- **Tempo:** 7 minutos.

- **Conceitos:** Princípio multiplicativo, príncipio aditivo e combinação simples.

## 2.10 ATIVIDADE 9

De quantos modos podemos colocar no tabuleiro Shisima 8 peças coloridas (sem utilizar o ponto central e sem mover o tabuleiro) sendo que duas são verdes, de forma que essas peças verdes não fiquem juntas?

- **Tempo:** 5 minutos.

- **Conceitos:** Permutação simples e permutação circular.

## 2.11 ATIVIDADE 10

Sabendo que o tabuleiro do Shisima tem forma de octógono regular, escreva a função polinomial do 1º grau que representa o perímetro desse octógono que tem lado de medida n.

- **Tempo:** 5 minutos.

- **Conceitos:** Noção intuitiva de função, função do primeiro grau, perímetro e polígono regular.

## 2.12 ATIVIDADE 11

Sabendo que o tabuleiro do Shisima tem forma de octógono regular, determine a área desse octógono em função do seu apótema sabendo que o seu perímetro vale 24 cm.

- **Tempo:** 5 minutos.

- **Conceitos:** Geometria plana( perímetro, área de triângulo, triângulos, polígonos regulares.

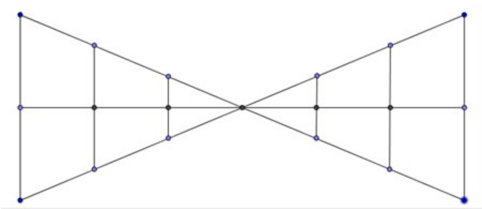
Assim como nessa questão podem-se trabalhar alguns dos conteúdos matemáticos muitas outras podem ser criadas para satisfazer as demandas de cada profissional. Essa pesquisa tem o intuito, portanto, de apresentar uma possibilidade que pode se adequar ou se transformar para dialogar com a abordagem de cada professor, que pode e deve fazer os seus ajustes. Além das atividades, as propostas feitas acima, tanto para as abordagens curriculares na construção dos tabuleiros, quanto para a condução durante o momento do jogo, representam um caminho dessa pesquisa para tentar romper um ensino basicamente tradicional, que vem continuamente registrando péssimos resultados, inclusive por não atrair os alunos, por não dar significado aos conteúdos.

# Capítulo 3

# O JOGO BORBOLETA DE MOÇAMBIQUE

O jogo Borboleta, também conhecido como Gulugufe, que significa borboleta no idioma Chitonga, de Moçambique, é um jogo de origem africana. O seu nome se dá pelo fato de a estrutura do seu tabuleiro se assemelhar às asas abertas de uma borboleta. Na Índia e em Blangadesh, as crianças chamam o mesmo jogo de Lau Kata Kati.

Figura 3.1: Games fron everywhere.



O tabuleiro do jogo Borboleta é formado por dois triângulos isósceles maiores congruentes, unidos por um vértice em comum, que faz com que os ângulos do vértice desses triângulos sejam opostos por esse mesmo vértice. Dentro de cada um desses triângulos, existem dois segmentos de reta paralelos entre si e paralelos à base desses triângulos e que interceptam a altura desses triângulos a um terço de distância do ângulo do vértice e a dois terços de distância do ângulo do vértice. No total, existem seis triângulos isósceles, semelhantes, congruentes 2 a 2, divididos por uma altura que também é bissetriz, mediana e mediatriz e que, portanto, gera 12 triângulos retângulos obviamente semelhantes e congruentes quatro a quatro. Claro que além dos triângulos, podem-se perceber trapézios retângulos e isósceles (tratados mais adiante).

Cada um dos vértices desses 6 triângulos isósceles correspondem a uma casa do jogo, totalizando assim 19 casas que serão preenchidas por 18 peças de duas cores diferentes, que representam os dois jogadores oponentes. Os participantes escolhem a cor que os representará e o seu lado de jogo e preenchem todas as casas do seu lado com as suas peças, deixando apenas a casa comum aos dois lados vazia. Como na figura abaixo.

## 3.1 Regras do jogo Borboleta

- Cada um dos vértices desses 6 triângulos isósceles, correspondem a uma casa do jogo, totalizando assim 19 casas que serão preenchidas por 18 peças de duas cores diferentes que representam os dois jogadores oponentes.
- Estes escolhem a cor que os representará e o seu lado de jogo e preenchem todas as casas do seu lado de jogo com as suas peças, deixando apenas a casa comum aos dos lados vazia. Como na figura abaixo.

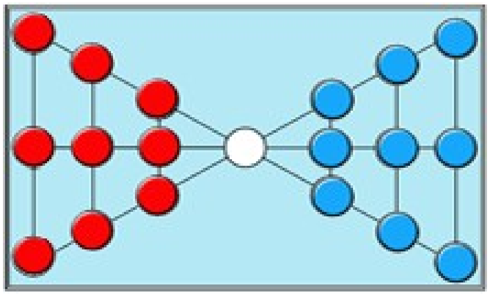


Figura 3.2: http://www.ibilce.unesp.br

- Cada jogador, na sua vez, movimenta uma de suas peças em linha reta para a casa mais próxima, podendo pular uma peça (em linha reta) do adversário caso a casa seguinte esteja vazia, desse modo essa peça que foi pulada será capturada ou seja retirada do tabuleiro, o jogador poderá seguir pulando outras peças do adversário enquanto for possível.
- Caso seja possível capturar uma peça do adversário e o jogador não perceber, ele acabará perdendo a peça para o adversário, mas se houver mais de uma forma de captura ele pode escolher uma delas sem perder a sua peça.
- Vence quem capturar todas as peças do adversário.

## 3.2 Estratégia e o Conteúdo a ser trabalho no jogo Borboleta

O trabalho com jogos configura-se em uma atividade pedagógica, portanto requer planejamento. Devido a isso, não se deve perder de vista que a escolha por trabalhar com jogos africanos nessa pesquisa tem o objetivo de valorizar e reconhecer a identidade, a cultura e a história dos povos africanos e do seu legado (lei 10639/03) e, ao mesmo tempo, trabalhar os conteúdos matemáticos associados à execução desses jogos dentro de uma perspectiva étnico-racial.

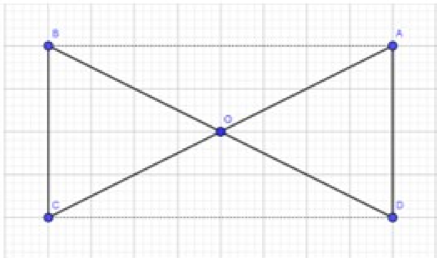
Desse modo, a sugestão dessa pesquisa - que não tem a intenção de ser uma fórmula, e sim apenas um modelo que deve se adequar às particularidades de cada escola e/ou educador - é que primeiro se leve para a sala alguns jogos Borboleta, para serem apresentados aos alunos, inclusive enfatizando a sua origem, apresentando-se as regras. O aluno deve fazer uma leitura das regras e, em seguida, articular a melhor estratégia para vencer o jogo. O professor deve apontar o sentido do jogo. O jogo dura em média 30 minutos.

Como esse trabalho deve ser interdisciplinar, enquanto nas aulas de matemática o aluno se apropria do jogo, das regras, da sua origem, nas aulas de história, artes e geografia, o aluno se apropria das características fundamentais de Moçambique, dos seus aspectos geográficos, econômicos, sociais, culturais e religiosos, as suas relações com o Brasil, e estuda também sobre as contribuições desse país para a nossa cultura e para a formação da nossa população.

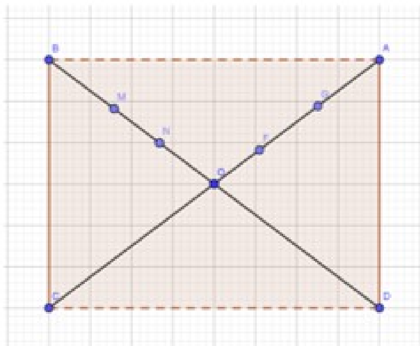
Feito isso, pode-se partir para a etapa de montagem do tabuleiro, o que pode ser feito de várias formas. A construção do tabuleiro do jogo Borboleta vai envolver vários assuntos do currículo da matemática; além disso, construir o tabuleiro do jogo com os alunos em sala será uma ótima oportunidade para se usar compasso, transferidor e réguas, sempre associando essas construções aos conteúdos e às definições matemáticas.

O tabuleiro pode ser confeccionado, por exemplo, utilizando folhas A4 e usando tampas de garrafa PET como as peças.

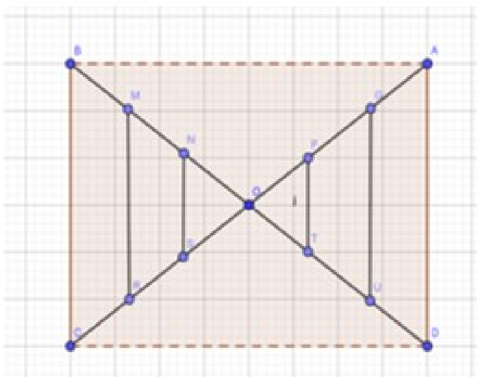
Para construí-lo pode-se fazer um retângulo tracejado e traçar as suas diagonais (aproveite para trabalhar as características dos paralelogramos até chegar no retângulo, inclusive para chamar atenção sobre o fato que as diagonais do retângulo são congruente e que por ser também um paralelogramo, acabam se cruzando no ponto médio e isso fará com que os triângulos gerados sejam dois a dois congruentes e sejam também isósceles de base igual a altura do retângulo ).




Coloque linha cheia nos dois triângulos isósceles que irão compor o tabuleiro, depois divida os segmentos BO e AO em três partes iguais gerando os pontos M, N, P e Q.

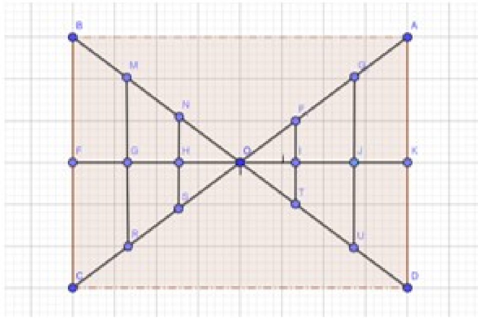


Depois com o auxílio dos esquadros ajude o aluno a traçar as paralelas aos segmentos BC e AD, gerando os pontos R, S, T e U.



Aproveite os esquadros e trace a paralela aos lados tracejados AB e CD e que passa pelo ponto O. Essa paralela corta todas as paralelas aos lados AD e BC inclusive corta esses lados e gera os pontos F, G, H, I, J, e K.

Agora sim, tabuleiro finalizado com suas 19 casas determinadas, das quais apenas o ponto O ficará vazio.



Baseado no tabuleiro construído, acima, e no aprofundamento teórico proporcionado pelo professor ( tem uma sugestão de conteúdos necessários indicado nessa pesquisa na construção do tabuleiro do Shisima), aproveite para fazer alguns questionamentos aos alunos.

- ABCD é retângulo e AC e BD suas diagonais como isso influencia a classificação dos triângulos ADO e BCO?
- Qual a quantidade de triângulos existente no tabuleiro? Quantos são retângulos? E isósceles?
- Qual a quantidade de trapézios existentes no tabuleiro? Classifique-os quanto aos tipos.
- OF e OK são alturas dos triângulos. Justifique esse fato.
- Os triângulos HNO, GMO e BFO são semelhantes? Se a sua resposta for sim indique o caso de semelhança.
- Qual a relação entre as bases desses triângulos? Relacione esse resultado com base média de triângulo e de trapézio.

Com o tabuleiro formado, não faltam componentes da geometria para serem explorado, como ângulos, paralelismo e perpendicularismo entre retas, Teorema de Tales, os tipos de triângulos, inclusive os triângulos retângulos com seus teoremas, as propriedades e características desses, congruência, semelhança, quadriláteros - paralelogramos, retângulos, trapézios-, base média de trapézio e de triângulo, relações trigonométricas e áreas.

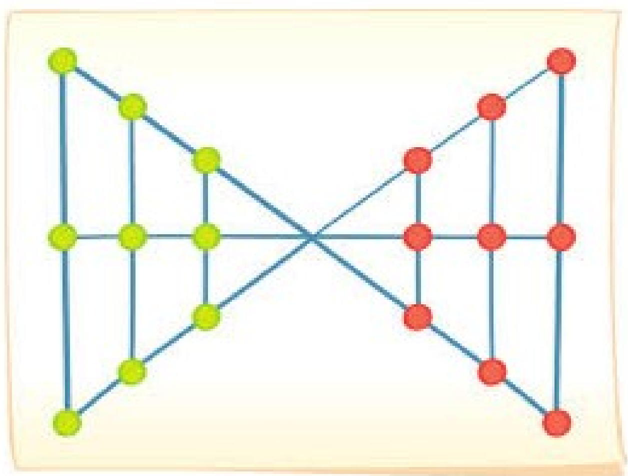
Aliado a toda a geometria associada ao tabuleiro, surge uma gama de assuntos aritméticos relacionados às proporcionalidades próprias da estrutura do tabuleiro; tem-se, então, a oportunidade de trabalhar com frações, razão e proporção. Esse seria um excelente momento para fazer um diagnóstico sobre o que os alunos estão sabendo sobre tais assuntos.

Com o jogo, é possível trabalhar vários conceitos matemáticos, tais como geometria plana, trigonometria, frações e proporção.

Na trigonometria e na Geometria, podemos notar que os elementos físicos presentes no tabuleiro - e que serão evidenciados durante a construção do mesmo com os alunos podem ser utilizados para o ensino dessa área matemática.

No jogo, podemos contextualizar a matemática implícita para tornar os conceitos significativos, de forma que se obtenha uma aprendizagem com significado e sem perder de vista os aspectos da cultura africana que estão presentes no jogo.

## 3.3 Manufatura pedagógica do jogo Borboleta



**Título**: Jogo de tabuleiro africano Borboleta
**Área de aplicação**: Geometria Plana e Análise Combinatória
**Quantidade de aulas**:

- i)Apresentação do jogo, uma hora aula.
- ii)Construção e confecção do tabuleiro, duas horas aula.
- iii)Atividades, duas horas aula.

Obs: Lembrando que os pré-requisitos devem ser trabalhados antes da execução das atividades.

**Material utilizado na confecção**: cartolina , transferidor, esquadros, compasso e 18 tampinhas de garrafa pet de duas cores diferentes ( 9 de cada).

**Descrição**: O tabuleiro é composto por dois triângulos isósceles maiores, dois médios e dois menores e o segmento horizontal que corta esses triângulos.

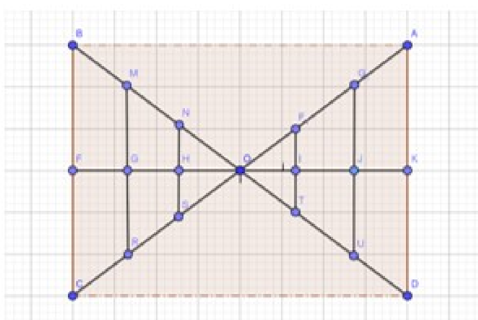
## 3.4 Atividades usando o jogo Borboleta

Ainda sobre a utilização do jogo para trabalhar o currículo, não se pode ignorar a possibilidade de criar atividades que trabalhem os conteúdos tendo como base os jogos africanos. Essas podem ser criadas de acordo com o nível de profundidade que cada professor vai dar ao conteúdo, ou de acordo com a série que está trabalhando; as abordagens vão determinar o tipo de questão que será produzida pelo educador.

Abaixo, disponibilizarei algumas atividades que iremos trabalhar com o conteúdo de trigonometria, geometria e além disso trabalhar estratégia e raciocínio lógico num nível que se adequa melhor ao ensino médio . Vejamos:

### 3.4.1 Atividade 1

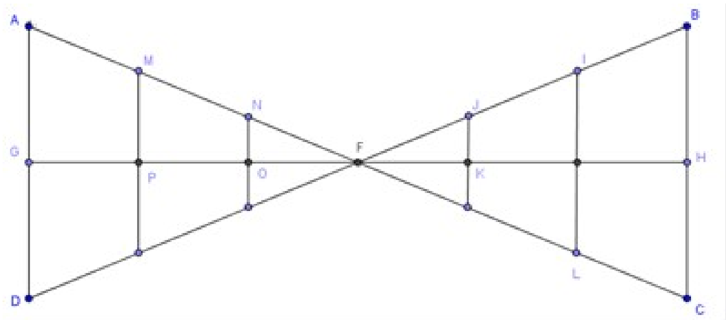
A figura abaixo representa o tabuleiro do jogo Borboleta . Sabendo que AD = 18cm e que a razão de semelhança entre os triângulos OQU e ADO é de dois terços , determine a medida do segmento PT?



- **Tempo:** 5 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Triângulos, cervianas, semelhança de triângulos e base média de triângulos).

### 3.4.2 Atividade 2

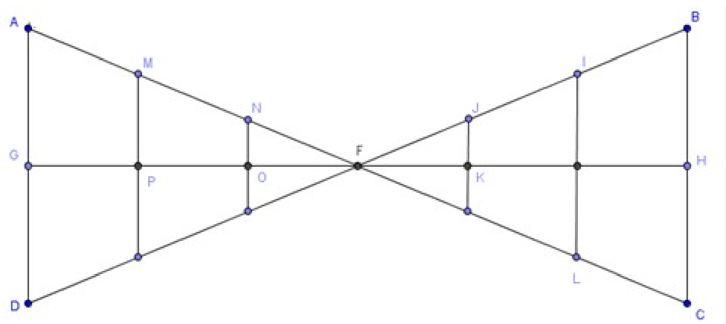
A figura abaixo representa o tabuleiro do jogo borboleta com todas as especificidades estudadas em sala, determine a medida dos lados FG e AF sabendo que o lado AG = 6cm e o ângulo AFG mede 30°.




- **Tempo:** 5 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Relações trigonométricas num triângulo retângulo).

### 3.4.3 Atividade 3

Observando o tabuleiro do jogo borboleta abaixo, e sabendo de todas as particularidades das figuras geométricas do tabuleiro do jogo Borboleta estudadas em sala, determine a medida dos segmentos NO e AG sabendo que MP = 6cm.

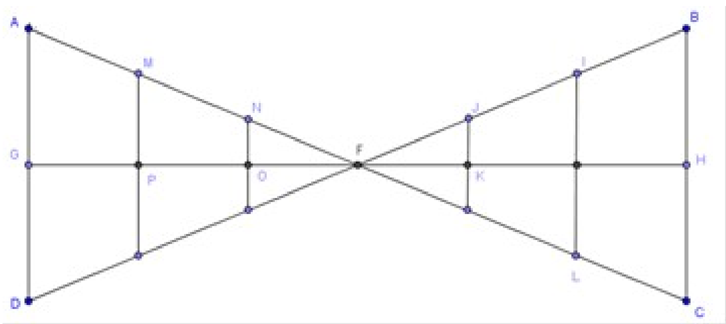



- **Tempo:** 5 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Base média de triângulo e base média de trapézio).

### 3.4.4 Atividade 4

Na figura abaixo, que representa o tabuleiro do jogo borboleta com todas as especificidades estudadas em sala, sabendo que o ângulo DAF mede 60° e que o lado AM = 3cm, determine:

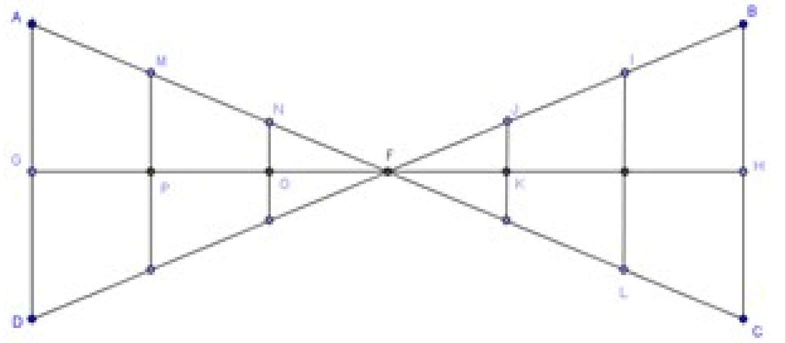
a) a medida do segmento GH;
b) a medida do ângulo DFG;
c) a medida do segmento AD.




- **Tempo:** 15 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Relações trigonométricas num triângulo retângulo, relações entre retas paralelas e uma transversal, teorema de Tales e cevianas de um triângulo).

### 3.4.5 Atividade 5

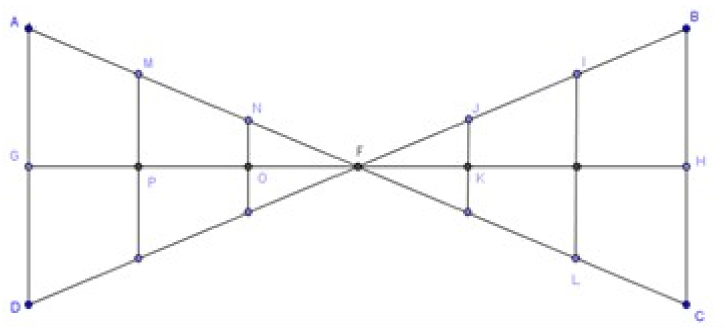
Abaixo temos a representação do tabuleiro do jogo borboleta com todas as especificidades estudadas em sala, sabendo que o lado FH = 8cm e o lado DG = 6cm determine a medida do lado AF e a medida da distância do ponto G ao ponto médio do lado AF.



- **Tempo:** 5 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Relações trigonométricas num triângulo retângulo, cevianas de um triângulo e suas propriedades).

### 3.4.6 Atividade 6

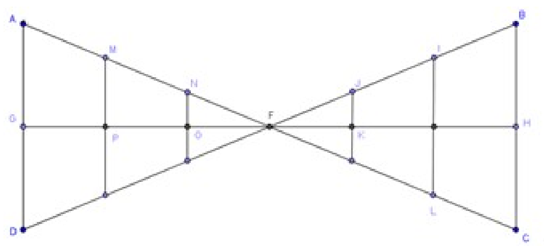
Na figura abaixo, temos a representação do tabuleiro do jogo borboleta com todas as especificidades estudadas em sala, determine o volume do sólido gerado pela rotação da figura AFBCFD sobre o eixo que contém a reta GH, sabendo que o triângulo ADF é equilátero de base 8cm.




- **Tempo:** 5 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Relações trigonométricas num triângulo retângulo, cevianas de um triângulo e suas propriedades).

### 3.4.7 Atividade 7

A figura abaixo representa o tabuleiro do jogo borboleta, desconsidere as especificidades estudadas em sala e determine o perímetro do trapézio AGPM, sabendo que ADF é isósceles de base AD = 10cm, ângulo do vértice 60° e que os segmentos FN, NM e AM são diretamente proporcionais a 2, 3 e 5.



- **Tempo:** 7 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Relações trigonométricas num triângulo retângulo, proporção e razão).

### 3.4.8 Atividade 8

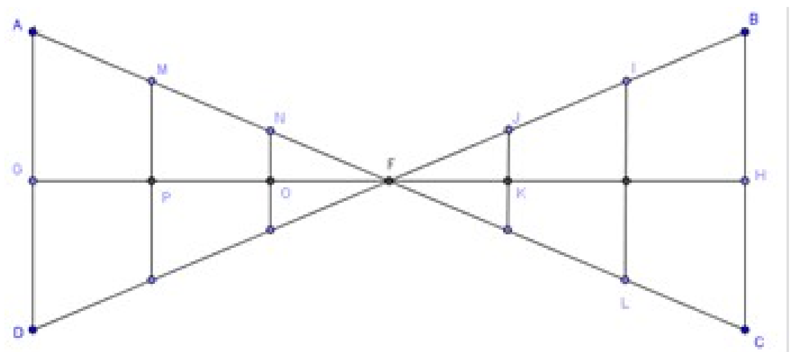
Baseado nos dados da atividade 7 e sabendo que o triângulo BCF é congruente ao triângulo ADF e que os segmentos FN = FJ, JI = MN e BI = AM, determine:

a) A razão entre FG e FP
b) A medida da altura do triângulo AFG relativa a hipotenusa.
c) O raio da circunferência circunscrita ao triângulo BFH.

- **Tempo:** 15 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Relações trigonométricas num triângulo retângulo, circunferência circunscrita e inscrita, proporção e razão).

### 3.4.9 Atividade 9

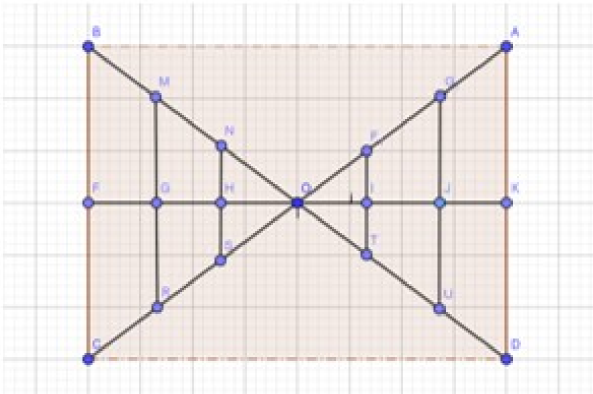
Abaixo temos o tabuleiro do jogo borboleta, desconsidere as especificidades estudadas em sala e determine a medida dos segmentos FJ, IB e HK sabendo que FL = 8cm, CL = 7cm, FK = 1cm, FI = 16 e que FJ é a terça parte de JI e que as retas JK, IL e BC são paralelas.




- **Tempo:** 7 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Relações trigonométricas num triângulo retângulo, proporção e razão).

### 3.4.10 Atividade 10

Abaixo temos o tabuleiro do jogo borboleta, considerando todas as especificidades estudadas em sala, prove que o quadrilátero PQJT é um paralelogramo.




- **Tempo:** 12 minutos.
- **Conceitos:** Geometria plana (Base média de triângulos, cevianas de triângulos e suas propriedades, quadriláteros).

Assim como nessa questão pode-se trabalhar geometria, podem-se criar muitas outras para satisfazer as demandas de cada profissional. Essa pesquisa tem o intuito, portanto, de apresentar uma possibilidade que pode se adequar ou se transformar para dialogar com a abordagem de cada professor, que pode e deve fazer os seus ajustes. Além das atividades, as propostas feitas acima, tanto para as abordagens curriculares na construção dos tabuleiros, quanto para a condução durante o momento do jogo, representam um caminho dessa pesquisa para tentar romper um ensino basicamente tradicional, que vem continuamente registrando péssimos resultados, inclusive por não atrair os alunos, por não dar significado aos conteúdos.

# Capítulo 4

# JOGO AFRICANO FAMÍLIA MANCALA

Muitas são as divergências acerca da data de aparecimento dos jogos da família Mancala. Alguns consideram que os jogos da família Mancala são os mais antigos do mundo. Existem registros que apontam para uma provável origem desses jogos no Egito; a partir do Vale do Nilo, eles teriam se expandido progressivamente para o restante do continente africano e para o Oriente.

A difusão dos Mancala pode ter sido resultado dos movimentos migratórios ocorridos no interior do continente africano e, depois, com a expansão do islamismo, a partir do século VII, deve ter havido também sua expansão para o mundo árabe. Com a escravização de africanos, os jogos da família Mancala foram levados da África para as Américas e, consequentemente, para o Brasil, com os nomes de Ayú(africanos escravizados no Brasil), Oulu, Walu, Adji, Ti, Ayó(Nigéria),Oware, entre outros.

Figura 4.1: http://www.clickideia.com.br

O termo Mancala é uma denominação genérica para uma família de aproximadamente 200 jogos de tabuleiros.

Uma curiosidade é que o tabuleiro dos jogos da família Mancala representava também a classe social de quem estava jogando. As classes mais humildes faziam escavação na areia para criar o seu tabuleiro, enquanto a classe mais favorecida jogava com tabuleiros imponentes, alguns feitos com rubis e safiras.

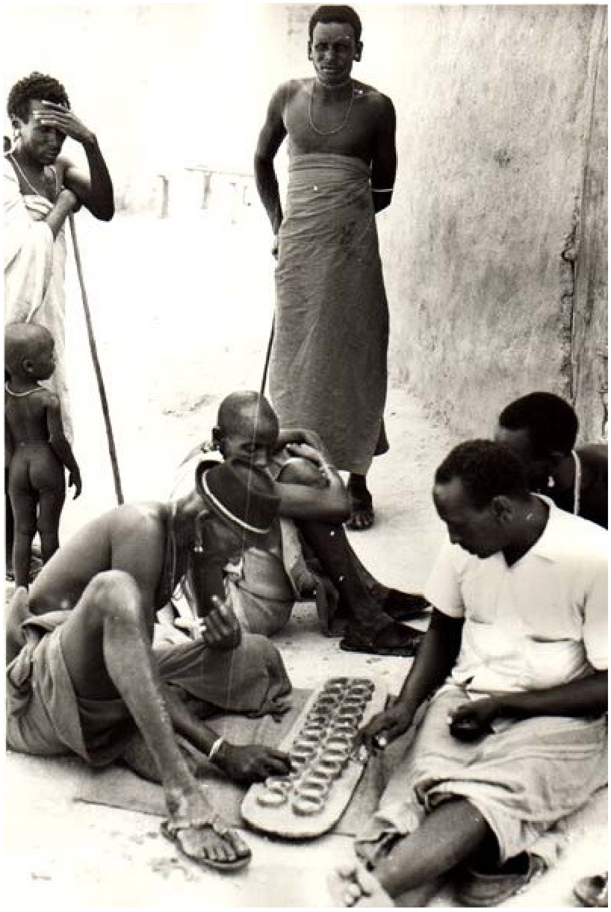


Figura 4.2: http://hp.wildgames.com

Figura 4.3: https://pt.wikipedia.org

Dentre os muitos jogos tabuleiros da família Mancala, destaca-se o tabuleiro do Ayó, que é retangular, com 12 casas, como a figura acima. O Ayó é jogado na Nigéria, país que tem laços históricos com o Brasil, por isso esse tabuleiro é bastante representativo para a pesquisa, pois grande parte dos negros que aqui chegaram para serem escravizados tinha essa origem. Além disso, esse é um jogo com profundas raízes filosóficas, como será mostrado a seguir.

Os jogos da família Mancala são bastante antigos e estão contextualizados no universo do plantar e do colher, pois o seu principal objetivo era simular o ato de semear: plantar, germinar, se desenvolver e colher.

O Ayó, jogo da família Mancala, é geralmente jogado com pequenas pedras ou sementes, que são as peças do jogo, e a movimentação de peças tem um sentido de semear e de colher, como dito acima. Ganha quem obtiver mais sementes ao final do jogo.

## 4.1 Regras do jogo Ayó da família Mancala

- Uma partida é realizada por dois jogadores.
- Para jogar o Ayó são necessárias 48 peças (sementes) e um tabuleiro retangular contendo 12 cavidades de igual tamanho, geralmente circulares e mais duas cavidades maiores, situadas na maioria dos jogos, nas extremidades do tabuleiro e que tem como função receber as peças que serão capturadas no decorrer do jogo, esse reservatório é denominado de oásis ou armazém.

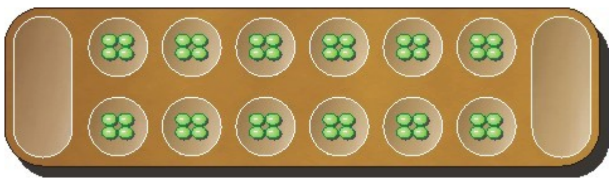


Figura 4.4: /www.angelfire.com/ab/jogos

- O Ayó é jogado por duas pessoas e o objetivo é colher o maior número de sementes.
- As sementes são distribuídas igualmente nas cavidades sem que estas sejam colocadas no oásis ou seja quatro sementes em cada cavidade.
- Para iniciar a partida um jogador esconde uma semente em uma das mãos e pede para o adversário adivinhar , caso adivinhe, inicia a partida.
- A movimentação do jogo é no sentido anti-horário.

- O jogador inicia tirando as sementes de uma de suas casas e distribuindo uma a uma, nas casas subsequentes, no sentido anti-horário, sem distribuir no óasis.
- O ato de colher(capturar sementes) ocorre quando a última semente que foi colocada estiver no território do seu oponente e em uma cavidade cuja soma das sementes sejam duas ou três, contando com a última semente que foi colocada desde que o jogador não fique sem sementes pra jogar.
- Se a cavidade anterior à última semente colocada tiver duas ou três sementes também, ocorre a colheita dupla(captura de sementes em duas cavidades).
- Se a cavidade anterior a essas duas cavidades também apresentar essas condições, pode ocorrer a captura tripla, e assim por diante, sendo que o máximo de colheitas múltiplas não ultrapasse cinco, pois se ultrapassar, o adversário ficaria sem sementes o que contraria a condição de captura.
- Pode acontecer durante as jogadas que um jogador acumule em uma única concavidade doze ou mais sementes. Nesse caso, se ele escolher essa concavidade para semear, quando passar por ela deverá pulá-la, ou seja, essa casa escolhida ao final dessa jogada deverá terminar vazia.
- O jogador só captura as sementes apenas das concavidades do seu adversário, colocando-as em seu depósito de sementes chamado de oásis.
- É importante ressaltar que, quando um jogador efetua um movimento e fica sem sementes, faz-se necessário que o oponente distribua suas sementes para o outro lado do tabuleiro para que o jogo dê prosseguimento e isso é um aspecto filosófico muito interessante do jogo e da cultura africana que prega que não se deve eliminar o seu adversário, pois se entende que se ele for destruído, a terra que ele cultiva também será outro aspecto interessante é entender que quem semear melhor vai colher mais.

> “São jogados por duas pessoas, uma em frente à outra, com o tabuleiro longitudinalmente colocado entre elas; antes de começar o jogo, o mesmo número de sementes é distribuído em cada uma das cavidades do tabuleiro; os jogadores se alternam para jogar, distribuindo as sementes da cavidade escolhida, uma a uma, no sentido anti-horário, nas cavidades subsequentes; sempre a captura de sementes, sendo a forma de captura diferente, dependendo do jogo em questão; a partida termina quando restam muito poucas sementes para o jogo continuar ou quando resta apenas uma semente em cada lado; ganha quem tem o maior número de sementes; as estratégias do jogo envolvem movimentos calculados, que exigem muita concentração, antecipação e esforço intelectual”. (ODELEY, 1997, p. 8 apud MACEDO, PASSOS E PETTY.2000, p. 71).

- O objetivo do Ayó é colher o maior número de sementes, vinte e cinco ou mais.
- Ganha quem obtiver mais sementes, ao final do jogo.

Os jogos Mancala, no caso específico o jogo Ayó, por ser um jogo de raciocínio lógico. Apresenta um imenso potencial de aprendizagem, pois nele é necessário prever resultados e saber fazer jogadas estratégicas ao longo do jogo.

O Ayó é um jogo que exige do aluno movimentos pensados, concentração; é preciso prever a sua jogada e as consequências dela em todo o movimento do tabuleiro. Apenas jogando, os alunos descobrirão as melhores estratégias para suas jogadas serem bem-sucedidas.

O uso da sagacidade e da calma para se evitar jogadas precipitadas contribui para o enfrentamento e a resolução de outras situações e problemas do jogo e também da vida.

## 4.2 Estratégia e o Conteúdo a ser trabalho nos jogos da família Mancala

O trabalho com jogos configura-se em uma atividade pedagógica, portanto requer planejamento. Devido a isso, não se deve perder de vista que a escolha por trabalhar com jogos africanos nessa pesquisa tem o objetivo de valorizar e reconhecer a identidade, a cultura e a história dos povos africanos e do seu legado (Lei 10639/03), e, ao mesmo tempo, trabalhar os conteúdos matemáticos associados à execução desses jogos dentro de uma perspectiva étnico-racial.

Desse modo, a sugestão dessa pesquisa - que não tem a intenção de ser uma fórmula, e sim apenas um modelo que deve se adequar às particularidades de cada escola e/ou educador - é que primeiro se leve para a sala alguns jogos da família Mancala, para serem apresentados aos alunos, inclusive enfatizando a sua origem, apresentando-se as regras. O aluno deve fazer uma leitura das regras e, em seguida, articular a melhor estratégia para capturar o maior número possível de peças em apenas uma jogada. O professor deve apontar o sentido do jogo. O jogo dura em média 50 minutos, tempo suficiente para os alunos apreciarem a atividade.

Como esse trabalho deve ser interdisciplinar, enquanto nas aulas de matemática o aluno se apropria do jogo, das regras, da sua origem, nas aulas de história, artes e geografia, o aluno se apropria das características fundamentais do Egito e da Nigéria, dos seus aspectos geográficos, econômicos, sociais, culturais e religiosas, e estuda também sobre as contribuições desse país para a nossa cultura e para a formação da nossa população.

Feito isso, pode-se partir para a etapa de montagem do tabuleiro, o que pode ser feito de várias formas. A construção do tabuleiro do jogo Ayó, família Mancala, vai envolver vários assuntos, inclusive interdisciplinares, como por exemplo utilizar a reciclagem para montar o tabuleiro.

Na montagem do tabuleiro, a sugestão é usar material reciclado como, por exemplo, caixa de ovos; para as peças, pode-se usar semente de feijão ou até pedrinhas. Diferente dos outros jogos, nos quais, na confecção do tabuleiro, já era possível trabalhar o currículo, como os elementos da geometria, no Ayó, o currículo vai ser trabalhado na execução do jogo: à medida em que as regras vão sendo passadas, alguns conceitos matemáticos já podem ser trabalhados.

Ao iniciar o jogo, cada uma das 12 cavidades do tabuleiro vai ser preenchida por 4 peças (sementes), nesse momento poderia ser perguntado aos alunos qual o total de sementes depositada nessas doze cavidades e de que forma eles obtiveram a sua resposta.

Uma possível resposta poderia vir do cálculo multiplicativo simples, no qual o aluno multiplicaria doze por quatro e encontraria quarenta e oito como o número total de sementes.

A forma como o professor conduzirá essa etapa, ainda que os alunos não passem da sugestão usando o conceito da multiplicação, pode levar à introdução do conceito de progressão aritmética, à constatação das suas propriedades e até mesmo à demonstração das suas fórmulas, partindo das propostas acima.

Além de trabalhar com progressão aritmética, pode-se trabalhar também com as quatro operações da aritmética, seja para calcular qual a cavidade em que se deve recolher as peças e ir colocando-as, uma a uma, até que a última pare no lado do adversário em uma cavidade, onde essa peça, somada com as que já estão na cavidade, somem duas ou três peças; ou para calcular quantas peças precisa-se recolher para vencer o jogo - nesse caso, o aluno vai perceber que, se tem um total de 48 peças, basta ter a metade mais uma.

> “Estimular o aluno a fazer estimativas, realizar cálculo mental é um dos desafios da prática de sala de aula de um professor de matemática. O Awalé tem um papel importante nesse contexto. Quando se joga, procura-se analisar os buracos do tabuleiro para verificar se há possibilidade de captura ou defesa das sementes; nesse caso, trabalha-se a estimativa. Quando se usa a aritmética para simular um movimento, trabalha-se o cálculo mental. No Awalé, o cálculo mental e a estimativa são requisitos fundamentais, pois são aplicados em cada movimento da partida. A aritmética bem como o desenvolvimento do cálculo mental e da estimativa são ferramentas fundamentais na resolução de problemas”. ( PEREIRA, 2016, p.126)

A resolução de problemas realmente é um desafio exaustivo para grande parte dos alunos que, algumas vezes, se sentem tão desencorajados a resolvê-los, que desistem antes mesmo de ler o seu enunciado. Nesse sentido, o jogo Ayó colabora para o desenvolvimento de habilidades e competências de leitura, interpretação, raciocínio lógico, aritmética e estimativa que contribuem para que o aluno se sinta melhor trabalhado para tratar a resolução de um problema, pois, no jogo, antes mesmo de executar alguma jogada, o aluno tem que analisar os seus possíveis movimentos e os do seu oponente após a sua jogada, para ter uma estimativa de como a tabuleiro vai ficar depois dessas ações; daí ele vai analisar, raciocinar e estimar para, então, realizar uma jogada que será de defesa ou de captura de peças.

No jogo Ayó, trabalhar e desenvolver as relações de contagem é fundamental. Cabe a cada professor, como já visto anteriormente, adequá-lo aos níveis de escolaridade dos seus alunos. Outro assunto do currículo matemático também bastante utilizado na execução das partidas é a simetria, que, diferentemente da contagem, é uma ferramenta que o jogador pode utilizar como uma estratégia para vencer o jogo. O professor pode incentivar essa situação, mas à medida que vai jogando, o próprio aluno perceberá a necessidade de aplicá-la.

Desenvolver mais ou menos a capacidade de investigação, o raciocínio lógico e intuitivo através do jogo Ayó depende muito da abordagem do professor; a forma como o educador conduz o jogo faz toda a diferença no resultado final da aprendizagem. Trabalhar e criar situações-problema, inclusive durante o jogo, com perguntas para estimular os alunos a refletir sobre futuras consequências das suas jogadas, favorece a capacidade criativa, analítica e de investigação do aluno.

Com o jogo Ayó em andamento, por exemplo, o professor pode pausá-lo e fazer algumas perguntas, ou instigar os participantes a observar quais consequências podem ser esperadas com as suas jogadas, questionando sobre: Qual a melhor ação que se pode realizar nesse instante? Por quê? Após realizar essa ação, você corre o risco de ter um prejuízo maior ou menor do que a vantagem obtida na jogada anterior? Essas situações-problema são exemplos de alguns questionamentos que devem ser feitos durante a partida, para que o aluno analise o jogo, preveja as suas futuras jogadas, já tendo consciência dos possíveis prejuízos ou tentando minimizá-los, pois, assim, ele estará trabalhando estratégia, estimativa e o cálculo mental.

## 4.3 Manufatura pedagógica do jogo Mancala

**Título**: Jogo de tabuleiro africano Ayó ( Família Mancala).
**Área de aplicação**: Análise Combinatória, probabilidade e porcentagem.
**Quantidade de aulas**:

- i)Apresentação do jogo, uma hora aula.
- ii)Construção e confecção do tabuleiro, uma hora aula.
- Atividades, duas horas aula.

Obs: Lembrando que os pré-requisitos devem ser trabalhados antes da execução das atividades.

**Material utilizado na confecção**: Duas caixas de ovos de 1 dúzia, tesoura, cola, tinta para decorar e 48 sementes.

**Descrição**: O tabuleiro é composto por 12 cavidades onde serão semeadas as sementes e duas cavidades maiores chamadas de oásis onde serão colocadas as sementes capturadas do adversário.

## 4.4 Atividades usando os jogos da família Mancala

Ainda sobre a utilização do jogo para trabalhar o currículo, não se pode perder de vista a possibilidade de criar atividades que trabalhem os conteúdos, tendo como base os jogos africanos, no caso, o Ayó; trabalhar atividades é fundamental para que o aluno analise as situações, fazendo estimativas. Essas atividades podem ser criadas de acordo com o nível de profundidade que cada professor vai dar ao conteúdo, ou de acordo com a série com que se está trabalhando; as abordagens vão determinar o tipo de questão que será produzida pelo educador.

Abaixo, disponibilizarei algumas atividades que iremos trabalhar com estimativa, estratégia, cálculo mental e raciocínio lógico, regra de três, probabilidade, porcentagem e análise combinatória. Vejamos:

### 4.4.1 Atividade 1

De quantas formas diferentes podemos colocar 4 sementes idênticas no tabuleiro Mancala, uma em cada cavidade, desconsiderando a regra de distribuição de sementes em casas consecutivas ?

- **Tempo:** 5 minutos
- **Conceitos:** Análise combinatória(Combinação simples).

### 4.4.2 Atividade 2

De quantas formas diferentes podemos colocar 4 sementes no tabuleiro Mancala, desconsiderando a regra de distribuição de sementes em casas consecutivas?

- **Tempo:** 7 minutos
- **Conceitos:** Análise combinatória(Princípio aditivo e combinação simples).

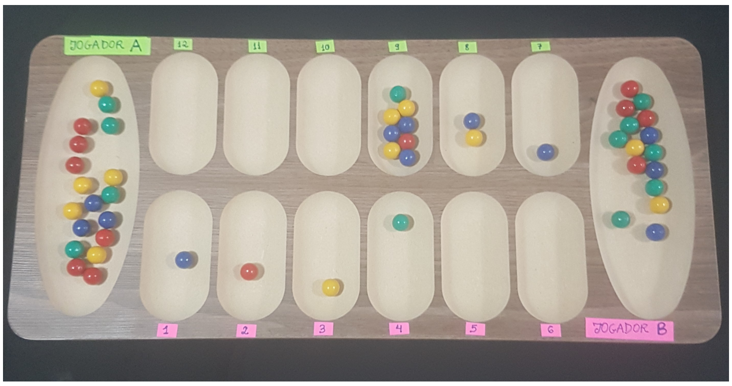
### 4.4.3 Atividade 3

Escreva a relação que expressa a quantidade de sementes capturadas.

- **Tempo:** 7 minutos
- **Conceitos:** Raciocínio lógico, conhecimento das regras do jogo.

### 4.4.4 Atividade 4

Se B acabou de fazer a sua jogada que capturou sementes, e após a sua jogada o jogo tem a configuração representada abaixo, determine as possíveis jogadas de B?




- **Tempo:** 7 minutos
- **Conceitos:** Raciocínio lógico, conhecimento das regras do jogo e estimativa.

### 4.4.5 Atividade 5

De quantas formas distintas podemos arrumar nas cavidades estas quantidades de sementes (da questão 4) que ainda estão em jogo?

- **Tempo:** 5 minutos
- **Conceitos:** Analíse combinátoria(Permutação).

### 4.4.6 Atividade 6

De quantas formas distintas podemos colocar as 48 sementes no tabuleiro se as casas ocupadas tem que ter a mesma quantidade de sementes?

- **Tempo:** 7 minutos
- **Conceitos:** Analíse combinátoria(Princípio aditivo, combinação simples), divisores e multiplos.

Texto e figura necessários às questões 7, 8 e 9.

O jogo africano Ayó da família Mancala, representado na figura abaixo, geralmente é jogado com pequenas pedras ou sementes que são as peças do jogo. Com base no que foi dito e no que foi estudado sobre as regras do jogo, analise a figura abaixo e responda as atividades :

### 4.4.7 Atividade 7

Sabendo que a figura acima representa uma situação específica de um jogo em andamento e que agora é a vez do jogador B, analise a situação e responda qual a melhor estratégia para B a defesa ou a captura de sementes?

- **Tempo:** 7 minutos
- **Conceitos:** Estimativa, raciocínio lógico e conhecimento das regras do jogo.

### 4.4.8 Atividade 8

Qual a probabilidade do jogador A realizar uma jogada que termine com uma captura nessa situação de jogo exposta na figura acima?

- **Tempo:** 7 minutos
- **Conceitos:** Estimativa, raciocínio lógico e conhecimento das regras do jogo.

### 4.4.9 Atividade 9

Se o jogador A escolher aleatoriamente um dos seus buracos, qual a porcentagem de chance deste capturar alguma semente?

- **Tempo:** 5 minutos
- **Conceitos:** Probabilidade.

Texto e figura necessários às questões 10, 11 e 12.

Analise a figura abaixo e responda as atividades:

### 4.4.10 Atividade 10

Sabendo que a figura acima representa uma situação específica de um jogo em andamento e que agora é a vez do jogador A, analise a situação e responda qual a melhor estratégia para ele? A defesa ou a captura de sementes? Justifique sua resposta.


- **Tempo:** 7 minutos
- **Conceitos:** Estimativa, estratégia, cálculo mental e raciocínio lógico.

### 4.4.11 Atividade 11

Qual a probabilidade do jogador A realizar uma jogada que termine com uma captura?

- **Tempo:** 5 minutos
- **Conceitos:** Regra de três e probabilidade.

### 4.4.12 Atividade 12

Caso seja a vez do jogador B, e este escolher aleatoriamente um dos seus buracos, qual a porcentagem de chance deste capturar alguma semente?

- **Tempo:** 5 minutos
- **Conceitos:** Regra de três, probabilidade e porcentagem.

Assim como nessa questão pode-se trabalhar raciocínio lógico, estimativa, probabilidade e porcentagem, pode-se criar muitas outras para satisfazer as demandas de cada profissional, não venho aqui trazer um modelo mas uma possibilidade que pode se adequar ou se transformar, para caber na abordagem de cada professor que pode e deve fazer os seus ajustes. Além das atividades as propostas feitas acima tanto para as abordagens curriculares quando para a condução durante o momento do jogo representam um caminho dessa pesquisa para tentar romper um ensino basicamente tradicional, que vem continuamente registrando péssimos resultados inclusive por não atrair os alunos e por não dar significado aos conteúdo.

# Capítulo 5

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

As dificuldades no ensino da matemática, tem preocupado muitos educadores, aliado a isso o fato do Brasil ser um país onde a maior parte da sua população se declara negra ou parda acende um alerta sobre a forma como podemos, apesar de uma educação eurocêntrica, contemplar também essa parte significativa da população na medida em que construímos uma matemática que seja mais atraente, que aproxime, que inclua e que dê significado e gosto ao conhecimento.

Foi pensando nisso que essa pesquisa, baseada na lei 10.639/03 que estabelece a obrigatoriedade, nos ensinos fundamental e médio, público e particular, do ensino da História e Cultura africana e afro-brasileira e com o olhar na aprendizagem de conteúdos matemáticos de forma significativa, resolveu encarar esse desafio de escrever para outros professores sobre como os jogos de tabuleiro Africanos podem ser ferramentas de aproximação entre as culturas que constituem o nosso país e ao mesmo tempo desenvolver conceitos e conteúdos matemáticos, competências e habilidades relacionadas a eles.

O uso dos jogos como recurso didático pode contribuir bastante para o envolvimento dos alunos, já que eles farão parte da construção dos tabuleiros e posteriormente jogarão os jogos que eles mesmos ajudaram a construir, nesse momento a aluno se faz ator principal do processo de aprendizagem o que pode leva-los a ter uma atitude muito mais proativa nesse processo e assim fica mais fácil o professor atingir os objetivos de aprendizagem significativa dos conteúdos.

A presente pesquisa também busca proporcionar o estudo e valorização da cultura africana através de pesquisas, construção e execução dos jogos de tabuleiro africanos Shisima, Borboleta e Ayó que demonstram a riqueza cultural desse país tão pouco estudado no Brasil mais que é fundamental na construção da identidade brasileira.

No estudo de cada jogo, foi trabalhado a sua origem, particularidades, as suas regras e os conteúdos do currículo matemático que podem ser desenvolvidos através do mesmo e ao final, foi sugerido ao professor algumas atividades que podem ser trabalhadas com os alunos depois que os mesmos já dominam a execução do jogo, lembrando ao professor que ele pode adequar a sua realidade.

Por fim a principal preocupação dessa pesquisa era tentar encontrar uma forma de garantir o ensino da matemática de uma maneira consistente e ao mesmo tempo ir de encontro a Lei 10.639/03, o que foi proporcionado através do trabalho com os jogos africanos que permitiram unir esses dois objetivos.

# REFERÊNCIAS


[1] ALBUQUERQUE, Renato José Araújo de. **Simulacro: criação de um jogo de tabuleiro**. 102 folhas. Monografia. Curso de Design Gráfico. Faculdades Integradas Barros Melo. Olinda. 2010.

[2] ALMEIDA, Mariana Brito,UnB-Brasília-DF,**O grande Mercado:Desenvolvimento de jogo de tabuleiro com temática medieval.**

[3] ANDRADE, O. G; SANCHES, G. M. M. B. Aprendendo com o lúdico. In: O DESAFIO DAS LETRAS, 2., 2004, Rolândia, Anais... Rolândia: FACCAR, 2005. ISSN: 1808- 2548. Acesso em: 30 set.. 2017.

[4] AMORIM, Roseane Maria de. **O afrodescendente no currículo das escolas brasileiras: os desafios no passado e no presente**. IX Seminário Nacional de Estudos e Pesquisas " História, Sociedade e Educação no Brasil", 2012. Disponível em < http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/seminario/seminario9/PDFs/3.43.pdf. > Acessado em 12 de março de 2018.

[5] BORIN, Julia. **Jogos e resolução de problemas: Uma Estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME-USP, 1995.

[6] BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. 3.ed. São Paulo: IME/USP, 1998.

[7] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** : matemática / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília : MEC/SEF, 1997

[8] BRASIL, **Yoté: o jogo da nossa história**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Continuada, Alfabetização e Diversidade, 2010.

[9] CULIN, Stewart. **Mancala, The National Game of Africa**. In the Report of the National Museum, p. 597-611, 1894. Disponível em: < http://www.gamesmuseum.uwaterloo.ca/Archives/Culin/Mancla1894/ >. Acessado em 12 fev. 2018.

[10] DAVID, Maria Manuela Martins Soares; MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica**. Revista Brasileira de Educação, Campinas, v. 28, p. 50-61, 2005. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n28/a05n28.pdf >. Acessado em 25 jan. 2018.

[11] DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar : geometria plana**. 9ª ed, editora Atual, São Paulo, 2013.

[12] FERNANDES e FREITAS, Cláudia de Oliveira. Currículo e Avaliação. In: Beauchamp, Jeanete ; Pagel, Sandra Denise; Nascimento, Aricélia Ribeiro do (orgs). **Indagações sobre currículo**. Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007.

[13] GOMES, Nilma Lino. A questão racial na escola: desafios colocados pela implementação da Lei 10.639/03. In: MOREIRA, Antônio Flávio, CANDAU, Vera Maria (orgs). **Multiculturalismo: Diferenças Culturais e Práticas Pedagógicas**. 2ª ed.Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

[14] GOMES, Nilma Lino. **Um olhar além das fronteiras: educação e relações raciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

[15] GUERRA, Denise. AIÚ: **A herança africana dos jogos de mancala no Brasil**. Revista África e Africanidades -Ano 2 - n. 6, ago. 2009. Disponível em < http://www.africaeafricanidades.com.br/edicao6.html >. Acessado em 23 ago. 2017.

[16] HALMENSCHLAGER, Vera Lucia da Silva. **Etnomatemática: uma experiência educacional**. São Paulo: Summuns, 2001.

[17] JACOBIK, G. S. **O lúdico no ensino da matemática: teoria e prática**. São Paulo: Bentivegna, 2005.

[18] MOURA, M. O. **A séria busca no jogo: do lúdico na matemática**. KISHIMOTO, Tizuco Morchida (org). Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

[19] MASTROCOLLA, Vicent Martin. **Doses Lúdicas: Breves textos sobre o universo dos jogos e entretenimento**. (1ª Edição). São Paulo: Edição do Autor, 2013.

[20] MORGADO, A, C: CARVALHO, J. B. P; CARVALHO, P. C. P; FERNANDEZ, F. **Análise Combinatória e Probabilidade com soluções de exercícios**. 9ªed editora SBM: Rio de janeiro, 2006.

[21] PEREIRA, R. P.; JUNIOR, H. C. **Mancala o jogo africano no ensino da matemática**. Curitiba: Appris 2016

[22] SANTOS,Celso José-Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraiba.

[23] SCHELL, Jesse. **Art of Game Design: a book of lens**. Elsevier Inc, 2008.

[24] SELVA, K. R. GT 01 - **Educação Matemática nos Anos Iniciais e Ensino Fundamental, O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento**-uri/fw. In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática Comunicação Científica 02 a 05 de junho de 2009, Ijuí/RS.

[25] SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Jogos de matemática do 6° ao 9° ano**. Cadernos do Mathema. Porto Alegre: Artmed 2007.

[26] SOUZA, Andréa Cristina Fidela-UNESP-Rio Preto-PROFMAT.

# Apêndice A

# GEOMETRIA PLANA

## A.1 TRIÂNGULOS

**Definição A.1.1.** *Dados três pontos, A, B e C, não colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC, chama-se triângulo ABC.*

## A.2 Classificação dos triângulos quanto aos lados:

1. *Equilátero se, e somente se, têm os três lados congruentes.*

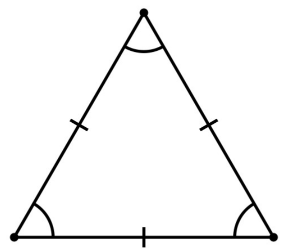


Figura A.1: http://www.estudarmatematica.pt

2. *Isósceles se, e somente se, têm dois dos seus lados congruentes.*

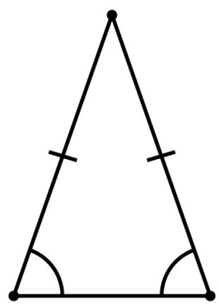


Figura A.2: http://www.estudarmatematica.pt

*OBS: Num triângulo isósceles o lado não congruente é chamado de base e o ângulo oposto a ele é chamado de ângulo do vértice.*

3. *Escaleno se, e somente se, qualquer dois dos seus lados não são congruentes.*

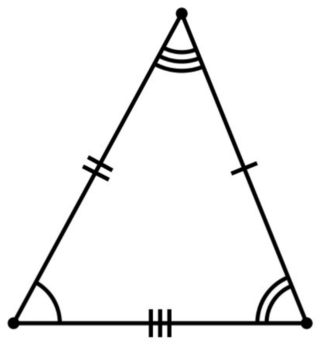


Figura A.3: http://www.estudarmatematica.pt

## A.3 Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

1. *Acutângulo se, e somente se, têm três ângulos agudos.*

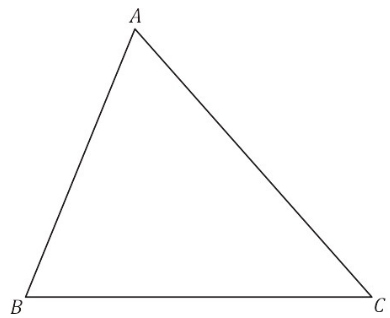



Figura A.4: http://baricentro2.rssing.com

2. *Obtusângulo se, e somente se, têm um ângulo obtuso.*

3. *Retângulo se, e somente se, têm um ângulo reto.*

   *OBS: O lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa, e os outros dois lados, catetos.*

## A.4 Semelhança de triângulos

**Definição A.4.1.** *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

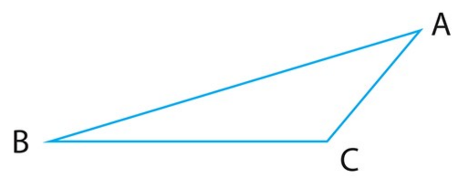



Figura A.5: http://www.universiaenem.com.br

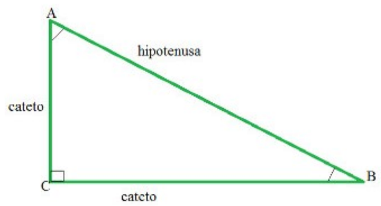
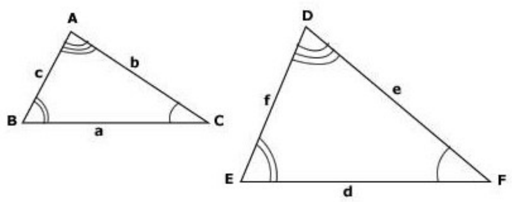



Figura A.6: http://www.universiaenem.com.br

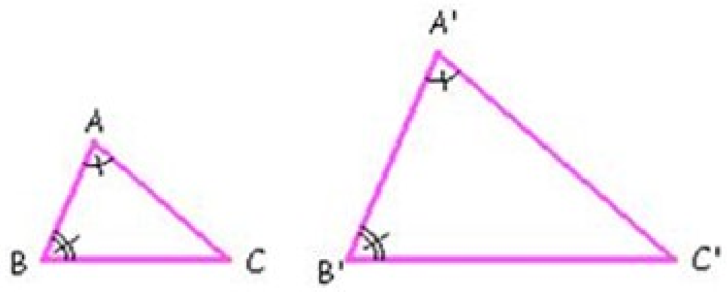
*Considere os triângulos ABC e DEF, abaixo:*



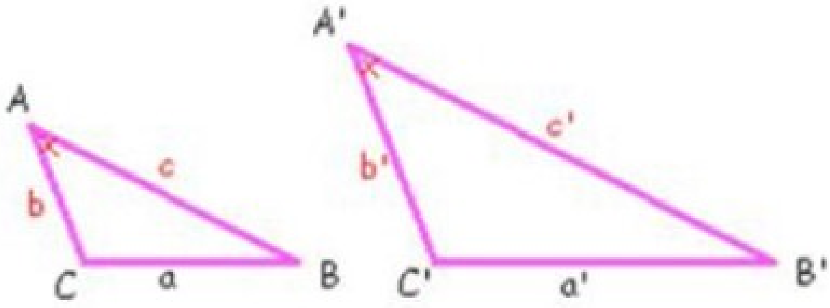

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \hat{A} \cong \hat{D}; \hat{B} \cong \hat{E}; \hat{C} \cong \hat{F} \ e \ \frac{d}{a} = \frac{e}{b} = \frac{f}{c} = k$$

## A.5 Casos de semelhança

1. *Ângulo - ângulo (AA): Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes então eles são semelhantes.*



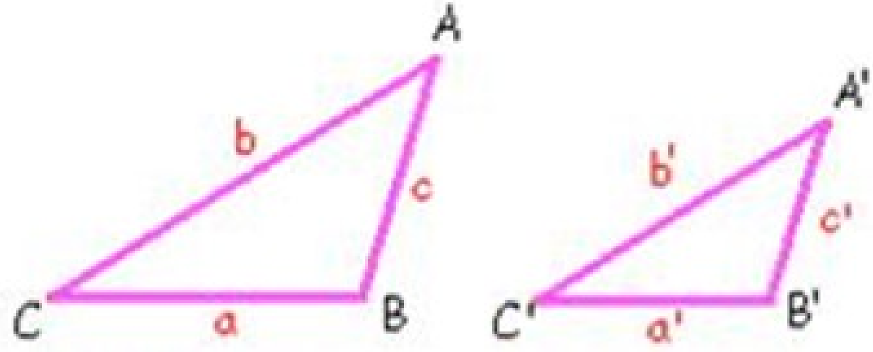

2. *Lado - ângulo - lado (LAL): Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

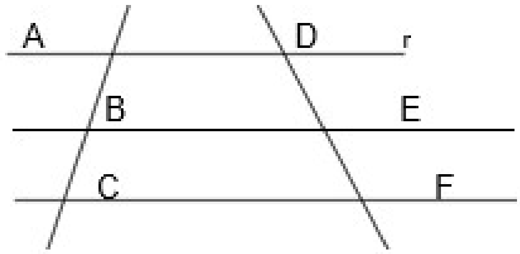



$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};\ \hat{A} = \hat{A}'.$$

3. *Lado - lado - lado (LLL): Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.*

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'};\ \hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \hat{C} = \hat{C}'.$$




## A.6 Teorema de Tales

**Definição A.6.1.** *Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

*Daí, temos:* $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$.

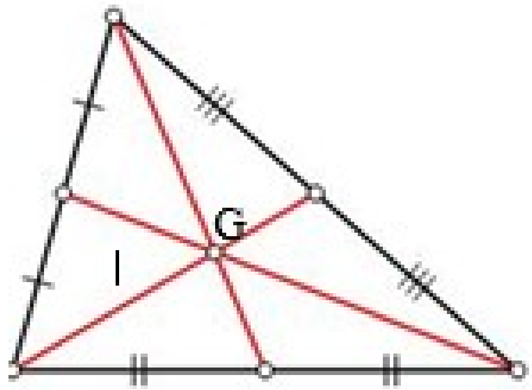
## A.7 Pontos notáveis do triângulo

*Mediana é o segmento de reta que tem extremidades num vértice do triângulo, e no ponto médio do lado oposto a este vértice.*

*OBS: Num triângulo retângulo a mediana relativa a hipotenusa tem medida igual a metade da mesma.*

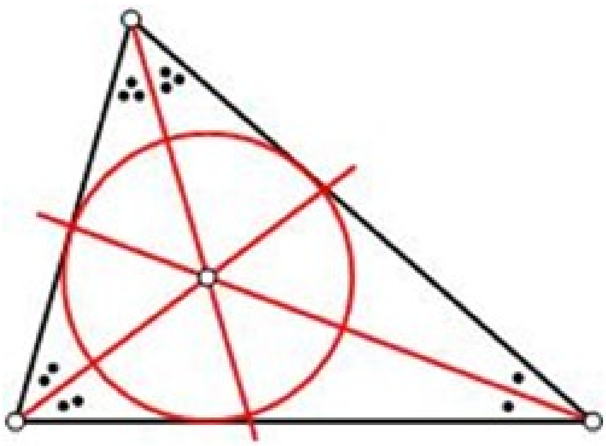
*As três medianas de um triângulo intersectam-se num mesmo ponto G, chamado* ***baricentro****, que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.*

*Bissetriz é a semirreta que tem extremidade no vétice do ângulo e intersecta o lado oposto, dividindo o ângulo em dois ângulos congruentes.*




*O **incentro** é o encontro das três bissetrizes internas de um triângulo que se intersectam num mesmo ponto que está a igual distância dos lados do triângulo.*

*OBS: O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo.*

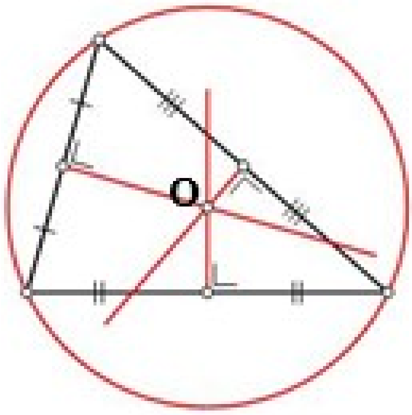


*Mediatriz é a reta perpendicular que intersecta o ponto médio do lado do triângulo.*

*O **circuncentro** é o ponto de interseção entre as três mediatrizes do triângulo e é equidistante dos vértices do triângulo. Ele pode ser interno (triângulo acutângulo), externo (triângulo obtusângulo) ou no ponto médio do lado (triângulo retângulo) do triângulo.*

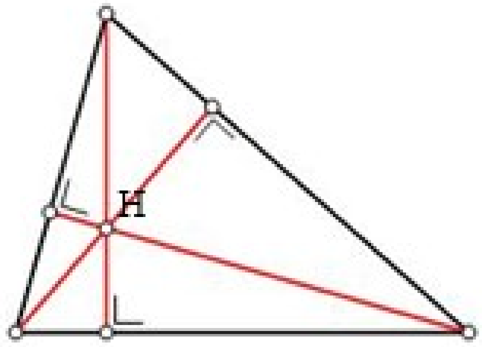
*OBS: O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.*

*Altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado.*



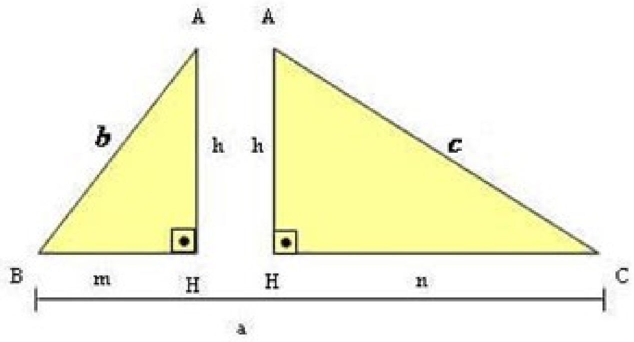

O **ortocentro** é o ponto de interseção entre as três alturas ou o prolongamento das alturas do triângulo. Ele pode ser interno (triângulo acutângulo), externo (triângulo obtusângulo) ou no vértice (triângulo retângulo) do triângulo.

OBS: Num triângulo equilátero, mediana, bissetriz, mediatriz e altura coincidem e portanto o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro são o mesmo ponto, o que faz com que este ponto seja o centro da circunferência inscrita e circunscrita e ainda por cima a distância deste ponto ao vértice seja o dobro da sua distância ao lado.

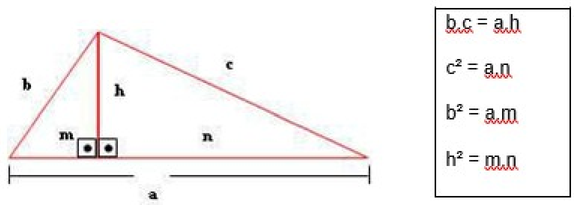


## A.8 Relações métricas no triângulo retângulo

*Observe os triângulos:*




*Os triângulos AHB, AHC e ABC são semelhantes dois a dois, daí fazendo a proporcionalidade entre os lados, aparecem algumas relações:*




## A.9 Teorema de Pitágoras

*"A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa"*

$a^2 = b^2 + c^2$

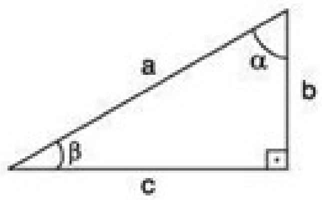
## A.10 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

*Estabelecem uma relação entre os ângulos (seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tg)) e os lados de um triângulo retângulo.*

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{CO}{HIP} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{HIP} = \frac{b}{a}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{b}{c}$$




CO: cateto oposto*

CA: cateto adjacente*

HIP: hipotenusa

## A.11 Polígonos

*O número de diagonais de um polígono de n lados com $n \geq 3$ é dado por:*

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

*A soma S dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados $n \geq 3$ é dado por:*

$$S = (n-2)2 \ retos$$

*ou simplesmente, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é:*

$$S = (n-2)180°$$

*Ângulo externo de um polígono convexo é um ângulo suplementar adjacente a um ângulo (interno) do polígono*

*A soma $S_e$ dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados $n \geq 3$ é dada por:*

$$S_e = 4 \ retos \ ou \ S_e = 360°$$

*Expressões do ângulo interno* $(a_i)$ *e do ângulo externo* $(a_e)$ *de um polígono regular .*

*Os ângulos internos de um polígono regular são congruentes.*

$$a_i = \frac{(n-2)180°}{n}$$

*Os ângulos externos de um polígono regular são congruentes.*

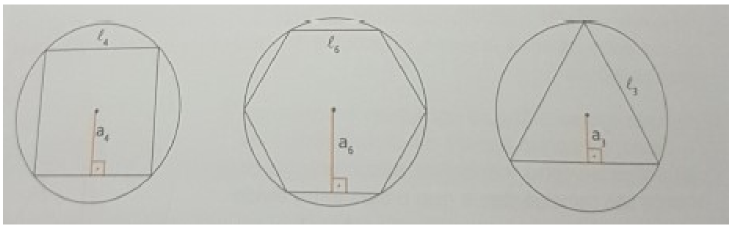
$$a_e = \frac{360°}{n}$$

*Temos que;*

$$a_i + a_e = 180°$$

*Cálculo de lado e apótema dos polígonos regulares*

*Indicaremos por* $l_n$ *a medida do lado polígono regular de n lados e por* $a_n$ *a medida do apótema do polígono regular de n lados.*




*Daí, retiramos as relações:*

$$l_3 = R\sqrt{3} \ e \ a_3 = \tfrac{R}{2}$$
$$l_4 = R\sqrt{2} \ e \ a_4 = \tfrac{R\sqrt{2}}{2}$$
$$l_6 = R \ e \ a_6 = \tfrac{R\sqrt{3}}{2}$$

# Apêndice B

# Análise Combinatória

## B.1 Princípio básico de contagem

*Também denominado de princípio de adição. Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então* $A \bigcup B$ *possui* $p + q$ *elementos.*

## B.2 Princípio Fundamental da enumeração

*Também denominado de princípio da multiplicação. Se uma decisão d1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d1, a decisõ d2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d1 e d2 é xy.*

## B.3 Permutação Simples

*Dados n objetos distintos* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *de quantos modos é possível ordená-los?*

*No caso geral temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, n-1 modos de escolher o objeto que ocupará o segundo lugar e assim sucessivamente até a escolha do último lugar que poderá ser feita de uma única maneira. Portanto, o número de modos de ordenar n objetos distintos é* $n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

*Cada ordenação dos n objetos é chamada uma permutação simples de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos é representado por* $P_n$. *Assim* $P_n = n!$.*(Já que 0!=1, define-se* $P_0 = 1$*).*

## B.4 Combinação Simples

*De quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados? Ou, o que é o mesmo, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto* $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$*?*

*Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma combinação simples de classe p dos n objetos* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

*No caso geral, temos:* $C_n^p = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p}$, $0 < p \leq n$, *e* $C_n^0 = 1$.

*Uma expressão alternativa pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador por* $(n-p)!$. *Obtemos:* $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$; $0 \leq p \leq n$.

## B.5 Permutações Circulares

*De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares equiespaçados em torno de um círculo, se consideramos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação?*

*A resposta desse problema será representada por* $(PC)_n$, *o número de permutações circulares de n objetos distintos.*

*Podemos verificar que* $(PC)_n = (n-1)!$ *da seguinte forma:*

*Se não considerarmos equivalentes disposições que possam coincidir por rotação, teriamos* $n!$ *disposições. Considerando a equivalência, cada permutação circular é gerada por n disposições. Logo,* $(PC)_n = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

# Apêndice C

# Resolução Atividades Shisima

## C.1 Atividade 1

*Basta analisar o tabuleiro que o aluno perceberá que as peças de um jogador podem ser alinhadas de 4 modos diferentes.*

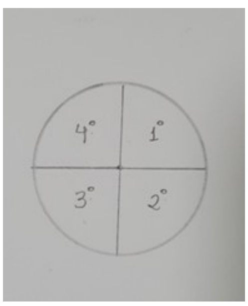
## C.2 Atividade 2

*Como são posições alternadas, são 8 bolas para 8 lugares e as bolas só se diferenciam pela cor basta escolher um lugar para a primeira bola, perceber que essa escolha já acomoda as demais nos devidos lugares e perceber que esta primeira bola tem duas opções de lugares, gerando assim duas possibilidades, isso se o tabuleiro estiver imóvel, porque se ele puder ser movido será apenas uma possibilidade.*

## C.3 Atividade 3

*Lema 1) Quantas são as formas de preencher os 4 setores circulares da figura abaixo, com 9 cores de forma que os setores adjacentes tenham cores distintas?*

*Separemos o caso em que os setores 1 e 3 têm cores iguais do caso em que eles*



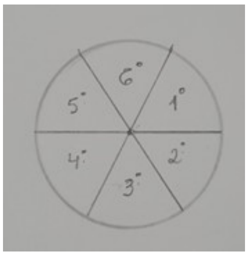
*têm cores distintas.*

*No caso das cores iguais, há 9 modos de escolher uma única cor para os setores 1 e 3, 8 modos de escolher a cor para o setor 2 e 8 modos de escolher a cor para o setor 4, Daí existem* $9 \times 8 \times 8 = 9 \times 8^2$ *modos de colorir.*

*No caso das cores distintas, há 9 modos de escolher a cor para o setor 1, 8 modos de escolher a cor para o setor 2 , 7 modos de escolher a cor para o setor 3 e 7 modos de escolher a cor para o setor 4. Daí existem* $9 \times 8 \times 7 \times 7 = 9 \times 8 \times 7^2$ *modos de colorir.*

*No total, temos* $9 \times 8^2 + 9 \times 8 \times 7^2 = (9 \times 8)(8 + 7^2) = 4104$ *modos.*

*Lema 2) Quantas são as formas de preencher os 6 setores circulares da figura abaixo, com 9 cores de forma que os setores adjacentes tenham cores distintas?*




*Separemos o caso em que os setores 1 e 5 têm cores iguais do caso em que eles têm cores distintas. Perceba que do 1º ao 5º temos* $9 \times 8^4$ *formas de colorir.*

*Seja* $A$ *o caso em que os setores 1 e 5 têm cores iguais e* $B$ *o caso em que os setores 1 e 5 têm cores distintas. Daí, temos que:* $A + B = 9 \times 8^4$

*Para colorir o 6º setor temos 8 modos se os setores 1 e 5 têm cores iguais e 7 modos se tiverem cores diferentes, dessa forma o total de modos que responde a questão é:*

$$T = A \times 8 + B \times 7$$
$$T = A + 7 \times (A + B)$$
$$T = A + 7 \times (9 \times 8^4)$$

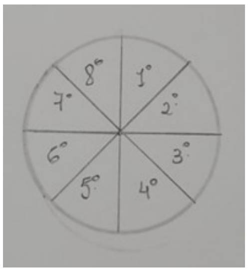
*Para calcular* $A$*, observe que preencher os setores do primeiro ao quinto é a mesma coisa de preencher uma figura com 4 setores, com as mesmas regras analisadas no*

*Lema 1, daí:*

$$A = 9 \times 8^2 + 9 \times 8 \times 7^2 = (9 \times 8)(8 + 7^2) = 4104 \textit{ modos e portanto:}$$

$$T = 4104 + 7 \times (9 \times 8^4)$$
$$T = 9 \times 8^2 + 9 \times 8 \times 7^2 + 9 \times 8^4 \times 7$$
$$T = 262.152 \textit{ modos}$$

*Finalmente para responder a pergunta da questão que é quantas são as formas de preencher os 8 triângulos do jogo Shisima, com 9 cores de forma que os triângulos adjacentes tenham cores distintas, vamos usar um raciocínio análogo e utilizar os resultados anteriores. Vejamos:*




*Separemos o caso em que os setores 1 e 7 têm cores iguais do caso em que eles têm cores distintas. Perceba que do 1º ao 7º temos 9 x* $8^6 formas de colorir.$

*Seja A‘ o caso em que os setores 1 e 7 têm cores iguais e B o caso em que os setores 1 e 7 têm cores distintas. Daí, temos que:* $A + B‘ = 9 \times 8^6$

*Para colorir o 8º setor temos 8 modos se os setores 1 e 7 têm cores iguais e 7 modos se tiverem cores diferentes, dessa forma o total de modos que responde a questão é:*

$$T = A‘ \times 8 + B‘ \times 7$$
$$T = A‘ + 7 \times (A‘ + B‘)$$
$$T = A‘ + 7 \times (9 \times 8^6)$$

*Para calcular A‘, observe que preencher os setores do primeiro ao sétimo é a mesma coisa de preencher uma figura com 6 setores, com as mesmas regras analisadas no Lema 2, daí:*

$A` = 9 \times 8^2 + 9 \times 8 \times 7^2 + 9 \times 8^4 \times 7 = 262.152$ *modos e portanto:*

$T = 262.152 + 7 \times (9x8^6)$

$T = 16.777.224$ *modos.*

## C.4 Atividade 4

*Os anagramas da palavra Shisima podem ser contabilizados usando permutação mas não esqueça que na palavra Shisima tem dois S e dois I.*

$$P_7^{2,2} = \frac{7!}{2!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 1260 \text{ anagramas.}$$

## C.5 Atividade 5

*Daí basta escolher 2 pontos entre os 8 vértices do octógono.*

$$C_8^{2,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} = 48 \text{ anagramas.}$$

## C.6 Atividade 6

*Se para encontrar os segmentos de reta bastou fazer a combinação de oito pontos tomados dois a dois, a quantidade de vetores será o dobro da quantidade de segmentos, já que em cada segmento teremos dois sentidos gerando assim dois vetores distintos.*

$$C_8^{2,2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} = 48$$
$$2 \cdot 48 = 96 \text{ segmentos orientados.}$$

## C.7 Atividade 7

*Aqui vamos usar a combinação para formar os triângulos, vamos precisar de três pontos que podem ser dois dos que estão na reta e um dos demais ou o contrário.*

$$C_6^2 \cdot C_3^1 + C_6^1 \cdot C_3^2 =$$
$$\frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{3!}{1!(3-1)!} + \frac{6!}{1!(6-1)!} \cdot \frac{3!}{2!(3-2)!} =$$
$$15 \cdot 3 + 6 \cdot \frac{3}{2} =$$
$$45 + 9 = 54 \text{ triângulos.}$$

## C.8 Atividade 8

*Agora basta combinar esses oito pontos para formar triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos e um octógono.*

$$C_8^3 + C_8^4 + C_8^5 + C_8^6 + C_8^7 + C_8^8 =$$
$$\frac{8!}{3!(8-3)!} + \frac{8!}{4!(8-4)!} + \frac{8!}{5!(8-5)!} + \frac{8!}{6!(8-6)!} + \frac{8!}{7!(8-7)!} + \frac{8!}{8!(8-8)!} =$$
$$56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 219 \text{ polígonos.}$$

## C.9 Atividade 9

*Essa é uma questão de permutação circular, onde deve-se calcular primeiro quantos modos temos de colocar no octógono essas 8 peças coloridas e subtrair da quantidade de possibilidades que existem das duas peças verdes ficarem juntas, nesse caso tratamos as duas peças verdes como se elas fossem uma.*

$$\text{Como; } PC_n = \frac{n!}{n}, \text{ temos:}$$
$$PC_8 - PC_7 = \frac{8!}{8} - \frac{7!}{7} = 7! - 6! = 4320 \text{ modos.}$$

## C.10 Atividade 10

*A medida do perímetro do octógono é igual a medida da sua poligonal que vale* $n+n+n+n+n+n+n+n = 8n$, *daí:* $P = 8n$.

## C.11 Atividade 11

*A área do octógono pode ser calculada como a soma das áreas desses oito triângulos isósceles, mas como eles são congruentes, a área do octógono fica oito vezes a área de um desses triângulos. Como o perímetro é 24, o lado do octógono vale 24:8 = 3 cm e é a base dos triângulos e o apótema é a altura.*

$$
\begin{gathered}
A_{Octógono} = 8A_{Triângulo} \\
A_O = 8\frac{B \cdot H}{2} = 4ab \\
A_O = 4 \cdot 3 \cdot a \\
A_O = 12a
\end{gathered}
$$

# Apêndice D

# Resolução Atividades Borboleta de Moçambique

## D.1 Atividade 1

*$AD = 18$ cm e como $ADO$ é isósceles e $OK$ é altura então $OK$ é também mediana e portanto $AK = KD = 9$ cm e isso se estende a todos os triângulos isósceles do tabuleiro e portanto a medida de $PT = 2.PI$.*

*Como os triângulos $OQU$ e $ADO$ são semelhantes e tem razão de semelhança dois terços então :*

$$\frac{QJ}{AK} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{QJ}{9} = \frac{2}{3},$$
*logo* $QJ = 6\ cm$.

*Como pela construção do tabuleiro $PI//QJ$ e $OP \equiv PQ$, temos que $PI$ é a base média de $OGJ$ e portanto* $PI = \dfrac{QJ}{2} = \dfrac{6}{2} = 3cm.$

*Como* $PT = 2PI$, *então* $PT = 6\ cm$.

## D.2 Atividade 2

*No triângulo $AFG$ temos;*

$$sen30° = \frac{cateto\ \ oposto}{hipotenusa}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{6}{AF},\ logo\ AF = 12cm$$

$$cos30° = \frac{cateto\ \ adjacente}{hipotenusa}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{FG}{AF},\ logo\ FG = 6\sqrt{3}cm$$

## D.3 Atividade 3

*OBS: Lembre ao aluno ao conceitos de base média de triângulo e de trapézio.*

*Por construção* $AM = MN = NF$ *e* $NO = MP = AG$*, daí concluí-se que: NO é a base média do triângulo FMP e MP é a base média do trapézio NOGA. Daí, temos que:*

$$NO = \frac{MP}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$$

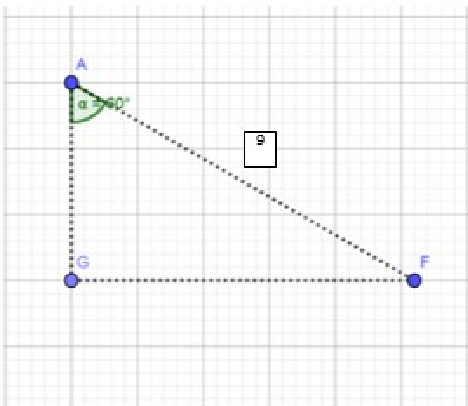
$$\frac{AG + NO}{2} = MP$$

$$\frac{AG + 3}{2} = 6, \text{ logo } AG = 9 \text{ cm.}$$

## D.4 Atividade 4

*a) Como já foi dito anteriormente,* $AM = MN = NF = 3$*( Por construção).*

*No triângulo AFG,* $AF = 3 + 3 + 3 = 9cm$




$$sen60^\circ = \frac{FG}{AF} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{FG}{9}$$

*Logo,* $FG = 4,5\sqrt{3}cm$

$$GH = 2FG \Rightarrow GH = 9\sqrt{3}cm$$

*b)No retângulo AFG, o ângulo* $AFG = 30^\circ$.

*E como ADF é isósceles e FG é altura, mediana e bissetriz, então: o ângulo* $DAF = AFG = 30^\circ$.

*c) Como visto no item b, FG também é mediana do triângulo ADF, então* $AD = 2AG$ .

*No triângulo AGF;* $cos60^\circ = \frac{AG}{AF} \Rightarrow AG = \frac{9}{2}cm$.

*Assim,* $AD = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9cm$

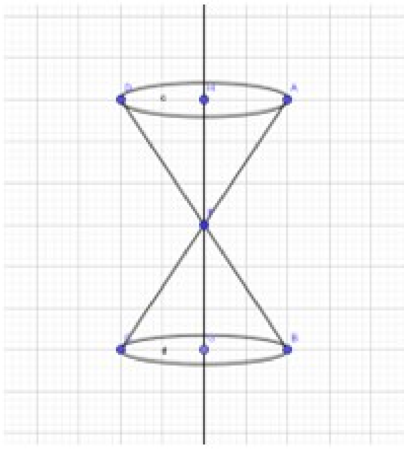
## D.5 Atividade 5

*Como visto* $FG = FH = 8cm$ *e* $AG = DG = 6cm$.

*No triângulo AFG, temos:* $AF^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow AF = 10cm.$

*Note que GR é mediana relativa a hipotenusa, logo* $GR = \dfrac{AF}{2} = \dfrac{10}{2} = 5cm.$

## D.6 Atividade 6



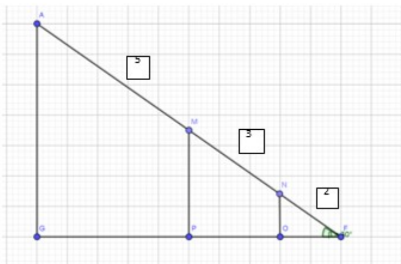
*Se* $AD = 8cm$, $R = 4cm$, *como o triângulo ADF é equilátero, então* $GF = h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, *que será a altura do cone.*

*Serão gerados 2 cones,com volume*

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot h \leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h \leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow V = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3} cm^3.$$

$$V_{total} = 2V_{cone} = \frac{128\pi\sqrt{3}}{3} cm^3$$

## D.7 Atividade 7



*No triângulo FMP ,* $sen30° = \dfrac{MP}{FM}$, *daí* $MP = 2,5cm$ *e o* $cos30° = \dfrac{FP}{FM}$, *daí* $FP = 2,5\sqrt{3}cm$ *e* $AG = 5cm.$

*Considerando* $MP//NO$ *e FA e FG duas transversais então* $GP = 2,5\sqrt{3}cm.$

*Logo, o perímetro de* $AGPM = 2,5(5 + \sqrt{3})cm.$

## D.8 Atividade 8

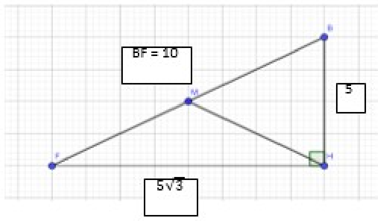
*a)Como ADF é isósceles , com ângulo no vértice* $60°$*, então o triângulo ADF é equilátero. Daí GF é a altura, logo* $GF = 5\sqrt{3}$.

*No triângulo retângulo FMP temos que* $FP = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$*, daí;* $\dfrac{FG}{FP} = 2$.

*b)Usando as relações métricas no triângulo retângulo, temos que*

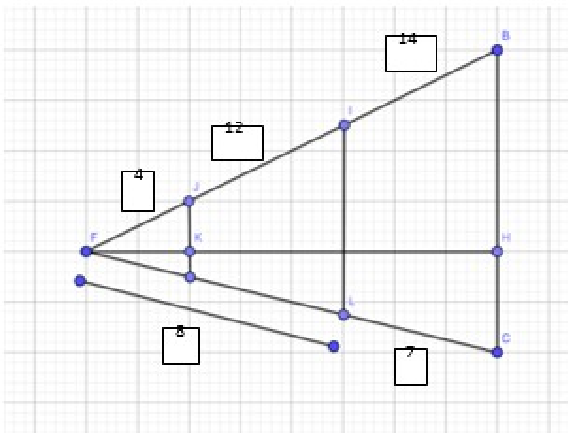
$$10 \cdot h = 5 \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow h = \tfrac{5\sqrt{3}}{2}cm.$$

*c)*




*Como o triângulo BMF é congruente ao triângulo AFG, então o circuncentro do triângulo retângulo fica no ponto médio da hipotenusa, a distância do ponto médio do mesmo aos vértices será a medida do raio, logo* $r = 5cm$.

## D.9 Atividade 9




$$FJ = \frac{JI}{3} \text{ e } FJ + JI = 16 \Rightarrow FJ = 4cm \text{ e } JI = 12cm$$

*Como* $JK//IL//BC$*, usaremos o teorema de Tales; daí:*

$$\frac{FI}{IB} =$$

$displaystylefracFLLC \Rightarrow IB = 14cm$

$$\frac{KH}{FK} = \frac{JB}{FJ} \Rightarrow KH = 6,5cm$$

## D.10 Atividade 10

*Queremos provar que PQJT é um paralelogramo.*

$PT//QU$ *por construção, daí temos que* $PT//QJ(1)$

*No triângulo OQJ, temos:*

$PI//QJ$ *(por construção)*

$OP \equiv PQ$ *(por construção)*

*Daí, PI é base média do triângulo OQJ e portanto* $PI = \dfrac{QJ}{2}$*, mas como o triângulo OPT é isósceles de base PT e OI é a altura, então OI também é mediana, daí*

$IT = PI = \dfrac{QJ}{2}$ *e* $PT = PI + IT$.

*Então,* $PT = QJ$ *e* $PT//QJ$ *por* (1).

*Portanto, como PQJT tem um par de lados opostos paralelos e congruentes PQJT é um paralelogramo.*

# Apêndice E

# Resolução Atividades Família Mancala

## E.1 Atividade 1

*Daí basta escolher 4 cavidades em 12 cavidades para colocar as sementes.*

$C_{(12,4)} = \dfrac{12!}{4!(12-4)!} = 495$ *formas diferentes.*

*E se não tivesse escrito para desconsiderar que a distribuição de semente é consecutiva? Daí é necessário o aluno perceber que bastava escolher a primeira casa para colocar as sementes, ou seja uma única escolha vai determinar as outras. Então ele teria doze formas diferentes.*

## E.2 Atividade 2

*Aqui a questão muda, pois existem formas diferentes destas 4 sementes ocuparem as cavidades. Temos 4 formas doferentes de arrumá-las a depender da quantidade de buracos .*

$$C_{(12,4)} + 3C_{(12,3)} + C_{(12,2)} + C_{(12,1)} =$$

$$\frac{12!}{4!(12-4)!} + 3\frac{12!}{3!(12-3)!} + \frac{12!}{2!(12-2)!} + \frac{12!}{1!(12-1)!} = 495 + 660 + 66 + 12 = 1233$$

*formas diferentes.*

## E.3 Atividade 3

*Diante da regra do jogo só pode ser retirada duas ou três sementes de cada casa, sendo que o número de casas consecutivas que podem ser retiradas as sementes, não pode ultrapassar 5 casas, pois o oponente ficaria sem sementes o que vai de encontro a regra da captura. Daí o máximo de sementes retiradas de uma só vez é 15. Então como só* *pode ser retirada a quantidade que obdece as regras temos que a quantidade $T$ de sementes capturadas terá a forma:*

$T = 2x + 3y$, *onde $x$ é a quantidade de casas com duas sementes e $y$ é a quantidade de casas com três sementes.*

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

## E.4 Atividade 4

*Se B fez uma jogada ele só pode ter semeado as sementes da cavidade 6, porque se fosse da 5 a cavidade 6 teria uma semente e as cavidades 1, 2, 3 e 4 não estão vazias.*

*B não podia ter 1, 2 ou 3 sementes pois as cavidades 7, 8 e 9 não e estão vazias e a questão disse que B capturou sementes. Então: Ou B tinha 4 sementes e a cavidade 10 tinha 1 ou 2 sementes, fazendo com que o jogador B capturasse 2 ou 3 sementes respectivamente.*

*Ou B tinha 5 sementes e a cavidade 11 tinha 1 ou 2 sementes, fazendo com que o jogador B capturasse 2 ou 3 sementes respectivamente e caso a cavidade 10 também ficasse com 2 ou 3 sementes após a jogada, o jogador B capturaria 6, 7, 8 ou 9 sementes ao final.*

*Ou B tinha 6 sementes e a cavidade 12 tinha 1 ou 2 sementes, fazendo com que o jogador B capturasse 2 ou 3 sementes respectivamente e caso a cavidade 11 também ficasse com 2 ou 3 sementes após a jogada, o jogador B capturaria 4, 5 ou 6 sementes, e caso a cavidade 10 também ficasse com 2 ou 3 sementes após a jogada, o jogador B capturaria 4, 5 ou 6 sementes e ao final.*

## E.5 Atividade 5

*Note que temos 5 cavidades com 0 sementes e 5 cavidades com 1 semente, as outras quantidades são distintas.*

*Note também que temos 12 cavidades para permutar essas quantidades.*

$P_{12}^{5,5} = \dfrac{12!}{5!5!} = 33264$ *formas.*

## E.6 Atividade 6

*Pra trabalhar com quantidades iguais estaríamos pensando nos divisores de 48.*

$D(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ *mas não esqueça que o tabuleiro só tem 12* *cavidades. Então não dá para colocar quantidades iguais com 1 semente, nem com 2, nem com 3 pois sobrariam sementes. Então dá para colocar quantidades iguais com 4, 6, 8, 12, 16, 24 e 48 sementes. Vejamos:*

$$C_{12,12}+C_{12,8}+C_{12,6}+C_{12,4}+C_{12,3}+C_{12,2}+C_{12,1}=$$
$$\frac{12!}{12!(12-12)!}+\frac{12!}{8!(12-8)!}+\frac{12!}{6!(12-6)!}+\frac{12!}{4!(12-4)!}+\frac{12!}{3!(12-3)!}+\frac{12!}{2!(12-2)!}+$$
$$\frac{12!}{1!(12-1)!}=2213\ formas.$$

## E.7 Atividade 7

*A melhor estratégia para B, seria a defesa pois após analisar e utilizar o cálculo mental veria que a única possibilidade de captura seria optar pelo buraco 6 e dessa forma a última semente cairia no buraco 11 e seria possível capturar 2 sementes porém esse movimento deixaria o jogador A livre para optar pelo buraco 12 e a última semente cairia no buraco 2 que ficaria com 3 sementes e assim o jogador B às capturaria e ainda iria capturar as duas sementes do buraco 1 anterior a este, o que somariam 5 sementes. Dessa forma a estimativa seria que ao capturar 2 sementes perderia 5 sementes, daí a melhor estratégia seria de defesa para inviabilizar essa jogada de A, uma das formas de inviabilizá-la seria o jogador B optar pelo buraco 1 e a outra seria optar pelo buraco 2.*

## E.8 Atividade 8

*Nesse momento pode-se trabalhar ou até mesmo iniciar o conceito de probabilidade, ao analisar a figura acima e as possíveis jogadas, percebe-se que cada jogador tem no máximo seis diferentes possibilidades de para realizar o movimento e isso é o que acontece com a, destas seis possibilidades apenas uma terminaria com captura que seria a opção do buraco 12, onde como já vimos na questão anterior o jogador a capturaria 5 sementes, em todas as outras possibilidades não haveria captura, logo a probabilidade seria de 1 possibilidade em seis existentes daí a probabilidade seria de um sexto.*

## E.9 Atividade 9

*Nesse momento é possível trabalhar com regra de três para encontrar o resultado que através da problematização do jogo vem dar significado aos conceitos de probabilidade e porcentagem, então pode-se construir a seguinte situação:*
*Como vimos que a probabilidade do jogador A capturar sementes é de um sexto isso significa que ele tem uma possibilidade de um total de seis logo*

$$6 - - - - - - - - - - - - 100\%$$
$$1 - - - - - - - - - - - - X\%$$

*Resolvendo a regra de três acima, encontraríamos que o valor de $X$ é aproximadamente $16,67\%$.*

## E.10 Atividade 10

*OBS: Trabalhe com o aluno estimativa, estratégia, cálculo mental e raciocínio lógico.*
*A melhor estratégia para o jogador A, diante dessa situação é capturar sementes, pois escolheria as 5 sementes do buraco 10 para semear e a última semente cairia no buraco 3 o que deixaria o jogador B com a seguinte composição 2-3-3-8-2-2 daí o jogador A colheria 2 + 3 + 3 = 8 sementes e o jogador B passaria a ter a composição 0-0-0-8-2-2 e a melhor possibilidade para esse jogador, seria escolher as 2 sementes do buraco 6 e semea-las até que a última caísse no buraco 8, o que lhe proporcionaria a captura de 5 sementes.*
*Dessa forma para o jogador A, nessa circunstância, a captura seria a melhor estratégia.*

## E.11 Atividade 11

*OBS: Lembre ao aluno ao conceitos de regra de três, probabilidade.*
*Cada jogador tem no máximo seis diferentes possibilidades de para realizar o movimento e isso é o que acontece com A, destas seis possibilidades 4 terminariam com captura que seria a opção dos buracos 9, 10, 11 e 12, onde o jogador A capturaria 5, 8, 5 e 6 sementes respectivamente, nas outras possibilidades não haveria captura, logo a probabilidade seria de:*
*Probabilidade:* $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(\omega)} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

## E.12 Atividade 12

*OBS: Lembre ao aluno ao conceitos de regra de três, probabilidade e porcentagem.*
*Cada jogador tem no máximo seis diferentes possibilidades de para realizar o movimento e isso é o que acontece com B destas seis possibilidades 2 terminariam com captura que seria a opção dos buracos 5 e 6, onde o jogador B capturaria 3 e 5 sementes respectivamente, nas outras possibilidades não haveria captura, logo a probabilidade seria de:*

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

*A probabilidade do jogador B capturar sementes é de dois sextos isso significa que ele tem duas possibilidades de um total de seis logo:*

$$6 - - - - - - - - - - - - 100\%$$
$$2 - - - - - - - - - - - - X\%$$

*Resolvendo a regra de três acima, encontraríamos que o valor de X é aproximadamente 33,34%.*