Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

UM ESTUDO SOBRE O TRIÂNGULO RETÂNGULO: SUAS PROPRIEDADES E APLICAÇÕES NA PERSPECTIVA DA BNCC

Rodrigo Augusto Santos Silva

Cruz das Almas-Bahia
Julho de 2019

UM ESTUDO SOBRE O TRIÂNGULO RETÂNGULO: SUAS PROPRIEDADES E APLICAÇÕES NA PERSPECTIVA DA BNCC

Rodrigo Augusto Santos Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Genilson Ribeiro de Melo

Cruz das Almas-Bahia

Julho 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

S586e Silva, Rodrigo Augusto Santos.

Um estudo sobre o triângulo retângulo: suas propriedades e aplicações na perspectiva da BNCC / Rodrigo Augusto Santos Silva._ Cruz das Almas, BA, 2019.

120f.; il.

Orientador: Genilson Ribeiro de Melo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Triângulo retângulo. 2.Matemática – Estudo e ensino. 3.Educação básica – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas – UFRB.
Responsável pela Elaboração – Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário – CRB5 / 1615).
Os dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico.

UM ESTUDO SOBRE O TRIÂNGULO RETÂNGULO: SUAS PROPRIEDADES E APLICAÇÕES NA PERSPECTIVA DA BNCC.

RODRIGO AUGUSTO SANTOS SILVA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado em: 25 de Julho de 2019

Banca examinadora:

Genilson Ribeiro de Melo

Dr. Genilson Ribeiro de Melo (Orientador)
UFRB

Dr. Ariston de Lima Cardoso
UFRB

Dr. João de Azevedo Cardeal
UEFS

Dedico a minha filha Letícia Siqueira de Andrade Silva.

O amor de minha vida

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que cuidou de cada detalhe, de cada viagem semanal de Salvador a Cruz das Almas, e me permitiu chegar até aqui. A Ele a minha gratidão.

À minha querida mãe, dona Ziza, que sempre lutou pelos meus estudos e sempre foi meu grande exemplo.

À minha amada esposa Rafaela e filha Letícia por presenciarem cada momento dessa conquista com muito amor e carinho, por serem minhas companheiras e estarem sempre ao meu lado me incentivando na busca dos meus sonhos.

A esta Universidade, seu corpo docente, e em especial ao meu orientador, Genilson Melo, pela parceria e paciência.

À Educação Adventista pelo incentivo e apoio em todos os momentos deste curso.

À gestão do Colégio Estadual Dr. Eduardo Bahiana na pessoa da gestora Ivani Teles pelo apoio cedido principalmente no período em que ainda não havia saído a minha licença.

À CAPES pelo apoio financeiro importante no custeio dos estudos, alimentação e deslocamentos.

A todos os meus colegas de sala, em especial aos amigos de Salvador, companheiros de estudos e irmãos para a vida inteira, Wilson Teixeira, Ubiraci Pimenta e Jorge Serva. Obrigado pela parceria. Seguiremos juntos!

Essa conquista é nossa! Obrigado por tudo!!!

"Educação não transforma o mundo. Educação muda pessoas. Pessoas transformam o mundo"

Paulo Freire

Resumo

Este trabalho faz uma ampla revisão da geometria relacionada ao Triângulo Retângulo destacando as suas contribuições para o desenvolvimento matemático do aluno no Ensino Básico. Para isso, explora algumas de suas propriedades fazendo aplicações que apresentam resultados curiosos, objetivos e sempre úteis no estudo da Matemática. Além disso, enfatiza as demonstrações como recurso importante de entendimento e justificativa, apresenta estratégias para resolução de problemas de aplicação, e propõe uma sequência didática provando as relações métricas do Triângulo Retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando a semelhança de triângulos. A perspectiva é fixar aprendizagem considerando o desenvolvimento das habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para a área de Matemática e suas Tecnologias e auxiliar estudos de professores e alunos sobre o tema.

Palavras-chave: triângulo retângulo, teorema de pitágoras, relações métricas, razões trigonométricas.

Abstract

This paper reviews the geometry related to the Triangle Rectangle, highlighting its contributions to the mathematical development of students in elementary school. For this, it explores some of its properties making applications that present curious, objective and always useful results in the study of mathematics. In addition, it emphasizes the demonstrations as an important resource for understanding and justification, presents strategies for solving application problems, and proposes a didactic sequence proving the metric relations of the Rectangle Triangle, among them the Pythagorean Theorem, using the similarity of triangles. The perspective is to fix learning considering the development of the skills proposed by the Common National Curriculum Base (BNCC) for the area of Mathematics and its Technologies and to assist studies of teachers and students on the subject.

Keywords: right triangle, pythagorean theorem, metric relations, trigonometric ratios.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O trabalho de conclusão de curso do PROFMAT além de versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica deve impactar de maneira significativa o trabalho do professor na sala de aula (Silva, 2016). A motivação para esse estudo vem a partir dessa recomendação da Coordenação do PROFMAT, através de seu regimento, alinhado à importância do Triângulo Retângulo no ensino básico como um dos conteúdos estruturantes para o Ensino Fundamental e Médio e o apreço pelo estudo da Geometria.

A observação ao longo dos anos de que muitos alunos sentem dificuldade nas aplicações das propriedades do Triângulo Retângulo, sobretudo, quando o objeto de estudo não é, necessariamente ele, torna necessário um estudo específico onde se pode elencar as suas propriedades, estudá-las de forma organizada e enumerar algumas de suas contribuições dentro do currículo matemático do ensino básico. Um dos motivos para essa dificuldade talvez esteja na forma como muitos professores apresentam na aula. Talvez haja um excesso na pura exposição algébrica através dos exercícios ou ausência de aplicações e atividades diversificadas com demonstrações que permitam ao aluno uma maior interação com o conteúdo. Certamente, é preciso aprimorar a maneira como se entrega esse tema ao aluno de forma que ele entenda o seu significado não apenas matemático e cotidiano, mas também histórico.

O entendimento e aprendizagem do aluno é algo extremamente importante no contexto da sala de aula. O aprendizado mecânico tão comum nas aulas de matemática torna o objeto de estudo sem significado e, por isso, é muito comum que o aluno questione a razão de estar estudando determinado conteúdo. O fato é, e precisa estar bem claro, que todo conteúdo de matemática é significativo e tem aplicações direta na vida de todos, além de significado na própria matemática, que por ser sequencial, utiliza conhecimentos anteriores para aplicarmos em conteúdos posteriores. Por isso, um dos objetivos desse estudo configura o significado da aprendizagem e no que ela resulta em termos práticos.

Temos a seguinte afirmação nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) para a matemática:

> "A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos" (BRASIL, 1997)

Este trabalho através da reunião de informações mostra como desenvolver de maneira mais interessante este conteúdo fazendo com que exista uma maior motivação não só do aluno, mas também do professor ao explaná-lo em sala de aula. Para isso, as aplicações serão um forte recurso para interpretação dos porquês e não se limitará apenas em explicitar as fórmulas, mas fazer entender algebricamente e, sempre que possível, geometricamente de onde elas vieram, como foram deduzidas e quando e como poderão ser utilizadas. A sala de aula de hoje não pode retroceder aos tempos antigos onde, segundo (Eves, 2011), apenas foram encontrados descrições de processos. Eves ainda afirma que na matemática oriental antiga não havia registros do que hoje chamamos demonstração. Não havia argumentos e sim descrições de um processo: "Faça assim e assim".

E traz ainda uma reflexão:

> "Por mais insatisfatório que o procedimento "faça assim e assim" possa nos parecer, não deveria causar estranheza, pois é em grande medida o procedimento que nós mesmos usamos no ensino de partes da matemática elementar no primeiro e segundo graus" (EVES, 2011, p. 58).

(EVES, 2011) ainda ressalta que os processos empíricos do Oriente antigo não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de porquês. Dessa forma os métodos demonstrativos foram se consolidando e a feição dedutiva da matemática, característica fundamental, passou ao primeiro plano. É possível promover também mudanças significativas nos dias de hoje. A aula de Matemática deve sim ser um momento de incentivo, de questionamentos e análises, sobretudo sob o ponto de vista da demonstração. É importante que haja uma evolução na sala de aula assim como houve nos tempos antigos. E esse avanço já se tornou realidade através de um conjunto de aprendizagens estabelecidas pelo governo por meio de um documento normativo que define os conhecimentos e habilidades essenciais que todos os alunos da Educação Básica têm o direito de aprender, e entre esses conhecimentos e habilidades se encontram as demonstrações matemáticas.

A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo, elaborado por especialistas de todas as áreas do conhecimento, que regulamenta as aprendizagens essenciais que devem ser trabalhadas nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE) garantindo o direito à aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes. Assim, se trata de um documento importantíssimo que promove igualdade no sistema educacional, colabora para a formação integral e para a construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva.

Como o objetivo é nortear os currículos dos estados e municípios de todo o território nacional, a BNCC cumpre o que está previsto na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) sancionada em 1996. Segundo a LDB, cabe ao Governo Federal "estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum".

A BNCC, foi homologada pela portaria do Ministério da Educação (MEC) n.º 1570, de 20 de dezembro de 2017, para Educação Infantil e Ensino Fundamental e de, 14 de dezembro de 2018, para o Ensino Médio.

Na busca de uma aprendizagem de qualidade, meta que deve ser perseguida por todos, a BNCC se torna uma peça fundamental nessa direção. Ela enfatiza que se deve estimular já nos anos finais do Ensino Fundamental a dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras e reforça:

> "[...] a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações" (BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2016).

Para ajudar nesse aspecto, é possível utilizar recursos tecnológicos disponíveis que podem contribuir para uma melhor compreensão do conteúdo. A BNCC salienta a necessidade e importância de os professores repensarem os processos de ensino aprendizagem na busca de novas alternativas e estratégias com a utilização das tecnologias, destacando:

> "Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

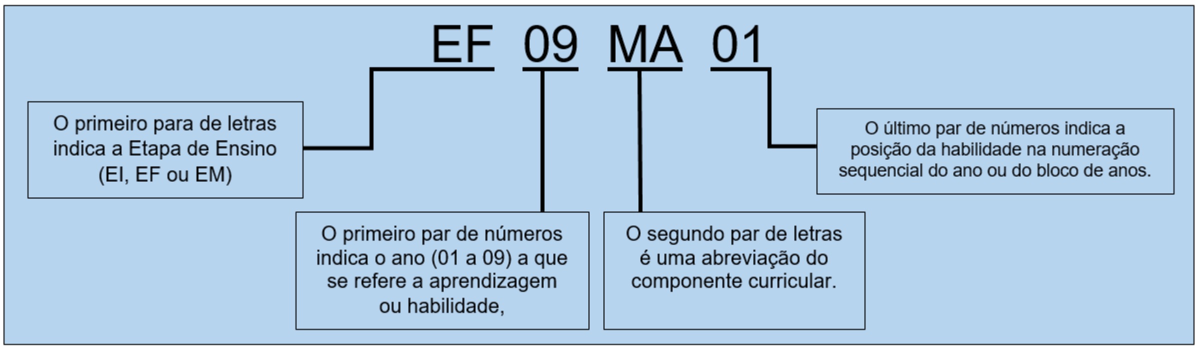
> Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização" (BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2016)

A BNCC para o Ensino Fundamental em Matemática define um conjunto de habilidades que estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimentos (conteúdos, conceitos e processos) que, por sua vez, são organizados em cinco unidades temáticas.

Já no Ensino Médio em continuidade a essa aprendizagens o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade e em diferentes contextos onde, nessa perspectiva, destacamos a importância dos recursos tecnológicos tanto para investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento iniciado na etapa anterior. Assim, a Matemática do Ensino Médio tem o papel de aproveitar todo o potencial já constituído no Ensino Fundamental a fim de promover ações que ampliem o letramento matemático.

As habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos e são identificadas por uma codificação alfanumérica adotada pelo MEC cuja composição é a seguinte:

Figura 1.1: Codificação alfanumérica das habilidades



Fonte: (BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2016)

O Triângulo Retângulo é mencionado na BNCC já no Ensino Fundamental de forma direta na Unidade Temática de Geometria através das relações métricas e do Teorema de Pitágoras com verificações experimentais e demonstrações ligados às habilidades EF09MA13 e EF09MA14 que apresenta como um dos objetivos a demonstração dessas relações métricas no triângulo retângulo bem como do Teorema de Pitágoras inclusive utilizando semelhança de triângulos como método demonstrativo. Já no Ensino Médio a habilidade EM13MAT308 exige que o aluno aplique as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em vários contextos. No Quadro 1.1 estão explicitados as habilidades correlacionadas direta ou indiretamente ao Triângulo Retângulo e que serão abordadas no trabalho. É importante salientar que embora alguma habilidade mencionada no quadro não esteja diretamente relacionada ao Triângulo Retângulo, ela pode se conectar ou serve de base para alguma aplicação ou demonstração que será abordada no estudo.

ENSINO FUNDAMENTAL	
EF09MA11	Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
EF09MA12	Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
EF09MA13	Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
EF09MA14	Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
EF09MA16	Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
ENSINO MÉDIO	
EM13MAT308	Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Fonte: (BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2016)

Quadro 1.1: Habilidades da BNCC

Assim, este trabalho está organizado em seis capítulos onde o Capítulo 1 traz uma breve revisão de importantes conceitos geométricos, o Capítulo 2 apresenta o Triângulo Retângulo e explora o Teorema de Pitágoras, suas demonstrações e aplicações, o Capítulo 3 aborda a trigonometria no triângulo retângulo e suas aplicações, o Capítulo 4 traz duas demonstrações especiais e curiosas. No Capítulo 5, encontram-se as resoluções de problemas e a sequência didática e o Capítulo 6 encerra com as conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Conceitos iniciais de geometria

Este capítulo faz uma revisão breve a respeito de ângulo. Aborda sua definição geral, a definição de ângulos nulo, raso, reto, agudo e obtuso. Além disso relembra o conceito de complemento e suplemento de ângulos, bem como ângulos na circunferência e nos triângulos. Este capítulo ainda revisa rapidamente uma das ferramentas mais importantes da geometria: a semelhança de triângulos, que de forma particular, será importante para demonstrar algumas relações.

O objetivo específico é recordar conceitos, propriedades e informações importantes que são aplicáveis ao nosso objeto principal de estudo, o triângulo retângulo.

Os conceitos e demonstrações deste capítulo foram baseados nas referências: [8], [9], [15] e [21].

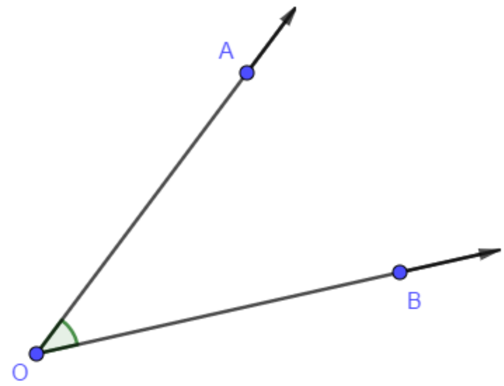
2.1 Ângulo

Definição 2.1.1. *Ângulo é a reunião de duas semirretas de mesma origem, mas não contidas na mesma reta.*

Observe a Figura 2.1.
Lados dos ângulos: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$
Vértice do ângulo: O

$$\text{Ângulo: } \begin{cases} A\hat{O}B \\ B\hat{O}A \\ \hat{O} \end{cases}$$

Figura 2.1: Definição de ângulo

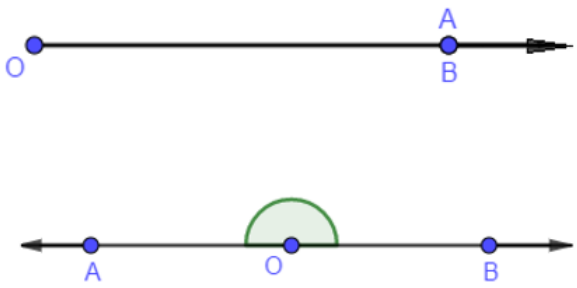


Fonte: O autor, 2019

2.1.1 Ângulo nulo e ângulo raso

Sendo $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ coincidentes, então eles determinam um ângulo nulo, porém se elas forem opostas, elas determinam um ângulo raso. (Figura 2.2)

Figura 2.2: Ângulo nulo e raso

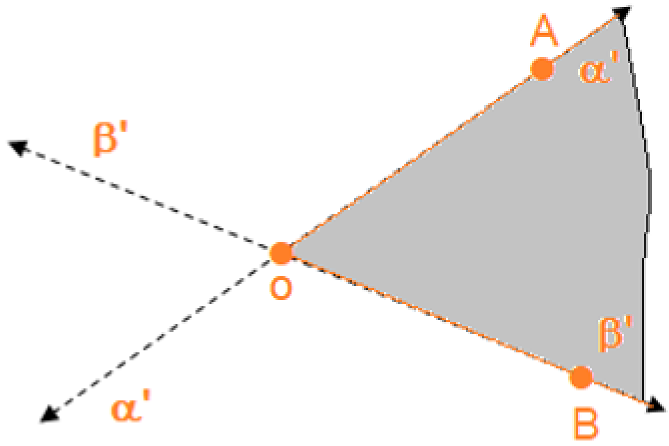


Fonte: O autor, 2019

2.1.2 Interior de ângulo - ponto interno

Na Figura 2.3, o interior do ângulo $A\hat{O}B$ está destacado. Essa região destacada, é a interseção de dois semiplanos abertos. São eles:
α' com origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ e que contém o ponto B
e
β' com origem na reta $\overleftrightarrow{OB}$ e que contém o ponto A.

Figura 2.3: Interior de ângulo



Fonte: O autor, 2019

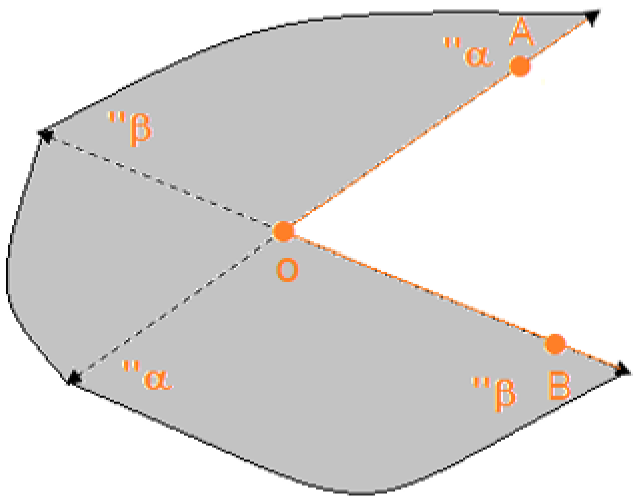
$$\boxed{\text{Interior de } A\hat{O}B = \alpha' \cap \beta'}$$

O ponto P, destacado na Figura 2.3, é um **ponto do interior** do ângulo pois é ponto interno do ângulo $A\hat{O}B$.

2.1.3 Exterior de um ângulo - ponto externo

Por sua vez, o exterior do ângulo $A\hat{O}B$ é definido pelo conjunto dos pontos que não pertencem ao ângulo $A\hat{O}B$ nem ao seu interior. Observe a Figura 2.4.

Figura 2.4: Exterior de ângulo



Fonte: O autor, 2019

O exterior de $A\hat{O}B$ é a runião de dois semiplanos abertos. São eles:

α'' com origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ e que contém o ponto B

e

β'' com origem na reta $\overleftrightarrow{OB}$ e que contém o ponto A.

$$\boxed{\text{Exterior de } A\hat{O}B = \alpha'' \cup \beta''}$$

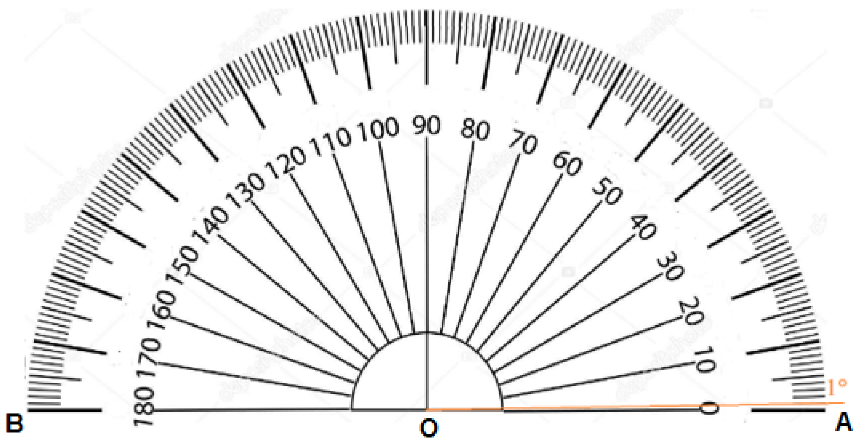
O ponto P, destacado na Figura 2.4, é um **ponto do exterior** do ângulo pois é ponto externo do ângulo $A\hat{O}B$.

Os **ponto do exterior** de um ângulo são **pontos externos** ao ângulo.

2.1.4 Medindo um ângulo

Para medirmos um ângulo, utilizamos o transferidor. Esse instrumento, geralmente em formato de um semicírculo, é graduado de 0º a 180º. Considerando o ângulo raso $A\hat{O}B$, é possível dividir esse ângulo em 180 partes iguais conforme ilustra a Figura 2.5 a seguir.

Figura 2.5: Unidade de medida do ângulo



Fonte: [26]

Assim, o **ângulo de 1º (um grau)** o ângulo que corresponde a $\frac{1}{180}$ do ângulo raso. p **minuto** e o **segundo** são os submúltiplos do grau.

Um **minuto (1′)** é o ângulo correspondente a $\frac{1}{60}$ do ângulo de um grau.

$$\boxed{1' = \frac{1^{\circ}}{60}}$$

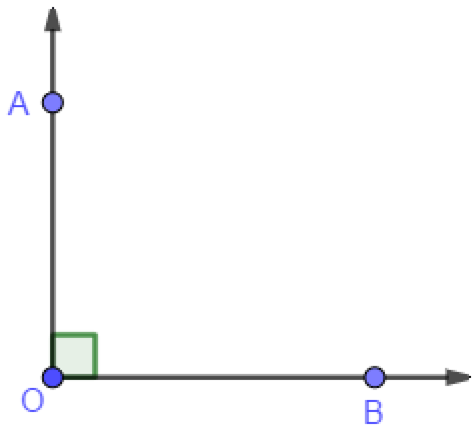
Um **segundo (1′/)** é o ângulo correspondente a $\frac{1}{60}$ do ângulo de um minuto.

$$\boxed{1'' = \frac{1'}{60}}$$

2.1.5 Ângulo reto

É um ângulo cuja medida é igual a 90º e sempre será indicado pelo símbolo ⊡. (Figura 2.6)

Figura 2.6: Ângulo reto

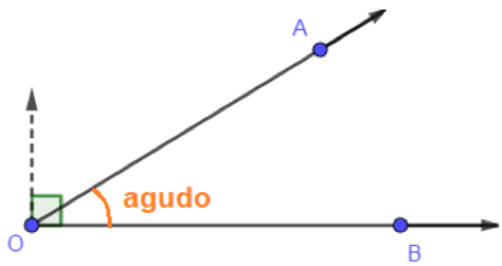


Fonte: O autor, 2019

2.1.6 Ângulo agudo e ângulo obtuso

Um ângulo que tem medida menor que 90º é chamado **ângulo agudo** (Figura 2.7).

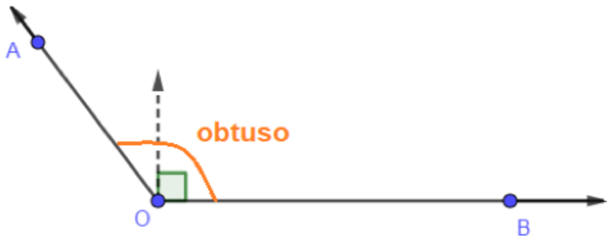
Figura 2.7: Ângulo agudo



Fonte: O autor, 2019

Um ângulo que tem medida entre 90º e 180º é chamado ângulo **ângulo obtuso** (Figura 2.7)..

Figura 2.8: Ângulo obtuso

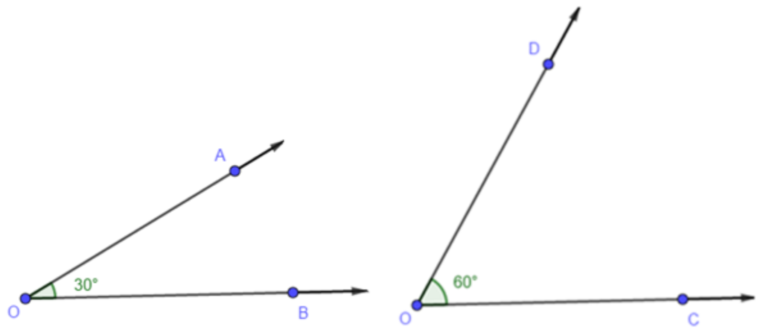


Fonte: O autor, 2019

2.1.7 Ângulos complementares

São dois ângulos cuja soma de suas medidas é 90º. Dizemos que um deles é o **complemento** do outro (Figura 2.9).

Figura 2.9: Ângulos complementares

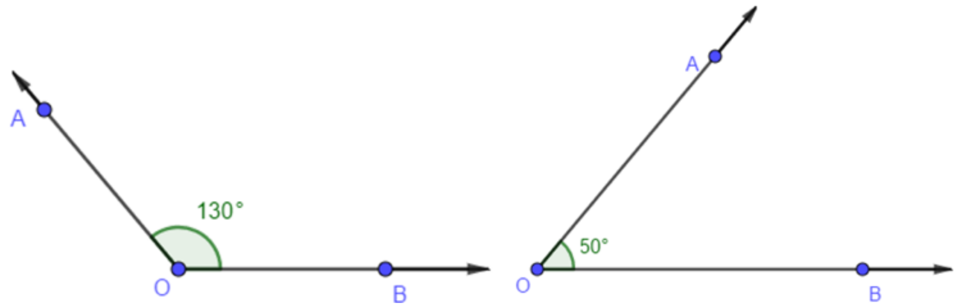


Fonte: O autor, 2019

2.1.8 Ângulos suplementares

São dois ângulos cuja soma de suas medidas é 180º. Dizemos que um deles é o **suplemento** do outro (Figura 2.10).

Figura 2.10: Ângulos suplementares



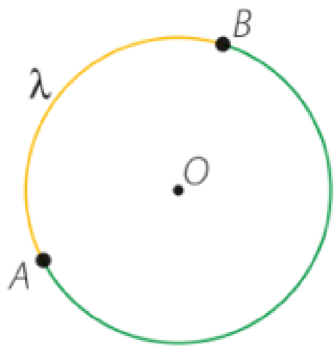
Fonte: O autor, 2019

2.2 Arcos e ângulos na circunferência

2.2.1 Arcos e ângulo central

Denominamos **arco** como o conjunto de pontos compreendidos entre dois pontos A e B quaisquer de uma circunferência. Observe a Figura 2.11.

Figura 2.11: Arco



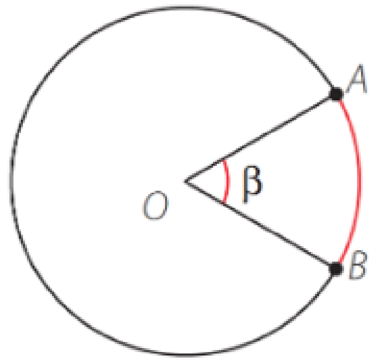
Fonte: [10, p.6]

Observe que os pontos A e B dividem a circunferência em dois arcos. Sempre que mencionamos o arco, nos referimos ao menor arco de extremidades em A e B. Quando for o contrário, deverá ser explicitado.

Se o ângulo tem o vértice no centro de uma circunferência, então chamamos de **ângulo central**. A medida do ângulo associado a um arco de circunferência é definido como o ângulo central correspondente. No caso da Figura 2.12 a seguir, temos:

Figura 2.12: Ângulo central

$$\beta = m\left(\widehat{AB}\right)$$



Fonte: [10, p.6]

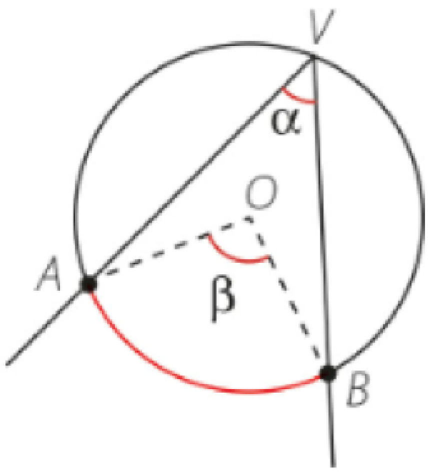
2.2.2 Ângulo inscrito

O **ângulo inscrito**, por sua vez, é todo ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados secantes a essa mesma circunferência.

Uma propriedade importante aqui é que a medida de um ângulo inscrito é sempre igual a metade da medida do ângulo central referente ao arco correspondente. Veja o exemplo na Figura 2.13:

Figura 2.13: Ângulo inscrito

$$\alpha = \frac{\beta}{2} \text{ ou } \alpha = \frac{m\left(\widehat{AB}\right)}{2}$$



Fonte: [10, p.6]

2.3 Triângulos

Chama-se triângulo o polígono que tem três lados e, consequentemente, três vértices e três ângulos internos.

O ângulo externo de um triângulo é cada ângulo adjacente e suplementar a um ângulo interno do triângulo, e são logicamente, três.

2.3.1 Classificação dos triângulos

Classificamos os triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados conforme Quadros 2.1 e 2.2 abaixo:

Quanto aos ângulos	
Acutângulo	Possui três ângulos agudos.
Retângulo	Possui dois ângulos agudos e um reto.
Obtusângulo	Possui dois ângulos agudos e um obtuso.

Quadro 2.1: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos

Quanto aos lados	
Equilátero	Três lados de mesma medida.
Isósceles	Dois lados de mesma medida.
Escaleno	Três lados de medidas diferentes entre si.

Quadro 2.2: Classificação dos triângulos quanto aos lados

Propriedades dos triângulos que serão úteis em nosso estudo do triângulo retângulo e que serão demonstradas posteriormente.

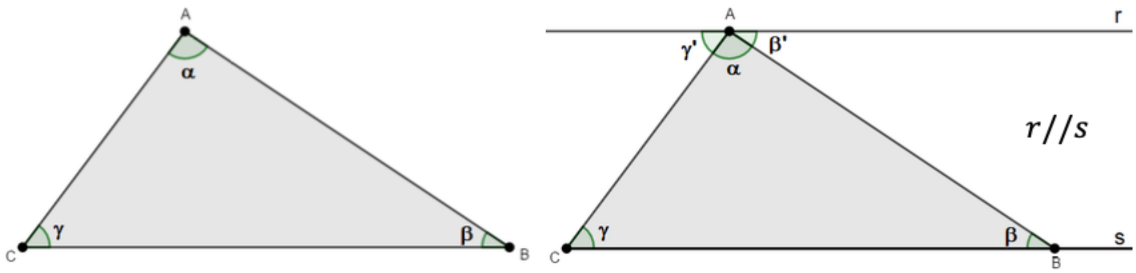
- Isósceles: os ângulos da base têm a mesma medida.
- Equilátero: os três ângulos internos têm a mesma medida, igual a 60^o.
- Retângulo: Teorema de Pitágoras (o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos).

2.3.2 A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Vamos mostrar que soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. É muito importante que o aluno saiba o porquê. Para isso, faremos a primeira demonstração deste estudo que é simples e deve ser aplicada em aula já no Ensino Fundamental.

Demonstração 2.3.1. *Observe a construção na Figura 2.14.*

Figura 2.14: Soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: O autor, 2019

Qualquer que seja o triângulo, é possível conduzirmos por um de seus vértices uma reta (neste caso, r) que seja paralela à reta (s) que contém o lado oposto ao vértice considerado.

Assim, os outros lados do triângulo resultam transversais das paralelas r e s, determinando ângulos alternos internos: γ *e* γ' *e* β *e* β'. *Logo,* $\gamma = \gamma'$ *e* $\beta = \beta'$.

Como $\alpha + \beta' + \gamma' = 180^o$ *(ângulo raso), então* $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$.

Observe que o esquema acima é um apoio para conduzir o nosso raciocínio. Em momento algum "medimos" qualquer coisa nesse esquema. Toda a argumentação é desenvolvida de maneira genérica, ou seja, para qualquer triângulo. Isso é o que chamamos de raciocínio dedutivo.

2.3.3 Triângulos congruentes

Uma propriedade muito útil e que auxilia este estudo é a congruência. Quando dois triângulos sobrepostos se coincidem, então eles são congruentes. Nesse caso, os seus lados, dois a dois, possuem a mesma medida ocorrendo o mesmo com os ângulos.

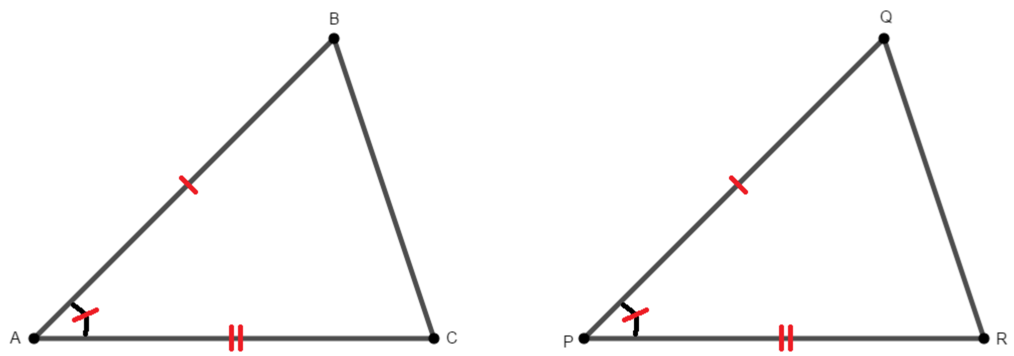
Da mesma forma que para se construir um triângulo basta se conhecer as medidas de alguns de seus elementos, também não é necessário verificar a congruência de todos os elementos. Assim, vamos tomar como referência os "casos de congruência". Portanto, analisaremos a possibilidade de o triângulo ser construído quando temos:

- as medidas dos três lados.
- as medidas dos três ângulos.
- as medidas de dois de seus lados e um ângulo.
- as medidas de um lado e dois de seus ângulos.

Observe que resultam apenas em quatro casos:
1º **Caso**: LAL (dois lados congruentes e o ângulo formado por eles congruente)

Observe na Figura 2.15 que o ângulo $\hat{A}$ é formado por $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, e que $\hat{P}$ é formado por $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$.

Figura 2.15: Congruência de triângulos LAL



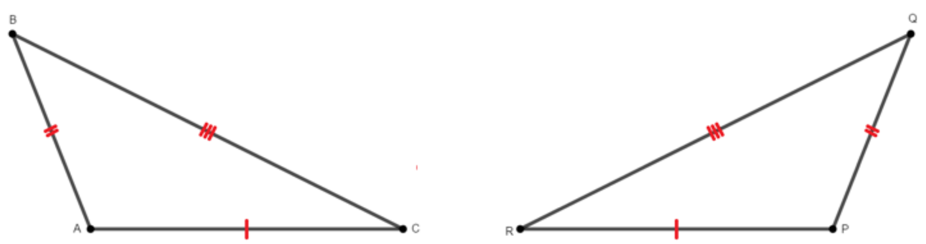
Fonte: O autor, 2019

Se $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\hat{A} \cong \hat{P}$ e $\overline{AC} \cong \overline{PR}$, então podemos garantir que o triângulo ABC é congruente ao triângulo PQR.

2º **Caso**: LLL (três lados congruentes)

Note na Figura 2.16 a seguir que se $\overline{AC} \cong \overline{PR}$, $\overline{AC} \cong \overline{PQ}$ e $\overline{BC} \cong \overline{QR}$, então o triângulo ABC é congruente ao triângulo PQR.

Figura 2.16: Congruência de triângulos LLL



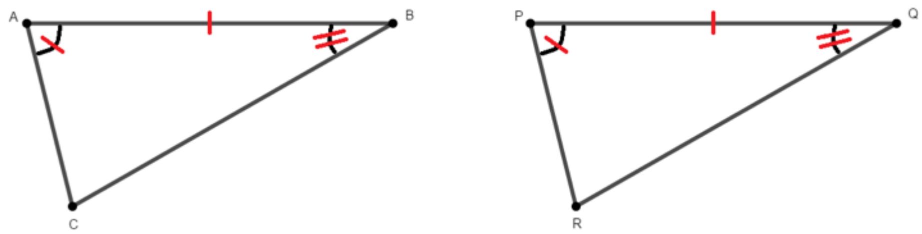
Fonte: O autor, 2019

Podemos assim afirmar que $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{Q}$ e $\hat{C} \cong \hat{R}$.

3º **Caso**: ALA (dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles congruente)

Na Figura 2.17 se $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ e $\hat{B} \cong \hat{Q}$, então $\hat{C} \cong \hat{R}$, $\overline{AC} \cong \overline{PR}$ e $\overline{BC} \cong \overline{QR}$, ou seja, o triângulo ABC é congruente ao triângulo PQR.

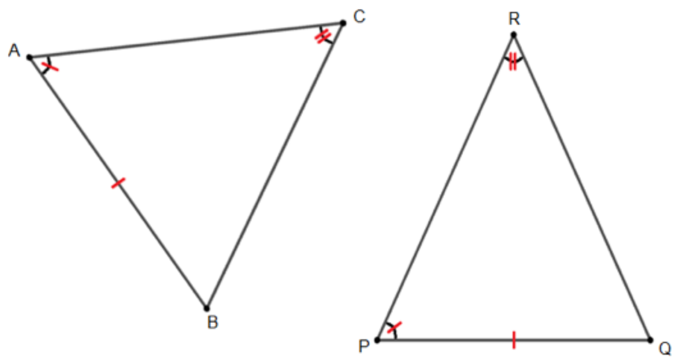
Figura 2.17: Congruência de triângulos ALA



Fonte: O autor, 2019

4º **Caso**: LAAo (uma lado congruente, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado congruente) Observe a Figura 2.18 abaixo:

Figura 2.18: Congruência de triângulos LAAo



Fonte: O autor, 2019

Se $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\hat{A} \cong \hat{P}$ e $\hat{C} \cong \hat{R}$, então o triângulo ABC é congruente ao triângulo PQR.

Vejamos a seguinte propriedade:

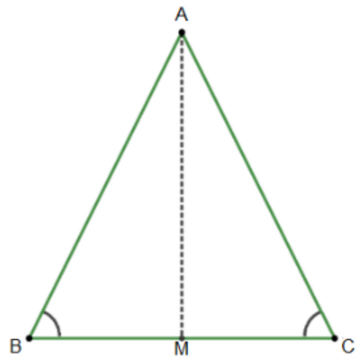
Em todo triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes

são também congruentes.

É possível, através do conhecimento de congruência, demonstrar essa importante propriedade. Mais uma vez trata-se de uma demonstração simples e possível de ser explorada já no Ensino Fundamental.

Demonstração 2.3.2. *Observe o triângulo ABC isósceles na Figura 2.19*

Figura 2.19: Ângulos da base do triângulo isósceles



Fonte: O autor, 2019

Vamos provar que $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Utilizaremos o segmento $\overline{AM}$, *que liga o vértice A ao ponto médio de* $\overline{BC}$ *(ponto M), e verificar que o triângulo ABM é congruente ao triângulo ACM.*

- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ *(por construção)*
- $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ *(M é ponto médio de* $\overline{BC}$*)*
- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ *(segmento comum dos triângulos ABM e ACM)*

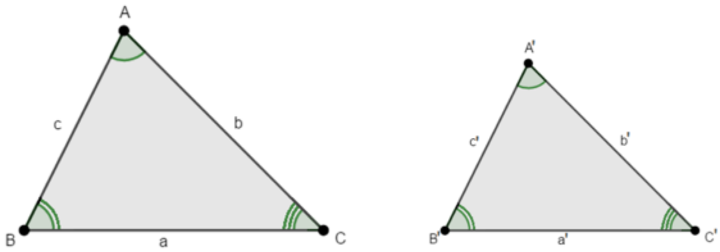
Assim, pelo caso LLL, podemos afirmar que os triângulos ABM e ACM são congruentes e, portanto, concluir que $\hat{B} \cong \hat{C}$. *Analogamente, e utilizando a mesma demonstração, o triângulo equilátero também é isósceles e terá os três ângulos congruentes, igual a* 60^o *cada um.*

2.3.4 Triângulos semelhantes

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Observe os triângulos ABC e $A'B'C'$ representados na Figura 2.20 abaixo.

Figura 2.20: Semelhança de triângulos



Fonte: O autor, 2019

Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, então indicamos assim: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Observação: Dois lados homólogos são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes.

Para os dois triângulos acima, os pares de lados homólogos são: a e a'; b e b'; c e c'.

$$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' = \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{A} \cong \hat{A}' \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \;\; \text{(constante de proporcionalidade)}}$$

Capítulo 3

O Teorema de Pitágoras

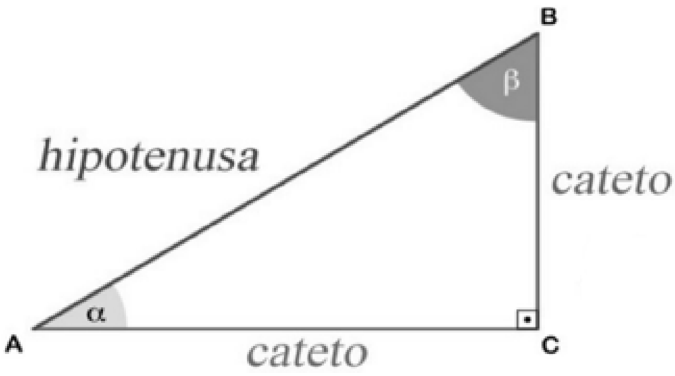
Este capítulo aborda o Teorema de Pitágoras. Inicialmente apresenta o Triângulo Retângulo, em seguida conta um pouco da vida e história de Pitágoras, figura importante que dá nome ao Teorema. O capítulo ainda aborda o contexto histórico deste teorema e enfatiza alguns tópicos e curiosidades importantes. Mas o momento mais importante desse capítulo está nas três demonstrações que escolhemos para apresentar e nas diversas aplicações que o teorema proporciona. Uma vez que existem inúmeras demonstrações, o capítulo vai abordar apenas três delas e, posteriormente, nas questões de aplicação, reforçamos com mais uma demonstração. As aplicações foram escolhidas de acordo com sua utilidade e importância em outros conteúdos do Ensino Básico.

No que se segue, toma-se como referência: [10], [11], [18] e [21].

3.1 O Triângulo Retângulo

Ao estudar geometria, uma figura geométrica plana muito importante aparece: o Triângulo Retângulo. (Figura 3.1). Ele se caracteriza por possuir um de seus ângulos retos e, consequentemente, dois ângulos agudos que somados medem 90^o pois a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo é igual a um ângulo de 180^o como visto anteriormente.

Figura 3.1: Triângulo retângulo

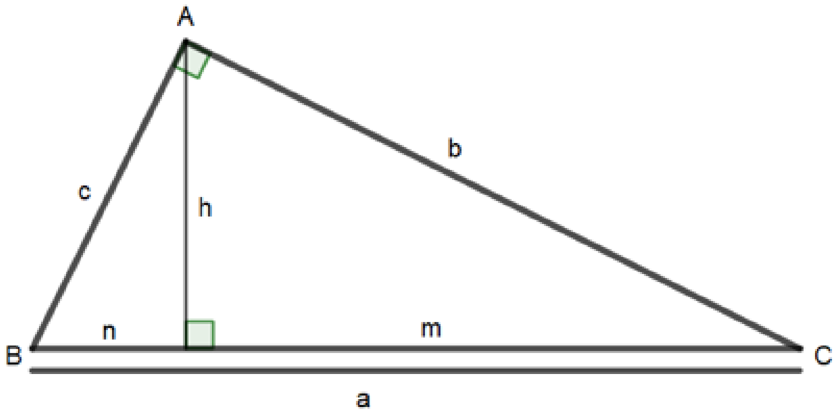


Fonte: [6]

São inúmeras as aplicações do triângulo retângulo na matemática e seu estudo e aprendizado torna-se indispensável no ensino básico. Por se tratar de tema transversal podemos citar sua presença no estudo de cálculo de áreas e volumes, cálculo algébrico, trigonometria, geometria analítica, plana, números complexos dentre outros.

No triângulo retângulo, conforme a Figura 3.2, temos quatro importantes elementos que o constitui. São eles:

Figura 3.2: Elementos do triângulo retângulo



Fonte: O autor, 2019

Hipotenusa (a)
Catetos $(b\, e\, c)$
Altura relativa à hipotenusa (h)
Projeções dos catetos $(n\, e\, m)$

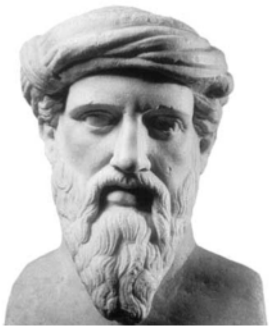
O maior lado de um triângulo retângulo é a hipotenusa que se encontra oposta ao ângulo reto. Já os catetos, são os dois menores lados que formam o ângulo reto (90°). A hipotenusa é dividida em duas partes, chamadas projeções dos catetos, e isso se dá por conta da altura traçada a partir do vértice oposto à hipotenusa.

Os triângulos retângulos nos são familiares – não apenas nas aulas de matemática. Existem profissionais como pedreiros e marceneiros que utilizam ferramentas de medição que são os triângulos retos. Arquitetos e engenheiros desenham utilizando como base triângulos retos. Embora o foco no triângulo retângulo seja o seu ângulo reto, um triângulo retângulo é constituído por seis partes: três ângulos e três lados. Em razão de suas muitas propriedades, teoremas e aplicações, o triângulo retângulo possui nomenclaturas especiais para seus elementos, o que não ocorre em nenhum outro triângulo.

A mais famosa das propriedades será abordada em seguida: O Teorema de Pitágoras, que utiliza apenas as medidas dos lados do triângulo retângulo. No entanto, esse estudo também fará referência à importância das medidas de seus ângulos. A ideia é explorar todos os elementos desse triângulo e, para isso, vamos utilizar algumas ferramentas da geometria como a semelhança para obter propriedades importantes, curiosas e muito utilizadas em medições indiretas, e da álgebra que servirá como auxílio para a comprovação de importantes relações matemáticas conhecidas.

3.2 Um pouco da vida de Pitágoras

Figura 3.3: Pitágoras



Fonte: [13]

Pitágoras de Samos (Figura 3.3) foi um grande filósofo grego do final do século VI a.C., principal responsável pelo surgimento da palavra matemática e sua concepção como um sistema de pensamento baseado em provas dedutivas e fundador da Escola Pitagórica que é reconhecida como a primeira universidade do mundo. Poucas informações são confiáveis sobre a vida e teorias de Pitágoras, pois grande parte das informações a seu respeito foram escritas muitos séculos após sua morte. O filósofo grego Aristóteles afirma que Pitágoras considerava a si mesmo um observador da natureza a qual, em sua ótica, era o propósito de sua existência.

De acordo com BOYER,

> "Pitágoras aprendeu Matemática com Tales, tornando-se, posteriormente, matemático, líder religioso, místico, sábio e filósofo. Como todos os documentos da época se perderam tudo o que sabemos veio de referências de outros autores que vieram séculos depois. Pitágoras esteve no Egito, na Babilônia, na Índia, lugares em que absorveu os conhecimentos matemáticos e as ideias religiosas de cada região" (BOYER, 1974).

Muitas descobertas matemáticas, astronômicas, musicais, médicas e científicas são atribuídas a Pitágoras, além, é claro, de um dos mais belos e significativos teoremas da Matemática, que ocupa um lugar muito especial na história do nosso conhecimento matemático: O Teorema de Pitágoras, que relaciona os lados do triângulo, provando que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

A autenticidade de muitos textos circulados sob o nome de Pitágoras é questionada ao ponto de não sabermos se foi o próprio Pitágoras que desenvolveu o teorema que tem o seu nome pela obscuridade de sua própria história marcada pela perda de todos os documentos daquela época. Para piorar ainda mais as coisas, a sua escola era secreta e comunitária, o que implicava que todas as descobertas pertenciam a todos. De acordo com Sir William Smith (Apud MACIEL), em seu Dictionaryof Greek and Roman Biography and Mithology de 1870, muitos dos desenvolvimentos atribuídos a Pitágoras na verdade seria produto dos trabalhos dos pitagóricos, descendentes intelectuais de Pitágoras, membros de sua escola. Pesquisadores questionam se de fato Pitágoras teria contribuído muito para a matemática e filosofia natural. Sabe-se no entanto que os números tinham grande importância para a sua filosofia e que ele foi o primeiro a utilizar o termo "filósofo" ou "amante da sabedoria".

Não se sabe exatamente qual a demonstração original, porém historiadores dizem ter sido alguma usando áreas.

Desde os tempos de Pitágoras muitas demonstrações do teorema em consideração foram dadas (Eves, 2011, p. 104). Em 1940, o matemático americano E. S. Loomis (Loomis, 1972), na segunda edição de seu livro, *The Pythagorean Proposition*, coletou e classificou não menos que 370 dessas demonstrações, mas ainda há mais.

Existem, porém, indícios do conhecimento dos babilônicos referente ao Teorema de Pitágoras. Hoje encontra-se em diversos museus, tabletes de barro, sendo o mais notado entre eles o Plimpton 322 que pode ser visto na Figura 3.4 e trata-se de um tablete da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Columbia, catalogada sob o número 322.

Foi conservado um pedaço deste o qual contém uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Ficou evidente que essa tabela possuía ternos pitagóricos (lados de um triângulo retângulo), cujas integrais (números inteiros positivos que satisfazem o teorema) mais conhecidas e simples são 3, 4 e 5. No tablete babilônico, no entanto, os valores são bem maiores, com a primeira linha, por exemplo, tabulando um triângulo com 119, 120 e 169 medidas de lado.

Figura 3.4: Plimpton 322

Fonte: [11, p.65]

Uma incógnita no entanto persiste no que tange saber como esses números foram encontrados uma vez que apenas um pedaço de um tablete que deveria fazer parte de um conjunto de tabletes. Pesquisadores do mundo todo tentam descobrir seu uso pelos babilônios. Agora, pesquisadores da Universidade de Nova Gales do Sul, da Austrália, acreditam ter resolvido o mistério de quase um século. Segundo o estudo, liderado por Daniel Mansfield e Norman Wildberger, da Universidade de New South Wales (UNSW), da Austrália, e publicado na revista científica Historia Mathematica no dia 24 de agosto de 2017, Plimpton 322 era uma poderosa ferramenta que pode ter sido usada para realizar levantamentos em áreas de construção ou para realizar cálculos arquitetônicos na construção de palácios, templos, canais e pirâmides, por exemplo", explicou Mansfield.

Mansfield leu sobre o mistério da "Plimpton 322" por acaso quando estava preparando material para estudantes de matemática do primeiro ano da universidade australiana. Ele e Wildberger decidiram então estudar a antiga matemática babilônica e examinar as diferentes interpretações históricas de sua finalidade depois de perceberem que ela tinha paralelos com um livro escrito por Wildberger, "Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry" (Proporções divinas: Da trigonometria racional à geometria universal, em tradução livre).

Ainda existem outras provas concretas de que os babilônicos conheciam uma maneira de encontrar esses números, ou seja, eless conheciam a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Segundo LIMA (2013, p. 72) não há nenhuma demonstração, naturalmente, pois isso ainda estava longe de ser uma preocupação dos matemáticos da época. Eles conheciam métodos de descrições que davam certo e, com eles, resolviam inúmeros problemas.

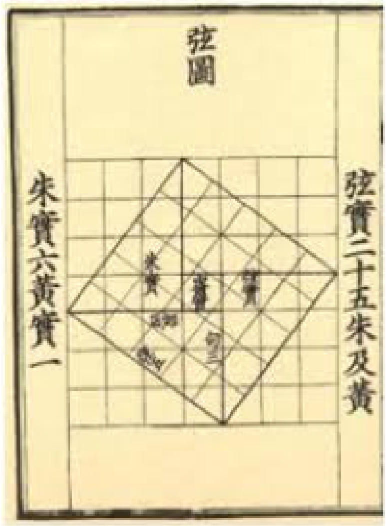
Outro tablete importante está no museu da Universidade de Yale. Conforme a Figura 3.5, este contém figuras: um quadrado e suas diagonais.

Figura 3.5: Tablete no museu da Universidade de Yale

Fonte: [24]

O Teorema de Pitágoras, também já era conhecido na China cerca de 600 anos antes de Pitágoras. O livro chinês *Zhoubi Suanjing* reuniu 246 problemas muito antigos, dentre eles o *Gou Gu* que é o equivalente chinês do teorema de Pitágoras, que se pode ver na Figura 3.6 abaixo.

Figura 3.6: Gou Gu



Fonte: [7]

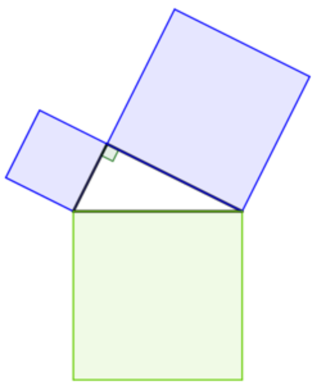
Nesta figura, temos uma demonstração do teorema utilizando áreas e estima-se que ela seja da disnatia Han, cerca de 1100 a.C.

3.2.1 Enunciando o Teorema de Pitágoras

Teorema 3.2.1. *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que tem como lados cada um dos catetos.*

Sabendo a, é a medida da hipotenusa e b e c, as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras afirma que $a^2 = b^2 + c^2$. Quando observamos a Figura 3.7, o Teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado azul é igual à soma das áreas dos quadrados amarelos. Certamente essa observação não é clara.

Figura 3.7: Teorema de Pitágoras



Fonte: O autor, 2019

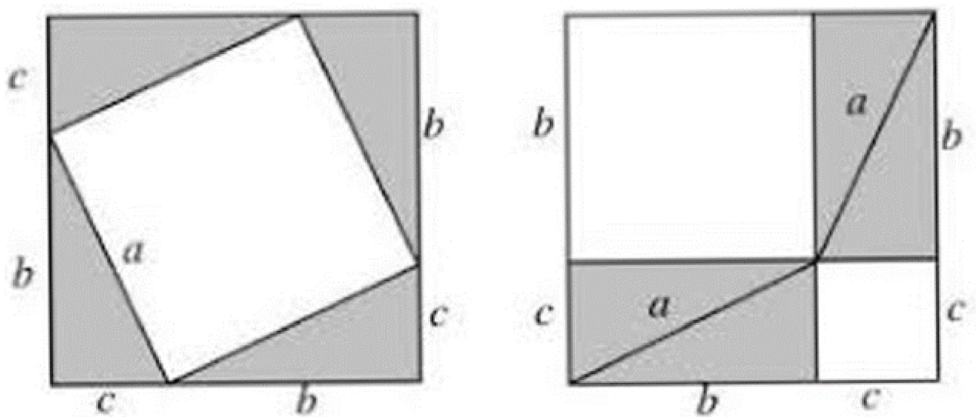
Por não ser clara, a ideia é apresentar essa provocação aos alunos e tentar provar esse enunciado de maneira interativa e divertida e com essa finalidade vamos apresentar algumas demonstrações.

3.3 Demonstrações

3.3.1 Demonstração Clássica

Na demonstração clássica, observamos um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, e um quadrado cujo lado mede b+c conforme a Figura 3.8 abaixo.

Figura 3.8: Demonstração Clássica



Fonte: [18, p. 75]

Note que os dois quadrados possuem mesma área pois ambos possuem lados iguais e que medem $b + c$. Dessa forma vamos comparar as duas áreas:

$$\text{Área 1=Área 2}$$

$$a^2 + 4 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{2}\right) = b^2 + c^2 + b \cdot c + b \cdot c$$

$$a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Por outro lado, manipulando a figura da esquerda e retirando do quadrado de lado $b + c$ quatro triângulos iguais ao dado, restará um quadrado de lado a. Na figura da direita, retiramos também do quadrado de lado $b + c$ os quatro triângulos iguais ao dado, restarão dois quadrados: um de lado b e outro de lado c. Logo, a área do quadrado de lado a é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem b e c.

Essa simples e engenhosa demonstração pode ter sido a que os pitagóricos imaginaram. É possível utilizar softwares matemáticos disponíveis como o GeoGebra, Cabri Geometre II, dentre outros e tornar demonstração mais dinâmica. Além disso a utilização desses softwares pode contribuir de forma elucidativa, além de divertida, no convencimento da veracidade do Teorema.

3.3.2 Demonstração por semelhança de triângulos

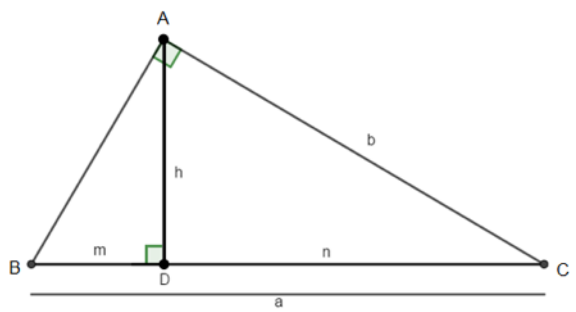
Nas salas de aula e nos livros didáticos esse tem sido o método mais frequente para provar o Teorema de Pitágoras. Inclusive a BNCC através da habilidade EF09MA13 já menciona essa demonstração no Ensino Fundamental para os alunos do 9º ANO. Isso se dá principalmente por conta de que através desse método, utilizando a semelhança de triângulos, é possível encontrar também as relações métricas do triângulo retângulo.

Para isso, vamos verificar as relações métricas.

Relações métricas no triângulo retângulo

Consideremos um triângulo ABC, retângulo em A, e o segmento $\overline{AD}$ perpendicular ao lado $\overline{BC}$, com D em $\overline{BC}$, conforme Figura 3.9.

Figura 3.9: Relações métricas nos triângulo retângulo



Fonte: O autor, 2019

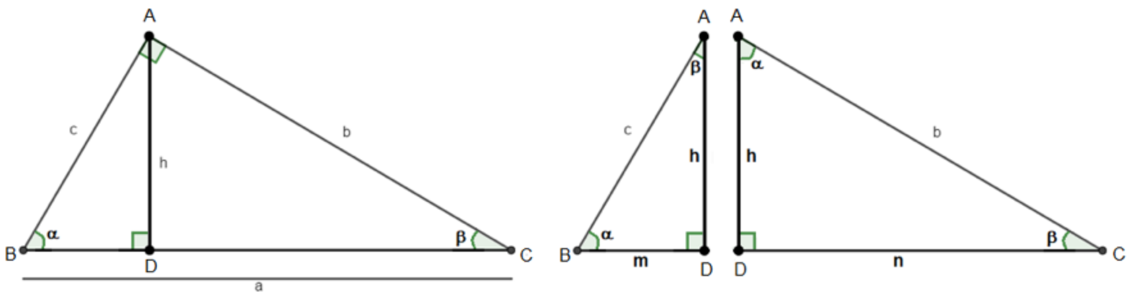
Ficam definidos os seguintes segmentos no triângulo ABC.

- $\overline{BC}$: hipotenusa (medida a)
- $\overline{AC}$: cateto (medida b)

- $\overline{AB}$: cateto (medida c)
- $\overline{BD}$: projeção do cateto AB sobre a hipotenusa (medida m)
- $\overline{CD}$: projeção do cateto AC sobre a hipotenusa (medida n)
- $\overline{AD}$: altura relativa à hipotenusa (medida h)

A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC o divide em dois triângulos retângulos semelhantes a ele e semelhantes entre si como podemos observar na Figura 3.10:

Figura 3.10: Semelhança no triângulo retângulo



Fonte: O autor, 2019

Como os três triângulos têm todos os ângulos congruentes, podemos afirmar que são todos semelhantes. Dessa forma, $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$.

Da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DBA$, podemos concluir que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{BA} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow \ c^2 = am \tag{3.1}$$

Da semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle DAC$, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{AC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow \ ah = bc \tag{3.2}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow \ b^2 = an \tag{3.3}$$

Da semelhança entre $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$, podemos concluir que:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow \ h^2 = mn \tag{3.4}$$

É fácil observar que, somando membro a membro 3.1 e 3.3, teremos:

$$c^2 = am$$

$$b^2 = an$$

$$b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow \; b^2 + c^2 = a\,(m+n) \Rightarrow \; b^2 + c^2 = a \cdot a \Rightarrow$$

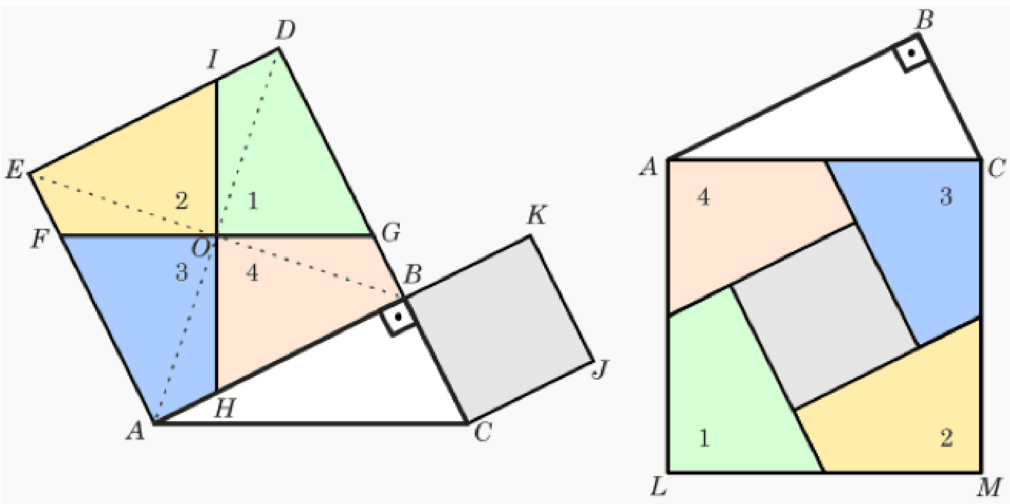
$$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \tag{3.5}$$

As igualdades (3.1) a (3.5) são chamadas de relações métricas no triângulo retângulo. Além das duas que deram origem à demonstração do Teorema de Pitágoras (3.5), obtemos ainda a relação $bc = ah$, que também se interpreta com o conceito de área, e $h^2 = mn$, que revela o importante fato que a altura é média geométrica entre as projeções dos cateto sobre a hipotenusa.

3.3.3 Demonstração de Perigal

Henry Perigal, em 1873, publicou em Londres a demonstração que vamos apreciar na Figura 3.11.

Figura 3.11: RDemonstração de Perigal



Fonte: [17]

Encontra-se nesse modelo, a forma mais clara de provar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenche o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Para isso, corta-se o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruentes. Essas quatro partes e mais o quadrado construído sobre o menor cateto preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa.

A figura é muito bela, e devemos provar que a região que fica no interior do quadrado maior é realmente congruente com o quadrado menor.

A demonstração de Perigal se torna muito didática e interessante quando utilizamos recursos tecnológicos para manipulamos o preenchimento do quadrado construído sobre a hipotenusa. No *GeoGebra*, por exemplo, é possível ampliar e diversificar essa interação pois podemos alterar o tamanho do triângulo retângulo generalizando a ideia para o aluno.

3.3.4 Ternos Pitagóricos

Encontrar triângulos retângulos cuja medida de seus lados seja representada por números inteiros, pode ser uma boa maneira de despertar uma problemática em sala de aula. E esse terno de números inteiros, cujos termos são lados de um triângulo retângulo, é chamado terno pitagórico. Por exemplo, sabemos os números 3, 4 e 5, representam os lados de um triângulo retângulo. Agora, será que um triângulo de lados 319, 360 e 481 também é retângulo? A resposta é sim. Este é, inclusive, um dos ternos pitagóricos inscritos, em nossa notação decimal, no tablet $Plimpton322$. Existe algum mecanismo prático para encontrar ternos pitagóricos?

Sendo a, b e c inteiros positivos com $a > b$ e $a > c$ dizemos que $(b,\ c,\ a)$ é um terno pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$.

Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um terno pitagórico é a unidade, então esse terno é chamado primitivo. Dessa forma, $(3,\ 4,\ 5)$ e $(5,\ 12,\ 13)$, são exemplos de ternos pitagóricos, e o terno $(6,\ 8,\ 10)$ não é. É verdade que qualquer terno da forma $(3k,\ 4k,\ 5k)$ com k inteiro e maior que 1 é também pitagórico, mas não primitivo.

Muitos séculos depois do tablete de Plimpton 322, os gregos mostraram que todos os ternos pitagóricos primitivos $(b,\ c,\ a)$ são dados parametricamente por:

$$b = u^2 - v^2, \; c = 2uv, \; a = u^2 + v^2$$

Onde u e v são primos entre si, um é par e o outro é ímpar, com $u > v$: Veja que $(b, \; c, \; a)$ é um terno pitagórico pois:

$$b^2 + c^2 = \left(u^2 - v^2\right)^2 + (2uv)^2$$

$$b^2 + c^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2$$

$$b^2 + c^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4$$

$$b^2 + c^2 = \left(u^2 + v^2\right)^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Dessa forma, para qualquer escolha de números inteiros u e v, o terno $(b, \; c, \; a)$ é pitagórico. Por exemplo, para $m = 9$ e $n = 8$ encontramos o terno pitagórico $(17, \; 144, \; 145)$.

Os primeiros ternos pitagóricos primitivos são $(3, \; 4, \; 5)$, $(5, \; 12, \; 13)$, $(7, \; 24, \; 25)$, $(8, \; 15, \; 17)$, $(9, \; 40, \; 41)$, $(11, \; 60, \; 61)$, $(12, \; 35, \; 37)$, $(13, \; 84, \; 85)$, $(16, \; 63, \; 65)$, $(20, \; 21, \; 29)$, ... A seguir vamos reproduzir os números, em nossa notação decimal, do tablete de Plimpton 322. Vamos supor o cálculo do outro cateto b (coluna comprometida do tablete) dos triângulos retângulos de lados inteiros determinados pela hipotenusa a e o cateto c. Encontra-se os seguintes ternos pitagóricos na Tabela 3.1 que se segue:

Tabela 3.1: Ternos Pitagóricos de Plimpton 322

b	c	a	u	v
120	119	169	12	5
3 456	3 367	4 825	64	27
4800	4 601	6 649	75	32
13 500	12 709	18 541	125	54
72	65	97	9	4
360	319	481	20	9
2 700	2 291	3 541	54	25
960	799	1 249	32	15
600	481	769	25	12
6480	4 961	8 161	81	40
60	45	75	2	1
2 400	1 679	2 929	48	25
240	161	289	15	8
2 700	1 771	3 229	50	27
90	56	106	9	5

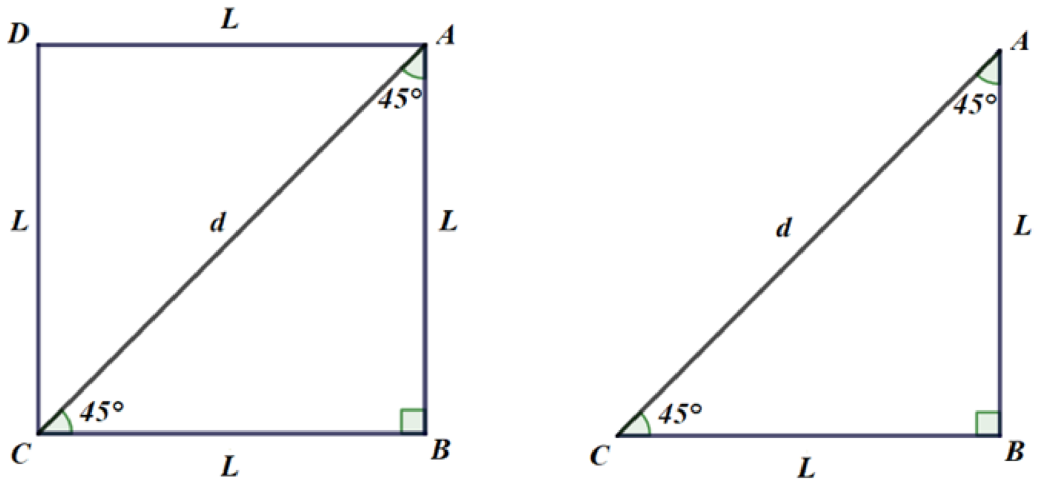
Fonte: O autor, 2019

3.4 Aplicações do Teorema de Pitágoras

3.4.1 Diagonal do quadrado

Vamos considerar um quadrado $ABCD$ (Figura 3.12) cujo lado mede L.

Figura 3.12: Diagonal do quadrado



Fonte: O autor, 2019

Para calcular a diagonal d do quadrado em função do lado L vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC.

$$d^2 = L^2 + L^2$$

$$d^2 = 2L^2$$

$$d = \sqrt{2L^2}$$

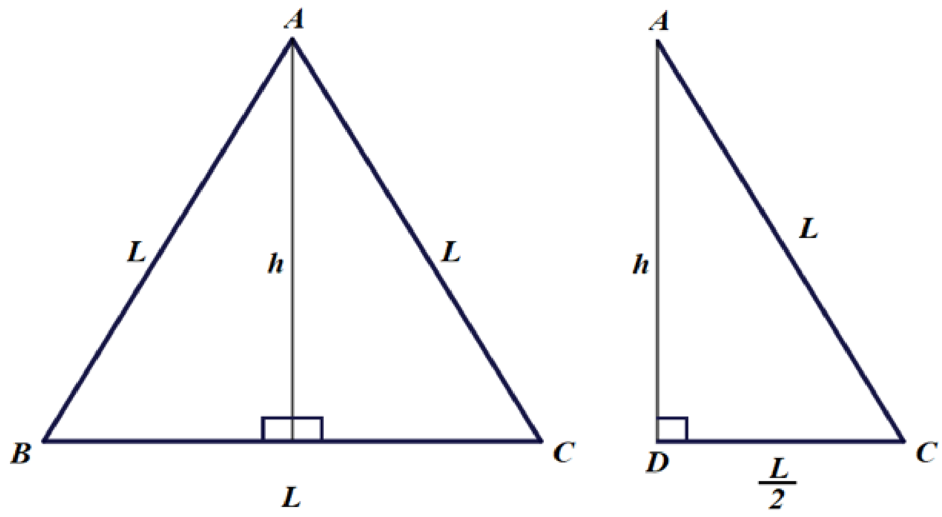
$$d = L\sqrt{2}$$

Logo, a diagonal de um quadrado de lado L mede sempre $d = L\sqrt{2}$.

3.4.2 Altura de um Triângulo Equilátero

Vamos considerar um triângulo equilátero ABC, representado na Figura 3.13, de lado L e altura h. Vamos obter uma fórmula para encontrar a altura de um triângulo equilátero em função de L.

Figura 3.13: Altura do triângulo equilátero



Fonte: O autor, 2019

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACD acima, temos:

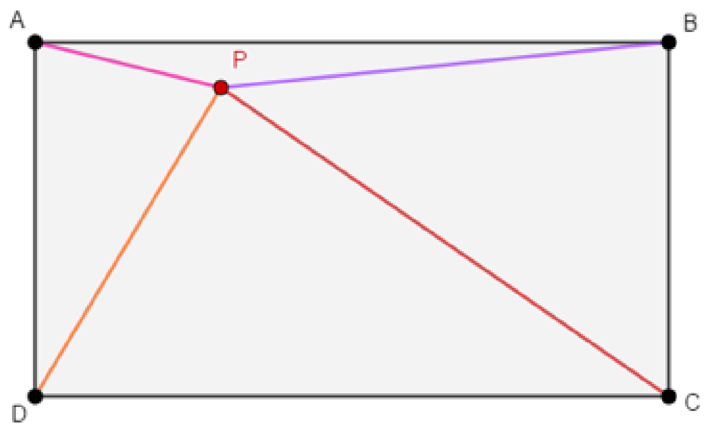
$$
\begin{array}{r|l}
L^2 = \left(\dfrac{L}{2}\right)^2 + h^2 & h^2 = \dfrac{3L^2}{4} \\
L^2 = \dfrac{L^2}{4} + h^2 & h = \sqrt{\dfrac{3L^2}{4}} \\
h^2 = L^2 - \dfrac{L^2}{4} & h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2} \\
h^2 = \dfrac{4L^2 - L^2}{4} &
\end{array}
$$

Logo, a altura de um triângulo equilátero de lado L mede sempre $h = \dfrac{L\sqrt{3}}{2}$.

3.4.3 Uma propriedade dos retângulos

Uma aplicação interessante do teorema de Pitágoras acontece no retângulo e serve para resolver alguns problemas com quadriláteros. Na verdade, vamos provar um outro teorema utilizando triângulos retângulos. Considere um retângulo $ABCD$, e em seu interior vamos tomar um ponto P conforme Figura 3.14:

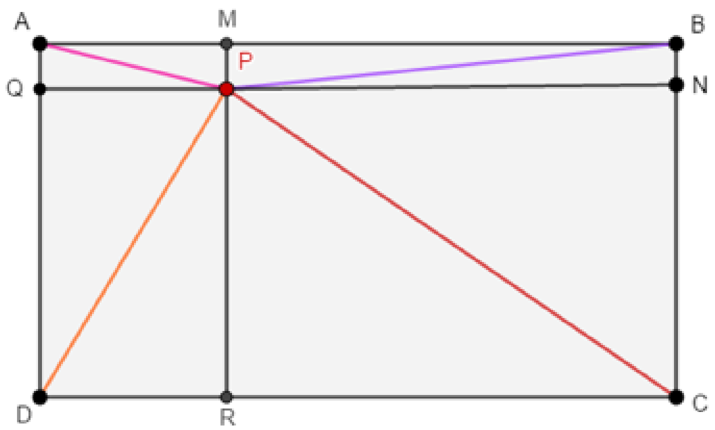
Figura 3.14: Retângulo $ABCD$



Fonte: O autor, 2019

Vamos mostrar que $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$. Para isso, traçamos uma linha perpendicular ao lado AB passando por P e uma linha perpendicular ao lado AB passando por P. Dessa forma dividimos o nosso retângulo $ABCD$ em quatro retângulos menores conforme Figura 3.15:

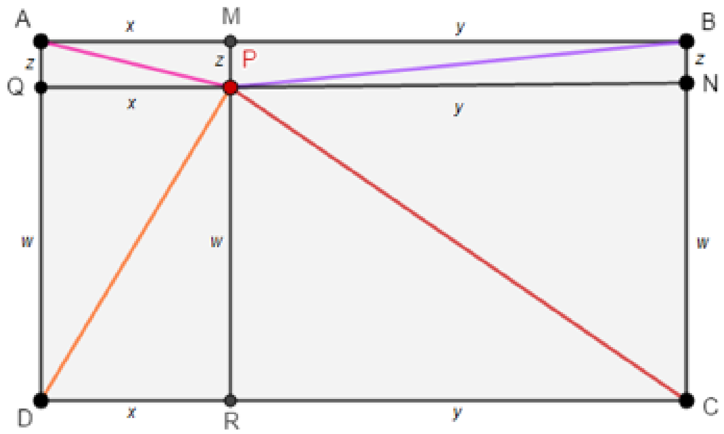
Figura 3.15: Retângulo $ABCD$



Fonte: O autor, 2019

Vamos então chamar AM de x. Logo, QP e BR também possuem medida x, pois $AM = QP = BR$. Igualmente chamaremos MB de y, então PN e RC também possuem medida y, pois $MB = PN = RC$. Da mesma forma, $AQ = MP = BN = z$ e $QD = PR = NC = w$. Observe a Figura 3.16:

Figura 3.16: Retângulo $ABCD$



Fonte: O autor, 2019

Os triângulos APQ, BPN, PCR e DPR são todos retângulos e PA, PB, PC e PD suas respectivas hipotenusas. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos quatro triângulos temos:

$$\overline{PA}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{AQ}^2$$
$$\overline{PA}^2 = x^2 + z^2$$

$$\overline{PB}^2 = \overline{PN}^2 + \overline{BN}^2$$
$$\overline{PB}^2 = y^2 + z^2$$

$$\overline{PC}^2 = PN^2 + \overline{NC}^2$$
$$\bar{P}C^2 = y^2 + w^2$$

$$\overline{PD}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{QD}^2$$
$$\overline{PD}^2 = x^2 + w^2$$

Logo,

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \; e \; \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

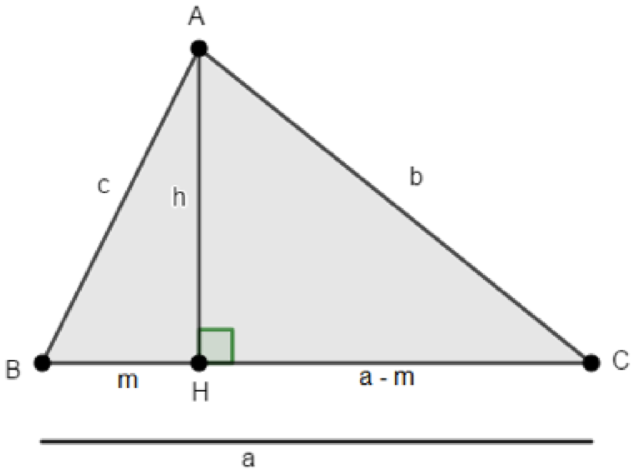
Concluímos então que,

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2.$$

3.4.4 A fórmula de Herão

Nesta aplicação do Teorema de Pitágoras, vamos calcular a altura de um triângulo conhecendo os seus lados. Consequentemente, poderemos achar a sua área. Para isso, vamos considerar um triângulo ABC, de altura h, conforme Figura 3.17 abaixo:

Figura 3.17: Triângulo ABC



Fonte: O autor, 2019

Ao traçarmos a altura h relativa ao lado BC obtemos dois triângulos retângulos: BHA e AHC. Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo BHA:

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + m^2 \\ h^2 &= c^2 - m^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$m^2 = c^2 - h^2 \tag{3.7}$$

Agora, vamos aplicar o Teorema de Pitágoras no segundo triângulo retângulo AHC:

$$b^2 = h^2 + (a-m)^2$$

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2 \therefore Usando\ 3.6$$

$$2am = a^2 + c^2 - b^2$$

$$(2am)^2 = \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2$$

$$4a^2m^2 = \left(a^2 + c^2 - b^2\right)^2$$

Agora, utilizando 3.7 temos:

$$4a^2\left(c^2-h^2\right)=\left(a^2+c^2-b^2\right)^2$$
$$4a^2c^2-4a^2h^2=\left(a^2+c^2-b^2\right)^2$$
$$4a^2h^2=(2ac)^2-\left(a^2+c^2-b^2\right)^2$$
$$4a^2h^2=\left(2ac+a^2+c^2-b^2\right)\left(2ac-a^2-c^2+b^2\right)$$
$$4a^2h^2=\left(\left(a^2+2ac+c^2\right)-b^2\right)\left(b^2-\left(a^2-2ac+c^2\right)\right)$$
$$4a^2h^2=\left((a+c)^2-b^2\right)\left(b^2-(a-c)^2\right)$$
$$4a^2\ h^2=[(a+c+b)(a+c-b)][(a+b-c)(b+c-a)]\therefore\sqrt{}\ 2\ membros$$
$$2ah=\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}$$

Vamos agora considerar que o perímetro do triângulo é igual a $2p$. Daí temos:

$$a+b+c=2p\ \left|\ \begin{array}{c}a+c-b=2p-2b\\ a+c-b=2(p-b)\end{array}\right|\ \begin{array}{c}a+b-c=2p-2c\\ a+b-c=2(p-c)\end{array}\ \left|\ \begin{array}{c}b+c-a=2p-2a\\ b+c-a=2(p-a)\end{array}\right.$$

Assim, dando continuidade, teremos:

$$2ah=\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}$$
$$2ah=\sqrt{2p2(p-b)2(p-c)2(p-a)}$$
$$2ah=\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h=\frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2a}\ \therefore\ h=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Observe que a área do triângulo considerado pode ser obtida pela expressão $A=\frac{a}{2}h$. Então, substituindo h pelo que encontramos anteriormente teremos:

$$A=\frac{a}{2}h$$
$$A=\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\therefore\text{Onde } p \text{ é o semiperímetro}$$

3.4.5 Aplicações na Geometria Espacial

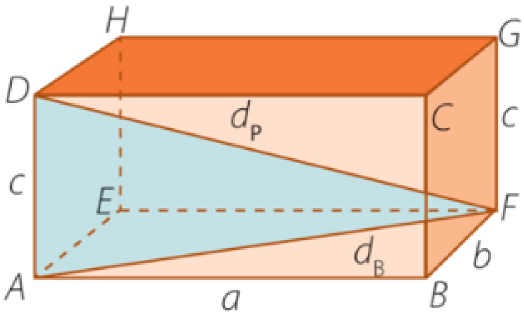
Na Geometria espacial, aplicações do Teorema de Pitágoras facilitam a resolução de alguns problemas e simplificam alguns cálculos gerando algumas fórmulas e relações matemáticas.

Nos Poliedros, temos aplicações nos prismas (cubo e paralelepípedo) e na pirâmide regular. Nos corpos redondos temos aplicações no cone e na esfera. Veremos em seguida essas aplicações.

Cubo e Paralelepípedo

O Teorema de Pitágoras é utilizado para conhecer as diagonais de um paralelepípedo. Observe o paralelepípedo da Figura 3.18 abaixo:

Figura 3.18: Paralelepípedo



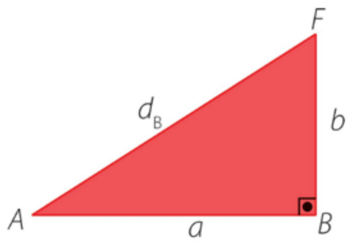
Fonte: [10, p. 14]

Da Figura 3.18 acima está indicada a diagonal da base inferior (d_B), que, levando-se em consideração o triângulo retângulo ABF, o qual destacamos na Figura 3.19, pode ser calculada da seguinte forma:

Figura 3.19: Diagonal da base (paralelepípedo)

$$d_B{}^2 = a^2 + b^2$$

$$d_B = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Fonte: [10, p. 14]

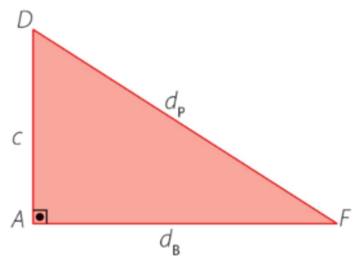
Ao conhecer a diagonal da base, a diagonal do paralelepípedo (d_P) pode ser calculada levando-se em consideração o triângulo ADF, destacado na Figura 3.20, em que:

$$d_P{}^2 = d_B{}^2 + c^2$$

$$d_P{}^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d_P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

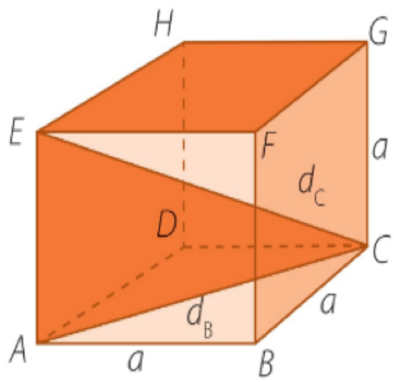
Figura 3.20: Diagonal do paralelepípedo



Fonte: [10, p. 15]

As diagonais do cubo também podem são calculadas de forma semelhante ao que foi feito antes no paralelepípedo. Levaremos em consideração o fato de que todas as suas arestas são congruentes e destacaremos na Figura 3.21 os triângulos retângulos ACE e ABC.

Figura 3.21: Diagonais do cubo



Fonte: [10, p. 15]

$$d_B{}^2 = a^2 + a^2$$

$$d_B{}^2 = 2a^2$$

$$d_B = \sqrt{2a^2}$$

$$d_B = a\sqrt{2}$$

$$d_C{}^2 = d_B{}^2 + a^2$$

$$d_C{}^2 = 2a^2 + a^2$$

$$d_C{}^2 = 3a^2$$

$$d_C = \sqrt{3a^2}$$

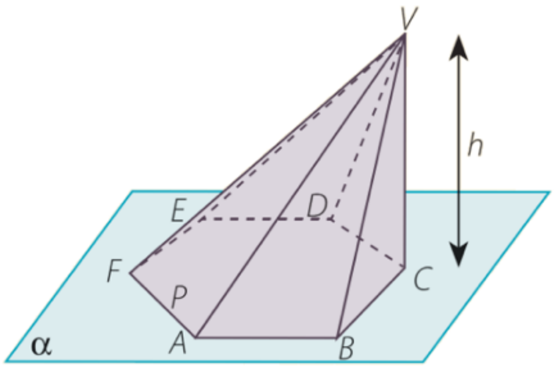
$$c = a\sqrt{3}$$

Pirâmide

O estudo da pirâmide, importante poliedro, que nos remetem às magníficas construções egípcias pode se tornar muito mais simples quando se tem noção de aplicabilidade do Teorema de Pitágoras.

Antes então, para definir uma pirâmide, considere um polígono (P) em um plano α e um ponto (V) fora desse plano. Um pirâmide será formada pelo conjunto de segmentos com uma extremidade em um ponto de P e outra em V conforme Figura 3.22 que se segue:

Figura 3.22: Pirâmide

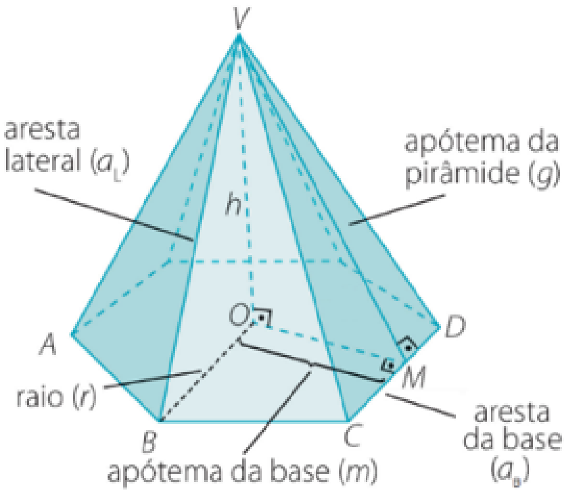


Fonte: [10, p. 21]

De uma forma geral, a pirâmide mais estudada e a que será objeto de nossa aplicação será a pirâmide regular. Essa forma peculiar da pirâmide torna a aplicabilidade do Teorema de Pitágoras mais eficiente pois evidencia todos os elementos que a constitui facilitando assim as resoluções de problemas.

As pirâmides regulares têm base constituída por um polígono regular onde todas as suas faces laterais são congruentes e sua altura (h) coincide com o centro geométrico do polígono da base (centro da circunferência circunscrita ao polígono). Além disso, todas as faces são triângulos isósceles cuja altura é chamada de apótema da pirâmide (vamos denominar g). A relação entre o raio da circunferência circunscrita (denominaremos r) e o segmento que liga, perpendicularmente, o centro geométrico do polígono de base (O) a uma de suas arestas (a_l) é denominada de apótema da base (denominaremos m). Observe todos esses elementos destacados na Figura 3.23 a seguir.

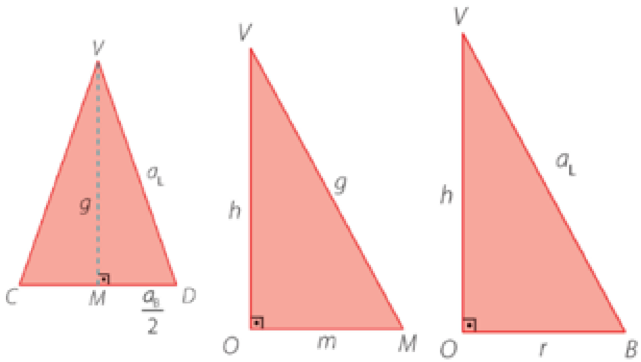
Figura 3.23: Elementos da pirâmide regular



Fonte: [10, p. 21]

Observe que, os apótemas (g e m) ficam na metade das arestas de base (a_B). Vamos destacar três triângulos retângulos (Figura 3.24), VCD, VOM e VOB, para aplicar o Teorema de Pitágoras.

Figura 3.24: Triângulos destacados da pirâmide



Fonte: [10, p. 21]

1. No triângulo VCD, temos:

$$a_L{}^2 = \left(\frac{a_B}{2}\right)^2 + g^2$$

2. No triângulo VOM, temos:

$$g^2 = h^2 + m^2$$

3. No triângulo VOB, temos:

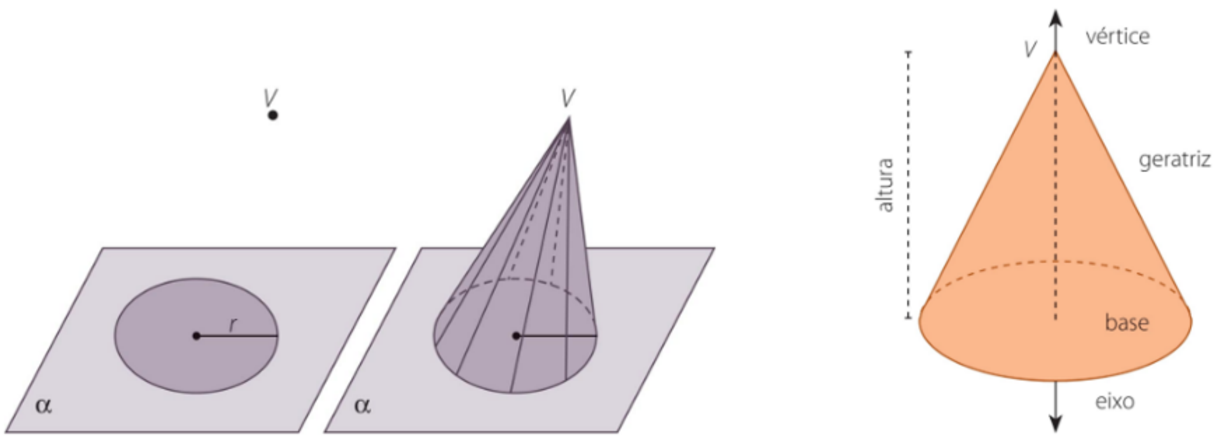
$$a_L{}^2 = r^2 + h^2$$

Observe que essas três relações obtidas através da aplicação do Teorema de Pitágoras citam todos os elementos da pirâmide, o que facilita a solução de muitos problemas presentes nos livros didáticos e nas avaliações escolares.

Cones

Na Figura 3.25 podemos verificar que a definição de cone é semelhante à definição de pirâmide. Considere um círculo de raio r em um plano α e um plano V fora desse plano. Assim, chamamos de cone o conjunto de todos os segmentos que tenham uma extremidade no círculo e outra extremidade no ponto V. Em um cone, sua altura é a distância entre o ponto V e o plano α. Também são importantes as geratrizes, segmentos que ligam o vértice a algum ponto da circunferência. No caso de um cone reto, objeto de nosso estudo, as geratrizes são todas iguais.

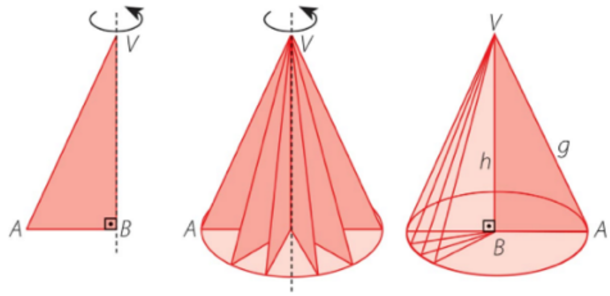
Figura 3.25: Cone



Fonte: [10, p. 37]

Assim como a pirâmide, o formato peculiar do cone facilita a visibilidade do triângulo retângulo e, consequentemente, a aplicação do Teorema de Pitágoras. Um cone reto pode ser obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos. Por esse motivo, é chamado de cone de revolução. Observe a Figura 3.26:

Figura 3.26: Cone de revolução



Fonte: [10, p. 37]

Observe que é absolutamente claro obtermos uma relação entre a altura (h), a geratriz (g) e o raio (r) aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo destacado na figura acima. Dessa forma, temos:

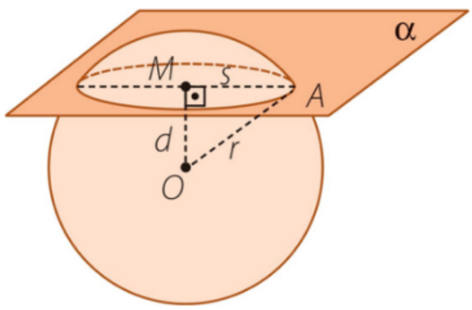
$$g^2 = h^2 + r^2$$

Temos então, mais uma contribuição atribuído ao Teorema De Pitágoras.

Esfera

A esfera é um dos corpos redondos mais comuns. A bola, por exemplo, é bastante utilizada no mundo dos esportes. Uma superfície esférica é formada pelo conjunto de pontos que têm a mesma distância (r) de um centro (O). O nosso objetivo de estudo na esfera, no entanto, será a seção esférica onde o triângulo retângulo aparece. Todas as vezes que secionamos um esfera, não importando a maneira, obtemos um círculo de raio menor ou igual ao raio r da esfera. Observe a figura na Figura 3.27:

Figura 3.27: Seção esférica



Fonte: [10, p. 43]

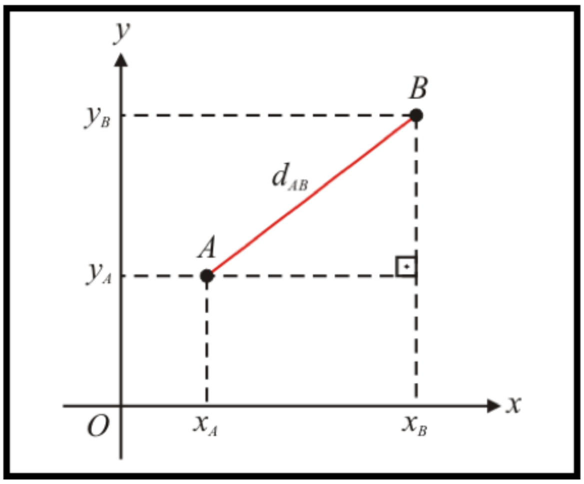
Nesse caso, devemos atentar para o triângulo OMA onde aplicamos o Teorema de Pitágoras. Assim, concluímos que:

$$r^2 = d^2 + s^2$$

Aplicações na Geometria Analítica

Na geometria analítica, utilizamos o plano cartesiano para associar pontos às coordenadas cartesianas. E é fundamental buscar uma maneira de calcular a distância entre dois pontos quaisquer. Praticamente todo o estudo de geometria analítica exige do aluno a habilidade em calcular a distância entre dois pontos no plano e mais uma vez o Teorema de Pitágoras surge como mecanismo facilitador que gera uma fórmula bastante conhecida no estudo de G.A. (Geometria Analítica). É importante salientar que a aplicação do teorema desobriga ao aluno decorar fórmulas. Basta apenas que trabalhe com o triângulo retângulo que pode ser facilmente destacado no plano. Para isso, vamos tomar, inicialmente, dois pontos genéricos, $A\left(x_A, y_A\right)$ e $B\left(x_B, y_B\right)$, no plano abaixo representado pela Figura 3.28.

Figura 3.28: Plano cartesiano



Fonte: [16]

Para descobrir a distância entre A e B, primeiramente, é preciso perceber que as distâncias de A para C $(d_{A,C})$ e de B para C $(d_{B,C})$ podem ser obtidas por $d_{A,C} = x_B - x_A$ e $d_{B,C} = y_B - y_A$. Agora basta aplicarmos o Teorema de Pitágoras sobre o triângulo ABC:

$$d_{A,B}^2 = d_{A,C}^2 + d_{B,C}^2$$

$$d_{A,B}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y)^2$$

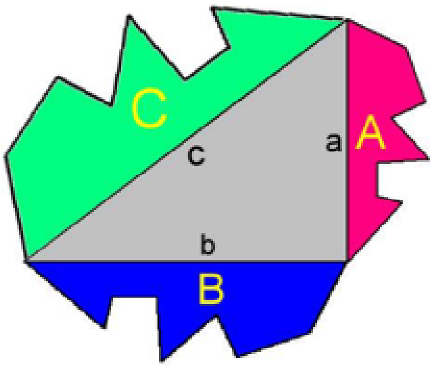
Portanto,

$$d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y)^2}$$

3.4.6 Generalização do Teorema de Pitágoras

Sabemos que o teorema de Pitágoras afirma que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo será sempre igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Agora, será que o teorema é válido para figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados de um triângulo retângulo? Observe na Figura 3.29:

Figura 3.29: Generalização do Teorema de Pitágoras



Fonte: [23]

Sejam então A, B e C as áreas das figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa a e sobre os catetos b e c de um triângulo retângulo como mostra a figura. Sabemos que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Então:

$$\frac{C}{A} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{C}{A} = \frac{c^2}{a^2}$$
$$\frac{B}{A} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{B}{A} = \frac{b^2}{a^2}$$

Somando ambos os membros temos:

$$\frac{B+C}{A} = \frac{b^2+c^2}{a^2} \therefore \text{ como } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{B+C}{A} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = 1$$

Logo, concluímos que $A = B + C$. Podemos então afirmar que, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas construídas sobre os catetos. Esta é a primeira generalização do Teorema de Pitágoras.

Capítulo 4

Trigonometria no triângulo retângulo

Sabe-se que, por volta do ano 140 a.C., o grego Hiparco de Niceia – considerado o maior astrônomo do mundo – relacionou os lados e os ângulos de um triângulo retângulo e elaborou, pela primeira vez na história da humanidade, o equivalente ao que hoje é uma tabela com valores trigonométricos dos ângulos 0^o a 90^o.

Já no século II, o astrônomo e geógrafo grego Ptolomeu (85-165) estabeleceu em sua obra Almagesto novas proposições trigonométricas. Ele elaborou uma tabela de cordas correspondente a ângulos de 0^o a 180^o, ordenadas crescentemente, que é equivalente a uma tabela de senos, um dos conceitos centrais da Trigonometria. Nessa obra, Ptolomeu apresentou também a teoria geocêntrica, que se manteve por cerca de 1 500 anos.

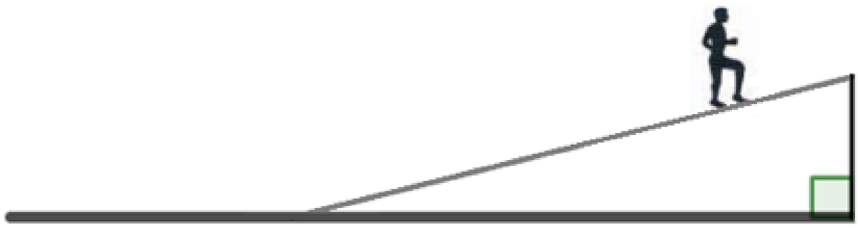
Povos árabes, que tiveram acesso ao Almagesto, divulgaram na Europa os conhecimentos sobre Astronomia e Trigonometria. Depois disso, importantes trabalhos hindus versando sobre a Trigonometria foram traduzidos para o árabe, no final do século VIII, mas o primeiro tratado sistemático sobre o tema foi elaborado pelo matemático alemão Johann Muller (1436-1476), em sua obra De triangulis (Tratado dos triângulos).

Além de resolver problemas de Astronomia e possibilitar a medida de distâncias inacessíveis, a Trigonometria atualmente é empregada em várias áreas da ciência e da tecnologia, que não teriam prosperado sem seus fundamentos, como a Eletricidade, a Mecânica, a Engenharia e a Topografia. Seus conceitos são a base da matemática para o estudo de fenômenos periódicos, como a vibração do som.

Neste capítulo algumas razões entre lados de um triângulo retângulo são o alicerce da trigonometria. As aplicações são inúmeras e contribuem muito para o estudo posterior de diversos conteúdo por isso é de suma importância para a formação matemática dos alunos.

É interessante iniciarmos esse conceito com uma problemática clássica comum ao ambiente escolar quando se inicia o estudo de trigonometria. Vejamos um exemplo de uma situação que envolve lados e ângulos de um triângulo supondo uma pessoa que sobe uma rampa. Observe a Figura 4.1:

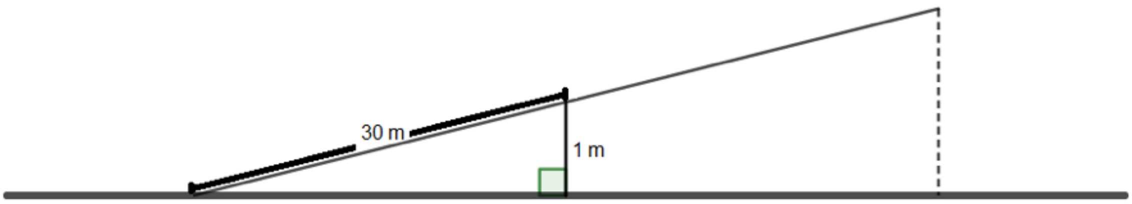
Figura 4.1: Rampa



Fonte: O autor, 2019

Ao subir essa rampa, se a pessoa faz um percurso de 30 m, seu deslocamento na vertical (altura em relação ao solo) será de 1 m conforme Figura 4.2.

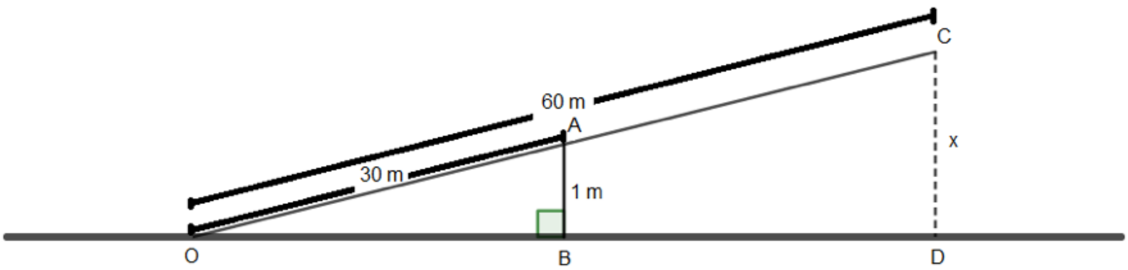
Figura 4.2: Rampa



Fonte: O autor, 2019

Observe agora a Figura 4.3. Será que é possível descobrir a altura na vertical se a pessoa fizer um percurso de 60 m?

Figura 4.3: Rampa



Fonte: O autor, 2019

Observe que na Figura 4.3 que os triângulos OAB e OCD são semelhantes, então temos que:

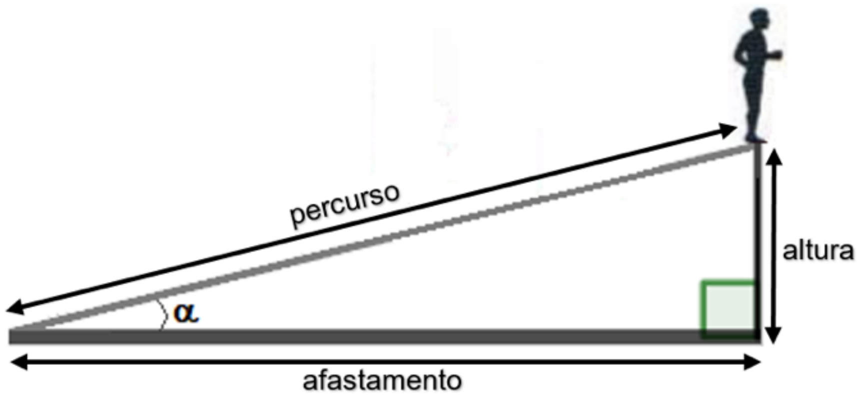
$$\frac{1}{30} = \frac{x}{60} \Rightarrow \ x = 2$$

.

Dessa forma, num percurso de 60 metros, o deslocamento da pessoa na vertical (altura em relação ao solo) será de 2 m.

Observe que é possível também relacionar o afastamento com o percurso sobre a rampa ou ainda relacionar os deslocamentos na vertical e o afastamento, ou seja, observe na Figura 4.4 que essa situação problema relaciona as medidas de um triângulo retângulo que estão representadas no problema como percurso, afastamento e altura.

Figura 4.4: Rampa



Fonte: O autor, 2019

Em qualquer subida podemos determinar a razão entre a altura e o percurso, que será um número indicado por k_1, ao qual chamaremos de $\operatorname{sen}\alpha$.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{altura}{percurso}$$

Em qualquer subida podemos determinar a razão entre o afastamento e o percurso, que será um número indicado por k_2, ao qual chamaremos de $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{afastamento}{percurso}$$

Em qualquer subida podemos ainda determinar a razão entre a altura e o afastamento, que será um número indicado por k_3. Usaremos então a palavra tangente para associar essa razão à medida do ângulo.

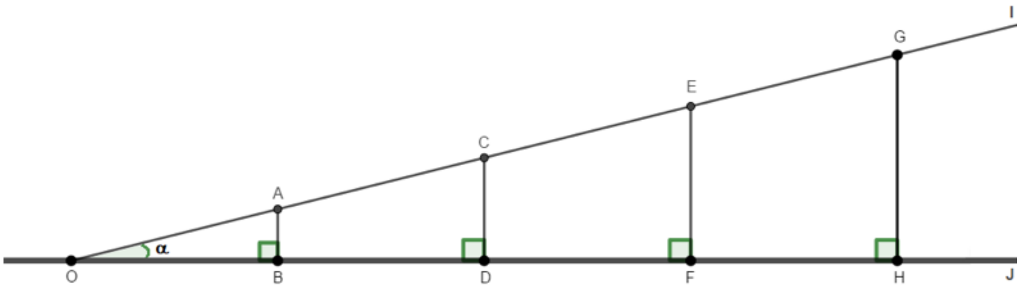
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{altura}{afastamento}$$

É importante salientar que $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ dependem exclusivamente do ângulo α. Isso será facilmente verificado na próxima seção.

4.1 O seno, cosseno e tangente por semelhança de triângulos

Tomando um ângulo agudo qualquer de medida α, e a partir dos pontos A, C, E, G etc., da semirreta $\overrightarrow{OI}$, as perpendiculares $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, etc., à semirreta $\overrightarrow{OJ}$ teremos os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo de medida α. Observe alguns desses triângulos na Figura 4.5:

Figura 4.5: Infinitos triângulos



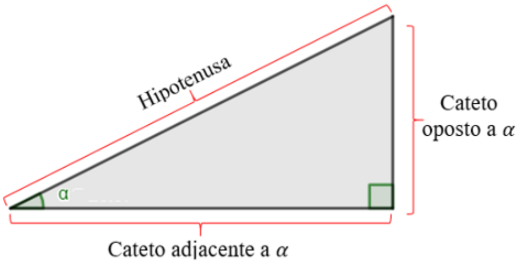
Fonte: O autor, 2019

Note que os triângulos OAB, OCD, OEF e OGH são semelhantes. Dessa forma, a razão entre dois lados quaisquer de um deles é igual à razão entre os lados correspondentes dos outros, ou seja:

$$\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{FE}{OE} = \frac{HG}{OG} = k_1$$
$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = k_2$$
$$\frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} = k_3$$

Observe que as constantes k_1, k_2 e k_3 dependem exclusivamente da medida do ângulo α, e não das medidas do triângulo escolhido para obtê-las. Esses infinitos triângulos retângulos que possuem o mesmo ângulo de medida α são todos semelhantes entre si e as constantes k_1, k_2 e k_3 podem ser obtidas, de maneira análoga, a partir de qualquer um deles. Veja a Figura 4.6:

Figura 4.6: Triângulo retângulo



$$k_1 = \frac{\textit{medida do cateto oposto a } \alpha}{\textit{medida da hipotenusa}}$$

$$k_2 = \frac{\textit{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\textit{medida da hipotenusa}}$$

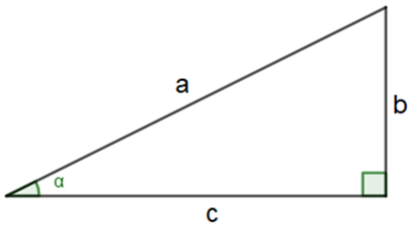
$$k_3 = \frac{\textit{medida do cateto oposto a } \alpha}{\textit{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Fonte: O autor, 2019

As razões trigonométricas k_1, k_2 e k_3 são chamadas respectivamente de: seno do ângulo α ($\operatorname{sen}\alpha$), cosseno do ângulo α ($\cos\alpha$) e tangente do ângulo α ($\operatorname{tg}\alpha$) conforme Figura 4.7:

Resumindo temos:

Figura 4.7: Triângulo retângulo



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\textit{Cateto oposto}}{\textit{Hipotenusa}} = \frac{b}{a},$$

$$\cos\alpha = \frac{\textit{Cateto adjacente}}{\textit{Hipotenusa}} = \frac{c}{a},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\textit{Cateto oposto}}{\textit{Cateto adjacente}} = \frac{b}{c}.$$

Fonte: O autor, 2019

4.2 Relações importantes que acontecem no triângulo retângulo

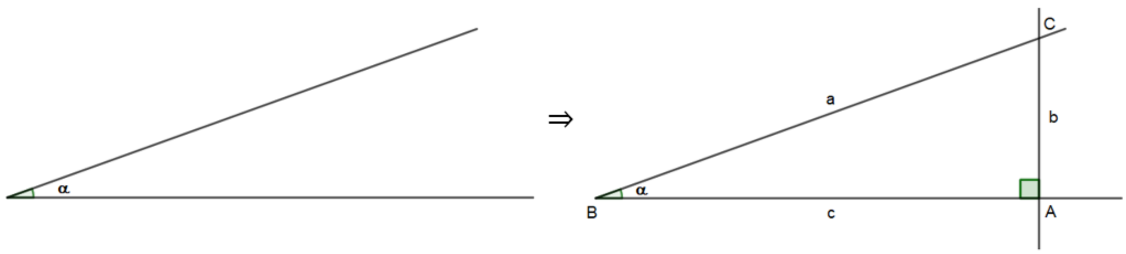
4.2.1 Relações entre seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Teorema 4.2.1. *Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se que:*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Demonstração 4.2.2. *Conforme a Figura 4.8, ao construir um ângulo agudo de medida α e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo, temos:*

Figura 4.8: Teorema 4.2.1



Fonte: O autor, 2019

Vamos calcular o $\operatorname{sen}\alpha$ *e o* $\cos\alpha$ *e efetuar o quociente entre eles. Vejamos:*

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha$$

Concluímos que,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

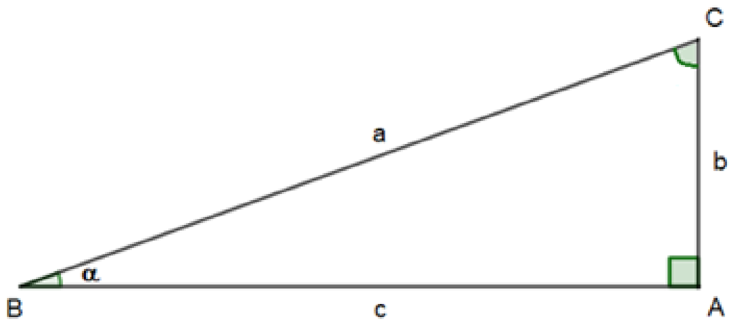
4.2.2 Relação fundamental no triângulo retângulo

Teorema 4.2.3.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Demonstração 4.2.4. *Consideremos um ângulo α de vértice C e um triângulo retângulo BAC, retângulo em A, como mostra a Figura 4.9:*

Figura 4.9: Teorema 4.2.3



Fonte: O autor, 2019

Lembrando o teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, *temos:*

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Portanto,

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

.

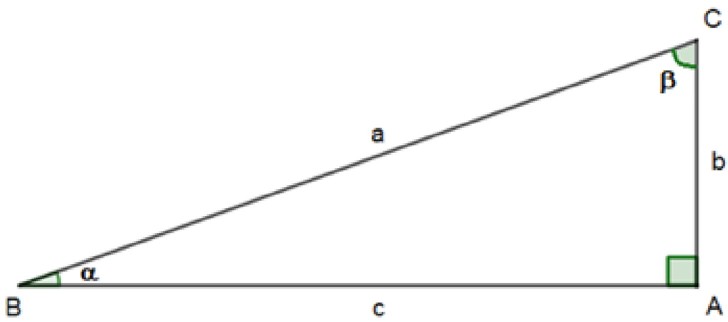
4.2.3 Os ângulos complementares do triângulo retângulo

Como já sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer mede 180º, então em um triângulo retângulo, os dois ângulo agudos são sempre complementares pois dois ângulos agudos α e β são complementares se, e somente se, $\alpha + \beta = 90^o$.

Teorema 4.2.5. *Se* α *e* β *são complementares* $\alpha+\beta = 90^o$, $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$ *e* $\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$, *além disso* $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\beta}$.

Demonstração 4.2.6. *Conforme a Figura 4.10,* α *e* β *são complementares.*

Figura 4.10: Teorema 4.2.4



Fonte: O autor, 2019

Assim temos que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \ \textit{e} \ \cos\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \ \textit{e} \ \operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c} \ \textit{e} \ \operatorname{tg}\beta = \frac{c}{b} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

Dessa forma, provamos que:

Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro, além disso, a tangente de um é sempre igual ao inverso da tangente do outro.

Com essa demonstração podemos ainda salientar que conhecendo-se as razões trigonométricas de um ângulo agudo α passamos a conhecer imediatamente as razões trigonométricas dos ângulos complementares β e vice-versa.

4.3 Aplicações das razões trigonométricas

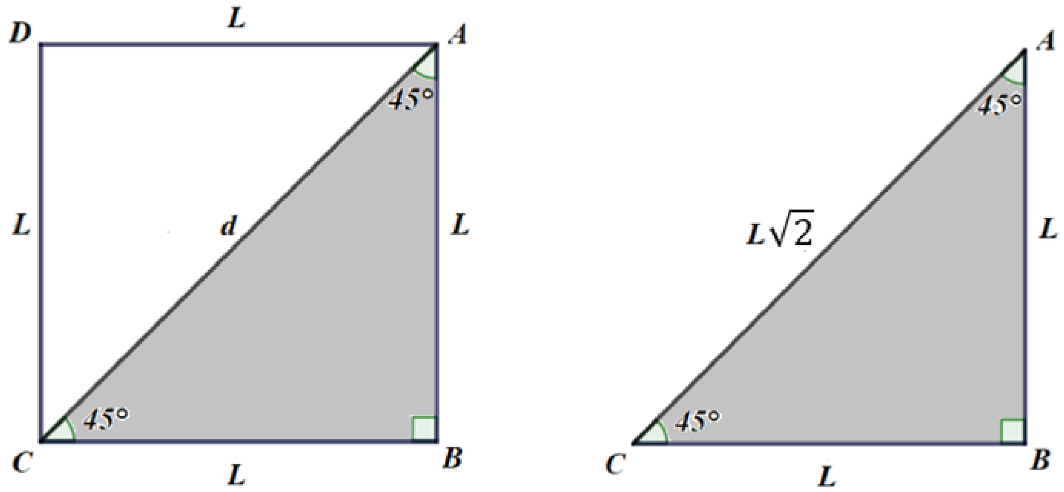
4.3.1 Razões tridonométricas especiais

É importante conhecer o seno, cosseno e a tangente de alguns ângulos conhecidos como ângulos especiais. A notoriedade desses ângulos se dá pelo fato deles aparecerem em duas figuras geométricas notáveis: o triângulo retângulo isósceles, que aparece no quadrado, e o triângulo equilátero. A conclusão desse conhecimento permitirá a organização dessas razões especiais numa tabela de dupla entrada muito famosa e que é muito utilizada nas escolas já a partir do Ensino Fundamental ao final da seção.

O ângulo de 45^o

Vamos considerar um quadrado $ABCD$ de lado L e o triângulo retângulo ABC, destacado do quadrado, na Figura 4.11.

Figura 4.11: Quadrado $ABCD$ e Triângulo ABC destacado



Fonte: O autor, 2019

Pelo Teorema de Pitágoras, a medida d vale $L\sqrt{2}$ como visto anteriormente. Observe agora o triângulo ABC destacado na figura onde vamos aplicar as razões trigonométricas no ângulo de 45º e concluir seus valores.

$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^{\circ} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{a}{a} = 1$$

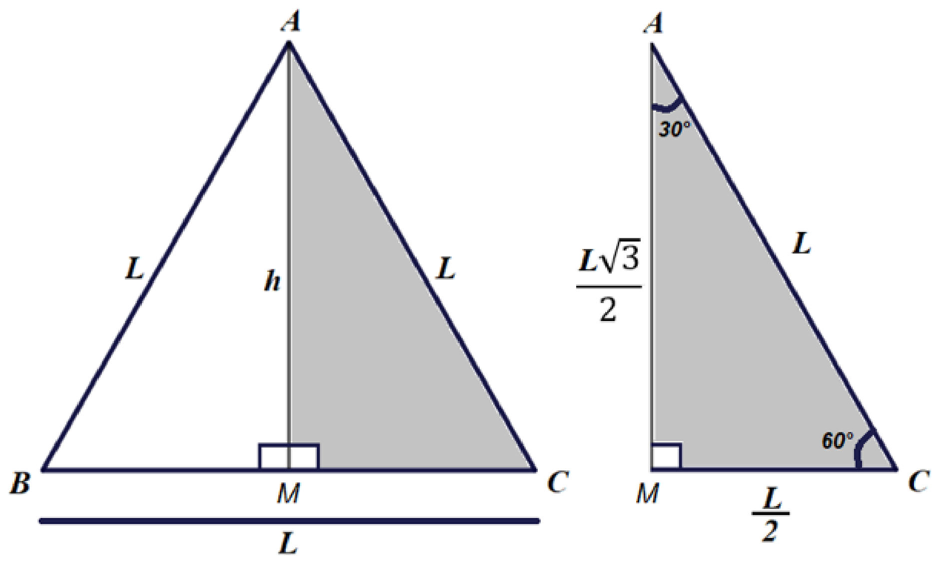
Assim concluímos que:

$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$

O ângulo de 30º e 60º

Vamos considerar um triângulo equilátero ABC de lado L e altura h e, ao seu lado, o triângulo retângulo AMC destacado conforme Figura 4.12.

Figura 4.12: Triângulo ABC e AMC



Fonte: O autor, 2019

Observe que os triângulos ABM e ACM são congruentes, pois são retângulos e possuem um cateto em comum (h) e as hipotenusas com mesma medida (L). Com isso podemos concluir que $BM = CM = \frac{L}{2}$ e a medida do ângulo $\angle B\hat{A}M$ é igual a medida do ângulo $\angle C\hat{A}M$. Como sabemos que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60º temos que $\angle B\hat{A}M = \angle C\hat{A}M = 30^o$. Pelo Teorema de Pitágoras, a medida h vale $\frac{L\sqrt{3}}{2}$. Aplicando agora as razões trigonométricas no triângulo retângulo AMC destacado nos ângulos de 30º e 60º, temos:

$$\text{sen}\,30^o = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\,30^o = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Observe que 60º é o complemento de 30º, logo:

$$\text{sen}\,60^o = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^o = \text{sen}\,30^o = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^{\text{o}} = \frac{\operatorname{sen} 60^{\text{o}}}{\cos 60^{\text{o}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Tabela de ângulos especiais

Essas razões trigonométricas especiais podem ser organizadas como mostrada na tabela 4.1 a seguir:

Tabela 4.1: Ângulos especiais

Razão / Ângulo	30^{o}	45^{o}	60^{o}
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: O autor, 2019

4.3.2 Lei dos cossenos

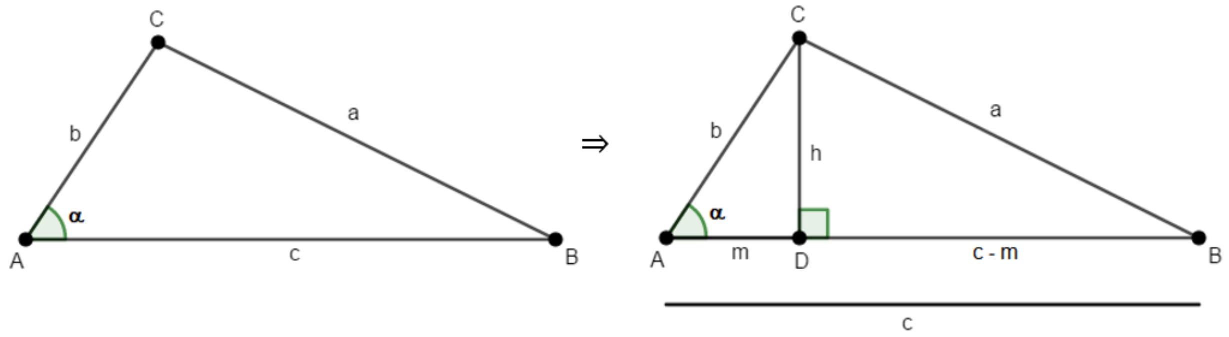
Uma aplicação das propriedades estudadas no triângulo retângulo permite, a partir do conhecimento das medidas de alguns elementos, conhecer as medidas de todos os outros elementos. É bem verdade que a fórmula da lei dos cossenos, a qual será demonstrada abaixo, nasce graças ao Teorema de Pitágoras e graças a aplicação das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Definição 4.3.1. *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado de uma lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.*

Demonstração 4.3.2. ***1º Caso:*** *Seja ABC um triângulo com $B < 90^o$.*

Considere um triângulo ABC. Traçamos uma reta perpendicular, partindo do vértice A com comprimento h dividindo o lado BC nas medidas m e $c - m$ conforme Figura 4.13:

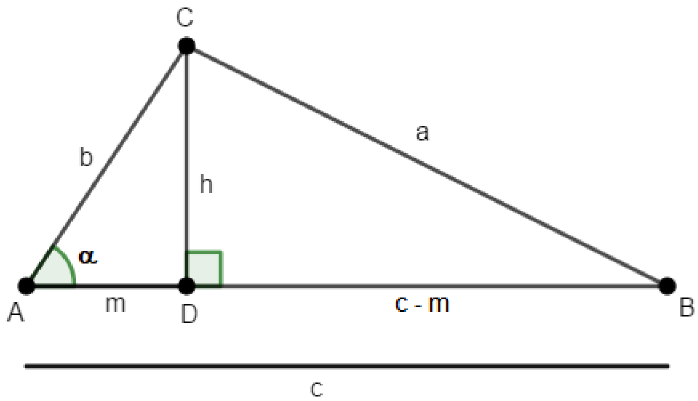
Figura 4.13: Triângulo ABC



Fonte: O autor, 2019

Observando a Figura 4.14, a seguir, teremos como resultado dois triângulos retângulos dentro do triângulo maior.

Figura 4.14: Lei dos cossenos



Fonte: O autor, 2019

Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras nos dois triângulos:

Triângulo ABH:

$$b^2 = h^2 + m^2$$

$$h^2 = b^2 - m^2$$

Triângulo ACH :

$$a^2 = h^2 + (c-m)^2 \therefore \textit{Observe que } h^2 = b^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

Observe que $\cos\alpha = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos\alpha$, *Então:*

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$$

A lei dos cossenos pode ser utilizada para obter comprimentos de lados ou medidas dos ângulos desde que que sejam conhecidas três das quatro variáveis em qualquer uma das equações.

Observe que para $\alpha = 90^o$ *o Teorema de Pitágoras passa a ser um caso particular da lei dos cossenos, pois:*

$$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(180^o - 90^o) = -\cos 90^o$$

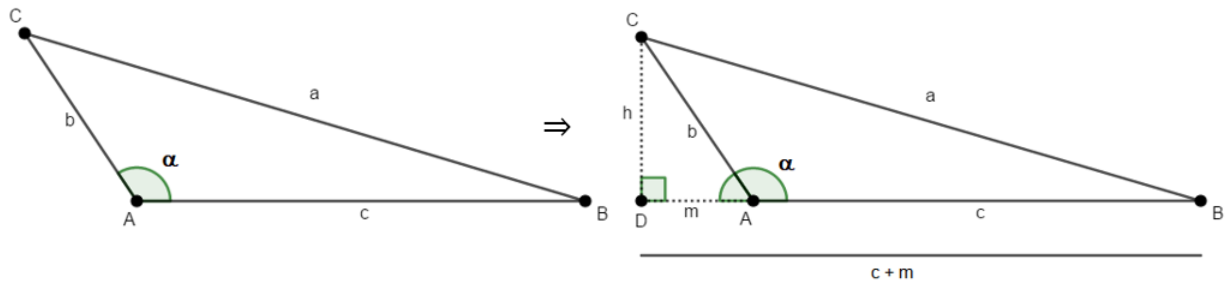
$$\cos 90^o = -\cos 90^o$$

Ou seja, essa expressão $\cos 90^o = -\cos 90^o$ *só é verdadeira se o* $\cos 90^o = 0$.

2º caso: *Seja* ABC *um triângulo com* $90^o < B < 180^o$.

Considere um triângulo ABC. *De maneira análoga ao primeiro caso, traçamos uma reta perpendicular, partindo do vértice* C *com comprimento* h *interceptando o prolongamento do lado* AB *no ponto* D *conforme Figura 4.15:*

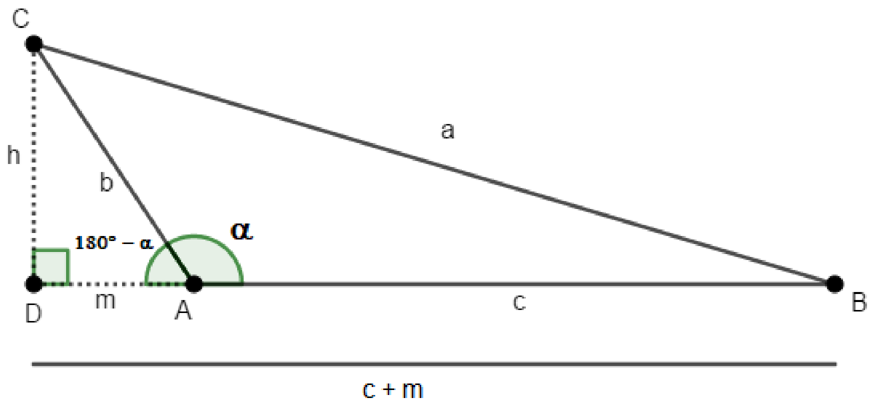
Figura 4.15: Triângulo ABC



Fonte: O autor, 2019

Assim, dessa forma, temos a medida $DC = c + m$. *Observe na Figura 4.16, que teremos como resultado dois triângulos retângulos: o triângulo* CDA *e o triângulo* CDB.

Figura 4.16: Lei dos cossenos



Fonte: O autor, 2019

Vamos aplicar o Teorema de Pitágoras nos dois triângulos:

Triângulo CDA:

$$b^2 = h^2 + m^2$$

$$h^2 = b^2 - m^2$$

Triângulo CDB:

$$a^2 = h^2 + (c+m)^2 \therefore \textit{Observe que } h^2 = b^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

Temos que:

$$\cos{(180^o - \alpha)} = -\cos\alpha$$

Observe que $\cos{(180^o - \alpha)} = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b\dot{c}os(180^o - \alpha) \Rightarrow m = -b \cdot \cos\alpha$.
Então:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$$

Observação: Se, de maneira análoga, baixarmos o segmento de reta perpendicular de comprimento h a partir do vértice do ângulo B ou C, podemos deduzir as outras duas partes da Lei dos Cossenos:

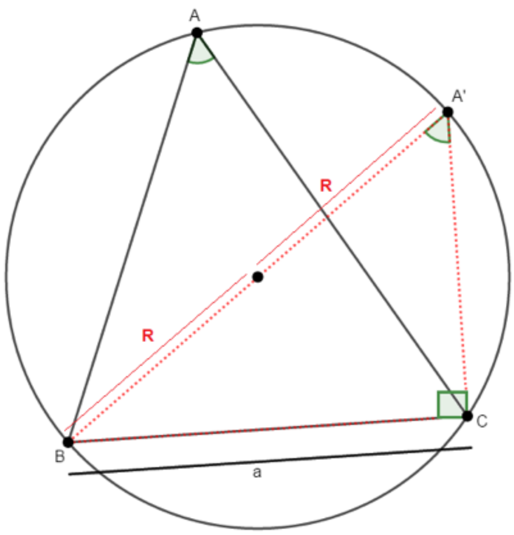
$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha} \qquad \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}$$

4.3.3 Lei dos senos

Definição 4.3.3. *Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.*

Demonstração 4.3.4. *Considere ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro correspondente $\overline{BA\prime}$ e liguemos A' com C. Conforme Figura 4.17:*

Figura 4.17: Lei dos Senos



Fonte: O autor, 2019

Sabemos que $\hat{A} = \widehat{A'}$ por determinarem na circunferência a mesma corda $\overline{BC}$. O triângulo $A'BC$ é retângulo em C por estar inscrito numa semicircunferência.

Observe que:

$$\text{sen}\,A' = \frac{a}{2R} \Rightarrow a = 2R \cdot \text{sen}\,A \Rightarrow \frac{a}{senA} = 2R$$

Analogamente, ao traçarmos pelos dois outros vértices do triângulo o diâmetro correspondente, também encontraremos:

$$\frac{b}{senB} = 2R \; e \; \frac{c}{senC} = 2R$$

Dessa forma, podemos concluir que:

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R = 2R}$$

4.3.4 Três teoremas

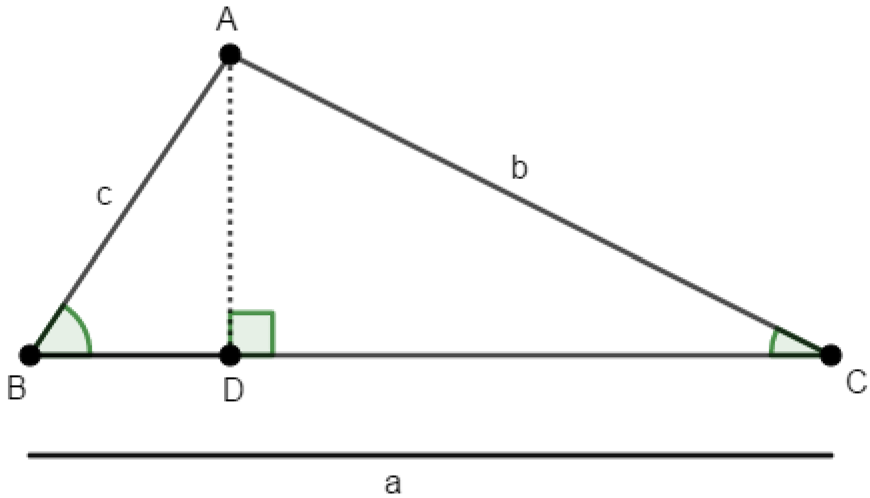
Teorema 4.3.5. *Em qualquer triângulo, valem as relações seguintes:*

$$\boxed{\begin{array}{l} a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B} \\ b = a \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{A} \\ c = b \cdot \cos \hat{A} + a \cdot \cos \hat{B} \end{array}}$$

Demonstração 4.3.6. *Apenas apresentaremos a prova da primeira delas. As outras duas são análogas:*

1º caso: *Seja ABC um triângulo com $\hat{B} < 90^o$ e $\hat{C} < 90^o$ representado na Figura 4.18:*

Figura 4.18: Triângulo ABC - Teorema 4.3.5 - Caso 1



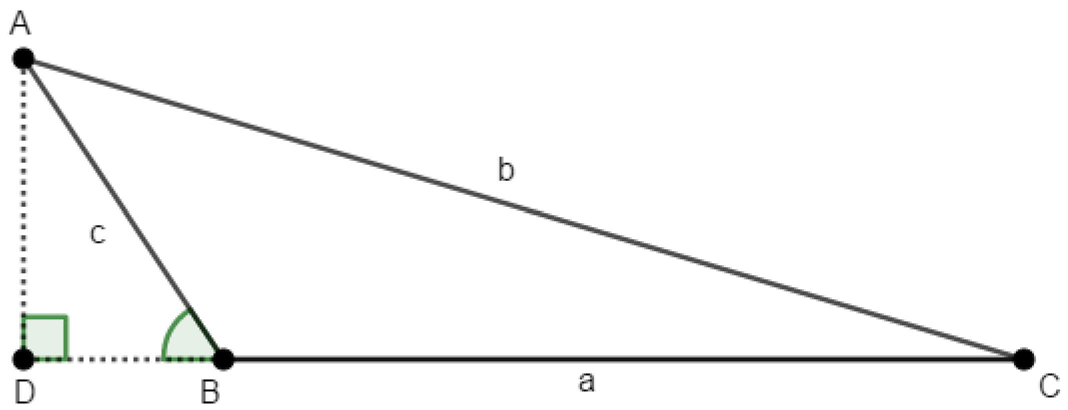
Fonte: O autor, 2019

No triângulo ABD, que é retângulo: $BD = c \cdot \cos \hat{B}$
No triângulo ADC, que é retângulo: $DC = b \cdot \cos \hat{C}$
Então:

$$a = DC + BD = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$

2º Caso: Seja ABC um triângulo com $90^o < B < 180^o$ ou $90^o < C < 180^o$ representado na Figura 4.19 a seguir:

Figura 4.19: Triângulo ABC - Teorema 4.3.5 - Caso 2



Fonte: O autor, 2019

No triângulo ABD, que é retângulo: $BD = c \cdot \cos (180^o - \hat{B}$ *No triângulo ADC, que é retângulo:* $DC = b \cdot \cos \hat{C}$ *Então:*

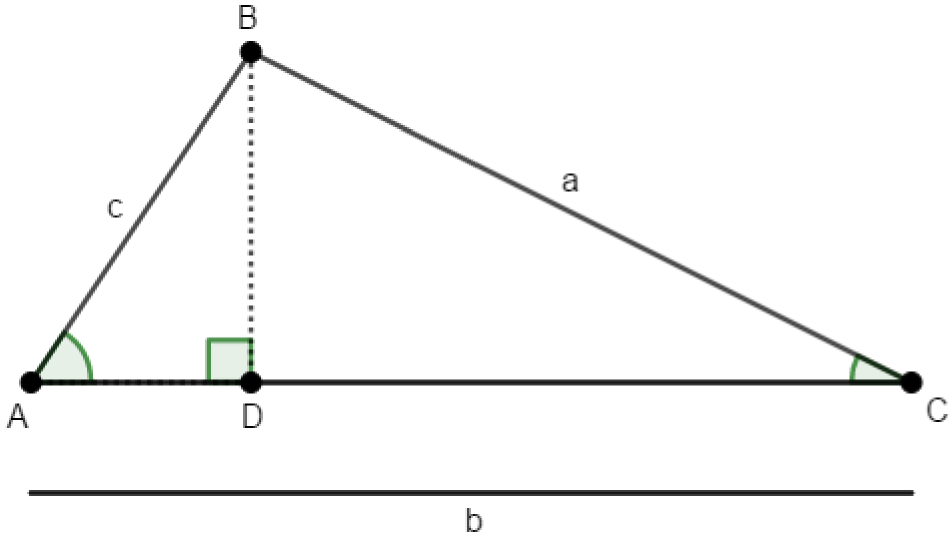
$$a = DC - BD = b \cdot \cos \hat{C} - c \cdot \cos (180^o - \hat{B}) \therefore \textit{observe que: } \cos (180^o - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$a = b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$

Teorema 4.3.7. *Em qualquer triângulo, a área é igual ao semiproduto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.*

Demonstração 4.3.8. ***1º Caso:*** *Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90^o$ conforme Figura 4.20.*

Figura 4.20: Triângulo ABC - Teorema 4.3.7 - Caso 1



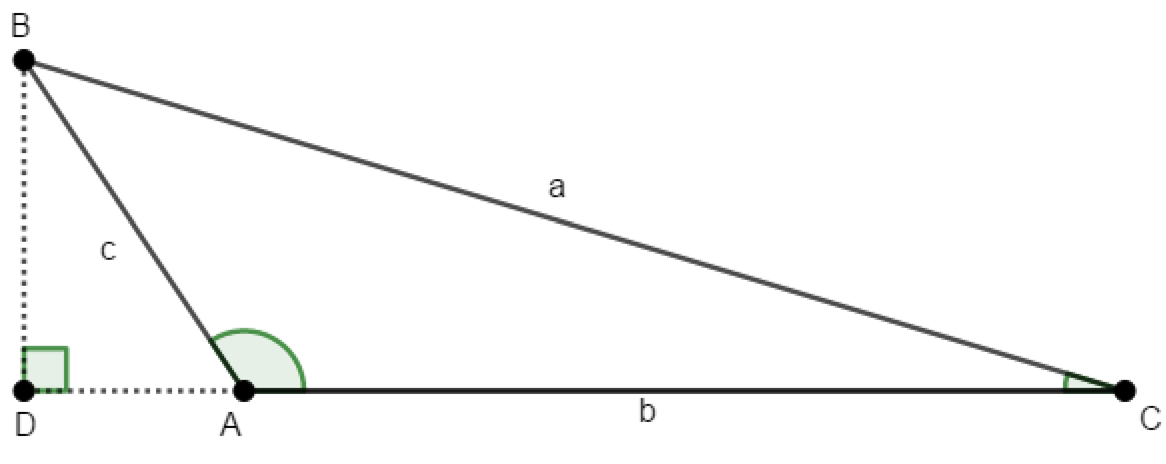
Fonte: O autor, 2019

No triângulo ADB, que é retângulo, temos: $DB = c \cdot \operatorname{sen} \hat{A}$. Então:

$$\boxed{S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} \hat{A}}$$

***2º Caso:** Seja ABC um triângulo com $90^o < A < 180^o$. Conforme Figura 4.21.*

Figura 4.21: Triângulo ABC - Teorema 4.3.7 - Caso 2



Fonte: O autor, 2019

No triângulo ADB, que é retângulo, temos: $DB = c \cdot \operatorname{sen}(180^o - \hat{A})$. Então:

$$\boxed{S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} \hat{A}}$$

Observação: Analogamente, provamos que:

$$\boxed{\begin{array}{c} S = \dfrac{a \cdot b}{2} \cdot \operatorname{sen} \hat{C} \\[2ex] S = \dfrac{a \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \end{array}}$$

Teorema 4.3.9. *Em qualquer triângulo, a área é igual ao produto dos três lados dividido pelo quádruplo do raio da semicircunferência circunscrita.*

Demonstração 4.3.10. *De acordo com a lei dos senos, temos:*

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = 2R \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{2R} \tag{4.1}$$

Pelo teorema anterior, temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \operatorname{sen} \hat{A} \tag{4.2}$$

Substituindo 4.1 e 4.2, temos:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

Capítulo 5

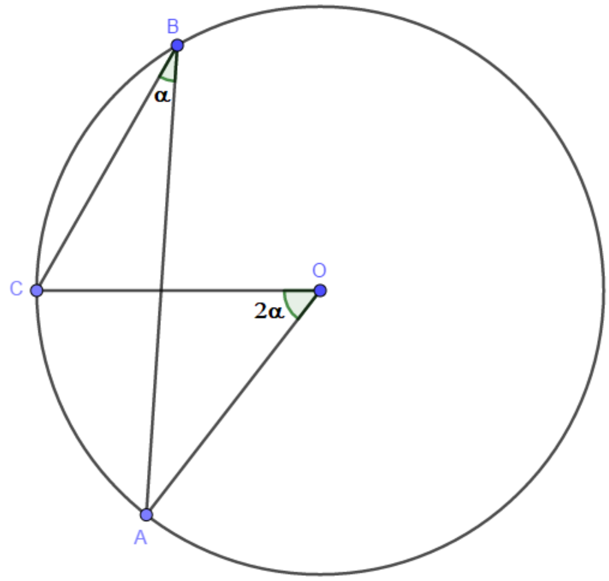
Curiosidades e demonstrações utilizando o triângulo retângulo

Este capítulo apresenta uma curiosidade e duas demonstrações especiais onde se utiliza o Triângulo Retângulo como elemento elucidativo e comprovador de relações matemáticas conhecidas e importantes no ensino básico. Aqui o objetivo é mostrar na prática o quão importante é conhecer as propriedades e suas funcionalidades. A seção 5.1 traz uma curiosidade importante no estudo de Geometria no Ensino Médio. Já as seções 5.2 e 5.3 trazem demonstrações um pouco mais sofisticadas. A proposta é enriquecer o aprendizado. Os conceitos e demonstrações desse capítulo foram baseados nas referências [10], [12] e [28].

5.1 Triângulo inscrito na semicircunferência

Na revisão de geometria foram abordados os temas ângulo inscrito e ângulo central, onde vimos que todo ângulo inscrito na circunferência mede a metade do ângulo central correspondente ao mesmo arco $\widehat{AB}$. Observe a 5.1:

Figura 5.1: Ângulo inscrito - Ângulo central



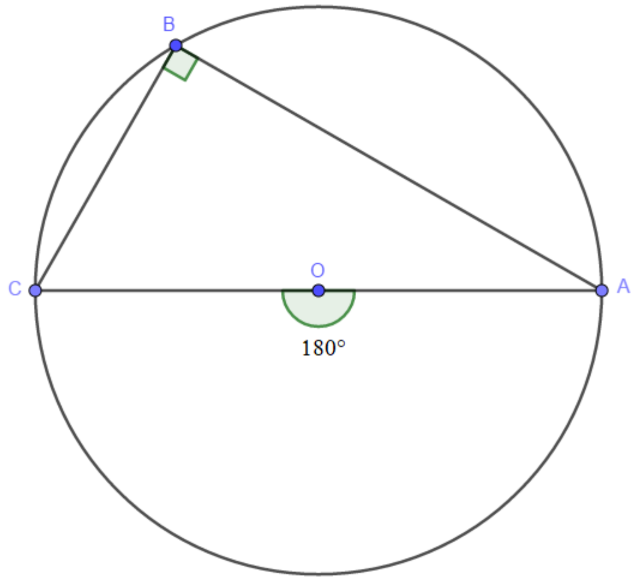
Fonte: O autor, 2019

Observe que:

$$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} \ ou \ A\hat{O}C = 2 \cdot A\hat{B}C$$

Abrindo o ângulo central $A\hat{O}C$ até que ele se torne um ângulo raso (180º), o ângulo inscrito $A\hat{B}C$ se torna um ângulo reto (90º), não importando onde esteja o vértice B sobre a circunferência conforme a Figura 5.2.

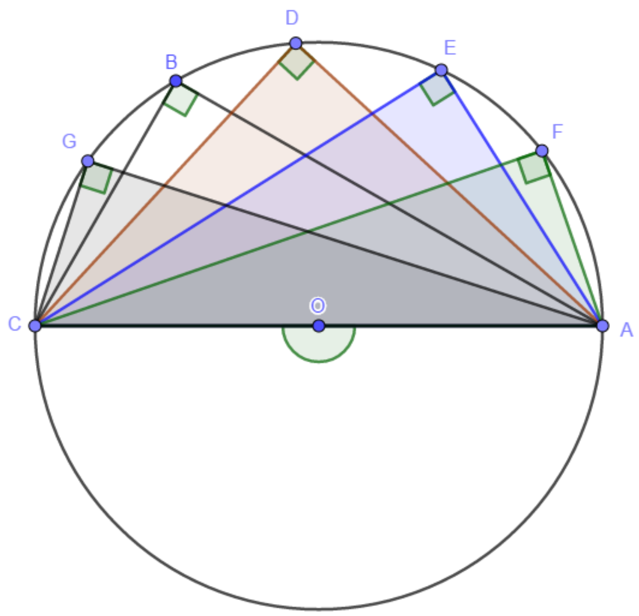
Figura 5.2: Triângulo retângulo inscrito



Fonte: O autor, 2019

Por essa razão, podemos afirmar que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência onde um de seus lados coincide com diâmetro é um triângulo retângulo conforme ilustrado na Figura 5.3.

Figura 5.3: Triângulos retângulos inscritos



Fonte: O autor, 2019

5.2 O triângulo retângulo e as três médias

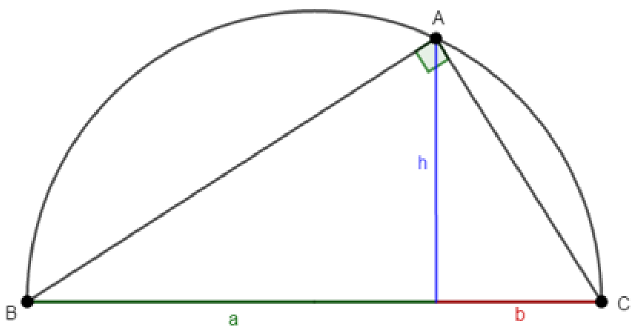
A desigualdade das médias afirma que, dado um conjunto de números positivos, a média aritmética $M.A.$ desses números será sempre maior ou igual a média geométrica $M.G.$ desses números e, que por sua vez, a média geométrica desses números será sempre maior ou igual a média harmônica $M.H.$ desses números.

Vamos então mostrar para dois números, através do triângulo retângulo, a correspondência geométrica dessa afirmação.

1. *Média Aritmética* (a, b)

   Para representar a média aritmética vamos considerar os números positivos a e b representados pelas medidas das projeções de um triângulo retângulo de altura h inscrito numa semicircunferência conforme a Figura 5.4.

   Figura 5.4: Triângulo retângulo e a média aritmética

   Fonte: O autor, 2019

   Observe que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, dada pelo segmento BC coincide com o diâmetro d da semicircunferência cuja medida é dada por $a + b$. Temos que:

$$d = a + b$$

$$2r = a + b$$

$$r = \frac{a + b}{2}$$

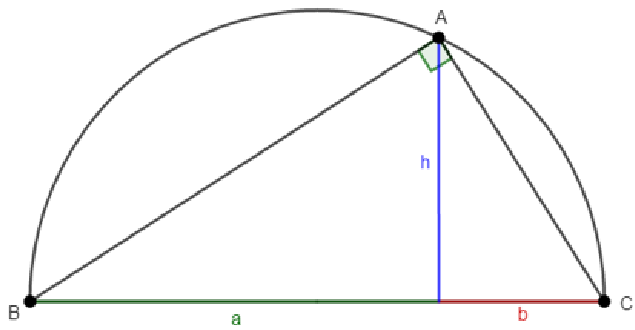
   Portanto, o raio é a média aritmética dos número a e b.

$$M.A.(a,\ b) = r$$

2. *Média Geométrica* (a, b)

   Vamos agora representar a média geométrica utilizando o mesmo triângulo retângulo ABC inscrito na mesma semicircunferência do caso anterior e vamos, mais uma vez, considerar os números positivos a e b representados pelas medidas das projeções desse triângulo conforme Figura 5.5:

   Figura 5.5: Triângulo retângulo e a média geométrica

   Fonte: O autor, 2019

   Observe que, uma das relações métricas estudada nas demonstrações diz que a altura de um triângulo retângulo, elevada ao quadrado, será igual a multiplicação de suas projeções. Portanto:

$$h^2 = a \cdot b$$
$$h = \sqrt{a \cdot b}$$

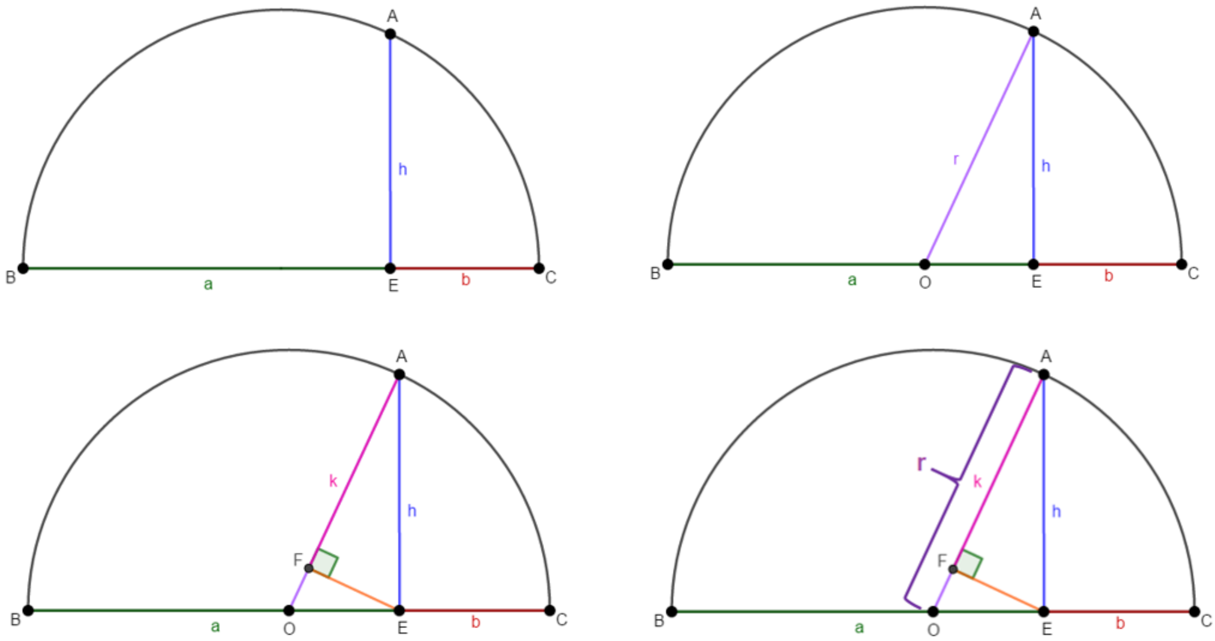
   Dessa forma, podemos concluir que a altura é a média geométrica dos números a e b.

$$M.G.(a,\ b) = h$$

3. *Média Harmônica* (a, b)

   Agora, por fim, vamos representar a média harmônica. Para isso, vamos manter a semicircunferência, conservar as mesmas medidas iniciais a e b e a altura h representado pelo segmento AE. Considere o centro O desta semicircunferência e trace o segmento OA, que tem medida r. Em seguida, vamos traçar um segmento FE perpendicular ao raio (r), conforme esquema apresentado na Figuras 5.6:

Figura 5.6: Construção para média harmônica



Fonte: O autor, 2019

Observe que temos três triângulos retângulos semelhantes, AOE, AEF e EOF. Vamos nos limitar a observar os triângulos AEF e AOE, e em particular o segmento $AF = k$. Como $AEF \sim AOE$, temos que:

$$\frac{AF}{AE} = \frac{AE}{AO}$$
$$\frac{k}{h} = \frac{h}{r}$$
$$k = \frac{h^2}{r}$$

Aqui vamos lembrar que nas representações anteriores, $h^2 = a \cdot b$ e $r = \dfrac{a+b}{2}$. Assim:

$$k = \frac{a \cdot b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

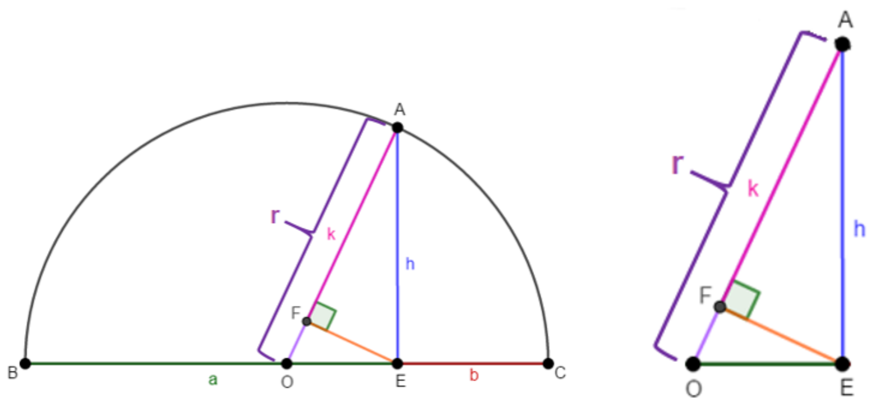
Então, podemos concluir que k é a média harmônica dos números a e b.

$$M.H.(a,\ b) = k$$

Conclusão

Mostramos que a média aritmética dos números a e b corresponde ao raio r da semicircunferência que construímos utilizando a e b como projeções do triângulo retângulo ABC e a soma $a+b$ sendo o diâmetro. Vimos ainda que a média geométrica entre os números a e b corresponde ao segmento AE, que chamamos de h, por ser a altura do triângulo retângulo ABC inicial já citado. E, por fim, também vimos que a média harmônica entre os números a e b é igual ao segmento AF representado por k. Observe então a Figura 5.7.

Figura 5.7: Conclusão das três médias



Fonte: O autor, 2019

Observando o triângulo retângulo AOE sabemos que a hipotenusa $AO = r$, maior lado do triângulo retângulo, sempre será maior que o cateto $AE = h$. Portanto:

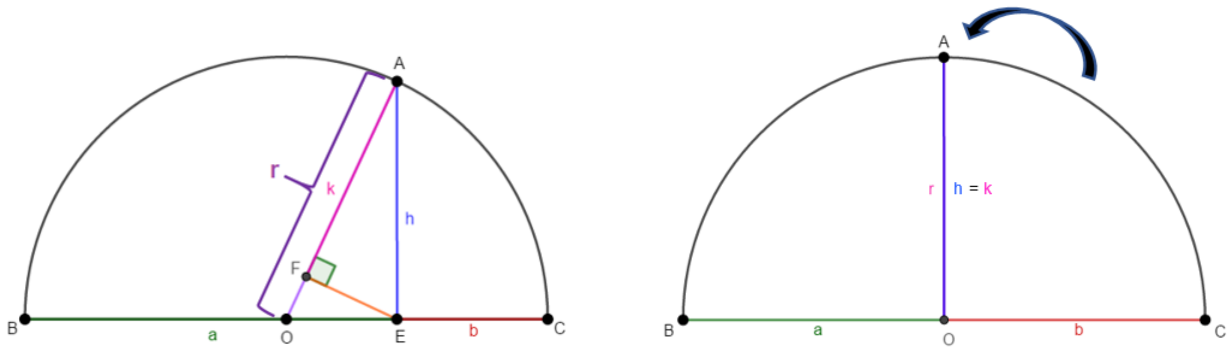
$$r > h \Rightarrow M.A. > M.G.$$

Agora, ao observar o triângulo retângulo AEF percebemos, analogamente, que a hipotenusa $AE = h$, maior lado do triângulo retângulo, sempre será maior que o cateto $AF = k$. Portanto:

$$h > k \Rightarrow M.G. > M.H.$$

Observe pela Figura 5.8 que vale a igualdade $r = h$ e $h = k$ apenas se se $a = b$.

Figura 5.8: Caso das igualdades das médias



Fonte: O autor, 2019

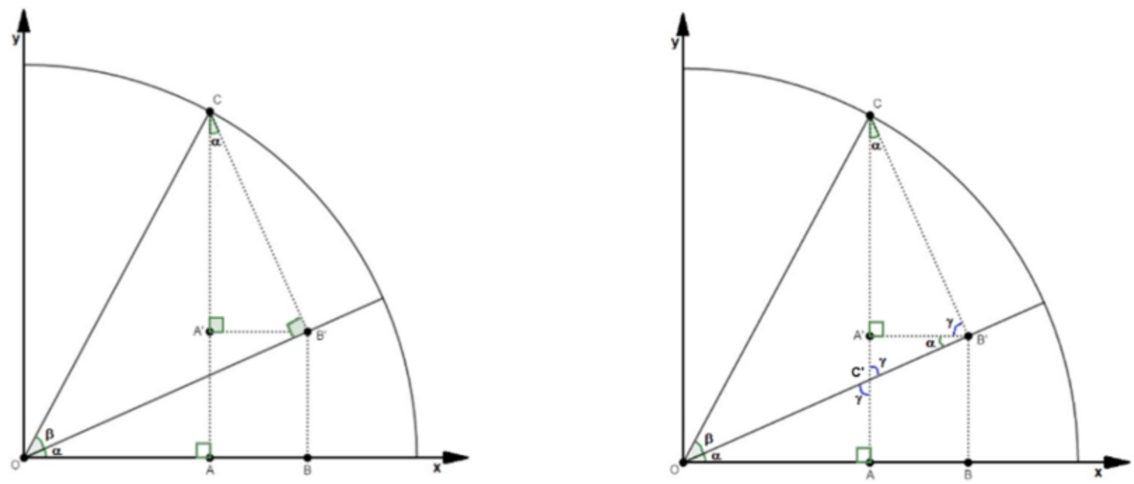
Assim, podemos concluir geometricamente que:

$$M.A. \geq M.G. \geq M.H.$$

5.3 Fórmula da adição de arcos

No ensino médio, no estudo do ciclo trigonométrico, algumas transformações trigonométricas são estudadas e, na grande maioria das vezes, não muito bem compreendida pelos alunos. Se tornou comum decorar utilizando algumas músicas ou poesias bem conhecidas, mas na essência o aluno não sabe de onde veio e por que essas fórmulas funcionam. Nosso objetivo aqui é mais uma vez mostrar a importância do triângulo retângulo, a sua comum aparição e o fundamental conhecimento de propriedades para entendimento transversal de alguns conteúdos de matemática. Por isso, agora demonstrar as fórmulas de adição de arcos utilizando triângulos retângulos. Vamos determinar as fórmulas para o cosseno e o seno da soma e da diferença de dois ângulos. Faremos a demonstração apenas no caso em que os ângulos α e β são positivos e menores que $\frac{\pi}{2}$. O caso geral reduz-se a este bastando, para isso, considerar a simetria e a redução ao primeiro quadrante no ciclo trigonométrico. Vamos considerar um quarto do círculo unitário conforme segue representado na Figura 5.9:

Figura 5.9: Um quarto de círculo de raio $1cm$



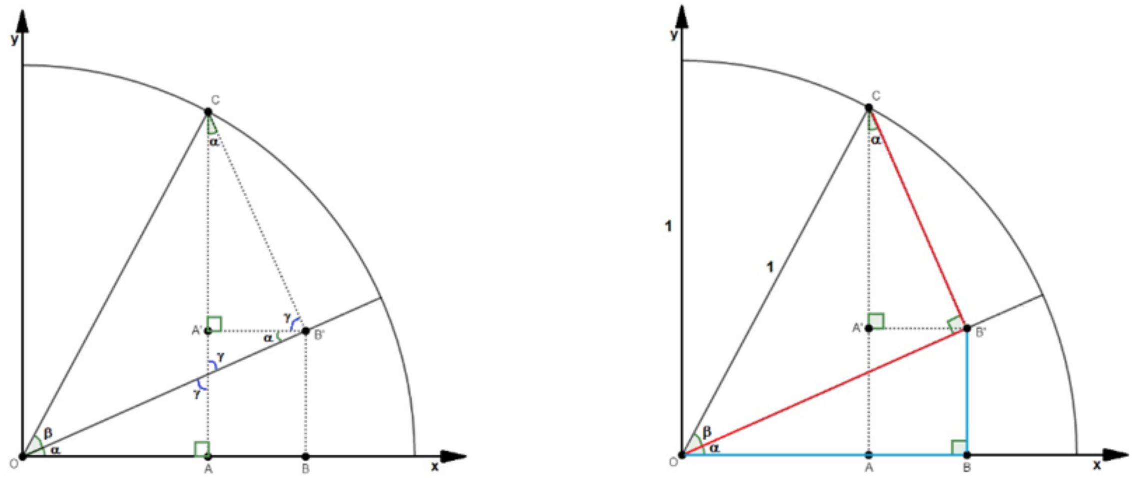
Fonte: O autor, 2019

Para isso, traçamos o segmento OB', que forma com o *eixo x* um ângulo α e o segmento OC que forma com o segmento OB' um ângulo β. Em seguida baixamos a perpendicular de C em relação ao *eixo x* o interceptando no ponto que chamamos de A e outra perpendicular de B', também em relação ao *eixo x* o interceptando no ponto que chamamos de B. Por fim, traçamos o segmento pontilhado CB' que é perpendicular ao segmento OB' e traçamos o segmento $A'B'$ que é paralelo ao *eixo x*, com A' no segmento AC. O comprimento de OC é igual a 1 pois ele é o raio do círculo unitário.

Chamaremos o ponto de interseção dos segmentos OB' e AC de C'. Vamos então chamar o ângulo $O\hat{C'}A$ de γ. É fácil observar que $\alpha + \gamma = 90^o$ pois são os ângulos agudos do triângulo retângulo. O ângulo $B'\hat{C'}A' = O\hat{C'}A$ também mede γ pois são opostos pelo vértice. É possível ainda observar que os triângulos $OC'A$ e $B'C'A'$ são semelhantes pois ambos são retângulos em A e A', respectivamente, e possuem um ângulo de medida γ já verificados, portanto podemos concluir que o ângulo $A'\hat{B'}C'$ mede α. Como o ângulo $C\hat{B'}C'$ é reto por construção, e já sabemos que $\alpha + \gamma = 90^o$, então o ângulo $C\hat{B'}A'$ mede γ. Assim concluímos que o ângulo $A'\hat{C}B'$ só pode medir α, pois um dos ângulo agudos do triângulo retângulo $CB'A'$ mede γ. A partir dessa figura iremos deduzir as fórmulas de adição para cosseno e seno.

Então, vamos considerar a partir da Figura 5.9 os triângulos $OB'C$ e OBB' em destaque na Figura 5.10.

Figura 5.10: Adição de arcos



Fonte: O autor, 2019

Considerando o triângulo retângulo $OB'C$:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B'C}{1} \Rightarrow B'C = \operatorname{sen}\beta$$

e

$$\cos\beta = \frac{OB'}{1} \Rightarrow OB' = \cos\beta$$

Considerando o triângulo retângulo OBB':

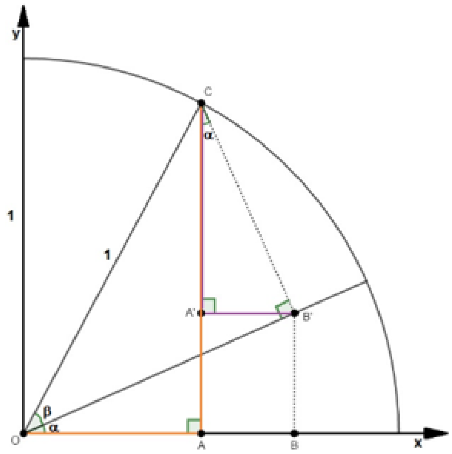
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{BB'}{OB'} = \frac{BB'}{\cos\beta}$$
$$BB' = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

e

$$\cos\alpha = \frac{OB}{OB'} = \frac{OB}{\cos\beta}$$
$$OB = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

Vamos considerar agora, conforme Figura 5.11, os triângulos OAC e $A'B'C$ em destaque:

Figura 5.11: Adição de arcos



Fonte: O autor, 2019

Considerando o triângulo retângulo OAC:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

e

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OA}{1} \Rightarrow OA = \cos(\alpha+\beta)$$

Considerando o triângulo retângulo $A'B'C$:

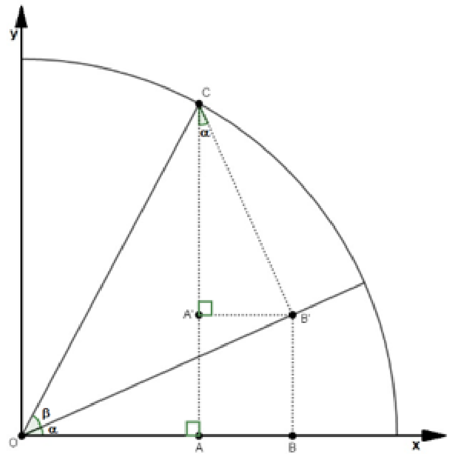
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{A'B'}{B'C} = \frac{A'B'}{\operatorname{sen}\beta}$$
$$A'B' = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

e

$$\cos\alpha = \frac{A'C}{B'C} = \frac{A'C}{\operatorname{sen}\beta}$$
$$A'C = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Para concluir, observe a Figura 5.12 a seguir e as deduções a seguir.

Figura 5.12: Adição de arcos



Fonte: O autor, 2019

Sabemos que:

$$OA = OB - AB \;\therefore\; \text{Observe que: } AB = A'B'$$

$$OA = OB - A'B'$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$AC = AA' + A'C \;\therefore\; \text{Observe que: } AA' = BB'$$

$$AC = BB' + A'C$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Observação: Como $\cos(-\beta) = \cos\beta \; e \; \operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$, então:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(-\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

e

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta) \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

De forma imediata, concluímos também as fórmulas de arco duplo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}2\alpha=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

e

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos2\alpha=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$

Capítulo 6

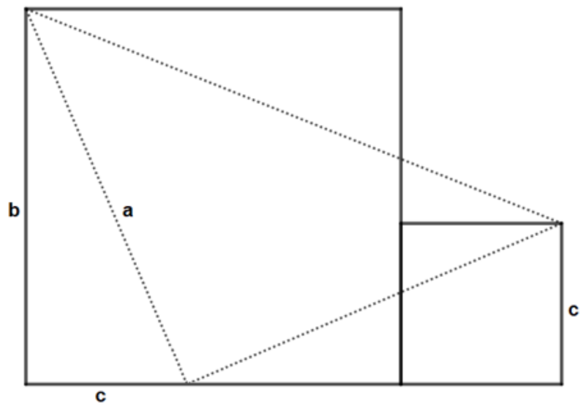
Na Perspectiva da BNCC

Este capítulo tem como objetivo fortalecer as habilidades EF09MA13, EF09MA14 e EM13MAT308 da BNCC que estão diretamente ligadas ao Triângulo Retângulo. Esse objetivo será alcançado em duas seções: A primeira, a seção 6.1, abordará a resolução de problemas que, ao ter como prioridade a construção do conhecimento pelo fazer pensar, é fundamental para auxiliar o aluno na apreensão dos significados e por isso vai apresentar questões que envolvem algumas propriedades e teoremas estudados ao longo deste trabalho. É essencial saber utilizar na prática os conhecimentos teóricos. Por isso as questões aqui apresentadas buscam provocar essa interação através de demonstrações, análise, interpretação e, sobretudo, cálculo. A segunda, a seção 6.2, apresenta uma sequência didática voltada exclusivamente para a demonstração das Relações Métricas do Triângulo Retângulo, inclusive o Teorema de Pitágoras. As duas seções, em grande parte, estão baseadas nas referências [18] e [27].

6.1 Resolução de Problemas

1. A Figura 6.1 mostra dois quadrados de lados b e c. Use áreas para uma outra demonstração do Teorema de Pitágoras.

Figura 6.1: Resolução de Problemas 1

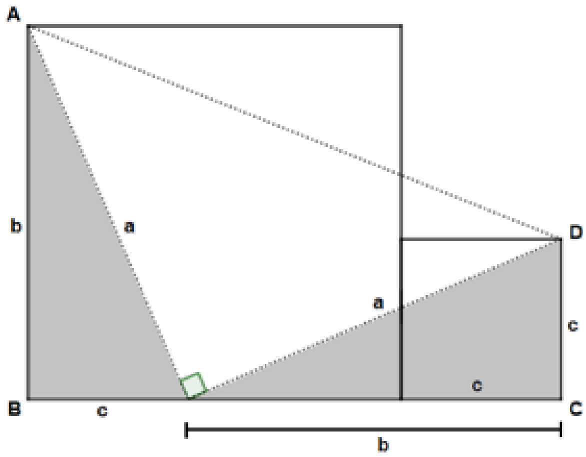


Fonte: [18, p. 88]

Resolução:

Os triângulos ABE e ECD são congruentes e o ângulo $A\hat{E}D$ é reto conforme mostra a Figura 6.2 a seguir.

Figura 6.2: Resolução de Problemas 1



Fonte: O autor, 2019.

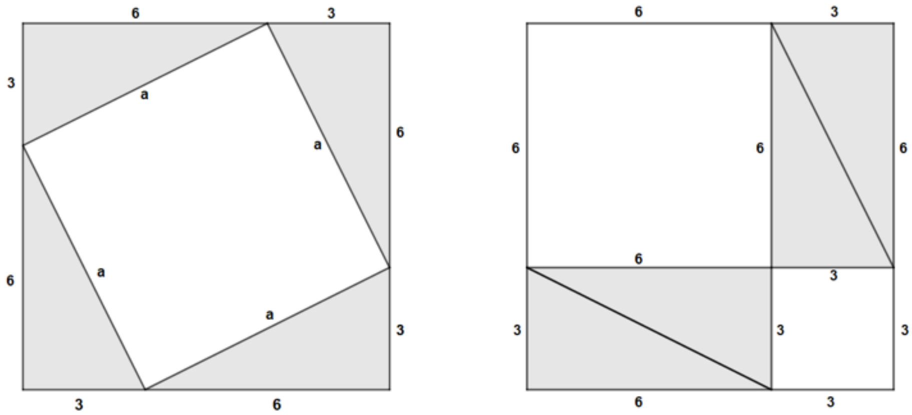
O trapézio $ABCD$ está dividido em três triângulos: ABE, AED e ECD. Somando essas áreas temos:

$$\frac{(b+c)\,(b+c)}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{2}$$
$$b^2 + 2bc + c^2 = bc + a^2 + bc$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

2. Presume-se através de historiadores que a demonstração original do Teorema de Pitágoras foi usando áreas. Utilize os dados numéricos da Figura 6.3 onde temos no esquema, dois quadrados de mesma área, e prove o Teorema de Pitágoras mostrando que $a^2 = 6^2 + 3^2 = 45$.

Figura 6.3: Resolução de Problemas 2

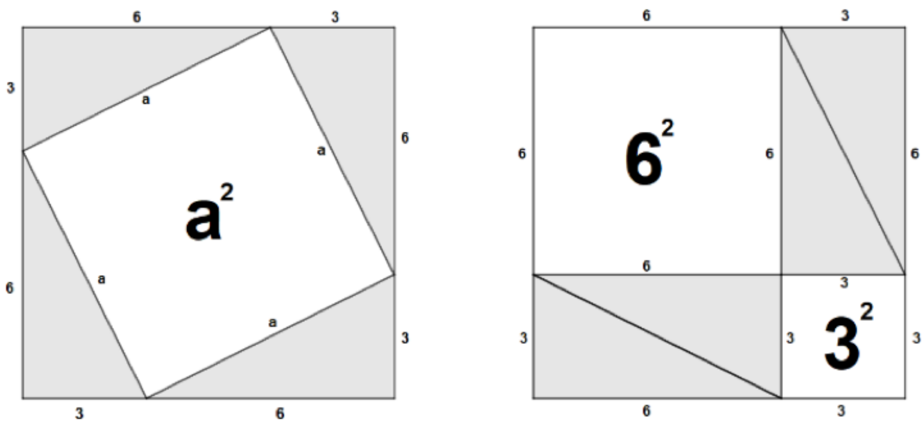


Fonte: O autor, 2019.

Resolução:

Inicialmente observe, através da Figura 6.4 que a^2 é a medida da área quadrado menor não sombreado no primeiro quadrado. O que iremos mostrar é essa área é igual à soma dos dois quadrados de lados 6 e 3 do quadrado em sequência.

Figura 6.4: Resolução de Problemas 2



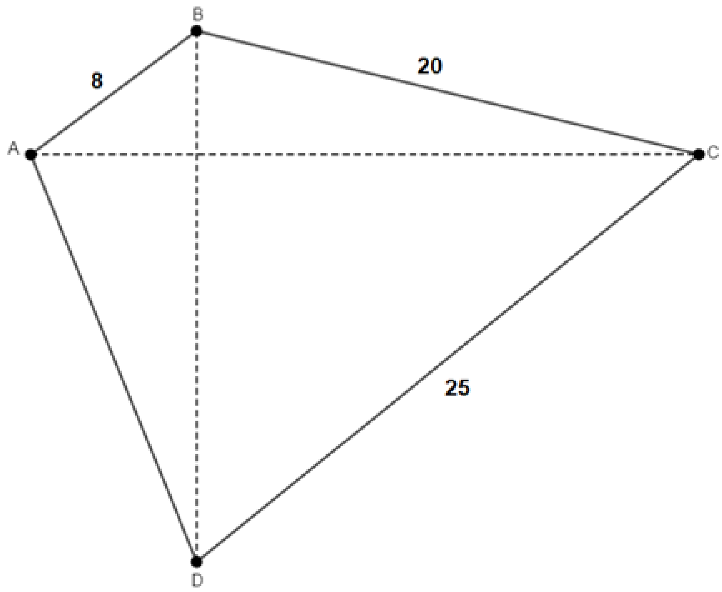
Fonte: O autor, 2019.

Como os quadrados possuem mesma área com lados medindo 9, então:

$$\text{Área 1} = \text{Área 2}$$
$$\frac{6 \cdot 3}{2} \cdot 4 + a^2 = 6^2 + 3^2 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3$$
$$9 \cdot 4 + a^2 = 6^2 + 3^2 + 18 + 18$$
$$a^2 = 6^2 + 3^2$$
$$a^2 = 45$$

3. O quadrilátero $ABCD$ da Figura 6.5 a seguir tem diagonais perpendiculares. Sabendo que $AB = 8$, $BC = 20$, e $CD = 25$, calcule a medida AD.

Figura 6.5: Resolução de Problemas 3

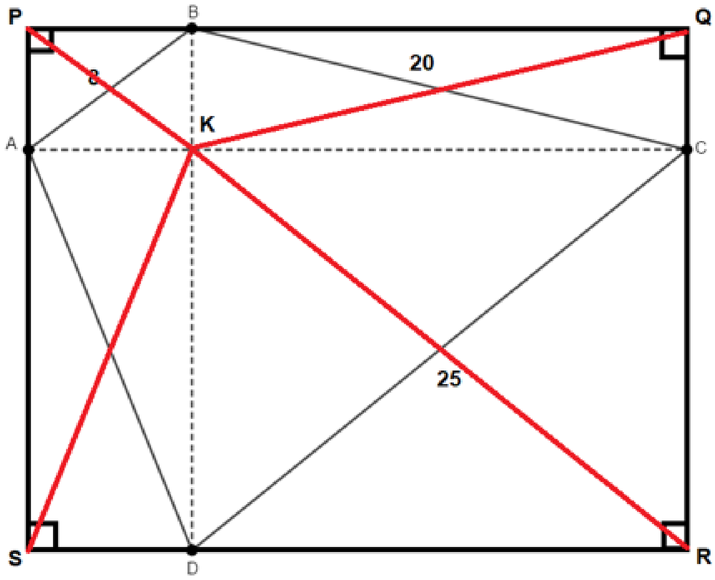


Fonte: O autor, 2019.

Resolução:

Embora existam outras maneiras de resolver esta questão, não tão simples, a ideia aqui é facilitar tentando aplicar uma propriedade estudada na seção 2.3.3 Para isso, traçaremos duas paralelas ao segmento AB, uma passando pelo ponto B e outra passando pelo ponto D. Em seguida, de maneira análoga, traçamos duas paralelas ao segmento BD, uma passando pelo ponto A e outra passando pelo ponto C. Como mostra a Figura 6.6 a seguir.

Figura 6.6: Resolução de Problemas 3



Fonte: O autor, 2019.

Além disso chamaremos de K o ponto de encontro das diagonais. Observe que temos um retângulo $PQRS$ formado pelo encontro das paralelas. Dentro desse retângulo $PQRS$ podemos perceber mais quatro retângulo menores $PBKA$, $BQCK$, $KCRD$ e $AKDS$ com diagonais respectivamente iguais a 8, 20, 25 e $\overline{AD}$. Como são retângulos podemos concluir que $\overline{AB} = \overline{KP}$, $\overline{BC} = \overline{KQ}$, $\overline{CD} = \overline{KR}$ e $\overline{AD} = \overline{KS}$. Observe que podemos utilizar uma propriedade importante já estudada. Temos um ponto K no interior do retângulo $PQRS$ e assim, sabemos pelo Teorema de Pitágoras que:

$$\overline{KP}^2 + \overline{KR}^2 = \overline{KQ}^2 + \overline{KS}^2$$

$$8^2 + 25^2 = 20^2 + \overline{KS}^2$$

$$\overline{KS}^2 = 625 + 64 - 400$$

$$\overline{KS}^2 = 289$$

$$\overline{KS} = \sqrt{289}$$

$$\overline{KS} = 17$$

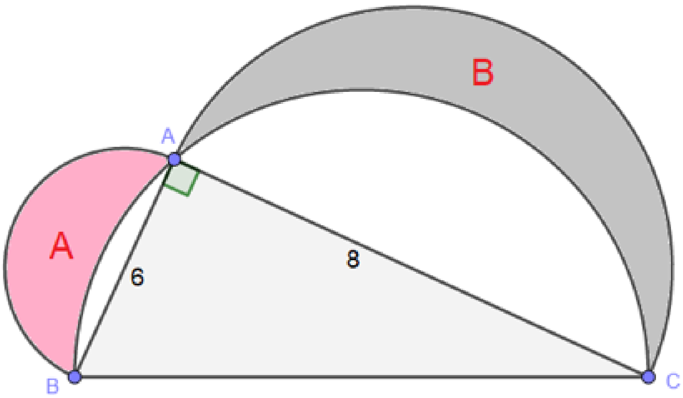
Logo,

$$\overline{KS} = \overline{AD} = 17$$

.

4. (O problema de Hipócrates) Observando a Figura 6.7, é possível descobrir a soma das áreas hachuradas $A + B$? O Teorema de Pitágoras pode nos ajudar a resolver esse problema?

Figura 6.7: Resolução de Problemas 4



Fonte: O autor, 2019.

Resolução:

Observe que esse é um problema que, inicialmente, e talvez sem o conhecimento de uma importante generalização, pode ser resolvido efetuando alguns cálculos matemáticos comuns. Se aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, é fácil encontrar o valor de lado BC. Veja:

$$\overline{BC}^2 = \bar{A}B^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2$$

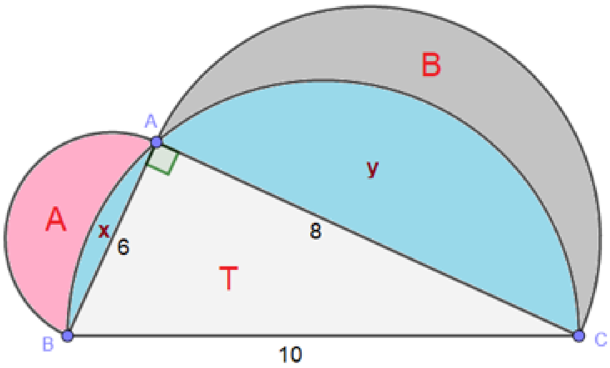
$$\overline{BC}^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\overline{BC} = \sqrt{100}$$

$$\overline{BC} = 10$$

Conforme a Figura 6.8 a seguir, podemos perceber que a região de área A (lúnula) somada a região de área x corresponde a região do semicírculo com diâmetro sobre o cateto AB do triângulo retângulo possui área $\frac{9\pi}{2}$. De forma análoga a região de área B (lúnula) somada a região de área y corresponde a região do semicírculo com diâmetro sobre o cateto AC do triângulo retângulo possui área $\frac{16\pi}{2}$. E a área do triângulo ABC é 24. Observe:

Figura 6.8: Resolução de Problemas 4



Fonte: O autor, 2019.

Dessa forma:

$$\text{Área } A + x = \frac{9\pi}{2}$$
$$\text{Área } B + y = \frac{16\pi}{2}$$
$$\text{Área } T = 24$$

Efetuando a soma das equações temos:

$$A + B + (x + y + T) = \frac{9\pi}{2} + \frac{16\pi}{2} + 24$$
$$A + B + (x + y + T) = \frac{25\pi}{2} + 24$$

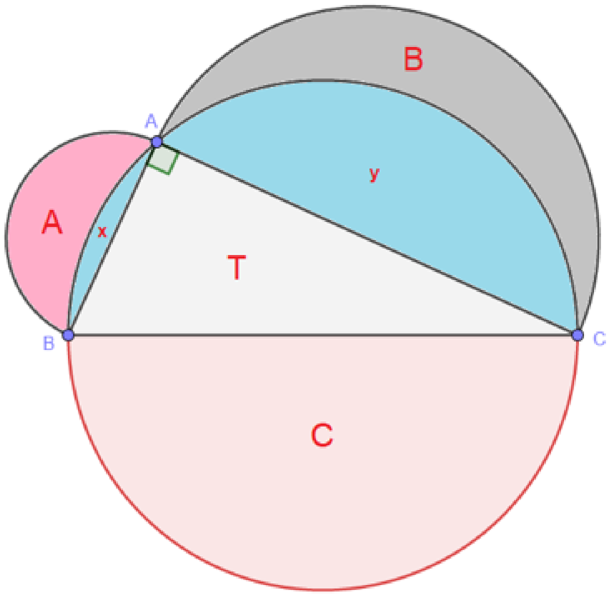
Observe que a área $(x + y + T)$ corresponde à área a região do semicírculo com diâmetro sobre a hipotenusa BC do triângulo retângulo possui área $\frac{25\pi}{2}$. Então temos:

$$A + B + \frac{25\pi}{2} = \frac{25\pi}{2} + 24$$
$$A + B = 24$$

Portanto as áreas das lúnulas $A + B$ é igual a 24.

Então o nosso problema proposto no início deste tópico poderia ser resolvido de maneira mais rápida. Observe agora sem valores a Figura 6.9 a seguir e vamos tentar aplicar a generalização do Teorema de Pitágoras.

Figura 6.9: Resolução de Problemas 4



Fonte: O autor, 2019.

Como circunferências são sempre semelhantes e de acordo com a generalização do Teorema de Pitágoras temos que a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa BC é igual a soma dos semicírculos construídos sobre os catetos AB e AC que tem áreas $A+x$ e $B+y$ respectivamente. Temos então:

$$C = (A + x) + (B + y) \tag{6.1}$$

É fácil perceber que o semicírculo construído sobre a hipotenusa BC projetado sobre o triângulo ABC tem área $(x + y + T)$ que é igual a área C mostrado na figura. Então temos que:

$$C = (x + y + T) \tag{6.2}$$

Substituindo 6.2 em 6.1 temos:

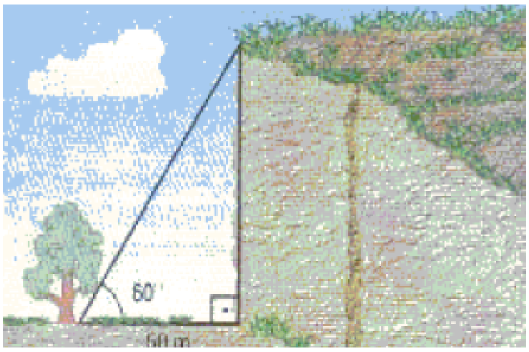
$$(x + y + T) = (A + x) + (B + y)$$

$$A + B = T$$

Concluímos que a área $A + B$ inicialmente procurada poderia ter sido encontrada aplicando a generalização do Teorema de Pitágoras e é igual a área T do triângulo retângulo ABC.

5. O ângulo de elevação do pé de uma árvore a $50m$ da base de uma encosta ao topo da encosta é de 60^o, conforme Figura 6.10. Que medida deve ter um cabo que ligue o pé da árvore ao topo da encosta?

Figura 6.10: Resolução de Problemas 5

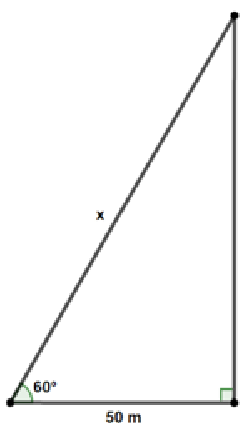


Fonte: [5]

Resolução:

Observamos na Ilustração 6.10 que é possível identificar o triângulo retângulo representado na Figura 6.11.

Figura 6.11: Resolução de Problemas 5



Fonte: O autor, 2019.

Pela figura temos:

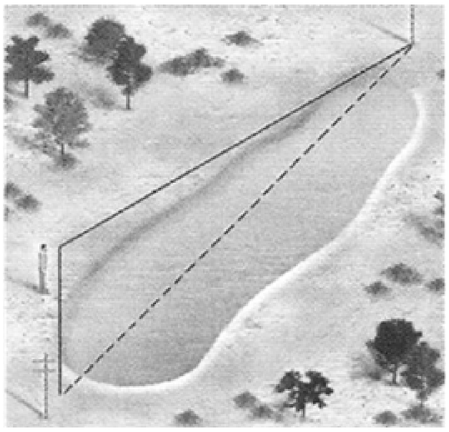
$$\begin{cases} 50\text{: medida do cateto adjacente ao ângulo de } 60^{o} \\ x\text{: medida da hipotenusa} \end{cases}$$

$$\cos 60^{o} = \frac{50}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{50}{x} \Rightarrow x = 100$$

Logo, a medida do cabo deve ser 100 m.

6. Uma empresa de fornecimento de energia, ao instalar a rede elétrica numa fazenda, precisou colocar dois postes em lados opostos de um lago para permitir a passagem da fiação. Com isso surgiu um pequeno problema: para fazer o projeto da rede, seria necessário saber a distância entre os postes, e a presença do lago impedia a medição direta dessa distância, conforme mostra a Figura 6.12.

Figura 6.12: Resolução de Problemas 6



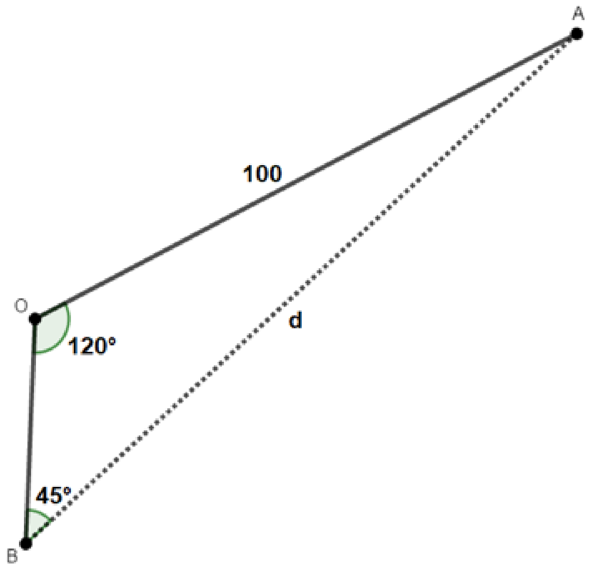
Fonte: [7]

(a) Um dos engenheiros posicionou-se em um local onde era possível visualizar os dois postes e medir a distância entre eles. Com um aparelho apropriado, ele mediu o ângulo entre a linha de visão dele e os postes, obtendo 120^{o}. Um auxiliar mediu a distância entre o engenheiro e o poste mais afastado e obteve 100m; um outro auxiliar mediu o ângulo entre a linha do poste mais próximo do engenheiro e a linha entre os postes, obtendo 45^{o}. Com essas informações, o engenheiro sorriu. Ele já conseguiria calcular a distância entre os postes. Portanto, qual essa distância?

Resolução:

Para resolução tomaremos como base a Figura 6.13 a seguir que representa o esquema do problema em questão.

Figura 6.13: Resolução de Problemas 6



Fonte: O autor, 2019.

Aqui podemos utilizar a lei dos senos, onde:

$$\frac{100}{\operatorname{sen} 45^{o}} = \frac{d}{\operatorname{sen} 120^{o}} \Rightarrow \frac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{d}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$d\sqrt{2} = 100\sqrt{3}$$
$$d = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$d = \frac{100\sqrt{6}}{2}$$
$$d = 50\sqrt{6} = 122,47\ m$$

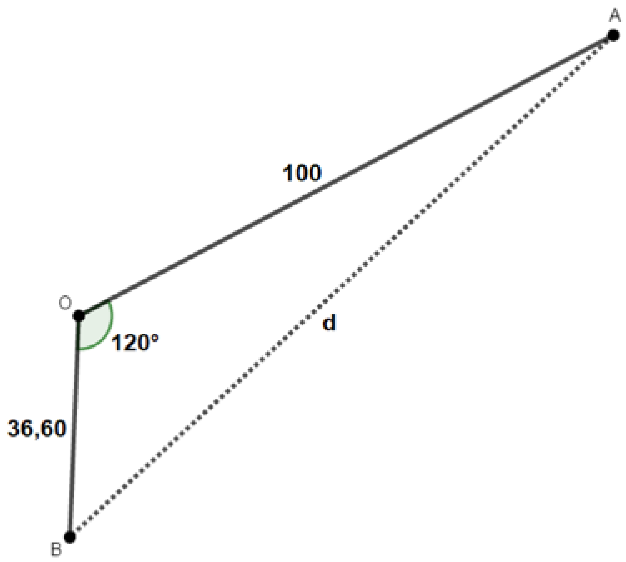
Então, a distância entre os postes é de aproximadamente $122,47\ m$.

(b) Imagine que encontrado alguma dificuldade para obter o ângulo de 45^{o}, ou mesmo que não quisesse obtê-lo, o engenheiro poderia ter pedido ao seu segundo auxiliar que medisse a distância do local onde ele estava até o poste mais próximo. Assim, além do valor do ângulo (120^{o}) que o engenheiro já havia medido e a distância ($100\ m$) entre o poste mais afastado e ele, o engenheiro teria obtido a nova distância, de $36,60\ m$, entre o poste mais próximo a ele. Essas informações também permitiriam calcular a distância desejada. Calcule essa distância.

Resolução:

Para resolução tomaremos como base a Figura 6.14 que representa o esquema do novo problema agora em questão.

Figura 6.14: Resolução de Problemas 6



Fonte: O autor, 2019.

Diante das informações oferecidas pela questão, aqui podemos agora aplicar a lei dos cossenos, onde:

$$d^2 = 100^2 + (36,6)^2 - 2 \cdot 100 \cdot 36,6 \cdot \cos 120^{\text{o}}$$

$$d^2 = 10000 + 1339,56 - 7320 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$d^2 = 10000 + 1339,56 + 3660$$

$$d^2 = 15000$$

$$d = 122,47$$

6.2 Sequência Didática

A DEMONSTRAÇÃO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM DAS RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Conteúdo:

Relações Métricas no Triângulo Retângulo e Teorema de Pitágoras.

Habilidades da BNCC:

EF09MA13 - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o Teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Objetivos específicos:

1. Analisar casos de semelhança de triângulos e aplicar a propriedade de semelhança.
2. Utilizar ferramentas algébricas para realizar as demonstrações.
3. Realizar a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo e, dentre elas, o Teorema de Pitágoras.

Ano: 9º ANO

Tempo estimado: Três aulas

Duração: Foram estipuladas três aulas de 50 minutos. Essa escolha foi feita sabendo que a construção dos conhecimentos pedidos em cada atividade pode levar mais de uma aula.

Local: Sala de aula.

Desenvolvimento:

<u>Aula nº 01</u>

1ª Etapa – Tempo sugerido: 15 minutos. Nesse primeiro momento, será feita uma provocação nos alunos através das seguintes indagações: O que são recursos algébricos? O que é uma demonstração? É importante fazer uma discussão com a turma e enfatizar que demonstrar é utilizar algum recurso capaz de atestar a veracidade ou autenticidade de alguma coisa. É o ato de provar determinada afirmação. Diante disso, o recurso algébrico torna-se uma ferramenta fundamental capaz de generalizar o resultado, uma vez que não utilizaremos exemplos numéricos.

2ª Etapa – Tempo sugerido: 15 minutos. Fazer uma sondagem com a turma para verificar se eles sabem sobre semelhança de triângulos. Logo em seguida discuta com a turma sobre semelhança de triângulos e a aplicação da propriedade de semelhança.

3ª Etapa – Tempo sugerido: 20 minutos. Sugerir a resolução da Atividade 1 a seguir:

Atividade 1

Observe o triângulo retângulo ABC na Figura 6.15:

Figura 6.15: Triângulo ABC

Fonte: O autor, 2019.

Qual a relação entre α e β?

É importante que no instante em que os alunos estiverem respondendo a esta atividade, sejam questionados sobre a propriedade da soma dos ângulo interno de um triângulo. Eles deverão dar as respostas em função de α e β.

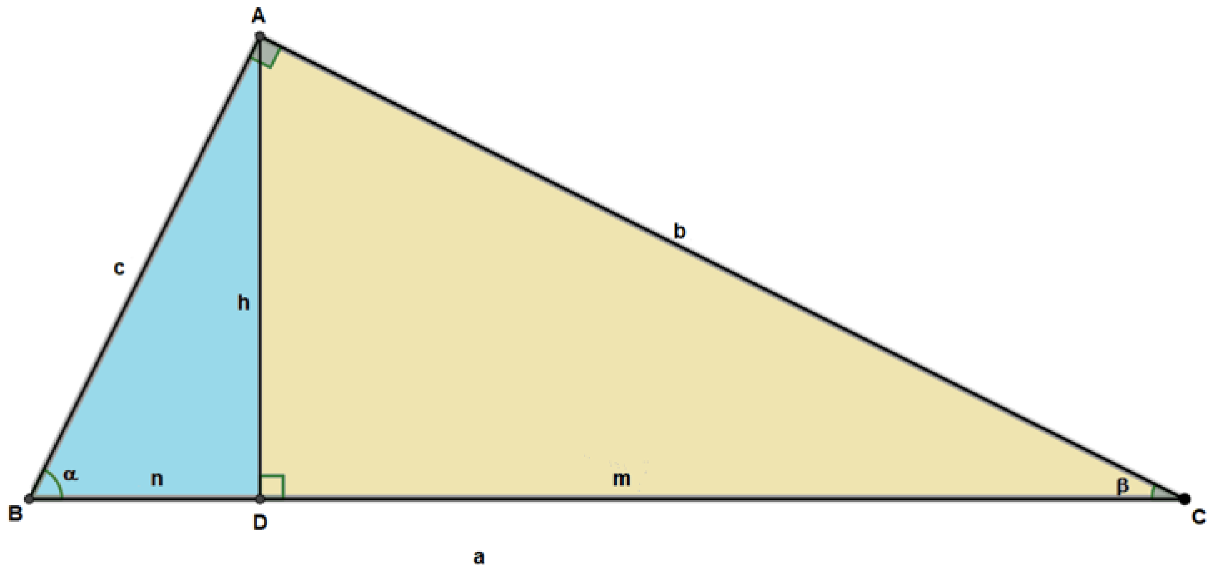
Aula nº 02

1ª Etapa – Tempo sugerido: 15 minutos. Sugerir a resolução da Atividade 2 a seguir.

Atividade 2

Observe que agora o triângulo retângulo ABC foi dividido em outros dois triângulos: DBA e DAC, conforme a Figura 6.16.

Figura 6.16: Triângulo ABC



Fonte: O autor, 2019.

Qual as medidas dos ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$?

Nesta etapa o intuito é relacionar as medidas de dois ângulos. É importante mais uma vez alertá-los sobre a soma dos ângulos internos do triângulo e chamar atenção dos alunos que o triângulo é o mesmo trabalhado na Atividade 1, trabalhado na aula nº 01, mas neste caso ele foi dividido em dois outros triângulos também retângulos.

O objetivo desta etapa é de descobrir que os ângulos se repetem para depois poder utilizar a semelhança de triângulos.

Após 10 minutos faça a intervenção com os alunos. É importante que todos compreendam esta etapa. Discuta os seguintes tópicos com a turma:

Considerando o triângulo ADB, o que podemos afirmar sobre a soma dos ângulos internos?

Já sabemos que um ângulo é de 90º, quanto deve ser a soma dos outros dois ângulos?

Um dos ângulos mede α, o que deve acontecer com o outro ângulo?

Quanto mede $\alpha + \beta$?

Faça os mesmos questionamentos em relação ao triângulo ADC:

Considerando o triângulo ADC, o que podemos afirmar sobre a soma dos ângulos internos?

Já sabemos que um ângulo é de 90º, quanto deve ser a soma dos outros dois ângulos?

Um dos ângulos mede β, o que deve acontecer com o outro ângulo?

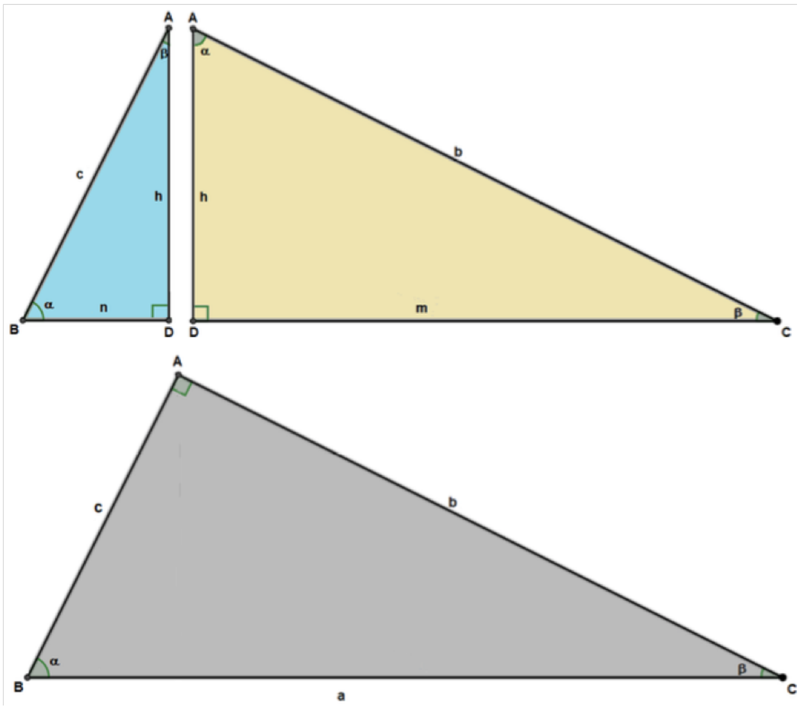
Quanto mede $\alpha + \beta$?

2ª Etapa – Tempo sugerido: 35 minutos. Sugerir a resolução da Atividade 3 a seguir:

Atividade 3

Observe a Figura 6.17.

Figura 6.17: Triângulo ABC



Fonte: O autor, 2019.

Os triângulos DBA e DAC são semelhantes?

Aplique a propriedade da semelhança nos triângulos DBA e DAC e deduza a primeira relação métrica.

Os triângulos ABC e DAC são semelhantes?

Aplique a propriedade da semelhança nos triângulos DBA e DAC e deduza mais duas relações métricas.

Após quinze minutos faça a intervenção. Mostre o caso (AA) que garante a semelhança de triângulos. É muito importante que neste momento a turma compreenda o objetivo desta etapa que é utilizar a semelhança de triângulos para relacionar os lados proporcionais. Incentive os alunos no momento de escrever a semelhança utilizar os vértices proporcionais na seguinte ordem:

$$\triangle ADB \sim \triangle CDA$$

Escreva as razões:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{DB}{DA} = \frac{AB}{CA}$$

Considere as razões determinadas e substitua pelos valores dados nos triângulos:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} = \frac{c}{b}$$

Nas duas primeiras razões, aplique a propriedade das proporções. Multiplique os extremos pelos meios. Temos:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$$

De forma análoga ao exercício anterior compare os triângulos ABC e DAC. Mantenha o triângulo na mesma posição inicial para que o aluno consiga relacionar que o triângulo DAC é uma parte do triângulo maior ABC. Assim como no exercício anterior, os alunos devem provar a semelhança e depois apresentar os lados proporcionais. O objetivo nesta etapa é encontrar mais duas relações. Incentive os alunos no momento de escrever a semelhança utilizar os vértices proporcionais na seguinte ordem:

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC$$

Escreva as razões e substitua pelos valores dados nos triângulos:

$$\frac{AB}{DA} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

Considere a 1ª e a 2ª razão e aplique a propriedade das proporções. Multiplique os extremos pelos meios. Temos:

$$\frac{c}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

Aplique o mesmo procedimento na 2ª e 3ª razão:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$$

Aula nº 03

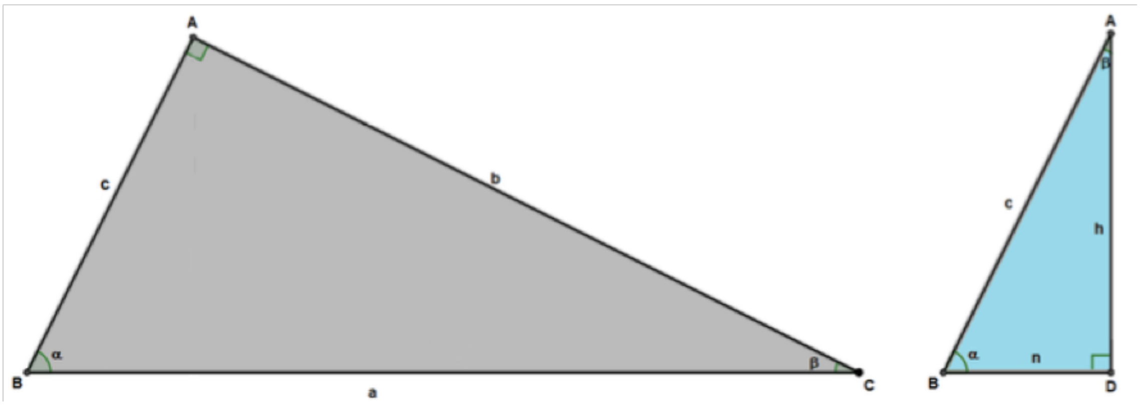
1ª Etapa –Tempo sugerido: 25 minutos.

Sugerir a resolução da Atividade 4 a seguir:

Atividade 4

Vamos comparar agora os triângulos ABC e DBA. Observe a Figura 6.18:

Figura 6.18: Triângulo ABC



Fonte: O autor, 2019.

Os triângulos ABC e DBA são semelhantes?

Aplique a propriedade da semelhança nos triângulos ABC e DBA e deduza mais uma relação métrica.

Após dez minutos faça a intervenção. Mostre o caso (AA) que garante a semelhança de triângulos. Lembre-se que o objetivo desta etapa é utilizar a semelhança de triângulos para relacionar os lados proporcionais e assim, deduzir mais uma relação. Incentive os alunos no momento de escrever a semelhança utilizar os vértices proporcionais na seguinte ordem:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA$$

Escreva as razões e substitua pelos valores dados nos triângulos:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{DA} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h}$$

Nas duas primeiras razões, aplique a propriedade das proporções. Multiplique os extremos pelos meios. Temos:

$$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n$$

2ª Etapa −Tempo sugerido: 25 minutos.

Faça uma análise das propriedades demonstradas e relacionando a Figura 6.19.

Figura 6.19: Triângulo ABC

Fonte: O autor, 2019.

$$b^2 = a \cdot m \tag{6.3}$$

$$c^2 = a \cdot n \tag{6.4}$$

$$h^2 = m \cdot n \tag{6.5}$$

$$b \cdot c = a \cdot h \tag{6.6}$$

Para finalizar, sugira que os alunos somem (6.3) e (6.4) e faça uma breve discussão sobre o resultado obtido para finalizar a aula.

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$$

$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

O objetivo aqui é provar o Teorema de Pitágoras.

Avaliação:

Avaliação processual, observando a participação dos alunos nas atividades e questionamentos feitos na mediação do professor.

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas

O Triângulo retângulo, objeto de estudo desse trabalho, tem uma importância relevante no Ensino Básico. Suas propriedades e aplicações passeiam por diversos conteúdos de matemática e sua não compreensão acarreta sérios prejuízos à aprendizagem.

Esse estudo buscou salientar a necessidade de um aprimoramento didático enfatizando a necessidade das demonstrações na compreensão das propriedades matemáticas apresentadas e, com isso, reforçamos o significado prático de cada uma delas oferecendo ao aluno maior competência para aplicá-las. Queremos que o aluno não apenas tenha o saber, mas que saiba o que fazer com o saber. Por isso, além do estudo sobre o triângulo retângulo e suas contribuições matemáticas, apresentamos também algumas questões de aplicação onde na resolução dos problemas utilizamos algumas das contribuições estudadas. Além disso e, como perspectiva futura, é importante uma reflexão sobre a utilização de recursos tecnológicos aliadas ao processo de ensino aprendizagem. Como exemplo temos o software de geometria dinâmica GeoGebra que pode auxiliar o professor no alcance de melhores resultados sobretudo nos Teoremas e relações estudados.

Espero, dessa forma, que este trabalho contribua no auxílio de professores e alunos e cumpra com o seu principal objetivo que é o de evidenciar a relevância do triângulo retângulo, aprimorar o seu estudo e apontar possibilidades para o trabalho em sala de aula.

Referências Bibliográficas

[1] *Babilônicos podem ter criado trigonometria mais precisa.* (s.d.). Acesso em 02 de abril de 2019, disponível em Impa: https://impa.br/noticias/babilonios-podem-ter-criado-a-mais-antiga-e-precisa-tabela-trigonometrica/.

[2] Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blucher.

[3] Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).* Brasília, Brasil: MEC/SEF.

[4] Brasil. Ministério da Educação. (2016). *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília: MEC/SEF.

[5] Cabral, M. S. (s.d.). *A trigonometria no triângulo retângulo.* Acesso em 24 de junho de 2019, disponível em mscabral: http://mscabral.pro.br/sitemauro/praticas/trigo.htm. 105

[6] Cardy, P. (s.d.). *Tangente no Triângulo Retângulo.* Acesso em 23 de junho de 2019, disponível em Profcardy: http://www.profcardy.com/cardicas/tangente-no-triangulo-retangulo.php. 37

[7] *Curiosidades históricas.* (s.d.). Acesso em 24 de junho de 2019, disponível em Matematika: http://matematika.no.comunidades.net/index.php?pagina=1577499273. 42, 106

[8] Dante, L. R. (2011). *Matemática: contexto e aplicações* (5ª ed., Vol. 1). São Paulo: ática. 22

[9] Dante, L. R. (2011). *Matemática: contexto e aplicações* (5ª ed., Vol. 2). São Paulo: Ática. 22

[10] Dutra, A. d., Carvalho, A. L., & Valenço, I. R. (2017). *Sistema interativo de ensino: ensino médio: matemática* (1ª ed., Vol. 2º ANO). Tatuí: Casa Publicadora Brasileira. 28, 29, 36, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 84

[11] Eves, H. (2011). *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora da Unicamp. 36, 40

[12] *Funções Trigonométricas: As fórmulas de adição* (s.d.) Acesso em 20 de junho de 2019, disponível em youtube: https://www.youtube.com/watch?v=qwt3CAj5V24. 84

[13] Freitas, P. N. (s.d.). *Pitágoras: curiosidades do matemático grego com fobia de feijão.*Acesso em 23 de junho de 2019, disponível em grupoescolar: https://www.grupoescolar.com/a/b/62D61.jpg. 38

[14] Garbi, G. G. (2006). *A Rainha das Ciências* (3ª ed.). (J. R. Marinho, Ed.) São Paulo: Livraria da Física.

[15] Iezzi, G. (2013). *Fundamentos da Matemática Elementar Trigonometria* (Vol. 3). São Paulo: Atual. 22

[16] Kilhian, K. (2013). *Distância Entre Dois Pontos No Plano.* Acesso em 24 de junho de 2019, disponível em O Baricentro da Mente: https://www.obaricentrodamente.com/2013/06/distancia-entre-dois-pontos-no-plano.html. 62

[17] Kilhian, K. (2018). *Teorema de Pitágoras - Método de Perigal.* Acesso em 24 de junho de 2019, disponível em O Baricentro da Mente: https://www.obaricentrodamente.com/2018/11/teorema-de-pitagoras-metodo-de-perigal.html. 46

[18] Lima, E. L., Carvalho, P. C., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2013). *emas e problemas elementares.* Rio de Janeiro: SBM. 36, 43, 97, 98

[19] Loomis, E. S. (1972). *The Pythagorean Proposition.* Washington D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

[20] Maciel, W. (s.d.). *Pitágoras.* Acesso em 23 de junho de 2019, disponível em InfoEscola: https://www.infoescola.com/filosofos/pitagoras/.

[21] Paiva, M. R. (1995). *Matemática (Vol. 1).* São Paulo: Moderna. 22, 36

[22] Pereira, A. C. (2010). *A obra de triangulis omnimodis libri quinque de Johann Müller Regiomontanus (1436 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria.* Tese (Doutorado em Educação) , Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

[23] *Pythagoras generalizatoin.* (s.d.). Acesso em 24 de junho de 2019, disponível em Wikimedia: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ad/ Pythagorasgeneralizatoin1.JPG. 63

[24] Rendak, M. (s.d.). *Teorema de Pitágoras.* Acesso em 24 de junho de 2019, disponível em profes: https://profes.com.br/marcosrendak/blog/teorema-de-pitagoras. 41

[25] Silva, H. A. (2016). *Regimento.* Acesso em 03 de julho de 2019, disponível em Profmat: http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/.

[26] *Transferidor.* (s.d.). Acesso em 23 de junho de 2019, disponível em Dream Brindes: https://www.culturadotabaco.com/transferidor.html. 25

[27] Araújo, M. P. (s.d.) *Uma propriedade dos retângulos* Acesso em 20 de junho de 2019, disponível em youtube: https://www.youtube.com/watch?v=ylWhIyvdJvc&list=PLrVGp617x0hDq3GBNUeSLv6B-4fGHG4cJ&index=6. 97

[28] Souza, F. H. (s.d.) *Demonstração geométrica da desigualdade das médias* Acesso em 20 de junho de 2019, disponível em youtube: https://www.youtube.com/watch?v=rVcFfRMiSmU&list=PLrVGp617x0hDWkj5le9mJUMG28TxspB-A&index=10. 84

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA
CEP: 44380-000
Telefone: (75) 3621-2350
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>