UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

FABRÍCIO FERREIRA DIAS

O USO DA PLANILHA ELETRÔNICA CALC NO ENSINO DE MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

FABRÍCIO FERREIRA DIAS

O USO DA PLANILHA ELETRÔNICA CALC NO ENSINO DE MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e Classificação da Biblioteca Central da UFV

T

D541a
2013

Dias, Fabrício Ferreira, 1981-
O uso da planilha eletrônica calc no ensino de matemática no primeiro ano do ensino médio / Fabrício Ferreira Dias. – Viçosa, MG, 2013.
vi, 83 f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Mehran Sabeti.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 82 - 83.

1. Matemática (Ensino Médio) - Ensino auxiliado por computador. 2. Calc (Programa de computador). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

CDD 22. ed. 510.28553

FABRÍCIO FERREIRA DIAS

O USO DA PLANILHA ELETRÔNICA CALC NO ENSINO DE MATEMÁTICA NO PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título *Magister Scientiae*.

APROVADA: 18 de março de 2013.

Lucy Tiemi Takahashi

Kennedy Martins Pedroso

Mehran Sabeti
(orientador)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que me deu forças para prosseguir em meio ao medo e diante dos desafios.

Agradeço aos meus amigos que me apoiaram com seus estímulos.

Agradeço aos meus familiares pelos dias que se preocuparam com a minha ausência.

Agradeço ao meu orientador pelos bons conselhos.

Agradeço ao Capes por ter financiado este projeto e proporcionado a realização de um sonho.

Em especial, agradeço aos meus professores que acreditaram em mim e me ajudaram a alcançar essa vitória.

SUMÁRIO

RESUMO

DIAS, Fabrício Ferreira, M.Sc., Universidade Federal de Vicosa, março de 2013. **O uso da planilha eletrônica Calc no ensino de matemática no primeiro ano do ensino médio.** Orientador: Merhan Sabeti.

No Brasil, um dos assuntos principais que se estuda no primeiro ano do Ensino Médio é função. O cálculo de juros, o estudo das progressões e a apresentação de dados estatísticos por meio de tabelas, gráficos e médias também fazem parte da grade curricular. A proposta deste trabalho é mostrar estratégias interessantes como metodologia para o ensino de matemática no primeiro ano do Ensino Médio, utilizando-se da planilha eletrônica Calc, que permite a manipulação das funções, construção de tabelas e fórmulas, explorando temas do cotidiano dos estudantes de forma participativa, o que possibilita o desenvolvimento de habilidades de investigação, incentiva a criatividade e autonomia, bem como proporciona aos educadores um trabalho pedagógico estimulante e uma aprendizagem significativa.

ABSTRACT

DIAS, Fabrício Ferreira, M.Sc., Universidade Federal de Vicosa, March, 2013. **Use the Calc spreadsheet in mathematics teaching in the first year of high school.** Adviser: Merhan Sabeti.

In Brazil, one of the main subjects studied in the first year of high school is to function. The calculation of interest, the study of the progression and presentation of statistical data through tables, graphs and averages are also part of the curriculum. The purpose of this paper is to show interesting strategies as a methodology for teaching mathematics in the first year of high school, using the Calc spreadsheet that allows the manipulation of functions, building tables and formulas, exploring themes of daily life for students participatory manner, which enables the development of research skills, encourages creativity and autonomy, as well as provides to educators, educational work stimulating and meaningful learning.

INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho de dissertação é apresentar estratégias didáticas concretas e de fácil assimilação, como metodologia para o ensino de matemática no primeiro ano do Ensino Médio, utilizando-se de recursos computacionais, especificamente de planilhas eletrônicas.

Um dos assuntos principais que se estuda no primeiro ano do Ensino Médio é Função. Além do mais, o cálculo de juros compostos e o estudo das progressões podem ser trabalhados inseridos no contexto das funções. A apresentação de dados estatísticos através de tabelas, gráficos e médias também fazem parte da grade curricular do primeiro ano do ensino médio. Encontrar estratégias de ensino que viabilizem o processo de aprendizagem e conceituação desses conteúdos é de grande importância.

Este trabalho enfatiza a construção de tabelas e gráficos, com o uso da planilha eletrônica Calc, como uma ferramenta para auxiliar o professor em alcançar resultados satisfatórios em sua didática de sala de aula. Para isso, no capítulo 1 será explanada a importância do uso de recursos tecnológicos no ensino de matemática com ênfase na resolução de problemas com auxílio desses. No capítulo 2 será apresentado um breve manual de como usar as planilhas eletrônicas. Já no capítulo 3 serão expostas algumas abordagens diferenciadas para o ensino de função, por meio da análise de gráficos e tabelas, decorrentes de situações problema, modelados matematicamente, por exemplo, análise da velocidade de crescimento de uma curva. Também serão abordadas, no capítulo 4, progressões dentro do contexto de funções e matemática financeira, no capítulo 5. As noções básicas de estatística encerram com um capítulo à parte.

Constatou-se através da experiência do autor em trabalhar com alguns alunos e professores, e através de pesquisa em material bibliográfico, que ao colocar o discente como construtor de seu conhecimento, parceiro na escolha dos problemas, e agente real deste processo, a aprendizagem pode se tornar mais significativa, além de poder despertar o interesse do aluno, já acostumado com recursos computacionais em seu dia a dia.

Este trabalho tem como objetivo apresentar um método diferenciado para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática por meio de sequências didáticas, embasadas na abordagem a partir de situações-problema e visualização gráfica, inseridas nos princípios da transformação semiótica[1] de conversões. As con-

[1] Semiótica é o ramo da ciência que estuda a interação de pessoas com objetos e sua visualização. Vem do grego: *semeion* que significa signo (símbolo) e *ótica* que significa ciência.

versões consistem em uma transformação de uma representação semiótica em uma outra, mudando de sistema, mas conservando a referência ao mesmo objeto. Por exemplo, uma função pode ser representada por meio de vários signos como a lei algébrica, e,ou, uma tabela, e, ou, um gráfico.

Um questionamento que poderia ser feito é quanto ao motivo de se usar uma planilha eletrônica, e não outros *softwares*[2] de construção gráfica. O que há de inovador neste projeto é poder trabalhar com uma planilha eletrônica e, com isso, as três formas de representação mencionadas anteriormente, de forma a agilizar o processo que geralmente era feito à mão, enriquecendo a metodologia de ensino. O público alvo são professores de matemática, de educação básica, embora possa ser usado também por alunos, haja vista ter uma linguagem simples e acessível. O foco principal é que seja usado com alunos do primeiro ano do ensino médio.

Assim, comprova-se que o ensino de alguns tópicos da matemática, fazendo uso da planilha eletrônica, permite a manipulação das funções, construção de tabelas e fórmulas, explorando temas do cotidiano dos estudantes de forma interativa, o que possibilita o desenvolvimento de habilidades de investigação, incentiva a criatividade e autonomia, bem como proporciona aos educadores um trabalho pedagógico estimulante e uma aprendizagem significativa.

[2] *Software* ou programa de computador é o nome dado ao comportamento exibido por uma sequência de instruções que descrevem uma tarefa a ser executada em um computador ou máquina semelhante.

1 RECURSOS TECNOLÓGICOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

1.1 A matemática no primeiro ano do Ensino Médio

O Conteúdo Básico Comum de Matemática (CBC), para o primeiro ano do Ensino Médio no Brasil, traz alguns eixos temáticos que orientam o ensino do conteúdo, em todas as escolas brasileiras, entre os quais funções, estatística e matemática financeira fazem parte. Quanto ao primeiro tema, função, é um dos mais importantes em matemática e dele sucedem diversos pressupostos para áreas diversas das ciências exatas, como física, por exemplo. Quanto à estatística, há muitas aplicações no cotidiano, como a apresentação de dados coletados em uma pesquisa de campo, dentro da própria comunidade escolar, por exemplo. E ainda, a matemática financeira faz parte da formação do cidadão consumidor crítico. Sendo, portanto, temas de grande relevância na matemática da educação básica, assim como muitos outros também são.

Desde cedo, no Ensino Médio, os alunos se deparam com as funções matemáticas. Pode ser um pouco difícil para alguns entenderem sua definição e suas aplicações, dentro de contextos práticos e mesmo abstratos, haja vista ter um grande número delas, embora englobe um mesmo princípio básico de interdependência de variáveis. Alguns outros tópicos, como progressões e juros, podem ser explorados como funções. Portanto, a plena compreensão de seu significado é de muita importância para o sucesso acadêmico.

Para D'Ambrósio (1991), geralmente, os alunos têm um interesse maior por assuntos em que eles possam ter uma participação mais ativa. A estatística é um dos ramos da matemática que permite isso, pois possibilita pesquisas de campo para coleta dados, que são do interesse comum. Assim, saber como organizar e apresentar esses dados, ou mesmo interpretar informações, desse cunho, é de grande relevância no mundo da informação atual. Tão importante é essa área que existem cursos de graduação específicos para ela e conhecer seus conceitos básicos é fundamental nos dias de hoje.

Segundo Giraldo *et al* (2012), a matemática financeira propicia a capacidade de reflexão sobre a tomada de decisões quanto a escolher uma melhor forma de pagamento, ou a viabilidade de um financiamento, a longo, médio e curto prazo, por exemplo. Neste contexto, compreender como gastar o próprio dinheiro de forma consciente, entender e escolher melhor as dívidas e aplicações financeiras auxilia, em muito, na formação para a cidadania dos jovens e adultos do mundo consumista atual.

Embora para um professor possa ser interessante todo o exposto anteriormente, dependendo da forma como é feito em sala de aula, pode não ser tão interessante para alguns alunos. Assim, requer-se uma análise sobre os objetivos educacionais a serem alcançados ao se trabalhar com esses conteúdos.

De acordo com Pirola (2010, p.207),

> A motivação no aprendizado em Matemática, segundo Daher & Morais (2007), consiste num processo de ensino que requer interesse em se criar estratégias na abordagem dos conteúdos. Desse modo está lançado o grande desafio da maioria dos professores:"provocar" no educando o interesse pelo conteúdo proposto. [...] Essa relação interfere diretamente nos resultados que são esperados para tal propósito de aprendizagem, uma vez que se tenha empenho na busca constante por novas perspectivas de ensino;

Desta forma, para Moran (2007), há a necessidade de se posicionar o discente como sujeito ativo na aquisição do conhecimento, proporcionando para ele um ambiente favorável à sua motivação e participação.

1.2 O uso de *softwares* no ensino de matemática

Segundo Borba (2005), com o advento de novas tecnologias e recursos computacionais, o uso de *softwares* se tornou um auxílio pedagógico formidável para a inclusão digital na sociedade informatizada atual e como fator de motivação nos processos educacionais. Assim, o uso desses recursos, como estratégia didática que facilite o processo de ensino na matemática, e por consequência das funções, estatística e matemática financeira, deve ser explorado.

> Em uma velocidade incrível, a aplicação crescente de tecnologia vem transformando o papel do professor, que deve assumir, como mediador do processo de aprendizagem, o papel de "problematizador" que ajuda o aluno a buscar de maneira autônoma a solução, bem como estreitar o caminho entre o conhecimento empírico e o conhecimento científico. (Pirola, 2010, p.208)

O computador dever ser utilizado, tanto pelos professores quanto pelos alunos, como um instrumento que irá desempenhar algumas tarefas, de forma mais atraente, como na construção de tabelas e na manipulação gráfica, e de forma mais ágil, acelerando processos computacionais, proporcionando maior tempo para se fazer suposições, conjecturas, determinar propriedades e fazer simulações, atividades que, com lápis e papel, necessitam de demasiado tempo (MORAN, 2003). Desta forma, o professor pode planejar melhor seus espaços e tempos, afim de alcançar objetivos mais profundos ao ensinar determinado conteúdo, estimulando os alunos para a exploração de ideias e conceitos matemáticos, oferecendo-lhes a oportunidade de descobrirem e estabelecerem relações matemáticas empiricamente, etapas importantes no desenvolvimento da matemática.

Por intermédio da utilização dos *softwares*, os alunos poderão experimentar novas formas de resolução de problemas, aumentando o entusiasmo por seu próprio aprendizado.

Valente (1991) alerta que :

> [...] o computador para ser efetivo no processo de desenvolvimento da capacidade de criar e pensar não pode ser inserido na educação como uma máquina de ensinar. [...] O computador, no paradigma construcionista, deve ser usado como uma ferramenta que facilita a descrição, a reflexão e a depuração de idéias.

Para Borba (2005), a proposta de trabalho com *softwares* educativos deve ir muito além da mera transmissão de informação, mas sim, servir como auxílio do processo de construção do conhecimento, em que o centro do processo educacional não é o professor, mas o aluno. O computador deve ser utilizado como enriquecedor do ambiente de aprendizagem. É fato que simplesmente fazer uso de novas tecnologias não garante excelência na qualidade educacional. Deve-se tomar cuidado para não dar ênfase demasiada na memorização dos processos, colocando o aluno como simples receptáculo de informação.

> A introdução de uma ferramenta tecnológica em sala de aula deve se orientar por objetivos e competências a serem adquiridas pelos estudantes. Caso contrário, é bastante provável que a ferramenta não seja realmente integrada ao processo de ensino, convertendo-se apenas em um simples adereço. Este processo deve envolver a compreensão da adequação da ferramenta aos conceitos matemáticos abordados, bem como as perspectivas didáticas em que ocorre a integração da tecnologia.(Giraldo, *et al*, 2012, p.231)

Desta forma, é necessário que se seja criterioso na seleção dos recursos mais viáveis para o ensino de determinado conteúdo matemático, avaliando-se a potencialidade de cada um deles e sua adequação aos objetivos conceituais e pedagógicos. Segundo Giraldo, *et al* (2012), "tais objetivos não podem ser estabelecidos a priori, como se o planejamento fosse concebido para uma aula convencional - a própria opção em usar recursos computacionais cria novas possibilidades instrucionais."

Assim Giraldo *et al* (2012) conclui que deve-se levar em conta os aspectos conceituais dos tópicos matemáticos, as especificidades de cada *software*, inclusive suas limitações, e a relação com o contexto educacional em que será usado. Desta forma, o que é aqui exposto são sugestões de atividades que devem ser analisadas segundo o contexto de cada ambiente educacional.

1.3 O uso de planilhas eletrônicas no ensino de matemática.

Há a necessidade de se reconhecer que nem todos os alunos, e mesmo os professores, dominam todos os recursos tecnológicos, usadas para educação, disponíveis. A falta de familiaridade com alguns *softwares*, presentes nas escolas de educação básico do país, faz com que alguns professores não usem esses recursos. O que é bem lógico.

Não se pode esperar que todos conheçam e usem desses. Mas, o ponto importante é que usá-los pode ser uma estratégia interessante para estimular os alunos, para criar aulas com maior participação e inserir os alunos na era da informatização escolar.

Este trabalho tem como foco o uso de planilhas eletrônicas como ferramenta para criação de modelos gráficos por meio de tabelas e fórmulas, que promovam uma melhor compreensão dos conceitos e definições relacionados a funções, progressões, estatística e matemática financeira, por proporcionar agilização dos processos computacionais, facilitando a aprendizagem e despertando o interesse. Tem por finalidade atender professores e alunos, oferecendo mais uma ferramenta que auxilia no processo de ensino/aprendizagem.

O objetivo é mostrar como utilizar esta poderosa ferramenta de ensino, que é o computador, com um direcionamento específico, modelos gráficos e tabelas construídos com planilhas eletrônicas[3], e a partir destes explorar diversos conceitos, como crescimento e decrescimento, fórmulas, modelagem, domínio, imagem, dependência, fazer previsão de dados, apresentar informações estatísticas, calcular médias, fazer análise financeira, entre outros, de maneira construtiva e interativa.

As planilhas eletrônicas atendem bem a esses anseios e são mais populares. A maioria das pessoas, que tem noção de informática, consegue trabalhar bem com uma planilha eletrônica. Embora existam *softwares* específicos que façam gráficos de funções, a abordagem sugerida é a articulação entre a construção de tabelas e a representação gráfica dos dados obtidos. Todo o processo que era feito apenas com lápis e papel agora pode ser feito com auxílio do computador de forma mais rápida e com maior precisão.

[3] *Software* que utiliza tabelas para realização de cálculos e inserção de dados.

> Na abordagem de tratamento da informação e Matemática Financeira, as planilhas podem ser empregadas com dados extraídos de situações concretas, que podem ser coletados pelos próprios alunos. As ferramentas estatísticas e gráficas disponíveis nas planilhas eletrônicas possibilitam a representação desses dados de diferentes formas numéricas e gráficas, e a análise, comparação e interpretação dessas representações, visando a formulação de conclusões e hipóteses. (Giraldo, *et al*, 2012, p.231)

Uma planilha eletrônica específica foi escolhida, chama-se Calc e pertence à suíte - um conjunto de aplicativos para escritório- chamada OpenOffice[4], que é compatível com diversos sistemas operacionais[5]. Mas a maioria das planilhas eletrônicas têm funcionalidades muito semelhantes, como o Excel[6], por exemplo. A escolha do Calc se deve ao fato de ser um *software* livre[7] que pode ser usado por qualquer pessoa ou instituição, em quantos computares for necessário, e utilizá-lo para qualquer propósito, tanto por empresas, governos e administração pública em geral, quanto por projetos educacionais e de inclusão digital. Oferece todas as funções de uma planilha profissional, entre outras, e pode ser exportado para outros formatos com facilidade, estando disponível na maioria das plataformas computacionais.

1.4 Contextualização matemática e visualização

Dentro das propostas pedagógicas para o ensino de matemática, uma abordagem interessante é partir de uma situação-problema e usar a matemática para tentar resolvê-la. Com isso, o objetivo é encontrar um caminho que permita despertar o interesse dos estudantes. O método consiste em encontrar situações do cotidiano que possam ser explicadas matematicamente e, assim, serem levadas para a sala de aula afim de que os estudantes sejam estimulados a usarem seus saberes para tentarem resolvê-la. Caso não tenham as ferramentas necessárias, o professor será o mediador do conhecimento que lhes falta.

Alguns professores usam também de modelagem matemática para alcançar uma maior participação dos educandos. Segundo Bassanezi (2006, p.31), "A modelagem matemática é um processo dinâmico de obtenção e validação de modelos,

[4]O pacote de aplicativos OpenOffice serviu de base para o desenvolvimento de outras suítes, como Apache OpenOffice, BrOffice.org, LibreOffice e NewOffice

[5]Sistema Operacional, sistema operativo ou *software* de sistema é um programa, ou um conjunto de programas, cuja função é gerenciar os recursos do sistema fornecendo uma interface de interação entre o computador e o usuário, como MS-Windows, Linux e Mac OS X.

[6]Microsoft Office Excel é um *software* de planilha eletrônica produzido e comercialiado pela Microsoft Corporation, empresa multinacional americana fundada por Bill Gates e Paul Allen.

[7]*Software* Livre, *software* de código aberto ou *software* aberto é qualquer programa de computador cujo código-fonte deve ser disponibilizado para permitir o uso, a cópia, o estudo e a redistribuição, podendo ser comercializado.

permitindo a abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências" . O objetivo é fazer com que os alunos sejam capazes de raciocinar, analisar, comparar e visualizar, competências vislumbradas pela experiência matemática do cotidiano.

Outro recurso importante, em que se pode trabalhar de maneira diferenciada o desenvolvimento do pensamento matemático, é a visualização, que permite potencializar o ensino da matemática junto da linguagem algébrica e axiomática das demonstrações.

A matemática faz muito uso de imagens, diagramas e processos simbólicos, até mesmo, para criação de conceitos bem abstratos, que se valem da imaginação do produtor para relacionar entes matemáticos, extrair suas propriedades, muitas vezes de um mundo não palpável, permitindo fazer inferências sobre a possíveis mudanças que podem ocorrer caso algum parâmetro da estrutura seja modificado.

Desta forma, as planilhas eletrônicas, aliadas à didática da contextualização matemática, permitem várias formas de representação semiótica, dando ao educando a oportunidade de construir, visualizar, manipular, interiorizar, abstrair e tirar conclusões, a partir de situações prováveis, escolhidas por eles, ou pelo professor, e trabalhadas em sala de aula de forma dinâmica e interativa.

2 PLANILHAS ELETRÔNICAS

2.1 Aplicativos livres para escritório

Quando se deseja escrever um texto, ou produzir uma apresentação de slides, ou mesmo construir uma tabela com dados quaisquer no computador, geralmente, faz-se uso de aplicativos de escritório, como editores de texto, planilhas eletrônicas, editores de desenhos e dados. Existe no mercado uma variedade de suítes de aplicativos com essas funcionalidades em conjunto como o Microsoft Office, que é proprietário e comercial, e o LibreOffice que é livre e gratuito.

Segundo o Parker *et al* (2012), LibreOffice é um dos pacotes de aplicativos de "escritórios totalmente funcional e disponível gratuitamente. Seu formato de arquivo nativo é o OpenDocument, um padrão de formato aberto que está sendo adotado, por governos do mundo inteiro, como um formato necessário para a publicação e aceitação de documentos" e por assim serem, podem ser utilizados em qualquer sistema operacional e livres de pagamentos e licenças. O LibreOffice também pode abrir e salvar documentos em muitos outros formatos, incluindo aqueles utilizados por várias versões do Microsoft Office.

O LibreOffice possue os seguintes componentes:

- Writer – processador de texto;
- Calc – planilha eletrônica;
- Impress – programa de apresentação de slides ou transparências;
- Draw – ferramenta de desenho vetorial;
- Math – editor de fórmulas matemáticas;
- Base – sistema gestor de base de dados.

A planilha eletrônica Calc será usada, embora, qualquer planilha eletrônica também possa ser. Informações sobre a instalação e configuração do LibreOffice, que possui o programa Calc, nos vários sistemas operacionais suportados, são dadas no site: https://pt-br.libreoffice.org/suporte/instalacao/.

2.2 Histórico das planilhas eletrônicas

Uma Planilha eletrônica, como são chamadas no Brasil, ou folha de cálculo, como são chamadas em Portugal, é um tipo de programa de computador que utiliza tabelas, ou seja, uma representação matricial com linhas e colunas, para realização de cálculos ou apresentação de dados, e são geralmente empregadas para aplicações financeiras e em pequenos bancos de dados.

Basicamente, com uma planilha, estão relacionados, os conceitos de células, linhas, colunas, pastas, abas, elaboração de tabelas e gráficos, uso de fórmulas, funções e macros, impressão, inserção de objetos, campos predefinidos, obtenção de dados externos, classificação, uso da barra de ferramentas, atalhos e menus.

Cada tabela é formada por uma grade composta de linhas e colunas que se intersetam formando, o que são chamadas, células, que são os componente elementares de uma planilha. O nome eletrônica se deve à sua implementação por meio de programas de computador. A primeira planilha eletrônica foi desenvolvida por Dan Bricklin em 1978, enquanto estudava administração de negócios na Escola de Negócios de Havard, com o auxílio de Bob Frankston, e se chamava **Visicalc** (veja figura 2.1). Ele percebeu que o professor demorava muito para realizar cálculos em uma planilha de controle, no quadro, em sala de aula, e com isso surgia a ideia da automatização do processo. [17]

A primeira versão foi lançada em 1979. Era eficaz para o que se esperava de grande parte dos computadores daquela época, realizando praticamente todas as atividades principais que caracterizam uma planilha eletrônica. Foi exatamente com esse aplicativo que se percebeu a potencialidade de mercado para comercialização de computadores para fins domésticos, práticos e corriqueiros.

Figura 2.1: Interface da planilha Visicalc.

Hoje, existem no mercado internacional, diversas planilhas eletrônicas. Uma das primeiras lançadas após a Visicalc foi a **Lotus 1-2-3** (veja figura 2.2). [17]

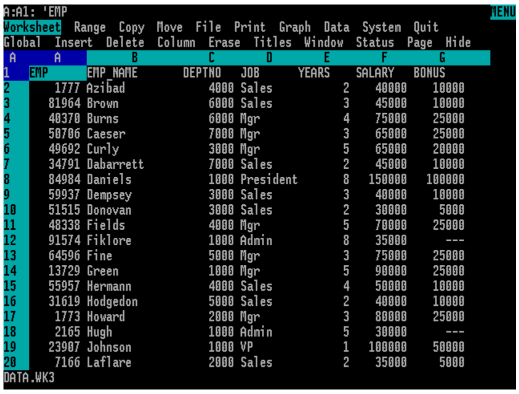


Figura 2.2: Interface da planilha Lotus 1-2-3.

Outra planilha muito popular no mundo é o Excel, cuja primeira versão surgiu em 1985, figura 2.3. Depois foram surgindo diversas versões, figura 2.4. O Excel foi o primeiro programa, de sua modalidade, a permitir ao usuário definir a aparência das planilhas, alterar a fonte, os atributos de caracteres e a aparência das células e tem opções avançadas de construção de gráficos. É considerada a planilha mais popular da atualidade. [17]

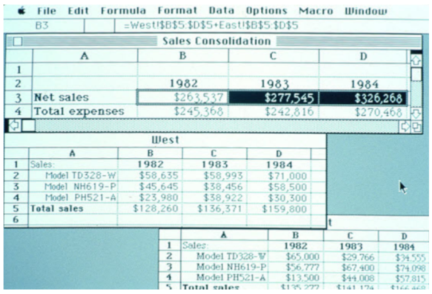


Figura 2.3: Interface do Excel 1.0.

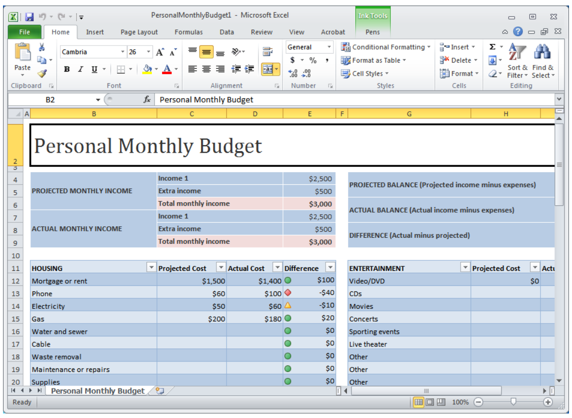


Figura 2.4: Interface do Excel 14.0 para Microsoft Excel 2010.

O **Calc** é um *software* de planilha eletrônica multiplataforma de código aberto.

É distribuído com as suítes Apache OpenOffice e NeoOffice. Por padrão, seu formato é ODF, mas tem suporte para exportação em outros formatos, como em PDF.

2.3 A Planilha eletrônica Calc - noções básicas

O Calc é um programa de planilha eletrônica que se parece muito com o Lotus 1-2-3 e o Excel. O *software* destina-se à criação de planilhas, tabelas e gráficos, com a inserção de equações matemáticas, auxiliando na elaboração de gráficos dinâmicos de acordo com os dados presentes na planilha.

O Calc opera com planilhas - várias folhas individuais, cada uma delas contendo tabelas com linhas e colunas, que se intersectam determinando células, que são nomeadas de forma análoga com as coordenadas de um ponto no plano cartesiano, com linhas representadas por um número e colunas por letras. Da mesma forma como em outras planilhas, uma célula particular é identificada pelo número da sua linha e a letra da sua coluna. As células guardam elementos individuais - texto, números, fórmulas, etc.

Por padrão, o Calc utiliza o formato ODF , mas reconhece e exporta arquivos em formatos de outras planilhas eletrônicas. Também exporta arquivos em PDF, sem a necessidade de instalação de uma extensão para isso. É capaz de suportar diversos macros utilizados pelo Excel.

O Calc permite a criação de uma fórmula, ou o uso de uma função, sem a necessidade de aprendizagem de códigos específicos e possui uma particularidade, que é definir séries para representações gráficas a partir da disposição dos dados organizados pelo usuário. De forma alternativa pode-se fornecer dados e utilizar o Calc no modo "E se...", alterando dados e observando os resultados sem a necessidade de redigitar a planilha por completo. A partir da versão 3.3 passou a suportar até 1.048.576 linhas e 1.024 colunas. E na versão 3.5 cada arquivo de planilha pode ter até 10.000 abas.

Resumidamente, as funcionalidades marcantes oferecidas pelo Calc são:

- Funções, que podem ser utilizadas para criar fórmulas para executar cálculos complexos;
- Funções de banco de dados, para organizar, armazenar e filtrar dados;
- Gráficos dinâmicos; um grande número de opções de gráficos em 2D e 3D;
- Macros, para gravação e execução de tarefas repetitivas;
- Capacidade de abrir, editar e salvar planilhas no formato Microsoft Excel;

- Importação e exportação de planilhas em vários formatos, incluindo HTML, CSV, PDF e PostScript.

2.3.1 Partes da janela principal do Calc

Ao abrir o Calc uma janela semelhante à figura 2.5 é exibida.

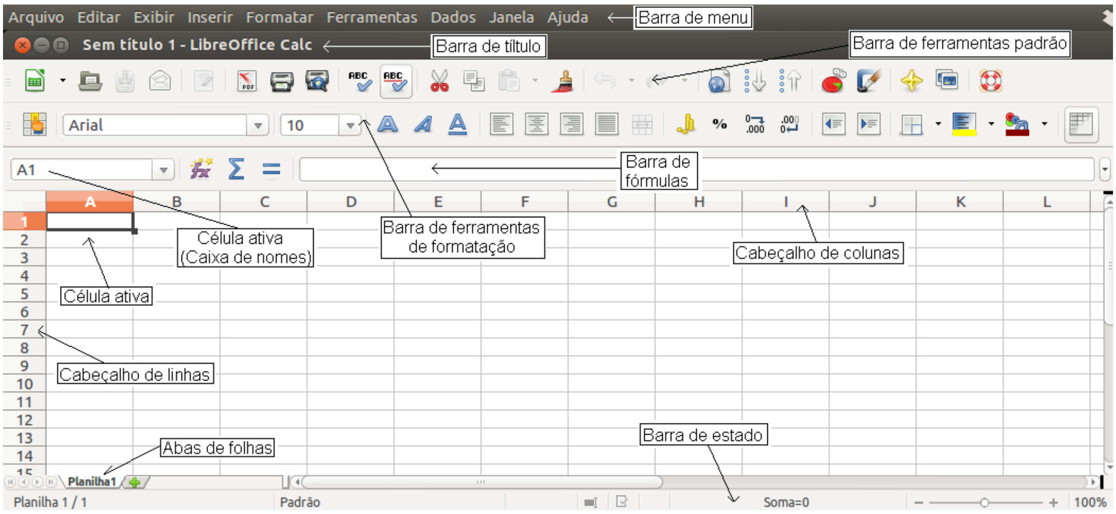


Figura 2.5: Partes da janela principal do Calc que surgirá ao abrir o programa.

Cada parte da janela principal tem seu nome e funcionalidade.

Barra de título

Localizada no alto da tela, mostra o nome da planilha atual. Se a planilha e nova, seu nome é Sem título, seguido por um número, figura 2.6. Quando a planilha é salva pela primeira vez, tem-se que dar um nome qualquer, ao ser solicitado. Também é na barra de título que aparecem os ícones de minimizar, maximizar/ restaurar e fechar.

Figura 2.6: Aparência da Barra de título no LibreOffice Calc.

Barra de menu

Geralmente, está logo abaixo da barra de título, mas pode vir acima dependendo do sistema operacional. Está repleta de menus para se trabalhar com a planilha, figura 2.7. Por exemplo, quando se escolhe a opção Arquivo, um submenu aparece com novas opções de funcionalidades, como a opção Salvar. Cada menu tem seu submenu. Quando se clica sobre um menu, as opções do submenu aparecem e movimentando-se o cursor sobre os outros menus os respectivos submenus são exibidos.

Figura 2.7: Aparência da Barra de menu do Calc.

Barras de ferramentas

Situadas logo abaixo das barras de título e de menu há, por padrão, três barras de ferramentas: a **Barra de ferramentas padrão**, a **Barra de ferramentas de formatação** e a **Barra de fórmulas**. Cada barra é repleta de ícones que oferecem uma grande quantidade de comandos e funções de forma rápida, como exportar diretamente o arquivo como formato PDF, com apenas um clique. Pode-se saber qual é a função de cada ícone por se posicionar o cursor sobre ele e alguns são como atalhos para acessar as opções dos submenus na barra de menu.

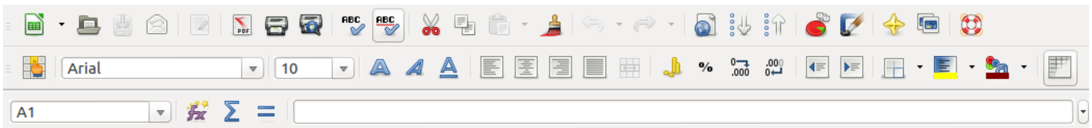


Figura 2.8: Aparência dos ícones das Barras de ferramentas.

Barra de formatação

Na **Barra de formatação**, figura 2.9, as três caixas de formatação à esquerda são as listas de **Aplicar Estilo**, **Nome da Fonte** e **Tamanho da Fonte**. Elas mostram as configurações atuais da célula, ou da área selecionada. Nesta barra encontram-se muitos ícones de ferramentas que facilitam muito na hora de formatar as células, como alterar o tipo, estilo, cor e alinhamento do texto; alterar as formas numéricas para decimal ou porcentagem; mesclar células; alterar cor de fundo e bordas.

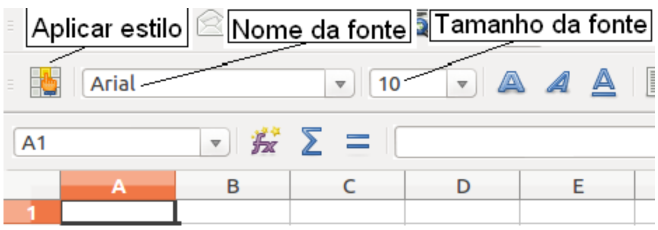


Figura 2.9: Aparência das caixas de formatação com as listas Aplicar estilo, Nome da fonte e Tamanho da fonte.

Barra de fórmulas

Do lado esquerdo da barra de fórmulas existe uma caixa de texto, chamada de **Caixa de nomes**, figura 2.10, com uma combinação de uma letra, que identifica a qual coluna pertence a célula selecionada, com um número, que representa a qual linha pertence a célula seleciona. Por exemplo, **A1** significa que a célula de interseção da coluna A com a linha 1 está ativa. Logo depois vem os ícones dos botões Botão de soma, Botão de função e Linha de entrada, que serão abordados à frente.

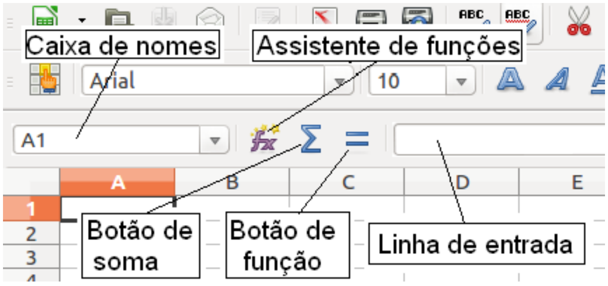


Figura 2.10: Aparência da Barra de fórmulas com a Caixa de nomes em que aparece escrito A1.

Barra de estado

Na parte mais inferior da tela vem a barra de estado, que mostra informações sobre a planilha e maneiras convenientes de alterar algumas das suas funcionalidades, como o zoom.

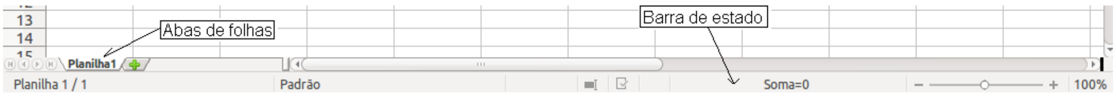


Figura 2.11: Aparência da Barra de estado com informações sobre a planilha.

2.3.2 Colunas, Linhas e Células

Assim como em uma matriz, uma planilha eletrônica possui uma tabela formada por linhas e colunas. As **Colunas**, figura 2.12, são representadas por letras no alto, em ordem alfabética, da esquerda pra direita, começando por A, no **Cabeçalho de Coluna**, figura 2.12. Já as **Linhas**, figura 2.13, são representadas por números no lado esquerdo, em ordem crescente, de cima para baixo, começando por 1, no **Cabeçalho de Linha**, figura 2.13. Cada linha e coluna se intersecta formando as **Células** individuais, que são indicadas, quando selecionadas e ativa, na caixa de nomes, figura 2.10.

As **Colunas** estão dispostas na posição vertical e são identificadas da esquerda para a direita, começando com A até Z. Depois de Z, são utilizadas duas letras: AA até AZ, que são seguidas por BA até BZ, e assim sucessivamente.

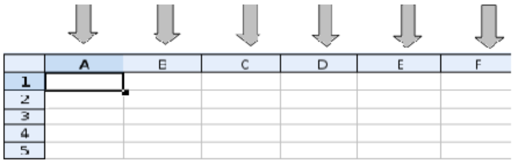


Figura 2.12: Cabeçalho de Coluna e disposição das colunas em uma planilha eletrônica.

As **Linhas** estão dispostas na posição horizontal e são numeradas de cima para baixo a partir de 1 em ordem crescente.

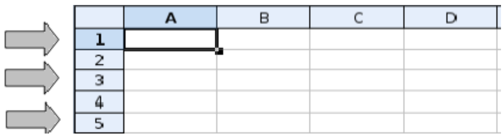


Figura 2.13: cabeçalho de Linhas e disposição das linhas em uma planilha eletrônica.

A interseção entre linhas e colunas formam milhares de células. Cada planilha pode conter muitas folhas, e cada folha pode conter muitas células. No Calc 3.3, cada folha pode conter 1.048.576 linhas e 1.024 colunas.

Selecionando linhas, colunas ou células

Ao se selecionar uma célula, ou um conjunto de células, sua cor de fundo é alterada. Para selecionar uma **única célula** basta clicar sobre ela, segurar o botão do m*ouse* e apertar **Shift**. Para um **conjunto adjacente de células**, basta clicar em uma célula, da extremidade do conjunto e, mantendo o botão do *mouse* apertado, movimentar o cursor sobre toda a região que se deseja selecionar e soltar. Para um **conjunto não adjacente de células** basta manter a tecla **Ctrl** apertada e clicar sobre cada célula que se deseja selecionar. Com a tecla **Ctrl** apertada todas as seleções se mantém.

Para se selecionar todas as células de uma linha, ou um grupo de linhas, basta clicar no número correspondente a ela no Cabeçalho de linhas. Para se selecionar uma coluna, ou um grupo de colunas, basta clicar sobre a letra correspondente a ela no cabeçalho de colunas. Para selecionar todas as linhas e todas as colunas, deve-se clicar no retângulo de interseção do cabeçalho de linhas com o cabeçalho de colunas.

Alterando a largura de colunas e a altura de linhas

Para se alterar a altura de uma linha, para que todo um texto apareça dentro dela, basta posicionar o cursor, entre a linha que deseja alterar e sua adjacente, no cabeçalho de linhas, e no momento que o cursor mudar de forma, segurando o botão do *mouse*, movimentá-lo. Para as colunas usa-se processo semelhante, mas no cabeçalho de colunas.

Para alterar a altura de um grupo de linhas basta selecioná-las e alterar a espessura de apenas uma. Para um conjunto de colunas é semelhante.

2.3.3 Assistente de funções, Soma, Função e Linha de entrada

Na barra de fórmulas, à direita da Caixa de nomes, figura 2.10, estão os botões do **Assistente de Funções**, de **Soma**, e de **Função**, que são muito importantes para o uso das funções matemáticas que serão abordadas aqui, e das outras funções da planilha.

Clicando-se no botão do **Assistente de Funções**, abre-se uma caixa de diálogo em que pode-se escolher, em uma lista de funções disponíveis, a que será utilizada pelo usuário, e mostra como as funções são formatadas (figura 2.14).

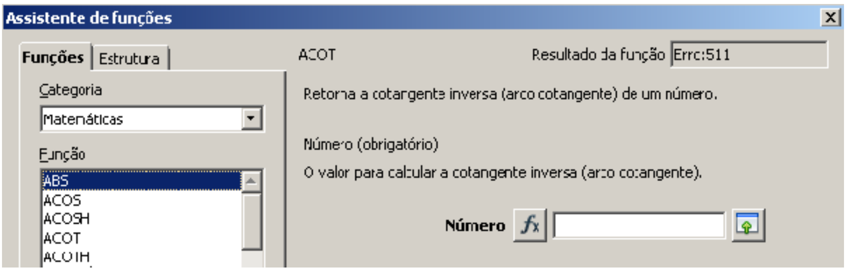


Figura 2.14: Caixa de diálogo do Assistente de funções.

Deve-se lembrar que o termo função, em uma planilha, não abrange apenas funções matemáticas, mas sim as funções da planilha.

Clicando-se no botão **Soma**, será inserida uma fórmula na célula selecionada, que realiza a soma dos valores numéricos das células acima dela. Caso não haja valores acima, os números somados serão os da esquerda da célula.

Mais à direita está a **Linha de Entrada**, figura 2.15, em que se pode digitar os textos, dados em geral, as fórmulas ou as funções.

Clicando-se no botão Função, será inserido um sinal de igual (=) na célula selecionada e na Linha de Entrada de dados, ativando a célula para aceitar fórmulas. Sempre que for necessário criar uma fórmula o sinal de igual (=) deve ser inserido, quer digitando na célula diretamente, ou na Linha de Entrada, quer clicando no botão Função.

Quando são digitados novos dados em uma célula, os botões de Soma e de Função, automaticamente, mudam para os botões **Cancelar** e **Aceitar**, (figura 2.15).

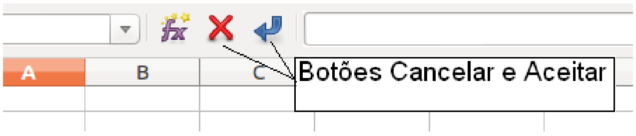


Figura 2.15: Aparência dos Botão Cancelar e Aceitar, à esquerda da Linha de Entrada.

O conteúdo da célula selecionada - texto, fórmula, ou função - é exibido na Linha de Entrada e pode ser editado na mesma, por se clicar dentro dela e assim realizar as alterações desejadas, ou pode-se editar na própria célula, dando duplo clique sobre ela.

2.3.4 Acrescentando folhas de cálculo

Abaixo da tabela com as células estão as **Abas das folhas**. Essas abas permitem o acesso individual a cada folha da planilha, ficando a aba, que representa a folha ativa, na cor branca, como na figura 2.16, em que a Planilha3 está ativa. Para mudar de uma aba para outra deve-se clicar sobre a aba desejada. Para mudar o nome pode-se dar um duplo clique, ou clicar com o botão direito, opção renomear. É possível acrescentar novas folhas de várias formas, sendo a mais simples clicar no espaço logo depois da última folha (pode vir com um sinal de mais). Abre-se uma caixa de diálogo em que se escolhe a localização da nova planilha, a quantidade e o nome, conforme figura 2.16.

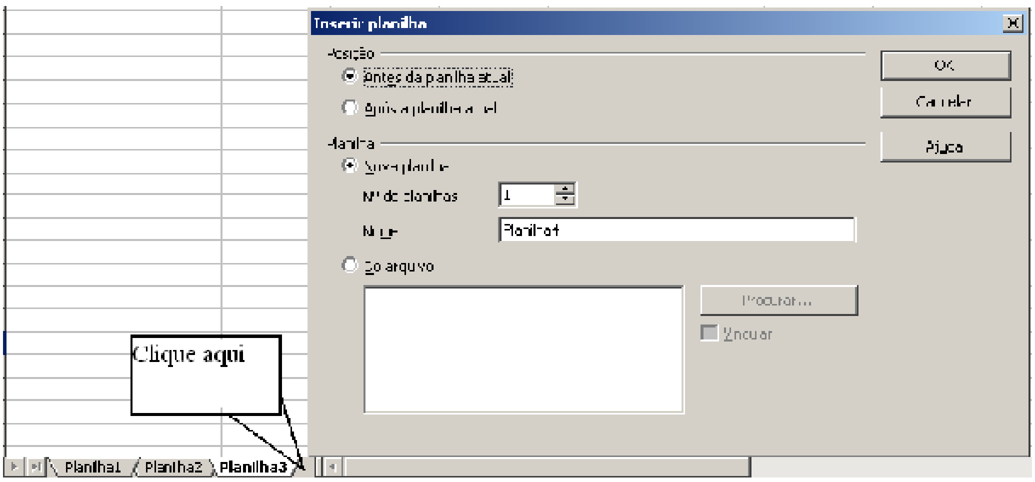


Figura 2.16: Abas das folhas de cálculo em que pode-se acrescentar novas planilhas.

Outra maneira seria clicar com o botão direito do *mouse* e na opção inserir planilha. Esses mesmos passos podem ser seguidos para alterar o nome, excluir uma folha de cálculo, mover a planilha, entre outras opções.

2.3.5 Salvando e exportando arquivos

Para se salvar um arquivo basta clicar no menu Arquivo, na opção Salvar. Se for em um formato diferente, tem-se que clicar no menu Arquivo, na opção Salvar Como. Uma caixa de diálogo se abrirá em que se escolherá o diretório que se deseja salvar o arquivo. Logo abaixo tem o local para se digitar o nome do arquivo e selecionar o tipo de arquivo clicando na "setinha", para baixo, e escolhendo o formato, depois deve-se clicar em salvar. Pode-se, por exemplo, escolher um formato Microsoft Excel, como na figura 2.17.

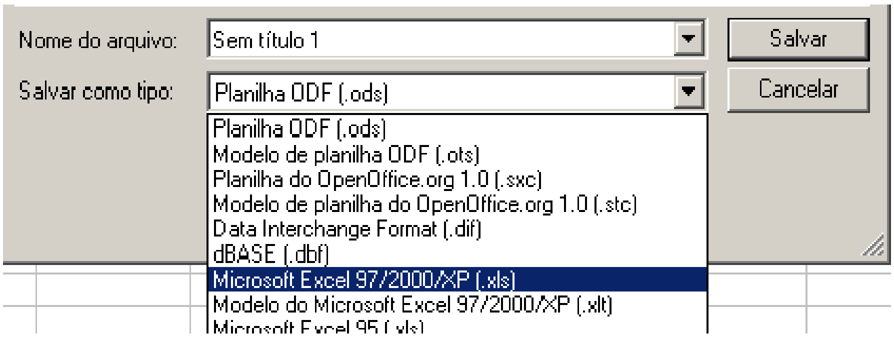


Figura 2.17: Caixa de diálogo para salvar arquivos em diversos formato.

Na barra de ferramentas padrão também se encontra o ícone do botão salvar, que guardará um arquivo novo no formato padrão, ou no formato original do arquivo caso se esteja editando-o. É bom sempre salvar as alterações que são feitas no arquivo, mesmo que o programa tenha a funcionalidade de salvamento automático.

Para exportar como arquivo PDF basta clicar no ícone com o escrito PDF, na barra de ferramentas padrão, ou ir no menu Arquivo, opção Exportar como PDF.

2.3.6 Inserindo dados na planilha

Inserindo textos e fórmulas

Para se escrever na célula basta clicar sobre ela, que esta é automaticamente selecionada, e começar a digitar. Depois de terminar basta teclar Enter. Se for uma fórmula, ou uma função, deve-se começar com o sinal de igual (=).

Um ponto importante de se abordar é que, quando se deseja criar fórmulas, ou usar uma função da planilha, deve-se indicar as células que serão utilizadas na fórmula.

Por exemplo, deseja-se criar uma tabela, com dados referentes ao percentual de lucro que incide sobre a venda de algum bem, que foi comprado por X reais e vendido por Y reais. Fazendo um planejamento mental da construção da tabela, pode-se usar as células A1, B1 e C1 para os títulos e as células A2 para o valor de compra, a célula B2 para o valor de venda e a célula C2 pode ser usada para o valor percentual de lucro, figura 2.18. Qual seria o percentual do lucro obtido ao se vender uma mercadoria cujo valor de compra é 200 reais e o valor de venda 350 reais? Basta registrar os valores nas respectivas células e escrever a fórmula necessária na célula C2.

Ao se escrever a fórmula, não se digitará cada valor numérico, nem letras para representá-los, mas sim as células em que se encontram esses valores. Ou seja, em C3 escreve-se $= B2/A2 - 1$, figura 2.18 (o sinal de dividir é a barra). O valor por padrão será dado na forma decimal. Para representá-lo em forma de porcentagem basta clicar no ícone Formato Numérico: Porcentagem na barra de formatação.

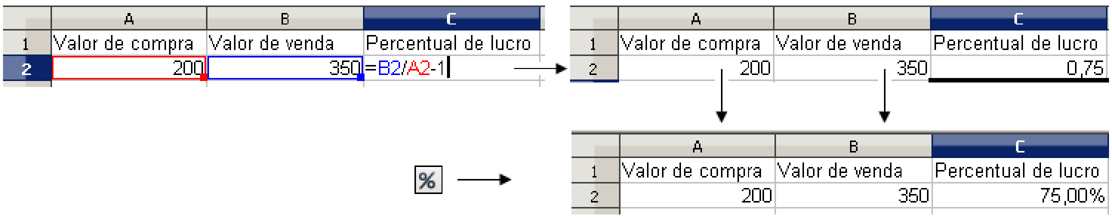


Figura 2.18: Escrevendo uma fórmula e inserindo dados na planilha.

Criando sequência de dados

Para se criar uma tabela com uma lista crescente de números, por padrão, deve-se for digitar um número em uma célula e após isso clicar sobre ela, posicionando o *mouse* na extremidade inferior direita desta, sobre um quadradinho preto e, quando a seta do *mouse* alterar sua aparência para um sinal de mais (+), clicar com o botão esquerdo, segurar e a arrastar para onde se deseja expandir uma lista.

A sequência numérica formada será uma progressão aritmética de razão 1. Se for expandida para cima, em uma coluna, ou para trás, em uma linha, os números decrescem. Se for expandida para baixo, na coluna, ou para frente, na linha, os números crescem, conforme a figura 2.19.

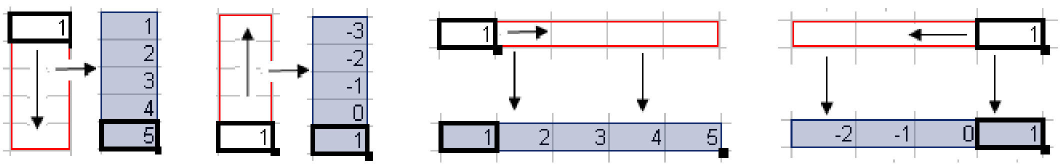


Figura 2.19: Criando uma sequência numérica com incremento 1 e linha ou coluna.

Mas também, pode-se alterar a razão da progressão aritmética de forma rápida. Digita-se, em apenas duas células, os números na sequência e ordem desejada, por exemplo, 1.3 e 1.1, nesta ordem, em que a razão é -0.2, ou 1.1 e 1.3, em que a razão é 0.2. Agora basta selecionar as duas células e seguir o passo de, quando aparecer o sinal de mais (+), clicar, segurar e arrastar na direção desejada, conforme a figura 2.20.

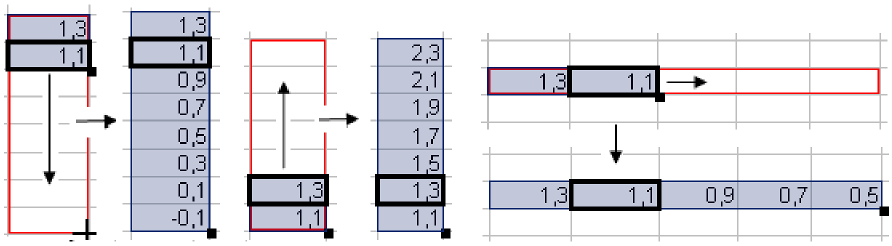


Figura 2.20: Criando uma sequência numérica com incremento variado em linha ou coluna.

Ferramenta de preenchimento automático

O processo de arrastar uma fórmula e selecionar células para aplicar uma função é muito utilizado. As planilhas eletrônicas possuem uma ferramenta que facilita o processo de repetir textos ou repetir uma fórmula. Essa ferramenta é chamada de **Ferramenta de Preenchimento** e seu processo de uso é muito semelhante ao de criação de uma sequência, ou de seleção de células adjacentes.

A ferramenta de preenchimento pode ser usada em conjuntos de células, ao mesmo tempo, para repetir textos, criar listas de dias da semana e meses, e repetir fórmulas, poupando o usuário de digitar um texto, ou uma fórmula repetidamente. Basta selecionar todos os termos que devem fazer parte da lista, clicar no quadradinho preto que aparece na última célula, quando o cursor muda para um sinal de mais (+) e, mantendo o botão do *mouse* apertado, arrastar até onde se deseja criar a lista.

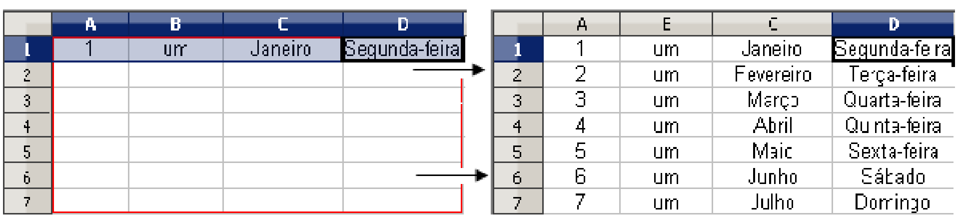


Figura 2.21: Utilizando a ferramenta de preenchimento automático para criar sequências e listas.

Um uso muito útil da ferramenta de preenchimento é no caso de fórmulas e funções. Por exemplo, deseja-se determinar a soma dos 7 termos de uma sequência cuja lei é $a_n = 3n - 2$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$. Assim, uma opção é digitar o número 3 na célula A1 e, usando a ferramenta de preenchimento, segurar e arrastar até a célula A7, criando-se uma sequência de 3 a 9, ocupando cada número uma célula. Na coluna B, à frente, deve-se digitar a fórmula. Logo na célula B1 será digitado $= 3 * A1 - 2$ (o sinal de vezes é o asterisco), sendo A1 a célula que contém o valor numérico de n, e tecla-se Enter.

Depois não há a necessidade de se digitar de novo, basta seguir os passos dados antes (posicionar o cursor na extremidade inferior direita da célula B1 e, quando este virar um sinal de mais (+), clicar e, mantendo o botão esquerdo do *mouse* apertado, arrastá-lo até a última célula). O processo de "clicar, segurar e arrastar" é simples e a planilha usa para fazer seleção, criar sequências e fazer preenchimento automático. Um detalhe importante é que deve-se arrastar a partir da célula que contém a fórmula.

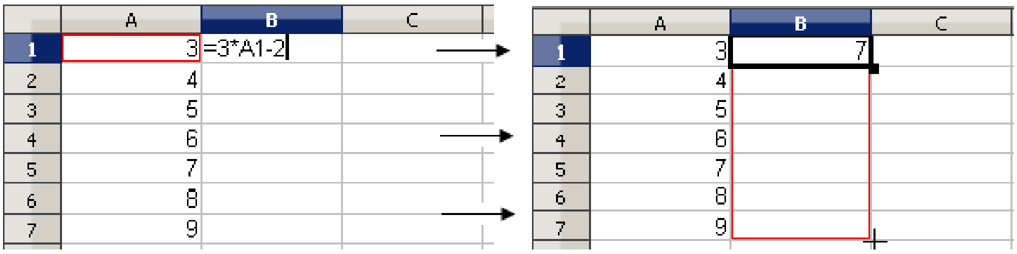


Figura 2.22: Utilizando a ferramenta de preenchimento automático para repetir uma fórmula a partir da célula que contém a fórmula.

Assistente de função, Soma e Função

Para determinar a soma dos números encontrados na tabela da figura 2.22, pode-se simplesmente usar o botão Soma, clicando na célula logo abaixo da sequência de números e depois clicando em **Soma**. Assim aparecerá a fórmula =SOMA(B1:B7), que é a escrita da função Soma, significando o somatório dos números presentes nas células B1 até B7. As células que detêm os valores necessários para uso da função escolhida são indicadas entre parênteses e separadas por dois pontos (:), que tem sentido de "até".

O botão **Função** insere um sinal de igual (=) na célula e indica que será escrita uma fórmula na linguagem das planilhas eletrônicas, em que as variáveis são as células.

As funções e fórmulas podem ser escritas em qualquer célula. Mas não é necessário decorar todas as funções, basta usar o **Assistente de funções**, figura 2.23, e escolher a desejada. Para o exemplo anterior, figura 2.22, se deseja-se somar os valores da tabela de resultados, pode-se usar o Assistente de funções. Primeiro deve-se clicar em uma célula vazia, depois no ícone do Assistente de funções e, na caixa de diálogo que abrirá, escolher a função SOMA e clicar em próximo. Depois basta escrever as células que se deseja que sejam somadas, no caso B1 até B7, que se escreverá B1:B7, ou simplesmente colocar o cursor sobre a primeira célula e, com o botão esquerdo do *mouse* segurado, arrastar sobre todas as células almejadas, selecionando-as, conforme a figura 2.23, e clicar em OK.

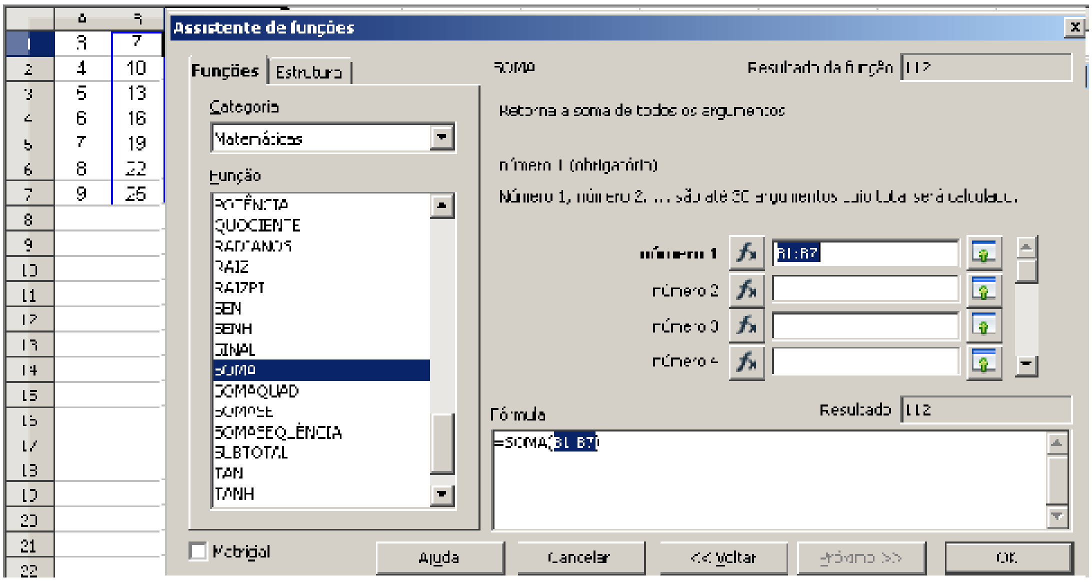


Figura 2.23: Tabela com indicação de células a serem somadas e Assistente de funções em que se seleciona a função SOMA nas células B1até B7.

O Assistente oferece funções matemáticas, estatísticas, de informações, de textos, da planilha e muitas outras, indicando o resultado da aplicação da função.

2.3.7 Editando uma tabela

Se o objetivo é criar uma tabela, com uma lista de números e texto, pode-se formatá-la para que assuma uma forma mais apresentável e destacada. Por exemplo, tomando-se informações, os valores e a fórmula da figura 2.18, pode-se formatar a tabela alterando a espessura das linhas, a cor da fonte, a cor de fundo, inserindo um texto, etc.

Primeiro, pode-se colocar um título centralizado, por exemplo, Tabela de Preços, dentro de um conjunto de células por se mesclá-las (seleciona-se as células, clica com botão direito, opção mesclar). Para se centralizar pode-se usar o ícone na barra de formatação. Abaixo pode-se escrever Mercadoria,Valor de compra, Valor de venda, Percentual de lucro, todos centralizados. Abaixo de Percentual de lucro escreve-se a fórmula =C3/B3-1 e, usando a ferramenta de preenchimento automático, pode-se colocar outros itens e calcular automaticamente o percentual, que poder se representado na forma de porcentagem por usar o ícone da barra de formatação.

Para formatar a tabela pode-se selecioná-la e, clicando-se no botão direito, escolher a opção Formatar Células. Na caixa de diálogo aparecem as abas, com as opções de alterações para:

- Formato de número: formata o número para decimal, fração, moeda, porcentagem, data, etc;
- Fonte: formata o tipo de letra, tamanho e estilo (itálico, negrito regular) do texto;
- Efeitos de fonte: formata a cor e a forma do texto;
- Alinhamento: formata o alinhamento, a orientação (ângulo) e quebra automática de texto, isto é, mudança de linha dentro da célula;
- Bordas: formata a disposição e os tipos de linhas que formam a tabela, sombras e espaçamento do conteúdo;
- Plano de fundo: altera a cor de fundo das células;
- Proteção da célula: só é ativada depois de proteger a planilha em Ferramentas↦ Proteger documentos↦ Planilha.

Alguns desses recursos estão na Barra de formatação, figura 2.24, o que agiliza o processo de formatação. Ao se passar o cursor sobre eles, aparece para que serve cada um.

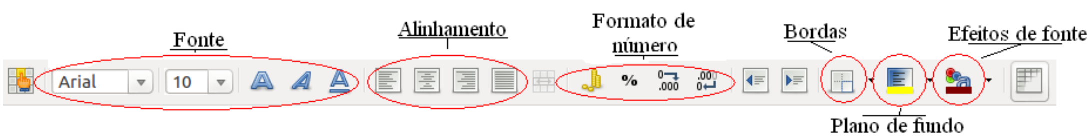


Figura 2.24: Ícones de formatação de célula na Barra de formatação.

A formatação pode ser feita conforme o gosto, o objetivo, a forma de apresentação ou impressão (figura 2.25). Tudo pode ser feito, também, utilizando-se o menu formatar e sempre, com o que se deseja alterar, selecionado. Caso os dados não caibam nas células, pode-se aumentar a largura das colunas ou usar a ferramenta de quebra automática de linha, por se clicar com o botão direito do *mouse* sobre a célula com o texto e desta forma se abrirá uma caixa de texto em que aparecerá a opção "Formatar células → Alinhamento → Quebra automática de texto".

	A	B	C	D
1	Tabela de preços			
2	Mercadoria	Valor de compra	Valor de venda	Percentual do lucro
3	radio Gb300	200	350	75,00%
4	radio Gb30	120	180	50,00%
5	radio Gb1	40	90	125,00%

	A	B	C	D
1	**Tabela de preços**			
2	Mercadoria	Valor de compra	Valor de venda	Percentual do lucro
3	*radio Gb300*	200	350	**75,00%**
4	*radio Gb30*	120	180	**50,00%**
5	*radio Gb1*	40	90	**125,00%**

Figura 2.25: Comparação entre duas tabelas em que uma está sem formatação específica e a outra está formatada.

Outra opção, caso o texto seja maior que a largura das colunas e não se deseja aumentar tal largura é usar a opção quebra automática de texto. Para isso, deve-se selecionar as células, depois clicar com o botão direito sobre elas, na opção formatar células, aba Alinhamento, item propriedades, quebra automática de textos. Também pode-se alinhar o texto horizontal e verticalmente, opção centro e meio, respectivamente, dando um melhor visual.

2.3.8 Inserindo um gráfico

Todos os valores numéricos podem estar associados a um gráfico e, dependendo do objetivo de se criar um, há diversas formas de apresentá-lo - colunas, linhas, XY(Dispersão), rede, etc.

No menu Inserir há a opção **Gráfico** e na Barra de ferramentas padrão há um ícone para gráfico. Depois de se criar uma tabela com os dados numéricos, deve se selecioná-los e pode-se clicar no ícone Gráfico, na Barra de ferramentas padrão. Quando se seleciona um conjunto de dados o gráfico será apresentado conforme estes. Se pelo menos um dado da tabela estiver selecionado, o programa, automaticamente, seleciona os outros.

Depois de clicar em Gráfico será apresentada a caixa de diálogo Assistente de gráfico, com as opções de construção do gráfico:

- Tipo de gráfico: Coluna, Barra, Pizza, XY (Dispersão), Linha, entre outros. Para cada tipo de gráfico há opções de escolha de variações do tipo escolhido. No fundo aparece um gráfico que altera conforme se muda os tipos, para uma melhor escolha do gráfico mais apropriado.
- Intervalo de dados: apresenta opções de intervalo dos dados da planilha que

formarão o gráfico, se a disposição dos dados principais estão em linha ou coluna, e qual será o rótulo, os eixos, etc.

- Série de dados: apresenta opções de intervalos de dados de cada eixo que serão usados. Nesta opção pode-se escolher vários séries de dados para apresentar no mesmo gráfico ou esconder alguns valores indesejados.

- Elementos do gráfico: apresenta as opções para dar um título, nomes para os eixos, legendas, etc.

Para mudar de uma opção para outra, clica-se em Próximo, ou Voltar, e pode-se concluir em qualquer momento.

Para se construir um gráfico de função exponencial[8], por exemplo, deve-se construir uma tabela com os valores de x e y. Depois clicar no ícone Gráfico e, na caixa de diálogo Assistente de gráficos que abrirá, escolher a opção XY(Dispersão)$\mapsto$Somente linhas.

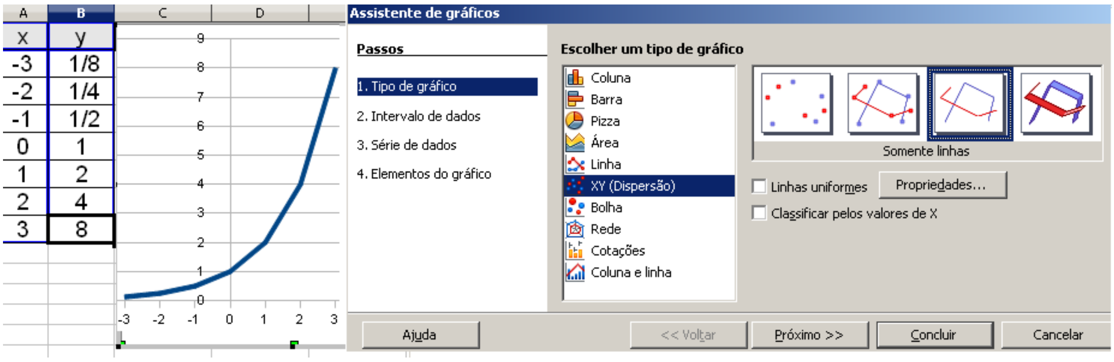


Figura 2.26: Usando o Assistente de gráfico para construção de gráfico de uma função exponencial a partir dos dados na tabela.

Se forem dados sobre faturamento mensal de uma empresa, por exemplo, escreve-se os meses em coluna, ou linha, com o respectivo faturamento e clica-se em gráfico. O programa assume os meses como legenda.

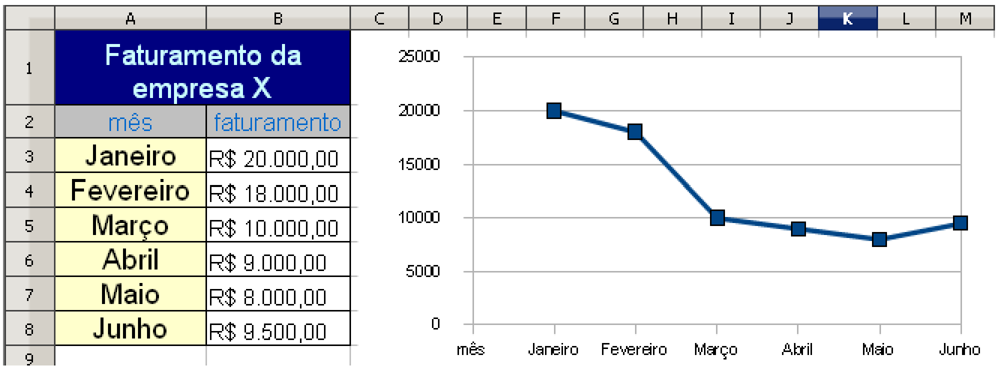


Figura 2.27: Exemplo de gráfico de linhas sobre faturamento mensal de uma empresa.

[8]Orientações sobre função exponencial serão dadas posteriormente.

Se não houver uma legenda, ou um eixo de referência o programa, em seu lugar, assume os números naturais 1, 2, 3, 4, ..., n. Assim, para cada tipo de dados e necessidades pode-se escolher o melhor gráfico que os represente.

Orientações pormenorizadas sobre como formatar alguns tipos específicos de gráficos serão dadas nos capítulos 3 a 6.

3 ENSINO DE FUNÇÕES USANDO O CALC

3.1 Breve histórico sobre funções

Atualmente, dentro da matemática, as funções constituem um dos temas fundamentais para serem estudados, pois abrangem conceitos de dependência de variáveis, muito usados em física, química, economia, estatística, entre outras ciências.

A noção de função foi construída e aperfeiçoada no decorrer dos séculos. Segundo Eves (2002), na antiguidade os povos tinham um conceito vago, quando faziam correspondência entre elementos de um conjunto e números, o que sugere a ideia de correspondência biunívoca. Já na idade média, os conceitos de variáveis aparecem relacionados com formas geométricas ou nos movimentos da cinemática.

Eves (2002) acrescenta que no final do século XIV o conceituação dos diferentes tipos de funções, fundamentava a análise matemática. Muitos homens contribuíram para o seu desenvolvimento e um dos primeiros foi o bispo Nicolau de Oresme (1323–1382), com a representação gráfica da noção de função quando desenvolveu sua teoria das latitudes e longitudes das formas. Oresme criou uma representação gráfica que relacionava a velocidade de um móvel com o tempo, quando a aceleração era constante. Ele não produziu mais nesse respeito porque, na sua época, ainda não se havia desenvolvido as técnicas algébricas e geométricas para representação de coordenadas, o que foi feito posteriormente com contribuições de Viète, Descartes e Fermat.

François Viète (1540-1603) auxiliou muito com a parte de notação ao começar a usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650) contribuíram com a introdução do método analítico de definir funções. Descarte criou um método que relacionava equações com pontos no plano, dando origem ao que hoje é conhecido, em sua homenagem, como plano cartesiano. No seu sistema de eixos era possível representar um ponto através de uma equação a duas variáveis indicando interdependência entre elas . [9]

Outro matemático importante no desenvolvimento do estudo de funções foi Newton (1642-1727). Em seu trabalho *Method of Fluxions*, publicado postumamente em 1736, embora escrito em 1671, ele usa o termo "fluente" e "fluxo do fluente" no que hoje pode ser chamado de variável dependente ou independente. A palavra função foi introduzida, provavelmente, por Leibniz (1646-1716) e foi Leonhard Euler (1707-1783), o primeiro a adotar a notação $f(x)$ para o valor da função. Percebe-se que a evolução do conceito de função ocorreu junto ao do conceito de curva, que é sua representação geométrica, assim, os dois conceitos estão interligados . [9]

No século XIX muitos trabalhos matemáticos buscaram uma formalização rigorosa de seus conceitos, dentre eles o de função, tais como Fourier, Cauchy, Riemann, Dedekind, Cantor, entre outros. Lejeune Dirichiler (1805-1859) definiu função assim:

> Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função(unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo dos valores da função". (EVES, 2002, p. 661)

Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, atualmente uma função é definida da seguinte forma: Dados os conjuntos X,Y, não vazios, uma função $f : X \to Y$ é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (Lima *et al*, 2006, v.1, p.38). Existem muitos tipos de funções e o que será apresentado à frente são sequências didáticas para o ensino de alguns tipos de funções ensinadas no ensino médio, em que a ênfase será dada na interpretação de alguns conceitos a partir da observação gráfica.

3.2 Função afim

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (DANTE, 2005). Quando se associa a função afim com uma tabela, se os números no domínio formam uma progressão aritmética, as imagens destes valores também formam uma progressão aritmética e a sua representação gráfica é uma reta.

Uma coisa importante de se falar é que não faz diferença as letras que serão usadas para representar as funções, mas sim a relação entre elas. Assim $s = s_0 + vt$, que é a função horária da posição no movimento retilíneo uniforme é um exemplo de função afim.

Depois de introduzidos os conceitos iniciais de função, domínio, contradomínio, imagem, objeto, relação biunívoca, entre outros, pode-se seguir as orientações da sequências didática abaixo para a conceituação da relação entre os coeficientes da função afim e o crescimento, e decrescimento, da mesma e sua translação, podendo ser usadas duas aulas para ministrar este conteúdo.

Uma sugestão de atividades é propor para os alunos a criação de uma tabela com os dados referentes ao salário recebido pelo funcionário de uma loja que é composto de uma parte fixa de R$ 650,00 acrescido de 10% sobre suas vendas. Usando a planilha eletrônica pode-se facilmente fazer uma tabela com estes valores.

Neste ponto é necessário que alguns dos dados dessa tabela sejam fornecidos pelo professor, a turma, a quem será permitida a formatação da tabela, figura 3.1. Por exemplo, pode-se colocar, Total de vendas, Comissão de 10%, Salário fixo e Salário total. Para a coluna comissão de 10% na célula B2 escreve-se $= A2^*0,1$e clica-se Enter. Depois, usando o preenchimento automático pode-se preencher os outros valores da coluna. O professor pode rever com os alunos as diferentes formas de representação de uma porcentagem. Neste caso, está sendo usada a representação decimal.

Para a última coluna tem-se que perguntar para os alunos como determinar o Salário total. Espera-se que eles digam que é somando-se os valores nas colunas Comissão de 10% com a coluna Salário fixo. Para tanto, na célula D2 escreve-se a fórmula é $= B2 + C2$. Depois usa-se a ferramenta de preenchimento automático (veja seção 2.9).

	A	B	C	D
1	Total de vendas	Comissão de 10%	Salário fixo	Salário total
2	R$ 2.000,00	R$ 200,00	650	R$ 850,00
3	R$ 4.000,00	R$ 400,00	650	R$ 1.050,00
4	R$ 5.000,00	R$ 500,00	650	R$ 1.150,00
5	R$ 8.000,00	R$ 800,00	650	R$ 1.450,00

Figura 3.1: Modelo da tabela salarial.

O próximo passo é a construção de um gráfico para esta tabela. Os valores a serem usados são total de vendas e salário total, então deve-se selecionar os valores numéricos das colunas A e D (para selecionar veja subseção 2.3.2). Em seguida deve-se ir em Assistente de funções e escolher o tipo de gráfico XY (Dispersão), primeira opção de **apenas pontos**. A aparência do gráfico ficará como a figura 3.2.

Total de vendas	Comissão de 10%	Salário fixo	Salário total
R$ 2.000,00	R$ 200,00	650	R$ 850,00
R$ 4.000,00	R$ 400,00	650	R$ 1.050,00
R$ 5.000,00	R$ 500,00	650	R$ 1.150,00
R$ 8.000,00	R$ 800,00	650	R$ 1.450,00

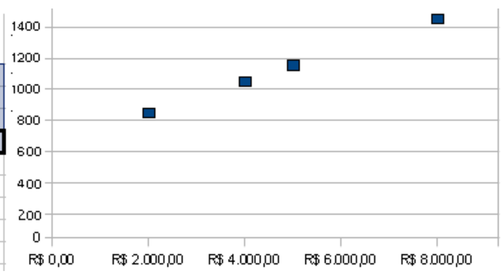


Figura 3.2: Tabela e Gráfico XY (Dispersão), somente pontos, para a coluna Salário total em função do Total de vendas.

Agora é necessário orientar o raciocínio dos alunos com algumas perguntas:

- O que aconteceria com o gráfico se fossem tomados cada vez mais valores para o total de vendas?
- Qual seria a curva se todos estes pontos fossem unidos?
- Que função representa esta situação?
- Quais seriam o domínio e a imagem desta função?

Espera-se que os alunos consigam observar que se forem tomados os infinitos pontos entre os valores representados no gráfico, estes pontos formariam um segmento de reta. Como a tabela toma poucos valores, esses são os apresentados no gráfico. Esta é a oportunidade para se falar que os intervalos são formados por infinitos pontos e que se todos fossem usados a linha do gráfico estaria completa. A ideia envolve a completeza dos números reais. Portanto deve-se fazer novos gráficos com mais valores, usando a opção pontos ou pontos e linhas como ilustra a figura 3.3.

Total de vendas	Comissão de 10%	Salário fixo	Salário total
R$ 1.000,00	R$ 100,00	650	R$ 750,00
R$ 1.500,00	R$ 150,00	650	R$ 800,00
R$ 2.000,00	R$ 200,00	650	R$ 850,00
R$ 2.500,00	R$ 250,00	650	R$ 900,00
R$ 3.000,00	R$ 300,00	650	R$ 950,00
R$ 3.500,00	R$ 350,00	650	R$ 1.000,00
R$ 4.000,00	R$ 400,00	650	R$ 1.050,00
R$ 4.500,00	R$ 450,00	650	R$ 1.100,00
R$ 5.000,00	R$ 500,00	650	R$ 1.150,00
R$ 5.500,00	R$ 550,00	650	R$ 1.200,00
R$ 6.000,00	R$ 600,00	650	R$ 1.250,00
R$ 6.500,00	R$ 650,00	650	R$ 1.300,00
R$ 7.000,00	R$ 700,00	650	R$ 1.350,00

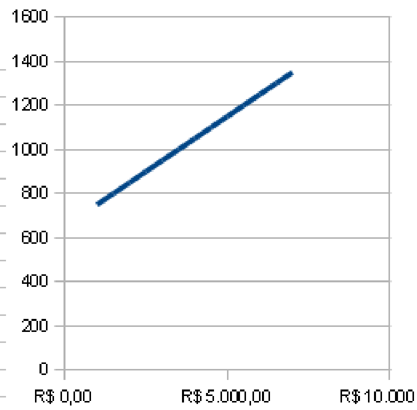


Figura 3.3: Tabela e gráfico somente linhas para o Salário total em função do total de vendas..

A formatação do gráfico pode ser feita dando-se dois cliques rápidos sobre ele. Assim as barras de ferramentas serão alteradas para barra de formatação do gráfico. Clica-se no ícone **Tipo de gráfico** e seleciona-se somente linhas, linhas uniformes.

Talvez os alunos não consigam determinar a função, assim pode-se orientá-los para analisarem quais foram as fórmulas utilizadas para obter a tabela. Algumas perguntas que poderiam ajudá-los são:

- Qual é a relação de dependência que existe nesta situação?

- Na coluna Salário total, que fórmula foi utilizada?
- Que fórmula relaciona, o valor total da comissão com o valor Total de vendas?
- É possível criar uma regra matemática que associa o valor Total de vendas com o Salário total?
- Quem representa a variável dependente? E independente?
- Se chamarmos salário total de $s(v)$, comissão de 10% sobre as vendas de c e salário fixo de s_f, que fórmula poderia ser dada para se calcular o Salário total em função do Total de vendas? E se a venda total for chamada de v, como seria escrita a função?

Provavelmente os alunos dirão que a fórmula para se calcular o salário total é a soma do salário fixo com a comissão calculada sobre o total de vendas, e está correto. Mas o objetivo ainda não é este. Se a comissão é calculada de acordo com as vendas, pode-se associar o salário total com as vendas. Desta forma a regra seria: para cada v tem-se que $s(v) = c + s_f = 0,1.v + s_f = 0,1v + 650$.

O próximo passo é determinar a função que representa a situação, mas uma função só tem sentindo quando definida com um domínio e um contradomínio. Com todos estes questionamentos já é possível perceber qual é a função.

Deve-se salientar que neste caso o domínio será composto por valores não negativos, pois não existe total de venda negativo. Para a imagem nota-se que o salário total, que é o valor da função, cresce à medida que os valores de venda crescem. Esta função é uma função crescente que poderia ser escrita na forma $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, f(x) = ax + b, \forall\, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, em que $\mathbb{D} = \{\, x \in \mathbb{R}\,;\, x \geq 0\,\}$ e cuja imagem é $Im(f) = \{\, y \in \mathbb{R}\,;\, y \geq 650\,\}$. Em $f(x) = ax + b$ os coeficientes a e b chamam-se taxa de variação e coeficiente linear, respectivamente.

Crescimento, decrescimento, taxa de variação e coeficiente linear

Usando uma nova planilha sugere-se a construção de um novo gráfico utilizando-se agora da função encontrada a partir de uma nova tabela para $f(x) = 0,1x + 650$, em que x representa as vendas.

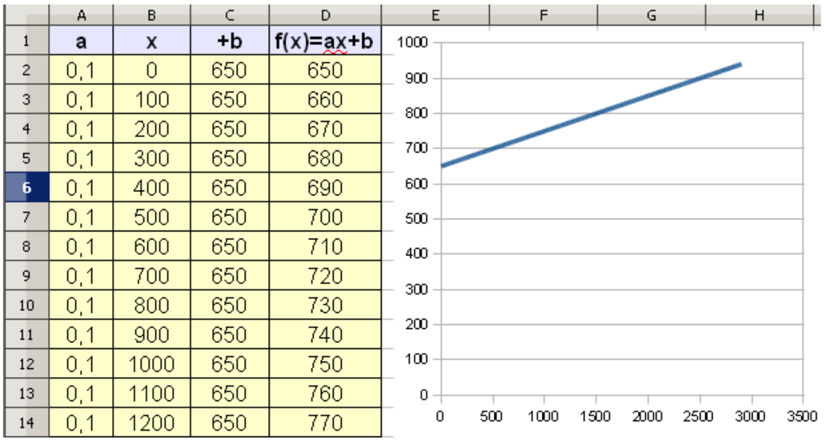
A tabela deve ser dividida em quatro colunas, conforme figura 3.4. Na primeira coluna a taxa de variação , que será o percentual da comissão. Na segunda coluna a variável x que representa o total de vendas. Na terceira coluna o salário fixo de R\$ 650,00 e na quarta coluna os valores da função propriamente dita.

Na coluna A estarão representados os valores da taxa de variação. Deseja-se que esse valor possa ser modificado, portanto na célula A2 deve-se digitar $0,1$ e em A3 digita-se $= A2$ e A4 digita-se $= A3$.

Na coluna B estarão representados os valores possíveis das vendas, na célula B2 digita-se 0, em B3 digita-se 100 e em B4 digita-se 200.

Na coluna C escreve-se o valor fixo, em C2 650; em C3$= C2$; em C4 $= C3$.

Na coluna D escreve-se a função, então em D2 digita-se $= A2{}^{*}B2 + C2$ e arrasta-se para ocupar as células D3 e D4. Selecionado-se todos os valores na linha 3 e 4, assim pode-se usar a ferramenta de preenchimento automático para muitas linhas (não seleciona-se a linha 2). Selecionados os valores da coluna B e os valores da coluna D clica-se no assistente gráfico XY(dispersão)$\longrightarrow$ somente linhas $\longrightarrow$linhas uniformes.



	A	B	C	D
1	a	x	+b	f(x)=ax+b
2	0,1	0	650	650
3	0,1	100	650	660
4	0,1	200	650	670
5	0,1	300	650	680
6	0,1	400	650	690
7	0,1	500	650	700
8	0,1	600	650	710
9	0,1	700	650	720
10	0,1	800	650	730
11	0,1	900	650	740
12	0,1	1000	650	750
13	0,1	1100	650	760
14	0,1	1200	650	770

Figura 3.4: Gráfico de $f(x) = 0,1x + 650$ para $0 \leq x \leq 2900$.

O objetivo aqui é verificar o que acontece no gráfico da função variando-se os seus coeficientes. Para isso todos os valores estão vinculados às três primeiras células da segunda linha. Ao alterá-los, os outros se alteram, e o gráfico também.

É possível através da observação presumir valores que não estão no gráfico. Pode-se perguntar aos alunos:

- O que aconteceria se o valor do percentual de comissão fosse maior? E menor?
- O que aconteceria se o valor do percentual de comissão fosse zero?
- Qual é o significado da taxa de variação nula para o problema proposto?
- Que relação existe entre a velocidade de crescimento do gráfico e o taxa de variação?
- O que seria necessário para que o salário total subisse mais rápido?

Com os estudos anteriores, feito a partir de uma situação-problema e por meio da manipulação dos coeficientes, pode-se fazer uma generalização dos conceitos relacionados com uma função afim definida por $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ f(x) = ax+b,\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

- O que acontece com o gráfico da função alterando-se apenas a taxa de variação para valores positivos, negativos e nulo?
- Que relação existe entre a taxa de variação e inclinação da reta?
- E quanto ao coeficiente linear? Se a taxa de variação é constante, o que acontece quando se varia o coeficiente linear para valores positivos, negativos e nulo?

Se a taxa de variação for positivo, a reta é crescente, e se negativa, a reta é decrescente. A relação que existe entre a taxa de variação e a inclinação da reta, é que, para valores positivos, quanto maior a taxa de variação, maior a inclinação da reta, no sentido anti-horário e quando este valor tende para mais infinito a reta tende para inclinação máxima, mais nunca atingirá esta posição, pois, se isto acontecesse, deixaria de ser uma função. Para valores negativos, quanto menor a taxa de variação maior a inclinação da reta no sentido horário. E para a taxa de variação igual a zero a reta é paralela ao eixo x. Os valores da taxa de variação estão diretamente relacionados com a velocidade de crescimento da função. Deve-se lembrar que uma reta possui inclinação e portanto na equação da reta $y = ax + b$, o coeficiente a recebe o nome de coeficiente angular ou declividade da reta, já a função afim possui taxa de variação [11].

Quanto ao coeficiente linear está relacionado com o ponto de intersecção da reta com o eixo y e, portanto, com a translação vertical do gráfico. Deve-se verificar se os alunos percebem que o ponto de intersecção tem coordenadas $(0\,,\,b)$ e que, para $b = 0$, o gráfico passa na origem dos eixos cartesianos, originando uma função afim especial denominada função linear que é característica quando se trabalha com grandezas diretamente proporcionais.

Sabe-se que duas grandezas A e B são diretamente proporcionais quando a razão entre elas é igual a uma constante K, ou seja,
$A \,\alpha\, B \leftrightarrow \frac{A}{B} = K \rightarrow A = BK$. Desta forma, percebe-se que fazendo $A = f(x)$, $B = x$ e $K = a$ tem-se que $f(x) = ax$, a função linear, que é a função afim $f(x) = ax + b$ para $b = 0$, modela problemas com grandezas diretamente proporcionais.

O objetivo aqui era apresentar uma sequência de como se trabalhar com as relações entre os coeficientes de uma função afim e seu gráfico, de tal forma que os alunos possam assimilar os conceitos de crescimento e decrescimento relacionados com a taxa de variação em uma situação cotidiana, que é verificar a relação entre as vendas de um funcionário e o aumento de seu salário. Outras situações podem ser trabalhadas e sugere-se que os alunos pesquisem sobre elas, abrindo espaço para se abordar a caracterização da função afim. Muitas atividades podem ser feitas interdisciplinarmente com física, por exemplo, com a equação horária da posição de um corpo em função do tempo no movimento retilíneo uniforme, ou com grandezas diretamente proporcionais, entre outros.

3.3 Função quadrática

Para as funções quadráticas existem muitas aplicações e seu gráfico é uma parábola. A sequência didática a seguir deve ser trabalhada em duas ou três aulas, depois de serem explicados os conceitos de função afim, significado de domínio, imagem e raízes da função.

A atividade pode ser realizada em grupos formados por 3 alunos de tal forma que cada grupo pode tenha uma informação um pouco diferente dos outros. O objetivo é mostrar a aplicação da função quadrática modelando uma situação, com objetivo de determinar o máximo da função pelo cálculo da média aritmética simples das raízes e desenvolver, para isso, os conceitos das relações entre os coeficientes da função quadrática e sua curva característica.

Em A matemática do Ensino Médio, vol. 1, Lima *et al,* SBM, 2001 na página 156 traz o seguinte problema:

"Um avião de 100 passageiros foi fretado para excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?"

Para se resolver esse problema, primeiro pode-se montar uma tabela com alguns valores possíveis de rendimento, em função da quantidade de passageiros presentes no avião. O valor a pagar normal seria R$ 800,00 por passageiro. No caso de poltronas vazias deve-se multiplicar o total de presentes pelo total de poltronas vazias e por 10. O rendimento total será a soma desses dois valores.

No Calc pode-se fazer o cálculo para todos os valores, entretanto o objetivo não é chegar à resposta assim, mas compreender a relação quadrática entre as variáveis. Para isso deve-se solicitar que os alunos descubram que fórmulas auxiliam na resolução do problema. Com a devida orientação eles podem construir uma tabela com as fórmulas e dados que constam na figura 3.5.

Passageiros	Valor normal por poltrona	Valor a pagar por poltronas vazias	Rendimento da empresa
0	=A2*800	=A2*(100-A2)*10	=B2+C2
5			
10			
20			
40			
70			
80			
90			
100			

Figura 3.5: Tabela com fórmulas e valores para o problema do avião.

A partir da tabela deve-se construir o gráfico com os valores numéricos das primeira e quarta coluna. Para isso seleciona-se estes valores e usando o Assiste gráfico escolhe-se XY(Dispersão)⟶Linhas e pontos⟶concluir.

Passageiros	Valor normal por poltrona	Valor a pagar pelas poltronas vazias	Rendimento da empresa
0	0	0	R$ 0,00
5	4000	4750	R$ 8.750,00
10	8000	9000	R$ 17.000,00
20	16000	16000	R$ 32.000,00
40	32000	24000	R$ 56.000,00
70	56000	21000	R$ 77.000,00
80	64000	16000	R$ 80.000,00
90	72000	9000	R$ 81.000,00
100	80000	0	R$ 80.000,00

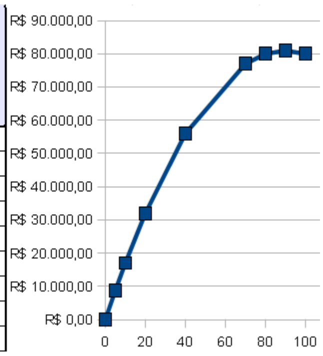


Figura 3.6: Tabela e gráfico do rendimento da empresa de aviação em função da quantidade de passageiros.

Os alunos já conhecem a função afim, seu gráfico e sua forma algébrica. Pode-se perguntá-los se esse novo gráfico representa uma função afim. Como não representa, o passo a ser tomado agora é descobrir que função o representa. Para isso deve-se descobrir a fórmula matemática que representa essa situação. Basicamente, as fórmulas que foram usadas para a construção da tabela oferecem uma dica. Na última coluna o passo foi somar os termos anteriores, assim se A2 for substituído por x, tem-se $800x + 10x(100 - x) = 1800x - 10x^2$. Fazendo uma restrição no domínio, para esse caso, sendo o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R};\, 0 \leq x \leq 100\}$, tem-se $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R};\, f(x) = 1800x - 10x^2$. Essa função apresenta um termo novo que está elevado ao quadrado, o maior expoente, e por isso é chamada de função quadrática, ou função polinomial do segundo grau, cujo gráfico é uma parábola. As funções quadráticas reais são representadas por $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\, f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo a , b e c números reais e $a \neq 0$.

Observando o gráfico do problema, percebe-se que à medida que os valores de x crescem, os valores de y crescem e depois decrescem, fazendo portanto com que y assuma um valor máximo para determinado x. Este é o objetivo em questão, sendo x o número de passageiros e y a rentabilidade da empresa, determinar o número de passageiros que farão com que a rentabilidade da empresa seja máxima.

É claro que, pela observação gráfica, nota-se que à medida que o gráfico decresce, ou seja, os valores de y decrescem, haverá uma repetição de valores, ou seja, $f(x_i) = f(x_j)$, para valores de $i \neq j$. Nesse aspecto deve-se abordar uma alternativa para se descobrir qual é o valor máximo da função. Será necessário compreender algumas particularidades da função quadrática.

O gráfico da função quadrática é uma parábola e, portanto, é simétrico em relação à reta focal. A proposta a seguir visa ajudar os alunos a compreenderem uma forma de se determinar o máximo, ou mínimo da função usando a simetria da parábola. O objetivo é responder às seguintes perguntas:

- Dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2$ o que acontece quando se varia o coeficiente a ?
- Onde está o eixo de simetria?
- Qual é o valor máximo e mínimo da função?
- Dada a função$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx$, o que acontece quando se varia o coeficiente b ?
- Dada a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax^2 + bx + c$, o que acontece quando se varia o coeficiente c ?

Para a construção dos gráficos usando planilha é importante determinar alguns pontos principais. A função quadrática pode possuir pontos onde o gráfico intersecta o eixo x. Como determinar esse pontos analiticamente? No plano cartesiano quando o ponto está sobre o eixo x qual é a sua forma geral? Espera-se que os alunos sejam orientados a descobrirem que o ponto $P(x, 0)$ está sobre o eixo x e resulta em $y = 0$. Assim, fazendo $f(x) = y = 0$ encontra-se os pontos de interseção com o eixo x.

Nesse momento é importante revisar os método de resolução da equação do segundo grau, que dará os valores chamados zeros da função. Para construir o gráfico é bom tomar intervalos de valores que incluem as raízes.

Abrindo uma nova folha de cálculo deve-se seguir os passos abaixo:

Primeiro selecionar toda a planilha e clicar no ícone da barra de ferramentas centralizar, para dar um melhor visual. Na primeira linha selecionar as cinco primeiras células, e na barra de ferramentas de formatação clicar no botão mesclar e escrever ax^2+bx+c dentro das células mescladas. O próximo passo é escrever os dados conforme a figura 3.7 (lembre-se que os dados serão alterados para os valores numéricos depois de se clicar em Enter, conforme figura 3.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ax² + bx + c						delta	=C3*C3-4*A3*E3
2	a	x²	b	x	c		x	y
3	1	=POTÊNCIA(G3;2)	1	=G3	1		0	=A3*B3+C3*D3+E3
4	=A3	=POTÊNCIA(G4;2)	=C3	=G4	=E3		=G3+0,1	=A4*B4+C4*D4+E4
5	=A4	=POTÊNCIA(G5;2)	=C4	=G5	=E4		=G4+0,1	=A5*B5+C5*D5+E5

Figura 3.7: Tabela com fórmulas.

A tabela ficará conforme a figura 3.8

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ax² + bx + c						delta	-3
2	a	x²	b	x	c		x	y
3	1	0	1	0	1		0	1
4	1	0,01	1	0,1	1		0,1	1,11
5	1	0,04	1	0,2	1		0,2	1,24

Figura 3.8: Tabela calculada.

Usando a ferramenta de preenchimento, seleciona-se a quarta e quinta linha e arrasta-se até a linha 60, por exemplo. Na barra de Cabeçalho de coluna seleciona-se as colunas G e H. Depois usa-se o Assistente de gráfico, opção somente linhas, linhas uniformes.

Depois da tabela pronta pode-se verificar as mudanças ocorridas no gráfico quando se altera seus coeficientes. É interessante acrescentar a célula com o valor do discriminante (delta). Com isso pode-se relacionar a existência e quantidade de raízes reais com o valor de delta.

Para cada nova função formada, ao se variar os coeficientes, deve-se observar como fazer com que o gráfico fique simétrico. A dica é calcular as raízes e escolher um intervalo, para construir o gráfico, que contenha essas raízes, ou pela observação, deduzir valores que deixam o gráfico mais simétrico. É lógico que a planilha também pode calcular as raízes, acelerando ainda mais os cálculos, mas é importante que os alunos treinem alguns desses cálculos manualmente. Um desafio interessante é deixar em aberto se eles conseguirão criar a fórmula na planilha.

Voltando para o problema original, deve-se mostrar que o valor máximo ou mínimo está no eixo de simetria da parábola e, portanto, pode ser calculado através da média aritmética simples das raízes. Como a função já foi encontrada, pode-se usar a tabela anterior, alterando-se os valores dos coeficientes para $a = -10$, $b = 1800$ e os valores de x para que o incremento seja 2 (para isso deve-se alterar os dois primeiros valores de x colocando-se 0 e 2). Também é bom aumentar a quantidade de pontos, fazendo o mesmo processo inicial de usar a ferramente de preenchimento até a linha 100, por exemplo. Fazendo o gráfico XY(Dispersão), somente linhas, verifica-se as duas raízes.

ax²+bx+c						Delta	3240000
a	x²	b	x	c		x	y
-10	0	1800	0	0		0	0
-10	4	1800	2	0		2	3560
-10	16	1800	4	0		4	7040
-10	36	1800	6	0		6	10440
-10	64	1800	8	0		8	13760
-10	100	1800	10	0		10	17000
-10	144	1800	12	0		12	20160
-10	196	1800	14	0		14	23240
-10	256	1800	16	0		16	26240
-10	324	1800	18	0		18	29160
-10	400	1800	20	0		20	32000

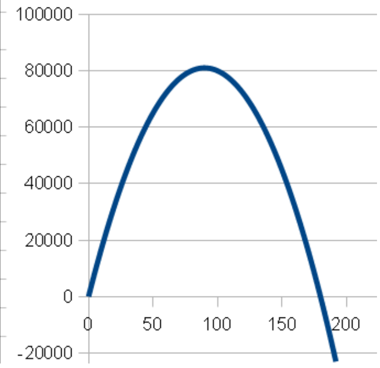


Figura 3.9: Construção do gráfico da função quadrática.

Pode-se calcular as raízes ou consultar seu valor na tabela. É interessante perguntar para os alunos, "qual valor de y, na tabela, ajuda a perceber os zeros da função?". Eles também podem tentar descobrir, na tabela, qual é o número de passageiros que resulta no rendimento máximo e depois calcular. O número de passageiros será dado por

$\frac{0+180}{2} = 90 \Rightarrow f(90) = 81000.$

É importante salientar que o problema original é limitado no intervalo de 0 a 100, mas que para análise a função real aplica-se bem.

É logico que observar na tabela não é o método mais didático, pois nesta se apresentam apenas alguns valores. O correto é o método analítico, no entanto estimula a inter-relação das formas semióticas.

Com essa aula, pôde-se trabalhar máximos e mínimos, mas depois deve-se apresentar as fórmulas dos vértices da parábola também. Uma dificuldade que pode surgir é se o gráfico não alterar com as mudanças nos coeficientes ou nos valores de x, mas para corrigir isto pode-se apagar o gráfico e selecionar as colunas X e Y outra vez e usar o assistente gráfico. Depois dessas aulas pode-se partir para as generalizações e estudar a relação do discriminante com o número de raízes, crescimento, decrescimento e estudo do sinal.

3.4 A Função do Tipo Exponencial

Dado um número real a ($a > 0$ e $a \neq 1$), uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star$ [9] definida por $f(x) = a^x$ é denominada função exponencial e uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = n.a^{kx}$,com$n,\ k \in \mathbb{R}$ é denominada função do tipo exponencial (DANTE, 2005). O objetivo dessa sequência didática é mostrar como fazer a introdução dos conceitos iniciais sobre função exponencial usando o Calc, a partir de uma função do tipo exponencial, de tal forma que os alunos descubram a regra matemática e saibam identificar as principais características do gráfico da função do tipo exponencial. Para isso sugere-se uma aula como suficiente.

Anteriormente é necessário que se faça uma revisão sobre potenciação e suas propriedades. A situação-problema[10] inicial é a seguinte:

Um comerciante rico e moribundo visitou uma turma da escola para fazer uma proposta para os alunos. Ofereceu para eles uma quantia de R$ 10.000,00 naquele momento, para ajudar na compra de materiais para a escola, ou poderia dar a eles uma quantia inicial de R$ 0,01 naquele dia e no segundo dia R$ 0,02, e no terceiro R$ 0,04, e no quarto dia R$ 0,08, dobrando o valor a cada dia até um total de 30 dias. Que opção você escolheria? Por quê?

Geralmente os alunos respondem que preferem os 10 mil reais naquele momento. Se algum aluno responder que prefere a outra opção, sempre deve-se perguntar o porquê. Depois disto, deve-se construir uma tabela com o objetivo de comparar as respostas e verificar qual opção é mais vantajosa.

Aparentemente, sem uma análise quantitativa, a primeira opção é mais vantajosa, porque a segunda apresenta valores muito pequenos inicialmente e se somar esses valores parece que não ultrapassará 10 mil reais. Mas depois de construir a tabela tudo fica diferente. Os alunos devem tentar descobrir qual é a fórmula matemática que usarão que relacionar o dia com o valor ganho para este dia.

Para construir a tabela basta abrir o Calc. Deve-se deixar que os alunos tentem descobrir a fórmula sem ajuda inicialmente. Caso eles não consigam, pode-se orientar o raciocínio deles com algumas perguntas. Por exemplo, pergunte o que acontece com os valores ganhos por dia à medida que os dias passam. Eles vão perceber que estes dobram de um dia para o outro.

Construa uma pequena tabela com os valores que poderão ser recebidos nos primeiros dias. Esta tabela deve conter dados em formato de moeda, em reais (R$

[9] Embora a função exponencial possa ser definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, no geral é definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^\star$ para que exista uma relação como a função inversa da função logarítmica.

[10] Este problema é uma adaptação de um outro proposto em um curso de capacitação oferecido pelo Governo Federal em parceria com a Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais denominado Gestar II e comumente usado em sala de aula.

0,01) e formato de centavos (1 centavo), para que os alunos possam interpretar melhor, conforme figura 3.10. Esses valores são dobrados de um dia para o outro e sabe-se que, para dobrar um valor, pode-se multiplicá-lo por 2. Assim, cria-se uma sequência de multiplicações por 2. Em um momento, o professor deve questionar se existe outra forma de representar esses valores, objetivando que os alunos percebam como escrever os produtos com diversos fatores 2, em forma de potência, conforme figura 3.10.

Dia	Valor R$		Valor em centavos	
1°	0,01	0,01		1
2°	2 x 0,01	0,02	2	2
3°	2x2x0,01	0,04	2x2	4
4°	2x2x2x0,01	0,08	2x2x2	8
5°	2x2x2x2x0,01	0,16	2x2x2x2	16
6°	2^5x0,01	0,32	2^5	32
7°	2^6 x0,01	0,64	2^6	64

Figura 3.10: Tabela com valores ganhos, escritos de formas diferentes para se perceber a relação com o dia.

Por fim, deve associar as potências com o dia.

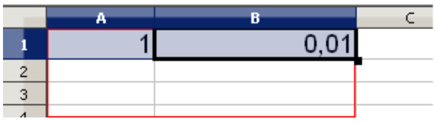
- Quanto se receberá no 27° dia? 2^{26} x 0,01.
- Quanto se receberá no n-ésimo dia? 2^{n-1}x 0,01.

Com a fórmula encontrada pode-se usar uma planilha, em nova aba, para fazer os cálculos. Na célula A1 escreve-se 1. Na célula B1 escreve-se a fórmula $=POT\hat{E}NCIA(2;A1-1)$*$0,01$, figura 3.11. Essa é a escrita de uma potência, em que o primeiro temo dentro dos parênteses representa a base e o segundo, separado por ponto e vírgula, representa o expoente. Pode-se usar também $= 2\,\hat{}\,(A1-1)*0,01$ em que o sinal de acento circunflexo representa "elevado a", .

	A	B	C
1	1	=POTÊNCIA(2;A1-1)*0,01	
2			

Figura 3.11: Inserindo fórmula para função do tipo exponencial por meio da função Potência do Calc.

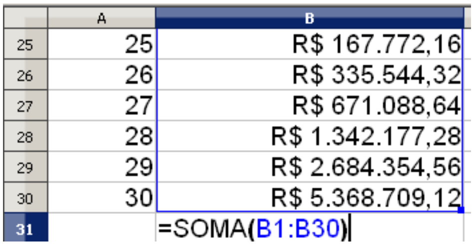
Usando a ferramenta de preenchimento, simultaneamente nas duas células, basta selecioná-las e posicionar o cursor no "quadradinho" que aparece na parte inferior da célula B1, figura 3.12, clicar e arrastar até completar 30 linhas. Depois pode-se selecionar a segunda coluna e usar o ícone **Formato numérico:moeda**.



	A	B	C
1	1	0,01	
2			
3			

Figura 3.12: Usando a ferramenta de preenchimento automático a partir da seleção das células A1 e B1.

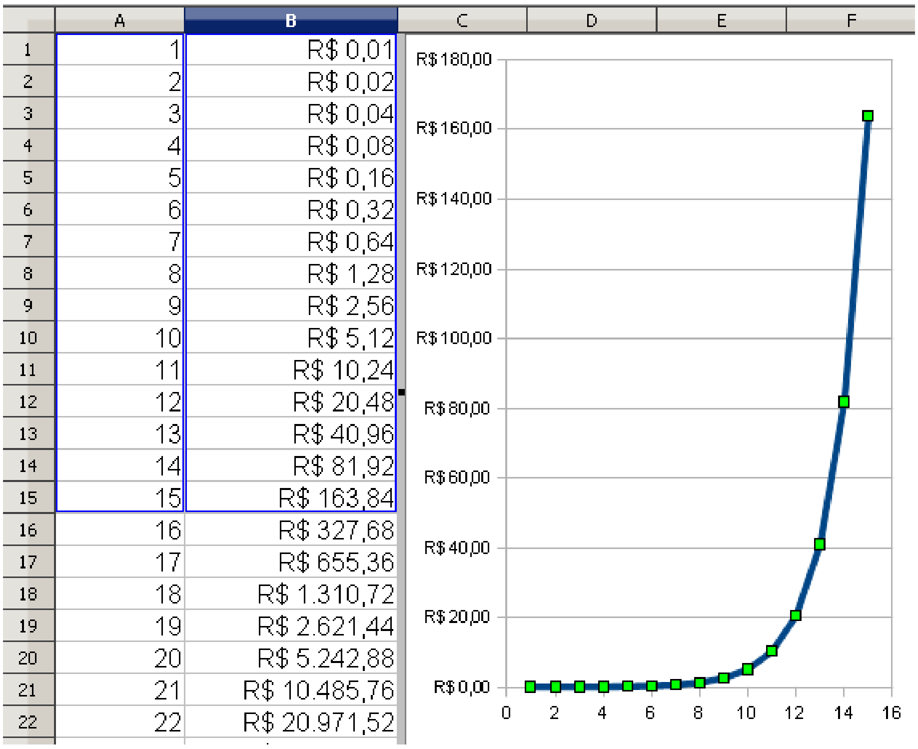
Para finalizar deve-se somar os valores da segunda coluna. Clica-se na célula B31 e no ícone de **Soma,** na barra de fórmulas, fazendo com que todos os valores acima sejam somados, figura 3.13. O resultado com certeza irá surpreender os alunos.



	A	B
25	25	R$ 167.772,16
26	26	R$ 335.544,32
27	27	R$ 671.088,64
28	28	R$ 1.342.177,28
29	29	R$ 2.684.354,56
30	30	R$ 5.368.709,12
31		=SOMA(B1:B30)

Figura 3.13: Usando a função Soma.

Depois, pode-se passar para a construção do gráfico, figura 3.14, selecionando-se os dados e usando o assistente gráfico da barra de ferramentas, XY(Dispersão), somente linhas, linhas uniformes.



	A	B
1	1	R$ 0,01
2	2	R$ 0,02
3	3	R$ 0,04
4	4	R$ 0,08
5	5	R$ 0,16
6	6	R$ 0,32
7	7	R$ 0,64
8	8	R$ 1,28
9	9	R$ 2,56
10	10	R$ 5,12
11	11	R$ 10,24
12	12	R$ 20,48
13	13	R$ 40,96
14	14	R$ 81,92
15	15	R$ 163,84
16	16	R$ 327,68
17	17	R$ 655,36
18	18	R$ 1.310,72
19	19	R$ 2.621,44
20	20	R$ 5.242,88
21	21	R$ 10.485,76
22	22	R$ 20.971,52

Figura 3.14: Gráfico da função do tipo exponencial para o problema do comerciante rico, representando os ganhos diários do 1º ao 15º dia.

Uma orientação é não usar todos os valores, pois os últimos são muito grandes, nada impede de fazer isso, mas fica mais fácil de analisar com menos valores, assim seleciona-se até o 15° dia.

Através do gráfico, como é possível perceber uma possível conclusão errada para se escolher a primeira oferta do comerciante à segunda? O fato é que no início o crescimento da curva é muito lento, ou seja, a variação é bem pequena, mas de repente, os valores começam a crescer muito rápido, o que é percebido na inclinação acentuada da curva exponencial. Esse fato recebe o nome de crescimento exponencial.

Com isso espera-se que os alunos entendam um pouco sobre a velocidade de crescimento da curva exponencial. Feitas estas análises pode-se definir a função exponencial.

Sugere-se que depois desta aula, siga-se com a exploração sobre a função exponencial em si, as variações que ocorrem quando a base é maior que 1 ou está entre 0 e 1. Por exemplo, $f(x) = 2^x$ escreve-se $= POT\hat{E}NCIA(2\,;\,A1)$ ou $= 2\hat{\ }A1$ e $g(x) = 2^{-x} = 0,5^x$ escreve-se $= POT\hat{E}NCIA(2\,;-1*A1)$ ou $= 0,5\hat{\ }A1$. Com isso observa-se quando a função é crescente e quando é decrescente. Os passos para a construção dos gráficos são os mesmos anteriores, conforme figuras 3.11 e 3.12, e pode-se usar valores negativos para x.

Para evitar *bugs*[11] nos cálculos com os dados é melhor usar os números no formato padrão e, se não aparecerem todos os decimais do número, pode-se acrescentar casas decimais usando o ícone da barra de formatação, **Formato numérico: adicionar casas decimais**.

Uma outra opção interessante é poder alterar a base, para isso pode-se formatar a tabela, conforme a figura 3.15 .

	A	B	C	D
1	-5,0	=POTÊNCIA(D1;A1)	BASE	2
2	-4,8	=POTÊNCIA(D2;A2)		=D1
3	-4,6	=POTÊNCIA(D3;A3)		=D2

Figura 3.15: Tabela para criação de gráfico dinâmico da função do tipo exponencial no Calc.

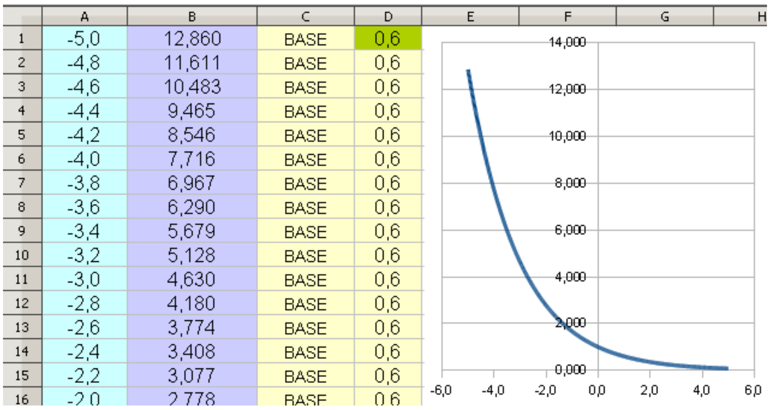
Depois seleciona-se as linhas, 2 e 3, figura 3.16, e usa-se o preenchimento automático até linha 51.

	A	B	C	D
1	-5,0	0,031	BASE	2
2	-4,8	0,036	BASE	2
3	-4,6	0,041	BASE	2
4				

Figura 3.16: Selecionando linhas 2 e 3 para usar o preenchimento automático.

[11] Defeito ou falha no código de um programa de computador.

Selecionam-se as primeira e segunda colunas e insere-se o gráfico XY(Dispersão) com o assistente gráfico na barra de ferramentas. Assim é possível mudar o primeiro valor da coluna da base, por exemplo **0,6** (figura 3.17), e verificar a alteração automática do gráfico e da tabela de valores.



	A	B	C	D
1	-5,0	12,860	BASE	0,6
2	-4,8	11,611	BASE	0,6
3	-4,6	10,483	BASE	0,6
4	-4,4	9,465	BASE	0,6
5	-4,2	8,546	BASE	0,6
6	-4,0	7,716	BASE	0,6
7	-3,8	6,967	BASE	0,6
8	-3,6	6,290	BASE	0,6
9	-3,4	5,679	BASE	0,6
10	-3,2	5,128	BASE	0,6
11	-3,0	4,630	BASE	0,6
12	-2,8	4,180	BASE	0,6
13	-2,6	3,774	BASE	0,6
14	-2,4	3,408	BASE	0,6
15	-2,2	3,077	BASE	0,6
16	-2,0	2,778	BASE	0,6

Figura 3.17: Tabela e gráfico dinâmico ao se alterar a base da função exponencial.

Alguns questionamentos podem ser respondidos agora, como o porquê da função ter imagem $\mathbb{R}_+^*$ e a base ser maior que 0 e diferente de 1. Sugere-se que os alunos testem os cálculos, assumindo a base negativa ou igual a 1 para tirar as conclusões. É importante lembrar que, para bases com valores muito grandes, deve-se aumentar o intervalo de x, para construir o gráfico.

3.5 Função Logarítmica.

O objetivo dessa sequência didática é iniciar os estudos sobre logaritmos e função logarítmica através da análise de uma situação-problema e as alternativas de solução para esta. Pode ser feita em grupo ou individual, em duas aulas. É necessário que os alunos tenham estudado função exponencial, e revisado propriedades das potências e transformação de porcentagem em decimais.

Inicia-se com o problema[12] abaixo:

Uma ONG começou a realizar um trabalho de preservação, visando evitar a extinção de uma determinada espécie de peixe em uma região do Brasil. A população local pescava descomedidamente e com isso não estava havendo tempo suficiente para a repovoação da espécie, quase extinta. Com uma pesquisa em cativeiro, perceberam que a população daquele animal crescia a uma taxa de 5% ao mês, aproximadamente, com os estímulos e cuidados corretos. Queriam saber em quanto tempo a população iria duplicar se a taxa de crescimento permanecesse a mesma. Para convencer a

[12]Este problema é original.

população local a ajudar no projeto, eles pretenderam apresentar os dados em forma de um gráfico afim de mostrar a relação do tempo necessário para que a população duplicasse, triplicasse, quadruplicasse, até atingir o nível seguro para a pesca, que era considerado 5 vezes a população de peixes daquele momento.

1. *Em quanto tempo a população de peixes duplicaria?*
2. *Que gráfico pode ser usado para mostrar o tempo necessário para que a população cresça até atingir o nível aceitável?*

Para responder a essas questões deve-se primeiro descobrir a regra matemática que possibilita o cálculo da população de peixes em função do tempo. Para isso deve-se solicitar que os alunos construam uma tabela que possa ajudá-los a determinar a lei matemática que represente o crescimento populacional em função do tempo. Caso não consigam pode-se ajudá-los com a tabela da figura 3.18.

tempo	população
0	P_o
1 mês	$P_1 = P_o \times 1,05$
2 meses	$P_2 = P_o \times 1,05 \times 1,05$
3 meses	$P_3 = P_o \times 1,05 \text{ X } 1,05 \times 1,05$
...	...
10 meses	$P_{10} = P_o \times (1,05)^{10}$
...	...
x meses	$P_X = P_o \times (1,05)^X$

Figura 3.18: Tabela para se deduzir a fórmula matemática que satisfaça o problema da população de peixes.

Usando essa função, primeiro deve-se descobrir o tempo necessário para que a população inicial dobre. Usando-se os conhecimentos de resolução de equação exponencial faz-se $P_x = 2P_o$, então $(1,05)^x = 2$.

Deste ponto em diante os alunos não conseguem igualar as bases para resolver a equação exponencial. Sugere-se que tentem achar a resposta usando a planilha eletrônica, objetivando descobrir para que valor aproximado de x é verdadeira a equação. Eles devem perceber que para o cálculo aproximado as fórmulas devem ser escritas conforme a figura 3.19.

	A	B
1	Tempo	População
2	0	=1,05^A2
3	0,2	=1,05^A3

Figura 3.19: Fórmulas e valores para criação da tabela no Calc que permita descobrir o valor de x que satisfaça a equação $(1,05)^x = 2$.

Depois de clicar em Enter usa-se a ferramenta de preenchimento automático, selecionando-se as segunda e terceira linhas da tabela e arrastando-se para um número grande de linhas abaixo. Se por ventura o valor não for encontrado deve-se repetir o processo selecionando-se as duas ultimas linhas da tabela até aparecer os valores desejados (conforme figura 3.20 será na 74º linha).

72	14	1,979932
73	14,2	1,999346
74	14,4	2,018952

Figura 3.20: Valor aproximado de x que satisfaz a equação $(1,05)^x = 2$.

Depois disso pode-se fazer o gráfico XY(Dispersão), somente linhas, selecionando-se as primeira e segunda coluna no Cabeçalho de colunas e usando o ícone Gráfico da barra de ferramentas. O gráfico se assemelhará à figura 3.21.

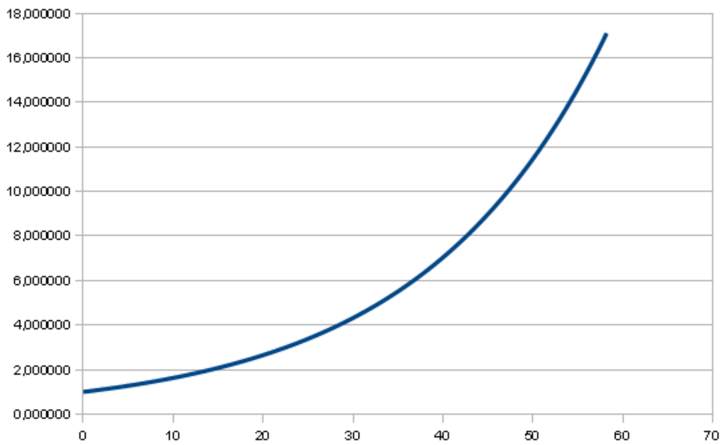


Figura 3.21: Gráfico da população de peixes em função do tempo.

Mas este gráfico relaciona a população em função do tempo e o objetivo agora é o contrário, relacionar o tempo com a população. A tempo foi encontrado usando tentativa.

- Como encontrar algebricamente?
- Que função pode ser usada para representar o tempo em função da população?

Para isso deve-se usar a função inversa da função exponencial. Por definição $log_b a = x$ se, e somente se, $b^x = a$. Então pode-se resolver o situação-problema por fazer $x = log_{1,05} 2$ já que $(1,05)^x = 2$.

A planilha resolve esse cálculo por se escrever $= LOG(2\,;\,1,05)$, cuja notação representa =LOG(número ; base). Assim o resultado pode ser encontrado de duas formas.

Como dito anteriormente, o que se deseja não é um gráfico que relaciona a população em função do tempo, mas o tempo em função da população. Para tanto deve-se usar a função inversa da função dada. A função logarítmica é a inversa da função exponencial, assim ela dará o tempo em função da população.

Para construir o gráfico deve-se lembrar que está se trabalhando com os fatores multiplicativos da população inicial, logo os dados referem-se ao tempo para se dobrar, triplicar, quadruplicar, e assim sucessivamente, a população inicial. Em uma nova planilha escreve-se conforme figura 3.22.

	A	B
1	Fator de multiplicação	Tempo de crescimento
2	1,00000	=LOG(A2;1,05)
3	1,20000	=LOG(A3;1,05)

Figura 3.22: Tabela com fórmulas para cálculo do tempo em função fator de multiplicação da população de peixes.

Segue-se o mesmo processo de preenchimento automático usado anteriormente. Seleciona-se as duas primeiras colunas, ícone Gráfico, tipo XY(Dispersão), somente linhas. A tabela e o gráfico correspondente ficará como a figura 3.23.

Fator de multiplicação	Tempo de crescimento
1,00000	0
1,20000	3,74
1,40000	6,9
1,60000	9,63
1,80000	12,05
2,00000	14,21
2,20000	16,16
2,40000	17,94
2,60000	19,58
2,80000	21,1
3,00000	22,52
3,20000	23,84
3,40000	25,08
3,60000	26,25
3,80000	27,36
4,00000	28,41
4,20000	29,41
4,40000	30,37
4,60000	31,28
4,80000	32,15
5,00000	32,99
5,20000	33,79

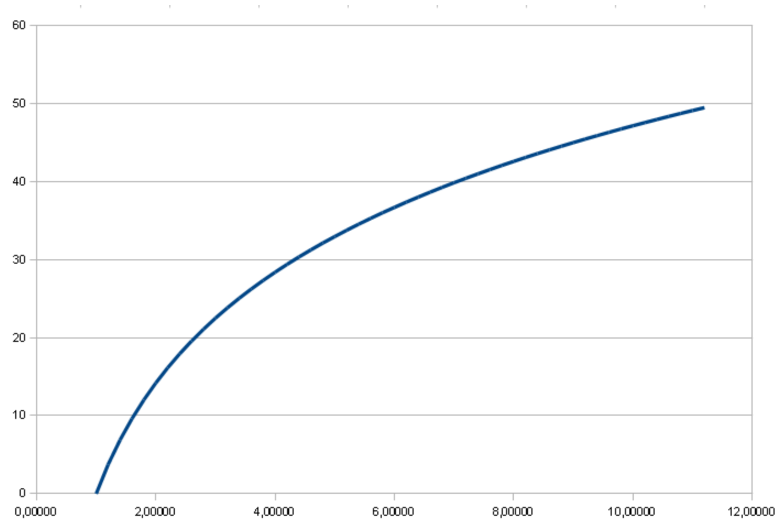


Figura 3.23: Gráfico do tempo em função da "população".

Por meio deste gráfico é possível observar quanto tempo é necessário para que a população de peixes quadruplique, por exemplo. Com isso pode-se dar continuidade, abordando as noções de logaritmo, suas aplicações, assim como a função logarítmica.

4 ENSINO DE PROGRESSÕES

Friedrich Gauss (1777-1855), ainda bem jovem, deu grandes sinais de sua genialidade matemática. Desde bem cedo, ele fazia cálculos mentalmente. Diz-se que, quando tinha cerca de 10 anos, na escola, durante uma aula de matemática, para manter os alunos ocupados, o professor pediu para que os alunos calculassem a soma dos números naturais de 1 a 100. Em poucos minutos Gauss apresentou o resultado correto. Naquela época esse era um feito de gênio pois, até então, ninguém havia feito tal cálculo de forma tão rápida. Como o jovem Gauss conseguiu isto? Ele se baseou em uma propriedade de uma sequência numérica chamada Progressão Aritmética, também chamada P.A, e mentalmente usou uma fórmula, que não havia sido descoberta ainda, para o cálculo da soma dos primeiros termos de uma P.A. [9]

As sequências numéricas são diversas e podem ser criadas de qualquer forma, por exemplo, a sequência (1, 3, 5, 7, ...), que representa a sequência de números primos, ou (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) que é chamada de sequência de Fibonacci. Muitas destas expressam uma regularidade que é objeto de estudo da matemática. Dentre elas, há duas, que geralmente são estudadas com maior profundidade no Ensino Médio, as progressões Aritmética e Geométrica.

O objetivo dessas sequências didáticas é mostrar como aplicar os conceitos de função com relação às progressões, com auxílio de planilhas eletrônicas, para fazer uma conexão entre conceitos, afim de suscitar o interesse dos alunos e fazer uma abordagem visual que pode ajudar na assimilação do assunto.

4.1 Progressão aritmética - uma abordagem como função afim.

Segundo Eves (2002), o papiro Rhind é uma relíquia matemática egípcia de cerca de 1650 a.C.. Nele consta 85 problemas de matemática dentre os quais o seguinte é interessante: "Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja a soma das duas menores." O que mostra que os povos antigos, pelo menos dessa região, sabiam trabalhar com progressões.

Um progressão Aritmética é uma sequência numérica em que cada termo , a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante ***r*** chamada de **razão** ou **diferença comum** da progressão aritmética.

Simbolicamente pode ser representada a P.A.$(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ em que:
a_1 é o primeiro termo

$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r$
$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r$
$\cdots$
$a_n = a_1 + (n-1)r.$
...

Pode-se fazer uma relação entre uma progressão aritmética com uma função afim.

Segundo Lima *et al,* v.2 (2006) :

> Uma progressão aritmética pode ser vista geometricamente como uma sequência (finita ou infinita) de pontos $x_1, x_2, ..., x_i ...$,igualmente espaçados na reta. Isto quer dizer que a razão $h = x_{i+1} – x_i$, não depende de i: $h = x_2 – x_1 = x_3 – x_2 = ... = x_{i+1} – x_i = ...$ (p.101)

Ele acrescenta que

> Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim, digamos $f(x) = ax + b$, e $x_1, x_2, ..., x_i...$, é uma progressão aritmética, então os pontos $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, ...$ também estão igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética cuja razão é $y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) – (ax_i + b) = a(x_{i+1} – x_i) = ah$. (p. 101)

Desta forma, no plano, se existir uma reta não vertical e, sobre ela, forem tomados os pontos

$$(1\,,\, y_1), (2\,,\, y_2), ..., (i\,,\, y_i), ...$$

de abscissas, $1, 2, ..., n, ...$ $n \in \mathbb{N}$, as ordenadas $y_1, y_2, ..., y_i, ...$ desses pontos formam uma progressão aritmética. Assim, como é feita uma conexão entre a progressão e uma função, existe um gráfico desta função em $\mathbb{R}^2$, que serão pontos alinhados sobre uma reta imaginária.

Tomando $a_n = a_1 + (n-1)r = rn + a_1 - r = rn + b$, então pode-se associar a_n com uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n = rn + b$. Se os elementos $n_1, n_2, n_3, ..., n_i, ...$ formam uma progressão aritmética, então os elementos $f(n_1), f(n_2), f(n_3), ..., f(n_i), ...$ também formam uma progressão aritmética para $i \in \mathbb{N}^\star$. De modo geral, dada uma função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se essa função transforma uma progressão aritmética em outra progressão aritmética ela é uma função afim.

A sequência didática a seguir pode ser trabalhada depois de explicados os conceitos principais relacionados com progressão aritmética, para se fazer uma relação com funções afins e apresentar um gráfico. Pode ser trabalhada em uma aula.

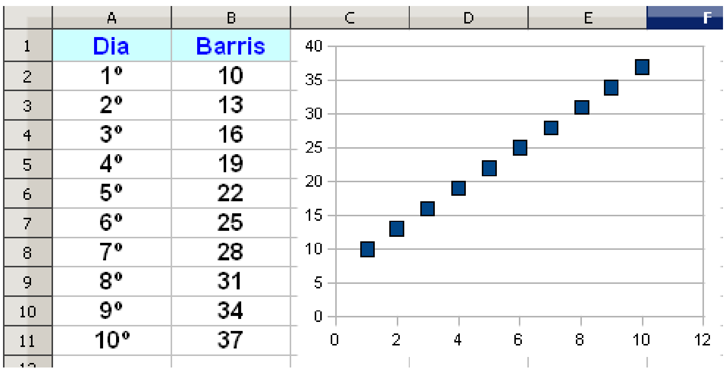
A situação-problema[13] inicial é a seguinte:

Uma grande empresa nacional encontrou petróleo em uma determinada região do Brasil. Os trabalhos começaram para a extração do petróleo e para verificar o andamento dos trabalhos começou-se com um registro da produção diária, em barris de petróleo, em uma tabela. No primeiro dia registrou 10 barris, no segundo dia 13 barris, no terceiro dia 16 barris, e assim, nesta sequência e ordem.

1. *Que regra matemática possibilita o cálculo diário da quantidade de barris de petróleo extraídos?*
2. *Qual é a quantidade de barris produzidos no 48º dia?*
3. *Que regra matemática permite o cálculo da produção total de barris de petróleo até um determinado dia?*
4. *Qual o total de barris de petróleo produzidos até o 50º?*

Uma alternativa para se responder às questões é criar uma tabela e analisar seu gráfico. Para isso pode-se abrir o Calc e lançar os dados do problema. Percebe-se que os valores estão em ordem crescente e aumentando de 3 em 3.

O gráfico sugerido deve ser de apenas pontos, figura 4.1. Seleciona-se os dados da tabela e clica-se no ícone gráfico na barra de ferramentas, opção XY(Dispersão), somente pontos.



	A	B
1	Dia	Barris
2	1º	10
3	2º	13
4	3º	16
5	4º	19
6	5º	22
7	6º	25
8	7º	28
9	8º	31
10	9º	34
11	10º	37

Figura 4.1: Tabela e gráfico da progressão aritmética.

Aparentemente os pontos estão alinhados e parecem uma reta. A função cujo gráfico é uma reta é a função afim. Mas também percebe-se que os dados da tabela de barris formam uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 10 e a razão é 3. Assim pode-se fazer

[13]Este problema é original.

$$a_n = 10 + (n-1) \cdot 3 = 10 + 3n - 3 = 3n + 7$$

Desta forma, $f(n) = 3n + 7$ para n natural é uma regra matemática que satisfaz as condições do problema e de fato, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 7$ é uma função afim.

Pode-se confirmar a resposta fazendo-se uma nova tabela, mas desta vez, com a fórmula encontrada. Abri-se uma nova planilha e escreve-se, na coluna A, os dias e na coluna B, na célula B2, a fórmula $= 3^{*}A2 + 7$ e clica-se em Enter. Depois usa-se a ferramenta de preenchimento automático até o fim da tabela. Comparando-se, as duas tabelas possuem os mesmos valores.

Para responder à segunda questão a fórmula pode ser usada, fazendo $f(48) = 3 \times (48) + 7 = 151$.

Uma outra forma de verificar a resposta é usar a ferramenta de preenchimento até o 48º dia, nas duas colunas, simultaneamente. Na primeira coluna os valores crescerão na ordem e na segunda coluna de 3 em 3.

Para responder à terceira pergunta basta lembrar que a soma dos termos de uma P.A são dados pela fórmula

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Como $a_n = f(n)$ então

$$S_n = \frac{(10 + 3n + 7)n}{2} = \frac{(3n + 17)n}{2}.$$

Para calcular a soma até o 50º dia pode-se usar a fórmula encontrada

$$S_{50} = \frac{(3 \times 50 + 17) \times 50}{2} = 4.175$$

A planilha oferece a opção de verificar a resposta por completar a tabela até o 50º dia e usar o ícone **Soma**, logo abaixo do último valor da coluna B.

Desta forma, percebe-se que uma progressão aritmética é uma função cujo domínio são os números naturais e seu gráfico é uma sequência de pontos alinhados. Além disso, as progressões aritméticas servem como auxílio para definir se uma função afim modela uma situação.

Depois desta sequência pode-se generalizar a relação de um progressão aritmética com uma função afim, e vice-versa, seguindo a argumentação dada no início dessa subsecção que mostra que toda função afim transforma uma progressão aritmética em outra progressão aritmética.

4.2 Progressão geométrica - uma abordagem como função exponencial.

O problema 79 do Papiro Rhind fala de uma situação em que há "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2.041 espigas de trigo, 16.807 hekats[14]". Provavelmente o escriba estava se referindo a um problema bastante conhecido naquela época, em que uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. Essa sequência (7, 49, 343, 2.041, 16.807) forma uma progressão geométrica. [9]

Progressão geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente por uma constante q é chamada de razão da progressão geométrica.

Simbolicamente pode ser representada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$ em que:
a_1 é o primeiro termo
$a_2 = a_1q$
$a_3 = a_2q = (a_1q)q = a_1q^2$
$a_4 = a_3q = (a_1q^2)q = a_1q^3$
...
$an = a_1q^{n-1}$

Uma função do tipo exponencial pode ser caracterizada da seguinte forma: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ em uma progressão geométrica $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots$, então $f(x)$ pode ser escrita na forma $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ e $b \neq 0$.

A sequência didática a seguir pode ser trabalhada depois de explicados os principais conceitos relacionados com progressões aritmética e geométrica, assim como funções do tipo exponencial, para se fazer uma conexão entre os conceitos de funções e progressões geométricas com auxílio gráfico. Pode ser trabalhada em uma aula.

A situação-problema[15] inicial é a seguinte:

Um experimento visava descobrir uma função que definisse o crescimento de uma cultura de bactérias. Os dados foram registrados na tabela ao lado para intervalos de tempo de 3 horas, a partir do início da observação. Se a quantidade de bactérias continuar a aumentar nesta sequência, no mesmo padrão de crescimento,que regra matemática define o crescimento desse cultura de bactérias em função do tempo?

Tempo	Bactérias
Início	200
3h	600
6h	1800
9h	5400
12h	16200
15h	48600
18h	145800

[14] Medidas dos antigos egípcios, equivalente a 4,8 litros.
[15] Este problema é original.

Inicialmente pode-se observar que assumindo o valor inicial do tempo como zero, as colunas formam sequências numéricas que são progressões. A coluna do tempo forma uma progressão aritmética de razão r igual a 3 e a coluna do número de bactérias forma uma progressão geométrica de razão q igual a 3.

A análise do gráfico dessa tabela pode ajudar a encontrar o tipo de função que representa a situação. Para construir o gráfico pode-se selecionar os dados numéricos e usando o ícone Gráfico da barra de ferramentas escolher a opção XY(Dispersão), somente pontos. Com este gráfico pode-se verificar que os pontos não estão alinhados e, portanto, não é uma função afim.

Para uma melhor visualização pode-se acrescentar outro gráfico na mesma planilha, selecionando-se os dados, outra vez, mas escolhendo-se XY(Dispersão), somente linhas, linhas uniformes.

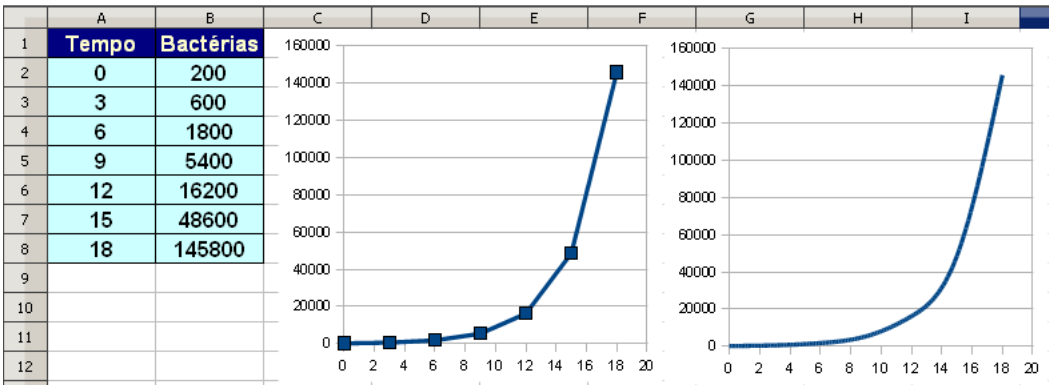


Figura 4.2: Gráficos da progressão geométrica e da suposta função.

Com isso pode-se verificar que a curva assemelha-se à curva exponencial, então a função deve ser do tipo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = b \cdot a^x$. Tem-se que comprovar se realmente é uma função do tipo exponencial.

Os termos da primeira coluna formam uma progressão aritmética cuja lei de formação é

$$a_n = 0 + (n-1) \times 3 = 3n - 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Os termos da segunda coluna formam uma progressão geométrica cuja lei de formação é

$$b_m = 200 \times 3^{m-1}, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Como relacionar essas duas sequências e encontrar uma função? Observe que a função deve transformar os termos da progressão aritmética nos termos da progressão geométrica, então $f(a_n) = b_m$. Assim,

$f(a_1) = f(0) = 200 \times 3^0 = 200,$
$f(a_2) = f(3) = 200 \times 3^1 = 600,$
$f(a_3) = f(6) = 200 \times 3^2 = 1.800,$
$f(a_4) = f(9) = 200 \times 3^3 = 5.400.$

Note que para relacionar o valor de a_n, da progressão aritmética, com o expoente $m-1$, da progressão geométrica, basta dividir a_n por 3, então a conclusão que se chega é que

$$f(a_n) = f(3n-3) = 200 \times 3^{\frac{n-3}{3}} \ .$$

Fazendo $3n-3$ igual a x tem-se que $f(x) = 200 \times 3^{\frac{x}{3}}$.

Tomando $x \in \mathbb{R}$ tem-se que a função f é do tipo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = b \cdot a^x$ e portanto é do tipo exponencial, como sugere o gráfico, em que $b = 200$ e $a = 3^{1/3}$.

Com esta função pode-se determinar a quantidade de bactérias, não somente para números naturais mas para qualquer número real que satisfaça o problema.

Depois disso pode-se passar para as conclusões formais e apresentar a argumentação do início desta subsecção.

Uma outra abordagem, que poderia ser feita, é partir da suposição sugerida pela observação do gráfico, que a função era do tipo exponencial, ou seja, $f(x) = ba^x$ então $f(0) = b.a^0 = 200$, o que implica em $b = 200$. Como $f(3) = 200 \times a^3 = 600$, implica que $a^3 = 3$, então $a = 3^{1/3}$. Assim a função será $f(x) = 200 \times 3^{\frac{x}{3}}$.

Para verificar, pode-se usar a planilha eletrônica para agilizar os cálculos, colocando-se na segunda coluna a fórmula $= 200 * 3\hat{}(A2/3)$. Depois basta usar a ferramenta de preenchimento automático. Os valores da duas tabelas são os mesmos, comprovando a validade da função suposta. Desta forma, pode-se fazer uma conexão entre progressão geométrica e função do tipo exponencial.

5 ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA BÁSICA COM CALC

O Conteúdo Básico Comum (CBC), com orientações para o ensino de matemática no primeiro ano do Ensino Médio, sob o eixo temático Funções e Modelagem, Matemática Financeira, traz sugestões sobre os objetivos que devem nortear a atividade docente, que é criar situações em que o aluno consiga:

> • Comparar questões que envolvam juros simples ou compostos e problemas simples de matemática financeira. Exemplos: cobrança de juros de mora – juros simples - (devido ao atraso em uma prestação); cálculo do rendimento de poupança – juros compostos.
> • Relacionar o cálculo de prestações em financiamentos com a função exponencial e a progressão geométrica.
> • Fazer estimativas e cálculos dos juros cobrados em financiamentos; comparar formas de pagamento na compra de um bem e emitir juízo sobre a forma mais vantajosa de pagamento. (p.70)

Assim, o objetivo de se ensinar noções básicas de matemática financeira é fazer com que o aluno seja capaz de resolver problemas que envolvam o conceito de porcentagem, juros simples, ou compostos, resolver situações-problema que envolvam o cálculo pequeno de parcelas, que saiba fazer análise sobre a vantagem do pagamento à vista ou a prazo, sobre financiamentos a curto, médio e longo prazo, entre outros, contribuindo com sua formação como consumidor crítico e consciente.

A maioria das empresas que trabalham com financiamento realizam seus cálculos usando planilhas eletrônicas, e isso devido à capacidade das mesmas fazerem operações repetitivas ordenadamente. A formatação usando tabelas ajuda na visualização e compreensão dos dados. Usar desses recursos em sala de aula pode ser de ajuda no ensino de matemática financeira. A seguir, o que se propõe é fazer um levantamento histórico sobre dinheiro, bancos, e operações financeiras, como juros e descontos. Depois, algumas sequências didáticas para o ensino de porcentagem, juros simples e compostos usando planilha eletrônica.

5.1 Desenvolvimento histórico das operações financeiras

Segundo a Casa da Moeda do Brasil, no início, quando alguém queria adquirir alguma coisa que ela não possuía, ela não usava moeda, dinheiro, pois não havia. O que era praticado chama-se escambo, troca de mercadoria por mercadoria, sem fazer uma equivalência entre os valores dos bens trocados. Desta forma, o que alguém tinha em excesso trocava com a mercadoria que outra pessoa tinha em excesso, e foi assim por muitos séculos da história das civilizações, criando-se uma forma rudimentar de comércio.

Com o tempo algumas mercadorias, como gado e sal, começaram a ter uma procura maior, surgindo uma noção de valor para elas, de tal forma que assumiram a função de moeda e podiam ser trocadas por outros bens servindo como uma medida comum de valor entre os elementos a serem permutados. Até hoje algumas palavras tem suas raízes nesses produtos, como pecúnia, dinheiro, que deriva da palavra latina *pecus*, que significa gado, e capital, que vem de *capita*, cabeça em latim. A palavra salário vem de sal, que era o pagamento dado em Roma pela prestação de serviços.

Com o tempo essas mercadorias-moeda perderam seu uso por serem perecíveis, não poderem ser repartidas facilmente e oscilarem muito seu valor. Para substituí-las os metais começaram a ser usados, devido sua versatilidade e durabilidade, sob diversas formas, desde natura até na forma de facas, chaves e joias. [4]

Para que o metal fosse usado como dinheiro precisava ser pesado e analisado quanto ao grau de pureza. Com o tempo passou a ter forma definida e marcas que mostravam que já haviam sido pesados, o quanto valiam e quem havia emitido, o que agilizava as transações comerciais.

Segundo a Casa da Moeda do Brasil, no século VII a.C. surgem as primeiras moedas com características das atuais. Na Grécia haviam moedas de prata e, na Lídia, eram utilizados pequenos lingotes ovais de uma liga de ouro e prata chamada eletro. Os primeiros metais usados para cunhar moedas foram ouro e prata, e durante muito tempo permaneceu assim. A quantidade de metal usado na cunhagem determinava seu valor. No século passado as moedas passaram a ser fabricadas com outros metais e seu valor passou a ser o registrado. Com a criação das cédulas de papel as moedas passaram a ser mais usadas para troco. Já as cédulas de papel se originaram dos recibos que os ourives entregavam paras as pessoas que deixavam peças de ouro e prata com eles.

A necessidade de guardar as moedas em segurança deu surgimento aos bancos sendo que os primeiros reconhecidos oficialmente se originaram, respectivamente, na Suécia, em 1656; na Inglaterra, em 1694; na França, em 1700. Embora os primeiros remontem a civilizações bem mais antigas, como os sumérios. [4]

O surgimento dos bancos está diretamente ligado ao uso da Matemática Comercial e Financeira, da Economia durante os séculos X até XV, o que serviu de grande impulso para o avanço da matemática relacionado ao cálculo financeiro, por exemplo, de juros. [6]

Quando o comércio começou a atingir seu auge, uma das atividades do mercador foi também a do comércio de dinheiro: com o ouro e a prata, originando os cambistas. Nesse aspecto, as guerras fizeram com que os povos conquistados pagassem tributos na moeda do país vencedor. Com isso os cambistas especializados nesse tipo de transação, faziam a troca do dinheiro e muitos deles acumularam grandes somas de dinheiro. Com o risco de ter muito dinheiro em mãos alguns destes passaram a deixar guardado seus recursos com aquele que fosse mais rico, em sua casa. Este, por usa vez resolveu emprestar esses valores, sem medo de que todos os reais donos viessem requerê-lo, recebendo em troca uma espécie de aluguel por o ter emprestado, um juros pelo usufruto do dinheiro. Assim, as transações comerciais ligadas ao empréstimo de dinheiro tiveram um impulso maior, chegando à forma atual. [4]

É bastante antigo o conceito de juros e surgiu naturalmente à medida que o Homem percebeu existir uma estreita relação entre o dinheiro e o tempo. Processos de acumulação de capital e a desvalorização da moeda levariam normalmente a ideia de juros, pois se realizavam basicamente devido ao valor do dinheiro no decorrer do tempo. [4]

De acordo com Gonçalves (2005), há muitos textos de civilizações antigas que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. Existem tábuas de argila que mostram que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de venda e endossos. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras mercadorias emprestadas, na mesma forma do que foi tomado ou de outros bens.

Gonçalves (2005) acrescenta que a História mostra que a ideia de juros estava tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.C., em Babilônia. A renda deles provinha das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro. Há tábuas nas coleções de Berlim, de Yale e do Louvre que contêm problemas sobre juros compostos e algumas sugerem equações exponenciais. Em uma tábua do Louvre, de cerca de 1700 a.C., há o seguinte problema: Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?

Quando se aplica recursos poupados de um indivíduo, visando a produção de bens e serviços, tornando possível aumentar o consumo ou a renda no futuro, diz -se que foi feito um investimento. Para estudar toda a relação que existe entre crédito, juros e investimentos foi criada a matemática financeira que tem por objetivo estudar a evolução do dinheiro no decorrer do tempo.

A proposta a seguir visa sugerir formas de se trabalhar alguns conceitos relacionados a porcentagem, juros simples e juros compostos usando a planilha eletrônica Calc, a partir de situações simples que envolvem processos de compra, venda e aplicação financeira. O texto no início deste capítulo pode servir de contexto histórico para o início da abordagem.

5.2 Porcentagem:

A questão da porcentagem, ou percentagem, é muito utilizada no mercado financeiro quando se quer um desconto ou verificar o quanto se cobrará de juro em uma aplicação financeira, ou um empréstimo. Em química muitos produtos precisam vir com a indicação de percentual de acidez, percentual alcoólico, entre outros. Em uma planilha de acompanhamento de uma construção,talvez o engenheiro deseje mostrar o andamento da obra em termos de porcentagem para definir o quanto já foi construído de um prédio.

O termo vem do latim *per centum* e refere-se a uma parte de 100, ou seja, uma fração cujo denominador é 100. Por exemplo, 1% significa que algo foi dividido em 100 partes e apenas uma parte de 100 está sendo o objeto de estudo. Pode-se fazer uma relação com frações e assim 1% pode ser representado por 1/100.

É importante sempre revisar com os alunos operações com números escritos na forma decimal e percentual e as transformações de uma forma para outra, assim como o produto e divisão por 10, 100 e 1000. Por exemplo, o número 2 pode ser escrito também como 200% pois

$$2 = 2 \times 1 = 2 \times \frac{100}{100} = \frac{200}{100} = 200\%.$$

Assim quando um número decimal é multiplicado por 100 ele assume sua forma percentual, sempre acrescido do símbolo de porcentagem (%) .

O número 0,25% pode ser escrito na forma decimal por se dividir o número 0,25 por 100 (*per centum*). Isto deve estar bem claro para os alunos. As planilha tem a opção de alterar o formato numérico com apenas um clique, usando os ícones de formato numérico da barra de formatação.

A planilha automaticamente faz arredondamentos para alguns números. Caso isso ocorra existe os ícones de formato numérico para adicionar e excluir casas decimais. Pode-se usar esses recursos da planilha para revisar com os alunos as transformações de um número na forma decimal para forma percentual, e vice-versa.

Cria-se uma tabela com os valores na forma decimal em uma coluna e na outra na forma de porcentagem. Para transformar os números na forma decimal em porcentagem pode-se escrever na célula B2 $= A2$ e usar a ferramenta de preenchimento nas células abaixo. Depois pode-se selecionar toda a coluna com B e clicar no ícone Formato numérico:porcentagem, figura 5.1.

	A	B
1	DECIMAL	PERCENTUAL
2	1	1
3	-2	-2
4	0,25	0,25
5	-1,2	-1,2
6	2,456	2,46
7	0,02354	0,02

$\rightarrow$

	A	B
1	DECIMAL	PERCENTUAL
2	1	100%
3	-2	-200%
4	0,25	25%
5	-1,2	-120%
6	2,456	245,6%
7	0,02354	2,354%

Figura 5.1: Tabela de transformação de decimal para percentual.

Feito isto pode-se perguntar para os alunos o que ocorreu com os valores, ou, "Que regra matemática pode ser usada para alterar o formato do número de decimal para porcentagem?".

O cálculo percentual nada mais é que a multiplicação de um valor qualquer pelo percentual desejado. Muito problemas que envolvem porcentagem podem ser resolvidos por regra de três.

A sequência a seguir objetiva apresentar uma alternativa para se fazer a revisão do cálculo com porcentagens sem a necessidade do uso de regra de três. Um problema[16] pode servir de estímulo.

O dono de uma loja deseja criar uma tabela com dados referentes ao percentual de lucro sobre os produtos comercializados por ele. Nesta tabela deve conter o nome da mercadoria, o preço que foi comprado, o preço que será vendido e o percentual do lucro. Qual é o percentual de lucro que incide sobre cada mercadoria?

Mercadoria	Preço de compra	Preço de venda	Percentual do lucro
copo	R$ 0,25	R$ 1,20	
faca	R$ 0,90	R$ 1,80	
garfo	R$ 0,80	R$ 1,40	
prato	R$ 1,20	R$ 2,50	
toalha	R$ 2,50	R$ 6,00	
porta prato	R$ 1,50	R$ 2,00	
garrafa térmica	R$ 15,00	R$ 32,00	
leiteira	R$ 10,00	R$ 20,00	
panela de pressão	R$ 20,00	R$ 45,00	

Figura 5.2: Tabela com dados sobre preços das mercadorias.

Deve-se perguntar aos alunos que processos eles utilizariam para resolver esta questão. Usando regra de três o sobre o primeiro valor tem-se

$$0,25 \rightarrow 100\%$$

[16] Este problema é original.

$$1,20 \rightarrow x\%$$

Fazendo multiplicação cruzada chega-se a

$$0,25x = 1,20 \times 100 \Longrightarrow x = \frac{1,20}{0,25} \times 100 = 480.$$

Muitos acham que o valor 480% é a resposta, mas, deve-se permitir que os alunos discutam entre si o significado. Observe que 480% é o valor original com o aumento (lucro). Para achar só o aumento deve diminuir 100% que representa o valor original. Então $480\% - 100\% = 380\%$.

Fazendo o mesmo cálculo para o segundo item chega-se a

$$x = \frac{1,80}{0,90} \times 100 = 200 \Longrightarrow 200\% - 100\% = 100\%.$$

Analisando os dois cálculos anteriores percebe-se que pode-se reduzi-los a uma conta de dividir, uma multiplicação e uma subtração sem a necessidade da escrita da regra de três, partindo para o processo final, de imediato. Portanto, para descobrir quantos por cento um valor é maior que outro basta dividir o maior pelo menor, multiplicar por 100 e diminuir 100%.

Assim, pode-se criar a fórmula para a tabela na planilha eletrônica. Os alunos devem criar uma tabela como a figura 5.3 e na célula D2 escreve-se $= C2/B2 - 100\%$. Eles podem repetir o processo um por um. Caso os textos não caibam na célula pode-se formatar a tabela (veja subsecção 2.3.7).

D2 =C2/B2-1

	A	B	C	D
1	Mercadoria	Preço de compra	Preço de venda	Percentual do lucro
2	copo	R$ 0,25	R$ 1,20	380,00%
3	faca	R$ 0,90	R$ 1,80	100,00%
4	garfo	R$ 0,80	R$ 1,40	75,00%
5	prato	R$ 1,20	R$ 2,50	108,33%
6	toalha	R$ 2,50	R$ 6,00	140,00%
7	porta prato	R$ 1,50	R$ 2,00	33,33%
8	garrafa térmica	R$ 15,00	R$ 32,00	113,33%
9	leiteira	R$ 10,00	R$ 20,00	100,00%
10	panela de pressão	R$ 20,00	R$ 45,00	125,00%

Figura 5.3: Tabela com dados percentuais.

Finalizando, pode-se pedir para que descubram uma fórmula para se determinar o percentual de prejuízo, que é muito semelhante, divide-se o menor valor pelo maior, multiplicar por 100 e depois subtrair de 100%. Um coisa a se lembrar é que nada impede os alunos de fazerem sempre seus cálculos usando regra de três.

5.3 Fator de redução e fator de aumento

A sequência didática a seguir tem por objetivo ajudar os alunos a compreenderem melhor como fazer o cálculo de porcentagens através de fatores de redução e de aumento. Pode ser feita em uma aula, agrupando os alunos de acordo com a disponibilidade do laboratório de informática. É necessário que saibam fazer as transformações de números escritos na forma decimal para percentual.

A situação é a seguinte[17]:

Tenho uma amiga que desconfia muito do cálculo que os vendedores fazem em suas calculadoras quando ganha um desconto. Ela foi a uma loja que resolveu fazer uma grande liquidação para venda de produtos à vista e caso o cliente desejasse pagar a prazo, a mercadoria sofreria um pequeno aumento. Ela queria fazer seus próprios cálculos para ver se condizia com o dos vendedores. Ela percebeu que tanto os percentuais de desconto como os de aumento variavam de acordo com as mercadorias. Os vendedores usavam uma calculadora de bolso e a única coisa que ela tinha era um celular que não fazia cálculo de porcentagem como as calculadoras comuns, pois não tinha a tecla de porcentagem. Na hora de fazer os cálculos ela precisava lembrar das aulas de matemática e saber usar o celular. Ela pegou um folheto que mostrava as principais ofertas e começou a treinar em casa. Ajude à compradora a descobrir uma forma rápida de usar o celular para fazer os cálculos de desconto e de aumento de forma rápida. O folheto continha as informações necessárias e ela montou a seguinte tabela (figura 5.4):

Mercadoria	Preço	Desconto à vista	Aumento a prazo
Calça X	R$ 120,00	70,00%	5,00%
Calça Y	R$ 150,00	36,00%	10,00%
Calça z	R$ 180,00	40,00%	15,00%
Blusa X	R$ 45,00	25,00%	8,00%
Blusa Y	R$ 82,00	20,00%	12,00%
Blusa Z	R$ 55,00	22,00%	3,00%
Bolsa X	R$ 150,00	15,00%	16,00%
Bolsa Y	R$ 210,00	18,00%	6,00%
Bolsa Z	R$ 240,00	12,00%	20,00%

Figura 5.4: Tabela de preços das mercadorias.

É importante permitir que os alunos falem as formas como resolveriam esse problema. Alguns tem certa familiaridade com as porcentagens. Geralmente o cálculo feito com calculadoras comuns é simples. Por exemplo, para o primeiro item, se a compra for à vista, pode-se digitar na calculadora $120 - 70\%$. O resultado é imediato. Se for a prazo, digita-se $120 + 5\%$. Mas nem todo mundo sabe fazer o cálculo dessa maneira.

[17]Este problema é original.

Outra maneira de resolver seria fazer duas contas. Primeiro calcula-se o valor da porcentagem sobre o preço. Isto é feito multiplicando-se a porcentagem pelo valor da mercadoria, ou seja, digita-se $120 \times 70\%$. Como à vista ganha-se um desconto, deve-se retirar este valor do preço original, isto é, subtrair o resultado encontrado anteriormente do valor original de 120 reais, digitando-se $120 - 84 =$. Observe que nos dois primeiros casos não se usa apertar o botão de igual (=).

No entanto, o celular dela não tem a tecla de porcentagem (%). Assim, é necessário transformar o número escrito na forma percentual para decimal. Este cálculo pode ser feito no celular dividindo-se o número por 100 ($70 \div 100 = 0,7$), ou mentalmente por se deslocar a vírgula duas casas decimais para a esquerda (este método mental se torna simples com a prática). Feito isto, multiplica-se normalmente digitando-se $120 \times 0,7 =$. E realiza-se a subtração $120 - 84$.

Este método usado no celular é válido. Pode-se perguntar aos alunos se eles sabem de algum outro. Se for feita uma análise do segundo método pode-se reduzir os cálculos usando o fator de redução e fator de aumento.

A operação consiste em subtrair do valor original a porcentagem calculada sobre ele. Assim se uma mercadoria custa A e recebe desconto de B% o cálculo seria $A - (B\% \, de \, A)$. Mas $A = A \times 100\%$ então tem-se que

$$A - A \times B\% = A \times 100\% - A \times B\%.$$

Colocando-se A em evidência tem-se $A \times (100\% - B\%)$. Isto mostra que, no caso de um desconto, pode-se chegar à resposta final, por se multiplicar pela diferença entre 100% e o percentual do desconto, gerando um número que é chamado de fator de redução. No caso do exemplo, realizado no celular, poderia ser feito calculando-se

$$120 \times (100\% - 70\%) = 120 \times 30\% = 120 \times 0,3,$$

em que o número $0,3 = 30\%$ é o fator de redução.

A análise para o aumento é semelhante, se uma mercadoria custa A e recebe aumento de B% o cálculo seria $A \times (100\% + B\%)$, em que o termo entre parênteses é chamado fator de aumento. Para o celular, o cálculo ficaria

$$120 \times (100\% + 5\%) = 120 \times 105\% = 120 \times 1,05,$$

em que o número 1,05 é o fator de aumento.

Agora pode-se pedir aos alunos que refaçam a tabela da compradora e que acrescentem à frente quatro colunas. Na primeira colocarão o fator de redução, na segunda o fator de aumento, na terceira o preço a pagar com desconto e na quarta o preço a pagar a prazo. Caso os textos não caibam na célula pode-se formatar a tabela (veja subsecção 2.3.7), para que caibam.

Inicialmente sugere-se que coloquem os dados dos fatores de redução e aumento na forma de porcentagem e depois na forma decimal. Eles devem criar as fórmulas que darão esses valores. Embora possam usar a ferramenta de preenchimento é recomendado que eles façam um por um, com o objetivo de refletirem sobre o método usado. A fórmula para redução nos itens da segunda linha é $= 100 - C2$, ou $= 1 - C2$ e de aumento é $= 100 + D2$, ou $= 1 + D2$. É uma oportunidade de perguntar porque a planilha entende essas duas formas como verdadeiras e dá a resposta como porcentagem. O que se deve ao fato de 1 e 100% terem o mesmo significado numérico de um inteiro, total.

Para preencher as colunas Preço à vista e Preço a prazo os alunos devem descobrir as fórmulas e proceder da mesma forma anterior, fazendo um por um. As fórmulas para a segunda linha são $= B2^{*}E2$ e $= B2^{*}F2$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Mercadoria	Preço	Desconto à vista	Aumento a prazo	Fator de redução	Fator de aumento	Preço à vista	Preço a prazo
2	Calça X	R$ 120,00	70,00%	5,00%	30,00%	105,00%	R$ 36,00	R$ 126,00
3	Calça Y	R$ 150,00	36,00%	10,00%	64,00%	110,00%	R$ 96,00	R$ 165,00
4	Calça z	R$ 180,00	40,00%	15,00%	60,00%	115,00%	R$ 108,00	R$ 207,00
5	Blusa X	R$ 45,00	25,00%	8,00%	75,00%	108,00%	R$ 33,75	R$ 48,60
6	Blusa Y	R$ 82,00	20,00%	12,00%	80,00%	112,00%	R$ 65,60	R$ 91,84
7	Blusa Z	R$ 55,00	22,00%	3,00%	78,00%	103,00%	R$ 42,90	R$ 56,65
8	Bolsa X	R$ 150,00	15,00%	16,00%	85,00%	116,00%	R$ 127,50	R$ 174,00
9	Bolsa Y	R$ 210,00	18,00%	6,00%	82,00%	106,00%	R$ 172,20	R$ 222,60
10	Bolsa Z	R$ 240,00	12,00%	20,00%	88,00%	120,00%	R$ 211,20	R$ 288,00

Figura 5.5: Tabela com fatores de redução e aumento.

Para finalizar pode-se passar uma avaliação com problemas que envolvam cálculo de aumentos e descontos percentuais semelhantes ao problema inicial, criando-se uma tabela com preços e percentuais de aumentos e descontos.

5.4 Juros Simples

Juro pode ser definido como o rendimento de uma aplicação financeira, o valor que se paga referente ao atraso no pagamento de uma prestação ou a quantia paga por um empréstimo. O sistema financeiro utiliza geralmente o regime de juros compostos, por trazer um rendimento maior. Já os juros simples podem ser utilizados nas situações de curto prazo, em pequenas lojas para cobrança de carnês em atraso, na cobrança de juros sobre condomínio ou em multas. Na Europa, em alguns países, quando a taxa de juros estava muito baixa, era costume utilizar juros simples por ser mais fácil de calcular.

No sistema de capitalização simples, os juros são calculados baseados no valor da dívida ou da aplicação, de tal maneira que em cada período de aplicação, ou composição da dívida, o valor dos juros é constante. A expressão matemática utilizada para o cálculo das situações envolvendo juros simples é a seguinte:

$J = Cit$, em que
$J =$ juros
$C =$ capital
$i =$ taxa de juros (diário, mensal, bimestral, anual, etc)
$t =$ tempo de aplicação (dia, mês, bimestre, trimestre, semestre, ano...)

E o montante será $M = C + J$, em que C é o capital e J é o juros.

A sequência didática a seguir tem como objetivo mostrar como relacionar situações de juros simples com a função afim e fazer a interpretação gráfica usando planilhas eletrônicas. É necessário que os alunos tenham revisado frações, porcentagem, notação decimal, juros simples, função afim e taxa de variação. Pode ser realizada em uma aula, tanto em grupo como individual, na sala de informática.

A situação-problema é a seguinte[18]:

Luiz sempre atrasa o pagamento da parcela de R$ 80,00 de seu carnê na farmácia. Certo mês ele demorou 20 dias e pagou R$ 104,00. Outro mês atrasou 15 dias e pagou R$ 98,00 reais, e em outro mês demorou 8 dias e pagou R$ 89,60. Luiz resolveu descobrir qual era a taxa de juros cobrada pela farmácia. Para isso construiu um gráfico.

1. *Qual é o tipo do regime de juros cobrado pela farmácia, por dia?*
2. *Qual é a função que representa os juros pagos por ele em função dos dias?*
3. *Qual é o percentual de juros cobrado pela loja?*

Para encontrar o gráfico basta construir uma tabela com os dias e os juros pagos em função dos dias de atraso. O gráfico XY(Dispersão), pontos e linhas é o mais indicado, basta usar o ícone gráfico na barra de ferramentas.

Dias de atraso	Montante
0	0
8	9,6
15	18
20	24

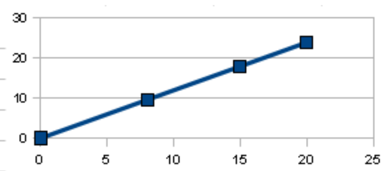


Figura 5.6: Tabela e gráfico do problema.

[18] Este problema é original

Observe que o gráfico parece uma reta. Como ter certeza se é uma reta ou não? A função cujo gráfico é uma reta é a função afim. Sabe-se que o que caracteriza a função afim é a taxa de variação constante. A taxa de variação, que indica o coeficiente angular, em que os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencem à reta, é dada por

$$t.v = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Desta forma, tomando 4 pontos pode-se verificar se a taxa de variação é constante entre eles.

$$\frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{9,6 - 0}{8} = 1,2; \frac{f(15) - f(8)}{15 - 8} = \frac{18 - 9,6}{7} = 1,2; \frac{f(20) - f(15)}{20 - 15} = \frac{24 - 18}{5} = 1,2$$

Existem dois regimes de juros, o simples e o composto. Pode-se fazer uma associação de juros simples com uma função afim. Se $J(t)$ são os juros obtidos em função do tempo pode-se escrever $J(t) = Cit$, que é uma função linear, o que implica que seu gráfico é uma reta que passa na origem. Além do mais se $J(t)$ é uma função linear, então J e t são diretamente proporcionais o que implica em

$$J \,\alpha\, t \Rightarrow J = Kt \Rightarrow \frac{J}{t} = k.$$

Fazendo $k = Ci$ tem-se $J(t) = Cit$.

Como o gráfico do problema é uma reta, então o regime adotado é de juros simples. A fórmula de juros simples como função é $J(t) = Cit$, tomando o valor dos juros para 8 dias tem-se que $J(8) = 9,6$ então $8Ci = 9,6$ logo $Ci = 1,2$ então $J(t) = 1,2t$ é a função linear dos juros em função do tempo.

Como $C = 80$ e $Ci = 1,2$ então $80i = 1,2$, logo $i = 0,015$. Assim, o percentual de juros é $i = 1,5\%$ ao dia.

Outra alternativa seria perceber que a função é linear e, portanto, os juros são diretamente proporcionais ao tempo então

$$\frac{J(t)}{t} = k \Rightarrow k = \frac{24}{20} = 1,2 \Rightarrow J(t) = 1,2t.$$

Se o gráfico construído usasse o valor do montante, como seria a resolução?

Dias de atraso	Montante
0	80
8	89,6
15	98
20	104

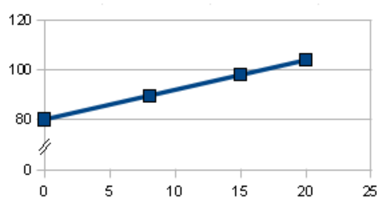


Figura 5.7: Tabela e gráfico do montante pago em função dos dias de atraso.

- Qual é a regra matemática que associa o montante em função do tempo?

Já foi provado que o gráfico é uma reta, então é do tipo $f(x) = ax + b$. Observe que, em juros simples, se M é o montante , t é o tempo e J o juros pode-se fazer $M(t) = C + J = C + Cit$.

Como C e i são números, a função $M(t) = Cit + C$ é a regra matemática para o cálculo do Montante em função do tempo. Desta forma, a função tem um gráfico, que passa pelo ponto $(0, C)$, que pode ser explorado para fazer a inter-relação entre juros simples e função afim.

- Mas como saber, ao analisar os dados, se o regime usado é de juros simples ou compostos?

Os regimes de juros são apenas dois. Se a taxa de variação nos dados é constante, então a função é afim. Em juros simples, o montante é do tipo $M(t) = Cit + C$, que é da forma de uma função afim, logo, $M(t) = 80it + 80$. Fazendo $M(20) = 104$ tem-se

$M(20) = 80i \cdot 20 + 80 = 104 \Rightarrow 1600i = 24 \Rightarrow i = 0,015$.

Portanto, $M(t) = 1,2t + 80$.

Para finalizar a aula pode-se fazer uma avaliação com um exercício[19] semelhante. Por exemplo:

1. *Os dados abaixo (figura 5.8) referem-se a uma aplicação financeira feita durante 4 meses. Qual foi o capital inicial? Qual é a taxa de juros da aplicação? Qual é o regime de capitalização da aplicação financeira ?*

Meses	Montante
1	525
2	550
3	575
4	600

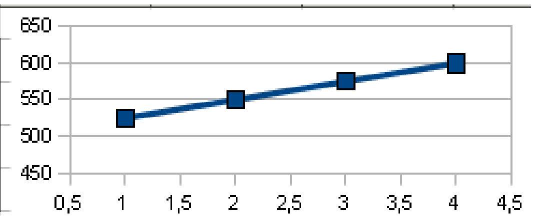


Figura 5.8: Tabela e gráfico para avaliação.

Solução 1:

Como a taxa de variação é constante, os dados formam uma reta, a função é do tipo $M(t) = Cit + C$. *Fazendo* $M(1) = 1Ci + C = 525$ e $M(2) = 2Ci + C = 550$

[19] Este problema é original

tem-se

$$\begin{cases} 1Ci + C = 525 \\ 2Ci + C = 550 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(i+1) = 525 \\ C(2i+1) = 550 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{525}{i+1} \\ C = \frac{550}{2i+1} \end{cases} \quad \frac{525}{i+1} = \frac{550}{2i+1} \Rightarrow i = 5\%$$

Assim, $M(1) = C(0,05+1) = 525 \Rightarrow C = 500$, *logo* $M(t) = 25t + 500$ *é o montante no regime de capitalizaçao simples.*

Solução 2:

A taxa de variação $t.v$ *é constante e é dada por*

$$t.v = \frac{550 - 525}{2 - 1} = 25.$$

A função é do tipo $M(t) = Cit + C$, *então* $M(1) = 25 \cdot 1 + C = 525 \Rightarrow C = 500$. *Como* $Ci = 25 \Rightarrow 500i = 25 \Rightarrow i = 5\%$.

5.5 Juros Compostos

No regime de capitalização composta, também conhecido por juros compostos ou juros sobre juros, os juros incidem sobre o capital inicial bem como sobre os juros acumulados, obtendo-se um montante que resulta de um crescimento exponencial do capital. É o regime frequentemente usado no mercado financeiro.

A proposta a seguir visa fazer a introdução de juros compostos usando a planilha Calc, fazendo uma relação com progressão geométrica e função do tipo exponencial. Portanto é necessário que os alunos tenham revisado conceitos referentes a de termo geral de uma progressão geométrica, gráfico de uma função do tipo exponencial, porcentagem, operações com decimais e fator de aumento. Seria interessante dispor os alunos em grupos de 3, para que eles possam discutir entre si, no laboratório de informática em duas aulas. Cada etapa de construção das planilhas deve ser feita pelos alunos, sendo o professor um guia, o orientador do raciocínio.

Para iniciar a aula sugere-se o seguinte problema[20]:

Um banco ligou para casa de Rui, oferecendo-lhe um tipo de investimento financeiro. Ele deveria aplicar seus recursos, disponíveis na caderneta de poupança, por um período de 2 anos, com rendimento mensal de 5%. Mas, nesse período, ele não poderia usar seu dinheiro. Rui possuía R$ 10.000,00 na poupança com rendimento de 1% ao mês. Foi-lhe dito que poderia fazer a aplicação por um período de teste de 3 meses e que, depois disso, se ele não se declarasse, significaria que aceitou a proposta. Rui resolveu pensar e fez uma planilha para analisar os seus ganhos na caderneta de

[20] Este problema é original.

poupança e nesse investimento, para os 3 meses e os 2 anos. O que ele deve fazer para determinar qual investimento é melhor? A que conclusão Rui chegou?

Para os três primeiros meses pode-se fazer o cálculo mês a mês de forma simples com a planilha eletrônica. A tabela pode ser construída conforme a figura 5.9.

Período	Capital Inicial	Juros no mês	Montante
0	--------------------	--------------------	R$ 10 000,00
1			
2			
3			

Figura 5.9: Tabela para cálculo do montante mês a mês.

Como determinar os juros de cada mês? Multiplicando-se o capital do início do mês pelo percentual.

Como calcular o montante no final de cada mês? Somando-se o capital, do início do mês, com os juros obtidos. Deve-se lembrar que o capital inicial de cada mês inclui os juros do mês anterior. Por isso que diz-se que o cálculo é de juros sobre juros. Assim, o capital inicial é o montante do mês anterior.

A figura 5.10 mostra quais são as fórmulas e os resultados esperados para a taxa de 1% ao mês da poupança. Os alunos devem descobrir e digitar cada fórmula nas células, tanto para a taxa de 1% como de 5%.

	A	B	C	D
1	Período	Capital Inicial	Juros no mês	Montante
2	0	--------------------	----------------	R$ 10 000,00
3	1	=D2	=B3*0,01	=B3+C3
4	2	=D3	=B4*0,01	=B4+C4
5	3	=D4	=B5*0,01	=B5+C5

	A	B	C	D
1	Período	Capital Inicial	Juros no mês	Montante
2	0	--------------------	----------------	R$ 10 000,00
3	1	R$ 10.000,00	R$ 100,00	R$ 10.100,00
4	2	R$ 10.100,00	R$ 101,00	R$ 10.201,00
5	3	R$ 10.201,00	R$ 102,01	R$ 10.303,01

Figura 5.10: Fórmulas para o cálculo do montante mês a mês.

Deve-se perguntar aos alunos como encontrar o montante sem a necessidade de somar os juros com o capital do início de cada mês. Pode-se usar o fator de aumento, pois o montante M é a soma do capital C com juros J, dado pelo produto do capital pela taxa i. Então, $M = C + J = C + Ci = C(1 + i)$ em que $1 + i$ é o fator de aumento.

Construindo uma nova planilha, mas usando fator multiplicativo, para a taxa $i = 1\%$ tem-se que $1 + i = 1,01$, pois a taxa deve ser escrita na forma decimal. Os dados ficarão conforme a figura 5.11.

Os resultados têm que ser os mesmos nas duas tabelas.

	A	B	C
1	Período	Capital Inicial	Montante
2	0	----------------	R$ 10 000,00
3	1	=C2	=B3*(1,01)
4	2	=C3	=B4*(1,01)
5	3	=C4	=B5*(1,01)

	A	B	C
1	Período	Capital Inicial	Montante
2	0	----------------	R$ 10.000,00
3	1	R$ 10.000,00	R$ 10.100,00
4	2	R$ 10.100,00	R$ 10.201,00
5	3	R$ 10.201,00	R$ 10.303,01

Figura 5.11: Fórmulas para o cálculo do montante, mês a mês, usando fator de aumento.

Sugere-se que os alunos façam os cálculos no caderno, para a taxa de 5%, afim de treinarem os processos.

É possível alterar a planilha para que se varie a taxa. Acrescenta-se uma uma nova coluna na tabela com os valores das taxas. Em D2 escreve-se 0,01 e selecionando-se a coluna D, altera-se o formato numérico para porcentagem, na barra de formatação, clicando-se no respectivo ícone.

Deve-se modificar as fórmulas para que façam referência às novas taxas, assim, deve-se mudar a célula C3 em que está escrito $= B3 * (1, 01)$ para $= B3 * (1 + D2)$, conforme figura 5.12.

	A	B	C	D
1	Período	Capital Inicial	Montante	TAXA
2	0	----------------	R$ 10.000,00	0,01
3	1	=C2	=B3*(1+D2)	=D2
4	2	=C3	=B4*(1+D3)	=D3
5	3	=C4	=B5*(1+D4)	=D4

	A	B	C	D
1	Período	Capital Inicial	Montante	TAXA
2	0	----------------	R$ 10.000,00	0,01
3	1	R$ 10.000,00	R$ 10.100,00	1,00%
4	2	R$ 10.100,00	R$ 10.201,00	1,00%
5	3	R$ 10.201,00	R$ 10.303,01	1,00%

Figura 5.12: Tabela dinâmica para taxa variável.

Pode-se alterar a taxa de 1% para 5% e verificar se os resultados encontrados à mão estão corretos.

Como é possível descobrir qual é o montante ao final dos 2 anos? Como a taxa de juros é ao mês, o tempo precisa ser transformado em meses. Pode-se usar a ferramenta de preenchimento automático até o 24º mês.

Como desafio pode-se perguntar qual será o montante ao final de n meses. Para cada mês o montante foi calculado multiplicando-se o capital inicial de cada mês pelo fator de aumento. Assim pode-se perceber que forma-se uma progressão geométrica cuja razão é o fator de aumento. O termo geral dessa progressão é encontrado por se fazer

$M_0 = C = 10\,000$

$M_1 = M_0 \cdot 1,01 = 10\,000 \cdot 1,01$

$M_2 = M_1 \cdot 1,01 = 10\,000 \cdot 1,01 \cdot 1,01 = 10\,000 \cdot 1,01^2$

$\ldots$

$M_n = 10\,000 \cdot 1,01^n$

Assim, para o investimento à taxa de 5% a.m. seria $M_n = 10\,000 \cdot 1,05^n$.

Generalizando, sendo M o montante, C o capital no início da aplicação, i a taxa de juros cobrada e t o tempo de aplicação, que fórmula permite o cálculo do montante em função do tempo?

$$M(t) = C(1+i)^t$$

Confirmando a fórmula pode-se construir uma nova planilha de forma a alterar o capital inicial e a taxa, comparando com as planilhas anteriores.

	A	B	C	D
1	Capital	Taxa	Período	Montante
2	R$ 10.000,00	1,00%	0	R$ 10.000,00
3	=A2	=B2	1	=A3*(1+B3)^C3
4	=A3	=B3	2	=A4*(1+B4)^C4

	A	B	C	D
1	Capital	Taxa	Período	Montante
2	R$ 10.000,00	1,00%	0	R$ 10.000,00
3	R$ 10.000,00	1,00%	1	R$ 10.100,00
4	R$ 10.000,00	1,00%	2	R$ 10.201,00

Figura 5.13: Cálculo do montante através da fórmula exponencial.

Ao se alterar o valor do período para 3 e 24 obtém os resultados almejados.

Existe uma relação estreita entre juros compostos e função do tipo exponencial. O montante é uma função exponencial do tempo.

Usando a última planilha pode-se variar o valor do capital e da taxa de juros para visualizar os gráficos. Por exemplo, um capital de 100 reais à taxa de 5% ao mês. Pode-se verificar o gráfico para o tempo variando de 0 a 100 meses. Primeiro usa-se a ferramenta de preenchimento até o 100º mês. Depois seleciona-se as colunas do período e do montante e usa-se o assistente gráfico na barra de ferramentas, XY(Dispersão), somente linhas. O gráfico e a tabela se assemelharão aos da figura 5.14.

Período	Montante
0	R$ 100,00
1	R$ 105,00
2	R$ 110,25
3	R$ 115,76
4	R$ 121,55
5	R$ 127,63
6	R$ 134,01
7	R$ 140,71
8	R$ 147,75
9	R$ 155,13

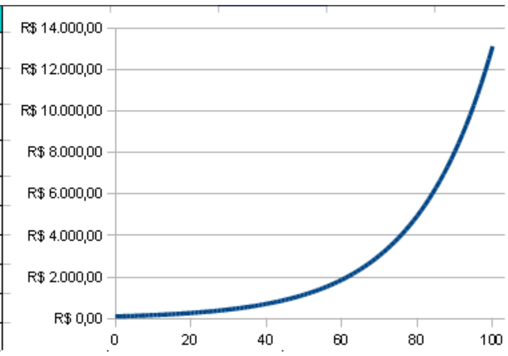


Figura 5.14: Tabela e gráfico do montante em função do tempo nor regime de capitalização composta.

Com isso, percebe-se que, no início uma aplicação, pode parecer que trará pouco rendimento mas que, em um prazo grande, o crescimento exponencial é mais evidente e acentuado, e consequente, o montante é bem maior, o mesmo sendo observado quando se faz um empréstimo de longo prazo.

Por que o regime de capitalização composta é mais usado do que o regime de juros simples?

A planilha anterior pode ser usada colocando-se lado a lado o montante no regime composto e depois o simples.

Se o capital for de R$ 100,00 e a taxa de 5% qual o crescimento do montante em cada situação de 0 a 100 meses? Faça o gráfico e perceba a diferença.

Na nova coluna E, em E2, escreve-se $= A2 * (1 + B2 * C2)$, por exemplo, ou $= A2 * B2 * C2 + A2$, e usa-se a ferramenta de preenchimento da terceira linha para baixo. Selecionam-se as colunas C, D e E, depois usa-se o assistente gráfico, opção XY(Dispersão), somente linhas. Automaticamente os dois gráficos aparecem em cores diferentes e pode-se comparar o crescimento conforme a figura 5.15.

Período	Juros compostos	Juros simples
0	R$ 100,00	R$ 100,00
1	R$ 105,00	R$ 105,00
2	R$ 110,25	R$ 110,00
3	R$ 115,76	R$ 115,00
4	R$ 121,55	R$ 120,00
5	R$ 127,63	R$ 125,00
6	R$ 134,01	R$ 130,00
7	R$ 140,71	R$ 135,00
8	R$ 147,75	R$ 140,00
9	R$ 155,13	R$ 145,00
10	R$ 162,89	R$ 150,00

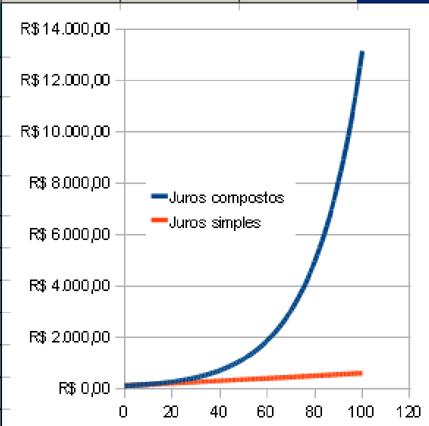


Figura 5.15: Tabela e gráficos de comparação dos montantes nos regimes de capitalização simples e composta.

Uma consideração interessante que pode ser sugerida é que os alunos verifiquem se existe alguma situação em que um montante no regime de juros simples rende mais que no de juros compostos?

Analise uma situação em que o capital é de 1000 reais, à taxa é de 80% ao ano. Os períodos serão escritos na forma decimal 0; 0,05; 0,1; 0,15; ... até 1,1.

Capital	Taxa	Período	Juros compostos	Juros simples
R$ 1.000,00	80,00%	0	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00
R$ 1.000,00	80,00%	0,05	R$ 1.029,83	R$ 1.040,00
R$ 1.001,00	80,00%	0,1	R$ 1.061,60	R$ 1.081,08
R$ 1.001,00	80,00%	0,15	R$ 1.093,26	R$ 1.121,12
R$ 1.002,00	80,00%	0,2	R$ 1.127,00	R$ 1.162,32
R$ 1.002,00	80,00%	0,25	R$ 1.160,61	R$ 1.202,40
R$ 1.003,00	80,00%	0,3	R$ 1.196,42	R$ 1.243,72
R$ 1.003,00	80,00%	0,35	R$ 1.232,10	R$ 1.283,84
R$ 1.004,00	80,00%	0,4	R$ 1.270,11	R$ 1.325,28
R$ 1.004,00	80,00%	0,45	R$ 1.308,00	R$ 1.365,44
R$ 1.005,00	80,00%	0,5	R$ 1.348,35	R$ 1.407,00
R$ 1.005,00	80,00%	0,55	R$ 1.388,56	R$ 1.447,20

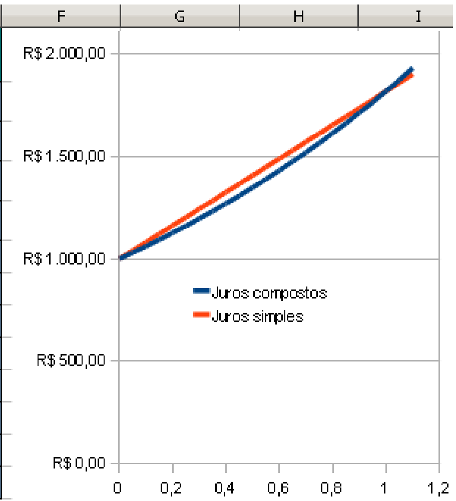


Figura 5.16: Comparação entre os montantes gerados no regime de capitalização simples e composta para um tempo menor que a unidade.

Observando-se a tabela e construindo-se um gráfico percebe-se que quando o tempo de aplicação é menor que a unidade da taxa, ou seja, a taxa é anual mas o tempo de aplicação foi 0,05 anos (18 dias), 0,1 anos (1 mês e 6 dias), isto é, menor que 1 ano, o regime de juros simples rende mais que juros compostos. O gráfico de juros simples está por cima do de juros compostos. Se cruzam para o tempo 1, e a partir daí o juros no regime composto rende mais.

Desta forma, pode-se fazer a introdução de juros compostos associado com progressão geométrica e função do tipo exponencial, com auxílio gráfico.

6 ENSINO DE ESTATÍSTICA BÁSICA USANDO O CALC

A estatística é uma ciência que se dedica ao estudo de dados, da informação. Preocupa-se com sua coleta, organização, análise e interpretação, de tal forma que se possa tirar conclusões sobre o objeto de pesquisa e assegurar a confiabilidade das suas fontes.

Segundo a Revista do Professor - Atualidades, a palavra "estatística" vem do latim *status* e designa o "estudo do estado". No século XVI, era usada para descrever as características geográficas e demográficas de um país. No século XIX, adquiriu o significado de coleta e classificação de dados. Hoje, a estatística é mais do que um conjunto de técnicas que permitem a coleta e análise de dados, também é a ciência que trata das conclusões que podem ser obtidas a partir de um conjunto de dados e do grau de confiança que se pode dar a tais conclusões.

Quando se faz uma pesquisa, as informações obtidas são chamadas de dados, e é nesse ponto que começa a atuar a estatística, na forma de coleta dessas informações, que garanta que não se poderá tirar conclusões erradas. Por exemplo, às vezes uma população pesquisada é muito grande e faz-se necessária a escolha de uma parcela desta, chamada amostra, formada por indivíduos ou objetos. A estatística define regras para escolha desta amostra afim de que as conclusões se aproximem cada vez mais da realidade do conjunto total.

A estatística é uma ciência que usa a matemática e alguns a veem como uma disciplina a parte. Segundo Eves (2002), os métodos matemáticos da estatística surgiram da teoria das probabilidades escritos nas cartas de correspondência entre Pierre de Fermat e Blaise Pascal (1654). Assim, a estatística faz uso de muitas fórmulas matemáticas para seus estudos.

A supracitada revista diz que em uma pesquisa estatística há dois tipos de variáveis, as qualitativas, que envolvem um atributo do objeto, e as quantitativas, quando estão associados a números. As variáveis qualitativas podem ser nominais, em que se define um nome, e ordinais, em que se define a ordem de classificação. Já as quantitativas podem ser discretas, quando se trata de contagem, ou contínuas, quando se trata de medidas. Desta forma, um número passa a ter um contexto cujo conhecimento permite fazer julgamentos.

Embora a palavra estatística designe uma ciência, dentro da matemática refere-se a qualquer função matemática que atua sobre os dados de uma pesquisa.

O objetivo de se ensinar noções básicas de estatística no nível básico de ensino é capacitar o aluno para que saiba interpretar de forma crítica uma informação, compreendendo seus significados e fazendo juízo da mesma, analisando sua veracidade.

Geralmente os resultados de uma pesquisa são apresentados na forma de um gráfico. Isto porque eles transmitem as mesmas ideias das tabelas, mas permitem uma compreensão mais rápida do comportamento dos dados, uma vez que destacam apenas suas características mais relevantes. Por isso, os meios de comunicação com frequência oferecem a informação estatística por meio de gráficos.

O objetivo da proposta da atividade a seguir é mostrar como se pode ensinar os alunos a escolherem um tipo de gráfico que melhor represente o resultado de uma pesquisa estatística.

Escolhendo um tipo de gráfico

Esta atividade pode ser feita em uma aula, dispondo os alunos em grupos de 3 pessoas, na sala de informática, ou segundo a disponibilidade de computadores. Sugere-se que o professor anteriormente tenha proposto para os alunos uma pesquisa que será apresentada para a escola, em um cartaz, no jornal da escola, ou revista interna.

O tema da pesquisa deve ser escolhido pelos alunos. Por exemplo, na Escola Estadual Doutor Waldemar Neves da Rocha, situada no município mineiro de Teófilo Otoni, em setembro de 2012, foi realizado um trabalho interdisciplinar para a publicação do jornal da escola. Sessenta alunos do primeiro ano do Ensino Médio foram separados em grupos de 3 pessoas e cada equipe deveria propor um tema para pesquisa dentro da própria escola.

Eles deveriam ir de sala em sala, nos turnos em que não estudavam, para fazerem perguntas aos outros alunos e, por fim, deveriam apresentar os dados obtidos na forma de um gráfico. Alguns dos melhores trabalhos, com temas mais relevantes, seriam publicados no jornal da escola, "Folha Conexão Santa Clara". Um dos temas escolhidos pelos alunos foi "Analfabetismo" e a pergunta sugerida era "Algum de seus pais é analfabeto?". Os alunos respondiam sim ou não e, então, eram contados. Após terem feito a pesquisa de campo, os alunos foram em busca do professor de matemática para auxiliá-los na confecção dos gráficos.

Como eram muitos temas e muitos gráficos não havia como fazer de todos e nem ensinar grupo por grupo. Assim, foi resolvido que seria feito um trabalho em cada sala, semelhante ao feito pelos alunos, mas que utilizaria apenas uma amostra da escola para responder às perguntas. A amostra seria a sala em questão. A pergunta foi "Qual das áreas de conhecimento mais te atrai? a) Ciências Exatas (matemática, química e física); b) Ciências humanas (história, sociologia, geografia e filosofia) ; c) Linguagem e expressão (português, literatura e língua estrangeira)" .

Com isso poderia se fazer uma tabulação e, baseados nos dados obtidos, poderiam ser construídos gráficos afim de decidir qual seria o melhor para representar as informações.

Após a tabulação, os dados obtidos foram colocados em uma tabela que continha a frequência absoluta e frequência relativa, na forma de fração e na forma de porcentagem. Com esta atividade é possível a revisão de conceitos importantes tais como fração, porcentagem e regra de três.

Qual das áreas do conhecimento mais te atrai?			
Área do Conhecimento	Frequência Absoluta	Frequência relativa	
		Fração	Porcentagem
Ciências Exatas	12	12/30 = 2/5	40%
Ciências humanas	8	8/30 = 4/15	26,7%
Linguagem	10	10/30 = 1/3	33,3%
TOTAL	30	30/30 = 1	100%

Figura 6.1: Tabela de dados da pesquisa em sala.

Pode-se perguntar de que forma os dados devem ser apresentados para o público - frequência absoluta ou relativa. Quando as informações obtidas se baseiam em uma amostra, o objetivo é inferir os resultados para todo o universo estatístico, apresentando para um público maior. Assim, a frequência absoluta é insuficiente para gerar convencimento. Já a frequência relativa trabalha com comparação, ou seja, o percentual de 40% ou a fração de 2/5 pode ser calculado sobre qualquer valor – os 30 alunos da sala ou os 1236 da escola.

Desta forma, a frequência relativa no formato porcentagem é mais viável nessa situação. Deve-se perguntar aos alunos como esses dados podem ser apresentados para o público. As formas comuns são no formato de tabela ou gráfico que representam um mesmo conjunto de informações. Mas a vantagem de um gráfico é que oferece uma visualização rápida sem a necessidade de se focar em números, ou fazer contagem.

Deve-se permitir que os alunos descubram que o gráfico geralmente é uma melhor opção e solicitar que eles determinem qual é o melhor tipo de gráfico que representa a tabela anterior. O que se propõe é usar a planilha eletrônica Calc para a construção dos gráficos e, assim, verificar os tipos mais comuns apresentados em jornais, revistas e em programas de televisão, escolhendo o de melhor visualização e interpretação.

O primeiro passo é a construção da tabela no Calc semelhante à tabela da figura 6.1, excluindo-se a frequência relativa no formato fração. Para fazer com que o título da tabela ocupe três células basta mesclá-las, selecionando-se as três primeiras células da primeira linha e usando o ícone Mesclar células da barra de formatação. Em FR% (Frequência Relativa – porcentagem), para que se calcule os respectivos percentuais, escreve-se $= B3/30$, depois usa-se o preenchimento automático nas células abaixo, ou calcula-se, no caderno, usando regra de três, ficando os dados como a figura 6.2.

	A	B	C
1	**Preferências por áreas de conhecimento na escola X em 2012**		
2	Área do Conhecimento	FA	FR %
3	**Ciências Exatas**	12	40,0%
4	**Ciências humanas**	8	26,7%
5	**Linguagem**	10	33,3%
6	TOTAL	30	100,0%
7	Fonte: Escola X		

Figura 6.2: Tabela de preferências por áreas de conhecimento.

O segundo passo é a construção dos gráficos. Como o objetivo é que os alunos identifiquem qual é o melhor gráfico para representar a situação exposta na tabela, eles devem poder verificar em um porção de opções e discutir entre si. Para a construção a construção do gráfico deve-se selecionar os dados, Área do Conhecimento e FR% , excluíndo o total. Como as células não estão geminadas deve-se manter a tecla CTRL apertada para se fazer a seleção. Depois, usa-se o ícone "Gráfico" na barra de ferramentas e seleciona-se o tipo de gráfico (Colunas-normal, Barras-normal, Pizza-normal, Linhas-pontos e linha).

O primeiro gráfico pode ser o de linha, ou gráfico de segmentos, utilizado principalmente para mostrar a evolução de valores no decorrer do tempo, para mostrar crescimento e decrescimento. Representado usando-se pares ordenados no eixo cartesiano.

O segundo pode ser de pizza, ou gráfico de setores, frequentemente usado quando um grupo pode ser subdividido em diversos setores. Para construí-lo usa-se o princípio de dividir a circunferência em regiões proporcionais aos dados percentuais. Como a circunferência possui um ângulo de 360°, cada valor em porcentagem deverá ser associado à medida de um ângulo central. Usando regra de três pode-se associar cada percentual com um ângulo, sabendo que 360° corresponde a 100%.

O terceiro pode ser de barras. Existem as barras verticais, chamados de gráfico de colunas, e barras horizontais, chamados de gráfico de barras. Usados para todo tipo de dados, noentanto mais frequentemente quando se deseja mostrar as diferenças entre os dados numéricos.

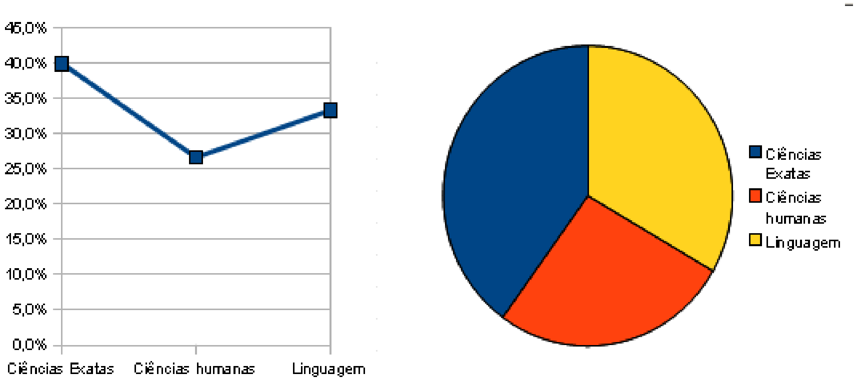


Figura 6.3: Gráfico de segmentos e setores .

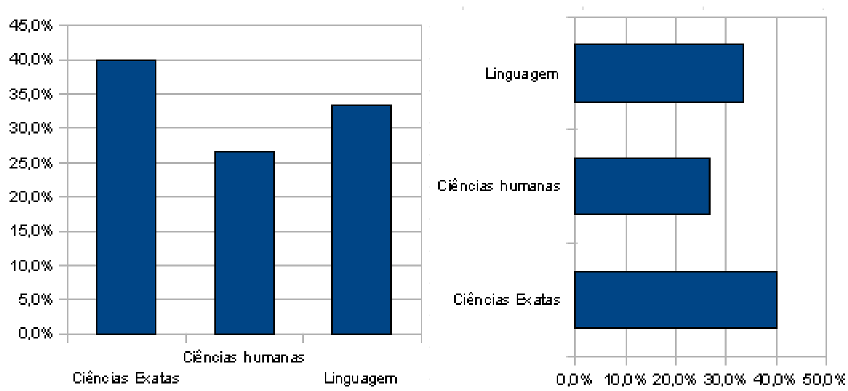


Figura 6.4: Gráfico de barras verticais e horizontais.

A turma deve verificar qual dos 4 gráficos permite uma interpretação rápida dos dados. Caso a escolha não seja a mais viável, deve-se argumentar com eles pois o gráfico de colunas, ou de barras horizontais, são os que permitem uma melhor visualização, já que o objetivo é mostrar qual é a área de conhecimento que tem maior preferência na escola. O gráfico de setores também poderia ser usado mas, como os valores 40% e 33,3% tem ângulos próximos, dependendo do tamanho da área de impressão pode haver confusão.

O gráfico de linhas não se enquadra muito bem às necessidade desse tipo de informação exposto na tabela. Escolhido o tipo de gráfico, deve-se apagar todos o gráficos e refazer o desejado, clicando em próximo até chegar em "elementos do gráfico", em que se colocará o título, os nomes dos eixos e se escolherá se terá, ou não, legenda.

Preferências por áreas de conhecimento na escola X em 2012		
Área do Conhecimento	FA	FR %
Ciências Exatas	12	40,0%
Ciências humanas	8	26,7%
Linguagem	10	33,3%
TOTAL	30	100,0%
Fonte: Escola X		

Figura 6.5: Porcentagem de área do conhecimento da escola.

Pode-se alterar a formatação gráfica dando um duplo clique sobre o mesmo, para entrar no modo de formatação e, depois, dando duplo clique sobre o que se deseja alterar ou selecionando e clicando com o botão direito. Com isso espera-se que os alunos consigam fazer seus próprios gráficos e saibam escolher o que melhor representa sua pesquisa.

CONCLUSÃO

O advento de novas tecnologias e recursos computacionais trouxe muitas ferramentas que podem ser utilizadas como recursos didáticos que facilitem o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

As planilhas eletrônicas fazem parte deste grupo de recursos que podem ser usados em sala de aula para auxiliar na assimilação de alguns conceitos e podem despertar o interesse dos alunos, juntamente com uma abordagem bem planejada pelos professores.

Os estudantes de hoje estão acostumados com o mundo de tecnologia à sua volta, repleto de cores, curvas, figuras, dinâmicas e manipuláveis, oferecendo-lhes interatividade. Para alcançá-los é necessário criar estratégias que insiram o mundo tecnológico no contexto da educação.

Com a matemática não é diferente e existem vários programas de computador que atendem estes anseios. As planilhas eletrônicas permitem a criação de tabelas, gráficos e uma análise das diferentes formas de visualização de dados matemáticos, facilitando a interação por agilizar os processos computacionais, os cálculos e a criação de gráficos.

Existem muitas planilhas eletrônicas no mercado, mas a planilha eletrônica Calc é de fácil manuseio e pertence a um conjunto de aplicativos livres. Para o ensino de matemática, a planilhas podem ser usadas de diversas formas, e no primeiro ano do Ensino Médio, os conceitos de função, matemática financeira, estatística e progressões podem ser abordados fazendo o uso desta ferramenta.

Este trabalho teve como objetivo oferecer sugestões de como fazer uso das planilhas eletrônicas para o ensino de matemática a partir de situações-problemas.

Cada capítulo começou com uma abordagem histórica que pode ser usada pelos professores sempre que forem iniciar um conteúdo novo dentro da matemática, o que ajuda a situar a matéria dentro da história da evolução do homem, colocando o conhecimento adquirido por este, e ensinado na escola, como uma herança a ser transmitida para as futuras gerações.

Cada novo tema iniciou com uma situação-problema cuja intenção era mostrar a necessidade do uso de uma das ferramentas da matemática para solucioná-lo, e desta forma, pretende fazer com que os alunos se predisponham para a aprendizagem.

Neste contexto, as planilhas eletrônicas entram como agilizadoras de alguns processos que eram feitos manualmente, permitindo fazer inferências e análises mais profundas, chegando a conceitos genéricos dentro de alguns tópicos, como funções. Desta forma, parte do tempo que anteriormente era utilizado para construção das tabelas, dos gráficos e dos cálculos, agora, fazendo uso das planilhas, pode ser utilizado para uma maior reflexão e assimilação dos conceitos.

Todas as sugestões de sequências didáticas procuram explorar as várias formas de se representar dados matematicamente, quer por meio de uma fórmula, ou uma tabela, ou um gráfico, e assim buscaram relacionar estas três representações semióticas, objetivando fazer com que os alunos saibam inter-relacionar estes vários tipos de simbolismo matemáticos, voltando-os para a interpretação e solução dos problemas propostos. A partir daí permitindo uma generalização de alguns tópicos.

Muitos alunos têm uma certa medida de familiaridade com o uso de planilhas eletrônicas e, caso alguns não saibam, é importante que o professor saiba agrupar aqueles que têm maior facilidade com os de menor, senão a aula poderá perder o objetivo, que é facilitar a aprendizagem de matemática, se tornando aula de informática que, embora seja importante, não é o foco principal.

Assim, o uso de planilhas eletrônicas, para o ensino de matemática no primeiro ano do Ensino Médio, torna-se mais uma ferramenta que auxilia professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem, se enquadrando na pedagogia atual, que enfatiza o uso de recursos tecnológicos na educação. Todas as sequências didáticas objetivavam apresentar uma estrutura sequencial de como criar uma abordagem diferente para o ensino de alguns tópicos do primeiro ano do Ensino Médio e, desta forma, espera-se que sirvam de manual para o ensino de matemática usando Calc e de modelo para criação de novas sequências didáticas fazendo o uso deste *software*.

Referências

[1] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**, 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

[2] BORBA, M.C. **Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento**. In: BICUDO, M.A.V. (org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 285 – 295.

[3] BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

[4] BANCO Central do Brasil. **Origem e Evolução do Dinheiro.** Disponível em: <http://www.bc.gov.br/?ORIGEMOEDA> Acessado em: 03 Jan.13.

[5] CARNEIRO, Mário J. D.; SPIRA, Michel; SABATUCCI, Jorge. **Conteúdo Básico Comum (CBC) de Matemática - Ensinos Fundamental e Médio - Proposta Curricular**. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais.

[6] CASA da Moeda do Brasil. **Origem do Dinheiro.** Disponível em: <http://www.casadamoeda.gov.br/portalCMB/menu/cmb/sobreCMB/origem-dinheiro.jsp;jsessionid=2A915A883ACE1CED4EE2BADED0990ABA> Acessado em: 03 Jan.13.

[7] D'AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global.** Revista Temas e Debates da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. Rio Claro, n. 3, p. 1 – 15, 1991.

[8] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática** - Volume Único. São Paulo: Ática, 2005.

[9] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**.Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Unicamp, 2002.

[10] GIRALDO, V.; MATTOS, F.;CAETANO, P.: **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática** – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] GONÇALVES, Jean Piton. **A História da Matemática Comercial e Financeira.** c. 2005. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php > Acessado em: 03 Jan.13.

[12] LIMA, Elon Lages *et a*l. **A Matemática do Ensino Médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 2 v.

[13] MORAN, Jose Manuel. **A educação que desejamos: novas desafios e como chegar lá.** 2. ed. Campinas: Papiros, 2007.

[14] MORAN, José Manuel, MASETTO, Marcos & BEHRENS, Marilda. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 7. ed. São Paulo: Papirus, 2003.

[15] PARKER, Hal et al. **Guia do iniciante do LibreOffice 3.3.** Tradução de Novais, C. R. et al. c. 2011. Disponível em <http://pt-br.libreoffice.org/>. Acessado em 20 Out. 2012.

[16] PIROLA, Nelson Antonio (Org.). **Ensino de ciências e matemática IV - Temas de investigação** - São Paulo: Cultura Acadêmica,2010.

[17] PLANILHA Eletrônica - Calc. 2008. Disponível em: <proinfodigital.pbworks.com/f/MODULO+6.pdf>. Acessado em: 19 Out. 12.

[18] REVISTA do Professor - Atualidades. **Tratamento da Informação - Tabelas e Gráficos.** v. 1, p. 73 - 77, 2009. Disponível em: <http://www.rededosaber.-sp.gov.br/portais/programaapoio/Home/RevistadoProfessorAtualidadesvolume-1/tabid/880/language/pt-BR/Default.aspx>. Acessado em: 14 Ago.11.

[19] VALENTE, J. A. **Liberando a mente: computadores na educação especial.** Campinas: Gráfica da UNICAMP, 1991.