Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

Tópicos motivacionais para o Ensino Médio

JOSÉ GERALDO PANISSET GRANDI

Cruz das Almas-Bahia
Agosto de 2019

Tópicos motivacionais para o Ensino Médio

JOSÉ GERALDO PANISSET GRANDI

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Maria Amelia de Pinho Barbosa Hohlenwerger

Cruz das Almas-Bahia
Setembro de 2019

G753t Grandi, Jose Geraldo Panisset.

Tópicos motivacionais para o Ensino Médio. / José Geraldo Panisset Grandi. – Cruz das Almas, 2019.

85 f. : il.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Amelia de Pinho Barbosa Hohlenwerger.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Ensino e estudo. 2.Matemática – Ensino médio. 3.Aprendizagem – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD : 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB. Responsável pela Elaboração - Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário - CRB5 / 1615).

Os dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico.

Tópicos motivacionais para o Ensino Médio

José Geraldo Panisset Grandi

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de julho de 2019.

Banca examinadora:

Maria Amélia Hohlenwerger

Profa. Dra. Maria Amelia de P. B. Hohlenwerger (UFRB)
Presidente

Adson Mota Rocha.

Prof. Dr. Adson Mota Rocha (UFRB)
Membro da Banca

Perfilino Jr.

Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Junior (UFBA)
Membro da Banca

Dedico essa dissertação à minha Mãe e à minha Esposa

Agradecimentos

Agradeço à minha Mãe por sempre ter acreditado em mim, por todo carinho comigo desde sempre. À minha avó, à minha esposa, sempre ao meu lado, até nos momentos distantes esteve comigo. Agradeço ao meu pai e a todos os familiares (tios e primos) que estiveram presentes em minha vida. À minha orientadora e professora Dra Maria Amelia pela sua paciência, compreensão e orientação. Aos professores Doutores Adson, Antonio Andrade, Genilson , Juarez e Katia. Aos meus alunos, que estiveram de verdade comigo e sempre exigiram o melhor de mim. Agradeço aos amigos de infância e de adolescência, aos colegas que fiz em minha graduação na UFJF, aos colegas de mestrado da UFRB. Agradeço todos os meus dias por tudo, pois isso fez eu ser quem sou. Obrigado.

"Alguns mistérios sempre escaparão da mente humana. Para nos convencer disso, só é preciso dar uma olhada nas tabelas de números primos e ver que não existe uma regra, nenhuma regra".

- Évariste Galois

"Os encantos dessa sublime ciência se revelam apenas àquelas que tem coragem de irem a fundo nela".

- Carl Friederich Gauss

Resumo

Este trabalho teve como principal objetivo trazer associação entre conteúdos distintos, visto que em muitas vezes parecem estar desassociados. Isso possibilita ao aluno produzir um significado maior, fazendo com que o mesmo sempre esteja motivado a rever todos os tópicos matemáticos. Em algumas situações o estudo da disciplina pode se tornar um pouco árduo. Podemos mostrar como é importante ver o mesmo exercício/conteúdo de diferentes pontos de vista, usando soluções diferentes para chegar a uma conclusão, mostrar ao aluno como é importante tentar resolver o mesmo exercício usando ideias/conceitos diferentes, pois assim ele mesmo poderá tirar suas próprias conclusões. Relacionamos funções para dedução de fórmulas da geometria plana/espacial, apresentamos alguns exercícios e ideias de aplicação para melhorar a compreensão dos alunos sobre logaritmos, trabalhamos a geometria analítica revisando a geometria plana e construções geométricas e utilizamos matrizes para a resolução de alguns exercícios. Relacionando todos esses tópicos podemos mostrar ao aluno a técnica de reconstrução algébrica, que é o algoritmo de uma máquina de tomografia computadorizada. Utilizamos essa técnica de dois modos diferentes para o leitor perceber que em algumas situações uma abordagem matricial é mais eficiente que a abordagem analítica.

Palavras-chave: Logaritmo, Retas e Matrizes, Técnica de Reconstrução Algébrica

Abstract

This work had as main objective to bring association between different contents, since they often seem to be disassociated. This enables the student to produce greater meaning, so that he is always motivated to review all mathematical topics. In some situations studying the discipline may become a little arduous. We can show how important it is to see the same exercise / content from different points of view, using different solutions to reach a conclusion, to show the student how important it is to try to solve the same exercise using different ideas / concepts, so that he can draw his own ideas. own conclusions. We relate functions for the deduction of planar / spatial geometry formulas, we present some exercises and application ideas to improve students' understanding of logarithms, work on analytic geometry by reviewing flat geometry and geometric constructions, and use matrices to solve some exercises. By relating all these topics we can show the student the technique of algebraic reconstruction, which is the algorithm of a computed tomography machine. We use this technique in two different ways so that the reader realizes that in some situations a matrix approach is more efficient than the analytical approach.

Keywords: Teaching-learning, sequences and matrices, computed tomography

Sumário

Introdução **1**

1 Função polinomial do 1º grau **7**

2 Logaritmos **15**

2.1 Breve História 15

2.2 Propriedades 18

3 Geometria Analítica **23**

4 Matrizes **33**

4.1 Sistemas Lineares e Matrizes 35

5 Técnica de Reconstrução Algébrica **47**

5.1 Funcionamento e aplicação da Tomografia Computadorizada 47

5.2 Breve histórico da Tomografia Computadorizada 49

5.3 Técnica de Reconstrução Algébrica 52

Considerações Finais **63**

Referências Bibliográficas **65**

Introdução

Temos percebido que, à medida em que o tempo passa, cada vez mais tendo um maior desenvolvimento tecnológico, nós seres humanos ficamos mais autônomos. Mas a que preço? Esquecemos o porquê de muitas coisas. Se existem calculadoras, por que usar papel, lápis e o raciocínio? Se existem computadores, máquinas fotográficas, por que escrever? Nem seria preciso ter cadernos e livros. Só que os alunos não sabem e esquecem que o que fez com que nós seres humanos desenvolvêssemos toda essa tecnologia foi nossa escrita. Desde antigamente, o ser humano teve a necessidade de se expressar, de escrever, desenhar símbolos na parede para se comunicar e, com isso, tudo foi se desenvolvendo.

Com a evolução do ser humano, a necessidade de se organizar, contar, pensar, raciocinar, classificar, comparar, fez com que o mesmo criasse ferramentas para evoluir e se desenvolver cada vez mais.

Nos dias atuais, fica difícil ver o que é necessário e o que é desnecessário e, além disso, tudo o que se torna difícil, o senso de comodidade tende a nos dizer que não queremos ou que tal conteúdo não serve para nada, como uma desculpa para não estudar. Temos observado que, à medida que começa a surgir a dificuldade para o aluno, o mesmo começa a questionar para que serve tal conteúdo (pouquíssimos são os alunos que perguntam para saber a real serventia). Eles perguntam, pois querem se convencer de que tal conteúdo não serve para nada, para não se esforçarem, logo não precisam estudar e, com isso não se frustrariam, entre outros motivos. Chego a pensar: qual motivo o aluno teria para se esforçar?

O interesse pelo estudo dos conteúdos matemáticos vem diminuindo por grande parte dos alunos. Identificamos um crescente desinteresse. Podemos levantar várias hipóteses para explicar tal desinteresse, mas esses motivos fazem parte do problema, e não da solução. Como atrair o aluno para o estudo dos conteúdos matemáticos, que é tão importante em nossas vidas?

Com a evolução computacional, novas tecnologias têm surgido a todo momento, contudo o excesso de informação pode se tornar perigoso, principalmente se não for bem utilizado.

A título de ilustração, um tio, devido ao corre-corre do dia a dia, percebeu que o tempo estava passando rápido demais e estava se esquecendo de algumas coisas da sua infância. Por este motivo, resolveu levar seu sobrinho em uma tarde para pedalar, pois o mesmo ficava muito tempo em casa na frente de seu celular, do computador e da televisão. Seria uma volta um pouco árdua, devagar, mas mesmo assim iria cansá-los. Ao final do trajeto, o sobrinho já estava com muita fome e, ao se deparar com uma padaria, o mesmo saiu correndo e foi comprar um refrigerante. Após seu primeiro gole o sobrinho disse :

"- Esse é o refrigerante mais gostoso que eu já tomei"!

Todos nós sabemos que aquele refrigerante foi feito em série, portanto dificilmente ele seria mais ou menos gostoso que os outros refrigerantes. Houve algo de diferente, e esse algo foi o processo pelo qual o menino passou: fome, cansaço, desafio e superação. Esse conjunto de experiências fez com que o refrigerante fosse o melhor do mundo. Acreditamos que todos nós já passamos por algo parecido e, em muitas vezes, perdemos o prazer nas coisas .

Se os alunos perderem esse processo de experiência, dificilmente eles irão se interessar por estudar, pois eles não terão o prazer do valor da recompensa. Podemos ver claramente que o tempo evoluiu rápido, mas os exercícios de matemática propostos nos livros não acompanharam tal evolução, dificultando o processo de ensino-aprendizagem.O contexto de alguns exercícios nos livros acaba dificultando o interesse por parte dos alunos, o que dificulta ainda mais o processo ensino-aprendizado. Hoje em dia, facilmente com aplicativos de celular, descobrimos comprimento de rios e de prédios. Na época dos egípcios havia mais sentido e interesse em calcular o comprimento de rios mas, hoje em dia, talvez não seja a escolha mais interessante. Acredito que esse exercício seja importantíssimo, mas não para um primeiro momento, devemos repensar na ordem dos exercícios, para fazer com que o aluno seja mais atraído para o conteúdo e depois pensar nos problemas históricos. Os livros didáticos precisam acompanhar a evolução tecnológica e se revolucionar também.

Temos observado, também, que há uma grande dificuldade por parte dos alunos para começarem a criar raciocínios que envolvem um pensamento abstrato, principalmente os que exigem pré requisitos de séries passadas e, tão logo a abstração começa a aparecer, esse aluno começa a querer desistir, pois precisará de paciência, concentração e dedicação.

Podemos citar também que grande parte dos alunos vêm enfrentando problemas, de ordem pessoal e de relacionamento familiar, o que pode estar contribuindo para que os alunos apresentem resistência com a matemática. Em muitas vezes é até compreensível que o aluno não consiga entender o motivo pelo qual estuda-se matemática. Devido a isso, estudar função, logaritmos, matrizes e geometria analítica no ensino médio, pode parecer algo sem propósito para estes alunos, pois tornam-se distantes da realidade do aluno.

Partindo-se desse pressuposto, passaremos ao foco deste trabalho. Inicialmente, faremos um breve histórico sobre os conceitos de Função polinomial do 1º grau, Logaritmos, Sistemas Lineares, Matrizes, e Geometria Analítica. Com o objetivo de que o aluno entenda a importância e a aplicação destes conceitos matemáticos no dia a dia, iremos apresentar a associação entre estes conceitos, abordando alguns problemas matemáticos. Ao final, reuniremos tais conceitos na aplicação do processo de geração das imagens por tomografia computadorizada, a fim de ilustrar para o aluno como estes conceitos matemáticos são fundamentais em diversas áreas do conhecimento.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma forma de proporcionar aos alunos relações entre alguns assuntos do ensino médio, principalmente aqueles que foram trabalhados com menor frequência no ensino fundamental. A partir disso, os alunos compreenderão melhor alguns conceitos matemáticos, possibilitando uma progressão mais eficaz tanto dos alunos como do professor. Contextualizando, vejamos, a seguir, o diálogo entre Maria e seu irmão Joãozinho;

- Joãozinho, eu vou te dar esse dinheiro, mas me diga quanto tem aqui. - disse Maria, mostrando-lhe uma cédula de $R\$2,00$ e uma moeda de $R\$1,00$.

- 2 pila e R$ 1 real. - disse Joãozinho

- Como assim? Por que 2 pila e 1 real? Por que o dinheiro de papel é pila e esse aqui (moeda) é real?

- Porque a professora ensinou que a moeda do Brasil é o real!

- E você vai colocar tudo no cofrinho?

- Vou, né? Daí é 3 pila!

- Hum! Mas por quê?

- Porque no cofrinho a gente guarda dinheiro e dinheiro é pila...

Em alguns momentos, tal situação pode ocorrer em vários tópicos durante o estudo de alguns conceitos matemáticos. Desde pequenos nós aprendemos que a ordem dos fatores não altera o produto, e carregamos isso desde então como verdade. Mas dependendo do contexto, $5 \cdot 4 = 20$ (que neste caso representa a soma de cinco quatros) não pode ser substituído por $4 \cdot 5$ (que representaria a soma de quatro números cinco). Apesar do resultado ser o mesmo, ao estudarmos matemática financeira, mostramos para o estudante que $5 \cdot 4 \neq 4 \cdot 5$: um representa uma dívida paga em 4 meses e o outro em 5 e, no final, vão representar valores diferentes (não podemos somar quantias em épocas distintas), e neste momento os alunos apresentam muita dificuldade para entender tais conceitos, pois não estão habituados com juros e, a priori, respondem que em ambos os casos teremos valores iguais, ou seja, tanto faz quatro prestações de cinco ou cinco prestações de quatro.

A título de ilustração, podemos pensar no pagamento de uma dívida. Se uma pessoa estiver devendo três parcelas de $R\$\,400,00$ ou quatro parcelas de $R\$\,300$, a priori essas dívidas representam um valor de $R\$\,1200,00$, mas ao trazermos tal dívida para o presente elas irão representar o mesmo valor?

Quando apresentamos tal problema para o aluno, ele pensará que ambos são iguais, pois os dois casos resultam em $R\$\,1200,00$, mas não podemos somar quantias em épocas diferentes devido às taxas de juros que incidem no capital mensalmente. Como exemplo, tomaremos as taxas de juros a 10% $a.m$

Resolução: Para resolvermos o exemplo, devemos trazer cada quantia para o mesmo mês, neste caso iremos trazer para o mês inicial (valor presente). Usaremos a fórmula

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Dados:

$VF_1 = VF_2 = VF_3$

$i = (10\% \text{ ou } 0,1)a.m$

Caso 1: Três prestações de $R\$\,400,00$

$$VP_1 = \frac{400}{(1+0,1)^1}\ ;\ VP_2 = \frac{400}{(1+0,1)^2}\ ;\ VP_3 = \frac{400}{(1+0,1)^3}$$

$$VP_1 = \frac{400}{(1,1)}\ ;\ VP_2 = \frac{400}{(1,21)}\ ;\ VP_3 = \frac{400}{(1,331)}$$

$$VP_1 = 363,637\ ;\ VP_2 = 330,579\ ;\ VP_3 = 300,526$$

Somando as três quantias, obtemos $VP = 994,75$ reais

Caso 2: Quatro prestações de $R\$\,300,00$

$$VP_1 = \frac{300}{(1+0,1)^1}\ ;\ VP_2 = \frac{300}{(1+0,1)^2}\ ;\ VP_3 = \frac{300}{(1+0,1)^3}; VP_4 = \frac{300}{(1+0,1)^4}$$

$$VP_1 = \frac{300}{(1,1)}\ ;\ VP_2 = \frac{300}{(1,21)}\ ;\ VP_3 = \frac{300}{(1,331)}; VP_4 = \frac{300}{1,4641}$$

$$VP_1 = 272,728\ ;\ VP_2 = 247,934\ ;\ VP_3 = 225,395; VP_4 = 204,905$$

Somando as quatro quantias, obtemos $VP = 950,97$ reais
Com isso, vemos que a segunda opção seria melhor, lembrando que dependemos da taxa de juros.

O aluno demonstra muita resistência em ter este raciocínio, pois a vida toda não é mostrado a ele outros contextos, tal caso poderia ser ilustrado em séries anteriores como 4 laranjas em 5 sacos e 5 laranjas em 4 sacos. O resultado final em ambos os casos é 20 laranjas, mas em um dos casos se gasta um saco a mais e isso muitas vezes pode sair com um valor diferente no final de um período.

A seguir, a partir do objetivo proposto para este trabalho, apresentamos uma sequência didática, delineando os conceitos de função polinomial do primeiro grau, mostrando algumas ideias que poderemos aplicar em sala com o intuito de mostrar a aplicação de função em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, geometria. Com isso o aluno poderá modelar muitas fórmulas que já foram usadas anteriormente e muitas fórmulas que estarão por vir, fazendo com que o mesmo faça parte do processo, trazendo uma experiência positiva. No capítulo seguinte trabalhamos sobre logaritmos. Neste capítulo, o questionamento foi: como aproximar os logaritmos dos alunos? Ao estudarmos geometria analítica, retomamos muitos conceitos da geometria plana, construções geométricas e o uso do geogebra mostra-se como uma ferramenta valiosa e útil. E por fim, fechando com o problema da tomografia computadorizada, que aborda todas essas ideias, dando mais um significado para os alunos, principalmente na parte de sistemas e matrizes. Aqui ele vê a possibilidade de realmente poder usar matrizes para chegar à solução do algoritmo e em poucos momentos temos essa possibilidade no ensino médio.

Capítulo 1

Função polinomial do $1^{\underline{o}}$ grau

As referências bibliográficas usadas neste capitulo foram baseadas em [6].

Na maioria das vezes, os alunos chegam ao ensino médio já tendo estudado funções no ensino fundamental. A seguir, passamos à definição de função e apresentamos as principais dificuldades apontadas pelos alunos.

Definição 1.0.1. Dados dois conjuntos A e B (onde A e B são conjuntos contidos em $\mathbb{R}$), não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

Ao fazer uma relação entre dois conjuntos usando diagramas ou flechas, percebemos que os alunos não têm grandes dificuldades, pelo contrário, apresentam até certa facilidade. A dificuldade maior surge ao analisar um gráfico de uma função no plano cartesiano (todo conceito estendido ao infinito se torna difícil para o aluno) e em saber analisar o domínio de uma função. Para haver um entendimento melhor do conteúdo, dedicamos um tempo maior nestes quesitos: gráfico, domínio e imagem.

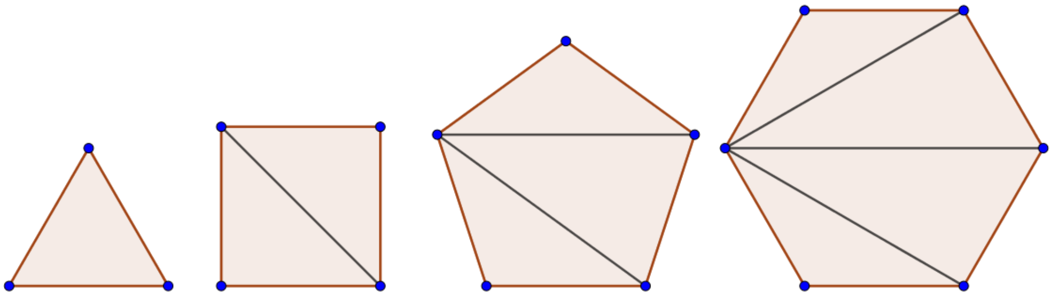
Temos por preferência selecionar algumas fórmulas da geometria e de outros assuntos, usando a ideia de função para a demonstração das mesmas, aproximando e promovendo associação entre diferentes conceitos matemáticos, promovendo um maior repertório de entendimento e aplicação para os alunos. Observamos que isso motiva bastante os alunos, pois eles começam a ver ligação entre os conteúdos.

Aqui tivemos a ideia de demonstrar com os alunos, usando as ideias de funções, a soma dos ângulos internos de um polígono e a soma dos ângulos das faces de um poliedro. Resumindo, isso poderá ser feito para todas as fórmulas de grau um (funções polinomiais do $1^{\underline{o}}$ grau).

O objetivo, neste momento, é fazer com que o aluno consiga memorizar a fórmula com maior facilidade e fazer com que ele possa modelar seu problema, utilizando uma função para resolver problemas, graficamente, analiticamente ou algebricamente. O resultado começa a ser imediato, pois o aluno começa a ligar tais conteúdos e isso sempre o motiva, faz com que ele goste de ambas as disciplinas, funções e geometria.

Soma dos ângulos internos de um polígono em função do seu número de lados

Figura 1.1: Soma dos Ângulos internos de um polígono



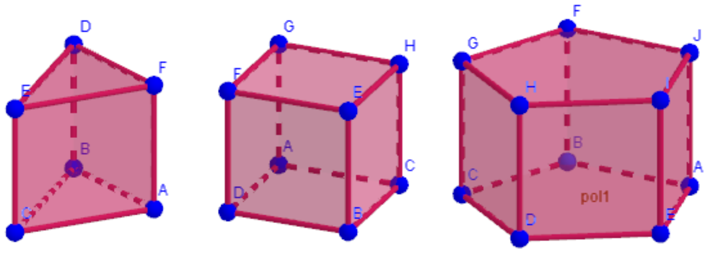
Percebemos que, a partir da segunda figura, poderemos fragmentar as demais em triângulos (o quadrado, por exemplo, ao traçar uma de suas diagonais, conseguiremos destacar dois triângulos, e assim sucessivamente). É sabido que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo resulta em 180^o. Como conseguimos destacar dois triângulos em um quadrilátero, teremos como resultado a soma dos ângulos internos é 360^o. Com isso, teremos múltiplos de 180^o. Vamos supor que esta soma seja calculada com a fórmula $S = 180 \cdot n$ onde n é o número de lados. Note que, quando $n = 3$, temos, por esta fórmula, que $S = 180 \cdot 3 = 540$, mas já dissemos anteriormente que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o. Para fazermos uma correção na fórmula, devemos perguntar: qual número devemos subtrair de 540^o para que encontremos o resultado correto, ou seja, 180^o? Devemos subtrair 360^o. Assim, $S = 180n - 360$ é uma fórmula válida.
Colocando 180 em evidência na fórmula $S = 180 \cdot n - 360$ obtemos

$$S = 180 \cdot (n - 2)$$

que é a fórmula utilizada para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, a qual representa uma função do primeiro grau.

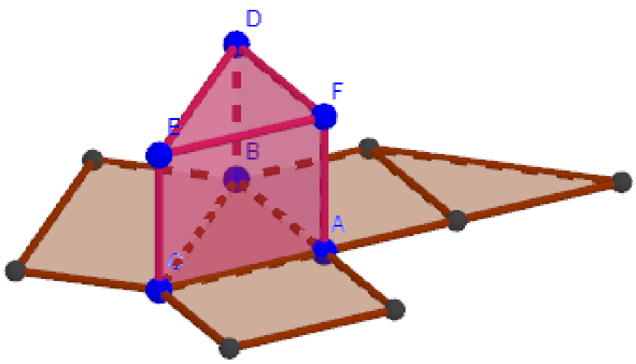
Soma dos ângulos das faces de um poliedro em função dos seus vértices
Começaremos com a soma dos ângulos das faces de um prisma.

Figura 1.2: Soma dos Ângulos das faces de um poliedro



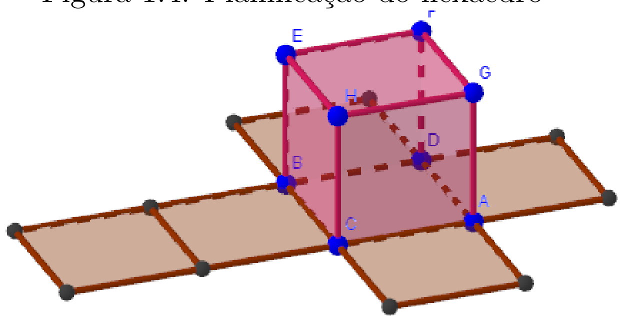
Aqui percebemos que o número de vértices cresce de dois em dois, e a soma dos ângulos cresce constantemente igual a 720^o, como poderemos ver abaixo.

Figura 1.3: Planificação de um prisma de base triangular



Note que o prisma de base triangular é constituído por dois triângulos e três quadrados, ou seja, temos como soma dos ângulos internos das faces, $2 \cdot 180$ (duas faces triangulares) e $3 \cdot 360$ (três faces quadrangulares), logo teremos como resultado $S = 360 + 1080 = 1440$.

Figura 1.4: Planificação do hexaedro



Observe agora o prisma de base quadrangular. Sua planificação é constituída por 6 quadriláteros, logo a soma dos ângulos das faces de um prisma de base quadrangular será $S = 6 \cdot 360 = 2160$.

Note que ao aumentar dois vértices, aumentou $2160 - 1440 = 720$. Em medida angular, a cada dois vértices, aumentaremos 720^o. Como o crescimento é constante, cada vez que aumentarmos um vértice, teremos um crescimento de $\frac{720}{2} = 360$ graus (isso acontece por exemplo, nas pirâmides). Com isso, teremos múltiplos de 360^o. Vamos supor que esta soma seja calculada com a fórmula $S = 360 \cdot v$ onde v é o número de vértices do prisma. Note que, quando $v = 6$ temos, por esta fórmula, que $S = 360 \cdot 6 = 2160$, mas já dissemos anteriormente que a soma dos ângulos das faces de um prisma de base triangular é 1440. Para fazermos uma correção na fórmula, devemos perguntar: qual número devemos subtrair de 2160 para encontrarmos o resultado correto, ou seja , 1440? Devemos subtrair 720 graus. Assim $S = 360v - 720$ será uma fórmula válida. Evidenciando teremos:

$$S = 360(v - 2)$$

que será a fórmula utilizada para calcular a soma dos ângulos das faces de um prisma, e tal raciocínio poderá ser estendido para a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo.

Essa ideia poderá modelar todas as funções do primeiro grau tendo como gráfico uma reta. Aqui podemos explorar algumas ideias que foram usadas, como taxa de crescimento ou decrescimento, fazer uma associação com o coeficiente angular e assim trabalhar todo o conteúdo de função polinomial do primeiro grau e, ao mesmo tempo, fazer com que o aluno pense nos conceitos usados, demonstrando tais fórmulas e não precisando decorá-las simplesmente para fazer a aplicação em um exame, mas sim estender essa ideia para sua vida e aplicá-las quando for necessário.

Podemos também pensar na construção de seu gráfico pois o mesmo ajuda na interpretação, compreensão e resolução de muitos problemas e como mostraremos mais adiante no capítulo sobre Técnica de Reconstrução Algébrica (TRA), construir os gráficos de feixes luminosos (retas) será fundamental para visualizarmos e entendermos sua resolução.

Construção de Gráficos da Função Polinomial do 1º grau

Sabendo que o gráfico da função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, isto é, o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$ é uma reta e que, pelo Axioma da Incidência, dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém, concluímos que para traçarmos o gráfico da função polinomial do 1º basta tomarmos dois pontos distintos que satisfazem a função. Aqui, usaremos as interseções da reta com os eixos do plano cartesiano, ou seja, pontos $(x, 0)$ e $(0, y)$.

<u>Caso 1</u>: $a > 0$ e $b > 0$

$f(x) = ax + b$

$(x = 0, y = ?)$ (interseção com o eixo y)

$f(0) = a \cdot 0 + b$

$f(0) = b$

Quando o valor de x for zero, teremos o valor de y igual a b. Como b é positivo, o ponto $(0, b)$ ficará acima da origem no eixo y (vertical).

$(y = 0,\ x = ?)$ (interseção com o eixo x)

$0 = ax + b \Rightarrow -b = ax \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ (raiz)

Quando o valor de y for igual a zero, teremos o valor de x igual a $-\dfrac{b}{a}$. Como a e b são positivos, a raiz será negativa e o ponto $\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$ estará à esquerda da origem no eixo x (horizontal).

<u>Caso 2</u>: $a > 0$ e $b < 0$

$f(x) = ax + b$

$(x = 0, y = ?)$ (interseção com o eixo y)

$f(0) = a \cdot 0 + b$

$f(0) = b$

Quando o valor de x for zero, teremos o valor de y igual a b. Como b é negativo, o ponto $(0, b)$ ficará abaixo da origem no eixo y (vertical).

$(y = 0,\ x = ?)$ (interseção com o eixo x)

$0 = ax + b \Rightarrow -b = ax \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ (raiz)

Quando o valor de y for igual a zero, teremos o valor de x igual a $-\dfrac{b}{a}$. Como a é positivo e b é negativo, a raiz será positiva e estará à direita da origem no eixo x (horizontal).

Nos casos 1 e 2 temos $a > 0$ e a reta está voltada para a direita.

<u>Caso 3</u>: $a < 0$ e $b > 0$

$f(x) = ax + b$

$(x = 0, y = ?)$ (interseção com o eixo y)

$f(0) = a \cdot 0 + b$

$f(0) = b$

Quando o valor de x for zero, teremos o valor de y igual a b. Como b é positivo, o ponto $(0, b)$ ficará acima da origem no eixo y (vertical).

$(y = 0,\ x = ?)$ (interseção com o eixo x)

$0 = ax + b \Rightarrow -b = ax \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ (raiz)

Quando o valor de x for zero, teremos o valor de y igual a b. Como a é negativo e b é positivo, a raiz será positiva e estará à direita da origem no eixo x (horizontal).

Caso 4: $a < 0$ e $b < 0$

$f(x) = ax + b$

$(x = 0, y = ?)$ (interseção com o eixo y)

$f(0) = a \cdot 0 + b$

$f(0) = b$

Quando o valor de x for zero, teremos o valor de y igual a b. Como b é negativo, o ponto $(0, b)$ ficará abaixo da origem no eixo y (vertical).

$(y = 0,\ x = ?)$ (interseção com o eixo x)

$0 = ax + b \Rightarrow -b = ax \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ (raiz)

Quando o valor de x for zero, teremos o valor de y igual a b. Como a e b são negativos, a raiz será negativa e estará à esquerda da origem no eixo x (horizontal).

Nos casos 3 e 4 temos $a < 0$ e a reta estará voltada para esquerda.

Vamos construir os gráficos das retas que serão usadas no capítulo de Técnica de Reconstrução Algébrica, encontrando as interseções das retas com os eixos coordenados.

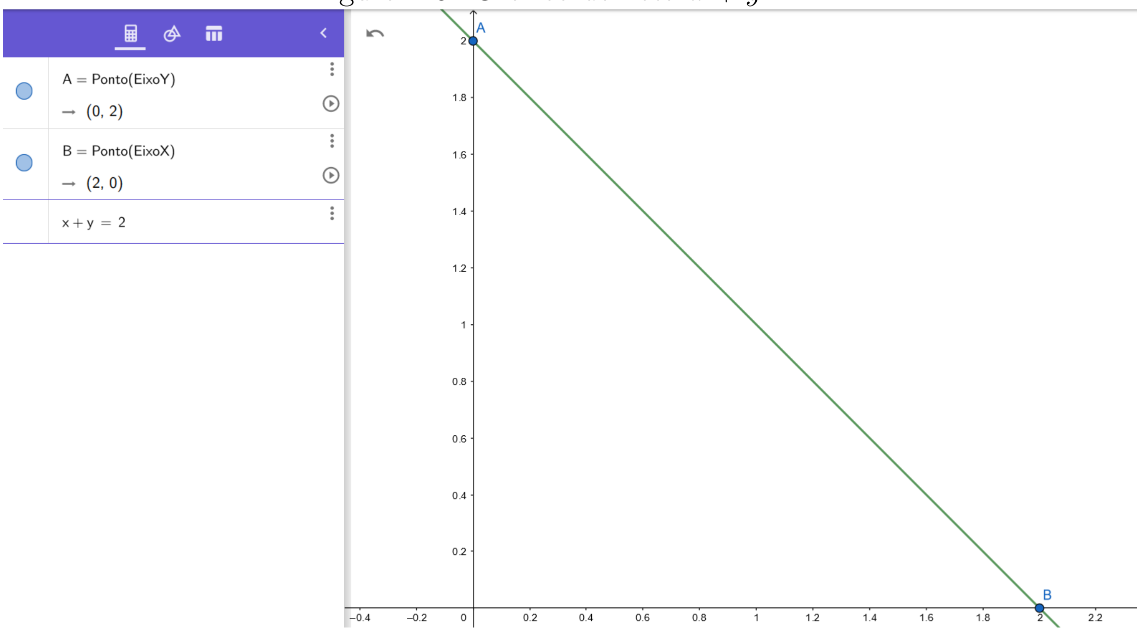
Reta 1, Caso 3:

$x + y = 2 \Rightarrow y = -x + 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

$x = 2 \Rightarrow y = 0$

Figura 1.5: Gráfico da reta $x + y = 2$



Reta 2, Caso 1:

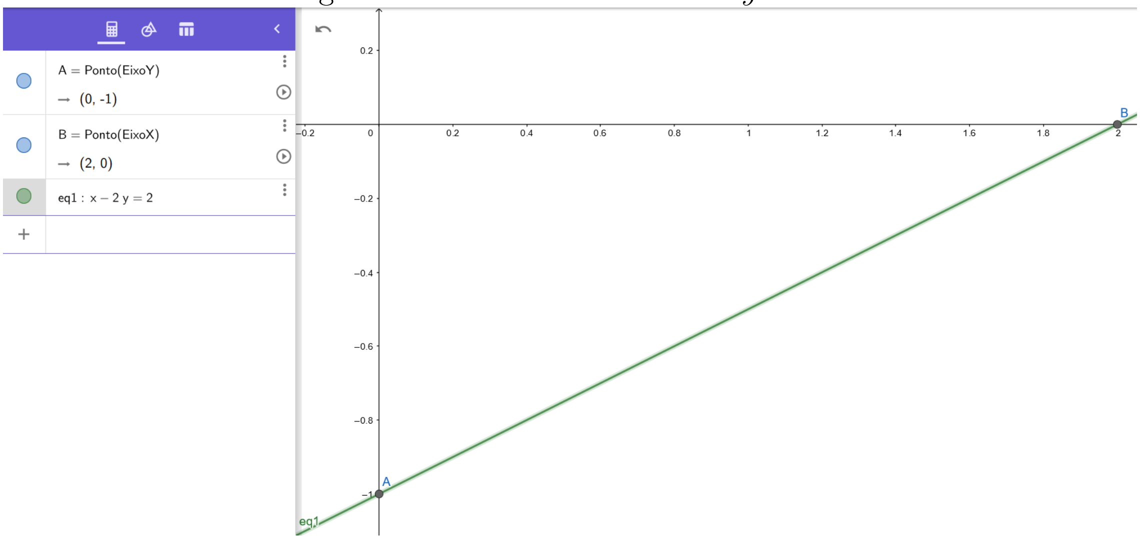
$x - 2y = -2$

$2y = x + 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = -2 \Rightarrow y = 0$

Figura 1.6: Gráfico da reta $x - 2y = -2$



Reta 3, Caso 2:

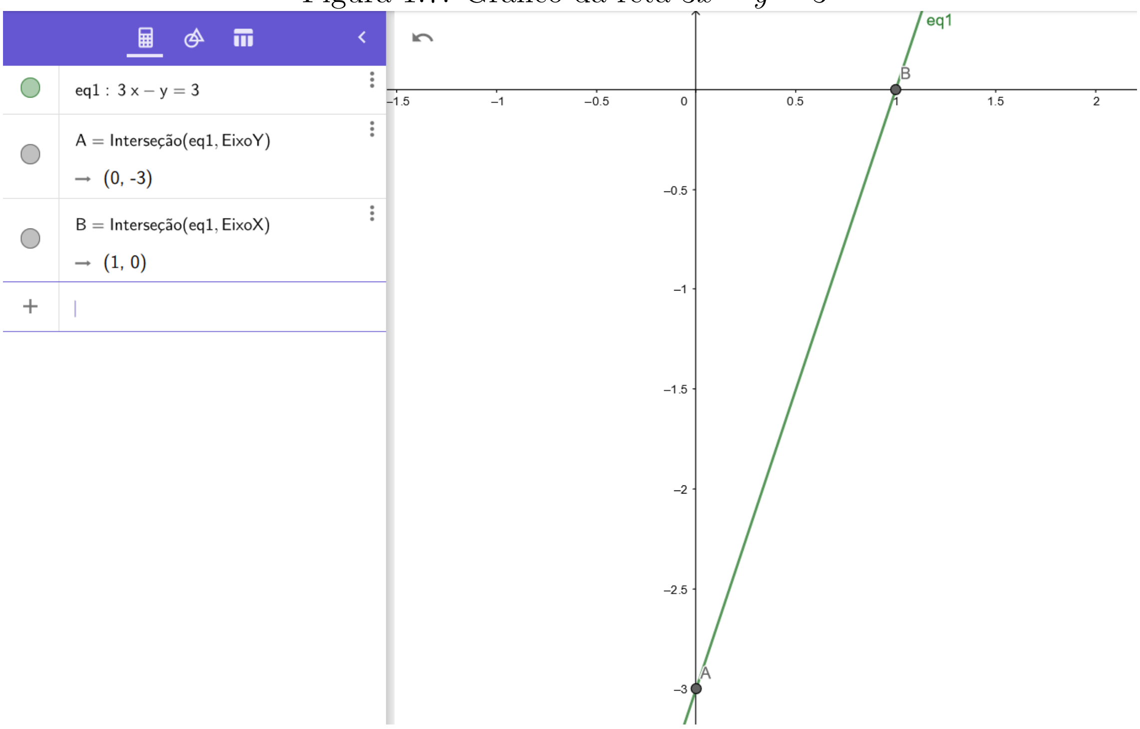
$3x - y = 3$

$y = 3x - 3$

$x = 0 \Rightarrow y = -3$

$x = 1 \Rightarrow y = 0$

Figura 1.7: Gráfico da reta $3x - y = 3$



Com isso, vemos que função polinomial do primeiro grau modela muitas ideias, principalmente ideias do cotidiano (como por exemplo o pagamento de um estacionamento, proporções). É um capítulo de fácil aplicação e compreensão. Pensando assim, como ficaria o estudo das potências e dos logaritmos? Visto que não apresenta uma aplicação direta no cotidiano, como poderíamos dar prosseguimento ao estudo dos logaritmos?

Capítulo 2

Logaritmos

O estudo dos logaritmos é um dos conteúdos que apresenta uma grande dificuldade por parte dos alunos no processo de ensino-aprendizagem. Alguns conteúdos matemáticos requerem do aluno entendimento e boa capacidade de memorização, porém o estudo dos logaritmos exige, além destas habilidades, abstração e flexibilidade cognitiva, uma vez que trabalha com conceitos pouco concretos e de difícil visualização por parte dos alunos. Os estudantes do ensino médio, em sua maioria, possuem idade compreendida entre 14 e 18 anos e ainda estão em processo de amadurecimento neural e cortical no que toca ao desenvolvimento dos lobos frontais do cérebro, regiões estas associadas ao pensamento abstrato e flexibilidade cognitiva, assim como às demais funções executivas [5].

Neste sentido, cabe ao professor tentar encontrar formas que permitam ao aluno compreender, através de conceitos mais operacionalizados e práticos, o estudo dos logaritmos. Uma destas maneiras é apresentar uma breve história sobre como surgiram os logaritmos, pois esta apresentação permitirá ao aluno entender o contexto no qual este conceito foi desenvolvido e qual foi o seu propósito.Para maiores detalhes o leitor pode consultar [7].

2.1 Breve História

Os logaritmos surgiram da necessidade de simplificação de cálculos matemáticos, sobretudo em virtude do aprimoramento da Astronomia, das grandes navegações e da expansão do comércio. Esse desenvolvimento ocorreu entre os séculos XVI e XVII e os logaritmos surgiram como cálculos capazes de transformar operações complexas de multiplicação e divisão em operações mais simples como adição e subtração [2].

Coube ao escocês John Nepier (mais conhecido como Napier) desenvolver o conceito de logaritmo. Cabe ressaltar que ele não foi o único de sua época a apresentar tal conceito, pois outros matemáticos também estavam trabalhando na sistematização desta proposta

conceitual.
O postulado de Napier baseou-se numa propriedade já conhecida em sua época: a multiplicação de potências de mesma base, onde $a^m.a^n = a^{m+n}$, em que a multiplicação de duas potências de mesma base resulta em uma outra potência, formada pela conservação de uma das bases anteriores e elevada ao expoente resultante da soma dos dois expoentes das potências anteriores. Através das observações das sequências de potências sucessivas, publicadas cinquenta anos antes por Stifel e também nas obras de Arquimedes, Napier deparou-se com a evidência de que os produtos ou quocientes das potências de mesma base são na verdade potências cujos expoentes são respectivamente soma ou diferença dos índices das potências anteriores de mesma base, mas com uma particularidade nas sequências de uma progressão geométrica de mesma base de potências inteiras, a exemplo do 2, que não poderia ser usada para computações, devido às imprecisões geradas por interpolações realizadas em grandes lacunas entre os termos sucessivos.
Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada através das conhecidas transformações trigonométricas de soma em produto de ângulos, que associam produtos com somas ou subtrações. O método de Napier baseou-se no fato de que associando aos termos de uma progressão geométrica $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots, b_n$, os termos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...$ então ao produto de dois termos da primeira progressão, $b_m \cdot b_p$, está associada a soma $m + p$ dos termos correspondentes na segunda progressão.
O método de Napier ficou conhecido como Barras de Napier ou Ossos de Napier. Conforme informa [3]:

> No final do século XVI, Napier, preocupado porque os cálculos eram grandes e difíceis, e freavam o progresso científico, concentrou todos os seus esforços em desenvolver métodos que pudessem simplificá-los. Com este fim, escreveu sua Rabdologia, onde descreve a utilização de barras e quadrinhos para efetuar somas de parcelas parciais. Os quadrinhos de Napier eram tábuas de multiplicações montadas sobre barras de secções quadradas [3].

De acordo com [11], outro fator importante que contribuiu para que Napier desenvolvesse a noção de logaritmo foi um método chamado de prostaférese (prosthaphaeresis: palavra grega que significa adição e subtração) que consistia em transformar multiplicações em adições e subtrações por meio de fórmulas trigonométricas, conhecidas como fórmulas de Johannes Werner.
Para uma compreensão mais adequada do método de Napier, foi elaborada a tabela abaixo. Os números da primeira linha são os expoentes, enquanto a segunda linha contém as potências de 2 correspondentes a esses expoentes. De acordo com esta tabela, podemos calcular produtos complicados, como $32 \cdot 512$, operando com uma operação de adição.

Figura 2.1: Tabela de potências

5+4=9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

32 x 512

Napier elaborou uma tabela similar a esta. Entretanto, ele precisaria que a sequência de números da segunda linha fosse formada por números cuja razão se aproximasse de 1, ou seja, ele estava buscando reduzir as lacunas entre os números da segunda linha, o que lhe daria maiores chances de encontrar qualquer produto procurado. Na tabela exemplificada anteriormente a razão é 2, isso gera grandes lacunas entre os números dessa sequência. Napier solucionou o problema das lacunas utilizando a razão $1 - \dfrac{1}{10^7}$ com resultado aproximado a $0,9999999$ e para resolver o problema dessas casas decimais que se repetem, ele multiplicou as potências obtidas com essa razão por 10^7. A tabela que ele propôs, como reflexo dessas conclusões, foi formada, na primeira linha, pelos expoentes L e na segunda por números N, ficando na forma seguinte: $N = 10^7(1 - \dfrac{1}{10^7})^L$. O expoente L foi por ele chamado de logaritmo de N, sendo a palavra logaritmo devida do latim, onde logos = razão e aritmos = número. Os logaritmos significavam a expressão de um método de cálculo a partir de razões numéricas ou da proporção de números. Ao tomarmos L = 0, iremos obter $N = 10^7$, o que quer dizer que, para Napier, o logaritmo de $10^7 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right)$ é igual a 1. Em 1614 Napier publicou o resultado de suas descobertas no livro, Uma construção da maravilhosa regra dos logaritmos [12].

Na mesma época de Napier, o suíço Joost Burgi apresentou uma proposta de um método idêntico ao dele, empregando uma razão de valor 1,0001 com primeiro termo 10^8. Burgi criou um método de cálculo de logaritmos e construiu uma tabela com aproximadamente 20000 termos. O matemático inglês Henry Briggs adaptou esta tabela para valores mais fáceis de serem utilizados por meio dos logaritmos decimais, como hoje os conhecemos.

Atualmente, com o desenvolvimento de calculadoras rápidas e sofisticadas, a utilização de um modelo de régua logarítmica tem sido cada vez menos empregada. Entretanto, o conhecimento sobre o conceito da função logarítmica continua sendo cada vez mais importante, tendo em vista sua natureza teórica. Embora o logaritmo tenha sido inventado para facilitar operações aritméticas, o desenvolvimento da matemática e das ciências em geral veio mostrar que diversas leis matemáticas e vários fenômenos naturais e sociais são estreitamente relacionados com os logaritmos [12].

Como exemplo de aplicação teórico-conceitual recente da função logarítmica, temos, no século XX, o desenvolvimento da Teoria da Informação. Shannon descobriu que a velocidade máxima Cmáx - em bits por segundo - com que sinais de potência S watts podem passar por um canal de comunicação, que permite a passagem, sem distorção, dos sinais de frequência até B hertz, produzindo um ruído de potência máxima N watts, é dada por um logaritmo, a saber:

$$C_{max} = B \log_2 \frac{S}{N}$$

Dessa forma, os logaritmos claramente assumem um papel fundamental, pois constituem uma ferramenta essencial no contexto da moderna tecnologia. Além da área de desenvolvimento tecnológico e computacional, houve modificações no estudo do logaritmo, e a forma como o estudamos hoje foi elaborada por Leonhard Euler em 1728. O estudo do logaritmo cada vez conquista mais espaço e atualmente também é utilizado nas áreas musicais e biomédicas.

Os exemplos a seguir estão relacionados com equação exponencial ou logarítmica:a emissão de radioatividade, de raios-x, de partículas beta, de partículas alfa, a quantidade de matéria, o período de meia vida, determinar o tempo de um artefato ou substância, determinar as constantes radioativas, velocidade de desintegração de uma amostra, calcular a intensidade radioativa, calcular a absorção de raios x por diferentes tecidos humanos afim de se identificar um tumor.... Este último será abordado mais a frente no capítulo sobre Técnica de Reconstrução Algébrica, quando falarmos sobre Tomografia Computadorizada.

2.2 Propriedades

Para uma melhor compreensão das ideias de logaritmos iremos começar pela definição de potência [7].

Definição 2.2.1. Sejam a um número real e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o numero a^n tal que:
$a^0 = 1$ e $a^n = a^{n-1} \cdot a$ para todo n , n maior que ou igual a 1, com $n \in \mathbb{N}$.

Da definição decorre que
$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$
$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$
$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$
De modo geral a^p é um produto de p fatores iguais a a
Da definição temos, também, as propriedades

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Definição 2.2.2. Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, chamamos função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada x real o número a^x.

No livro [7] a introdução dos logaritmos é iniciada mostrando que para resolver problemas que envolvem funções exponenciais é necessário reduzir tanto as equações quanto as inequações à potência de mesma base.
Como resolver a equação $2^x = 3$? Sabemos que x assume um valor entre 1 e 2, pois $2^1 < 2^x = 3 < 2^2$, mas com os conhecimentos adquiridos até aqui não sabemos qual é esse valor nem o processo para determiná-lo.
A fim de que possamos resolver esse e outros problemas, vamos iniciar agora o estudo dos logaritmos.

Definição 2.2.3. Sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Por uma questão de simbologia, iremos escrever $\log_{10} a$ simplesmente como $\log a$.

Definição 2.2.4. Dado um número real a $(0 < a \neq 1)$, chamamos função logarítmica de base a a função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$.

O que os alunos realmente entendem com essas definições?
Essas definições são suficientes para o aluno? Podemos melhorar essa compreensão mostrando, aos alunos, meios de encontrar o logaritmo, visto que em muitos livros os autores não explicam como achar o seu respectivo valor. Seria interessante que os livros do ensino médio abordassem a história referente aos logaritmos e, principalmente, a origem do símbolo, pois faria mais sentido. Muitos alunos indagam que na matemática eles começam com números, depois passam a mexer com letras, e quando chegam nos logaritmos: "- Agora são números e letras, tudo junto!"
Visto essa problemática, e lembrando que logaritmo muitas vezes será a representação de um número irracional (quando logaritmando e base forem primos entre si), será expressa conforme demonstrado a seguir. Ao iniciar os estudos dos logaritmos, começamos com a seguinte indagação: Se $10^0 = 1$ e $10^1 = 10$, para qual valor de x, tem-se $10^x = 2$? Pela indagação, é fácil observar que esse número x pertence ao intervalo aberto entre os números zero e um ($x \in]0, 1[$). Logo em seguida, pedimos aos alunos para, em seus

celulares, calcularem $10^{0,1}$, $10^{0,2}$, $10^{0,3}$ e os mesmos encontram os seguintes resultados 1,258925412, 1,584893192 e 1,995262315. Quando x assume o valor de aproximadamente 0,3 vemos que essa potência se aproxima de 2, então como chegar nesse número próximo a 0,3? Veremos que o número x será um numero irracional e sua representação numérica será $\log 2$. Com isso, concluímos que $10^{\log 2} = 2$ ou seja $x = \log 2 \Leftrightarrow 10^x = 2$.
Sem perda de generalidade encontraremos o $\log 2$, mas antes apresentaremos as seguintes propriedades.
<u>Propriedades:</u>

1. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.
   De fato considerando $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, temos que $a^x = b$, $a^y = c$, $a^z = bc$. Agora, note que $a^z = b \cdot c = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

   Pela igualdade de potências de mesma base, temos $z = x + y$.

2. $\log_a b^n = n \cdot log_a b$.

   Esta propriedade é uma generalização da anterior.

Possuímos algumas ferramentas necessárias para mostrar ao aluno como achar alguns logaritmos.

$$\text{Como achar } log 2?$$
$$2^{10} = 1024 \cong 1000$$
$$\log 2^{10} \cong \log 10^3$$
$$10 \log 2 \cong 3 log 10$$
$$\log 2 \cong \frac{3}{10}$$

Temos agora uma maneira de se achar qualquer logaritmo. Devemos observar que a escolha do número 10 como expoente da base 2 deve-se ao fato de que devemos pensar em uma potência de base dois (2^x), que tenha valor aproximado a uma potência de base dez, visto que queremos mostrar o $\log 2$. Poderíamos ter usado o número 12, pois $2^{12} = 4096$. Com isso, bastava escolher o número $4000 = 4 \cdot 1000 = 4 \cdot 10^3$.

$$2^{12} = 4096 \cong 4000$$
$$\log 2^{12} \cong \log 4 \cdot 10^3$$
$$12 \log 2 \cong \log 2^2 + \log 10^3$$
$$12 \log 2 - 2 \log 2 \cong \log 10^3$$
$$10 \log 2 \cong \log 10^3$$
$$\log 2 \cong \frac{3}{10}$$

A partir disso, o aluno já é capaz de achar, sozinho, qualquer logaritmo usando raciocínios análogos, por exemplo: como achar o $\log 3$?

Escolheremos o expoente 5, pois $3^5 = 243$ sendo uma potência fácil de calcular e por se aproximar de um múltiplo de 10, visto que a base é 10. Ao fatorarmos 240, obtemos $2^3 \cdot 3 \cdot 10$

$$\log 3^5 \cong \log 240$$
$$5\log 3 \cong \log 2^3 \cdot 3 \cdot 10$$
$$5\log 3 \cong \log 3 + 3 \cdot \log 2 + \log 10$$
$$5\log 3 - \log 3 \cong 3 \cdot 0,3 + 1$$
$$4\log 3 \cong 0,9 + 1$$
$$4\log 3 \cong 1,9$$
$$\log 3 \cong \frac{1,9}{4}$$
$$\log 3 \cong 0,475$$

Com isso percebemos uma melhor compreensão por parte dos alunos sobre os logaritmos, pois estes podem associar o logaritmo de um número a um "número aproximado", encorajando os estudantes a continuar o estudo dos logaritmos. Problemas: sempre utilizamos alguns problemas para aumentar o interesse do estudo por parte dos alunos. Um deles é o da exemplificação dos terremotos, problema este que já está bastante desgastado pelos alunos por ser muito conhecido e utilizado. Sendo assim, propomos outro problema para transformar alguns números em notação científica.

Problema 1: Escreva o número 2^{55} em notação científica.

Chamaremos 2^{55} de x, com isso teremos:

$$2^{55} = x$$
$$log2^{55} = logx$$

Note que o logaritmo está na base dez, pois como queremos expressar o número em notação científica e a mesma será uma potência de 10.

$$55 \cdot log2 = logx$$

Como os alunos já sabem encontrar logaritmos, poderemos afirmar que

$$log2 \cong 0,3$$
$$55 \cdot 0,3 \cong logx$$
$$16,5 \cong logx$$

Com isso,

$$x \cong 10^{16,5} = 10^{16+0,5} = 10^{16} \cdot 10^{0,5}$$

Como $\sqrt{10} = 3,16$

$$x \cong 10^{16} \cdot 3,16$$

$$x \cong 3,16 \cdot 10^{16}$$

Desta forma, esperamos que o estudo dos logaritmos fique mais concreto, e o aluno fique com mais segurança e estude com mais afinco.

O próximo capítulo dá sequência ao estudo das retas. Trata-se de um tópico da Geometria Analítica. Muitas vezes o estudo desse assunto não é tão simples, pois, no Ensino Médio, o mesmo é trabalhado apresentando pouquíssimos exemplos com aplicações “práticas ou do cotidiano”do aluno, mas de extrema importância. Devemos observar que neste estudo será a primeira vez que relacionaremos formas geométricas em geral com suas respectivas equações.

Capítulo 3

Geometria Analítica

O estudo da geometria analítica começa quando iniciamos o estudo do plano cartesiano e, em seguida, o estudo da função do primeiro grau. Este conteúdo é lecionado para os alunos do primeiro ano do ensino médio e depois só voltará como geometria analítica no terceiro ano, e muitas vezes os alunos já tiveram um contato com matrizes antes de iniciarem seus estudos em geometria analítica. Iremos agora definir alguns conceitos importantes. A equação afim ou reduzida de uma reta qualquer será dada por

$$y = m \cdot x + n$$

Observe que tal equação não representa retas verticais.
Um ponto qualquer do plano irá pertencer a pelo menos um eixo coordenado se o valor de sua abscissa ou ordenada for zero, logo se $x = 0$ o ponto pertence ao eixo y, se $y = 0$ o ponto pertence ao eixo x. Se a abscissa e a ordenada são zeros, obtemos assim a interseção com os eixos, no caso o ponto O chamado de origem representado por $O = (0, 0)$.
Na reta $y = m \cdot x + n$, se $x = 0$, teremos a interseção da reta com o eixo y, ou seja,

$$y = m \cdot 0 + n \Rightarrow y = n$$

sendo $(0, n)$ o ponto de interseção da reta com o eixo y.
Chamaremos n de coeficiente linear.
Por sua vez se $y = 0$, teremos a interseção da reta com o eixo x, ou seja,

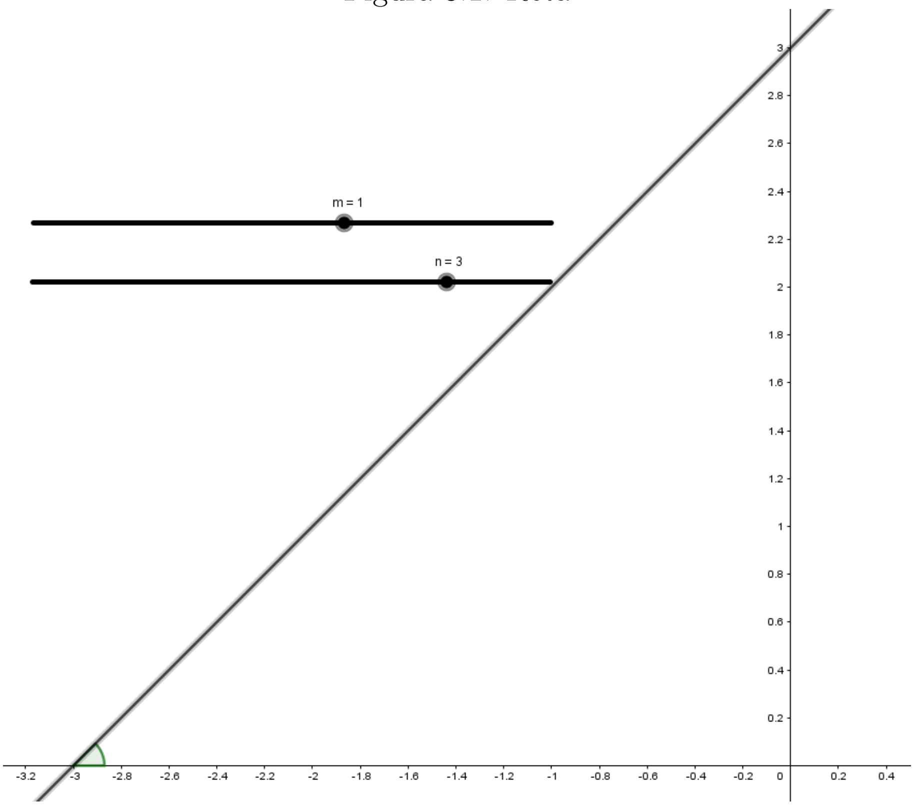
$$0 = m \cdot x + n$$

$$-n = m \cdot x$$

$$-\frac{n}{m} = x$$

o valor de x será a raiz, desde que $m \neq 0$.

Figura 3.1: Reta



Usando a relação trigonométrica no triângulo formado com os eixos, observe que ao usarmos $\operatorname{tg}\alpha$ teremos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

observando a figura temos como *cateto oposto* o valor de n e *cateto adjacente* o valor da raiz, ou seja $-\dfrac{n}{m}$. Como estamos falando do tamanho de um segmento iremos pegar como cateto adjacente o valor $\dfrac{n}{m}$.

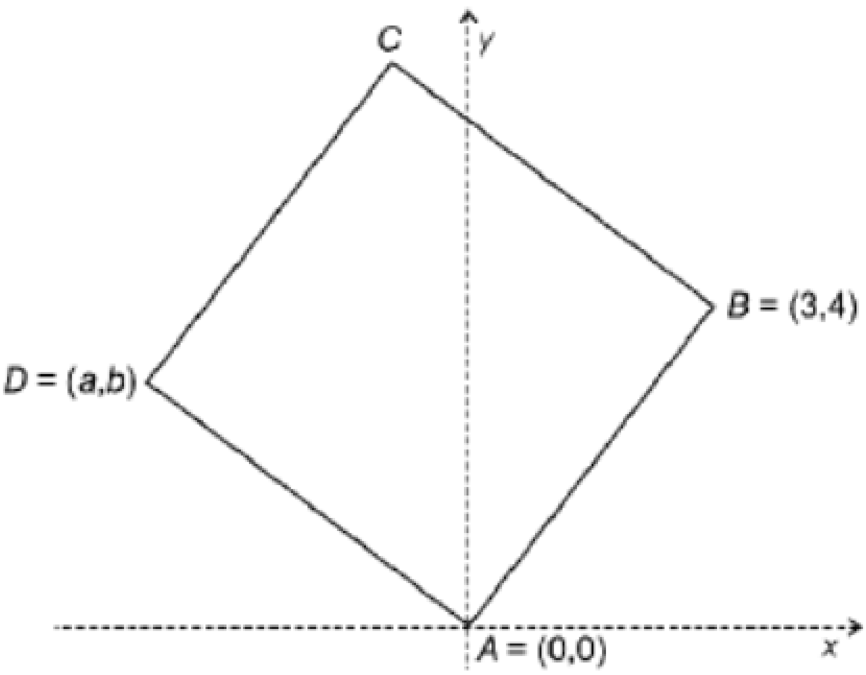
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{n}{\left(\dfrac{n}{m}\right)} \\ \operatorname{tg}\alpha &= n \cdot \left(\frac{m}{n}\right) \\ \operatorname{tg}\alpha &= m \end{aligned} \quad ,$$

Com isso chamaremos m de coeficiente angular. Seu valor será o valor da tangente do ângulo que é determinado na interseção da reta com o eixo x. Resultado direto que podemos concluir é que se duas retas têm o mesmo coeficiente angular então elas têm o mesmo ângulo formado com o eixo x, com isso elas são coincidentes ou paralelas [9].

Teorema 3.0.1. *Duas retas não verticais r e s, com coeficientes angulares m_r e m_s,* *respectivamente, são perpendiculares entre si se, e somente se,* $m_r \cdot m_s = -1$.

Para auxiliar a teoria, a criatividade e a visão do estudante, fazemos o uso do software Geogebra na resolução de muitos exercícios logo após a resolução dos problemas no quadro, pois possibilita a expansão do conhecimento do aluno, explorando as ideias de construção geométrica (assunto que não é abordado mais nas escolas). É importante ressaltar que a maioria dos alunos se sente atraída pelas construções geométricas e por lugar geométrico, assim que adquirem contato com equação da reta, retas paralelas e retas perpendiculares. Vejamos um problema interessante:
Problema 1 (UFMG 2003): Nesta figura está representado um quadrado de vértices ABCD. Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos A e B são $A = (0, 0)$ e $B = (3, 4)$. Então, é CORRETO afirmar que o resultado da soma das coordenadas do vértice D é?

Figura 3.2: Problema UFMG



Observe que este problema é a rotação do quadrado ABCD em relação à origem y. Como nos foram dadas as coordenadas dos vértices $A = (0, 0)$ e $B = (3, 4)$, podemos usar a equação fundamental da reta :

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

onde m é o coeficiente angular e (x_o, y_o) representa um ponto conhecido da reta.
Fazendo $x = 3$, $y = 4$, $x_o = 0$, $y_o = 0$ teremos

$$4 - 0 = m_{AB}(3 - 0)$$

$$m_{AB} = \frac{4}{3}$$

Com isso já podemos obter a equação da reta que passa pelos pontos A e B

$$y - y_o = m_{AB}(x - x_o)$$
$$y - 0 = \frac{4}{3}(x - 0)$$
$$y = \frac{4}{3}x$$

Note que a reta que contém o segmento AB é perpendicular à reta que contém o segmento AD, pois são segmentos consecutivos de um quadrado.

Como são perpendiculares temos que;

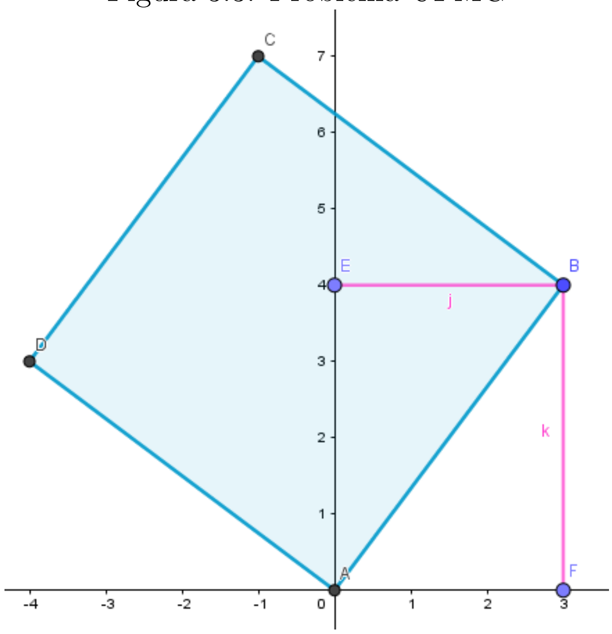
$$m_{AB} \cdot m_{AD} = -1$$
$$\frac{4}{3} \cdot m_{AD} = -1$$
$$m_{AD} = \frac{-3}{4}$$

Podemos concluir que a reta que contem o segmento AD, será dada pela equação ;

$$y - 0 = \frac{-3}{4}(x - 0)$$
$$y = \frac{-3x}{4}$$

Perceba que por ser um quadrado, todos os seus lados são iguais e com isso a distância d_{AB} é igual à distância d_{AD}. Note que, por conhecer o ponto B, o comprimento do segmento BE será o valor da abscissa e o comprimento do segmento AE será o valor da ordenada do vértice B, ou seja $B = (3, 4)$, onde E é o pé da perpendicular baixada de B até 0y. Por ser um triângulo retângulo, podemos usar a tríade pitagórica $3, 4$ e 5, para concluir que $|\overline{AB}|$ vale 5 ou :

Figura 3.3: Problema UFMG



$$d_{AB}^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$$
$$d_{AB}^2 = (3 - 0)^2 + (4 - 0)^2$$
$$d_{AB}^2 = 9 + 16$$
$$d_{AB}^2 = 25$$
$$d_{AB} = 5$$

Note que, como a distância de AB é fixa e igual a 5, o vértice B é um ponto da circunferência de raio 5 cuja equação da circunferência é :

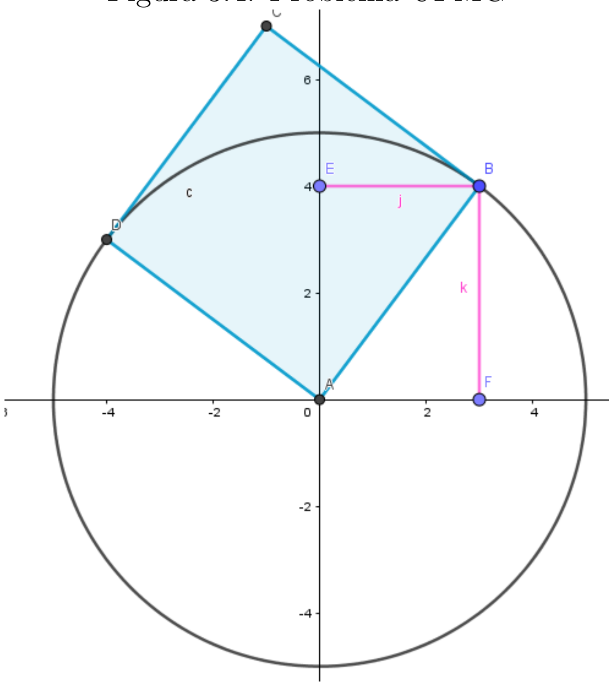
$$r^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$$

Onde x_o e y_o são as coordenadas do centro de tal circunferência, neste caso o vértice A.

$$5^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$$
$$25 = x^2 + y^2$$

Perceba que tal equação representa o lugar geométrico dos vértices B e D do quadrado em questão.

Figura 3.4: Problema UFMG



Para encontrar as coordenadas do ponto D, basta achar a interseção da circunferência com a reta suporte do segmento AD, ou seja, resolver o sistema

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x}{4} \\ 25 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$25 = x^2 + \left(\frac{-3x}{4}\right)^2$$

$$25 = x^2 + \left(\frac{9x^2}{16}\right)$$

$$25 = \frac{16x^2 + 9x^2}{16}$$

$$25 = \frac{25x^2}{16}$$

$$x^2 = \frac{16 \cdot 25}{25}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4 \text{ ou } x = -4$$

Como o vértice D pertence ao segundo quadrante, temos que sua abscissa será $x = -4$, em seguida concluímos que sua ordenada será 3 pois

$$y = \frac{-3x}{4}$$

$$y = \frac{(-3) \cdot (-4)}{4}$$

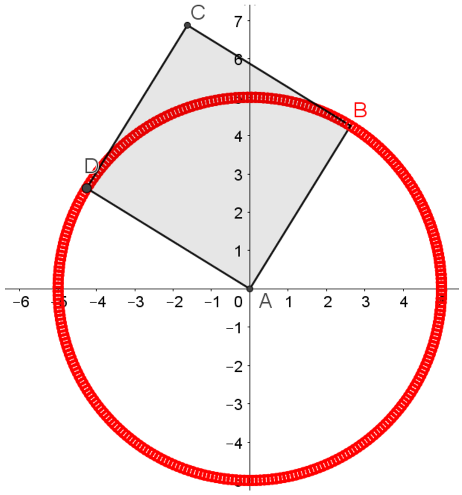
$$y = \frac{12}{4}$$

$$y = 3$$

Poderemos concluir que a soma das coordenadas do vértice D será -1.

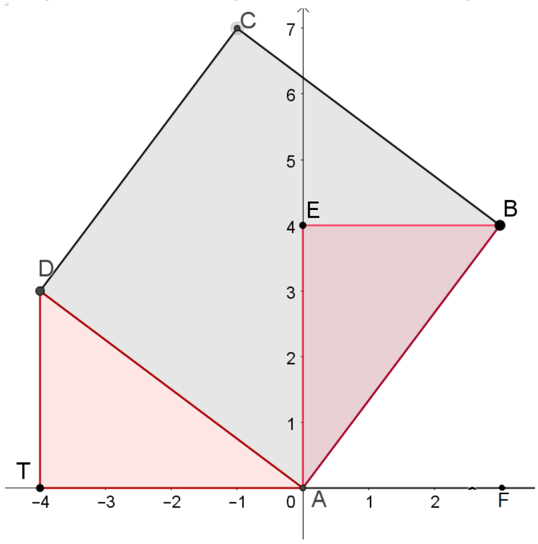
E por fim podemos fazer uma animação, com o objetivo do aluno ver todas as possíveis rotações e perceber também que os dois vértices B e D sempre serão pontos da circunferência.

Figura 3.5: Lugar geométrico dos vértices adjacentes ao vértice fixo na rotação do quadrado



Podemos resolver o mesmo exercício usando congruência de triângulos. Vejamos;

Figura 3.6: Congruência de triângulos



Vamos chamar o ângulo $F\hat{A}B$ de α e o ângulo $T\hat{A}D$ de β, traçando a prjeção ortogonal do ponto B no eixo x teremos um triangulo e podemos afirmar que α mais β mais 90^o, serão suplementares, com isso α mais β, são complementares. Podemos afirmar que $A\hat{B}E$ também será α, visto que são alternos internos, logo o ângulo $B\hat{A}E$ será β, pois o triângulo é retângulo em E e α e β são complementares. De maneira análoga, podemos garantir que o ângulo $A\hat{D}T$ será α pois o triângulo também é retângulo e $T\hat{A}D$ é β. Como o comprimento do segmento AB é igual ao comprimento do segmento AD, pois são lados do quadrado $ABCD$, usaremos o caso de congruência, ângulo, lado, ângulo. Com isso podemos garantir que $\overline{AT} = 4$ e $\overline{TD} = 3$, como D pertence ao segundo quadrante temos que $D = (-4, 3)$

<u>Problema 2</u>: Sejam A(2,1), B(4,4) e C(10,0) vértices consecutivos de um retângulo, encontre seu quarto vértice.

Chamaremos r, s, t, u as retas suporte que contém os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente e D será o quarto vértice do retângulo em questão.

Vamos encontrar primeiramente a reta r, que contém o segmento $\overline{AB}$.

Usaremos os pontos $A(2, 1)$ e $B(4, 4)$.

$y - y_o = m(x - x_o)$

$4 - 1 = m_r \cdot (4 - 2)$

$m_r = \dfrac{3}{2}$

Com isso, é possível afirmar que:

$$m_s = -\frac{2}{3},\ m_t = \frac{3}{2} \text{ e } m_u = -\frac{2}{3} \text{ pois, } r//t,\ r \perp s, \text{ e } r \perp u$$

Usando a equação da reta, o coeficiente angular e um dos pontos poderemos encontrar as equações das retas:

reta r :

$$y - 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 2)$$

$$y = \frac{3x}{2} - 3 + 1$$

$$y = \frac{3x}{2} - 2$$

reta s :

$$y - 0 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 10)$$

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{20}{3}$$

reta t :

$$y - 0 = \frac{3}{2} \cdot (x - 10)$$

$$y = \frac{3x}{2} - 15$$

reta u :

$$y - 1 = -\frac{2}{3} \cdot (x - 2)$$

$$y = -\frac{2x}{3} - \frac{4}{3} + 1$$

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{7}{3}$$

Como o vértice D é um ponto em comum das retas t e u, basta resolvermos o sistema linear dessas duas retas.

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x}{2} - 15 \\ \\ y = -\dfrac{2x}{3} + \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$$\frac{3x}{2} - 15 = -\frac{2x}{3} + \frac{7}{3}$$

$$\frac{3x}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{7}{3} + 15$$

$$\frac{13x}{6} = \frac{52}{3} \Rightarrow 13x = 52 \cdot 2 \Rightarrow x = 8$$

Substituindo o valor de x em qualquer uma das equações do sistema, encontramos $y = -3$. Assim, o quarto vértice do retângulo é o ponto $D(8, -3)$.

Usaremos essas ideias para a utilização da Técnica de Reconstrução Algébrica. Podemos explorar muitas ideias de aplicações para apresentar aos alunos. A seguir, veremos o capítulo das matrizes, retomando tudo que já estudamos até então, fazendo com que os alunos percebam que os assuntos estão interligados.

Capítulo 4

Matrizes

Atualmente, temos a aplicação do conceito de matrizes nas mais variadas áreas do conhecimento. Vemos a utilização das matrizes na área da informática, na edição de imagens, em criptografias, sistemas de QRcode, na interpretação de gráficos e tabelas, na engenharia (ex.: divisão dos metros e distribuição de material na construção de uma estrutura de sustentação), e nas áreas biomédicas (ex.: cálculo de voxel em uma ressonância magnética cerebral).

Preferimos trazer alguns exercícios históricos como, por exemplo, os problemas com os grãos e como os chineses já usavam uma ideia parecida com matrizes, para auxiliar em suas resoluções.

Supõe-se que temos 3 pacotes de cereais de alta qualidade, 2 pacotes de cereais de qualidade média e 1 pacote de cereais de baixa qualidade, totalizando 39 "dou"de grãos. Também se supõe termos 2 pacotes de cereais de alta qualidade, 3 de qualidade média e 1 de baixa qualidade, totalizando 34 "dou"; 1 pacote de alta qualidade, 2 de qualidade média e 3 de baixa qualidade, totalizando 26 "dou"de grãos. 3 pacotes de cereais de alta, de média e de baixa qualidade, respectivamente, totaliza quantos "dou"de grãos?

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

O método chinês consistia num método análogo ao que conhecemos atualmente por escalonamento :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Multiplicando a primeira coluna por dois e subtraindo-se da segunda coluna, obteremos

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 52 & 34 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 2 & 3 \\ 4-3 & 3 & 2 \\ 6-1 & 1 & 1 \\ 52-34 & 34 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 18 & 34 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Multiplicando todos os termos da segunda coluna por três e logo em seguida subtraindo termo a termo do dobro da terceira coluna, obteremos :

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 18 & 102 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6-6 & 3 \\ 1 & 9-4 & 2 \\ 5 & 3-2 & 1 \\ 18 & 102-78 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 18 & 24 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Multiplicando a primeira coluna por cinco e subtraindo da segunda, obteremos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5-5 & 5 & 2 \\ 25-1 & 1 & 1 \\ 90-24 & 24 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 24 & 1 & 1 \\ 66 & 24 & 39 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

concluímos que $z = \dfrac{66}{24}$ e os valores de x e y serão encontrados por substituições sucessivas, ou seja,

$$5y + z = 24 \Rightarrow y = \frac{1}{5} \cdot (24 - \frac{66}{24}) \Rightarrow y = \frac{102}{24}$$

$$3x + 2y + z = 39 \Rightarrow x = \frac{222}{24}$$

Assim, 3 pacotes de cereais de qualidade diferentes totalizam 16, 25 "dou"de grãos.

4.1 Sistemas Lineares e Matrizes

Chamaremos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$, toda equação do tipo
Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}$, todos reais, são chamados coeficientes e b, também real, é o termo independente da equação.
A solução de uma equação linear será a sequência ou n-upla ordenada de números reais

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$$

tal que

$$a_{11} \cdot \alpha_1 + a_{12} \cdot \alpha_2 + a_{13} \cdot \alpha_3 + ... + a_{1n} \cdot \alpha_n = b.$$

Chamaremos de Sistema Linear o conjunto de m (com m maior que ou igual a um) equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Assim teremos o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se um sistema linear tiver pelo menos uma solução diremos que ele é um sistema possível; caso não apresente nenhuma solução o chamaremos de impossível. Iremos prosseguir com o estudo das matrizes [8].

Definição 4.1.1. Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Em uma matriz qualquer M, cada elemento é indicado por a_{ij}, o índice i indica a linha e o índice j indica a coluna na qual o elemento pertence. Por convenção, numeramos as linhas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita [13].

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Alguns alunos relatam não fazerem ideia do porquê estudar matrizes. Por que usar uma matriz? Para que serve uma matriz? Um método a mais de resolver sistemas lineares?
O estudo das matrizes na maior parte das vezes é um estudo independente da geometria analítica. Geralmente, os alunos estudam matrizes antes de estudar geometria analítica. Existem escolas em que o estudo das matrizes é no segundo ano do ensino médio, enquanto o de geometria analítica é no terceiro ano.
O primeiro registro de uma notação é encontrado em uma carta de Leibniz, onde o mesmo reescreve um sistema linear em formato matricial e usa cálculos de determinante para resolvê-lo.
A seguir apresentaremos as principais operações entre matrizes.

Definição 4.1.2. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se matriz soma de A e B a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j.

Isto implica que a soma de duas matrizes, $A + B$, resulta em uma nova matriz C onde cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo 4.1.1. Dadas as matrizes abaixo, calcule $A + B$ e $A - B$:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Resolução:

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+0 & 6-1 \\ 4+5 & 2+4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-0 & 6-(-1) \\ 4-5 & 2-4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Definição 4.1.3. Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se oposta de A e indica-se por $-A$ a matriz A' tal que $A + A' = 0$

Definição 4.1.4. Dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se produto $k \cdot A$ a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = ka_{ij}$ para todo i e todo j.

Isto significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

Definição 4.1.5. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se o produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$, tal que

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e todo $k \in \{1, 2, 3, ..., p\}$.

Observações 4.1.1.

1. A definição dada garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B, pois A é do tipo $m \times n$ e B é do tipo $n \times p$;

2. A definição dada afirma que o produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B, pois $C = AB$ é do tipo $m \times p$;

3. Ainda pela definição, um elemento c_{ik} da matriz AB deve ser obtido pelo procedimento seguinte: (I) tome a linha i da matriz A com n elementos:

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & ... & a_{in} \end{bmatrix}$$

(II) tome a coluna k da matriz B também com n elementos:

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ ... \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

(III) coloca-se a linha i de A na vertical ao lado da coluna k de B (conforme o esquema):

$$\begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \\ ... \\ a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ ... \\ b_{nk} \end{bmatrix}$$

(IV) calculam-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado (conforme o esquema)

$$\begin{bmatrix} a_{i1} \cdot b_{1k} \\ a_{i2} \cdot b_{2k} \\ a_{i3} \cdot b_{3k} \\ .... \\ a_{in} \cdot b_{nk} \end{bmatrix}$$

(V) somam-se esses n produtos, obtendo-se c_{ik}.

Exemplo 4.1.2. Dadas as matrizes A e B, vamos encontrar a matriz produto $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Note que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, ou seja, existe o produto AB.

Tomando a linha um da matriz A e a coluna um da matriz B e colocando a linha um da matriz A na vertical, passos (I), (II) e (III), teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Pelo passo (IV), devemos multiplicar termo a termo

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 7 \\ 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Pelo passo (V), basta somarmos os termos obtidos pelos produtos do passo (IV):

$$\begin{bmatrix} 7 + 16 + 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \end{bmatrix}$$

Acabamos de obter o elemento c_{11}. Devemos agora repetir o processo para obter c_{21}:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot 7 \\ 5 \cdot 8 \\ 6 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 40 \\ 54 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28 + 40 + 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 \end{bmatrix}$$

Com isso obtivemos a matriz produto $AB = C$

$$C = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$$

Aqui devemos lembrar ao aluno que o produto de duas matrizes em geral não será comutativo (é o primeiro contato do aluno em que o produto de dois elementos não será comutativo). Isso gera muitos problemas, pois o aluno desde a primeira série do ensino fundamental está acostumado com a ideia de "a ordem dos fatores não altera o produto". Neste caso, multiplicar uma matriz pelo lado esquerdo não será a mesma coisa que multiplica-lá pelo lado direito dentro das condições de compatibilidade (já que o produto em geral não será comutativo) e até fazer o aluno se familiarizar com essa ideia exige bastante trabalho, sendo algo que poderia ser evitado em momentos anteriores do processo de ensino-aprendizagem.

Pelo item 2 da Observação 4.1.1, a matriz produto C será dada pelo número de linhas de A e pelo número de colunas de B. Pela definição, o número de colunas da primeira matriz tem que ser igual ao número de linhas da segunda matriz, no caso das matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$, é possível fazer o produto AB, o qual resultará em uma matriz $C_{m \times p}$, mas se $m \neq p$, então não é possivel fazer o produto BA. Mesmo quando as multiplicações AB e BA são possíveis, os produtos, em geral, são diferentes.

Para ilustrar tal situação sem a necessidade de se fazer contas, observe:

$$A_{4\times 3} \cdot B_{3\times 4} = C_{4\times 4}$$
$$B_{3\times 4} \cdot A_{4\times 3} = D_{3\times 3}$$

Definição 4.1.6. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se transposta de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j. Isto significa, que as linhas da matriz A serão as colunas da matriz A^t.

Verifica-se que a transposta de uma matriz transposta é a própria matriz, ou seja,

$$(A^t)^t = A \quad .$$

Considere o Sistema Linear:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Associado a esse sistema, temos as seguintes matrizes.
A matriz A dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz X das incógnitas:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A matriz B dos termos independentes:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz ampliada do sistema,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

onde cada linha é uma representação abreviada da equação correspondente no sistema.

Agora, podemos escrever o sistema S na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = B.$$

Podemos fazer operações reversíveis nas linha de uma matriz. Essas operações são chamadas de elementares. Vejamos a seguinte definição.

Definição 4.1.7. São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz. (Para simplificar a linguagem vamos indicar por L_i a i-ésima linha de uma matriz)

1) Permutar linhas $L_i \leftrightarrow L_j$ indica que as linhas i e j foram permutadas.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

2) Multiplicar uma linha por um escalar não nulo k.

$L_i \rightarrow kL_i$ indica que a i-ésima linha foi substituída por kL_i

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -2L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

3) Substituir uma linha por ela somada a outra linha multiplicada por um escalar não nulo: $L_i \rightarrow L_i + kL_j$ indica que a i-ésima linha foi substituída pela i-ésima linha somada com a j-ésima linha multiplicada por k.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -2L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

Definição 4.1.8. Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha-equivalente a A, e indicamos $A \sim B$ se a matriz B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = B$$

O resultado a seguir nos permite utilizar operações elementares sobre linhas para resolver sistemas lineares.

Teorema 4.1.1. *Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas linha-equivalentes são equivalentes.*

Matriz Linha Reduzida à Forma Escada (LRFE)

Consideremos o sistema

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e suponhamos que ele tem uma única solução $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$.

Para resolvermos o sistema S fazemos operações entre as suas equações até chegarmos na solução

$$S : \begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}$$

Isto, em termos da matriz ampliada do sistema, corresponde a efetuarmos operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema até obtermos uma matriz linha-equivalente do tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 4.1.3. Consideremos o sistema

$$S : \begin{cases} 2x - 4y + 4z = 8 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Vamos efetuar operações elementares na sua matriz ampliada para tentar chegar à forma acima

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to \frac{L_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 4L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \to -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A última matriz desta sequência corresponde à solução do sistema

$$\begin{cases} x = -8 \\ y = -7 \\ z = -1 \end{cases}$$

Podemos observar que a matriz obtida na resolução do sistema acima tem uma forma especial. Ela é o que chamamos uma matriz linha-reduzida à forma escada que definiremos a seguir.

Definição 4.1.9. Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ está na forma linha reduzida à forma escada (LRFE) ou forma escalonada reduzida por linhas se satisfaz às seguintes condições:

a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;

b) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

c) O número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha até que sobrem somente linhas nulas, se houver;

d) Cada coluna que possui o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os outros elementos nulos.

Antes de encerrarmos o capítulo, vamos apresentar dois exemplos com aplicação de matrizes para o Ensino Médio.

Exemplo 4.1.4. Uma fábrica usa dois tipos de máquina P e Q para produzir dois produtos diferentes A e B. As máquinas P e Q podem trabalhar 80 e 60 horas por semana, respectivamente. Os dois produtos requerem, para serem produzidos, diferentes quantidades de tempo em cada uma das máquinas, como mostra a tabela abaixo. Determine o número de unidades de cada produto que as máquinas P e Q podem produzir por semana, operando o tempo todo.

<u>Resolução</u>: Construindo a matriz, teremos

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 80 \\ 3 & 2 & 60 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Figura 4.1: Relação entre máquinas, produtos e horas de trabalho

	Produto A	Produto B	Horas de trabalho/semana
Máquina P	2h	4h	80h
Máquina Q	3h	2h	60h

Pela interpretação do problema devemos observar que a primeira linha representa a máquina P e a segunda linha representa a máquina Q. A primeira e segunda colunas representam os produtos A e B.

Dividindo a primeira linha por dois, $(L_1 \to \dfrac{1}{2}L_1)$, obtemos a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 40 \\ 3 & 2 & 60 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Subtraindo da linha dois o triplo da linha um, $(L_2 \to L_2 - 3L_1)$, teremos

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 40 \\ 0 & -4 & -60 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Multiplicando a segunda linha por $-\frac{1}{4}$, isto é, $(L_2 \to -\dfrac{1}{4}L_2)$, temos

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 40 \\ 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Subtraindo da linha um o dobro da linha dois, $(L_1 \to L_1 - 2L_2)$, obtemos

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Assim, operando o tempo todo, as máquinas P e Q podem produzir por semana 10 unidades do produto A e 15 unidades do produto B.

Exemplo 4.1.5. A tabela abaixo exibe as porcentagens de albumina, carboidrato e lipídio em cada um dos alimentos A, B e C. Verifique se é possível combinar esses alimentos formando uma refeição que contenha 40% de albumina, 40% de carboidrato e 20% de lipídio.

	A	B	C
Albumina	30%	50%	20%
Carboidrato	30%	30%	70%
Lipídio	40%	20%	10%

Resolução: Simplificando as porcentagens da matriz obteremos a matriz:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Fazendo a segunda linha menos a primeira linha ($L_2 \to L_2 - L_1$), multiplicando a terceira linha por três ($L_3 \to 3L_3$) e em seguida subtraindo da nova linha três a linha um multiplicada por 4 ($L_3 \to L_3 - 4L_1$), teremos.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -14 & -5 & -10 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Somando a terceira linha com a segunda linha ($L_3 \to L_3 + L_2$):

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -10 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Multiplicando a segunda linha por menos oito ($L_2 \to -8L_2$):

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 16 & -40 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & -10 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Somando a linha dois com a linha três ($L_2 \to L_2 + L_3$), teremos:

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -40 & -10 \\ 0 & -16 & 0 & -10 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Desta forma, temos que $-40z = -10 \Rightarrow z = \dfrac{1}{4}$, que $-16y = -10 \Rightarrow y = \dfrac{5}{8}$ e consequentemente $3x + 5y + 2z = 4 \Rightarrow x = \dfrac{1}{8}$, onde x, y, z representam, respectivamente, as quantidades de alimentos A, B e C.
Assim, concluímos que é possível combinar os alimentos para formar a refeição requerida.

No próximo capítulo utilizaremos matrizes no processo matemático usado para construir imagens provenientes de uma tomografia computadorizada.

Capítulo 5

Técnica de Reconstrução Algébrica

Este capítulo foi baseado na referência [1].

5.1 Funcionamento e aplicação da Tomografia Computadorizada

A técnica de produção de imagens tem auxiliado muito no diagnóstico de diversas patologias. Entre estas técnicas, uma das mais utilizadas é a Tomografia Computadorizada (TC). Esta técnica funciona através da emissão de raios X, permitindo a obtenção de imagens de qualidade, diferenciando ossos, órgãos, ar e água. Isso acontece porque elementos com densidades diferentes também reagem de forma diferente aos raios, gerando imagens com intensidades específicas. As imagens são produzidas em 3D, possibilitando uma visualização tridimensional.

As principais aplicações da TC estão relacionadas à identificação de fraturas de face e crânio, traumatismo craniano, sinusite, hérnia de disco, pneumonia, neoplasias, dentre outras. Uma das vantagens da TC é que praticamente não há restrições e contra-indicações, exceção feita às mulheres grávidas, que não devem ser expostas à radiação. Até mesmo quando é necessário utilizar um contraste intravenoso para maximizar a definição da visualização de alguma estrutura específica, este é de iodo, e sabemos que o iodo tem uma eliminação fácil e efetiva no organismo. Pessoas alérgicas ao iodo devem fazer a TC sem o uso do contraste. O contraste reage de forma diferente em regiões saudáveis e em áreas de lesão, permitindo que células anômalas sejam identificadas com mais clareza, como no caso de tumores [4].

A TC consiste, basicamente, em raios X ultrassensíveis de uma determinada parte do corpo. Assim que os feixes atravessam o órgão, formam uma imagem, que é recebida e reconstituída no computador. Quanto maior for a quantidade de linhas e colunas da malha, menor será o tamanho do pixel e, consequentemente, melhor será a resolução espacial da imagem. Os ossos aparecem em branco, ao passo que gases e líquidos em preto. Tecidos são vistos numa graduação de cinza. As imagens podem ser vistas nos planos sagital (qualquer plano longitudinal que divide o corpo em direito e esquerdo), coronal (qualquer plano longitudinal que divide o corpo em partes anterior e posterior) e axial (qualquer plano transverso que passa através do corpo, em ângulo reto ao plano longitudinal, dividindo o corpo em porções superior e inferior).

Os raios X são os tipos de energia utilizados na TC. A energia é produzida em uma ampola, e um conjunto de detectores giram em torno do paciente, capturando as imagens. Na TC, o tubo de raios X gira 360^o em torno da estrutura desejada para o exame. A imagem obtida é chamada de tomográfica, isto porque a tomografia em grego significa "tomo = cortes"e "grafia = escrever", ou seja, as imagens são obtidas em cortes ou fatias. Ainda no equipamento, do lado oposto ao tubo de raios X tem um sistema detector de fótons que gira junto com o feixe de raios X. Nos tomógrafos mais modernos, o sistema detector é fixo. A quantidade de fótons capturados pelos detectores vai depender da espessura e da capacidade do objeto de absorver a energia dos raios X. Depois de capturar a interação dos raios X com o corpo do paciente, os detectores transformam os fótons em sinal analógico. Através de sistemas computadorizados e cálculos matemáticos, o sinal analógico é convertido em sinal digital e é processado para formar a imagem que será pós-processada digitalmente. A intensidade (brilho) reflete a absorção dos raios X e pode ser medida em uma escala (unidades Hounsfield) [10].

As imagens da TC são contruídas por dois processos: escaneamento e reconstrução. O escaneamento consiste em fazer com o que o tubo de raios X gire ao redor do paciente, onde o feixe de raios é atenuado, diferenciando as estruturas com a interação da energia com o corpo. Os detectores são atingidos por uma quantidade diferenciada de fótons. Em cada momento em que os fótons chegam aos detectores, os detectores medem o logaritmo da intensidade do sinal analógico. Já no processo de reconstrução, os sinais analógicos são lidos pelos detectores, que enviam este sinal para um convertor digital no sistema computacional. Após essa conversão em sinais digitais, a imagem é produzida.

Para realizar o exame, a pessoa deita em uma maca especial que se desloca pela abertura de um aparelho circular de raios X. O aparelho gira em volta da pessoa enquanto registra, em ângulos e posições diferentes, imagens semelhantes às radiografias, porém, bem mais detalhadas. O exame pode durar entre 15 e 30 minutos.

5.2 Breve histórico da Tomografia Computadorizada

A história da TC tem início no ano de 1961, através das primeiras experiências do neurologista norte-americano William Henry Oldendorf, que não tiveram êxito pela ausência de um suporte matemático teórico que permitisse o processamento das imagens adquiridas.

No período entre 1963 e 1964, Allan MacLeod Cormack, um físico sul-africano naturalizado norte-americano, constituiu o método matemático necessário para reproduzir essas imagens. A partir dos princípios definidos por Oldenford e Cormack, o engenheiro Godfrey Newbold Hounsfield desenvolveu uma forma de reconstruir imagens a partir dos raios X por meio da tomografia axial computadorizada.

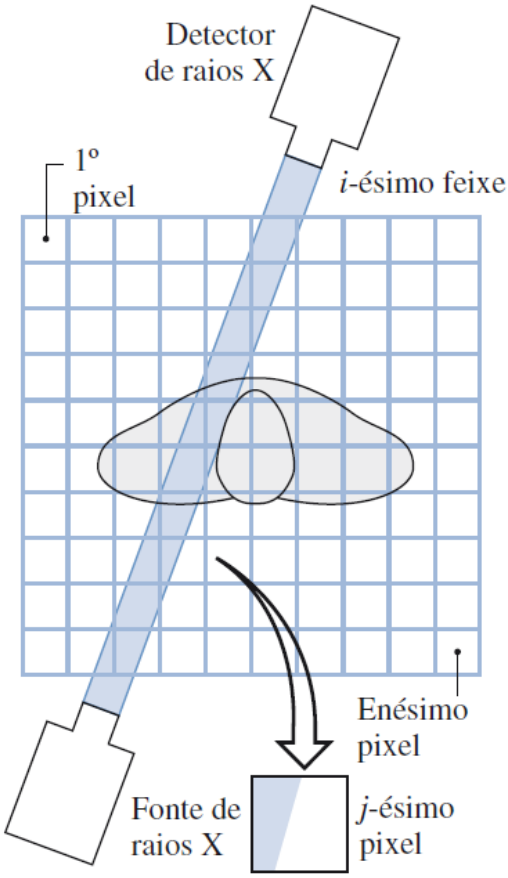
No Brasil, o primeiro tomógrafo computadorizado foi instalado no Hospital Beneficência Portuguesa, na cidade de São Paulo. A primeira avaliação realizada através de um tomógrafo foi em uma mulher de 41 anos com um tumor do lobo frontal esquerdo no dia 1^o de outubro de 1971. Atualmente, a TC é um dos exames diagnósticos por imagem mais solicitados em vários países. Isso se explica pelo fato de a técnica permitir uma visualização detalhada de órgãos e estruturas anatômicas, a um custo bem menor do que uma ressonância magnética [10].

A quantidade de imagens geradas depende do número de canais do aparelho. Esses canais são como fileiras de detectores, ligados ao tubo de raios X. Com auxílio de um software específico, o computador transforma o sinal analógico em digital e, em seguida, em imagem. As imagens originadas pela TC são formadas por pixels (pixel é o menor ponto de uma imagem digital). A união de pixels, em arranjos de linhas e colunas forma uma matriz. Sendo assim, uma matriz, na imagem originada pela TC, é um conjunto de pixels rearranjados. Esse rearranjo é importante para a qualidade das imagens geradas, pois vai impactar diretamente na resolução das mesmas. Quanto maior a matriz, melhor a resolução espacial da imagem digital [4].

A imagem que será reconstruída é de uma fatia, com certa espessura, da amostra que se está fazendo a tomografia, pois seria impossível medir as atenuações em um corte adimensional. Iniciaremos a modelagem da reconstrução da imagem da seção transversal (s.t.) dividindo a seção da qual queremos a imagem em uma malha em N quadrados numerados, $1, 2, \ldots, N$, conforme exemplificado na figura 5.1.

Cada uma das divisões da malha representa um pixel (elemento de imagem) na imagem a ser gerada . Quando o feixe de fótons atravessa o objeto medimos sua intensidade no ponto de entrada e no ponto onde deixa o objeto e assim obtemos uma estimativa total do coeficiente de atenuação do feixe dentro do objeto, conforme representado na figura. Suponhamos ainda que a função que mede a atenuação linear será constante em cada pixel mesmo que a região correspondente a esse pixel seja composta por materiais diferentes.

Figura 5.1: Seção da imagem divida em quadrados



Fonte: [1]

A figura mostra um único pixel sendo atravessado, em um sentido paralelo aos lados, por um feixe de raios X de aproximadamente a mesma largura do pixel. Os fótons que constituem o feixe de raios X são absorvidos pelo tecido dentro do pixel em uma taxa proporcional a densidade de raios X do tecido. Quantitativamente, a densidade de raios X do j-ésimo pixel é denotada por x_j e é definida por

$$x_j = \ln\left(\frac{\text{número de fótons entrando no j-ésimo pixel}}{\text{número de fótons saindo do j-ésimo pixel}}\right)$$

Podemos pensar na propriedade logarítmica

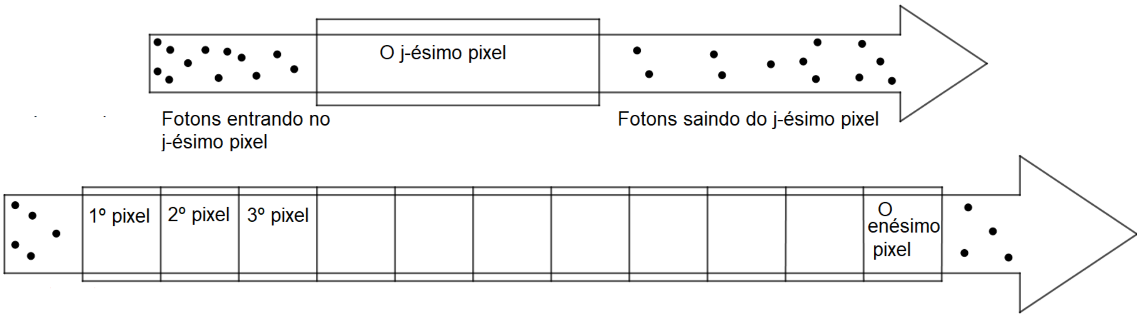
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

e com isso temos que

$$x_j = -\ln(\text{fração de fótons que passa pelo j-ésimo pixel sem ser absorvida})$$

Se o feixe de raios X passa por uma fileira inteira de pixels, então o número de fótons saindo de um pixel é igual ao número de fótons entrando em um próximo pixel na fileira.

Figura 5.2: Feixes de raios X



Se esses píxeis são numerados $1, 2, 3, \ldots, n$, então pela propriedade aditiva da função logarítmica, temos

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \ln\left(\frac{\text{número de fótons entrando no primeiro pixel}}{\text{número de fótons saindo do enésimo pixel}}\right)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = -\ln(\text{fração de fótons que passa pela linha de n pixels sem ser absorvida})$$

A partir de tal processo obtemos as incógnitas das equações do processamento das imagens geradas pela tomografia. Para determinar a densidade de raios X total de uma fileira de pixels, simplesmente somamos as densidades dos pixels individuais.

A densidade de feixe do i-ésimo feixe de um escaneamento é denotada por b_i e é dada por:

$$b_i = \ln\left(\frac{n^o \text{ de fótons do i-ésimo feixe entrando no detector sem ter a s.t. no campo de visão}}{n^o \text{ de fótons do i-ésimo feixe entrando no detector com a s.t. no campo de visão}}\right)$$

$$b_i = -\ln(\text{fração de fótons do i-ésimo feixe que passa pela s.t. sem ser absorvida})$$

Para cada feixe que passa paralelamente por dentro de uma fileira de pixels, devemos ter que a fração de fótons do feixe que passa pela fileira de píxeis sem ser absorvida será igual a fração de fótons do feixe que passa pela secção transversal (uma dada "fatia"do tecido) sem ser absorvida.

Assim, se o i-ésimo feixe passa paralelamente por dentro de uma fileira de pixels, então teremos,

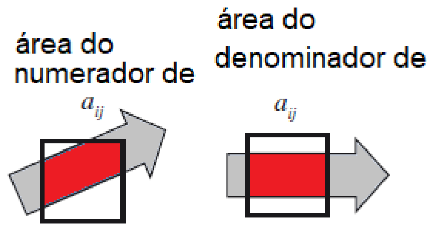
$$x_1 + x_2 + ... + x_n = b_i$$

Na equação acima b_i é conhecida pelas medidas de calibração e clínicas que são feitas, e $x_1, x_2, ..., x_n$, são densidades desconhecidas de pixels que deverão ser determinadas.

Iremos definir a_{ij} usando o método da área como

Figura 5.3: Método da Área

$$a_{ij} = \left(\frac{\text{área do } i\text{-ésimo feixe que fica no } j\text{-ésimo pixel}}{\text{área do } i\text{-ésimo feixe que ficaria no } j\text{-ésimo pixel se o } i\text{-ésimo feixe atravessasse o } j\text{-ésimo pixel paralelamente aos lados}} \right)$$



Fonte: [1]

Com isso já podemos escrever o conjunto de M equações de feixe de um escaneamento completo. Desta forma teremos o sistema linear de M equações (as M equações de feixe) em N incógnitas (as N densidades de pixel).

Podemos ter $M > N$, $M = N$ ou $M < N$. Iremos considerar o caso em que o sistema será sobredeterminado, ou seja, $M > N$, onde haverá mais feixes do que pixels.

5.3 Técnica de Reconstrução Algébrica

Iremos usar a técnica de reconstrução algébrica (TRA), que é um método derivado de uma técnica iterativa originalmente introduzido por S. Kaczmarz que consiste em resolver sistemas sobredeterminados, que são sistemas que apresentam mais equações que incógnitas.

O Algoritmo:

Passo 1: Escolher algum ponto inicial aleatório, o qual será chamado de X_0.

Passo 2: Projetar o ponto X_0 perpendicularmente na reta r_1. Essa projeção originará o ponto $X_1^{(1)}$. O expoente (1) indica a primeira rodada do algoritmo.

Passo 3: Projetar o ponto $X_1^{(1)}$ perpendicularmente na reta r_2. Essa projeção originará o ponto $X_2^{(1)}$.

Passo 4: Projetar o ponto $X_2^{(1)}$ perpendicularmente na reta r_3. Essa projeção dará origem ao ponto $X_3^{(1)}$.

Passo 5: O ponto $X_3^{(1)}$ será o novo ponto X_0 e repetiremos todo o processo até a rodada em que a projeção ortogonal do novo ponto X_0 na reta r_1 coincida com o ponto X_1 obtido na rodada anterior.

Tal processo mostrará uma sequência de pontos em cada uma das retas r_1,r_2 e r_3. Por exemplo, na reta r_1 teremos a sequência $X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)}, \ldots$ ou seja, as projeções sobre a reta r_1 obtidas nas rodadas $1, 2, 3, \ldots$. Se essas retas não forem paralelas, cada sequência de pontos convergirá a um ponto da respectiva reta, se os pontos da nova rodada incidirem sobre pontos da rodada anterior teremos encontrado os pontos limites. Estes três pontos limites formam o chamado *ciclo-limite* do processo iterativo. Podemos mostrar que o ciclo-limite independe de X_0. Observemos que as três retas não têm uma interseção comum, de modo que as três equações não têm uma solução exata, contudo os pontos (x, y), que estarão nas retas, bem próximos ao ciclo-limite, podem ser considerados soluções aproximadas do sistema em questão.

Tomemos três equações para ilustrar um problema em uma máquina de tomografia computadorizada. Consideremos um sistema sobredeterminado, de modo que as retas não sejam paralelas entre si.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = -2 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Devemos começar a resolução mostrando que as retas não são paralelas, colocando-as em sua forma reduzida.

$$r_1 : y = 2 - x$$

$$r_2 : y = 1 + \frac{x}{2}$$

$$r_3 : y = -3 + 3x$$

Observe que

$$m_{r_1} = -1, \qquad m_{r_2} = \frac{1}{2}, \qquad m_{r_3} = 3$$

Como seus coeficientes angulares não são iguais, as retas não serão paralelas.

Passo 1: Escolheremos um ponto inicial arbitrário, o ponto $X_0 = (1, 3)$.

Passo 2: Como a projeção de X_0 será ortogonal, vamos achar o coeficiente angular da reta perpendicular à reta r_1.
É sabido que $m_{r_1} = -1$ então, $m \cdot m_{r_1} = -1$, logo $m = 1$.

Usando a equação fundamental da reta,

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

acharemos a reta perpendicular a r_1 que contém o ponto X_0.
Note que x_0 e y_0 são a abscissa e a ordenada do ponto X_0, com isso teremos

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 1)$$

$$y - 3 = x - 1$$

$$y = x - 1 + 3$$

$$y = x + 2$$

Resolvendo o sistema abaixo, o qual representa a interseção da reta r_1 com a sua perpendicular passando por X_0, encontraremos $X_1^{(1)}$.

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ y = 2 + x \end{cases}$$

Usando o método da comparação, temos :

$$2 - x = x + 2$$

$$2x = 0$$

$$x = 0 \qquad .$$

Com isso obtemos o ponto $X_1^{(1)} = (0, 2)$

Passo 3: Achar a projeção ortogonal do ponto $X_1^{(1)} = (0, 2)$ na reta r_2. Podemos ver que

$$m_{r_2} = \frac{1}{2}$$

$$m \cdot m_{r_2} = -1$$

$$m \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$m = -2 \qquad .$$

Usando novamente a equação fundamental da reta, obteremos $y - 2 = -2(x - 0)$, $y = -2x + 2$

Resolvendo o sistema entre as retas, ou seja,

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ y = 1 + \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

e usando o método da comparação, teremos:

$x = \dfrac{2}{5}$ e $y = \dfrac{6}{5}$

Com isso, encontramos o ponto $X_2^{(1)} = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$.

Passo 4: Vamos achar a projeção do ponto $X_2^{(1)} = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$ na reta r_3. Como $m_{r_3} = 3$, teremos $m \cdot 3 = -1$, com isso $m = \dfrac{-1}{3}$.

Usando a equação fundamental da reta, obteremos :

$y - \dfrac{6}{5} = \dfrac{-1}{3} \cdot \left(x - \dfrac{2}{5}\right)$, e assim teremos a equação $3y = -x + 4$.

Resolvendo o sistema

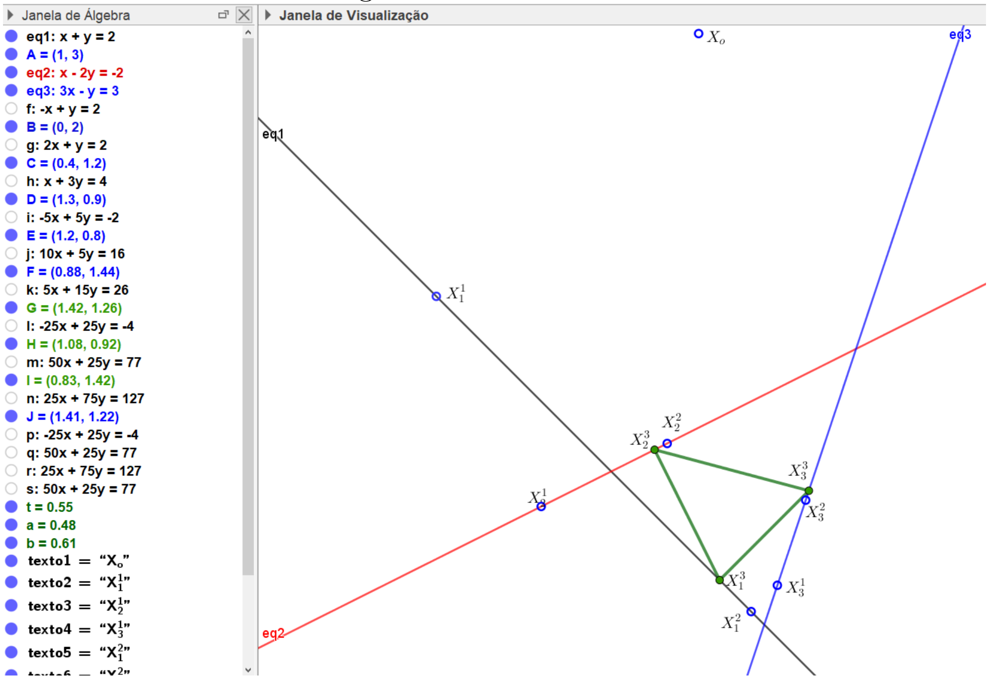
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

encontramos a solução $X_3^{(1)} = \left(\dfrac{13}{10}, \dfrac{9}{10}\right)$.

Finalizada a primeira rodada, encontramos o primeiro ponto de cada uma das três sequências que serão obtidas sobre as retas r_1, r_2 e r_3.

Seguindo tal processo, encontraremos os pontos $X_1^{(*)}, X_2^{(*)}$ e $X_3^{(*)}$, que são, respectivamente, os pontos de convergência das sequências sobre as retas r_1, r_2 e r_3. Já vimos que esses três pontos formam o ciclo-limite do processo iterativo. Também já vimos que uma boa aproximação do ciclo-limite pode ser usada como uma solução aproximada do sistema linear. Veja a Figura 5.4, a qual representa o exemplo que acabamos de estudar. Vale lembrar que essas retas já tinham sido constuídas, sem auxílio de programa computacional, no capítulo sobre Função polinomial do 1º grau.

Figura 5.4: Ciclo Limite



Resolveremos novamente o sistema dado, agora usando fórmulas matriciais.

A expressão matricial da reta

$$a_1 \cdot x + a_2 \cdot y = b$$

será dada por

$$A^t X = b$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Teorema 5.3.1. *Sejam r uma reta em $\mathbb{R}^2$ de equação $A^t \cdot X = b$ e X^* um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$. Então a projeção ortogonal X_p de X^* sobre r é*

$$X_p = X^* + \left(\frac{b - A^t X^*}{A^t \cdot A} \right) \cdot A$$

Demonstração: Considere que no sistema xOy, a reta r tem equação

$$r : a_1 \cdot x + a_2 \cdot y = b,$$

com a_1 e $a_2 \neq 0$, a qual pode ser reescrita na forma

$$r : y = -\frac{a_1}{a_2} \cdot x + \frac{b}{a_2}$$

Pelo Teorema 3.0.1, uma reta s, perpendicular à reta r, tem equação

$$s : y = \frac{a_2}{a_1} \cdot x + c$$

Suponha que a reta s passa pelo ponto $X^* = (x^*, y^*)$. Dessa forma, as coordenadas de X^* satisfazem a equação de s, ou seja,

$$y^* = \frac{a_2}{a_1} \cdot x^* + c \Rightarrow c = y^* - \frac{a_2}{a_1} \cdot x^*$$

Daí a equação de s no sistema xOy é

$$s : y^* = \frac{a_2}{a_1} \cdot x^* + y^* - \frac{a_2}{a_1} \cdot x^*$$

Observe que $X_p = (x_p, y_p)$, sendo a projeção ortogonal de X^* sobre r, é o ponto de interseção das retas r e s. Logo, suas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a_1 \cdot x - a_2 \cdot y = b \\ -a_2 \cdot x + a_1 \cdot y = a_1 y^* - a_2 x^* \end{cases}$$

cuja forma matricial, usando X_p é

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a_1 \cdot y^* - a_2 \cdot x^* \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Pode-se mostrar que a inversa de

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

é

$$\frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Multiplicando ambos os membros de (5.1) por (5.2), obtemos

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a_1 \cdot y^* - a_2 \cdot x^* \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto das matrizes no 2^o membro:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1 \cdot b - a_1 \cdot a_2 \cdot y^* + a_2^2 \cdot x^* \\ a_2 \cdot b + a_1^2 \cdot y^* - a_1 \cdot a_2 \cdot x^* \end{bmatrix}$$

Ajustando as entradas da segunda matriz:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1 \cdot b - a_1 \cdot a_2 \cdot y^* + a_2^2 \cdot x^* + a_1^2 \cdot x^* - a_1^2 \cdot x^* \\ a_2 \cdot b + a_1^2 \cdot y^* - a_1 \cdot a_2 \cdot x^* + a_2^2 \cdot y^* - a_2^2 \cdot y^* \end{bmatrix}$$

e arrumando as parcelas, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1 \cdot b - a_1^2 \cdot x^* - a_1 \cdot a_2 \cdot y^* + (a_1^2 + a_2^2) \cdot x^* \\ a_2 \cdot b - a_1 \cdot a_2 \cdot x^* - a_2^2 \cdot y^* + (a_1^2 + a_2^2) \cdot y^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} + \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1 \cdot b - a_1^2 \cdot x^* - a_1 \cdot a_2 \cdot y^* \\ a_2 \cdot b - a_1 \cdot a_2 \cdot x^* - a_2^2 \cdot y^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} + \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \left(\begin{bmatrix} a_1 \cdot b \\ a_2 \cdot b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1^2 \cdot x^* + a_1 \cdot a_2 \cdot y^* \\ a_1 \cdot a_2 \cdot x^* + a_2^2 \cdot y^* \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} + \frac{1}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}} \left(b \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - (a_1 \cdot x^* + a_2 \cdot y^*) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} + \frac{1}{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}} \left(b - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Sabendo que $X_p = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}; X^* = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; A^t = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$
obtemos

$$X_p = X^* + \left(\frac{b - A^t \cdot X^*}{A^t \cdot A} \right) \cdot A$$

□

Usando o exemplo anterior, tomando o mesmo ponto arbitrário $X_0 = (1, 3)$, e sendo b_k, $k = 1, 2, 3$, os coeficientes lineares das retas, teremos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$b_1 = 2,$ $\quad b_2 = -2$ $\quad$ e $\quad b_3 = 3$

Usaremos a fórmula

$$X_k^{(p)} = X_{k-1}^{(p)} + \left(\frac{b_k - A_k^t X_{k-1}^{(p)}}{A_k^t \cdot A_k} \right) \cdot A_k$$

onde $p = 1$ para a primeira rodada de iteração, $p = 2$ para a segunda rodada de iteração e assim por diante. Os valores $k = 1, 2, 3$ serão os índices das projeções ortogonais dos pontos nas retas r_1,r_2 e r_3.

Assim
$$X_1^{(1)} = X_0^{(1)} + \left(\frac{b_1 - A_1^t X_0^{(1)}}{A_1^t A_1} \right) \cdot A_1$$

$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = 0, y = 2$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 - 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$$

$$X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{2}{5}, y = \frac{6}{5}$$

$$X_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{6}{5} - \frac{6}{5} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \left(\frac{\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}} \right) \cdot \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \left(\frac{3}{10}\right) \cdot \begin{bmatrix} +3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix}$$

$$X_3^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{13}{10} \\ \\ \frac{9}{10} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{13}{10}, y = \frac{9}{10}$$

Com isso, finalizamos a primeira rodada do algotitmo. Vale lembrar que é preciso continuar a iteração, ou seja, fazer mais rodadas até encontrar uma boa aproximação do ciclo-limite.

Considerações Finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar formas de proporcionar relações entre alguns temas matemáticos do ensino médio. Cada vez mais, na prática cotidiana do ensino da Matemática, temos observado que os alunos demonstram pouca motivação e interesse para o estudo desta disciplina. Para fomentarmos esta motivação, uma possibilidade é tentarmos associar diversos temas matemáticos, fazendo com que estes façam sentido para o aluno, mostrando a aplicabilidade dos conteúdos no seu dia a dia de estudo.

Ao estudarmos funções, observamos que podemos auxiliar os alunos a utilizarem a ideia de Função para modelar fórmulas, principalmente na área da Geometria. Ao associarmos Função à Geometria, proporcionamos uma relação entre dois temas matemáticos que, em muitas ocasiões, são vistos de forma desconectada pelo aluno. Ao fazermos essa aproximação, observamos que os alunos sentem-se mais motivados e interessados, passando assim, a compreender melhor o motivo pelo qual é importante estudarmos ambos os assuntos.

No tocante ao estudo dos Logaritmos, observamos, pela lida cotidiana na sala de aula, que os alunos apresentam grande dificuldade para compreender tal conceito. Uma possibilidade para facilitar o interesse dos alunos por esta temática é mostrar como podemos encontrar os logaritmos em aspectos pertinentes para vida. Como exemplo, citamos a utilização do logaritmo para obtenção de notação científica aproximada, que é um conceito de grande importância nas áreas técnica e acadêmica.

Quando passamos ao estudo da Geometria Analítica, podemos associá-lo ao estudo da Geometria Plana, das suas construções geométricas. Observamos que, além da relação entre conceitos, podemos fazer uso de softwares computacionais, aspecto este que mostra-se muito motivador para o aluno, sobretudo pela proximidade que as novas gerações têm com as tecnologias da informação.

O estudo das Matrizes geralmente não desperta muito seu propósito pois o aluno não vê aplicação alguma. Observamos que, ao associarmos o estudo de todos esses conceitos ao conceito de matrizes, os alunos passam a compreender melhor sua utilidade, sobretudo quando transpomos tal conceito à aplicação em diversas áreas do conhecimento, como nas ciências biomédicas.

Por fim, ao relacionarmos todo conteúdo estudado usando o algoritmo para entender como são criadas as imagens de uma máquina de tomografia computadorizada, fazemos com que o aluno crie um significado para o processo, onde o mesmo vê como é importante observarmos exercícios de maneiras diferentes, usando conteúdos diferentes. Tal ideia deve ser estendida para os demais conteúdos estudados.

Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard; RORRES, Chris; *Álgebra Linear com aplicações.* (10). ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

[2] BOYER, Carl *História da Matemática.* (2). ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1986.

[3] COLLETTE, Jean *El Comienzo de las Matemáticas Modernas.* (1). ed. Espanha: Siglo XXI, 1985.

[4] DE PIERRO, Álvaro. Fundamentos matemáticos da tomografia computadorizada: Métodos de Transformação, Matemática Universitária, **11**, p. (53)-(65), (1990).

[5] GOGTAY, Nitin; GIEDD, Jay; LUSK, Leslie. Dynamic mapping of human cortical development during childhood throught early adulthood, PNAS, **25;101(21)**, p. (8174)-(8179), (2004).

[6] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; *Fundamentos de Matemática Elementar 1: Conjuntos, Funções.* (7). ed. São Paulo: Atual, 2004.

[7] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo, MURAKAMI, Carlos; *Fundamentos de Matemática Elementar 2: Logaritmos.* (7). ed. São Paulo: Atual, 2004.

[8] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; *Fundamentos de Matemática Elementar 4: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas.* (7). ed. São Paulo: Atual, 2004.

[9] IEZZI, Gelson; *Fundamentos de Matemática Elementar 7: Geometria Analítica.* (7). ed. São Paulo: Atual, 2004.

[10] JUNIOR, Edson; YAMASHITA, Helio. Aspectos básicos de tomografia computadorizada e ressonância magnética, Brazilian Journal of Psychiatry, **23 Supl I**, p. (2)-(3), (2001).

[11] MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. *História da Matemática: uma prática social de investigação em construção*, Educação em Revista, v. **36**, (2002).

[12] SOARES, Evanildo. *Uma investigação sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula*, Dissertação(PROFMAT) UFRN, Natal, (2011).

[13] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo; *Álgebra Linear*. (2). ed. São Paulo: Pearson, 2010.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA
CEP: 44380-000
Telefone: (75) 3621-2350
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>