Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

Uma Proposta Didática do Uso de um Método Iterativo para Resolução de Equações Polinomiais no Ensino Médio

Dilmara Mauricio do Carmo

Cruz das Almas-Bahia
Julho de 2019

Uma Proposta Didática do Uso de um Método Iterativo para Resolução de Equações Polinomiais no Ensino Médio

Dilmara Mauricio do Carmo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adson Mota Rocha

Cruz das Almas-Bahia

Julho de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

C287p Carmo, Dilmara Maurício do.

Uma proposta didática do uso de um método interativo para resolução de equações polinomiais no ensino médio / Dilmara Maurício do Carmo._ Cruz das Almas, BA, 2019.

51f.; il.

Orientador: Adson Mota Rocha.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Equações polinomiais. 2.Matemática – Estudo e ensino. 3.Ensino médio – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas – UFRB.
Responsável pela Elaboração – Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário – CRB5 / 1615).
Os dados para catalogação foram enviados pela usuária via formulário eletrônico.

Uma Proposta Didática do Uso de um Método Iterativo para Resolução de Equações Polinomiais no Ensino Médio

Dilmara Mauricio do Carmo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de Julho de 2019.

Banca examinadora:

Adson Mota Rocha

Prof. Dr. Adson Mota Rocha (Orientador)
UFRB

Mª Amélia de P. B. Hohlenwerger

Profa. Dra. Maria Amélia de Pinho Barbosa
UFRB

Perfilino Jr.

Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Júnior
UFBA

A DEUS, meus pais, meu esposo Clerivan, meus amigos, meu orientador e professores que contribuíram de alguma forma para realização deste trabalho.

Agradecimentos

Em primeiro lugar meu agradecimento deve-se a Deus por oportunizar a realização de mais um sonho.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e incentivaram no meu crescimento tanto pessoal quanto profissional.

Ao meu amado esposo Clerivan Mascarenhas pelo amor, paciência, dedicação e companheirismo principalmente nos momentos mais difíceis para a conclusão do curso.

Ao meu orientador Prof. Dr Adson pela atenção, paciência, compreensão, parceria com críticas e sugestões na elaboração do trabalho e por ter acreditado no meu potencial.

A todos os Professores do Curso PROFMAT da Universidade Federal do Recôncavo Baiano, de Cruz das Almas, que cada uma a sua maneira contribuíram para o enriquecimento e aprofundamento dos meus conhecimentos matemáticos.

Aos todos meus colegas de turma pela troca de experiências e, em especial, Fabrícia, José, Otávio, Eduardo e Jorge que, de alguma forma, compartilharam seus conhecimentos e colaboraram para continuação do curso.

À Sociedade Brasileira de Matemática(SBM) e aos professores do IMPA pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Aos alunos que possibilitaram a aplicação da sequência didática e participaram de forma efetiva e comprometida deste estudo a qual resultou este trabalho.

Aos colegas de trabalho que, no momentos difíceis, colaboraram e incentivaram a minha continuação do curso.

Enfim, a todos citados ou não que, de alguma forma, contribuíram, direta ou indireta, para a confecção deste trabalho.

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo"

Galileu Galilei

Resumo

Nesta dissertação é apresentada uma proposta de atividade para resolução de equações polinomiais com grau maior que dois utilizando um método iterativo. Propomos que esta atividade seja realizada durante o ensino dos conteúdos de funções polinomiais no ensino médio. Neste sentido, buscamos apresentar uma fundamentação matemática à justificar o uso dos métodos iterativos, assim, iniciamos este trabalho com a apresentação de alguns conceitos sobre polinômios e a resolução de equações algébricas, em especial, as equações polinomiais de primeiro, segundo, terceiro graus e, posteriormente, alguns métodos iterativos para determinar zeros de equações algébricas, entre eles, o Método da Bisseção, o de Regula Falsi e o da Secante. O nosso propósito é despertar o processo de investigação usando o método de resolução de problemas no ensino médio, aliado a utilização dos recursos computacionais seja por softwares matemáticos ou aplicativos de celulares na visualização de alguns resultados de forma a contribuir para o desenvolvimento lógico-matemático e o pensar crítico do discente. Por fim, relatamos uma experiência prática da utilização desta sequência didática.

Palavras-chave: Equações Polinomiais; Ensino de Matemática; Ensino Médio; Métodos Numéricos.

Abstract

In this dissertation is presented a proposal of activity for solving polynomial equations with degree greater than two using an iterative method. We propose that this activity be carried out during the teaching of the contents of polynomial functions in secondary education. In this sense, we seek to present a mathematical foundation to justify the use of iterative methods. We started this work with some concepts about polynomials and solving algebraic equations, especially the polynomial equations of the first, second and third degree and then some iterative methods to determine zeros of algebraic equations, namely the Method of Bisection, that of Regula Falsi and that of Secant. Our purpose is to awaken the research process using the method of solving problems in high school, allied to the use of computational resources either by mathematical software or mobile applications in the visualization of some results in order to contribute to the logical-mathematical development and the critical thinking of the student. Finally, we report a practical experience of using this didactic sequence.
Keywords: Polynomial Equations; Mathematics Teaching; High school; Numerical Methods.

Sumário

Introdução

O trabalho de licenciar matemática no ensino básico no Brasil vem passando nas últimas décadas por vários questionamentos e mudanças tanto por medidas governamentais com criação de orientações pedagógicas e reformulações dos conteúdos a serem trabalhados, quanto por uma reformulação social e tecnológica que exigem empenhos dos professores para se adaptarem à estas turbulências e informações.

A busca sempre pela melhoria do ensino é que faz os professores procurarem cursos de capacitação almejando criar novas práticas a serem utilizadas no processo de ensino aprendizagem e construção do raciocínio lógico dedutivo. No que diz respeito a prática pedagógica com relação ao trabalho com os conteúdos, as orientações curriculares, elaborados a partir de discussões com especialistas da área, alunos e representantes da comunidade acadêmica, definem que:

> "a forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático - nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva."(BRASIL, 1999, pp. 69–70)

O problema de determinar as raízes de uma equação polinomial é, sem dúvida, abrangente e instigante para os alunos, introduzido desde o 8º ano do ensino fundamental. Sabemos que, para resolver, equações lineares, do tipo $ax+b=0$ é trivial a sua resolução, ou seja, aplicando o princípio aditivo e multiplicativo da igualdade chegamos a formula $x = -\frac{b}{a}$, com $a \neq 0$ e, quanto às não lineares é introduzido inicialmente a equação quadrática, isto é, do tipo $ax^2+bx+c=0$ e, neste caso, recorre-se à fórmula de Bháskara, bastante conhecida pelos discentes. Mas quando tratamos de equações polinomiais de grau maior que três necessitamos de técnicas numéricas que possibilitam determinar uma solução aproximada. Porém, mesmo sabendo da existência de fórmulas de resolução para equações genéricas de terceiro e quarto graus conhecidas, respectivamente, como fórmula de Cardano e de Ferrari, no entanto, a viabilidade da resolução das equações pelos métodos numéricos é mais interessante a ser apresentado do que estas fórmulas.

Um método iterativo consiste, de um modo geral, numa aproximação inicial que aplicada repetidas vezes a partir desta produz um valor próximo da solução exata e num processo de obter sucessivamente novas iteradas x_{n+1} a partir das anteriores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Esses métodos estão associados aos conceitos de iteração (ou aproximação sucessiva) que, em sentido lato, significa a repetição sucessiva de um processo.

A temática de usar métodos iterativos para determinação de raízes de equação polinomiais no ensino médio vem sendo bastante discutido, em especial nos trabalhos finais do curso de mestrado profissional em matemática. Nos trabalhos de Santos (2017), Souza (2017) e Nascimento (2015) foram realizados estudos e discussões sobre os métodos numéricos através de uma revisão bibliográfica e fizeram um enfoque da utilização em aplicações na física ou na própria matemática. Já os trabalhos de Carneiro (2015) e Afuso (2014) foram apresentadas aplicações contextualizadas para o uso do método numérico de Newton- Rapson, cuja preocupação é o estudo deste métodos numéricos e uma abordagem no ensino básico. No entanto, estes trabalhos apresentaram apenas sugestões de inclusão dos métodos iterativos no ensino básico. Durante a nossa pesquisa identificamos o trabalho de Matos (2014), que apresentava uma proposta didática para o estudo de equações do terceiro grau no ensino médio a partir da equação de Van Der Waals como objetivo de inserir na prática pedagógica o método de resolução de problemas.

Nessa perspectiva, o presente trabalho apresenta uma proposta didática do uso de métodos iterativos, em especial o método da Bisseção, para aplicar no ensino médio com finalidade de explorar os conceitos relacionados a equações polinomiais e a determinação de suas raízes. Propomos por meio de um processo de investigação utilizar diferentes recursos tecnológicos e / ou linguagens que auxiliam no trabalho do educador de forma a contribuir para processo de ensino e aprendizagem, além disso, buscar o desenvolvimento e o pensar crítico do discente.

A utilização dos computadores, calculadoras e/ ou celulares vinculamos, apenas, ao cálculo, ao estudo da análise de gráficos e a procura de raízes de equações polinomiais como afirma orientações curriculares sobre o uso da tecnologia como ferramenta para entender a matemática

> "os programas de expressão apresentam recursos que provocam, de forma muito natural, o processo que caracteriza o pensar matematicamente, ou seja, os alunos fazem experimentos,testam hipóteses, esboçam conjecturas, criam estratégias para resolver problemas"(BRASIL, 1999, pp. 88).

A escolha do método iterativo surgiu devido a um questionamento durante a prática do ensino da matemática referente ao cálculo de raízes de equações polinomiais do 3º grau. De maneira geral, não são trabalhadas técnicas e nem há discussão sobre a análise de raízes de equações polinomiais com grau maior que dois no ensino médio, principalmente quando as raízes são irracionais. Utilizar destes questionamentos e retornar aos estudantes como forma de pesquisa, pode-se levantar a necessidade de busca de novos conhecimentos. Nessa perspectiva, segue a concepção de ensino visualizada nas orientações curriculares como sendo:

> "...a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação problema ao aluno..."(BRASIL, 1999, pp.81).

Ainda neste trabalhos, mais especificamente, visamos:

- Resolver equações polinomiais utilizando o métodos de bisseção;
- Motivar o estudo do conteúdo de equações algébricas;
- Contribuir para tornar a Matemática mais atrativa, interessante e estimulante, sendo fundamental na formação do discente na atualidade;
- Inserir recursos tecnológicos nas aulas de matemática.

Dividimos nosso trabalho em quatro capítulos. No Capítulo 1, fizemos uma breve introdução aos polinômios, equações polinomiais ou algébricas, raízes de polinômios, apresentando fórmulas para as equações de 1º, 2º e 3º graus, as relações de Girard e ainda polinômios com raízes racionais. No Capítulo 2, primeiramente, enunciamos os teoremas que serão fundamentais para o uso dos métodos iterativos e que permitem obter uma estimativa de erro para um valor aproximado da raiz pretendida e, posteriormente, introduzimos alguns métodos iterativos para solução de equações não lineares, em especial os métodos da bisseção, da secante e regula falsi, também chamado de método da posição falsa. No Capítulo 3, apresentamos a proposta didática de forma compactada e os respectivos objetivos e estratégias de cada etapa. No Capítulo 4, apresentamos um relato de experiência com a socialização das impressões obtidas durante a aplicação da sequência didática. E finalmente, acrescentamos ao trabalho as considerações finais.

Capítulo 1

Polinômios e Equações Algébricas

Neste capítulo faremos uma breve exposição do conteúdo polinômios, equações polinomiais e suas raízes no conjunto dos números reais. Veremos a definição de polinômio, o grau de polinômio, seu valor numérico, polinômio nulo e polinômios idênticos, além das operações: adição, multiplicação e divisão de polinômios. Em seguida, apresentaremos a definição de equações algébricas, raiz, conjunto solução, equações equivalentes, número de raízes e o teorema fundamental da álgebra. E, concluímos o capítulo com a explanação da multiplicidade de raiz, as relações de Girard e o estudo dos polinômios com raízes racionais. Cabe ressaltar que parte das demonstrações das propriedades dos polinômios não serão apresentados neste trabalho , no entanto são facilmente vistos em (IEZZI, 2009; DANTE, 2000; MEDEIROS et al., 2013).

1.1 Polinômios

Definição 1.1.1. *Um polinômio na variável real x é uma expressão composta da soma de produtos de constantes por potências inteiras positivas de x e sempre pode ser escrito na forma:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{1.1}$$

em que n é um número inteiro positivo ou nulo, a_i $i = 0, 1, 2, \dots, n$ são números reais chamados coeficientes e as parcelas $a_i x^i$, $i = 0, 1, 2, ..., n$, são os termos do polinômio.

Definição 1.1.2. *Dado*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{1.2}$$

não identicamente nulo,com $a_n \neq 0$, dizemos que o grau do polinômio corresponde a mais alta potência de x presente nesse polinômio e denotamos por $gr(P) = n$.

Exemplo 1.1.3. *$P(x) = 10$ ou $P(x) = 10x^0$ é um polinômio constante, ou seja, $gr(P) = 0$.*

$P(x) = 3x^3 + 8x^2$ é um polinômio do 3º grau, ou seja, $gr(P) = 3$.

Definição 1.1.4. *Quando é atribuído um valor fixo para x, digamos $x = \alpha(\alpha \in R)$, e calculamos*

$$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$$

dizemos que $P(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio para $x = \alpha$. E quando $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é raiz do polinômio $P(x)$.

Exemplo 1.1.5. *Considere o polinômio $P(x) = x^2 - 2x - 3$. Temos que*

$P(-1) = (-1)^2 - 2.(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$;

$P(0) = 0^2 - 2.0 - 3 = -3$

Definição 1.1.6. *Polinômio nulo ou polinômio identicamente nulo é aquele em que todos os seus coeficientes são iguais a zero ($P(x) \equiv 0$).*

Definição 1.1.7. *Sejam os polinômios F(x) e G(x) conforme abaixo:*

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$G(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i,$$

dizemos que dois polinômios F e G são iguais (ou idênticos) se,e somente se, os coeficientes de F e G forem ordenadamente iguais. Em símbolos, dizemos que

$$F(x) = G(x) \Leftrightarrow a_i = b_i, \ \forall i = 0, 1, 2, ..., n.$$

1.1.1 Operações com polinômios

Definição 1.1.8. *Sejam f(x) e g(x) dois polinômios:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i, \tag{1.3}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i, \tag{1.4}$$

chama-se soma de f com g o polinômio

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i.$$

Exemplo 1.1.9. *Sejam* $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^2 + 2x - 1$ *e* $g(x) = x^5 + 7x^2 - 3x + 6$*, então* $(f + g)(x) = x^6 + 4x^5 + 6x^2 - x + 5$.

Definição 1.1.10. *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *dois polinômios:*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i, \tag{1.5}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i, \tag{1.6}$$

, define-se o produto de dois polinômios: $(f.g)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + ... + a_mb_nx^{m+n}$

Considere o produto fg *como sendo o polinômio* $P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{m+n}x^{m+n}$ *cujo coeficiente* c_k*pode ser assim obtido:*

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + ... + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}.$$

Além disso, sabemos que o produto fg pode ser obtido multiplicando-se cada termo a_ix^i de f por cada termo b_jx^j segundo a regra $a_ix^i.b_jx^j = a_ib_jx^{i+j}$ e somando os resultados obtidos.

Exemplo 1.1.11. *Sejam* $f(x) = x - 1$ $(gr(f) = 1)$ *e* $g(x) = x^2 + 2x - 1$ $(gr(g) = 2)$*, então é possível verificar que* $(f.g)(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ $(gr(f.g) = 3)$.

Observe, ainda que, no produto de dois polinômios, o grau do produto é igual a soma dos graus dos polinômios f e g, logo se $f(x)$ tem grau m e $g(x)$ grau n, então $(fg)(x)$ terá grau $m + n$.

Definição 1.1.12. *Sejam* $P(x)$ *e* $D(x)$*, polinômios não nulos onde o grau de* $P(x)$ *é maior ou igual ao de* $D(x)$*, a divisão de* $P(x)$ *por* $D(x)$ *é determinada ao achar polinômios* $Q(x)$ *e* $R(x)$ *satisfazendo as seguintes condições:*

1. $P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$,
2. $R(x) = 0$ *ou* $gr(R) < gr(D)$,

onde $P(x)$ *é dito dividendo da divisão,* $D(x)$ *o divisor,* $Q(x)$ *o quociente e* $R(x)$ *o resto.*

Sabemos que um polinômio $P(x)$ de grau m é divisível por outro polinômio $D(x)$ de grau n, com $m > n$, se existir um polinômio $Q(x)$ tal que $P(x) = D(x).Q(x)$, neste caso $R(x) = 0$.

Exemplo 1.1.13. *Considere* $P(x) = x^3 - 8(gr(P) = 3)$ *e* $D(x) = x - 2(gr(D) = 1)$. $P(x)$ *é divisível por* $D(x)$ *pois* $gr(P) = 3$ *e* $gr(D) = 1$ *e existe* $Q(x) = x^2 + 2x + 4$ *tal que* $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3 - 8$.

A fim de calcular a divisão de polinômios, ou seja, determinar $Q(x)$ e $R(x)$, existem nos livros vários métodos para fazer esta divisão, dentre eles destacam-se o método da chave, método de Descartes, o Teorema do resto, o método de D'Alembert e, o mais utilizado, o algoritmo de Briot-Ruffini. Maiores explicações se encontram em (IEZZI, 2009). Como não é nosso objetivo discutir sobre estes métodos, apenas apresentaremos um exemplo utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffinni.

Exemplo 1.1.14. *Considere* $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 10x - 1$ *e* $D(x) = x - 3$. *Vamos dividir* $P(x)$ *por* $D(x)$ *através do dispositivo prático de Briot-Ruffinni.*

Primeiro passo: colocar a raiz do divisor e os coeficientes do dividendo em ordem decrescente, completando com zero os termos que não aparecem no polinômio, Figura 1.1:

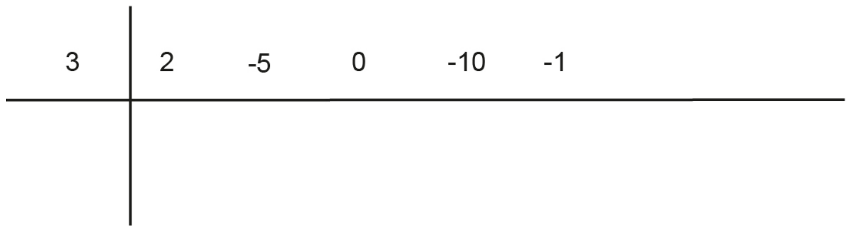

Figura 1.1: Primeiro passo do dispositivo de Briot-Ruffini (Exemplo 1.1.14).

Segundo passo: repetimos o primeiro coeficiente do dividendo conforme Figura 1.2 :

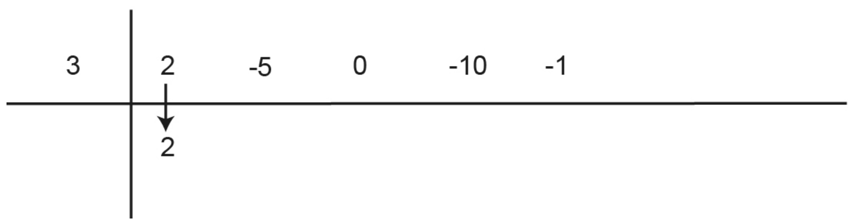

Figura 1.2: Segundo passo do dispositivo de Briot-Ruffini (Exemplo 1.1.14).

Terceiro passo: devemos multiplicar a raiz do divisor pelo coeficiente repetido e, em seguida, somamos o produto com o segundo coeficiente do dividendo, colocando o resultado abaixo deste, Figura 1.3:

Quarto passo: multiplicamos a raiz do divisor pelo número colocado abaixo do 2º coeficiente e somamos o produto com o 3º coeficiente, colocando o resultado abaixo deste, e assim sucessivamente, Figura 1.4:

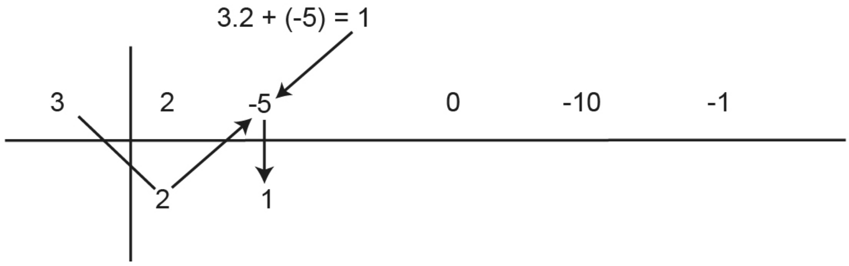

Figura 1.3: Terceiro passo do dispositivo de Briot-Ruffinni (Exemplo 1.1.14).

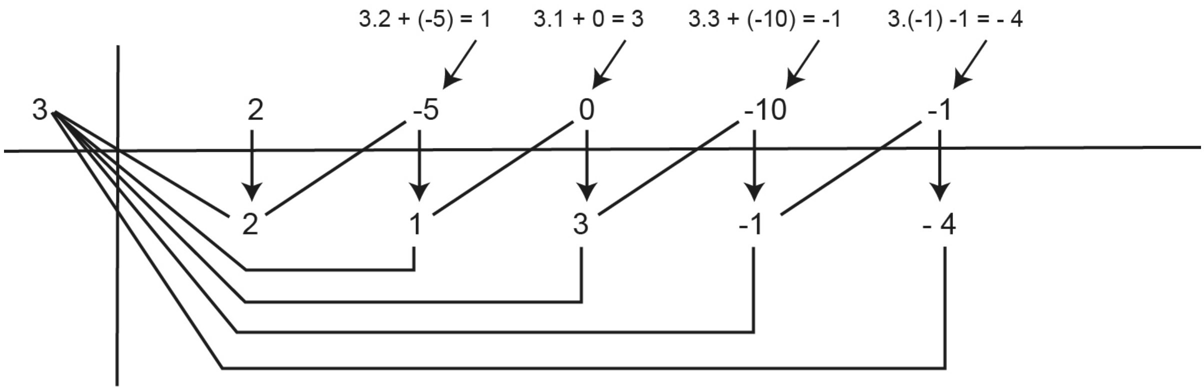

Figura 1.4: Quarto passo do dispositivo de Briot-Ruffinni (Exemplo 1.1.14).

Quinto e último passo: desenha-se um traço entre o último e o penúltimo números obtidos onde o último número representa o resto da divisão enquanto que os números que estão à esquerda deste são os coeficientes do quociente, Figura 1.5:

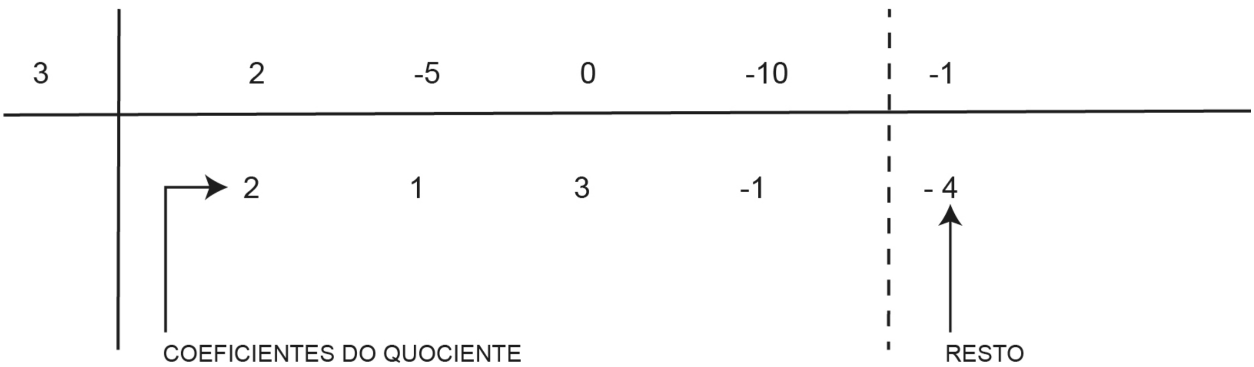

Figura 1.5: Quinto passo do dispositivo de Briot-Ruffinni (Exemplo 1.1.14).

Desta forma, concluí-se que $Q(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 1$ e $R(x) = -4$.

1.2 Equações Algébricas

Nesta seção, abordaremos sobre a resolução de Equações Polinomais, também conhecidas como Equações Algébricas. Apresentamos as fórmulas para determinar as raízes quando as equações são polinomiais de 1º, 2º e 3º graus, e alguns recursos para resolvê-las quando possuem grau maior que três.

Definição 1.2.1. *Uma equação algébrica ou polinomial é toda sentença aberta escrita da forma* $P(x) = 0$*, onde* $P(x)$ *é um polinômio com coeficientes reais.*

Assim, por exemplo, a sentença aberta $x^4 + 3x^3 - 2x - 1 = 5x^3 - 2x - 2$ é uma equação algébrica ou polinomial que ainda pode ser reescrita da forma $x^4 - 2x^3 + 1 = 0$.

Definição 1.2.2. *O número* α *é raiz de uma equação algébrica* $P(x) = 0$ *quando* $P(\alpha) = 0$

Exemplo 1.2.3. *Seja* $P(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ *e* $\alpha = 1$*. Como* $(1)^4 - 2.1^3 + 1 = 0$ *tem-se que* $\alpha = 1$ *é raiz da equação algébrica* $P(x) = 0$.

Definição 1.2.4. *Chama-se conjunto solução ou conjunto verdade da equação* $P(x) = 0$*, o conjunto formado por todas as raízes da equação* $P(x) = 0$*, e é representado por* S *ou* V.

Exemplo 1.2.5. *O conjunto solução da equação* $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ *é* $S = \{1, 2, -1\}$.

Agora veremos o que entende-se por resolução de uma equação, para isso precisamos do conceito de equações equivalentes.

Definição 1.2.6. *Duas equações polinomiais são equivalentes quando representam o mesmo conjunto solução, ou seja, toda raiz de uma equação é também raiz da outra.*

Há duas formas de transformar uma equação polinomial equivalente a outra:

1. Somar aos dois membros a mesma função polinomial (Princípio aditivo da igualdade) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$,

   Por exemplo, seja
   $$2x^2 - 2x + 1 = 3x - 2 \tag{1.7}$$
   Vamos considerar $h(x) = -3x + 2$. Assim,
   $$2x^2 - 2x + 1 - 3x + 2 = 3x - 2 - 3x + 2,$$
   simplificando, temos:
   $$2x^2 - 5x + 3 = 0 \tag{1.8}$$
   Decorre que (1.7) é equivalente a (1.8) e tem a mesma solução.

2. Multiplicar os dois membros pelo mesmo número real k ($k \neq 0$), (Princípio multiplicativo da igualdade)

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow k.f(x) = k.g(x)$$

Por exemplo, $2x^3 - 4x + 1 = 0$ e $6x^3 - 12x + 3 = 0$ são equivalentes pois a segunda equação foi obtida da primeira equação através da multiplicação por 3.

Vejamos agora alguns casos particulares de resolução de equações algébricas:

1.2.1 Equação Linear

Iniciamos com a equação mais simples, consideramos a equação linear (ou equação polinomial de 1º grau), escrita por

$$ax + b = 0, \tag{1.9}$$

com $a \neq 0$.

A resolução de (1.9) é bem simples. Utilizando o princípio aditivo, somando o oposto de b aos dois membros da igualdade temos

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b),$$

assim,

$$ax = -b$$

e , em seguida, multiplicamos cada membro da equação pelo inverso de a. Logo,

$$ax.\frac{1}{a} = -b.\frac{1}{a}$$

e, portanto, a solução da equação linear de (1.9) é

$$x = -\frac{b}{a}. \tag{1.10}$$

1.2.2 Equação Quadrática

Agora vejamos a resolução de uma equação do segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.11}$$

com coeficientes a, b e c, com $a \neq 0$.

Resolvendo (1.11), temos as equações equivalentes:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c + (-c) = 0 + (-c) &\Leftrightarrow \\ ax^2 + bx = -c &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{a}.(ax^2 + bx) = \frac{1}{a}.(-c) &\Leftrightarrow \\ \frac{1}{a}.(ax^2) + \frac{1}{a}.(bx) = -\frac{c}{a} &\Leftrightarrow \\ x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

Utilizando o método de completar quadrado e, neste caso, basta adicionar $(\frac{b}{2a})^2$ a ambos os membros da equação, obtêm-se:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} & \Leftrightarrow \\ x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 &= -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2 & \Leftrightarrow \\ (x + \frac{b}{2a})^2 &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} & \Leftrightarrow \\ (x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} & . \end{aligned}$$

Chamando o numerador do segundo membro da equação de discriminante, representado pela letra grega

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

e resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned} (x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} & \Leftrightarrow \\ (x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} & \Leftrightarrow \\ (x + \frac{b}{2a}) &= \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} & \Leftrightarrow \\ (x + \frac{b}{2a}) &= \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

Aplicando, novamente, o princípio aditivo da igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} x + \frac{b}{2a} + (-\frac{b}{2a}) &= \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} + (-\frac{b}{2a}) & \Leftrightarrow \\ x &= (-\frac{b}{2a}) \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{aligned}$$

E separando os sinais acima obtemos

$$\begin{cases} x_1 &= & (-\frac{b}{2a}) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ & \text{ou} & \\ x_2 &= & (-\frac{b}{2a}) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \end{cases} \tag{1.12}$$

que são as raízes da equação quadrática, e a fórmula (1.12) é conhecida como *Fórmula de Bháskara.*

Observação 1.2.7. *Se os coeficientes a, b e c são reais, deduz-se da fórmula* (1.12)*, que:*

I. *A equação terá duas raízes reais e distintas se, e somente se,* $\Delta > 0$.

II. *A equação terá duas raízes reais e iguais se, e somente se,* $\Delta = 0$.

III. *A equação terá raízes complexas distintas conjugadas se, e somente se,* $\Delta < 0$.

1.2.3 Equação Polinomial de Terceiro Grau

O método de Cardano e Tartaglia resolve equações do terceiro grau escritas na forma $x^3 + px + q = 0$. Em (LIMA, 1991) as equações $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ podem ser reduzidas via mudança de variáveis até que se obtenha uma equação do terceiro grau sem o termo do segundo grau obtendo a seguinte formula:

Seja a equação do terceiro grau definida pela forma $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ sabemos que ela é equivalente a $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. Desta forma vamos considerar equações em que os coeficientes de x^3 é igual a 1. Assim, dada a equação

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.13}$$

fazendo a substituição x por $y - \frac{a}{3}$ na equação (1.13), teremos:

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a.(y - \frac{a}{3})^2 + b.(y - \frac{a}{3}) + c = 0,$$

resolvendo os produtos notáveis,temos:

$$y^3 - 3y^2.\frac{a}{3} + 3.y\frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + a.(y^2 - 2.y.\frac{a}{3} + \frac{a^2}{9}) + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0.$$

Reduzindo a termos semelhantes, obtemos :

$$y^3 - 3y^2.\frac{a}{3} + a.y^2 + 3.y.\frac{a^2}{9} - 2y.\frac{a^2}{3} + b.y - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{a.b}{3} + c = 0.$$

Cancelando os termos $-3y^2\dfrac{a}{3}$ e ay^2 e efetuando as operações necessárias com os termos semelhantes, temos:

$$y^3 + (b - \frac{a^2}{3}).y + \frac{2a^3}{27} - \frac{a.b}{3} + c = 0,$$

que é uma equação desprovida de termo do segundo grau. Desta forma, basta estudar as equações do terceiro grau do tipo

$$y^3 + py + q = 0 \tag{1.14}$$

Para resolvermos a equação (1.14), escrevemos $y = u + v$ e substituímos na equação. Assim,

$$(u + v)^3 + p.(u + v) + q = 0$$

resolvendo o produto notável, obtemos :

$$u^3 + v^3 + 3.u^2.v + 3.u.v^2 + p(u + v) + q = 0,$$

em seguida realizando a fatoração adequada, temos:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Portanto se conseguirmos achar os números u e v tais que :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u.v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3.v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

então $x = u + v$ será a raiz da equação $x^3 + p.x + q = 0$.

Sabemos que o problema de achar u^3 e v^3 já conhecendo sua soma e seu produto se torna fácil. Assim , u^3 e v^3 são as raízes da equação :

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Utilizando a fórmula resolutiva da equação quadrática temos $u^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ e

$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e, consequentemente,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (1.15)$$

é uma raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Estudando o radicando da fórmula (1.15), ou seja , $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, Podemos dizer que:

I) Se $D > 0$ a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas;

II) Se $D = 0$ tem três raízes reais e distintas;

III) Se $D < 0$ a fórmula exprime $x = u + v$ como soma de duas raízes cúbicas de números complexos.

Ainda é possível encontrar maiores detalhes na demonstração da fórmula e a discussão das raízes em (SANTOS, 2017).

1.2.4 Teorema Fundamental da Álgebra

Vejamos uma formulação algébrica e a garantia de existência de raízes com o Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 1.2.8. **[Teorema da decomposição]** *Todo polinômio $P(x)$ de grau n decompõe-se em fatores lineares da forma $(x - a)$ e um fator igual ao coeficiente de x_n. Ou seja,*

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $(a_n \neq 0)$ *pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau :* $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)....(x - r_n)$ *onde* $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ *são as raízes de P.*

Demonstração: A demonstração se encontra em (IEZZI, 2009, pp. 106-108) ■

Teorema 1.2.9. **[Teorema Fundamental da Álgebra]** *Toda equação algébrica de grau n, $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz real ou complexa.*

Demonstração: A demonstração segue diretamente do Teorema 1.2.8. ■

Na decomposição de um polinômio $P(x)$, se no produto de n fatores de $P(x)$ encontramos alguns que se repetem, então podemos agrupá-los e decompor o polinômio, da seguinte forma: $P(x) = a_n(x - \alpha_1)^{m_1}(x - \alpha_2)^{m_2}...(x - \alpha_k)^{m_k}$, onde $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

Dizemos que α_i é uma raiz de multiplicidade m_i. Quando $m_i = 1$, dizemos que α é raiz simples, quando $m_i = 2$, a raiz é dupla e assim sucessivamente.

Exemplo 1.2.10. *A equação* $(x+2)(x-3)^2 = 0$ *admite* -2 *e* 3 *como raízes simples e de multiplicidade 2, respectivamente.*

Observação 1.2.11. *As definições de multiplicidade de raízes, vale também para a equação algébrica:* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$

Vejamos nas próximas seções algumas técnicas que podem determinar raízes de equações algébricas.

1.2.5 Relações de Girard

As relações de Girard são relações entre os coeficientes e as raízes de um polinômio de grau n. Elas estão pautadas na igualdade entre a forma desenvolvida e a fatorada de um polinômio, comparando seus coeficientes.

A partir daí, vamos deduzir as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial de grau n.

Inicialmente, considere a equação quadrática $ax^2+bx+c = 0, (a \neq 0)$, com raízes x_1 e x_2 dadas por (1.12).

Usando a decomposição

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a[(x-x_1)(x-x_2)] \\ &= a[x^2 - x.x_1 - x.x_2 + x_1.x_2] \\ &= a[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1.x_2] \qquad \div (a) \\ &\Leftrightarrow \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 - (x_1+x_2)x + x_1.x_2 \end{aligned}$$

Utilizando a igualdade de polinômios, temos:

I. $-(x_1+x_2) = \dfrac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;

II. $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}$.

As identidades I e II são as relações de Girard para a equação quadrática.

Considere agora a equação cúbica $ax^3+bx^2+cx+d = 0, (a \neq 0)$, com as raízes x_1, x_2 e x_3 dadas por (1.15).

Usando a decomposição

$$\begin{aligned}
ax^3+bx^2+cx+d &= a[(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)]\\
&= a[x^3-x^2.x_1-x^2.x_2-x^2.x_3+x.x_1.x_2+x.x_2.x_3+x.x_1.x_3\\
&\quad -x_1.x_2.x_3]\\
&= a[x^3-x^2(x_1+x_2+x_3)+x(x_1.x_2+x_2.x_3+x_1.x_3)\\
&\quad -x_1.x_2.x_3] \qquad \div (a)\\
&\Leftrightarrow\\
x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} &= x^3-x^2(x_1+x_2+x_3)+x(x_1.x_2+x_2.x_3+x_1.x_3)-x_1.x_2.x_3
\end{aligned}$$

Utilizando a igualdade de polinômios, temos:

I. $-(x_1+x_2+x_3)=\frac{b}{a}\Rightarrow x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$;

II. $x_1.x_2+x_2.x_3+x_1.x_3=\frac{c}{a}$;

III. $-x_1.x_2.x_3=\frac{d}{a}\Rightarrow x_1.x_2.x_3=-\frac{d}{a}$.

As identidades I,II e III são as relações de Girard para a equação cúbica.

Generalizando, seja a equação $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, $(a_n\neq 0)$, com raízes $x_1,x_2,x_3,...,x_n$.

De maneira análoga, decompondo o polinômio

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n),$$

desenvolvendo o produto e colocando $x^n,x^{n-1},x^{n-2},x^{n-3}...x^{n-K}$ em evidência no desenvolvimento do produto, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2 &+ a_1x+a_0=a_nx^n-a_n(x_1+x_2+x_3+...+x_n)x^{n-1}\\
&+a_n(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}\\
&-a_n(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3}+\ldots\\
&+(-1)^ka_n\left(\sum x_{n_1}x_{n_2}\cdot\ldots\cdot x_{n_k}\right)x^{n-k}+\ldots\\
&+(-1)^na_n(x_1x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_n)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \ldots \quad + \quad & \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n} = x^n - (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)x^{n-1} \\ & +(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} \\ & -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3} + \ldots \\ & +(-1)^k \left(\sum x_{n_1}x_{n_2} \cdot \ldots \cdot x_{n_k}\right) x^{n-k} + \ldots \\ & +(-1)^n(x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \end{aligned}$$

Aplicando a igualdade de polinômios obtemos:

I. Soma das raízes:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}. \tag{1.16}$$

II. Soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}. \tag{1.17}$$

III. Soma de produtos das raízes tomadas três a três:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}. \tag{1.18}$$

IV. Soma de todos os produtos de k raízes:

$$\sum x_{n_1}x_{n_2} \cdot \ldots \cdot x_{n_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}. \tag{1.19}$$

V. Finalmente o produto das n raízes da equação polinomial:

$$x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \tag{1.20}$$

As identidades (1.16)-(1.20) compõem as *Relações de Girard.*

Exemplo 1.2.12. *Resolva a equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, sabendo que suas raízes estão em P.A.*

Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação.Como formam uma P.A., podemos representá-las como:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha - r \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \alpha + r \end{aligned}$$

Usando as relações de Girard, temos: $x_1 + x_2 + x_3 = 9 \Leftrightarrow \alpha - r + \alpha + \alpha + r = 9 \Leftrightarrow 3\alpha = 9 \Leftrightarrow \alpha = 3$. Assim, $x_2 = 3$ é uma das raízes e aplicando Briot Ruffini temos as outras raízes x_1 e x_3 são as raízes da equação quadrática $x^2 - 6x + 5 = 0$. Aplicando novamente as relações de Girard é facil ver que $x_1 = 1$ e $x_3 = 5$.

3	1	- 9	23	-15
	1	- 6	5	0

Figura 1.6: Dispositivo de Briot Ruffinni aplicado a equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$.

Observação 1.2.13. *As relações de Girard não são suficientes para obter raízes de equações polinomiais.*

1.2.6 Raízes Racionais de Equações Algébricas

Um método que permite pesquisar possíveis raízes racionais, consiste em investigar se $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros e primos entre si, é raiz de um polinômio de grau n com coeficientes inteiros.

Teorema 1.2.14. [Teorema das Raízes Racionais] *Considere* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 (a \neq 0)$, *de coeficientes inteiros. Este admite uma raiz racional* $\frac{p}{q}$, *em que* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+^*$ *e* p, q *são primos entre si , então* p *é divisor de* a_0 *e* q *é divisor de* a_n.

Demonstração: Se $\frac{p}{q}$ é uma raiz da equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, substituindo temos:

$$a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + a_{n-3}\frac{p^{n-3}}{q^{n-3}} + ... + a_2\frac{p^2}{q^2} + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0,$$

multiplicando a equação por q^n, obtemos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + a_{n-3}p^{n-3}q^3 + ... + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Isolando a_np^n e, em seguida, a_0q^n, temos:

I. $a_np^n = -q[a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + a_{n-3}p^{n-3}q^2 + ... + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}]$

II. $a_0q^n = -p[a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + ... + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}]$

Como $a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, p, q$ são todos inteiros, decorre que

$$m = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + a_{n-3}p^{n-3}q^2 + ... + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}$$

é inteiro e que

$$n = a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + ... + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

também é inteiro. Assim de (I) e (II) podemos dizer que $\dfrac{a_np^n}{q} = -m \in \mathbb{Z}$ e $\dfrac{a_0q^n}{p} = -n \in \mathbb{Z}$.

Desta forma,

I. a_np^n é divisível por q e, como p^n e q são primos entre si, segue que a_n é divisível por q.

II. a_0q^n é divisível por p e, como q^n e p são primos entre si, segue que a_0 é divisível por p. ■

Observe que se $a_n = 1$ as possíveis raízes racionais de $P(x)$ são inteiras. Podemos concluir também que este método não garante a existência de raízes racionais para $P(x)$ com coeficientes inteiros, apenas sugere um critério de pesquisa das mesmas, porém se existirem raízes racionais o Teorema 1.2.14 caracteriza estas raízes.

Exemplo 1.2.15. *Vamos encontrar as raízes de* $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

Conhecemos $a_0 = 6$ e $a_n = 1$, p é divisor de $a_0 = 6$, assim $p \in \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$. q é divisor de $a_n = 1$, logo $q \in \{-1, 1\}$. Portanto, as possíveis raízes racionais estão no conjunto $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3 - 6, 6\}$.

Substituindo cada uma delas verifica-se que $S = \{-1, 1, 2, -3\}$ é o conjunto solução.

Capítulo 2

Métodos Numéricos e Resolução de Equações Algébricas

Neste capítulo faremos uma exposição sobre alguns métodos iterativos, que constitui um dos conteúdos discutidos no ensino superior, com objetivo de calcular as raízes de equações $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é uma função não linear em x. Em especial, os polinômios de grau superior a 3 que servem de base para a sequência didática a ser aplicada em sala de aula do ensino médio. A escolha dos métodos apresentados nesta seção são de tal forma que podem ser aplicados em turmas do ensino básico sem a necessidade do conhecimento mais específico do cálculo, por exemplo os conceitos de derivação.

Sabemos que, em alguns casos, há possibilidade de se obter raízes exatas de equações algébricas $f(x) = 0$, como discutidos no Capítulo 1. No entanto, caso as raízes sejam irracionais e não seja possível aplicar uma fórmula temos que recorrer ao método de aproximações sucessivas das raízes.

Nos restringimos àquelas situações em que conseguimos através de técnicas numéricas obter uma solução aproximada tão próxima da desejada. Estas técnicas produzem uma sequência de aproximações dentro de um intervalo, partindo de uma aproximação inicial e utilizamos o processo repetidas vezes até chegarmos a uma aproximação do valor pretendido dentro de uma tolerância pré-fixada, conceitos estes que veremos a seguir.

2.1 Fases da Resolução

Para se calcular uma aproximação de uma raiz, duas etapas devem ser consideradas:

Isolamento: refere-se a localização ou isolamento das raízes que baseia-se na escolha de um intervalo $[a, b]$, que contenha apenas uma raiz. Nesta etapa pode-se esboçar um gráfico através de softwares matemáticos e/ou calculadoras gráficas e analisar os mesmos verificando as interseções dele com o eixo das abscissas.

Refinamento: consiste em melhorar o valor da raiz aproximada, refinando até o grau de exatidão requerido, ou seja, com a aproximação inicial x_0 encontrada no intervalo $[a, b]$, obter aproximações sucessivas x_k até se obter uma aproximação para raiz dentro de uma precisão pré-fixada, chamada tolerância.

Nesta etapa, são utilizados diversos métodos numéricos tais como método da bisseção, da posição falsa e das secantes e o que diferencia esses é a forma como se faz o refinamento. Estes métodos numéricos são chamados de métodos iterativos que consistem em uma sequência de comandos que são executadas etapa por etapa, algumas repetidas em ciclos e a execução de um ciclo dá-se o nome de iteração e as aproximações sucessivas são os termos iterados.

2.2 Localização de Raízes Reais em um Intervalo (Isolamento)

Como já vimos falando, muitos casos das equações algébricas não é possível calcular ou determinar uma raiz, no entanto sabemos da existência dela. Daí surge os métodos numéricos para obter aproximações destas raízes. Vamos analisar o comportamento de uma função $f(x)$ em um intervalo real $]a, b[$.

A princípio, iremos recordar importantes resultados da análise enunciados e demonstrados em (GUIDORIZZI, 2001). Iniciamos nosso estudo com o Teorema de Rolle, prosseguindo do Valor Intermediário e de Bolzano que serão importantes na aplicação dos métodos numéricos e localização de Raízes.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Rolle:). *Dada uma função f contínua num intervalo fechado [a, b] e derivável no intervalo aberto $]a, b[$ e se $f(a) = f(b)$, então existe c em $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: Primeiramente devemos observar que, se f é uma função constante para todo x no intervalo $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ no interior do intervalo. Assim, c pode ser qualquer ponto do intervalo $]a, b[$.

Suponhamos então que f não seja uma função constante em $[a, b]$. Como f, por hipótese, é contínua no intervalo fechado, então, pelo Teorema de Weierstrass (ver (GUIDORIZZI, 2001)), existem x_1 e x_2 em $[a, b]$, tais que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo de f em $[a, b]$.

Como f não é constante, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Assim, x_1 ou $x_2 \in]a, b[$, pois $f(a) = f(b)$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$. Note que se $x_1 = a, f(x_1) = f(a) = f(b) \neq f(x_2)$. Logo, $x_2 \in]a, b[$. Daí, $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$, pois $f'(x_1^+) = f'(x_1^-) = 0$ ou $f'(x_2^+) = f'(x_2^-) = 0$ (f é derivável em (a, b)). Portanto, existe um ponto c no interior ao intervalo, tal que $f'(c) = 0$. ■

Teorema 2.2.2 (**Teorema do Valor Intermediário:**). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração: Seja $g(x) = f(x) - d$, $x \in [a, b]$. Da continuidade de f sejam que g é contínua. Note que, $g(a) = f(a) - d < 0$ e $g(b) = f(b) - d > 0$. Ponha $a_1 = a$, $b_1 = b$ e $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Há três casos possíveis,

i) $g(m_1) = 0$; ii) $g(m_1) < 0$; iii)$g(m_1) > 0$.

O caso (i) fornece o ponto c procurado, isto é, basta fazer $c = m_1$. Se vale o caso (ii), defina $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. Então $g(a_2) = g(m_1) < 0$ e $g(b_2) = g(b_1) > 0$. Ponha $m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$. Isso remete aos casos $g(m_2) = 0$, $g(m_2) < 0$ e $g(m_2) > 0$. Novamente, no primeiro subcaso, tem-se o c procurado. Supondo $g(m_2) < 0$, tome $a_3 = m_2$ e $b_3 = b_2$. Donde, $g(a_3) < 0$ e $g(b_3) > 0$. Prosseguindo com este procedimento obtém-se uma sequência de intervalos $[a_n, b_n]$, encaixados, tais que $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, $g(a_n) < 0$ e $g(b_n) > 0$. Assim, o comprimento dos intervalos tendem a zero. Mas, pela teorema dos intervalos encaixados (ver (GUIDORIZZI, 2001)), existe um único $c \in [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim a_n = c = \lim b_n$.

Como g é contínua,

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(c) \leq 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(c) \geq 0,$$

como $g(c) \leq 0 \leq g(c)$ segue que $g(c) = 0$ e, consequentemente, $f(c) = d$. De maneira análoga, prova-se que tal ponto c existe quando $g(m_i) > 0$, para $i = 1, 2, ...n$. ■

Quando tomamos $d = 0$ no Teorema do Valor Intermediário, obtemos o conhecido Teorema de Bolzano, que também pode vir escrito na forma:

Teorema 2.2.3 (**Teorema de Bolzano:**). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a).f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, se a função contínua troca de sinal nos pontos a e b, então f tem um zero entre a e b.*

Demonstração: Se $f(a).f(b) < 0$ podem acontecer dois casos ou $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(b) < 0 < f(a)$. No primeiro caso segue imediatamente pelo Teorema 2.2.2 que existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$, como queríamos. No segundo caso, basta tomar $g(x) = -f(x)$, assim $g(a) < 0 < g(b)$ e aplicando novamente o Teorema 2.2.2 tem-se $c \in]a, b[$, com $g(c) = 0 = -f(c)$, como queríamos provar. ■

Ao leitor que tem interesse em aprofundar na fundamentação sobre sequências, limites, continuidade e derivadas recomendamos as referências (LIMA, 2006; GUIDORIZZI, 2001; LEITHOLD, 1994).

No caso de uma função polinomial, sabemos que satisfaz as hipóteses de continuidade exigidas nos teoremas. Assim podemos concluir que:

I. Se $P(a)$ e $P(b)$ tem mesmo sinal, então $P(x)$ possui um número par de raízes reais ou não existem raízes no intervalo $]a, b[$.

II. Se $P(a)$ e $P(b)$ tem sinais contrários, então $P(x)$ possui um número ímpar de raízes reais no intervalo $]a, b[$.

Observação 2.2.4. *Na prática de sala de aula para alunos do ensino básico usaremos a linguagem abaixo para melhor entendimento:*

I. $P(x)$ *"cruzou"o eixo x um número par de vezes ou não "cruzou"o eixo x.*

II. $P(x)$ *"cruzou"o eixo x uma vez ou um número ímpar de vezes.*

Recomendamos a demonstração dos itens I. e II. presentes em (IEZZI, 2009, pp.134-135).

Exemplo 2.2.5. *A equação $x^3 + 5x^2 - 3x + 4 = 0$ no intervalo $]0, 1[$, pelo Teorema de Bolzano, pode ter duas ou nenhuma raiz no intervalo sugerido pois $P(0) = 4 > 0$ e $P(1) = 7 > 0$ enquanto que a equação $x^3 - 3x^2 + 7x + 1 = 0$ no intervalo $]-1, 1[$, também pelo Teorema de Bolzano, pode ter uma ou três raízes reais no intervalo dado pois $P(-1) = -10 < 0$ e $P(1) = 6 > 0$.*

2.3 Tolerância e Critério de Parada

Uma vez que o processo de refinamento gera uma sequência infinita, para se obter um aproximação exata da raiz são feitos testes que chamamos de critérios de parada. Podemos definir a tolerância (ε) como uma estimativa para o erro da aproximação da raiz. Normalmente toma-se $\varepsilon = 10^{-m}$, onde m é o número de casas decimais que queremos para determinar a raiz. Os seguintes testes de paradas podem ser utilizados:

- $|f(x_{k+1})| < \varepsilon$ que é o erro função;
- $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ que é uma forma de obter o erro absoluto, visto que não possuímos a solução exata.
- $\dfrac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{K+1}|} < \varepsilon$ que é o erro relativo.

E x_k e x_{k+1} são duas aproximações consecutivas para raiz. Caso um dos testes seja satisfeito truncamos o processo de refinamento e x_{k+1} é a raiz procurada, isto é, tomamos $\alpha = x_{k+1}$, o valor aproximado da raiz na $k+1$-*ésima* iteração e, ε a precisão desejada.

Observação 2.3.1. *1. Nem sempre é possível ter as exigências dos testes de paradas satisfeitas simultaneamente, isto depende da equação e da escolha do método numérico.*

2. Em alguns casos faz-se necessário a utilização de duas tolerâncias ε_1 e ε_2, onde ε_1é utilizado para o erro na função, $|f(x_{k+1})| < \varepsilon_1$, e a segunda precisão ε_2 é utilizado no erro da solução,$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2$.

3. Nos exemplos deste trabalho, por suas simplicidades, utilizamos $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ sempre para os testes de parada.

2.4 Aproximações Sucessivas (Refinamento)

Aqui considerarmos vários métodos iterativos segundo os autores Cunha (2011), Franco (2007), Ruggiero e Lopes (2009), Sanches e Furlan (2007) para a determinação de aproximações para raízes isoladas de $f(x) = 0$. Sendo dada uma atenção especial às equações polinomiais e o método de bisseção em virtude da sequência didática aplicada em sala.

Sabemos que existem outros métodos mais eficazes para resolução de equações não lineares tais como o método de Newton mas os pré-requisitos dificultam a aplicação no ensino básico por necessitar de conhecimentos de cálculo diferencial.

2.4.1 Método de Bisseção

Como aplicação do Teorema de Bolzano temos o método da bisseção. A idéia do método tem os mesmos princípios da sequência de intervalos encaixados que é construída na demonstração do Teorema do Valor Intermediário 2.2.2.

Vamos supor uma equação não linear

$$f(x) = 0.$$

Veremos que o método da bisseção resulta em boas aproximações para as raízes, após sucessivas aplicações com a finalidade de diminuir a extensão do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão pedida $(b - a) < \varepsilon$, utilizando para isto sucessivos passos de divisões deste intervalo ao meio.

Supondo uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tais que $f(a)f(b) < 0$. Sem perda de generalidade, vamos assumir $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. O Teorema do Bolzano 2.2.3 afirma que existe um valor c no intervalo $]a, b[$ tal que $f(c) = 0$. Este teorema não afirma nada a respeito da localização de c dentro do intervalo, apenas que ele existe.

O método da bisseção é uma maneira sistemática de obter este valor c. Considere $d = \dfrac{a+b}{2}$, o ponto médio do intervalo. Existem três possibilidades:

1. Quando $f(d) = 0$, temos que d é a raiz da equação e não há necessidade de prosseguir com o método.

2. Ocorrendo $f(d) < 0$ e, assumido que $f(b) > 0$, sabemos que há uma raiz no intervalo $[d, b]$. Este intervalo tem metade do tamanho do intervalo original, então estamos mais próximos de obter uma boa aproximação para a raiz.

3. Ocorrendo $f(d) > 0$ e, assumido que, $f(a) < 0$, sabemos que há uma raiz no intervalo $[a, d]$. Novamente, este intervalo tem metade do tamanho do intervalo original, então estamos mais próximos de obter uma boa aproximação para a raiz.

O método da bisseção é a aplicação sucessiva dos passos descritos até que se esteja próximo o suficiente da raiz de $f(x)$ para a tolerância desejada. Nota-se que para o caso em que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ o método ainda funciona, invertendo 2 e 3, ou seja, ocorrendo $f(d) < 0$ haverá uma raiz no intervalo $[a, d]$ e ocorrendo $f(d) > 0$ haverá uma raiz no intervalo $[d, b]$.

Segue abaixo o algoritmo do método da bisseção.

Algoritmo

Passo 0: Determinar um intervalo inicial $[a, b]$ tal que $f(a) < 0 < f(b)$;
Faça $k = 0$, $a_k = a$ e $b_k = b$;

Passo 1: Defina $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ (Elementos da aproximação sucessiva);

Passo 2: Utilize o Critério de Parada: Se $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|b_k - a_k| < \varepsilon$ pare e a aproximação desejada é x_k;

Passo 3: Atualização do intervalo:
Se $f(x_k) < 0$, defina $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$.
Se $f(x_k) > 0$, defina $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$.

Passo 3: Faça $k = k + 1$ e volte ao Passo 1.

Ao final do algoritmo temos $a_1; a_2; ...; b_1; b_2; ...; x_0; x_1; x_2, ...$ tal que

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Além disso,

$$a_{k+1} = \begin{cases} x_k; & \text{se} \quad f(x_k) < 0 \\ a_k; & \text{se} \quad f(x_k) > 0 \end{cases}$$

e

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k; & \text{se} \quad f(x_k) < 0 \\ x_k; & \text{se} \quad f(x_k) > 0 \end{cases}$$

Terminado o processo, tem-se um intervalo $[a, b]$ que contém a raiz e uma aproximação x_k para a raiz exata. O processo iterativo é finalizado quando se obtém um intervalo cujo tamanho é menor ou igual à tolerância.

Na Figura 2.1 pode-se ver a interpretação geométrica do método da bisseção.

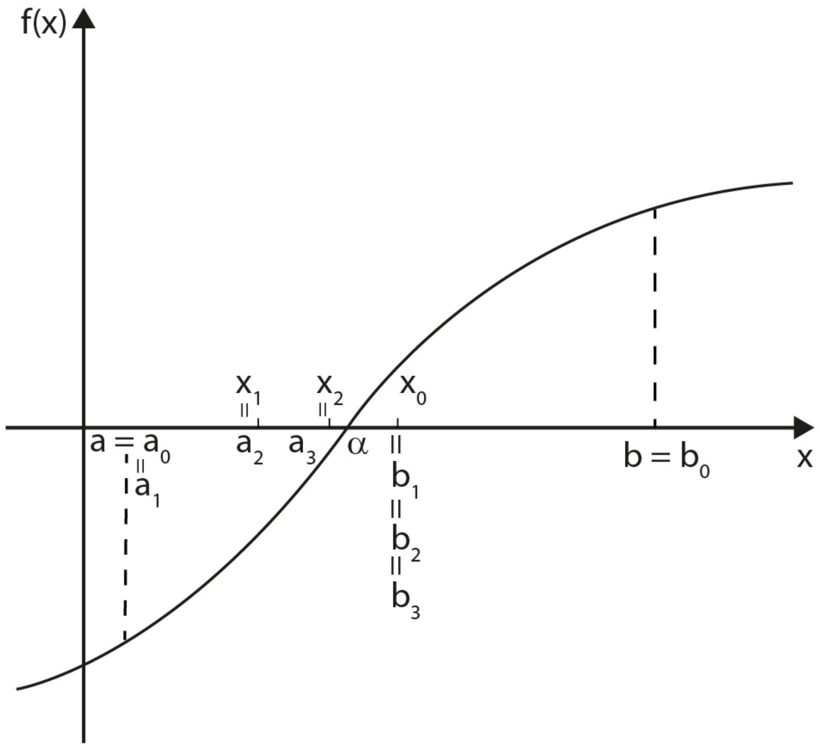

Figura 2.1: Interpretação gráfica do método da bisseção

A convergência do método da bisseção ocorre sempre que a função $f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$ no entanto, essa convergência é muito lenta, pois se o comprimento do intervalo inicial, $(b_0 - a_0) >> \varepsilon$ e se ε for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande.

Ainda sobre a convergência do método de bisseção temos algumas considerações a fazer sobre a prova, vamos supor $[a_0, b_0]$ um intervalo inicial e que α seja a única raiz do intervalo. Vimos que são geradas três sequências:

1) (a_k): não-decrescente e limitado superiormente por b_0, então existe um $r \in \mathbb{R}$ tal que $lim_{k\to\infty}(a_k) = r$.

2) (b_k) : não-crescente e limitado inferiormente por a_0; então existe um $s \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{k\to\infty}(b_k) = s$.

3) (x_k): por construção $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, temos $a_k \leq x_k \leq b_k$.

Como a amplitude de cada intervalo sucessor $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ é a metade da amplitude do intervalo antecessor $[a_k, b_k]$, temos que

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= \frac{b_0 - a_0}{2} \\ b_2 - a_2 &= \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2} \\ b_3 - a_2 &= \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}.$$

Daí, segue que:

$$\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim_{k\to\infty}(\frac{b_0 - a_0}{2^k}) = 0.$$

Como a_k e b_k são convergentes, segue que

$$\lim_{k\to\infty} b_k - \lim_{k\to\infty} a_k = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} a_k \Rightarrow s = r.$$

Seja $\alpha = s = r$ o limite das duas sequências. Dado que, para todo k o ponto $x_k \in (a_k, b_k)$,temos:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha.$$

Provamos assim que a sequência $\{x_k\}$ é convergente, falta provar que $f(\alpha) = 0$. Em cada iteração k, temos $f(a_k)f(b_k) < 0$. Então, da continuidade de f:

$$0 \geq \lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) = \lim_{k\to\infty} f(a_k) \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(\lim_{k\to\infty} a_k)f(\lim_{k\to\infty} b_k) = f(r)f(s) = [f(\alpha)]^2.$$

Desta forma, $f(\alpha) = 0$, pois $0 \geq [f(\alpha)]^2 \geq 0$.

Estimativa do Número de Iterações:

Dada uma precisão ε e um intervalo inicial $[a, b]$ é possível saber quantas iterações k serão efetuadas pelo método da bisseção até que se obtenha $b_k - a_k < \varepsilon$. Sabendo que $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$, podemos obter o valor de k tal que $b_k - a_k < \varepsilon$. De fato,

$$\begin{aligned} b_k - a_k < \varepsilon &\Rightarrow \\ \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon &\Rightarrow \\ 2^k > \frac{b-a}{\varepsilon} &\Rightarrow \\ \log 2^k > \log \frac{b-a}{\varepsilon} &\Rightarrow \\ k \log 2 > \log(b-a) - log\ \varepsilon &\Rightarrow \\ k > \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2} & \end{aligned} \tag{2.1}$$

Portanto, se α é a raiz exata e k satisfaz a relação acima, ao final da iteração k teremos a aproximação x_{k+1} tal que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq b_k - a_k < \varepsilon.$$

Observação 2.4.1. *Notemos que k dado por* (2.1) *normalmente não é um número inteiro e a iteração é um inteiro positivo. Logo o valor do número de iterações necessárias para garantir a tolerância é o maior inteiro positivo k que satisfaz* (2.1).

Exemplo 2.4.2. *Resolver a equação $x^3 - 9x + 3 = 0$ localizada no intervalo $[0, 1]$ com $\varepsilon = 0.001$.*

Na Figura 2.2 temos o gráfico da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$ e notamos que possui três interseções com o eixo x, assim temos a localização para as três raízes $x_1 \in [-4, -3]$, $x_2 \in [0, 1]$ e $x_3 \in [2, 3]$. Vamos aplicar o método da bisseção para determinar uma aproximação para x_2.

Seja $I_1 = [0, 1]$. De fato, $f(0).f(1) < 0$, tem pelo menos uma raiz em $[0, 1]$. Aplicamos o método de bisseção no intervalo será $[0; 1]$, obtemos $x_1 = \dfrac{0+1}{2} = 0,5$. como $f(0).f(0,5) < 0$ e aplicando o critério de parada $f(0,5) > \varepsilon$ ou $|0,5 - 0| > \varepsilon$, temos um novo intervalo $[0, 0, 5]$.

Seja $I_2 = [0; 0,5]$ e $x_2 = \dfrac{0+0,5}{2} = 0,25$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,25)| > \varepsilon$ ou $|0,25 - 0,5| > \varepsilon$, continuamos o processo. Como $f(0,25).f(0,5) < 0$, tem-se que o novo intervalo será $[0,25; 0,5]$.

Seja, $I_3 = [0,25; 0,5]$ e $x_3 = \dfrac{0,25+0,5}{2} = 0,375$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,375)| > \varepsilon$ ou $|0,375 - 0,25| > \varepsilon$, continuamos o processo.Como

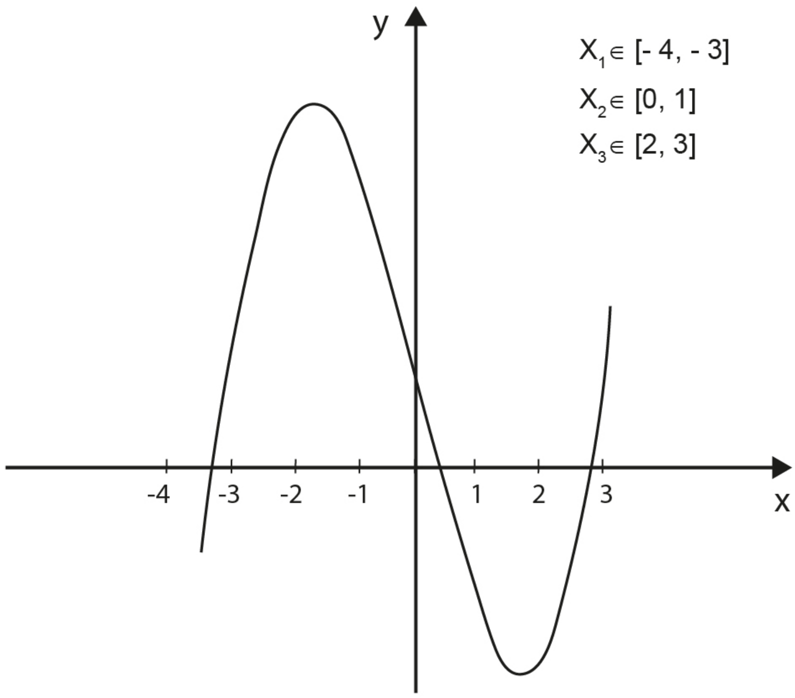

Figura 2.2: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 9x + 3$.

$f(0,25).f(0,375) < 0$, o novo intervalo será $[0,25; 0,375]$.

Seja, $I_4 = [0,25; 0,375]$ e $x_4 = \dfrac{0,25 + 0,375}{2} = 0,3125$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,3125)| > \varepsilon$ ou $|0,375 - 0,3125| > \varepsilon$, continuamos o processo. Como $f(0,3125).f(0,375) < 0$, o novo intervalo será $[0,3125; 0,375]$.

Seja, $I_5 = [0,3125; 0,375]$ e $x_5 = \dfrac{0,3125 + 0,375}{2} = 0,34375$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,34375)| > \varepsilon$ ou $|0,34375 - 0,3125| > \varepsilon$, continuamos o processo. Como $f(0,34375).f(0,3125) < 0$, o novo intervalo será $[0,3125; 0,34375]$.

Seja, $I_6 = [0,3125; 0,34375]$ e $x_6 = \dfrac{0,3125 + 0,34375}{2} = 0,328125$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,328125)| > \varepsilon$ ou $|0,34375 - 0,328125| > \varepsilon$, continuamos o processo. Como $f(0,34375).f(0,328125) < 0$, o novo intervalo será $[0,328125; 0,34375]$.

Seja, $I_7 = [0,328125; 0,34375]$ e $x_7 = \dfrac{0,328125 + 0,34375}{2} = 0,335938$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,335938)| > \varepsilon$ ou $|0,335938 - 0,328125| > \varepsilon$, continuamos o processo. Como $f(0,335938).f(0,328125) < 0$, o novo intervalo será $[0,328125; 0,335938]$.

Seja, $I_8 = [0,335838; 0,34375]$ e $x_8 = \dfrac{0,335938 + 0,34375}{2} = 0,339844$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,339844)| > \varepsilon$ ou $|0,339844 - 0,335938| > \varepsilon$, continuamos o processo. Como $f(0,335938).f(0,339844) < 0$, o novo intervalo será $[0,335938; 0,339844]$.

Seja, $I_9 = [0,335938; 0,339844]$ e $x_9 = \dfrac{0,335938 + 0,339844}{2} = 0,337891$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,337891)| > \varepsilon$ ou $|0,337891 - 0,335938| > \varepsilon$, continuamos o processo. Como $f(0,335938).f(0,337891) < 0$, o novo intervalo será $[0,335938; 0,337891]$.

Seja, $I_{10} = [0,335938; 0,337891]$ e $x_{10} = \dfrac{0,335938 + 0,337891}{2} = 0,3369145$. Aplicando o critério de parada temos $|0,337891 - 0,3369145| < \varepsilon$, tem-se que a aproximação para raiz com $\varepsilon = 0,001$ é $x_{10} = 0,33691$.

Apresentamos na Tabela 2.1 os resultados obtidos aplicando o algoritmo do método da bisseção na equação $x^3 - 9x + 3 = 0$.

k	a	b	$x = \dfrac{a+b}{2}$	f(x)	f(a)	f(b)	sinal $f(x).f(a)$	b-a
1	0	1	0,5	-1,375	3	-5	-	0,5
2	0	0,5	0,25	0,76562	3	-1,375	+	0,25
3	0,25	0,5	0,375	-0,32227	0,76562	-1,375	-	0,125
4	0,25	0,375	0,3125	0,21802	0,765625	-0,32226	+	0,06250
5	0,3125	0,375	0,34375	-0,05313	0,21802	-0,32226	-	0,03125
6	0,3125	0,34375	0,32812	0,08220	0,21802	-0,05313	+	0,01563
7	0,32812	0,34375	0,33594	0,01447	0,082203	-0,05313	+	0,00781
8	0,33594	0,34375	0,33984	-0,01935	0,01447	-0,05313	-	0,00391
9	0,33594	0,33984	0,33789	-0,00244	0,01447	-0,01935	-	0,00195
10	0,33594	0,33789	0,33691	0,00601	0,01447	-0,00244	+	0,00098

Tabela 2.1: Aproximações Sucessivas obtida do método da bisseção para a equação $x^3 - 9x + 3 = 0$.

Notemos por (2.1), tem-se

$$k > \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} \Rightarrow k > \frac{\log 1 - \log 0.001}{\log 2} = 9,96.$$

Logo $k = 10$ e a raiz aproximada é 0.33691.

Vantagens e Desvantagens:

- Satisfazendo as condições de continuidade e a troca de sinais, gera uma sequência convergente.

- As iterações não envolvem cálculos complexos.

- Convergência lenta se $b - a$ for muito maior que a precisão e esta for muito pequena; gera um grande número de iterações.

2.4.2 Método da Posição Falsa ou Regula Falsi

A ideia do método da posição falsa é melhorar o método da bisseção procurando substituir a escolha de divisão do intervalo pelo ponto médio. Consistirá em dividir de forma iterativa o intervalo $[a, b]$ nos pontos em que a reta passa por $[a, f(a)]$ e $[b, f(b)]$ intercepta o eixo das abcissas conforme Figura 2.3.

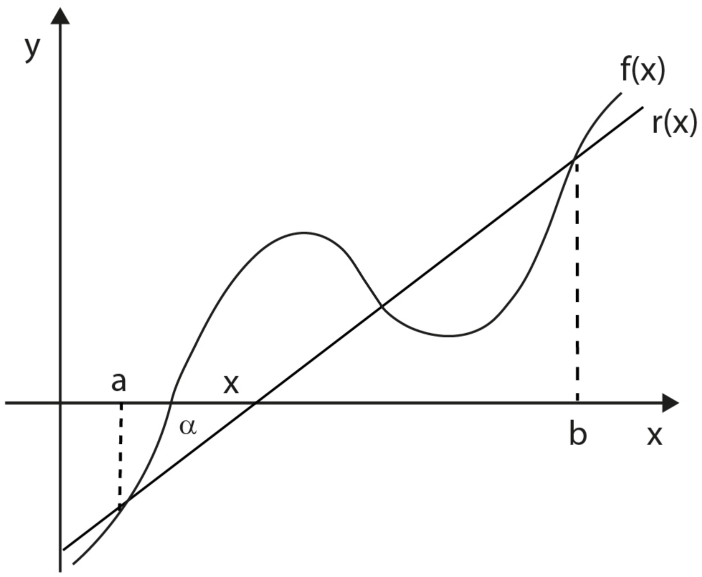

Figura 2.3: Interpretação Gráfica do Método da Posição Falsa

Outra maneira de interpretar a construção do método da posição falsa é ao invés da média aritmética, considerar a média aritmética ponderada entre a e b com os pesos invertidos $|f(b)|$ e $|f(a)|$ tais que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos, assim

$$x_k = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(a)| + |f(b)|} = \frac{a.f(b) - b.f(a)}{f(b) - f(a)},$$

No mais o método da posição falsa se equipara com o método da bisseção. Se $|\dfrac{x_k - a}{x_k}| < \varepsilon \; ou \; |\dfrac{x_k - b}{x_k}| < \varepsilon$ (critério de parada), para um valor pré-fixado, então x_k é a raiz procurada. Caso contrário, calculamos $f(x_k)$ e escolhemos entre a e b aquele cuja f tenha sinal oposto ao da $f(x_k)$. Com valor x_k e esse ponto calculamos x_{k+1} usando a fórmula acima. O processo iterativo deve ser continuado até que se obtenha a raiz com a precisão pré-fixada. Observe ainda que a aplicação do método da posição falsa sempre mantém a raiz procurada entre as aproximações mais recentes.

Algoritmo

Passo 0: Determinar um intervalo inicial $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$;

Faça $k = 0$, $a_k = a$ e $b_k = b$;

Passo 1: Defina $x_k = \dfrac{a_k.f(b_k) - b_k.f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$ (Elementos da aproximação sucessiva);

Passo 2: Utilize o Critério de Parada: Se $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|b_k - a_k| < \varepsilon$ pare e a aproximação desejada é x_k;

Passo 3: Atualização do intervalo:

Se $f(x_k) < 0$, defina $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$.

Se $f(x_k) > 0$, defina $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$.

Passo 3: Faça $k = k + 1$ e volte ao Passo 1.

Ao final do algoritmo temos $a_1; a_2; ...; b_1; b_2; ...; x_0; x_1; x_2, ...$ tal que

$$x_k = \frac{a_k.f(b_k) - b_k.f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}.$$

Além disso, ,

$$a_{k+1} = \begin{cases} x_k; & \text{se} \quad f(x_k) < 0 \\ a_k; & \text{se} \quad f(x_k) > 0 \end{cases}$$

e

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k; & \text{se} \quad f(x_k) < 0 \\ x_k; & \text{se} \quad f(x_k) > 0 \end{cases}$$

Terminado o processo, tem-se um intervalo $[a, b]$ que contém a raiz e uma aproximação x_k para a raiz exata. O processo iterativo é finalizado quando se obtém um intervalo cujo tamanho é menor ou igual a tolerância.

Na Figura 2.4 pode-se ver a interpretação geométrica com as iterações.

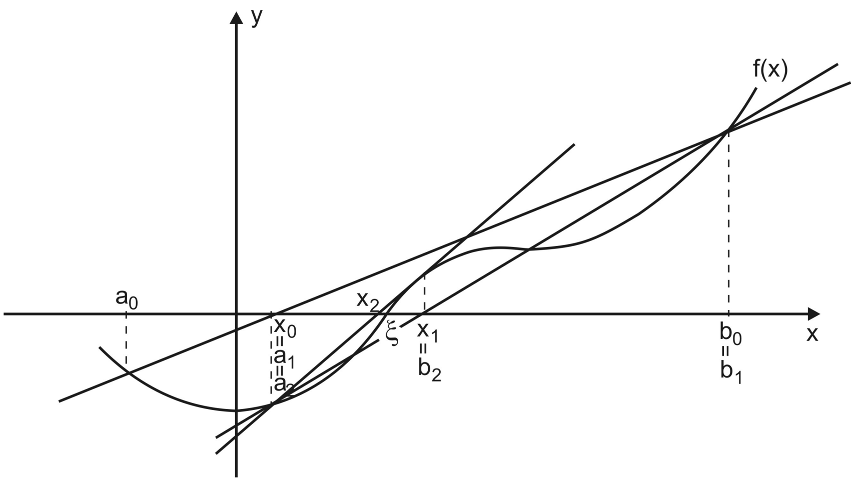

Figura 2.4: Interpretação Gráfica do Método da Posição Falsa.

Notemos que se f for contínua em $[a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$, então o método da posição falsa gera uma sequência que converge para a raiz. A demonstração deste fato segue análogo a discussão da convergência do método da bisseção uma vez que o princípio é a redução do intervalo onde a raiz está localidade utilizando o Teorema de Bolzano 2.2.3.

Exemplo 2.4.3. *Considere a mesma equação do Exemplo 2.4.2, ou seja,* $f(x) = x^3 - 9x + 3 = 0$.

Seja $I_1 = [0, 1]$. De fato, $f(0).f(1) < 0$, tem pelo menos uma raiz em $[0, 1]$. Aplicamos o método de da posição falsa no intervalo será $[0; 1]$, obtemos $x_1 = \dfrac{0.(-5) - 1.3}{-5 - 3} = 0,375$. como $f(0).f(0,375) < 0$ e aplicando o critério de parada $f(0,375) > \varepsilon$ ou $|1 - 0| > \varepsilon$, temos um novo intervalo $[0, 0, 375]$.

Seja $I_2 = [0; 0,375]$ e $x_2 = \dfrac{0.(-0,32227) - 0,375.3}{-0,32227 - 3} = 0,33862$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,33862)| > \varepsilon$ ou $|0,375 - 0| > \varepsilon$, continuamos o processo.Como $f(0,3382).f(0) < 0$, tem-se que o novo intervalo será $[0; 0,33862]$.

Seja $I_3 = [0; 0,33862]$ e $x_3 = \dfrac{0.(-0,00879) - 0,375.3}{-0,00879 - 3} = 0,33763$. Aplicando o critério de parada temos $|f(0,33763)| < \varepsilon$, tem-se que a aproximação para raiz com $\varepsilon = 0,001$ é $x_3 = 0,33763$.

Apresentamos na Tabela 2.2 os resultados obtidos aplicando o algoritmo do método da posição falsa na equação $x^3 - 9x + 3 = 0$.

k	a	b	$x = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$	$f(a)$	$f(b)$	$f(x)$	Sinal $f(x) \cdot f(a)$	$b - a$
1	0	1	$0,375$	3	-5	$-0,32227$	$-$	1
2	0	$0,375$	$0,33862$	3	$-0,32227$	$-0,00879$	$-$	$0,375$
3	0	$0,33862$	$0,33763$	3	$0,00879$	$0,00023$	$-$	$0,33862$

Tabela 2.2: Aproximações Sucessivas obtida do método da posição falsa para a equação $x^3 - 9x + 3 = 0$.

Se comparar com o exemplo anterior percebe-se que a convergência foi mais rápida que o método da bisseção precisando apenas de três iterações.

Vantagens e desvantagens:

- técnica consistente e converge independente do formato do gráfico no intervalo [a,b].

- a convergência se torna lenta quando a raiz só se faz a partir de um extremo do intervalo e a imagem deste ponto fixo tende a um valor muito elevado.

2.4.3 Métodos das Secantes

Agora veremos um método motivado pela interpretação geométrica do método da posição falsa que é obter a aproximação pela interseção de uma reta secante com o eixo x, no entanto, não terá os mesmos princípios de intervalos encaixantes do método da bisseção. Além disso, neste método não se fará uso do teorema de Bolzano, exceto na localização das raízes. Este método é conhecido como método das secantes.

A ideia do método das secantes é usar da interseção da secante com o eixo x como aproximações para raízes de equações e, neste caso, são necessárias duas aproximações x_0 e x_1 para iniciarmos.

Na Figura 2.5 tomamos a reta secante que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Seja A o ponto de interseção desta reta secante com o eixo x. Para determi-

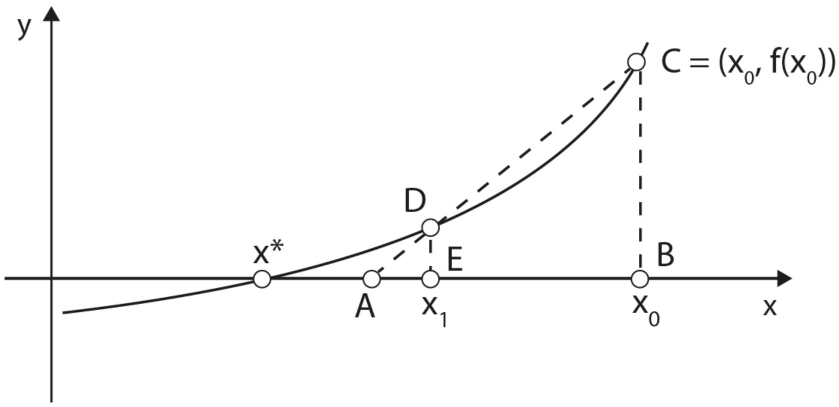

Figura 2.5: Interpretação Gráfica do Método das Secantes.

nar o valor de A, consideremos os triângulos ABC e AED, por semelhança de triângulos, tem-se

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_2} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2},$$

onde x_2 é o ponto definido por$A$ na figura. Calculando o valor de x_2 temos

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Ao generalizar, obtemos a seguinte fórmula recursiva para as iterações subsequentes:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Para simplificar a escrita, somando e subtraindo $x_k.f(x_k)$ ao numerador e fazendo agrupamentos convenientes, obtemos

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}.$$

Algoritmo:

Passo 0: Dados $x_0, x_1,\ f(x)$, ε_1 e ou ε_2;

Faça $k = 0$;

Passo 1: Calcule a aproximação:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})};$$

Passo 2: Teste de Parada:

Se $|f(x_{k+1})| < \varepsilon_1$ então $\alpha = x_{k+1}$

Se $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_2$ então $\alpha = x_{k+1}$

Passo 3: Faça $k = k + 1$ e volte ao Passo 1.

Vantagens e Desvantagens:

- técnica consistente pois converge independente do formato do gráfico no intervalo $[a, b]$.
- A convergência se torna lenta quando a raiz só se faz a partir de um extremo do intervalo e a imagem deste ponto fixo tende a um valor muito elevado.

Exemplo 2.4.4. *Considere a equação não linear do Exemplo 2.4.2, tal que* $f(x) = x^3 - 9x + 3 = 0$ *e também o mesmo intervalo e a tolerância.*

Inicialmente para $k = 1$, temos $x_0 = 0$, $f(x_0) = 3$, $x_1 = 1$ e $f(x_1) = -5$. Assim

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{(x_1 - x_0).f(x_1)}{f(x_1) - f(x_0} \\ &= 1 - \frac{(1-0).(-5)}{-5-3} = 1 - 0.625 = 0.375 \end{aligned}$$

e verificando o critério de parada,

$$f(x_2) = -0.322265625 \text{ e } |x_2 - x_1| = 0.625.$$

Aplicando novamente as iterações,

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{(x_2 - x_1).f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1} \\ &= 0.375 - \frac{(0.375 - 1).(-0.322265625)}{-0.3222656255 - (-5)} \\ &= 0.375 - \frac{(-0.625).(-0.322265625)}{4,677734375} \\ &= 0.375 - \frac{0.201416015625}{4,677734375} \\ &= 0.375 - 0.0430584551148225 = 0.3319415448851775 \end{aligned}$$

e verificando o critério de parada,

$$f(x_3) = 0.0491011379668066 \text{ e } |x_3 - x_2| = 0.0430584552.$$

$$\begin{aligned}
x_4 &= x_3 - \frac{(x_3 - x_2).f(x_3)}{f(x_3) - f(x_2} \\
&= 0.3319415448851775 - \frac{(0.3319415448851775 - 0.375)\cdot(0.0491011379668066)}{0.0491011379668066 - (-0.322265625)} \\
&= 0.3319415448851775 - \frac{(-0.0430584551148225)\cdot(0.0491011379668066)}{0.3713667629668066} \\
&= 0.3319415448851775 - \frac{-0.0021142191452304}{0.3713667629668066} = 0.3376346207230371
\end{aligned}$$

e verificando o critério de parada,

$$f(x_4) = -0.0002222063554206 \text{ e } |x_4 - x_3| = 0.0056930767.$$

Como $|f(x_4)| < \varepsilon$, então $x_4 = 0.3376346207230371$ é a solução aproximada pelo critério de parada.

Os resultados calculados estão dispostos na Tabela 2.3.

k	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
1	0,375	-0,32226
2	0,33194	0,04910
3	0,33763	-0,00022

Tabela 2.3: Resultados pelo método da secante aplicado ao Exemplo 2.4.2.

Para se analisar um método a ser escolhido temos que levar em consideração aquele em que a convergência for assegurada, que haja rapidez no número de iterações efetuadas e a quantidade de cálculos a cada iteração. Obviamente, estes parâmetros estão diretamente ligados com a equação que se quer resolver e ao comportamento da mesma no intervalo em que se encontra a raiz desejada. Vejamos através da equação 2.4.2 uma comparação entre os métodos da bisseção, da posição falsa e da secante. Normalmente esta análise de convergência é a estabelecida entre os métodos.

	Bisseção	Posição Falsa	Secantes
Dados Iniciais	$[0, 1]$	$[0, 1]$	$x_0 = 0$ e $x_1 = 1$
x_k	$0,336971$	$0,33763$	$0,33763$
$\|f(x_k)\|$	$0,00601$	$0,00023$	$0,00022$
$\|x_k - x_{k-1}\|$	$0,00098$	$0,33862$	$0,0056$
Número de Iterações (k)	10	3	3

Notemos que tanto o método da secante, quanto o método da posição falsa, apresentam melhor convergência do que o método da bisseção. Porém a cada iteração os seus cálculos são mais complexos.

Por outro lado, se utilizarmos o erro na solução, $|x_k - x_{k-1}|$ sempre garantimos uma convergência com um número de iterações previamente determinado utilizando o método da bisseção, o que nem sempre pode acontecer com os outros métodos, eles convergem mas não garantimos o número limite de iterações.

Notemos que os métodos da secante e da falsa posição aplicados obtiveram os mesmos resultados, isto se deve ao fato de utilizarem a mesma ideia da interseção de uma secante com o eixo x para obter a sua nova aproximação. Eles diferem apenas pela forma como as estimativas anteriores são substituídas pelas novas estimativas.

Capítulo 3

Proposta de Atividade

Uma sequência didática, segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), é uma ferramenta que norteia o trabalho do professor na condução das aulas e no planejamento das intervenções, organizando-o de forma gradual, através de um conjunto de atividades interligadas com objetivo de ampliar os conhecimentos dos alunos, a partir de conhecimentos prévios, no processo ensino-aprendizagem.

Neste capítulo, apresentaremos uma sequência didática cujo título é "Resolução de equações polinomiais do 3º grau com método da bisseção". Particularmente usamos o método da bisseção, por ser mais fácil de aplicação em turmas do ensino médio como afirma Lima (2006, pp.239).

3.1 Sequência Didática: Resolução de equações polinomiais do 3º grau com o método da bisseção.

O objetivo geral desta proposta é desenvolver o lado investigativo do estudante através da resolução de equações polinomiais pelo método iterativo.

Propõe-se que a atividade seja desenvolvida durante o tempo de quatro horas/aulas. Evidentemente que cabe uma observação, que este tempo dependerá da sensibilidade do professor em relação a turma, podendo se estender por mais aulas ou comprimi-las em menos aulas.

Os materiais necessários são praticamente os corriqueiros da prática de ensino, lápis, caneta, papel ofício, apostilas impressas e livro didático. A fim de estimular os alunos faz-se a inclusão da tecnologia com o uso de celulares e/ou computadores. Vale ressaltar que grande parte das escolas e os alunos possuem estes materiais disponíveis.

Abaixo segue a sequência elaborada em forma de etapas na qual descrevemos suas respectivas estratégias e objetivos.

Primeira etapa: Avaliação diagnóstica e revisão das equações polinomiais de 1º e 2º graus.

Inicialmente, propõe-se aos estudantes a resolução das seguintes equações lineares e quadráticas:

a) $2x - 1 = 0$;

b) $2x + 1 = 0$;

c) $-2x - 1 = 0$;

d) $-2x + 1 = 0$;

e) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

f) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

g) $x^2 - x + 2 = 0$.

Objetivo:
Resgatar o conhecimento prévio dos alunos sobre equações polinomiais dos 1º e 2º graus vistos durante o ensino fundamental.

Segunda etapa: Introdução às equações de 3º grau e generalização.

Apresenta-se as definições para equações de ordem 3 e posteriormente ordem maior. Discute-se sobre a determinação das raízes, apresentando alguns casos específicos, tais como:

a) $x^3 - 81 = 0$;

b) $x^3 - x = 0$;

c) $x^3 + 2x^2 + x = 0$;

d) $x^3 - 3x - 1 = 0$.

Objetivo:
Apresentar uma extensão natural das equações polinomiais para grau maior que 2.

Terceira etapa: Apresentar o método de Cardano para equações polinomiais de 3º grau

Inicialmente faz-se os seguintes questionamentos:

1) Tiveram dificuldade em resolver equações polinomiais de terceiro grau, por exemplo do tipo do item d),

$$x^3 - 3x - 1 = 0?$$

2) Será que tem uma fórmula assim como a fórmula de Báskara para este caso?

Posteriormente solicita-se que façam uma pesquisa sobre resolução de equações polinomiais de terceiro grau.

Objetivo:

Com base nestes questionamentos e na pesquisa realizada, discutir métodos para resolução de equações de terceiro grau e a quantidades de raízes possíveis.

Quarta etapa: Visualização gráfica de um polinômio e suas raízes.

Apresenta-se geometricamente a relação do gráfico de um polinômio e suas raízes, utilizando o Geogebra como ferramenta computacional, também disponível em aplicativos para celulares.

Objetivo:

Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas através do uso de aplicativos no celular.

Quinta etapa: Localização das raízes de um polinômio.

Discutir com os alunos as técnicas para obter um intervalo $[a, b]$ tal que exista pelo menos uma raiz do polinômio no interior dele, apresentando uma análise teórica e gráfica da equação $f(x) = 0$.

I. Na análise teórica usa-se o Teorema de Bolzano 2.2.3;

II. Na análise gráfica usa-se as ferramentas computacionais vistas na quarta etapa.

Objetivo:

Facilitar a análise teórica e gráfica, de forma simultânea, na localização das raízes de equações polinomiais do 3º grau.

Sexta etapa: Método da bisseção

Apresentar aos alunos o método da bisseçao de forma indutiva e processual estabelecendo um algoritmo para a construção das aproximações sucessivas.

k	a	b	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$	$sinal f(x).f(a)$	Teste

Objetivo:
Apresentar o algorítmo do método da bisseção discutindo as suas etapas e os critérios de parada, assim como a convergência do método.

Sétima etapa: Experimentação

Propõe-se aos estudantes a resolução do seguinte problema:

1) Considere a seguinte equação algébrica $x^3 - 3x - 1 = 0$.

a) Determinar o intervalo em que se localiza as raízes. Usar a análise teórica e gráfica;

b) Determinar o número máximo de iterações necessárias do método da bisseção para o caso da determinação de uma aproximação da primeira raiz positiva com precisão $\varepsilon = 0,1$ ε_1=0,01 e ε_2=0,001;

c) Aplicar o método da bisseção e obter a raiz com as precisões do item b);

d) Preencher a tabela a seguir:

Objetivo:
Testarem os seus conhecimentos aprendidos e refletirem sobre o uso do método da bisseção.

Oitava etapa: Questionário e conclusão

Propor aos alunos que respondam o seguinte questionário. Depois apresentar as respostas corretas e discutir sobre as suas respostas. Tentar durante a discussão introduzir o conceito de convergência.

Questionário

Nos itens de 1 a 4, marque somente uma alternativa por questão:

1) Se diminuir a tolerância aumenta a quantidade de iterações?
a) Sim, pois precisará mais iterações para atingir o critério de parada;
b) Sim, pois a quantidade de iterações aumenta quando fazemos mais cálculos;
c) Não, pois precisará de menos iterações para atingir o critério de parada;
d) Não, pois utilizamos a mesma quantidade de cálculos independente da precisão escolhida.

2) Se diminuir a amplitude do intervalos aumenta a quantidade de iterações?
a) Sim, pois precisará mais iterações para atingir o critério de parada;
b) Sim, pois a quantidade de iterações aumenta quando fazemos mais cálculos;
c) Não, pois precisará de menos iterações para atingir o critério de parada;
d) Não, pois utilizamos a mesma quantidade de cálculos independente da precisão escolhida.

3) Se aumentar a tolerância aumenta a quantidade de iterações?
a) Sim, pois precisará mais iterações para atingir o critério de parada;
b) Sim, pois a quantidade de iterações aumenta quando fazemos mais cálculos;
c) Não, pois precisará de menos iterações para atingir o critério de parada;
d) Não, pois utilizamos a mesma quantidade de cálculos independente da precisão escolhida.

4) Se aumentar a amplitude do intervalos aumenta a quantidade de iterações?
a) Sim, pois precisará mais iterações para atingir o critério de parada;
b) Sim, pois a quantidade de iterações aumenta quando fazemos mais cálculos;
c) Não, pois precisará de menos iterações para atingir o critério de parada;
d) Não, pois utilizamos a mesma quantidade de cálculos independente da precisão escolhida.

5) O que você achou dessa atividade? Descreva colocando os pontos positivos, negativos, suas dificuldades e o que aprendeu com a mesma.

Objetivo:
Verificar o conhecimento do estudante sobre a convergência do método e despertar o interesse pela investigação matemática.

3.2 Discussão sobre a Sequência Didática

A proposta apresentada não necessariamente precisa ser seguida em sua ordem, podendo ser realizada de forma simultânea ou até mesmo invertendo algumas etapas. Por exemplo, a etapa de visualização gráfica pode ser colocada como primeira etapa a fim de motivá-los devido ao uso de ferramentas computacionais em sala de aula.

É importante salientar a flexibilidade na execução da sequência podendo ser enriquecido com outros tópicos que venham acrescentar outras discussões referentes ao assunto, como por exemplo, a teoria de funções, construção de gráficos e uso de outros métodos numéricos tais como o método da posição falsa e da secantes, citados no Capítulo 2.

Sobre o Geogebra e seu manuseio indicamos a leitura do artigo (JUNIOR; ABBEG, 2016), que mostra o passo a passo como resolver equações algébricas no Geogebra. Além disso, pode-se consultar a página oficial do Geogebra (INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, acesso em 2019), onde pode ser encontrado mais detalhes sobre o funcionamento do Geogebra.

A escolha das equações foram realizadas devido à experiências observadas ao longo da docência e também retiradas das pesquisas feitas para a escrita deste trabalho.

Tivemos uma preocupação na elaboração desta sequência a fim de seguir as orientações propostas nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio, buscando sempre incentivar o lado investigativo dos estudantes e dando uma formação crítica dos conteúdos. Desta forma, a proposta de um questionário no final é que não seja avaliativo de conteúdos, mas buscando que os discentes façam uma auto-crítica do seu papel no aprendizado.

Sugerimos que, na sétima etapa, a atividade seja realizada em grupos, sendo duplas ou trios para que não haja dispersões, conversas paralelas e, consequentemente, perda do foco na atividade proposta. Além disso, o trabalho em duplas permite aos alunos uma melhor assimilação dos conteúdos por proporcionar a cooperação e a socialização de conhecimentos entre os mesmos e assim poderem sentir mais tranquilos seja no manuseio do equipamento seja na linguagem própria para sanar as dúvidas existentes ou mesmo nas discussões para buscar estratégias de resolução dos problemas propostos.

Outra ferramenta que nos nossos estudos percebemos que poderá ser utilizada para o preenchimento da tabela é o uso do software Excel da Microsoft, o Geogebra ou similar, explorando a construção, a interpretação e análise de tabelas através das planilhas eletrônicas.

Capítulo 4

Relato de Experiência

O presente relato de experiência constitui-se num trabalho desenvolvido em uma turma de ensino médio de uma escola pública onde sugerimos a aplicação de um método numérico de fácil compreensão para resolver equações polinomiais de grau maior que 2, diante de questionamentos quanto à existência de uma fórmula para resolver tais equações. Aplicamos a sequência didática descrita do Capítulo 3.

Na primeira etapa da sequência didática, avaliação diagnóstica e revisão das equações polinomiais de 1^o e 2^o graus, iniciamos o trabalho com apresentação de equações a serem resolvidas a partir de conhecimentos prévios dos alunos, no entanto, percebemos que a maioria não lembrava os conceitos básicos de equação nem como achar raízes de equação do 1^o e 2^o graus sendo necessário a intervenção do professor, discutindo etapa por etapa as operações na resolução das equações. Muitos usaram, por exemplo, a fórmula de Bháskara para resolver as equações do 1^o grau, o que mostrou que o conhecimento adquirido pelos mesmos foi apenas de reprodução das fórmulas. Mas a medida que foram sendo revisados os conteúdos, os mesmos perceberam os seus erros, consertando-os, e, diante disso, percebemos uma evolução no aprendizado.

Ainda na primeira etapa, devido notar a dificuldade dos alunos, introduzimos os conceitos para resolução de uma equação incompleta, utilizamos as técnicas da fatoração para resolver equações incompletas do 2^o e 3^o graus e destacamos para isso duas importantes propriedades dos números reais:

1) Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x.y = 0$, então $x = 0$ ou $y = 0$.

2) Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x^2 = y$, então $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

De certa forma, a segunda etapa foi iniciada conjuntamente com o término da primeira. Visto a resolução das equações polinomiais incompletas do 2^o e 3^o graus chegamos ao problema de resolver equações polinomiais completas do 3^o grau, donde iniciamos, quase despercebidos, a terceira etapa o que ocasionou questionamentos quando não conseguiram resolver algebricamente as equações polinomiais do 3^o grau, a partir daí sugerimos pesquisar sobre possíveis fórmulas para calcular raízes de equações polinomiais do terceiro grau. Infelizmente a pesquisa foi realizada somente por três alunos. Com base na pesquisa, notamos que a fórmula de Cardano não era

atrativa para aplicar e os alunos tiveram pouco interesse em utilizá-la. Surgiu por um aluno a seguinte pergunta:
Aluno 1: “se existe um método mais fácil para calcular?” - e, nesse momento, explicamos a possibilidade de utilizar outros procedimentos para cálculo de raízes e foi sugerido o método numérico.

Em seguida, aplicamos a quarta etapa, apresentando o software Geogebra sendo bem recebido pelos alunos, que se mostraram empolgados na instalação e manuseio do programa. Construímos os gráficos de equações polinomiais e comparamos com os resultados obtidos analiticamente em relação às quantidades de raízes, interseção dos gráficos com as mesmas. Os resultados obtidos foram satisfatórios no que diz respeito ao envolvimento, a curiosidade pela aprendizagem de novos conceitos matemáticos e ao uso de “app” de celulares em sala de aula.

Na quinta etapa, localização das raízes de um polinômio, a parte gráfica foi fundamental para o entendimento dos alunos. Inclusive, a análise téorica fundamentamos toda como base no entendimento gráfico e o teorema de Bolzano foi apresentado de forma a ser compreendida pelos alunos, sem enunciá-lo de forma axiomática contida nos livros de cálculos do nível superior. Nesta etapa houve uma participação efetiva de toda a sala querendo apresentar os seus resultados. Notamos que o aprendizado do conceito de raíz de uma função foi atingido e a relação da análise teórica da equação algébrica com a análise gráfica foi importante neste processo.

Mostrado a necessidade do uso do método numérico, abordamos o método de bisseção, sexta etapa da sequência. Durante a exposição dos conteúdos notamos que os alunos não tinham conhecimento do termo de ponto médio, porém um aluno 2 apresentou a seguinte pergunta: “este cálculo não seria uma média aritmética?”. Pelo interesse de utilização do software Geogebra mostrado pela turma, fizemos durante a apresentação do método, o uso, a cada etapa do método.

Surgiu um questionamento interessante: como aplicar o método da bisseção para a equação $x^2 - 2x + 1 = 0$? Ou de forma mais geral, em que o discriminante é zero obtendo raízes reais e iguais, de multiplicidade 2 onde no intervalo $[a, b]$ o seu sinal $f(a).f(b) > 0$? No entanto, tem raíz neste intervalo promovendo uma discussão rica que colaborou para possível inserção de outros métodos mais completos.

Para a sétima etapa, experimentação do método, dividimos a turma em duplas ou trios. No que diz respeito ao método de bisseção, um entrave ao conteúdo foi o trabalho com decimais diante da dificuldade dos mesmos em realizar operações tais como multiplicação e divisão sendo sanadas com o uso de calculadoras, além disso, foram detectados também a questão do uso da desigualdade na comparação com a tolerância exigida, além da dificuldade no uso da notação científica.

Ainda no que diz respeito aos cálculos para encontrar raízes percebemos que mesmo promovendo discussões observamos que os alunos queriam encontrar uma solução de forma mais rápida e imediata ao tentar utilizar outros intervalos e precisões requeridas, além de que trabalhamos intensamente durantes três aulas seguidas o que tornou desgastante para os mesmos.

Devido às longas discussões e dificuldades encontradas durante a aplicação da sequência didática, não conseguimos aplicar o questionário por escrito. Foi realizado um debate sobre os conteúdos e uma discussão sobre a convergência do método. Notamos que foi satisfatório a compreensão dos conteúdos sobre métodos iterativos, além disso, observamos a participação de todos durante todo o debate demonstrado em algumas das falas a seguir:

- Aluno 1: "Uma experiência divertida pois foi bem dinâmica e aprendi mais sobre o assunto".

- Aluno 2: "Foi uma experiência incrível pois aprendi como fazer o "cálculo" de equação do terceiro grau de um método diferente e também por que a atividade foi dinâmica".

- Aluno 3 : "Achei interativa, me compliquei com os cálculos, achei que era incapaz e a professora me mostrou o contrário".

Portanto, mesmo que tenham sido detectadas dificuldades na aplicação do método numérico, a apresentação desse novo conteúdo no ensino médio proporcionou aos estudantes à pensar matematicamente, usar a tecnologia como ferramenta para entender a matemática e ainda exercer seu protagonismo na aquisição do conhecimento.

Conclusão

Neste trabalho propomos a aplicação de uma sequência didática a alunos do ensino médio visando a apresentação do método de bisseção na resolução de equações polinomiais de grau maior que 2, por ser de simples entendimento para os mesmos, mas, antes, buscamos apresentar, para cada conteúdo, alguns conceitos preliminares além de demonstrações de alguns autores da área para embasar a proposta didática aplicada. Sabemos que desde a introdução da álgebra no ensino fundamental, parte dos alunos se interessam pela resolução de equações mas ao mesmo tempo sentem dificuldades ao se deparar com fórmulas, o que leva os estudantes apenas a memorizar as mesmas para resolver questões de avaliações.

Um dos desafios aqui é sugerir técnicas de resolução de equações que não estejam presas às fórmulas mas apresentação de conteúdos no ensino superior como os métodos numéricos, no ensino médio, de forma a desenvolver nos estudantes o interesse por continuar aprendendo e assim podermos mudar a visão que muitos têm da matemática.

Sabemos que, em geral, quando abordamos a álgebra na resolução de equações polinomiais, os alunos costumam considerar o conteúdo de difícil assimilação o que torna a aula monótona e desinteressante. Diante dessa constatação e realizando pesquisas na área vimos que, em Sperandio, Mendes e M. (2003), ele afirma que, quando o método analítico é difícil de ser obtido podemos recorrer a métodos numéricos. Neste sentido, resolvemos sugerir a aplicação de métodos numéricos para resolvermos tais equações de forma a tornar as aulas mais dinâmicas e desafiadoras para os alunos, desenvolvendo o lado investigativo dos mesmos, baseando-se no desenvolvimento de competências como a de interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação seguidas das seguintes habilidades: utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências; resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos e analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos, divulgadas pelo Inep na matriz referência de matemática e suas tecnologias para o ENEM.

Nos restringimos, aqui, a resolução de uma equação polinomial de terceiro grau tendo em vista que muitos alunos questionavam sobre a existência de fórmulas para resolução das mesmas e, com base em pesquisas propostas, percebemos que fórmulas como a de Tartaglia desenvolvida no século XVI, são trabalhosas e de difícil compreensão quando aplicadas no ensino médio enquanto que os métodos numéricos podem ser abordados, sem conhecimentos prévios de

Cálculo Diferencial, e mesmo que seja necessário buscar uma linguagem adequada para o ensino dos mesmos, por exemplo, a noção de continuidade, aqui sendo apresentado graficamente no estudo de equações polinomiais do tipo $f(x) = 0$ de forma a não existir "quebra"ou "furo"ao longo da sua linha. Além disso, o método de bisseção, na maioria das vezes, necessita apenas de conceitos básicos tais como decimais, ao buscar aproximações para raízes com precisões pré-definidas, o que pode ser facilitado pelo uso de calculadoras simples, da noção de ponto médio quando do uso da função iteração para o método de bisseção e da interpretação e análise de tabelas sendo interessante o uso de planilhas eletrônicas e gráficos que podem ser realizadas através de aplicativos nos celulares como o Geogebra, e nesse sentido, recomendamos que seja estendido o tempo proposto para a atividade.

Embora não tenha sido aplicados os métodos da posição falsa e da secante, esperamos que possamos introduzi-los de forma complementar a sequência didática como uma proposta de trabalhos futuros.

Quanto à utilização dos aplicativos de celular é preciso estar atento ao uso de softwares pois a tecnologia pode ser útil quando atender as necessidades dos alunos no que diz respeito a ilustração da situação, na otimização do tempo para efetuar cálculos trabalhosos e na interpretação geométrica do problema em questão e ainda possibilitar o protagonismo dos mesmos de forma que produzam seus próprios conhecimentos e saibam selecionar as informações necessárias a resolução do problema como afirma (Brasil,2008 - p.89): "a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado". Considerando isto, sentimos dificuldade quanto ao acesso pois percebemos que muitos não dispõem de celulares, no que foi proposto a realização de trabalhos em grupos para que todos estivessem inseridos no processo.

Portanto, notamos que os objetivos foram alcançados de forma a contribuir para quebrar paradigmas e promover discussões a nível acadêmico no que diz respeito à aplicação de métodos numéricos no ensino médio. Além disso, fortalecer a ideia de que esse conteúdo permite ao professor trabalhar de forma integrada com conteúdos de álgebra e geometria aliado às tecnologias, pouco trabalhadas nesse nível de ensino.

Referências Bibliográficas

AFUSO, A. Y. *Métodos Numéricos para Encontrar Zeros de Funções: Aplicações para o Ensino Médio*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista: Júlio de Mesquita Filho, 2014.

BRASIL, M. da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e T. S. *Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio*. [S.l.]: Brasília, DF: MEC/Semtec, 1999.

CARNEIRO, R. d. S. *Métodos de Resolução de Equações do Terceiro Grau*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Tocantins, 2015.

CUNHA, M. *Métodos Numéricos*. 2. ed. [S.l.]: Campinas: Editora Unicamp, 2011.

DANTE, L. R. *Matemática, Contexto e aplicações*. 2. ed. [S.l.]: São Paulo: Editora Ática, 2000. v. 3.

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. *Sequências Didáticas para o Oral e a Escrita: Apresentação de um Procedimento*. [S.l.]: Campinas, SP: Mercado das Letras, 2004.

FRANCO, N. M. B. *Cálculo Numérico*. 2. ed. [S.l.]: São Paulo: Pearson Universidades, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 5. ed. [S.l.]: Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática*. 3. ed. [S.l.]: São Paulo: McGraw-Hill, 2009. v. 6.

INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE. *Geogebra.org*. acesso em 2019. Disponível em: ⟨https://www.geogebra.org/⟩.

JUNIOR, R. R. O.; ABBEG, T. P. História, resolução numérica e geogebra no ensino de equações algébricas. Professor de Matemática Online, v. 4, n. 1, 2016.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. [S.l.]: Sao Paulo: HARBRA, 1994. v. 2.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matematica e Outras Histórias*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 1991.

______. *Análise Real*. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1.

MATOS, E. B. d. *Estudo de Equações do Terceiro Grau no Ensino Médio a partir da Equação de Van Der Waals*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Maria, 2014.

MEDEIROS, V. Z.; CALDEIRA, A. M.; SILVA, L. M. O. da; MACHADO, M. A. S. *Pré-Calculo*. 2. ed. [S.l.]: Sao Paulo: Cengage, Learning, 2013.

NASCIMENTO, D. A. d. *Métodos para Encontrar Raízes Exatas e Aproximadas de Funções Polinomias do 4º Grau*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, 2015.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. d. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2. ed. [S.l.]: São Paulo: Makron Books,Pearson, 2009.

SANCHES, I. J.; FURLAN, D. C. *Métodos Numéricos*. [S.l.]: Universidade Federal do Paraná: Departamento de Informática, 2007.

SANTOS, A. T. dos. *Métodos Resolutivos de Equações Algébricas e Análise das Raízes de Funções Polinomiais*. Tese (Doutorado) — PUC–Rio, 2017.

SOUZA, A. G. d. *Resolução de Equações via Métodos Numéricos: Bisseção e Falsa Posição*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Goiás, 2017.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; M., S. L. H. *Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos*. [S.l.]: São Paulo:Pearson Prentice Hall, 2003.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA
CEP: 44380-000
Telefone: (75) 3621-2350
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>