



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
PROGRAMA DE MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO



APLICAÇÕES DE FUNÇÕES AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E  
LOGARÍTMICA EM QUESTÕES CONTEXTUALIZADAS.

JORGE SERVA DE ARAÚJO JUNIOR

**Cruz das Almas-Bahia**  
Julho de 2019



APLICAÇÕES DE FUNÇÕES AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E  
LOGARÍTMICA EM QUESTÕES CONTEXTUALIZADAS.

JORGE SERVA DE ARAÚJO JUNIOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientadora:** Prof. Dra. Maria Amelia de Pinho Barbosa Hohlenwerger

**Cruz das Almas-Bahia**

Julho de 2019

A663a Araújo Junior, Jorge Serva.

Aplicações de funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica em questões contextualizadas. / Jorge Serva de Araújo Junior. – Cruz das Almas, BA, 2019.

79 f. ; il.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Amelia de Pinho Barbosa Hohlenwerger.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática - Funções (Matemática). I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia . II. Título.

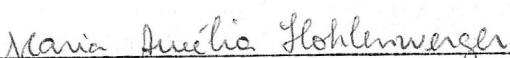
CDD : 510.7

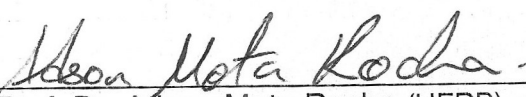
# APLICAÇÕES DE FUNÇÕES AFIM, QUADRÁTICA, EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA EM QUESTÕES CONTEXTUALIZADAS.

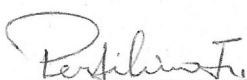
JORGE SERVA DE ARAÚJO JUNIOR

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de julho de 2019.

## Banca examinadora:

  
Prof.<sup>a</sup>. Dra. Maria Amélia de P. B. Hohlenwergger (UFRB)  
Presidente

  
Prof. Dr. Adson Mota Rocha (UFRB)  
Membro da Banca

  
Prof. Dr. Perfilino Eugênio Ferreira Junior (UFBA)  
Membro da Banca



A Deus, pois sem Ele nada disso seria possível.  
Aos meus lindos, maravilhosos, meigos e encantadores filhos que tanto amo, razão do meu viver: Daniela Serva, Carolina Serva e Arthur Serva.

DEDICO





# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, criador de todas as coisas.

Agradeço aos meus queridos filhos que amo muito, razão do meu viver: Daniela Serva, Carolina Serva e Arthur Serva, que com seus sorrisos ingênuos e carinhos me incentivaram na conclusão deste trabalho.

Agradeço a minha esposa Priscila Serva, que sempre entendeu as minhas ausências, por conta do estudo, pelo imenso incentivo e apoio dado ao longo do mestrado.

Agradeço aos meus pais que sempre me apoiaram nos momentos mais difíceis na minha árdua jornada acadêmica.

Agradeço aos meus irmãos Ricardo, André, João e Vanessa por sempre me incentivarem.

Agradeço a minha orientadora, amiga, Profa. Dra. Maria Amelia de Pinho Barbosa Hohlenwerger com sua paciência e atenção dada ao longo da escrita da dissertação, foi uma pessoa fundamental na realização deste trabalho.

Agradeço aos colegas do Mestrado Profmat UFRB turma de 2017: Dilmara, Eduardo, Fabrícia, José, Otávio, Ramon, por todo auxílio dado e coleguismo durante todo o curso, e em especial aos colegas Rodrigo, Ubiraci e Wilson pelos bons momentos na ida e na vinda do trajeto Salvador - Cruz Almas nas quintas-feira e pelo apoio dado uns aos outros durante a trajetória difícil e árdua do mestrado.

Agradeço a todos os professores do Profmat, em especial prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo e ao prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo.

Agradeço à SBM pela iniciativa do Profmat e à CAPES pelo suporte Financeiro.

E por fim agradeço a todas as pessoas que diretamente e indiretamente me apoiaram, contribuíram e fizeram parte da minha trajetória no mestrado, de modo a concluir com sucesso.

Obrigado.



*“Há um tempo em que é preciso abandonar  
as roupas usadas, que já têm a forma do  
nosso corpo, e esquecer os nossos caminhos,  
que nos levam sempre aos mesmos lugares. É  
o tempo da travessia: e, se não ousarmos  
fazê-la, teremos ficado, para sempre, à  
margem de nós mesmos.”*

*Fernando Teixeira de Andrade*



# Resumo

A abordagem acerca das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica nos livros didáticos da educação básica prioriza os seus aspectos formais e exercícios com aplicação direta de fórmulas, sem ter a preocupação de contextualizar os conteúdos. O objetivo geral desta pesquisa é apresentar a contextualização dos referidos conteúdos, trazendo sequências didáticas com essas contextualizações. Para dar fundamento às sequências didáticas propostas, foram apresentados os principais conceitos, definições, teoremas, lemas, propriedades e aplicações das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Como principal resultado, este estudo apresenta uma gama de possibilidades de contextualizações que pode facilmente ser trabalhada no 1º ano do Ensino Médio.

**Palavras-chave:** funções, aplicações, contextualização



# Abstract

The approach to the affine, quadratic, exponential and logarithmic functions in basic education textbooks prioritizes their formal aspects and exercises with the direct application of formulas, without the concern of contextualizing the contents. The general objective of this research is to present the contextualization of said contents, bringing didactic sequences with these contextualizations. The main concepts, definitions, theorems, lemmas, properties and applications of the affine, quadratic, exponential and logarithmic functions were presented to support the proposed didactic sequences. As a main result, this study presents a range of contextualization possibilities that can easily be worked out in the 1st year of High School.

**Keywords:** functions, applications, contextualization





# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Função Afim e Função Quadrática</b>	<b>3</b>
1.1 Breve revisão de conceitos básicos de Função . . . . .	4
1.2 Função Afim . . . . .	4
1.2.1 Função Linear . . . . .	5
1.2.2 Gráfico da Função Afim . . . . .	7
1.3 Função Quadrática . . . . .	9
1.3.1 Forma Canônica da Função Quadrática . . . . .	9
1.3.2 Vértice do Gráfico da Função Quadrática . . . . .	10
1.3.3 Máximo e Mínimo da Função Quadrática . . . . .	13
1.3.4 Estudo do Sinal da Função Quadrática . . . . .	13
1.3.5 Eixo de Simetria do Gráfico da Função Quadrática . . . . .	16
1.3.6 O Gráfico da Função Quadrática . . . . .	17
1.4 Aplicações . . . . .	18
<b>2 Função Exponencial e Função Logarítmica</b>	<b>21</b>
2.1 Função Exponencial . . . . .	21
2.1.1 Gráfico da Função Exponencial . . . . .	25
2.2 Função Logarítmica . . . . .	25
2.2.1 Gráfico da Função Logarítmica . . . . .	27
2.3 Aplicações . . . . .	27
2.3.1 Matemática Financeira . . . . .	27
2.3.2 Lei de resfriamento de Newton . . . . .	33
<b>3 Questões Contextualizadas</b>	<b>35</b>
3.1 Questões Contextualizadas de Funções Afim e Quadrática . . . . .	35
3.2 Questões Contextualizadas de Funções Exponencial e Logarítmica . . . . .	41

<b>4 Proposta de Sequência Didática</b>	<b>47</b>
4.1 Sequência Didática da Função Afim . . . . .	47
4.2 Sequência Didática da Função Quadrática . . . . .	51
4.3 Sequência Didática da Função Exponencial e Logarítmica . . . . .	53
<b>Considerações Finais</b>	<b>57</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>

# Introdução

Vários conceitos básicos da Matemática, criados para atender a certas necessidades e resolver problemas específicos, revelaram posteriormente uma utilidade bem mais ampla do que inicialmente pensada e vieram, com a evolução das ideias e o desenvolvimento das teorias, a adquirir uma posição definitiva de grande relevância nesta Ciência. Em alguns casos, a utilidade original foi, com o tempo, superada por novas técnicas, mas a relevância teórica se manteve.

O processo ensino-aprendizagem da matemática possui diversas dificuldades, principalmente nas séries finais do Ensino Fundamental II, bem como no Ensino Médio. Podemos destacar duas causas para tais dificuldades, são elas: o ensino das teorias dos conteúdos é realizado de forma mecânica, sem trazer a contextualização dos assuntos trabalhados e a deficiência dos alunos nos conteúdos que são trabalhados em séries anteriores, os quais formam a base dos assuntos das séries finais do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio.

No ensino da matemática na educação básica, a maioria dos livros didáticos não trazem questões contextualizadas sobre funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, focando basicamente em questões puramente mecânicas ou em aplicação direta de fórmulas. Um aspecto relevante que explica a problemática apresentada é a constatação de que os livros didáticos pesquisados apresentam pouca diversidade de metodologia para o ensino deste tema, fazendo com que o professor e os alunos não tenham acesso a outras possibilidades de explicação e compreensão respectivamente.

Neste sentido, justificamos a importância deste estudo, pois aponta para uma nova metodologia para o ensino das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, com foco em questões contextualizadas, sendo apresentado sequências didáticas que podem ser trabalhadas de forma tranquila e com abordagem na contextualização dos referidos conteúdos. Quanto à relevância científica, esta pesquisa servirá de base para novos estudos sobre o tema, bem como, para o aperfeiçoamento de metodologias do ensino da matemática.

Este trabalho foi desenvolvido a partir de análise documental e pesquisa bibliográfica e tem por finalidade apresentar uma proposta metodológica para o ensino das

funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, tendo como objetivo específico apresentar questões contextualizadas.

O trabalho está estruturado em 4 capítulos, seguidos das considerações finais. No Capítulo 1, apresentamos uma breve revisão dos conceitos básicos de função, depois disso tratamos da teoria das funções afim e quadrática em conformidade com os livros didáticos da educação básica. Discorreremos também nesse capítulo sobre aplicações de função afim e quadrática, quais sejam: demanda e oferta de mercado, receita, custo e lucro.

No Capítulo 2, apresentamos a teoria das funções exponenciais e logarítmicas em conformidade com os livros didáticos da educação básica. Discorreremos também nesse capítulo sobre aplicações de função exponencial e logarítmica, quais sejam: matemática financeira e lei de resfriamento de Newton.

No Capítulo 3, abordamos questões contextualizadas sobre as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Essas questões servem para mostrar a importância de aproximar o conteúdo trabalhado com o dia a dia das pessoas, tornando assim a aprendizagem dos referidos conteúdos mais efetiva.

No Capítulo 4, apresentamos e definimos três sequências didáticas a serem aplicadas aos estudantes do 1º ano do Ensino Médio, para contextualização do conteúdo sobre funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

Nas Considerações Finais, fizemos a retomada das principais questões e constatações que permeiam este trabalho e sugerimos novos estudos para aperfeiçoamento do mesmo.

# Capítulo 1

## Função Afim e Função Quadrática

Todos os conceitos e demonstrações deste capítulo foram baseados nas referências [7], [8], [9], [10], [11] e [14].

Neste capítulo faremos uma breve revisão sobre as definições de função, de gráfico de uma função e de crescimento e decrescimento das funções. Depois iniciaremos o estudo da função afim, uma das funções que possui um vasto número de aplicações no cotidiano das pessoas: como por exemplo a proporcionalidade. Após o estudo da função afim, iremos estudar a função quadrática, que também possui um vasto número de aplicações: como exemplo, o cálculo do custo mínimo de uma empresa na produção dos seus produtos. E, ao final do capítulo, apresentaremos algumas aplicações dessas funções.

O objetivo específico deste capítulo é mostrar a existência de aplicações das funções afim e quadrática que podem ser utilizadas tranquilamente no processo ensino-aprendizagem da educação básica, tanto no 9º ano do Ensino Fundamental II quanto no Ensino Médio.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006:

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática [3, p.121].

Dessa forma, as funções, no contexto da matemática escolar com vistas às aplicações, ocupam lugar de destaque, pois lidam diretamente com aspectos importantes a serem desenvolvidos na escola, tanto no Ensino Fundamental II quanto no Ensino Médio, que são: a natureza algébrica; as diferentes formas de representação; aplicação a problemas e situações da vida e de outras ciências; articulação com outros tópicos da própria Matemática.

## 1.1 Breve revisão de conceitos básicos de Função

Antes de começarmos o estudo das funções afim e quadrática, iremos rever alguns conceitos básicos de função e algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho.

**Definição 1.1.1.** *Dados dois conjuntos não vazios  $X$  e  $Y$ , uma função  $f : X \rightarrow Y$  (lê-se "f de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um único elemento  $y \in Y$ .*

*Observações 1.1.1.* (i) O conjunto  $X$  é denominado de **Conjunto Domínio** da função  $f$ , e será denotado por  $D(f)$ .

(ii) O conjunto  $Y$  é denominado de **Conjunto Contra Domínio** da função  $f$ , e será denotado por  $CD(f)$ .

(iii) Para cada  $x \in X$ , o elemento  $y = f(x) \in Y$  chama-se a imagem de  $x$  pela função  $f$ , ou valor assumido por  $f$  no ponto  $x \in X$ . E o conjunto formado por todos os  $y = f(x) \in Y$  que estão associados a algum  $x \in X$  é denominado de **Conjunto Imagem** da função  $f$ , e será denotado por  $Im(f)$ .

**Definição 1.1.2.** *O gráfico de uma função  $f$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y)$  do plano cartesiano ortogonal, tal que  $x \in D(f)$  e  $y = f(x) \in Im(f)$ .*

**Definição 1.1.3.** *Seja a função real  $f(x)$  e dois pontos  $x_1 \in D(f)$  e  $x_2 \in D(f)$ , quaisquer, então temos que:*

(i) *Se para  $x_1 < x_2$  tem-se  $f(x_1) < f(x_2)$ , então a função  $f(x)$  é estritamente crescente.*

(ii) *Se para  $x_1 < x_2$  tem-se  $f(x_1) > f(x_2)$ , então a função  $f(x)$  é estritamente decrescente.*

(iii) *Se para  $x_1 \neq x_2$  tem-se  $f(x_1) = f(x_2)$ , então a função  $f(x)$  é constante  $D(f)$ .*

## 1.2 Função Afim

Começaremos o estudo da função Afim. Essa função começa a ser abordada no 9º ano do Ensino Fundamental II e depois é retomado o seu estudo de um modo mais aprofundado no 1º ano do Ensino Médio.

**Definição 1.2.1.** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se afim quando existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Exemplo 1.2.1.* A função translação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x + b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , é uma função afim.

*Observação 1.2.1.* A função constante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ , é um caso particular de função afim.

**Lema 1.2.1.** Dada a função afim  $f(x) = ax + b$  com  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f$  é crescente se, e somente se  $a > 0$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Considere  $x_1 \in D(f)$  e  $x_2 \in D(f)$ , com  $x_1 < x_2$ . Como  $f$  é crescente, temos que  $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 - ax_2 < 0 \Rightarrow a(x_1 - x_2) < 0 \Rightarrow a > 0$ , pois  $(x_1 - x_2) < 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Considere  $x_1 \in D(f)$  e  $x_2 \in D(f)$ , com  $x_1 < x_2$ , e  $a > 0$ . Temos que  $x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ , logo  $f(x)$  é crescente.  $\square$

Analogamente,  $f$  é decrescente se, e somente se  $a < 0$ .

### 1.2.1 Função Linear

A função linear,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax$ ; com  $a \in \mathbb{R}^*$ , é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

*Observação 1.2.2.* A função linear é um caso particular da função afim quando  $b = 0$ .

*Exemplo 1.2.2.* A função identidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , é um caso particular de função afim que é linear.

**Definição 1.2.2.** Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número real, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número.

**Definição 1.2.3.** Uma proporcionalidade é uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para quaisquer números reais  $c$  e  $x$ , tem-se  $f(cx) = cf(x)$  (proporcionalidade direta) ou  $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$ , se  $c \neq 0$  (proporcionalidade inversa).

*Exemplo 1.2.3.* Em um determinado supermercado o preço do quilograma do feijão custa R\$4,60 então  $x$  quilogramas custam  $f(x) = 4,60x$ .

**Teorema 1.2.1** (Teorema Fundamental da Proporcionalidade). Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(I)  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(II) Pondo  $a = f(1)$ , tem-se  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

(III)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Primeiramente iremos demonstrar  $(I) \Rightarrow (II)$ , depois  $(II) \Rightarrow (III)$  e por fim  $(III) \Rightarrow (I)$ .

A fim de demonstrar que  $(I) \Rightarrow (II)$ , primeiramente provaremos que, para todo número racional  $r = \frac{m}{n}$  a hipótese  $(I)$  acarreta que  $f(rx) = rf(x)$ , qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ . Com efeito, tem-se

$$nf(rx) = f(nrx) = f(mx) = mf(x),$$

logo

$$f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = rf(x).$$

Seja  $a = f(1)$ . Como  $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$ , e  $f$  é crescente, temos que  $a = f(1) > f(0) = 0$ . Logo  $a$  é positivo.

Além disso, temos que  $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = ar$ , para todo  $r \in \mathbb{Q}$ .

Mostraremos agora que se tem  $f(x) = ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Suponha, por absurdo, que exista algum número real  $x$  (necessariamente irracional) tal que  $f(x) \neq ax$ . Admita  $f(x) < ax$  (O caso  $f(x) > ax$  possui tratamento análogo). Daí, temos que

$$\frac{f(x)}{a} < x.$$

Tome um número racional  $r$  de tal modo que se tenha

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

Então  $f(x) < ar < ax$ , ou seja,  $f(x) < f(r) < ax$ . Mas isto é um absurdo, pois  $f$  é crescente. Assim, concluímos que  $f(x) = ax$ .

Demonstraremos agora que  $(II) \Rightarrow (III)$ .

De  $(II)$  temos que  $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$ .

Agora, veremos que  $(III) \Rightarrow (I)$ . Iremos demonstrar por indução finita.

$$(i) \quad f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0) = f(x) + 0 = 1 \cdot f(x).$$

$$(ii) \quad f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2 \cdot f(x).$$

$$(iii) \quad \text{Suponha que } f(nx) = n \cdot f(x).$$

$$f((n + 1) \cdot x) = f(n \cdot x + x) = f(nx) + f(x) = n \cdot f(x) + f(x) = (n + 1) \cdot f(x).$$

Logo  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

□



### 1.2.2 Gráfico da Função Afim

O gráfico da função afim,  $f(x) = ax + b$ , é uma reta que pode intersectar o eixo das abscissas.

1. Se  $a > 0$ , então a reta intersecta o eixo das abscissas e é crescente;
2. Se  $a < 0$ , então a reta intersecta o eixo das abscissas e é decrescente;
3. Se  $a = 0$ , então a reta é paralela ao eixo das abscissas, podendo estar acima ou abaixo desse eixo ou sobre esse eixo.

Daí o gráfico da função afim poderá ter uma das seguintes representações.

Quando  $a \neq 0$

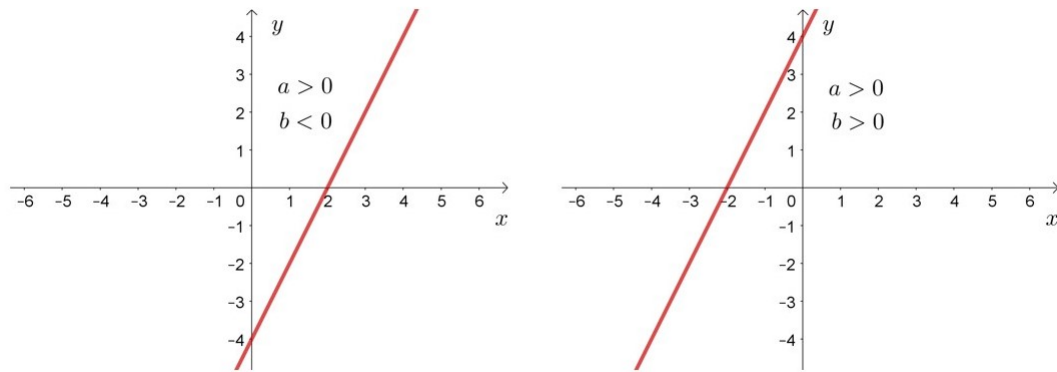


Figura 1.1: Gráfico da função afim  $f(x) = a \cdot x + b$  quando  $a > 0$  e  $b \neq 0$ .

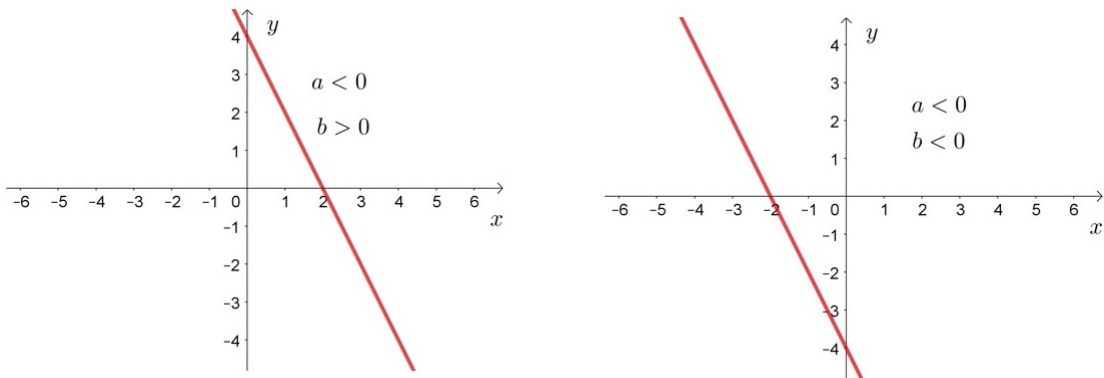


Figura 1.2: Gráfico da função afim  $f(x) = a \cdot x + b$  quando  $a < 0$  e  $b \neq 0$ .

Quando  $a = 0$

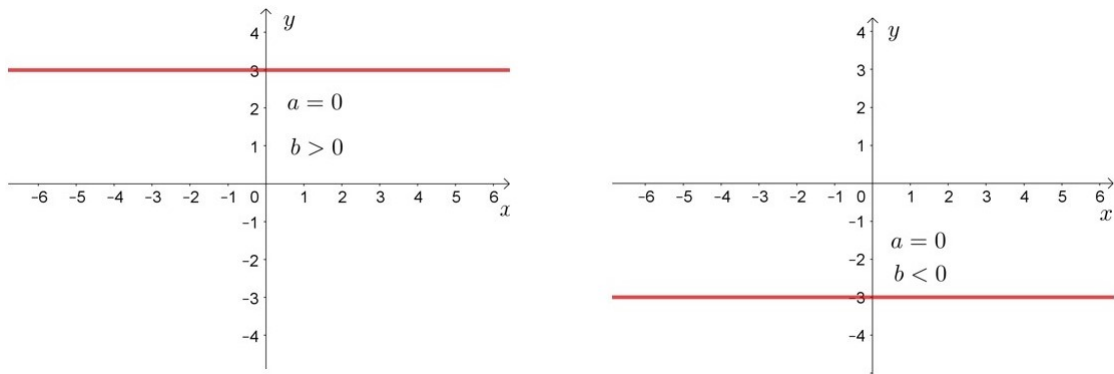


Figura 1.3: Gráfico da função constante quando  $b \neq 0$ .

*Observação 1.2.3.* Podemos observar que o conjunto imagem da função afim  $f(x) = ax + b$  é:

- i)  $Im(f) = \mathbb{R}$  para quaisquer valores de  $a \neq 0$ ;
- ii)  $Im(f) = \{b\}$ , para  $a = 0$ .

Como já afirmamos anteriormente, os livros didáticos usados na educação básica da escola pública não focam em questões contextualizadas.

Traremos agora um exemplo de questão sem contextualização sobre os conteúdos visto até aqui, retirada de um livro didático.

*Exemplo 1.2.4. Questão:* Resolva analiticamente e geometricamente o sistema de equação

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} .$$

(Questão retirada do livro [8, página 102])

Quando comparamos a questão acima com a questão (3.1.0.1) do capítulo 3, a qual é uma questão contextualizada, percebe-se claramente que essa última facilita o entendimento e compreensão por parte dos alunos dos assuntos trabalhados, pois enxergarão com mais facilidade aonde aplicar os conteúdos no cotidiano.

## 1.3 Função Quadrática

Começaremos o estudo da função quadrática. Assim, como na função afim, a função quadrática começa a ser abordada no 9º ano do Ensino Fundamental II e depois é retomado o seu estudo de um modo mais aprofundado no 1º do Ensino Médio.

**Definição 1.3.1.** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se quadrática quando existem constantes  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$  tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Exemplo 1.3.1.*

(i)  $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$  ;

(ii)  $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 9x$  ;

(iii)  $f(x) = -8x^2 + 13$  .

### 1.3.1 Forma Canônica da Função Quadrática

Para prosseguirmos com o estudo da função quadrática, vamos primeiramente encontrar uma forma mais conveniente para escrevê-la, denominada de forma

canônica. Dada a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b, c \in \mathbb{R}$ . Temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \cdot \left[ \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right] \\ &= a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Logo a forma canônica da função quadrática  $f(x)$  é dada por:

$$f(x) = a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]. \quad (1.1)$$

### 1.3.2 Vértice do Gráfico da Função Quadrática

Considere a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b$  e  $c \in \mathbb{R}$ , escrita na forma canônica (1.1), segue-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] \\ &= a \cdot \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \cdot \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \\ &= a \cdot \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right). \end{aligned}$$

Como  $x \in \mathbb{R}$ , temos que o termo  $a \cdot \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  se anula quando  $x = -\frac{b}{2a}$  e daí segue que  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ .

Portanto temos um ponto da parábola que possui coordenadas  $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right)$ , ou seja

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right), \quad (1.2)$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac$  é chamado de discriminante da função quadrática.

Passaremos a analisar o comportamento da função na vizinhança do ponto (1.2).

Primeiramente iremos analisar o comportamento da função quando  $a > 0$ .

### 1ª Parte

Considere  $x_1 > x_2$ , com  $x_1 < \frac{-b}{2a}$  e  $x_2 < \frac{-b}{2a}$ . Segue-se que  $x_1 + \frac{b}{2a} < 0$  e  $x_2 + \frac{b}{2a} < 0$ .

Logo  $x_1 + x_2 + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{b}{a} < 0$ .

Calculando  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$ , obtemos:

$$f(x_1) = a \cdot \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \quad (1.3)$$

e

$$f(x_2) = a \cdot \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right). \quad (1.4)$$

Fazendo (1.3)–(1.4), obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= a \cdot \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a \cdot \left[ \left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 \right] \\ &= a \cdot \left[ x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{b^2}{4a^2} - x_2^2 - 2 \cdot x_2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \cdot \left[ x_1^2 - x_2^2 + x_1 \cdot \left(\frac{b}{a}\right) - x_2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right) \right] \\ &= a \cdot \left[ (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) + (x_1 - x_2) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) \right] \\ &= \underbrace{a}_{>0} \cdot \left[ \underbrace{(x_1 - x_2)}_{>0} \cdot \underbrace{\left(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}\right)}_{<0} \right] < 0. \end{aligned}$$

Então, temos que  $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ . Isto significa que a função  $f(x)$  é decrescente para  $x < \frac{-b}{2a}$ .

## 2ª Parte

Considere agora  $x_3 < x_4$ , com  $x_3 > \frac{-b}{2a}$  e  $x_4 > \frac{-b}{2a}$ . Segue-se que  $x_3 + \frac{b}{2a} > 0$  e  $x_4 + \frac{b}{2a} > 0$ .

Logo  $x_3 + x_4 + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow x_3 + x_4 + \frac{b}{a} > 0$ .

Calculando  $f(x_3)$  e  $f(x_4)$ , obtemos:

$$f(x_3) = a \cdot \left(x_3 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \quad (1.5)$$

e

$$f(x_4) = a \cdot \left(x_4 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right). \quad (1.6)$$

Fazendo (1.5)–(1.6), obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_3) - f(x_4) &= a \cdot \left(x_3 + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \left(x_4 + \frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a \cdot \left[ \left(x_3 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(x_4 + \frac{b}{2a}\right)^2 \right] \\ &= a \cdot \left[ x_3^2 + 2 \cdot x_3 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{b^2}{4a^2} - x_4^2 - 2 \cdot x_4 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2}{4a^2} \right] \\ &= a \cdot \left[ x_3^2 - x_4^2 + x_3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right) - x_4 \cdot \left(\frac{b}{a}\right) \right] \\ &= a \cdot \left[ (x_3 + x_4) \cdot (x_3 - x_4) + (x_3 - x_4) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) \right] \\ &= \underbrace{a}_{>0} \cdot \left[ \underbrace{(x_3 - x_4)}_{<0} \cdot \underbrace{\left(x_3 + x_4 + \frac{b}{a}\right)}_{>0} \right] < 0. \end{aligned}$$

Então, temos que  $f(x_3) - f(x_4) < 0 \Rightarrow f(x_3) < f(x_4)$ . Isto significa que a função  $f(x)$  é crescente para  $x > \frac{-b}{2a}$ .

Com raciocínio análogo para  $a < 0$ , chegamos à conclusão de que  $f(x)$  é crescente para  $x < \frac{-b}{2a}$  e  $f(x)$  é decrescente para  $x > \frac{-b}{2a}$ .

Portanto o ponto  $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$  é o ponto em que a parábola inverte seu crescimento (ou decrescimento). Esse ponto é denominado de *vértice da parábola* e denotado por  $V$ . Daí dizemos que  $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$  é o vértice da parábola da função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

### 1.3.3 Máximo e Mínimo da Função Quadrática

Considere a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  escrita na forma

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right),$$

daí temos:

- i) Se  $a > 0$ , então o menor valor de  $f(x)$  ocorre quando  $x = \frac{-b}{2a}$ .
- ii) Se  $a < 0$ , então o maior valor de  $f(x)$  ocorre quando  $x = \frac{-b}{2a}$ .

Portanto podemos dizer que o vértice da parábola de  $f(x)$  é ponto de mínimo e  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  é o seu valor mínimo quando  $a > 0$ , e que o vértice da parábola de  $f(x)$  é ponto de máximo e  $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$  é o seu valor máximo quando  $a < 0$ .

### 1.3.4 Estudo do Sinal da Função Quadrática

Dada a função quadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $b, c \in \mathbb{R}$ . Estudar o sinal da função quadrática  $f(x)$  é determinar os valores de  $x \in \mathbb{R}$  de modo a obter:

- I.  $f(x) = 0$
- II.  $f(x) > 0$
- III.  $f(x) < 0$

Na determinação do sinal da função quadrática  $f(x)$ , devemos começar pelo cálculo do discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$ , aparecendo assim três casos distintos.

- a)  $\Delta < 0$
- b)  $\Delta = 0$
- c)  $\Delta > 0$

Vamos analisar estes três casos:

1º Caso:  $\Delta < 0$

Considere a função quadrática  $f(x)$  escrita na forma (1.1) e multiplicando-a por  $a$ , obtemos:

$$\begin{aligned} a \cdot f(x) &= a^2 \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] \\ &= a^2 \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\Delta}{4a^2} \right) \right] \\ &= \underbrace{a^2}_{>0} \cdot \left[ \underbrace{\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left( \frac{-\Delta}{4a^2} \right)}_{>0} \right] > 0 \\ a \cdot f(x) &> 0 \quad . \end{aligned}$$

Isto significa que a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , quando  $\Delta < 0$ , tem o sinal de  $a$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , ou seja,

1.  $a > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $a < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2º Caso:  $\Delta = 0$

Considere a função quadrática  $f(x)$  escrita na forma (1.1) e multiplicando-a por  $a$ , obtemos:

$$\begin{aligned} a \cdot f(x) &= a^2 \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] \\ &= a^2 \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\Delta}{4a^2} \right) \right] \\ &= \underbrace{a^2}_{>0} \cdot \left[ \underbrace{\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\left( \frac{\Delta}{4a^2} \right)}_{=0} \right] \geq 0 \\ a \cdot f(x) &\geq 0 \quad . \end{aligned}$$

Isto significa que a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , quando  $\Delta = 0$ , tem o sinal de  $a$



para todo  $x \in \mathbb{R} - \left\{ x = \frac{-b}{2a} \right\}$ , ou seja,

$$1. a > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$2. a < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

3º Caso:  $\Delta > 0$

Considere a função quadrática  $f(x)$  escrita na forma (1.1) e multiplicando-a por  $a$ , obtemos:

$$\begin{aligned} a \cdot f(x) &= a^2 \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right] \\ &= a^2 \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \sqrt{\left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)} \right)^2 \right] \\ &= a^2 \cdot \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right] \\ &= a^2 \cdot \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right). \end{aligned}$$

Então temos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \cdot \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right). \quad (1.7)$$

Considere

$$x_1 = - \left( \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \quad (1.8)$$

e

$$x_2 = - \left( \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right). \quad (1.9)$$

Substituindo (1.8) e (1.9) em (1.7), obtemos:

$$a \cdot f(x) = a^2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2). \quad (1.10)$$

O sinal de  $a \cdot f(x)$  depende do sinal dos fatores  $(x - x_1)$  e  $(x - x_2)$ . Sem perda de generalidade, considere  $x_1 < x_2$ . De (1.10), temos que:

1. o sinal de  $f(x)$  é o sinal de  $a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  tal que  $x < x_1$  ou  $x > x_2$ ;

2. o sinal de  $f(x)$  é o sinal de  $-a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  tal que  $x_1 < x < x_2$ .

### 1.3.5 Eixo de Simetria do Gráfico da Função Quadrática

**Definição 1.3.2.** *Eixo de simetria de um gráfico de determinada função é uma reta que divide o gráfico dessa função em duas partes simétricas (iguais).*

**Teorema 1.3.1.** *O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos  $x$  e que passa pelo vértice, isto é, passa por  $x = \frac{-b}{2a}$ .*

Para provarmos que a parábola da função quadrática tem eixo de simetria na reta  $x = \frac{-b}{2a}$ , devemos mostrar que, dado um ponto  $P\left(\frac{-b}{2a} - r, y\right)$ , com  $r \in \mathbb{R}$ , pertencente ao gráfico da função, então existe um ponto  $Q\left(\frac{-b}{2a} + r, y\right)$ , com  $r \in \mathbb{R}$ , que também pertence ao gráfico da função.

*Demonstração.* Considere a função quadrática  $f(x)$  escrita na forma

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

e considere que o ponto  $P\left(\frac{-b}{2a} - r, y\right)$  pertence ao gráfico da função. Temos,

$$\begin{aligned} y &= f\left(\frac{-b}{2a} - r\right) \\ &= a \cdot \left(\frac{-b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \\ &= a \cdot (-r)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \\ &= a \cdot (r)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \\ &= a \cdot \left(\frac{-b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \\ &= f\left(\frac{-b}{2a} + r\right). \end{aligned}$$

Portanto existe  $Q\left(\frac{-b}{2a} + r, y\right)$  pertencente ao gráfico da função quadrática  $f(x)$ .  $\square$

### 1.3.6 O Gráfico da Função Quadrática

O gráfico da função quadrática,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , é uma parábola de concavidade voltada para cima ou para baixo.

1. Se  $a > 0$ , então a parábola possui concavidade voltada para cima;
2. Se  $a < 0$ , então a parábola possui concavidade voltada para baixo.

Daí o gráfico da função quadrática poderá ter uma das seguintes representações.

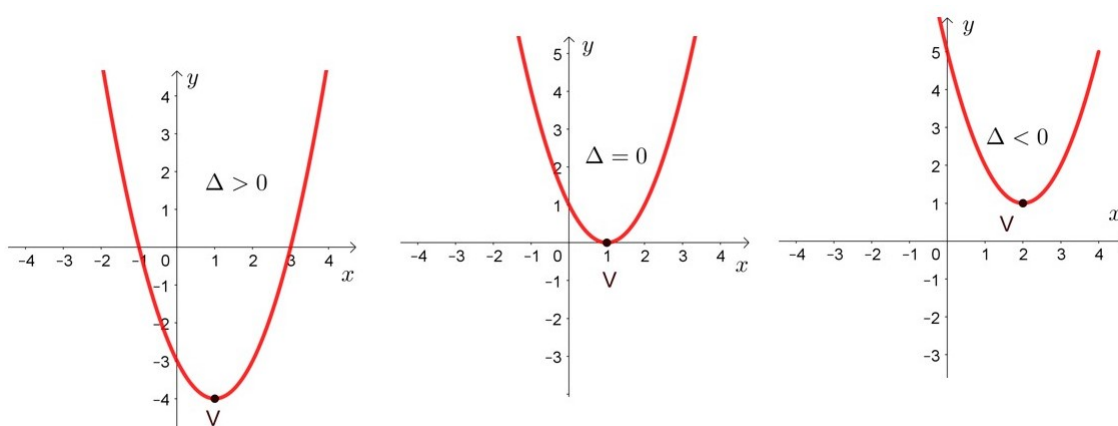


Figura 1.4: Gráfico da função quadrática quando  $a > 0$ .

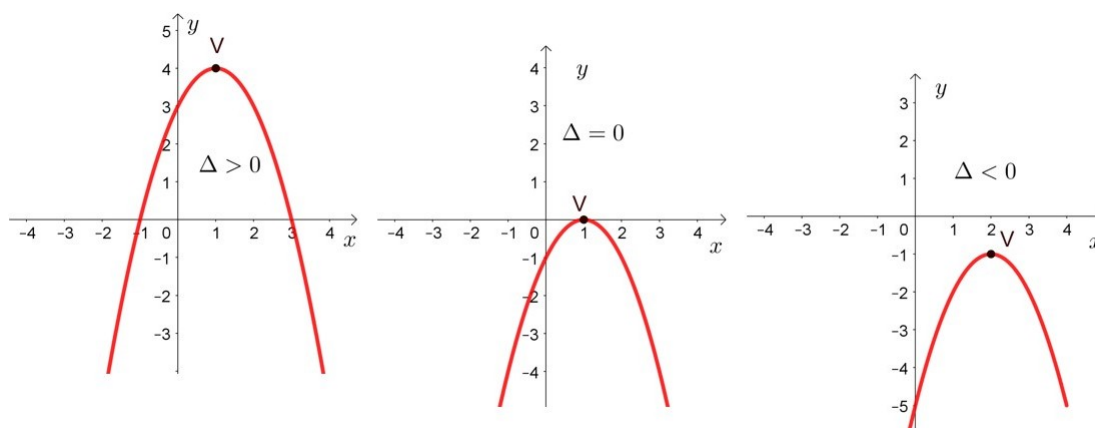


Figura 1.5: Gráfico da função quadrática quando  $a < 0$ .

*Observação 1.3.1.* Podemos observar que o conjunto imagem da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c :$$

- i) Quando  $a > 0$ , é  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\}$ ;

ii) Quando  $a < 0$ , é  $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$ ,

onde  $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$  é a ordenada do vértice.

## 1.4 Aplicações

Esta seção foi destinada para analisarmos algumas aplicações das funções afim e quadrática, as quais podem ser introduzidas com tranquilidade no 9º ano do Ensino Fundamental II e no 1º ano do Ensino Médio. Precisaremos apresentar alguns conceitos para resolução das questões contextualizadas apresentadas no capítulo 3.

Sabemos que numa economia de livre mercado, a demanda de consumo de utilidades depende do preço unitário dessa utilidade. Uma equação de demanda expressa a relação entre o preço por unidade e a quantidade demandada. O gráfico da função demanda é chamado de *curva de demanda*. Em geral, a quantidade demandada de uma utilidade decresce à medida que o preço por unidade dessa utilidade cresce, e vice-versa.

**Definição 1.4.1.** *Seja  $U$  uma utilidade qualquer (bens ou serviços) e seja  $D$  a demanda ou procura de mercado desta utilidade a um preço  $P$ , ou seja, é a soma das quantidades que todos os compradores do mercado estão dispostos e aptos a adquirir ao preço  $P$ , em determinado período de tempo, por exemplo um dia, uma semana, um mês, um semestre, um ano etc.*

*Chama-se de função Demanda ou função procura de mercado da utilidade, em um determinado período de tempo a ser considerado, a função que associa a demanda ou procura de mercado  $D$  ao preço  $P$ . Essa função é facilmente identificada como uma função afim ou quadrática.*

*Exemplo 1.4.1.* A função dada por  $D = 45 - 5P$ , onde  $P$  é o preço por unidade do bem ou serviço e  $D$  a demanda de mercado correspondente.

*Exemplo 1.4.2.* A função dada por  $D = -2P^2 - 4P + 1600$ , onde  $P$  é o preço por unidade do bem ou serviço e  $D$  a demanda de mercado correspondente.

Num mercado competitivo existe também a relação entre preço por unidade de uma utilidade e sua disponibilidade no mercado (oferta). A equação que expressa a relação entre o preço por unidade de uma utilidade e a quantidade ofertada é denominada de *oferta*, e seu gráfico é chamado de *curva de oferta*. Em geral, um aumento no preço por unidade de uma utilidade leva o produtor a aumentar a oferta dessa utilidade. Reciprocamente, uma diminuição do preço por unidade geralmente leva a uma queda na oferta.

**Definição 1.4.2.** *Seja  $U$  uma utilidade qualquer (bens ou serviços) e seja  $S$  a oferta de mercado desta utilidade a um preço  $P$ , ou seja, é a soma das quantidades que todos os produtores estão dispostos e aptos a vender ao preço  $P$ , durante certo período de tempo.*

*Chama-se de função Oferta de mercado da utilidade, em um determinado período de tempo a ser considerado, a função que associa a oferta  $S$  ao preço  $P$ . Essa função é facilmente identificada como uma função afim ou quadrática.*

*Exemplo 1.4.3.* A função dada por  $S = -5 + \frac{1}{2} \cdot P$ , com  $10 < P \leq 20$ , onde  $P$  é o preço por unidade do bem ou serviço e  $S$  a oferta de mercado correspondente.

*Exemplo 1.4.4.* A função dada por  $S = P^2 - 4P + 4$ , com  $P \leq 5$ , onde  $P$  é o preço por unidade do bem ou serviço e  $S$  a oferta de mercado correspondente.

O equilíbrio de mercado corresponde ao ponto no qual a curva de demanda e a curva de oferta se interceptam.

**Definição 1.4.3.** *O preço de equilíbrio de mercado (PE) para dada utilidade é o preço para o qual a demanda e a oferta de mercado desta utilidade são iguais.*

*A quantidade correspondente ao preço de equilíbrio é denominada quantidade de equilíbrio de mercado da utilidade (QE).*

*Observação 1.4.1.* Em geral, para um equilíbrio ser significativo economicamente, as coordenadas do ponto de equilíbrio (interseção das curvas demanda e oferta) devem ser positivas ou nulas, isto é, as curvas devem intersectar-se no 1º quadrante.

Em regra, o preço de venda das utilidades é fixo. Então, a partir desse entendimento, podemos definir a função receita total da venda de uma determinada utilidade.

**Definição 1.4.4.** *A receita total da venda de utilidades é o produto entre o preço de venda e a quantidade vendida dessa utilidade, ou seja*

$$R_T = p \cdot q. \quad (1.11)$$

Os custos de empresas ou prestadores de serviços são classificados em duas categorias: fixos ( $C_F$ ) e variáveis ( $C_V$ ).

**Definição 1.4.5.** *Os custos fixos são aqueles que permanecem constantes em todos os níveis de produção ou na prestação de serviços e incluem comumente fatores tais como aluguel do prédio, instalação, equipamentos, etc. Esses custos permanecem constantes independentemente do volume de produção ou venda.*

**Definição 1.4.6.** *Os custos variáveis são aqueles que variam com a produção ou prestação de serviços e incluem fatores tais como mão de obra, matéria prima utilizada, gastos promocionais, impostos, etc.*

**Definição 1.4.7.** *Definimos o custo total ( $C_T$ ) em qualquer nível de produção ou na prestação de serviços como sendo a soma dos custos fixos com os custos variáveis, ou seja,*

$$C_T = C_V + C_F.$$

Seja  $c$  o custo unitário de produção de determinada utilidade e  $q$  a quantidade produzida, a função que representa os custos variáveis é dada por

$$C_V = c \cdot q$$

e caso o custo unitário,  $c$ , seja constante então a função custo variável é uma função afim e o seu gráfico é uma reta que passa pela origem e possui declividade ( $c$ ) positiva. E portanto o custo total da produção de  $q$  unidades da referida utilidade é dado pela função

$$C_T = c \cdot q + C_F. \quad (1.12)$$

**Definição 1.4.8.** *Sejam  $C_T$  a função custo total associada à produção de uma utilidade e  $R_T$  a função receita total relativa à venda da mesma utilidade.*

*A quantidade  $q_e$  para a qual*

$$R_T = C_T$$

*é denominada ponto de nivelamento ou ponto de ruptura (break-even point).*

**Definição 1.4.9.** *O lucro total na produção de utilidades é dada pela função*

$$L_T = R_T - C_T. \quad (1.13)$$

Das funções (1.11), (1.12) e (1.13) temos que:

$$L_T = p \cdot q - c \cdot q - C_F \Rightarrow L_T = (p - c) \cdot q - C_F.$$

Observe que o ponto de ruptura é obtido quando  $L_T = 0$ .

## Capítulo 2

# Função Exponencial e Função Logarítmica

Todos os conceitos e demonstrações deste capítulo foram baseados nas referências [1], [2], [5], [7], [9], [11], [12], [13], [15] e [16].

Este capítulo foi destinado ao estudo das Funções Exponencial e Logarítmica. Estas funções são estudadas no 1º ano do Ensino Médio e possuem uma gama de aplicações que podem ser estudadas nessa etapa do ensino.

Os logaritmos foram inventados no início do século *XVII*, a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos, com vistas à elaboração de tabelas de navegação.

### 2.1 Função Exponencial

**Definição 2.1.1.** Considere  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , com  $a \neq 1$ . A função exponencial de base  $a$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , indicada pela notação  $f(x) = a^x$ , deve ser definida de modo que as seguintes propriedades sejam válidas para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$I) a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$II) a^1 = a;$$

$$III) x < y \Rightarrow a^x < a^y \text{ quando } a > 1 \text{ e}$$

$$x < y \Rightarrow a^x > a^y \text{ quando } 0 < a < 1.$$

A função exponencial possui propriedades que ajudam no seu estudo e na resolução de problemas. Destacaremos algumas dessas propriedades.

*Propriedades 2.1.1.*

a) Seja a função exponencial  $f(x) = a^x$ . Temos que

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = a^0 \Rightarrow f(0) = 1.$$

b) A função exponencial  $f(x) = a^x$  é crescente se, e somente se,  $a > 1$ .

c) A função exponencial  $f(x) = a^x$  é decrescente se, e somente se,  $0 < a < 1$ .

d) A função exponencial  $f(x) = a^x$ , onde  $0 < a \neq 1$ , é injetora.

**Lema 2.1.1.** *Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , temos :*

$$a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0.$$

*Demonstração.*

1ª parte ( $\Leftarrow$ ) :

Queremos demonstrar que  $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$ .

Demonstraremos por indução em  $n$ .

I - Para  $n = 1$  é verdadeira a desigualdade, pois  $a^1 = a > 1$ .

II - Vamos supor que a desigualdade seja verdadeira para  $n = p$ , isto é,  $a^p > 1$ .

Provaremos que a desigualdade é satisfeita para  $n = p + 1$ .

De fato, multiplicando a desigualdade  $a > 1$  por  $a^p$  e mantendo a desigualdade, visto que  $a^p > 0$ , temos:

$$a \cdot a^p > 1 \cdot a^p \Rightarrow a^{p+1} > a^p > 1.$$

Portanto,

$$n > 0 \Rightarrow a^n > 1$$

2ª parte ( $\Rightarrow$ ) :

Queremos demonstrar que  $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$ .

Demonstraremos por redução ao absurdo.

Suponha  $n \leq 0$ , segue-se que  $-n \geq 0$ .

Note que  $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$  e pela primeira parte, temos que  $-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$ ; portanto  $-n \geq 0 \Rightarrow a^{-n} \geq 1$ .

Multiplicando ambos os membros da desigualdade  $a^{-n} \geq 1$  por  $a^n$ , e mantendo o sentido da desigualdade, visto que  $a^n > 0$ , temos  $a^{-n} \cdot a^n \geq 1 \cdot a^n \Rightarrow 1 \geq a^n$ . O que é um absurdo, pois por hipótese  $a^n > 1$ . Logo,  $n > 0$ . □



**Lema 2.1.2.** *Seja  $a \in \mathbb{R}, a > 1$  e  $r \in \mathbb{Q}$ . Assim,*

$$a^r > 1 \Leftrightarrow r > 0.$$

*Demonstração.*

1ª parte ( $\Leftarrow$ ):

Queremos demonstrar que  $r > 0 \Rightarrow a^r > 1$ .

Fazendo  $r = \frac{p}{q}$  com  $p, q \in \mathbb{N}^*$ ; então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}}.$$

Pela Propriedade 2.1.1 item b), se  $a = (a^{\frac{1}{q}})^q > 1$  e  $q > 0$ , então  $a^{\frac{1}{q}} > 1$ . Ainda pelo Lema 2.1.1, se  $a^{\frac{1}{q}} > 1$  e  $p > 0$ , então  $(a^{\frac{1}{q}})^p > 1$ , ou seja,

$$(a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r > 1.$$

2ª parte ( $\Rightarrow$ ):

Queremos demonstrar que  $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$ .

Fazendo  $r = \frac{p}{q}$  com  $p \in \mathbb{Z}$  e  $q \in \mathbb{Z}^*$ , então:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p.$$

Primeiramente, suponha  $q > 0$  e considerando que na 1ª parte demonstramos que  $a^{\frac{1}{q}} > 1$ , temos, pelo Lema 2.1.1, que  $a^{\frac{1}{q}} > 1$  e  $(a^{\frac{1}{q}})^p > 1$ , então  $p > 0$ . Portanto,  $q > 0$  e  $p > 0$ , então  $r = \frac{p}{q} > 0$ .

Suponha, agora,  $q < 0$ , isto é,  $-q > 0$ . Pelo Lema 2.1.1 temos que  $a^{-\frac{1}{q}} > 1$  e  $(a^{-\frac{1}{q}})^p = (a^{\frac{1}{q}})^{-p} > 1$ , então  $-p > 0 \Rightarrow p < 0$ .

Logo,  $q < 0$  e  $p < 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$ . □

**Lema 2.1.3.** *Seja  $a \in \mathbb{R}^*, a > 1$ ,  $r$  e  $s$  racionais, temos que*

$$a^s > a^r \Leftrightarrow s > r.$$

A demonstração desse Lema decorre imediatamente do Lema 2.1.1 e do Lema 2.1.2.

**Lema 2.1.4.** *Seja  $a \in \mathbb{R}, a > 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , temos que*

$$a^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

A demonstração desse Lema decorre imediatamente do Lema 2.1.1, do Lema 2.1.2 e do Lema 2.1.3.

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ , e  $b \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0.$$

A demonstração desse Teorema decorre imediatamente, do Lema 2.1.2.

**Teorema 2.1.2.** *Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ , temos que:*

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$

*Demonstração.*  $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1-x_2} > 1 \stackrel{\text{Teorema 2.1.1}}{\Leftrightarrow} x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2.$   $\square$

**Teorema 2.1.3.** *Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < 1$  e  $b \in \mathbb{R}$ , temos que*

$$a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0.$$

*Demonstração.* Se  $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$ . Considere  $c = \frac{1}{a} > 1$ . Pelo teorema 2.1.1, segue que:

$$c^{-b} > 1 \Leftrightarrow -b > 0 \Leftrightarrow b < 0.$$

Substituindo  $c = \frac{1}{a}$ , obtemos:

$$c^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-b} = a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0$$

$\square$

**Teorema 2.1.4.** *Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 < a < 1$ ,  $x_1 \in \mathbb{R}$  e  $x_2 \in \mathbb{R}$ , temos que:*

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

*Demonstração.*  $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1-x_2} > 1 \stackrel{\text{Teorema 2.1.3}}{\Leftrightarrow} x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$   $\square$

### 2.1.1 Gráfico da Função Exponencial

O gráfico da função exponencial,  $f(x) = a^x$ , com  $a \in \mathbb{R}_+^*$  e  $a \neq 1$ , é uma curva crescente ou decrescente, e poderá ter uma das seguintes representações, conforme for o valor de  $a$ .

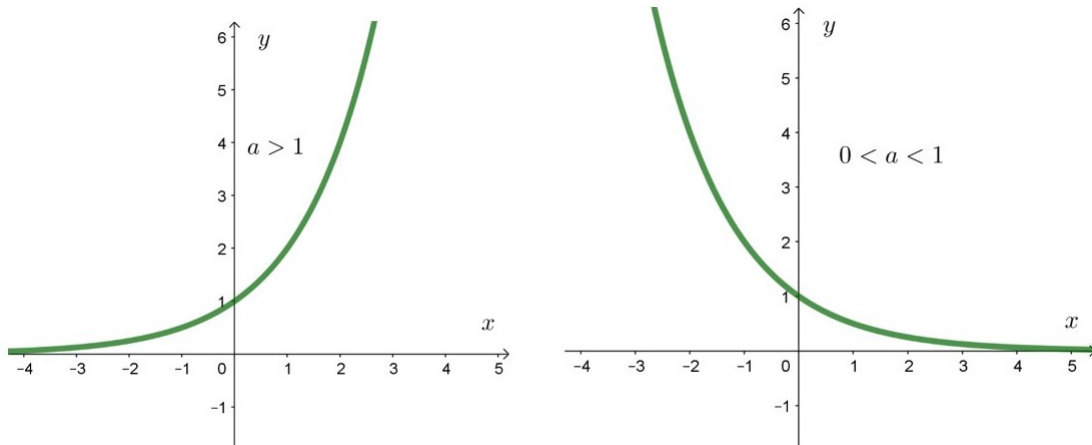


Figura 2.1: Exponencial

*Observação 2.1.1.* Observe que o conjunto imagem da função exponencial  $f(x) = a^x$ , com  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , é  $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ .

## 2.2 Função Logarítmica

**Definição 2.2.1.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ , com  $0 < a \neq 1$  e  $b > 0$ , então  $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ .

Em  $\log_a b = x$ , temos que  $a$  é a base do logaritmo,  $b$  é o logaritmando e  $x$  é o logaritmo.

#### Algumas consequências da definição

Considere  $0 < a \neq 1$ ,  $b > 0$  e  $c > 0$ , temos:

- I.  $\log_a 1 = 0$
- II.  $\log_a a = 1$
- III.  $a^{\log_a b} = b$
- IV.  $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

### Algumas propriedades do Logaritmo

Considere  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

I - Se  $0 < a \neq 1, b > 0$  e  $c > 0$ , então  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

II - Se  $0 < a \neq 1, b > 0$  e  $c > 0$ , então  $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

III - Se  $0 < a \neq 1, b > 0$  e  $n \in \mathbb{R}$ , então  $\log_a (b^n) = n \cdot \log_a b$

IV - Se  $0 < a \neq 1, b > 0$  e  $0 < c \neq 1$ , então  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Uma consequência imediata da propriedade (III) é:

Se  $0 < a \neq 1, b > 0$  e  $n \in \mathbb{N}^*$ , então  $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$

A propriedade (IV) é chamada de mudança de base. É uma propriedade que permite converter o logaritmo de um número positivo, em uma certa base, em outro numa base conveniente.

Podemos destacar duas consequências imediatas da propriedade (IV):

a) Se  $0 < a \neq 1$  e  $0 < b \neq 1$  então  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ .

b) Se  $0 < a \neq 1, b > 0$  e  $n \in \mathbb{R}_+^*$  então  $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$ .

**Definição 2.2.2.** Toda função  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \log_a x$ , com  $0 < a \neq 1$ , é denominada de função logarítmica.

### 2.2.1 Gráfico da Função Logarítmica

O gráfico da função logarítmica,  $f(x) = \log_a x$ , com  $0 < a \neq 1$ , é uma curva crescente ou decrescente, e poderá ter uma das seguintes representações, conforme for o valor de  $a$ .

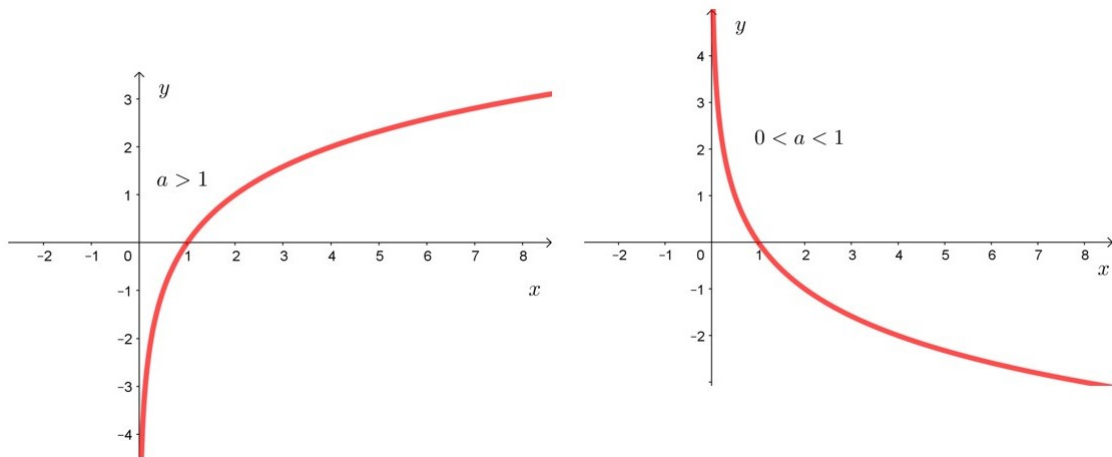


Figura 2.2: Função Logarítmica

*Observação 2.2.1.* Observe que o conjunto imagem da função logarítmica  $f(x) = \log_a x$ , com  $0 < a \neq 1$ , é  $Im(f) = \mathbb{R}$ .

## 2.3 Aplicações

### 2.3.1 Matemática Financeira

Exponencial e logaritmo são conteúdos utilizados com uma frequência bem alta na resolução de situações problemas que envolvem a matemática financeira. O estudo da matemática financeira começa no 7º ano do Ensino Fundamental II, com as noções do regime de capitalização simples e regime de capitalização composta. E o estudo, mais detalhado, da matemática financeira retorna no 1º e 3º anos do Ensino Médio, com a abordagem de séries de pagamentos e descontos.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2008:

Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial [4, p.75].

**Definição 2.3.1.** *Qualquer quantidade de dinheiro, que esteja disponível em certa data, para ser aplicado numa operação financeira, recebe o nome de Capital ou Valor Atual ou Valor Presente.*

**Notação:**  $V_P$

**Definição 2.3.2.** *Operações financeiras são operações feitas com dinheiro com a finalidade de fazê-lo evoluir ao longo de um determinado período de tempo. Essas operações podem ser ativas ou passivas.*

**Definição 2.3.3.** *Operações financeiras ativas são aplicações ou investimentos que visam rendimentos.*

Exemplos 2.3.1. Aplicações de dinheiro em:

I - Letras de Câmbio;

*Definição 2.3.4. Título de crédito pelo qual o emitente (sacador) dá ao aceitante (sacado), ordem de pagar, ao beneficiário investidor (tomador), determinada quantia, no tempo e nos lugares fixados na cambial (letra de câmbio).*

*Trata-se de um de título de crédito negociável no mercado. Consiste em uma ordem de pagamento em que uma pessoa ordena que uma segunda pessoa pague determinado valor para uma terceira. Deve trazer, de forma explícita, o valor do pagamento, a data e o local para efetuar-lo.*

*Na letra de câmbio o emitente é o devedor, a instituição financeira é a aceitante e o beneficiário é a pessoa física ou jurídica investidora, que nesse caso é a adquirente da cambial (letra de câmbio).*

*No Brasil o assunto é regido pelo Decreto 57.663, de 24 de janeiro de 1966, que segue a Convenção de Genebra, de 07 de junho de 1930, que estabeleceu tratamento uniforme sobre letras de câmbio e notas promissórias.*

II - CDB;

*Definição 2.3.5. CDB significa Certificado de Depósito Bancário. É um título privado de renda fixa, emitido por bancos.*

*Em outras palavras, o CDB é uma forma dessas instituições financeiras, os bancos, captarem recursos através de empréstimos para financiar suas atividades. Nesse caso, quem está emprestando dinheiro ao banco é o investidor.*

*Basicamente, ao comprar o título emitido, o investidor concede um empréstimo ao emissor e, em troca, recebe o valor com juros ao final do período determinado. É assim que funciona no caso da grande maioria dos títulos de renda fixa.*

### III - Previdência Privada;

*Definição 2.3.6. Os fundos de investimento em previdência privada ou previdência complementar são formas de poupar para complementar a aposentadoria oficial ou para atingir objetivos de longo prazo, como pagar a faculdade para os filhos.*

### IV - Ações da Bolsa de Valores;

*Definição 2.3.7. A bolsa de valores é o ambiente onde acontecem as negociações de compra e venda de títulos emitidos por empresas, tanto as privadas quanto as públicas e de capital misto, ou seja, com participação dessas duas esferas.*

*Esses títulos são chamados de ações da bolsa de valores.*

### V - Caderneta de Poupança;

*Definição 2.3.8. A Caderneta de Poupança é um método de investimento criado no ano de 1861 pelo Governo Federal com o principal objetivo de aumentar o poder de compra e proteger o salário do brasileiro do aumento da inflação. Além de ser um dos mais antigos investimentos, não à toa, a poupança também é a mais simples e popular forma de aplicação da renda fixa no país.*

### VI - Dentre outras.

**Definição 2.3.9.** *Operações financeiras passivas são as que visam à captação de recursos.*

**Exemplos 2.3.2.** Aplicações de dinheiro em:

#### I - Empréstimos;

*Definição 2.3.10. O empréstimo é a captação de crédito que não possui restrições para seu uso. Em outras palavras, você não precisa justificar seu uso e o dinheiro pode ser retirado do banco sem explicações. A única responsabilidade que o tomador possui é pagar esse empréstimo posteriormente com os juros que são contabilizados.*

*A análise de crédito é isenta e a única preocupação é de que o devedor irá pagar o credor.*

#### II - Financiamentos;

*Definição 2.3.11. O financiamento é a alternativa de captação de crédito mais burocrática. A análise de crédito e a justificativa do uso do dinheiro são analisadas com muita cautela. Com essas duas avaliações, o uso de um financiamento fica bem mais restrito, mas após a confirmação de acesso, o consumidor consegue aderir ao seu bem de consumo.*

### III - Descontos de Títulos de Créditos;

*Definição 2.3.12. O desconto de Títulos de Créditos é um adiantamento de recursos, feito pelo banco, sobre os valores dos respectivos títulos (duplicatas, cheques, faturas de cartão de crédito ou notas promissórias), de forma a antecipar o fluxo de caixa do cliente. Neste tipo de operação o cliente recebe dinheiro antecipado do valor do seu título. Ao apresentar um título para desconto, entretanto, o cliente não recebe seu valor total, pois são descontados diversos encargos sobre o seu valor nominal como por exemplo: taxa de desconto (juros), IOF ( imposto sobre Operações Financeiras) e taxa administrativa.*

### IV - Debêntures;

*Definição 2.3.13. As debêntures são títulos de dívida de empresas privadas. Quem investe em uma debênture se torna um credor da companhia que emitiu o título, financiando suas operações em troca do pagamento de juros.*

### V - Empréstimos para Capital de Giro;

*Definição 2.3.14. O capital de giro é o ativo (capital) circulante da empresa para arcar com os custos e despesas fixos e variáveis.*

*Empréstimos para Capital de Giro são as operações tradicionais de empréstimo vinculadas a um contrato específico que estabeleça prazo, taxas, valores e garantias necessárias e que atendem às necessidades de capital de giro das empresas. O plano de amortização é estabelecido de acordo com os interesses e necessidades das partes.*

### VI - Dentre outras.

**Definição 2.3.15.** *Os juros são os custos do capital durante determinado período de tempo.*

**Notação:**  $J$

Temos, então, que

$$J = V_P \cdot i \cdot n \quad (2.1)$$

**Definição 2.3.16.** *Taxa de juros é a unidade de medida dos Juros. Que pode ser:*

I - Unitária.

**Notação:**  $i$

A taxa de Juros unitária é dada por:

$$i = \frac{J}{V_P}$$



II - *Percentual*.

**Notação:**  $r$

A taxa de Juros percentual é dada por:

$$r = \frac{J}{V_P} \times 100$$

**Definição 2.3.17.** *Montante é o valor inicial aplicado (Capital ou Valor Presente) acrescido dos juros ao final de um determinado período. O montante pode ser considerado como valor final aplicado, sendo chamado de Valor Futuro.*

**Notação:**  $V_F$

Assim,

$$V_F = V_P + J$$

### Regimes de Capitalização

O capital poderá ser aplicado em uma instituição financeira no regime de capitalização simples ou no regime de capitalização composta.

**Definição 2.3.18.** *O regime de capitalização simples consiste em adicionar os juros ao capital uma única vez, ao final do prazo contratado, isto é, os juros não são capitalizados.*

**Definição 2.3.19.** *No regime de capitalização composta ou simplesmente Juros Compostos, é contratado o período de capitalização. Se o prazo total em que é feito o investimento tiver vários desses períodos, então ao final de cada período os juros serão capitalizados e o montante constituído passará a render juros durante o período seguinte.*

Excelentes aplicações de logaritmo e exponencial usam os conceitos e a teoria da matemática financeira. Especificamente a parte que envolve o regime de capitalização composta. Já os conceitos e a teoria do regime de capitalização simples são utilizados em aplicações das funções afim e quadrática.

Na seção 4.3 do capítulo 4 trabalharemos passo a passo com um problema que envolve o regime de capitalização composta.

Como vimos, no regime de capitalização composta, os juros são capitalizados. Assim, se um capital  $V_P$  for aplicado a uma taxa  $i$  dada por um certo período de tempo, os montantes constituídos no fim de cada um dos  $n$  períodos em que o capital for

aplicado estão descritos a seguir.

Ao final do primeiro período de capitalização, temos:

$$\begin{aligned}V_{F_1} &= V_P + J_1 \\ &= V_P + V_P \cdot i \cdot 1 \\ &= V_P \cdot (1 + i)\end{aligned}$$

Daí,

$$V_{F_1} = V_P \cdot (1 + i). \quad (2.2)$$

Para o segundo período de capitalização, o valor final do primeiro período de capitalização será o capital inicial do segundo período, ou seja,

$$V_{P_2} = V_{F_1}. \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) em (2.3), temos

$$V_{P_2} = V_P \cdot (1 + i).$$

Calculando o valor futuro para o segundo período obtemos

$$\begin{aligned}V_{F_2} &= V_{P_2} + J_2 \\ &= V_{P_2} + V_{P_2} \cdot i \cdot 1 \\ &= V_{P_2} \cdot (1 + i) \\ &= V_P \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \\ &= V_P \cdot (1 + i)^2.\end{aligned}$$

Assim,

$$V_{F_2} = V_P \cdot (1 + i)^2. \quad (2.4)$$

Para o terceiro período de capitalização, o valor final do segundo período de capitalização será o capital inicial do terceiro período, ou seja,

$$V_{P_3} = V_{F_2}. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) em (2.5), temos

$$V_{P_3} = V_P \cdot (1 + i)^2.$$

Calculando o valor futuro para o terceiro período, obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{F_3} &= V_{P_3} + J_3 \\
 &= V_{P_3} + V_{P_3} \cdot i \cdot 1 \\
 &= V_{P_3} \cdot (1 + i) \\
 &= V_P \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i) \\
 &= V_P \cdot (1 + i)^3.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$V_{F_3} = V_P \cdot (1 + i)^3 \quad (2.6)$$

Para o cálculo de  $n$  períodos de capitalização, o valor futuro do  $(n - 1)$ -ésimo período de capitalização será o capital inicial do  $n$ -ésimo período, ou seja,

$$V_{P_n} = V_{F_{(n-1)}}. \quad (2.7)$$

Daí,

$$V_{P_n} = V_P \cdot (1 + i)^{(n-1)}.$$

Calculando o valor futuro para o  $n$ -ésimo período, obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{F_n} &= V_{P_n} + J_n \\
 &= V_{P_n} + V_{P_n} \cdot i \cdot 1 \\
 &= V_{P_n} \cdot (1 + i) \\
 &= V_P \cdot (1 + i)^{(n-1)} \cdot (1 + i) \\
 &= V_P \cdot (1 + i)^n
 \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$V_{F_n} = V_P \cdot (1 + i)^n$$

ou simplesmente

$$V_F = V_P \cdot (1 + i)^n, \quad (2.8)$$

que é a fórmula para calcular o valor futuro ao final de  $n$  períodos de aplicação. Percebe-se claramente que se trata de uma função exponencial na variável  $n$ .

### 2.3.2 Lei de resfriamento de Newton

Técnicas matemáticas podem ser utilizadas para a solução de problemas observados em situações experimentais. Em muitas circunstâncias, é possível inferir com exatidão bastante satisfatória, que a temperatura superficial de um corpo altera-se em

taxa proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio onde se encontra. Para exemplificar este princípio basta verificar a temperatura do café numa xícara, que se resfria rapidamente no início e depois apresenta resfriamento uniforme, alcançando a temperatura ambiente após longo período de tempo, considerando-se um clima tropical.

A lei de resfriamento de Newton afirma que, a diferença de temperatura,  $T_{C_0} - T_{A_0}$ , entre um corpo e o meio ambiente que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença. Logo, é uma lei de decaimento exponencial, análoga a lei da desintegração radioativa, que pode se expressar por

$$T(t) = T_{A_0} + (T_{C_0} - T_{A_0}) \cdot e^{-kt},$$

em que  $T_{A_0}$  é a temperatura ambiente,  $T_{C_0}$  é a temperatura do corpo no momento em que foi colocado no ambiente,  $k$  é uma constante que depende do material que constitui o corpo e  $T(t)$  é a temperatura do objeto no instante  $t$ .

Observa-se que depois de certo tempo que o objeto foi colocado nesse ambiente, sua temperatura tende a se igualar com a temperatura do ambiente,  $T_{A_0}$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [T_{A_0} + (T_{C_0} - T_{A_0}) \cdot e^{-kt}] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ T_{A_0} + \frac{T_{C_0} - T_{A_0}}{e^{kt}} \right] \end{aligned}$$

Como  $e^{kt} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{T_{C_0} - T_{A_0}}{e^{kt}} \rightarrow 0$ , logo  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_{A_0}$ .

O gráfico da figura 2.3 representa a função  $T(t)$

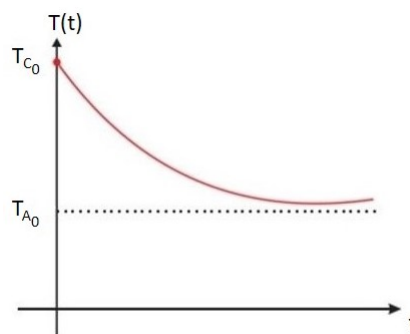


Figura 2.3: Gráfico do resfriamento de um corpo.

# Capítulo 3

## Questões Contextualizadas

Todos as questões deste capítulo foram baseados nas referências [1], [5],[7], [8], [9], [11], [12], [14], [15] e [16].

Neste capítulo trataremos de questões contextualizadas que podem tranquilamente ser trabalhadas no 1º ano do Ensino Médio, aproximando o conteúdo teórico com o cotidiano dos discentes. Isto facilitará a aprendizagem dos alunos.

### 3.1 Questões Contextualizadas de Funções Afim e Quadrática

**Questão 3.1.0.1.** A demanda e a oferta de mercado de um determinado produto de certa empresa são dadas respectivamente por  $D = 20 - P$  e  $S = -\frac{20}{3} + \frac{5}{3} \cdot P$ , com  $P \leq 20$ . Determine o preço de equilíbrio ( $PE$ ) e a correspondente quantidade de Equilíbrio ( $QE$ ).

#### Solução

Vimos que o preço de equilíbrio acontece quando a demanda é igual a oferta, ou seja quando  $D = S$ . Então tem-se as funções afins:

$$D = S \Rightarrow 20 - P = -\frac{20}{3} + \frac{5}{3} \cdot P \Rightarrow -\frac{5}{3} \cdot P - P = -20 - \frac{20}{3} \Rightarrow P = 10.$$

Logo o preço de equilíbrio é

$$PE = 10 \text{ u.m. (u.m. = unidade monetária)}. \quad (3.1)$$

Portanto o preço de equilíbrio se dará a um preço de 10 u.m.

Determinaremos a quantidade de equilíbrio substituindo (3.1) na equação da demanda

ou da oferta do problema. Desta forma, temos

$$D = 20 - P \Rightarrow D = 20 - 10 \Rightarrow D = 10 \text{ unidades.}$$

Então, concluímos que o preço de equilíbrio é 10 u.m. e a quantidade de equilíbrio que corresponde a esse preço é 10 unidades.

**Questão 3.1.0.2.** Um empresário emprega mensalmente R\$120.000,00 na produção de um determinado bem para obter um lucro total de pelo menos 10% ao mês. O preço de venda é de R\$4,00 por cada unidade, a capacidade de produção está limitada a 15.000 unidades por mês e o *break-even point* se dá quando a produção atinge 4.000 unidades por mês. Qual a produção mensal mínima para que o empresário alcance o lucro pretendido, sabendo que o custo unitário de produção é R\$2,00?

### Solução

O lucro total pretendido pelo empresário é de pelo menos R\$12.000,00 (pelo menos 10% de R\$120.000,00).

Sabemos que,

$$L_T = R_T - C_T \Rightarrow L_T = R_T - (C_F + C_V).$$

Sendo  $R_T = 4q$  e  $C_V = 2q$ , tem-se

$$L_T = 4q - (C_F + 2q) \geq 12.000. \quad (3.2)$$

Para o empresário não ter nem lucro nem prejuízo tem-se que  $R_T = C_T$  e essa igualdade se dá para  $q = 4.000$ . Segue daí que:

$$4q = C_F + 2q \Rightarrow C_F = 2q \Rightarrow C_F = 2 \cdot 4.000.$$

Logo,

$$C_F = 8.000. \quad (3.3)$$

Das equações (3.2) e (3.3), temos:

$$\begin{aligned} 4q - (8.000 + 2q) &\geq 12.000 \\ 4q - 8.000 - 2q &\geq 12.000 \\ 4q - 2q &\geq 12.000 + 8.000 \\ 2q &\geq 20.000 \\ q &\geq 10.000. \end{aligned}$$

Portando a produção mensal mínima, de modo que o empresário alcance o lucro pretendido, é de 10.000 unidades.

**Questão 3.1.0.3.** O custo total na produção de um determinado produto de certa empresa é dada por  $C_T = q^2 + q + 10$  para  $0 \leq q \leq 100$ . A demanda de mercado desse produto é dada por  $D = 500 - 4P$ . Qual a quantidade desse produto que a empresa deve vender para obter o lucro máximo? E qual é o valor do lucro máximo?

### Solução

Sabemos que:

$$L_T = R_T - C_T. \quad (3.4)$$

E neste caso específico, temos que:

$$C_T = q^2 + q + 10. \quad (3.5)$$

e também temos que:

$$\left. \begin{array}{l} R_T = P \cdot q \\ D = 500 - 4 \cdot P \end{array} \right\} \Rightarrow R_T = \left( \frac{500 - D}{4} \right) \cdot q \Rightarrow R_T = 125 \cdot q - \frac{1}{4} \cdot D \cdot q.$$

Contudo, para a empresa,  $D = q$  (visto que a quantidade procurada  $D$ , a qualquer preço, é idêntica a quantidade  $q$  que a empresa produzirá ao preço  $P$ ). Portanto, segue que

$$R_T = 125 \cdot q - \frac{q^2}{4} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.5) e (3.6) em (3.4), obtemos:

$$\begin{aligned} L_T &= 125 \cdot q - \frac{q^2}{4} - (q^2 + q + 10) \\ &= 125 \cdot q - \frac{q^2}{4} - q^2 - q - 10 \\ &= -\frac{5}{4} \cdot q^2 + 124 \cdot q - 10 \end{aligned}$$

Então, a função lucro total dessa empresa na produção e venda dessa utilidade é uma função quadrática. Logo, a quantidade que deve ser produzida e vendida para se obter o lucro máximo e o próprio lucro máximo (valor máximo) são as coordenadas do vértice.

Vamos determinar tais coordenadas. Sabendo que  $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$  e sendo

$$a = -\frac{5}{4}, b = 124, c = -10$$

segue que,

$$\Delta = 15.326 \quad (3.7)$$

Também sabemos que as coordenadas do vértice são dadas por:

$$V = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right). \quad (3.8)$$

Substituindo (3.7) em (3.8), e trocando  $a$  e  $b$  pelos seus respectivos valores, obtemos

$$V = (49, 6; 3.065, 20).$$

Portanto, a empresa deve vender aproximadamente 50 unidades do produto para obter o lucro máximo, o qual vale R\$3.065,20.

Na seção 4.2 do capítulo 4 trabalharemos, como proposta de sequência didática, passo a passo com um problema que envolve a contextualização da função quadrática no cálculo de área máxima.

Veremos agora uma questão contextualizada com a sua solução.

**Questão 3.1.0.4.** Uma área retangular será limitada por uma cerca de arame em três de seus lados e por um rio reto no quarto lado. Com 1.000 m de arame farpado, determine as dimensões do terreno que pode ser cercado com esse arame de modo a obter a área máxima cercada. Determine a área máxima cercada.

### Solução

Considere  $x$  como sendo a medida do menor lado do terreno em questão, que possui a forma retangular, e  $y$  o valor da medida do lado, o qual é paralelo ao rio, desse mesmo terreno.

Temos que:

$$2x + y = 1000 \Rightarrow y = 1000 - 2x. \quad (3.9)$$

A área do terreno é dada por

$$S = x \cdot y. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.9) em (3.10) obtemos:

$$S = x \cdot (1000 - 2x) \Rightarrow S(x) = -2x^2 + 1000x. \quad (3.11)$$



Calculando as coordenadas do vértice da função quadrática (3.11), obtemos:

$$x_v = \frac{-1000}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x_v = \frac{-1000}{-4} \Rightarrow x_v = 250\text{m}, \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) em (3.9), tem-se:

$$y = 1000 - 2 \cdot 250 \Rightarrow y = 1000 - 500 \Rightarrow y = 500\text{m}$$

Dá as dimensões do terreno a ser cercado de modo a obter a maior área possível são 250m X 500m.

E a área cercada é  $S = 250 \cdot 500 \Rightarrow S = 125.000\text{m}^2$ .

Na seção 4.1 do capítulo 4 trabalharemos, como proposta de sequência didática, passo a passo com um problema que envolve a contextualização da função afim com contas de consumos de energia elétrica e de água. É uma proposta didática bastante interessante, pois traz questões bem próximas da realidade de estudante, fazendo com que ele se sinta como parte envolvida no aprendizado.

Veremos agora uma questão contextualizada com a sua solução.

**Questão 3.1.0.5.** A conta do consumo de energia elétrica de determinada pessoa é dada pela figura abaixo. Determine a equação algébrica, a qual representa os gastos com o consumo de energia elétrica.

COMPANHIA DE ELETRICIDADE DO ESTADO DA BAHIA AV. EDGARD SANTOS, 300, CABULA VI, SALVADOR, BAHIA CEP 41181-900 CNPJ 15.139.629/0001-94 INSCRIÇÃO ESTADUAL 00478696NO	 www.coelba.com.br	1  Atenc																																																		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;"><b>DADOS DO CLIENTE</b></td> </tr> <tr> <td style="height: 40px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;"><b>ENDEREÇO DA UNIDADE CONSUMIDORA</b></td> </tr> <tr> <td style="height: 40px;"></td> </tr> <tr> <td style="font-size: 8px; padding: 2px;">           As condições gerais de fornecimento (Resolução ANEEL 414/2010), tarifas, produtos, serviços prestados e tributos se encontram à disposição, para consulta em nossas unidades de atendimento e no site <a href="http://www.coelba.com.br">www.coelba.com.br</a> </td> </tr> </table>	<b>DADOS DO CLIENTE</b>		<b>ENDEREÇO DA UNIDADE CONSUMIDORA</b>		As condições gerais de fornecimento (Resolução ANEEL 414/2010), tarifas, produtos, serviços prestados e tributos se encontram à disposição, para consulta em nossas unidades de atendimento e no site <a href="http://www.coelba.com.br">www.coelba.com.br</a>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;"><b>DATA DE VENCIMENTO</b></td> </tr> <tr> <td style="height: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">           TOTAL A PAGAR (R\$)  <b>341,57</b> </td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;"><b>CLASSIFICAÇÃO</b></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding: 2px;">B1 RE</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;"><b>RESERVADO AO FISCO</b></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding: 2px;">7062.9D41.:</td> </tr> </table>	<b>DATA DE VENCIMENTO</b>		TOTAL A PAGAR (R\$) <b>341,57</b>	<b>CLASSIFICAÇÃO</b>	B1 RE	<b>RESERVADO AO FISCO</b>	7062.9D41.:																																							
<b>DADOS DO CLIENTE</b>																																																				
<b>ENDEREÇO DA UNIDADE CONSUMIDORA</b>																																																				
As condições gerais de fornecimento (Resolução ANEEL 414/2010), tarifas, produtos, serviços prestados e tributos se encontram à disposição, para consulta em nossas unidades de atendimento e no site <a href="http://www.coelba.com.br">www.coelba.com.br</a>																																																				
<b>DATA DE VENCIMENTO</b>																																																				
TOTAL A PAGAR (R\$) <b>341,57</b>																																																				
<b>CLASSIFICAÇÃO</b>																																																				
B1 RE																																																				
<b>RESERVADO AO FISCO</b>																																																				
7062.9D41.:																																																				
<b>DESCRIÇÃO DA NOTA FISCA</b>																																																				
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 60%;">DESCRIÇÃO</th> <th style="width: 10%;">QUANTIDADE</th> <th style="width: 10%;">PREÇO</th> <th style="width: 20%;">VALOR (R\$)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Consumo Ativo(kWh)</td> <td style="text-align: center;">389,00</td> <td style="text-align: center;">0,78305204</td> <td style="text-align: right;">304,60</td> </tr> <tr> <td>Acréscimo Bandeira AMARELA</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right;">6,29</td> </tr> <tr> <td>Acréscimo Bandeira VERMELHA</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right;">3,90</td> </tr> <tr> <td>Contrib. Ilum. Pública Municipal</td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right;">26,78</td> </tr> <tr> <td> </td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td> </td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td> </td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td> </td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td> </td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td> </td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><b>TOTAL DA FATURA</b></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right;"><b>341,57</b></td> </tr> </tbody> </table>	DESCRIÇÃO	QUANTIDADE	PREÇO	VALOR (R\$)	Consumo Ativo(kWh)	389,00	0,78305204	304,60	Acréscimo Bandeira AMARELA			6,29	Acréscimo Bandeira VERMELHA			3,90	Contrib. Ilum. Pública Municipal			26,78																									<b>TOTAL DA FATURA</b>			<b>341,57</b>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right; padding: 2px;">T<sub>a</sub></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding: 2px;">Consumo A</td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding: 2px;">COMPC</td> </tr> </table>	T <sub>a</sub>	Consumo A	COMPC
DESCRIÇÃO	QUANTIDADE	PREÇO	VALOR (R\$)																																																	
Consumo Ativo(kWh)	389,00	0,78305204	304,60																																																	
Acréscimo Bandeira AMARELA			6,29																																																	
Acréscimo Bandeira VERMELHA			3,90																																																	
Contrib. Ilum. Pública Municipal			26,78																																																	
<b>TOTAL DA FATURA</b>			<b>341,57</b>																																																	
T <sub>a</sub>																																																				
Consumo A																																																				
COMPC																																																				

Figura 3.1: Conta de consumo de energia elétrica

### Solução

Considere o valor a ser pago pelo consumo de energia elétrica dessa pessoa como sendo o custo total de gasto com energia elétrica.

Como vimos no capítulo 1 o custo total é dado por (1.12), ou seja  $C_T = cq + C_F$ . Tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} c = 0,78305204 \\ C_F = 6,29 + 3,90 + 26,78 \\ C_F = 36,97 \end{array} \right\} \Rightarrow C_T = 0,78305204q + 36,97.$$

Daí a equação algébrica que representa o valor a ser pago pelo consumo de energia elétrica conforme a conta da pessoa é dada por  $C_T = 0,78305204q + 36,97$ .

## 3.2 Questões Contextualizadas de Funções Exponencial e Logarítmica

**Questão 3.2.0.1.** Qual o montante produzido por um capital de R\$25.600,00 que ficou aplicado durante um ano e dois meses à taxa de 7,5% a.m. no regime de capitalização composta? (a.m.= ao mês).

### Solução

$$VP = R\$25.600,00$$

$$n = 14$$

$$i = 0,075$$

$$VF = ?$$

$$VF = VP \times (1 + i)^n \Rightarrow VF = 25.600 \times (1 + 0,075)^{14} \Rightarrow VF = 25.600 \times (1,075)^{14} \Rightarrow$$

$$VF = 70.462,57 \text{ reais.}$$

Assim, o montante produzido ao final do período de aplicação é de R\$70.462,57.

**Questão 3.2.0.2.** Um trabalhador ganhava R\$2.000,00 por mês. Num período de 12 meses, a inflação mensal foi de 3,5%. Qual deve ser o novo salário do trabalhador para que ele mantenha seu poder aquisitivo, isto é, para que ele possa adquirir as mesmas coisas que adquiria antes?

### Solução

Temos que o salário do trabalhador é R\$2.000,00, o qual representa o valor presente, e o valor do salário que deverá ganhar para manter o poder aquisitivo é o valor futuro.

E temos ainda que:

$$\left. \begin{array}{l} VF = VP \cdot (1 + i)^n \\ VP = 2.000,00 \\ n = 12 \\ i = 0,035 \end{array} \right\} \Rightarrow VF = 2.000 \cdot (1 + 0,035)^{12} \Rightarrow VF = 2.000 \cdot (1,035)^{12} \Rightarrow$$

$$VF = 3.022,13 \text{ reais.}$$

Logo, o salário que o trabalhador deverá ganhar após 12 meses de modo a manter o poder aquisitivo é R\$3.022,13.

**Questão 3.2.0.3.** Se a inflação mensal no Brasil está em torno de 1%, em quanto tempo uma mercadoria duplica o seu preço?

**Solução**

$$\left. \begin{array}{l} VF = VP \cdot (1 + i)^n \\ VF = 2 \cdot VP \\ i = 0,01 \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot VP = VP \cdot (1 + 0,01)^n \Rightarrow 2 = (1,01)^n$$

Para calcularmos o valor de  $n$  deveremos aplicar o logaritmo decimal em ambos os membros. Daí temos:

$$2 = (1,01)^n \Rightarrow \log 2 = \log (1,01)^n \Rightarrow \log 2 = n \cdot \log (1,01) \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log (1,01)} \Rightarrow$$

$$n \approx 69 \text{ meses .}$$

Portanto o preço da mercadoria dobrará de valor após aproximadamente 69 meses , ou seja, após 5 anos e 9 meses .

**Questão 3.2.0.4.** Suponha que uma xícara de café, inicialmente a 70 °C, seja colocada num ambiente de temperatura 28 °C. Vinte e cinco minutos depois do café ser servido, a temperatura do café passa a ser 40 °C. Deseja-se calcular a temperatura do café 100 minutos após o café ser servido.

Solução

Temos que:

$$T_{A_0} = 28$$

$$T_{C_0} = 70$$

Utilizando-se a função  $T(t) = T_{A_0} + (T_{C_0} - T_{A_0}) \cdot e^{-kt}$  e substituindo as informações temos

$$T(t) = 28 + (70 - 28) \cdot e^{-kt}$$

$$T(t) = 28 + 42 \cdot e^{-kt}$$

Segue-se daí e de  $T(25) = 40$ , que

$$T(25) = 28 + 42 \cdot e^{-k \cdot 25}$$

$$28 + 42 \cdot e^{-25 \cdot k} = 40$$

$$42 \cdot e^{-25 \cdot k} = 40 - 28$$

$$42 \cdot e^{-25 \cdot k} = 12$$

$$e^{-25 \cdot k} = \frac{12}{42}$$

$$e^{-25 \cdot k} = \frac{2}{7}$$

Calculando a temperatura  $T$  quando  $t = 100$ , obtemos

$$T(100) = 28 + 42 \cdot e^{-k \cdot 100} = 28 + 42 \cdot e^{-100 \cdot k}$$

$$= 28 + 42 \cdot (e^{-25 \cdot k})^4 = 28 + 42 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^4$$

$$= 28 + 42 \cdot \frac{16}{2401} = 28 + \frac{672}{2401}$$

$$\approx 28 + 0,3$$

$$\approx 28,3$$

Portanto, após 100 min a temperatura do café é aproximadamente igual a  $28,3^\circ$ .

**Questão 3.2.0.5.** Considerando-se 5.500 anos a meia-vida do isótopo radioativo do carbono ( $C^{14}$ ), que percentual da massa original de  $C^{14}$  restará em uma amostra após 10.000 anos? (Dado:  $M(t) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{t}{p}\right)}$ , em que  $M_0$  é a quantidade inicial de material radioativo,  $t$  é o tempo decorrido e  $p$  é o valor da meia vida do material considerado).

### Solução

Queremos calcular o percentual restante da massa de carbono transcorrido um lapso temporal de 10.000 anos. Temos que

$$\left. \begin{array}{l} M(t) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{t}{p}\right)} \\ t = 10.000 \\ p = 5.500 \end{array} \right\} \Rightarrow M(10.000) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{10.000}{5.500}\right)} \Rightarrow M(10.000) \approx M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(1,8182)}$$

$$\Rightarrow M(10.000) \approx M_0 \cdot 0,2836 \Rightarrow M(10.000) \approx M_0 \cdot 28,36\%.$$

Logo, passados 10.000 anos restarão 28,36% da massa inicial do carbono.

**Questão 3.2.0.6.** Uma pessoa aplica R\$100.000,00 numa determinada instituição financeira, a uma taxa de 2% a.m. no regime de capitalização composta. Qual é o tempo necessário que essa pessoa deverá deixar o seu capital aplicado nessa instituição e nessas condições de modo que possa obter o dobro do valor que aplicou inicialmente?

### Solução

Sejam

$$V_P = 100.000,00$$

$$V_F = 2 \cdot V_P \Rightarrow V_F = 2 \cdot 100.000 \Rightarrow V_F = 200.000,00$$

$$i = 0,02$$

$$V_F = V_P \cdot (1 + i)^n$$

Desta forma, temos

$$200.000 = 100.000 \cdot (1 + 0,02)^n$$

$$2 = (1,02)^n$$

Para calcularmos o valor de  $n$ , deveremos aplicar o logarítmo decimal em ambos os

membros. Assim, teremos

$$\log 2 = \log (1,02^n)$$

$$\log 2 = n \cdot \log (1,02)$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1,02}$$

$$= \frac{0,3010}{0,0086}$$

$$\approx 35 \text{ meses}$$

Portanto essa pessoa deverá deixar o dinheiro aplicado por 35 meses, ou seja, por 2 anos e 11 meses, para poder resgatar o dobro da quantia aplicada.





# Capítulo 4

## Proposta de Sequência Didática

Neste capítulo apresentaremos três propostas de sequência didática.

- I - A primeira traz uma proposta de resolução de situações problemas contextualizadas do cotidiano envolvendo função afim.
- II - A segunda traz uma proposta de resolução de situações problemas contextualizadas envolvendo função quadrática.
- III - A terceira traz uma proposta de resolução de situações problemas contextualizadas envolvendo as funções exponencial e logarítmica.

Com estas propostas, pretendemos ampliar o grau de conhecimento dos educandos acerca do estudo das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, ou seja, fornecer outra possibilidade de resolução de problemas que envolvam o referido tema no cotidiano.

### 4.1 Sequência Didática da Função Afim

**ÁREA:** Ciências da Natureza

**DISCIPLINA:** Matemática

**CONTEÚDO:**

- I - Função afim;
- II - Resolução de situação problema aplicada a função afim;
- III - Gráfico da função afim.

**OBJETIVOS:** Esta atividade tem como objetivo fazer com que os alunos consigam:

- I - Reconhecer e comparar a forma algébrica de uma função afim ( $f(x) = ax + b$ ) na situação problema;
- II - Solucionar a situação problema proposta;
- III - Interpretar a situação problema;
- IV - Esboçar o gráfico da função afim.

**TEMPO ESTIMADO:** 08 horas aulas

**MATERIAL NECESSÁRIO:** Calculadora, par de esquadro, papel milimetrado, fatura da conta de luz e fatura da conta de água.

**APRESENTAÇÃO DO PROJETO:**

Função afim é um conteúdo de matemática cuja abordagem e o estudo de todas as suas formalidades começam no 9º ano do Ensino Fundamental II. Surgem muitas dúvidas nos discentes, tais como: suas aplicações e a necessidade de se substituir números por letras. Percebe-se, claramente, que existe uma lacuna crucial na abordagem desse conteúdo, inclusive de como e onde aplicá-lo.

Os professores abordam função afim de modo formal e técnico, e daí segue uma pergunta recorrente por parte dos alunos: “professor, onde eu usarei essa função?” É importante que o professor lance uma situação problema contextualizada do conteúdo a ser abordado, tornando, assim, mais significativo o aprendizado.

Portanto, nessa sequência, será utilizada a questão do gasto com o uso de internet em Lan House, o comprovante de consumo de energia elétrica, COELBA, e o comprovante de consumo de água, Embasa. Nesse contexto, as três situações possibilitam aos alunos perceberem que o custo depende do consumo, e com isso podemos sanar a lacuna existente no processo ensino-aprendizagem de função afim.

**DESENVOLVIMENTO:**

### 1ª Etapa

1. Distribua a turma em grupos de alunos, com no mínimo 2 e no máximo 4 componentes, para fazer uma pesquisa na internet sobre o uso da internet, equivalência de preços na utilização e valores cobrados por lan house.
2. Solicite a cada grupo que faça uma tabela relacionando o tempo de uso da internet com o preço pago.
3. Após a confecção das tabelas, peça ao aluno para verificar o que está acontecendo com o tempo e o preço pago.

4. Nesse momento, o professor analisa junto com a turma a relação do tempo e o preço pago, comparando com a definição de função afim.

Solicite aos alunos que tragam, na próxima aula, contas de consumo de energia elétrica (Coelba) e contas de consumo de água (Embasa).

### 2ª Etapa

1. Peça aos alunos que se dividam em grupos, com no mínimo 2 e no máximo 4 componentes, de acordo com o valor (R\$) mais próximo da sua conta de energia elétrica e de água.
2. Solicite a cada grupo que calcule os custos fixos (taxa mínima + iluminação pública + outros custos) e o valor pago por kW/h (custo variável) de consumo de energia elétrica e depois faça o mesmo para a conta de água. (Servindo como referência a conta de menor valor).

### 3ª Etapa

1. Solicite que cada grupo organize uma tabela, para o consumo de energia elétrica, apresentando os diversos consumos (kW/h) dos membros do grupo.
2. Solicite que cada grupo organize uma tabela, para o consumo de água, apresentando os diversos consumos ( $m^3$ ) dos membros do grupo.

**Exemplo:**

#### Consumo de energia elétrica

Nome do aluno	Consumo (x)	Taxa Mínima	Somatório dos Custos	Valor Final

<b>Consumo de água</b>
------------------------

Nome do aluno	Consumo ( $x$ )	Taxa Mínima	Somatório dos Custos	Valor Final

#### 4ª Etapa

1. Solicite aos alunos, com base na tabela construída, que determine a equação algébrica, a qual representa os gastos com o consumo de energia elétrica de cada membro do grupo.
2. Solicite aos alunos, com base na tabela construída, que determine a equação algébrica, a qual representa os gastos com o consumo de água de cada membro do grupo.

#### 5ª Etapa

1. Solicite aos grupos que esbocem, no papel milimetrado, o gráfico a partir dos dados da tabela do consumo de energia elétrica;
2. Solicite aos grupos que esbocem, no papel milimetrado, o gráfico a partir dos dados da tabela do consumo de água;
3. Faça um sorteio para selecionar duas equipes para apresentarem seus gráficos para a turma.

#### 6ª Etapa

Faça os seguintes questionamentos e peça que respondam no caderno.

1. Qual é o valor do custo fixo da conta de energia elétrica?
2. É só esse valor que é pago pelo cliente?
3. Como é possível chegar ao valor total da conta a ser paga pelo cliente?
4. Qual é a forma algébrica que expressa o valor final do consumo a ser pago pelo cliente?

Faça as mesmas perguntas para a contas do consumo de água.

### 7ª Etapa

Peça aos alunos para identificarem as características que os gráficos possuem em comum e explique sobre essas características. E faça os seguintes questionamentos.

1. Pergunte sobre o crescimento dos gráficos;
2. Pergunte o que torna um gráfico ser crescente ou decrescente.

**AVALIAÇÃO:** Os alunos serão avaliados através da construção do gráfico, apresentação na plenária e atividades escritas.

## 4.2 Sequência Didática da Função Quadrática

**ÁREA:** Ciências da Natureza

**DISCIPLINA:** Matemática

**CONTEÚDO:**

- I - Função quadrática;
- II - Vértice da função quadrática;
- III - Máximo e Mínimo;
- IV - Resolução de situação problema aplicada a função quadrática;
- V - Gráfico da função quadrática.

**OBJETIVOS:** Esta atividade tem como objetivo fazer com que os alunos consigam:

- I - Reconhecer e comparar a forma algébrica de uma função quadrática  $(f(x) = ax^2 + bx + c)$  na situação problema;
- II - Solucionar a situação problema proposta;
- III - Interpretar a situação problema;
- IV - Esboçar o gráfico da função quadrática.

**TEMPO ESTIMADO:** 04 horas aulas

**MATERIAL NECESSÁRIO:** Calculadora científica, par de esquadro, papel milimetrado e caderno.

### APRESENTAÇÃO DO PROJETO:

Função quadrática é um conteúdo de matemática cuja abordagem e o estudo das formalidades iniciais da referida função começam no 9º ano do Ensino Fundamental II. Surgem muitas dúvidas nos discentes, tais como: suas aplicações e a necessidade de se substituir números por letras. Percebe-se, claramente, que existe uma lacuna crucial na abordagem desse conteúdo, inclusive de como e onde aplicá-lo.

O estudo mais aprofundado da função quadrática é realizado no 1º ano do Ensino Médio, abordando eixo de simetria, máximo e mínimo, estudo do sinal e forma canônica.

Os professores abordam função quadrática de modo formal e técnico, e daí segue uma pergunta recorrente por parte dos alunos: “professor, onde eu usarei essa função?”

É importante que o professor lance uma situação problema contextualizada do conteúdo a ser abordado, tornando, assim, mais significativo o aprendizado.

Portanto, nessa sequência, será utilizada uma questão para calcular área máxima ou mínima a ser cercada dentro de determinadas condições que aparecem no contexto.

### DESENVOLVIMENTO:

#### 1ª Etapa

1. Distribua a turma em grupos de alunos, com no mínimo 2 e no máximo 4 componentes.
2. Proponha a seguinte situação problema.

Situação problema:

Um fazendeiro quer construir um curral retangular. Para cercá-lo, dispõem de 1000 m de arame farpado, para confinar sua criação de gado, e uma parede já existente. Sabe-se que a cerca de arame terá 5 voltas. Baseado nessas informações responda:

- a) Qual é área obtida quando o dimensão menor for: 5 m, 10 m, 15 m, 20 m, 25 m, 30 m, 35 m, 40 m, 45 m, 50 m, 55 m, 60 m, 65 m, 70 m, 75 m, 80 m, 85 m e 90 m.
- b) Construa a tabela com os dados obtidos no item (a).
- c) Escreva a lei de formação que relaciona a área e o lado menor.
- d) Indique a variável dependente e a independente.
- e) Classifique essa função como afim ou quadrática.

- f) Determine as dimensões do terreno cercado de modo que a área a ser cercada seja máxima.
- g) Determine a área máxima a ser cercada nas condições da situação contextualizada.
- h) Esboce, no papel milimetrado, o gráfico dessa função.

### 2ª Etapa

Faça um sorteio para selecionar quatro equipes para apresentarem suas soluções.

### 3ª Etapa

Recolha as produções de todas as equipes para correção posterior.

**AValiação:** Os alunos serão avaliados através da construção do gráfico, apresentação na plenária e na solução das situações problemas que foram escritas.

## 4.3 Sequência Didática da Função Exponencial e Logarítmica

**ÁREA:** Ciências da Natureza

**DISCIPLINA:** Matemática

**CONTEÚDO:**

I - Exponencial e Função Exponencial;

II - Logaritmo e Função Logarítmica

III - Resolução de situação problema aplicada aos conteúdos dos itens (I) e (II);

**OBJETIVOS:** Esta atividade tem como objetivo fazer com que os alunos consigam:

I - Reconhecer e interpretar informações relativas à situação problema proposta;

II - Formalizar a lei matemática que descreve a situação problema proposta;

III - Manipular as equações inerentes a situação problema proposta;

IV - Identificar as variáveis da situação problema;

V - Montar a tabela com os dados obtidos da situação problema;

VI - Relacionar e classificar a curva em estudo com as funções estudadas;

VII - Solucionar a situação problema proposta;

VIII - Estudar o crescimento e o decréscimo da função da situação problema;

IX - Esboçar o gráfico da função abordada na situação problema.

**TEMPO ESTIMADO:** 06 horas aulas

**MATERIAL NECESSÁRIO:** Calculadora científica, par de esquadro, papel milimetrado e caderno.

**APRESENTAÇÃO DO PROJETO:**

Exponencial, função exponencial, logaritmo e função logarítmica são conteúdos de matemática de abordagem e estudo de todas as suas formalidades iniciam no 1º ano do Ensino médio e matemática financeira é um conteúdo abordado no 7º ano do ensino fundamental II.

Essa sequência didática relaciona conceitos de exponencial e logaritmo à resolução de uma situação problema envolvendo regime de capitalização composta, conteúdo este de matemática financeira.

**DESENVOLVIMENTO:**

### 1ª Etapa

1. Distribua a turma em grupos de alunos, com no mínimo 2 e no máximo 4 componentes.
2. Proponha as seguintes situações problemas.

1ª Situação problema:

Um investidor aplica R\$50.000,00 numa determinada instituição financeira, a uma taxa de 1,5% *a.m.* no regime de capitalização composta. Baseado nessas informações, responda:

- a) Qual o montante (valor futuro) acumulado que esse investidor terá ao final do 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º, 10º, 11º e 12º meses?
- b) Construa a tabela com os dados obtidos no item (a).
- c) Escreva a lei de formação que relaciona o valor futuro ( $V_F$ ) e o tempo ( $t$ ), em meses, dessa aplicação feita pelo investidor nessa instituição financeira.
- d) Indique a variável dependente e a independente.
- e) Classifique essa função como afim, quadrática, exponencial ou logarítmica.
- f) Determine o tempo necessário que esse capital deve ser aplicado para que atinja o valor de R\$62.511,60.



- g) Determine o tempo necessário que esse capital deverá ser aplicado de modo a superar o montante de R\$62.511,60.
- h) Esboce, no papel milimetrado, o gráfico dessa função.
- i) Determine se a curva obtida é crescente ou decrescente.

#### 2ª Situação problema:

Uma pessoa comprou um veículo por R\$50.000,00 e que a taxa de depreciação é de 5% *a.a.*, ou seja, o valor do veículo diminui a cada ano 5% sobre o valor do ano anterior. Baseado nessas informações, responda:

- a) Qual o valor do veículo (valor futuro) após 1º, 2º, 3º, 4º, 5º, 6º, 7º, 8º, 9º, 10º, 11º e 12º anos de uso?
- b) Construa a tabela com os dados obtidos no item (a).
- c) Escreva a lei de formação que relaciona o valor do veículo ( $V_F$ ) e o tempo ( $t$ ), em anos, de uso desse veículo.
- d) Indique a variável dependente e a independente.
- e) Classifique essa função como afim, quadrática, exponencial ou logarítmica.
- f) Determine o tempo de uso necessário de modo que o valor do veículo seja igual a R\$25.667,10.
- g) Determine o tempo de uso necessário de modo que o valor do veículo seja menor que a metade do valor de quando foi comprado.
- h) Esboce, no papel milimetrado, o gráfico dessa função.
- i) Determine se a curva obtida é crescente ou decrescente.

#### 2ª Etapa

Faça um sorteio para selecionar duas equipes para apresentarem suas soluções.

#### 3ª Etapa

Recolha as produções de todas as equipes para correção posterior.

**AValiação:** Os alunos serão avaliados através da construção do gráfico, apresentação na plenária e na solução das situações problemas que foram escritas.



# Considerações Finais

Ao longo de 25 anos de magistério da educação básica, percebi que a falta de contextualização dos assuntos abordados é um grande problema no processo ensino-aprendizagem. Os conteúdos são trabalhados na sua exaustão de formalidades e muitas vezes como assuntos isolados, como se não houvesse conexão nem com os outros conteúdos da matemática, nem com as outras áreas do conhecimento.

Os livros didáticos não trazem abordagem das contextualizações dos conteúdos. Os exercícios propostos nos livros didáticos são meramente aplicação de fórmulas ou questões que são uma falsa contextualização e que muitas vezes atrapalham o aprendizado.

É claro e cristalino que quando se fala da matemática temos dois lados a se considerar nessa dita “vida diária”, um que diz respeito às atividades corriqueiras de nosso dia a dia e o outro, às que se incluem no campo profissional e suas especificidades. A questão é que não é pouco comum, entre a comunidade discente, a dificuldade de ver as relações entre o ensino da matemática e sua aplicabilidade prática, noção que talvez seja mesmo reforçada por uma metodologia que é, muitas vezes, apenas focada na apresentação e cobrança de um conteúdo isolado.

O baixo rendimento na aprendizagem dos discentes modificou um pouco minha prática como docente no processo ensino-aprendizagem. Comecei a ler materiais cujos conteúdos são ensinados no ensino superior em várias profissões, tais como: economia, ciências contábeis, administração, engenharia, arquitetura, dentre outras. Constatei que dava para “trazer” certos conteúdos para a educação básica de modo a facilitar a contextualização dos mesmos.

Daí, pensei em fazer um trabalho que ajudasse o professor de matemática da educação básica a trabalhar os conteúdos das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica de modo contextualizado. O objetivo geral do trabalho foi trazer conceitos básicos das funções supracitadas com as suas aplicações teóricas, exercícios contextualizados e propostas de sequências didáticas.

Inicialmente, a partir da problemática e do objetivo geral, elaboramos um estudo a respeito de como é trabalhado o conceito de função afim e toda a sua teoria,

tais como: propriedades, comportamento da função e o gráfico. Logo em seguida fizemos o mesmo para a função quadrática, em que abordamos: vértice, máximo e mínimo, forma canônica, estudo do sinal, eixo de simetria e gráfico. Esses conteúdos deram suporte para finalizarmos o primeiro capítulo com tratamento de aplicações teóricas.

Em seguida, trabalhamos com as funções exponenciais e logarítmicas tratando as definições, propriedades, crescimento e decréscimo e gráfico. Esses conteúdos deram suporte para finalizarmos o segundo capítulo com tratamento de aplicações teóricas.

A metodologia apresentada atendeu às expectativas, visto que trouxemos um capítulo contendo questões contextualizadas. Essas questões facilitam o processo ensino-aprendizagem pois aproximam a teoria do cotidiano.

Na parte final do trabalho, foram construídas três sequências didáticas para as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica para serem desenvolvidas no 1º Ano do Ensino Médio.

Por fim, sugerimos, para trabalhos futuros, que as sequências didáticas tenham um menor número de passos. Isto será possível desde que se adote a prática de contextualizar os conteúdos à medida que os mesmos são abordados, não deixando tal contextualização apenas para o final.

# Referências Bibliográficas

- [1] ASSAF NETO, Alexandre; *Matemática financeira e suas aplicações*. 12ªed. São Paulo - SP: Atlas, 2016.
- [2] BORDEAUX, A. L.; ANTUNES, C.; RUBINSTEIN, C.; *Multicurso Ensino Médio: Matemática, segunda série*. 3ªed. Rio de Janeiro - RJ: Fundação Roberto Marinho, 2008.
- [3] BRASIL; *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília - DF, 2006.
- [4] BRASIL; *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília - DF, 2008.
- [5] CARVALHO, Alexandre Luís Trovon de; *Matemática financeira e suas aplicações vol. 8*. Tatuí, SP: Casa Publicadora Brasileira, 2016.
- [6] DANTE, Luiz Roberto; *Matemática: Contexto e Aplicações. Vol. 1*, 1ªed. São Paulo - SP: Ática, 2012.
- [7] FLEMMING, Diva Marília; *Cálculo A: funções, limite, derivação e integração*. 5ªed. São Paulo - SP: Pearson Makron Books, 1992.
- [8] IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; *Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 1*. 9ªed. São Paulo - SP: Atual, 2007.
- [9] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos; *Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 2*. 9ªed. São Paulo - SP: Atual, 2007.
- [10] LIMA, Elon Lages; *Análise Real, Vol. 1*. 5ªed. Rio de Janeiro - RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001.
- [11] LIMA, Elon Lages. *et al.*; *A Matemática do Ensino Médio, Vol. 1, Coleção do Professor de Matemática*. 5ªed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2006.

- [12] LIMA, Elon Lages; *Matemática e Ensino, Coleção do Professor de Matemática*. 3ªed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2007.
- [13] LIMA, Elon Lages; *Meu professor de matemática e outras histórias, Coleção do Professor de Matemática*. 3ªed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2006.
- [14] SILVA, Sebastião Medeiros da; SILVA, Élio Medeiros da; SILVA, Ermes Mendeiros da; *A Matemática: para os cursos de economia, administração e ciências contábeis, Vol. 1*. 5ªed. São Paulo - SP: Atlas, 1999.
- [15] PIERES, Adriano; *Lei de resfriamento de Newton*. Acesso em 15 de janeiro de 2019. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20011/Adriano/principal.html>>.
- [16] VERAS, Lília Ladeira; *Matemática financeira: uso de calculadora financeira, aplicações ao mercado financeiro, introdução à engenharia econômica, 300 exercícios resolvidos e propostos com respostas*. 2ªed. São Paulo - SP: Atlas, 1991.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB  
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional

---

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz  
das Almas - BA

CEP: 44380-000

Telefone: (75) 3621-2350

<<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>>