Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - CETEC
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Contagem de figuras: Resgatando a Simplicidade e a Beleza do Pensamento Matemático

Ubiraci Pimenta de Araújo

Cruz das Almas-Bahia
26 de Julho de 2019

Contagem de figuras: Resgatando a Simplicidade e a Beleza do Pensamento Matemático

Ubiraci Pimenta de Araújo

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e Sociedade Brasileira de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alberto de Oliveira Silva.

Cruz das Almas-Bahia

26 de Julho de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

A663c Araújo, Ubiraci Pimenta de.

Contagem de figuras: resgatando a simplicidade e a beleza do pensamento matemático / Ubiraci Pimenta de Araújo._ Cruz das Almas, BA, 2019.

61f.; il.

Orientador: Luiz Alberto de Oliveira Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Matemática – Aritmética – Geometria. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas – UFRB.
Responsável pela Elaboração – Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário – CRB5 / 1615).
Os dados para catalogação foram enviados pelo usuário via formulário eletrônico.

Contagem de figuras: Resgatando a Simplicidade e a Beleza do Pensamento Matemático

Ubiraci Pimenta de Araújo

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e Sociedade Brasileira de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 26/07/2019.

Banca examinadora:

Luiz Alberto de Oliveira Silva

Prof. Dr. Luiz Alberto de Oliveira Silva (Orientador)
UFRB

Genilson Ribeiro de Melo

Prof. Dr. Genilson Ribeiro de Melo
UFRB

Juarez dos Santos Azevedo

Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo
UFBA

Cruz das Almas-Bahia
26 de Julho de 2019

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus pelo seu infinito amor, pela sua bondade e misericórdia, aos meus queridos pais que proporcionaram as condições iniciais para que eu vencesse através dos estudos, a minha amável esposa, Ella Rodrigues e a minha filha Maria Eduarda, pelo apoio intelectual, pelo apoio sentimental, pelas críticas construtivas, pela compreensão e encorajamento, ao meu orientador Prof. Dr. Luiz Alberto de Oliveira Silva, aos colegas do mestrado do PROFMAT UFRB 2017, pelo compartilhar de experiências acadêmicas e cotidianas, em especial aos colegas Wilson Vieira, Jorge Serva e Rodrigo Silva, pelos momentos vivenciados na estrada, na hora das refeições e na labuta dos estudos. Agradeço à Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro no desenvolvimento da pesquisa.

“Sempre que puder, conte.”

Francis Galton.

Resumo

Neste trabalho, o tema contagem de figuras foi desenvolvido, especificamente, em situações envolvendo contagem de pontos, segmentos, caminhos e regiões representadas por figuras planas. Uma diversidade de contextos que exploram o tema oportunizaram o uso de conteúdos da Matemática encontrados na Álgebra, Aritmética e Geometria. Alguns métodos de contagem foram apresentados com o intuito de aprimorar estratégias, capacidade de observação, velocidade de raciocínio e precisão no processo de contagem. Durante todo o trabalho, houve o cuidado em apresentar problemas cujas figuras despertassem necessidade e curiosidade em contar. A maior parte desses problemas foi retirada dos livros Elementary Combinatorial Geometry, de Andrász Szilár, professor assistente na Universidade Babes-Bolyai de Cluj Napoca, Romênia e do livro Conteo de Figuras Recorridos Eulerianos, que faz parte da coleção Razonamientos Matemático, de Adolfo Povis Vega. Há também, nesse estudo, questões provenientes das provas do exame de acesso ao PROFMAT, o ENA, cuja abordagem compara as soluções oficiais com as técnicas e métodos que são tema dessa escrita, com objetivo de ampliar o repertório dos estudantes na resolução de problemas. Em seguida, uma sequência didática foi apresentada como proposta de introdução ao estudo da Progressão Aritmética e da Análise Combinatória planejando, através de práticas docentes, resgatar a simplicidade e a beleza do pensamento matemático.

Palavras-chave: Contagem de Figuras, Malha Quadriculada, Progressão Aritmética, Análise combinatória.

Abstract

In this work, the theme counting of figures was developed, specifically, in situations involving counting of points, segments, paths and regions represented by flat figures. A diversity of contexts that exploit the theme have facilitated the use of Mathematics contents found in Algebra, Arithmetic and Geometry. Some counting methods were presented with the purpose of improving strategies, observation capacity, speed of reasoning and precision in the counting process. Throughout the work, care was taken to present problems whose figures aroused the need and curiosity to tell. Most of these problems were taken from Andrász Szilár's Elementary Combinatorial Geometry, an assistant professor at the Babes-Bolyai University in Cluj Napoca, Romania, and from the book Counting Eulerian Tour Figures, which is part of the Mathematical Reasoning collection by Adolfo Povis Vega . There are also in this study questions from the tests of the access examination to the PROFMAT, the ENA, whose approach compares the official solutions with the techniques and methods that are the subject of this writing, aiming to broaden students' repertoire in solving problems. Next, a didactic sequence was presented as a proposal of introduction to the study of Arithmetic Progression and Combinatorial Analysis, planning, through teaching practices, to rescue the simplicity and beauty of mathematical thinking.

Keywords: Counting of Figures, Grids, Arithmetic Progression, Combinatorial Analysis.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

No decorrer dos tempos, a busca pela origem do conhecimento tem ocupado a mente e a alma de inúmeros pesquisadores, cientistas e curiosos, pessoas que, em muitos casos, abriram mão das suas vidas e se debruçaram sobre as poucas pistas que nossos antepassados nos deixaram, em busca de justificativas que credenciem as suas hipóteses iniciais, e sustentem as suas investigações. No campo específico da matemática e particularmente no que diz respeito à contagem, vários questionamentos são levantados quanto á sua origem.

Segundo [2], uma grande discussão relacionada às origens da contagem é motivada pelas questões: contar é intuitivo, ou ainda, o processo de contagem é evolutivo ou foi criado em algum momento? Em meados do século XIX, os antropólogos acreditavam na unidade psicológica da raça humana e partiam da premissa que, em média, os seres humanos compartilhavam capacidades mentais semelhantes, principalmente no que se refere à contagem. A partir da publicação de um estudo sobre como pensam os povos nativos, preconceitos à parte, verificou-se que vários povos primitivos analisados manifestavam distintas habilidades no que diz respeito à contagem, dependendo de suas necessidades.

O que de fato podemos concluir é que em dado momento da nossa existência particular, o ato de contar foi imperativo. O processo de contagem nos parece ser a noção matemática mais simples.

Segundo [5], ele começou a ser desenvolvido pelo ser humano muito antes de haver escrita ou civilização e, por isso, possuímos poucos elementos concretos para sua análise. No entanto, as habilidades de contagem precedem qualquer desenvolvimento matemático mais sofisticado e sua compreensão é um passo inicial essencial para uma abordagem histórica da matemática.

Segundo [2], é interessante observar que indivíduos de diferentes culturas ainda hoje mantêm formas distintas de utilizar os dedos para contar. Paralelamente ao processo de contagem surgiu também a ideia de ordenação, e o reconhecimento dessa distinção foi um passo importante na evolução do pensamento humano no que se refere à contagem. Outro passo igualmente fundamental na história da contagem refere-se ao estabelecimento de uma correspondência entre os objetos a serem contados e uma forma concreta de registro (pedras, nós em um fio, etc..). Este passo é definitivo na direção de se determinarem, posteriormente, os símbolos correspondentes às quantidades a serem escolhidas como padrão no sistema de contagem, que substituiriam os objetos utilizados para o registro.

Tudo nos leva a crê que o processo de evolução humana, na arte de contar, se deva à interação do ser humano com a natureza que lhe cerca, e consigo mesmo, o que nos permitiu contemplar avanços significativos.

Segundo [5], o ser humano possui habilidades naturais para pensar noções quantitativas rudimentares: muito e pouco, grande e pequeno, lento e rápido. A evolução humana, de uma vida primitiva para uma vida em sociedade, incorporou novos desafios sociais e econômicos. Novas demandas surgiram na organização do espaço, nas técnicas de produção e nas relações de natureza comercial. Estímulos vieram da interação com a natureza ao seu redor, em especial da observação dos céus. O homem se viu assim diante da necessidade de pensar numericamente. Desta forma, é razoável concluir, que os rudimentos utilizados pelos nossos antepassados, nos primórdios da nossa existência, não estavam limitados a um povo específico, mas sim à necessidade humana de contar.

Segundo [2], o estabelecimento de formas e símbolos para registrar as quantidades e resolver os problemas que a organização da vida cotidiana e social demandavam, foi o primeiro passo dado pelo homem na direção de criar uma estrutura formal e operacional que serve de base à sistematização do processo de contagem. Desta forma, ficaram assim estabelecidos, nas mais variadas culturas, regiões geográficas e civilizações, os alicerces do pensamento matemático.

Este trabalho destina-se, a alunos do 3º ano do ensino médio, mas em parte pode também atender aos interesses dos alunos do ensino fundamental. A escolha desse tema foi motivada pela reação dos alunos, sempre que o tema contagem era abordado. O interesse inicial dos alunos pelo tema era notório e, se justifica, pelo fato do mesmo proporcionar experiências matemáticas significativas. O tema nos permite explorar elementos matemáticos que em si mesmos enaltecem o ensino dessa matéria. Os elemento são: entusiasmo, beleza, simplicidade, abstração e muitos outros sem os quais a Matemática seria destituída de significado e inconcebível para aqueles que, inicialmente, nos proporcionaram experimentar as maravilhas dessa ciência. Ainda que se alegue que tais elementos encontram-se presentes na dinâmica escolar brasileira, não os encontrei nos livros didáticos a que tive acesso, dentre eles destaco, por serem os que mais se evidenciam no pais, os livros [1, 3, 4]. Observamos que que estes livros apresentam, em alguns momentos, uma Matemática refém de uma álgebra prematura ou refém de uma necessidade de "contextualizar" para atender aos ditames de uma sociedade movida pelo pragmatismo, contrastando com a atmosfera vivenciada pelos nossos antepassados, onde a filosofia clássica via no ócio um significado bom.

Segundo Aristóteles:

> E com o multiplicar-se das artes, umas em vista da necessidade, outras da satisfação, sempre continuamos a considerar os inventores destas últimas como mais sábios que os das outras, porque as suas ciências não se subordinam ao útil. De modo que, constituídas todas as [ciências] deste gênero, outras se descobriram que não visam nem o prazer nem à necessidade, e primeiramente naquelas regiões onde [os homens] viviam no ócio. É assim que, em várias partes do Egito, se organizaram pela primeira vez as artes matemáticas, porque aí se conseguiu que a casta sacerdotal vivesse no ócio. (ARISTÓTELES, 1984: 12).

Nesse sentido, métodos, técnicas e proposições foram cuidadosamente selecionados de forma a provocar entusiasmo, aprimorar estratégias, capacidade de observação, velocidade no raciocínio e precisão no processo de contagem. Para isso, esse trabalho foi organizada do seguinte modo: no Capítulo 1, serão abordados os conceitos de números poligonais e malha quadriculada na perspectiva de contagem de pontos. Já no Capítulo 2, o enfoque será em situações envolvendo contagem de segmentos e caminhos presentes numa figura plana. O Capítulo 3, por sua vez, trará métodos de contagem que permitem averiguar o número exato de regiões e figuras com determinadas características. Por fim, o Capítulo 4 será dedicado à elaboração de uma sequência didática, em que o aluno seja estimulado a aplicar métodos, construir tabelas, elaborar esquemas, buscar padrões e testar conjecturas através das ferramentas das Progressão Aritmética e Análise Combinatória.

Capítulo 1

Contagem de pontos

Nesse capítulo serão apresentados algumas proposições e problemas cujas soluções serão referendadas pelo uso de algumas propriedades e ideias muito simples e úteis. Abordaremos o conceito de números poligonais, rede no plano, malha quadriculada e polígonos sempre na perspectiva de enfocar a contagem de pontos.

1.1 Números Poligonais

Definição 1.1.1. Os **números poligonais** são todos os números naturais que podem ser representados na forma de um arranjo geométrico regular de pontos igualmente espaçados de modo a formar um polígono regular.

Nosso objetivo agora é determinar as fórmulas recursiva, interativa e fechada para os números poligonais presentes na tabela acima, objetivando assim determinar o número de pontos necessários para representar determinado número poligonal. A representação e verificação dos números através das figuras geométricas é uma ferramenta imprescindível, pois a disposição das figuras em si mesma proporciona desvelo e aguça a capacidade de observação, independentemente do público a que se destina. Durante esse processo, vamos constatar a importância da progressão aritmética como parte integrante das relações existentes entre números da mesma "família".

1.1.1 Números Triangulares

Sequência dos números: $1, 3, 6, 10, 15, 21, ...$

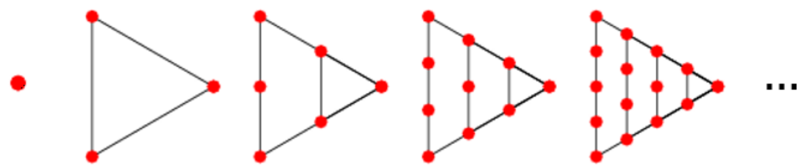


Figura 1.1.1: Números triangulares [7]

i) Fórmula recursiva

Essa fórmula estabelece uma relação entre um número triangular e o seu antecessor imediato. Iniciaremos associado a cada figura um número triangular representado por $T(n)$, $n \geq 1$, e seu respectivo número de pontos.

$$\begin{aligned} &T(1) = 1, \\ &T(2) = T(1) + 2, \\ &T(3) = T(2) + 3, \\ &T(4) = T(3) + 4, \\ &\vdots \\ &T(n+1) = T(n) + n + 1. \end{aligned}$$

ii) Fórmula interativa

Considerando agora os 7 primeiros números triangulares: $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28$. É possível perceber que as diferenças entre cada um deles e seu antecessor são $2, 3, 4, 5, 6, 7$, respectivamente. Geometricamente, é fácil perceber que há uma regularidade na formação desses números: $T_{n+1} = T_n + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com essa informação, é possível reformular o raciocínio e notar que:

$$\begin{aligned} &T_1 = 1, \\ &T_2 = 1 + 2, \\ &T_3 = 1 + 2 + 3, \\ &T_4 = 1 + 2 + 3 + 4, \\ &\vdots \\ &T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n. \end{aligned}$$

iii) Fórmula fechada

Número triangular	Número de pontos
$T\left(1\right)$	1
$T\left(2\right)$	3
$T\left(3\right)$	6
$\vdots$	$\vdots$
$T\left(n\right)$	$\frac{n(n+1)}{2}$

Temos então que cada T_n é a soma dos termos de uma PA e, com isso, podemos concluir que $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Mais adiante, ao analisarmos outros números poligonais vamos verificar que esse fato não é um caso isolado. É interessante poder verificar que as diferenças entre dois números poligonais consecutivos, de mesmo tipo, formam uma PA de 2ª ordem. Sendo assim, podemos encontrar, utilizando a fórmula da soma dos seus termos, uma expressão geral para os números poligonais.

1.1.2 Números quadrangulares

Sequência dos números: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49...$

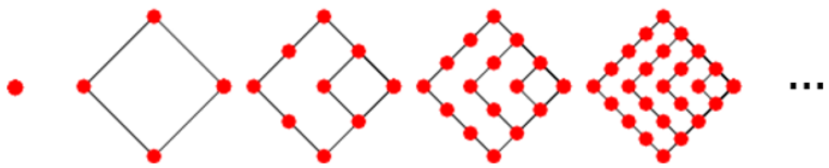


Figura 1.1.2: Números quadrangulares [7]

i) Fórmula recursiva

Essa fórmula estabelece uma relação entre um número quadrangular e o seu antecessor imediato. Iniciaremos associado a cada figura um número quadrangular representado por $Q\left(n\right)$, $n \geq 1$, e seu respectivo número de pontos.

Número quadrangular	Número de pontos
$Q\left(1\right)$	1
$Q\left(2\right)$	4
$Q\left(3\right)$	9
$\vdots$	$\vdots$
$Q\left(n\right)$	n^2

ii) Fórmula interativa

Considerando agora os 7 primeiros números quadrangulares: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$. É possível perceber que as diferenças entre cada um deles e seu antecessor imediato, são $3, 5, 7, 9, 11, 13$. Sendo assim é fácil concluir que: $Q_{n+1} = Q_n + 2n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com essa informação, é possível reformular o raciocínio e notar que:

$$
\begin{aligned}
&Q_1 = 1,\\
&Q_2 = Q(1) + 3 = 1 + 3,\\
&Q_3 = Q(2) + 5 = 1 + 3 + 5,\\
&Q_4 = Q(3) + 7 = 1 + 3 + 5 + 7,\\
&\vdots\\
&Q_n = Q_{n-1} + 2n - 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1.
\end{aligned}
$$

iii) Fórmula fechada

Temos então que cada é a soma dos termos da PA $1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 2n - 1$. Sendo assim temos que:

$$
\begin{aligned}
Q_n &= 1 + 3 + \cdots + (2n - 1)\\
&= \tfrac{n[1+(2n-1)]}{2}\\
&= n^2.
\end{aligned}
$$

1.1.3 Números Pentagonais

Sequência dos números: $1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, ...$

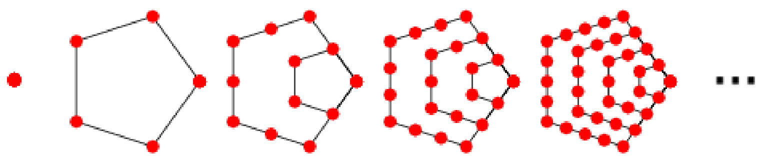


Figura 1.1.3: Números pentagonais [7]

i) Fórmula recursiva

Essa fórmula estabelece uma relação entre um número pentagonal e o seu antecessor imediato. Iniciaremos associado a cada figura um número pentagonal representado por $P\left(n\right),\ n \geq 1.$

$$
\begin{aligned}
&P\left(1\right) = 1,\\
&P\left(2\right) = P\left(1\right) + 4,\\
&P\left(3\right) = P\left(2\right) + 7,\\
&P\left(4\right) = P\left(3\right) + 10,\\
&\vdots\\
&P\left(n+1\right) = P\left(n\right) + 3n - 2.
\end{aligned}
$$

ii) Fórmula interativa

Considerando agora os 7 primeiros números pentagonais, $1, 5, 12, 22, 35, 51, 70$. É possível perceber que as diferenças entre cada um deles e seu antecessor imediato são $4, 7, 10, 13, 16, 19,$ respectivamente. Podemos concluir então que: $P_{n+1} = P_n + 3n - 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com essa informação, é possível reformular o raciocínio e notar que:

$$
\begin{aligned}
&P\left(1\right) = 1,\\
&P\left(2\right) = 1 + 4,\\
&P\left(3\right) = 1 + 4 + 7,\\
&P\left(4\right) = 1 + 4 + 7 + 10,\\
&\vdots\\
&P\left(n+1\right) = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n - 2.
\end{aligned}
$$

iii) Fórmula fechada

Temos então que cada P_n é a soma dos termos da PA $1, 4, 7, 10, 13, 16, ..., 3n - 2$. Sendo assim temos que:

$$
\begin{aligned}
P_n &= 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (2n-1)\\
&= \tfrac{n[1+(3n-2)]}{2}\\
&= \tfrac{n(3n-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Número pentagonal	Número de pontos
$P\left(1\right)$	1
$P\left(2\right)$	5
$P\left(3\right)$	12
$\vdots$	$\vdots$
$P\left(n\right)$	$\frac{n(3n-2)}{2}$

1.1.4 Números Hexagonais

Sequência dos números: $1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, \ldots$

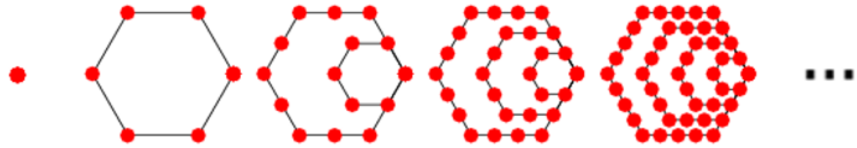


Figura 1.1.4: Números hexagonais [7]

i) Fórmula Recursiva

Essa fórmula estabelece uma relação entre um número Hexagonal e o seu antecessor imediato. Iniciaremos associado a cada figura um número pentagonal representado por $H(n)$, $n \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
&H(1) = 1, \\
&H(2) = H(1) + 5, \\
&H(3) = H(2) + 9, \\
&H(4) = H(3) + 13, \\
&\vdots \\
&H(n+1) = H(n) + (4n - 3).
\end{aligned}
$$

ii) Fórmula interativa

Considerando agora os 7 primeiros números hexagonais, $1, 6, 15, 28, 45, 66, 91$. É possível perceber que as diferenças entre cada um deles e seu antecessor imediato são $5, 9, 13, 17, 21, 25$. Podemos assim concluir que: $H_{n+1} = H_n + 4n - 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com essa informação, é possível reformular o raciocínio e notar que:

$$
\begin{aligned}
&H(1) = 1, \\
&H(2) = 1 + 5, \\
&H(3) = 1 + 5 + 9, \\
&H(4) = 1 + 5 + 9 + 13, \\
&\vdots \\
&H(n+1) = 1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + (4n - 3).
\end{aligned}
$$

iii) Fórmula fechada

Temos então que cada H_n é a soma dos termos da PA $1, 5, 9, 13, 13, 17, ..., 4n-3$. Sendo assim temos que:

$$H_n = 1+5+9+13+\cdots+(4n-3)$$
$$= \frac{n[1+(4n-3)]}{2}$$
$$= n\,(2n-1)\,.$$

Número hexagonal	Número de pontos
$H\,(1)$	1
$H\,(2)$	6
$H\,(3)$	15
$\vdots$	$\vdots$
$H\,(n)$	$n\,(2n-1)$

Quadro de resumo:

Forma	Fórmula Recursiva	Fórmula Interativa	Fórmula Fechada
Triângulo	$T\,(n+1) = T\,(n) + (n+1)$	$T_n = 1+2+3+\cdots+n$	$T\,(n) = \frac{n(n+1)}{2}$
Quadrado	$Q\,(n+1) = Q\,(n) + (2n+1)$	$Q_n = 1+3+5+\cdots+n$	$Q\,(n) = n^2$
Pentágono	$P\,(n+1) = P\,(n) + (3n+1)$	$P_n = 1+4+7+\cdots+n$	$P\,(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$
Hexágono	$H\,(n+1) = H\,(n) + (4n+1)$	$H_n = 1+5+9+\cdots+n$	$Q\,(n) = n\,(2n-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Polígono de k lados	$L\,(n+1) = L\,(n) + [(k-2)\,n+1]$	$L_n = 1+(k-1)+(2k-3)+\cdots+$ $+\,(k-2)\,n-(k-3)$	$L\,(n) = \frac{(k-2)n^2-(k-4)n}{2}$

1.2 Rede no Plano

Definição 1.2.1. Uma **rede no plano** é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1.

Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como um conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (m, n) são números inteiros.

1.2.1 Malha quadriculada

Definição 1.2.2. Uma **malha quadriculada** é um caso particular de uma rede no plano caracterizado quando as interseções entre as horizontais e as verticais ocorre perpendicularmente. Cada uma das interseções é um ponto da malha.

Proposição 1.2.3. *Se uma malha é formada por m retas horizontais e n retas verticais então a quantidade de pontos da malha é mn.*

Agora serão apresentados alguns problemas, em diversos contextos, cuja apresentação inicial é de caráter geométrico, mas a solução requer ferramentas da álgebra, da aritmética e resultados da geometria. Ratificando o que foi dito no início desse capítulo, a contagem de pontos será o objetivo final. (Veja [6])

Problema 1.2.4. Considere uma malha quadriculada, e o segmento AB, sendo $A(0,0)$ e $B(m,n)$. Determine o número de pontos que estão em AB e são pontos da malha, incluindo A e B. Responda a mesma pergunta se as coordenadas forem $A(a_1,b_1)$ e $B(a_2,b_2)$.

Resolução: Inicialmente, vamos examinar os três casos representados na Figura 1.2.1, onde ocorre $m = 6, n = 3$ no primeiro caso, $m = 6, n = 4$ no segundo caso e $m = 7, n = 5$ no último caso.

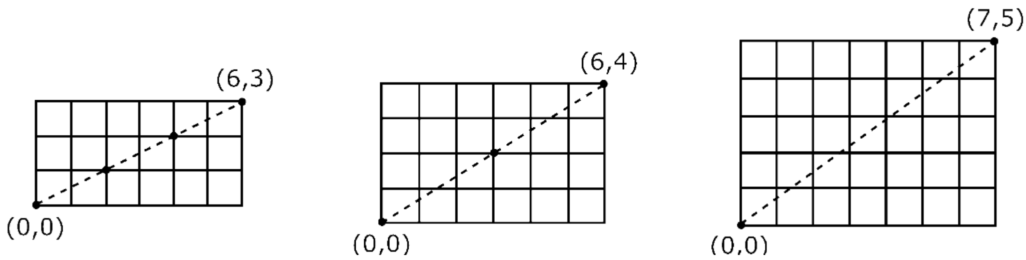


Figura 1.2.1: Malha quadriculada

Observa-se na Figura 1.2.1 que os pontos da malha quadriculada pertencentes a diagonal AB, divide a mesma em partes iguais, mas se faz necessário provar que essa afirmação satisfaz uma situação geral. De posse das coordenadas do primeiro ponto de divisão, denotadas por (m_1,n_1), podemos facilmente calcular o número de pontos da malha na diagonal.

De fato, $\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = k$ dá o número de partes em que a diagonal foi dividida, então o número de pontos da malha pertencentes ao segmento AB é dado por $k+1$. Por outro lado, se $F_1(m_1,n_1)$ é o primeiro ponto da malha que divide AB, então o segundo é $F_2(2m_1,2n_1)$.

Isso pode ser provado pelo desenho representado na Figura 1.2.2, onde se percebe que os triângulos OUF_1 e F_1VF_2 são congruentes, então, se houver algum ponto da malha em F_1F_2, então F_1 não pode ser o primeiro ponto de reticulação da linha média aberta, pois existiria um outro ponto da malha entre O e F_1. Pelo mesmo argumento podemos provar que todos os pontos reticulados da linha média OA tem coordenadas da forma (km_1,kn_1).

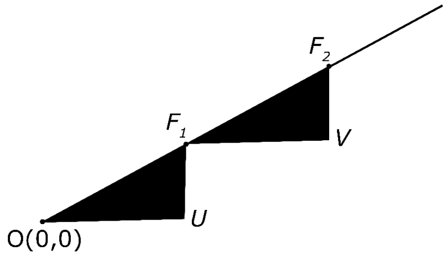


Figura 1.2.2: Triângulos congruentes

Daí $m = km_1$ e $n = kn_1$ e essas relações implicam que k é divisor comum de m e n. Mas m_1 e n_1 sendo o menor desses números, k deve ser o maior, então k é o maior divisor comum de m e n. Devido a estas considerações podemos concluir que o número de pontos da malha no segmento AB é $mdc(m, n) + 1$, onde $mdc(m, n)$ representa o maior divisor comum de m e n.

Se as coordenadas são $A(a_1, b_1)$ e $B(a_2, b_2)$, podemos transladar o retângulo cujos vértices opostos são A e B para a origem. Existem quatro situações diferentes (veja a Figura 1.2.3) de acordo com a ordem de a_1, a_2 e b_1, b_2. Em todo os casos, o número de pontos da malha é $mdc(m, n) + 1$, onde $m = |a1–a2|$ e $n = |b1–b2|$.

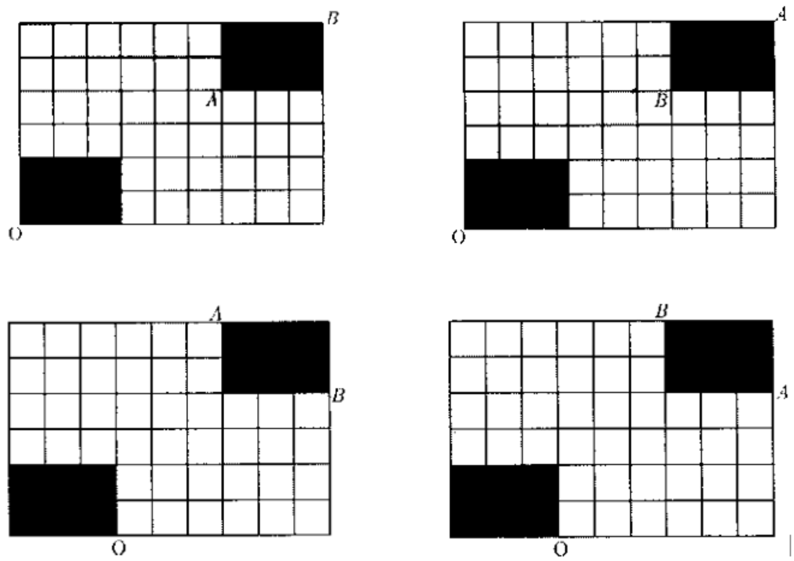


Figura 1.2.3: Malha quadriculada

Observação 1.2.5. Se usarmos a equação da linha OA, podemos formular a resolução de maneira mais coerente. A equação da linha OA (com $A(m, n)$) é $y = \frac{nx}{m}$ e $d = mdc(m, n)$, então existem números naturais relativamente primos m_1 e n_1 tais que $m = dm_1$ e $n = dn_1$. Neste caso, se um ponto de reticulação (x, y) estiver nesta linha e satisfizer $x \leq m$, então $\frac{x}{m_1}$ é um inteiro no intervalo $[0, d]$. Isto pode ocorrer se e somente se $x = km_1$, onde $0 \leq k \leq d$, então o número de pontos da malha no segmento é $d + 1$.

De fato, a primeira prova é tão espessa porque praticamente deduzimos a equação da linha. O segundo é mais conciso, mas usa mais noções e está longe de ser o primeiro em visualização. A seguir, tentaremos projetar nossas provas para que não sejam ininteligíveis nem desnecessariamente circunstanciais. Claro que esta é uma tarefa impossível porque o título ideal depende do leitor.

Problema 1.2.6. Os lados AB e CD de um retângulo são divididos em m número de partes iguais enquanto os lados BC e AD se dividem em n partes iguais. Ao conectar os pontos correspondentes (como na Figura 1.2.4), obtemos uma decomposição da malha do retângulo. Encontre o número de pontos de interseção formados pela diagonal AC e as linhas da malha.

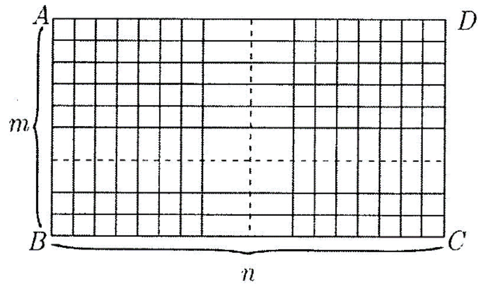


Figura 1.2.4: Malha quadriculada

Resolução: Temos linhas verticais $m+1$ e $n+1$. A diagonal cruza todos eles, mas alguns pontos de interseção coincidem. É claro que as coincidências ocorrem quando as diagonais passam através de um ponto da malha, então o número de pontos de interseção é $m + n + 1 – mdc(m, n)$.

Na Figura 1.2.5, os pontos parcialmente sobrepostos representam as duplas intersecções que ocorrem nos pontos da malha.

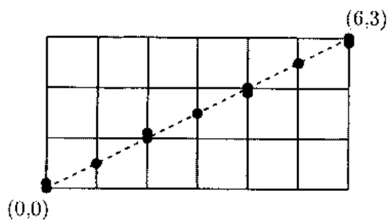


Figura 1.2.5: Malha quadriculada

Problema 1.2.7. Generalize os resultados dos dois problemas anteriores.

Resolução: O primeiro passo é formular um problema mais geral (claro que há infinitos desses problemas). Então, no que segue, consideramos os pontos $O(0, 0, 0)$ e $A(m, n, p)$, com $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ e determinamos o número de pontos da malha no segmento de linha $[OA]$. Denote por (m_1, n_1, p_1) as coordenadas do primeiro ponto da malha na linha média aberta (OA). O mesmo raciocínio que na resolução do Problema 1.2.6 implica que todos os pontos da malha nessa linha têm coordenadas da forma $F(km_1, kn_1, kp_1)$, onde k é um número natural. Da condição $F \in [OA]$ deduzimos que $k \leq d$, onde $d = mdc(m, n, p)$, então o número de pontos da malha no segmento de linha $[AB]$ é $mdc(m, n, p) + 1$. No caso geral, temos o seguinte resultado:

O segmento de linha cujos pontos finais são $A(a_1, b_1, c_1)$ e $B(a_2, b_2, c_2)$, com $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{N}^*$, contém exatamente

$$mdc(|a1–a2|, |b1–b2|, |c1–c2|) + 1$$

pontos de treliça. Pela mesma argumentação verificou-se que em $\mathbb{R}^n$ o segmento de linha cujos pontos finais são $A\left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)$ e $B\left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2\right)$ contém exatamente $mdc\left\{\left|x_i^1 - x_i^2\right|, 1 \leq x \leq n\right\} + 1$ pontos de treliça.

Para generalizar o Problema 1.2.7. Consideramos o paralelepípedo abarcado pelos pontos $O(0, 0, 0)$ e $A(m, n, p)$ em $\mathbb{R}^3$ e os planos paralelos aos planos coordenados que passam pelos pontos da malha e também pelos planos de coordenadas. O problema é encontrar o número dos pontos de interseção do segmento $[AB]$ com esses planos. Quando a diagonal AB passa através de um ponto da malha, ela intersecta de fato três planos, mas há situações em que a diagonal intercepta apenas dois planos. Isso ocorre nos pontos (x, y, z) com exatamente duas coordenadas inteiras. O número de pontos da malha é $mdc(m, n, p) + 1$, enquanto o número de pontos com pelo menos duas coordenadas inteiras é

$$mdc(m, n) + mdc(n, p) + mdc(p, m) + 3,$$

então o número de pontos de treliça na diagonal é:

$$m + n + p – mdc(m, n) – mdc(n, p) – mdc(p, m) + mdc(m, n, p) + 1.$$

Na dimensão mais alta, podemos obter uma fórmula análoga usando uma peneira lógica.

Problema 1.2.8. Qual é o número máximo de pontos de interseção que podem aparecer desenhando n círculos em um plano?

Resolução: O mesmo argumento pode ser aplicado, o número de pontos de interseção é máximo se e somente se cada par de círculos tiver dois pontos de interseção e não houver ponto pertencente a pelo menos três círculos. Neste caso, em cada círculo obtemos $2(n–1)$ pontos de interseção. Então, contando os pontos em cada círculo obtemos pontos $n2(n–1) = 2n(n–1)$. Mas, desse modo, contamos cada ponto duas vezes, então o número de pontos de interseção é $n(n-1)$.

Problema 1.2.9. Qual é o número máximo de pontos de interseção que podem aparecer desenhando n quadrados (triângulos etc.) em um plano?

Resolução: Os lados de dois triângulos não podem ter mais de 6 pontos comuns (porque cada lado de um triângulo pode cruzar, apenas dois lados do outro). Portanto, se cada par de triângulos tiver 6 pontos em comum, e não houver ponto de interseção pertencente a mais de dois triângulos, então obteremos

$$\frac{n\,(6\,(n-1))}{2} = 3n\,(n-1)$$

pontos de interseção. Por um raciocínio análogo obtemos $4n(n–1)$ para quadrados e em geral $kn(n–1)$ para k-gons. Para a completude da prova, temos que mostrar que essas configurações extremais existem. Felizmente, é fácil construir tal figura girando um k-gon regular em torno de seu centro com um ângulo suficientemente pequeno (para triângulos e quadrados, veja a Figura 1.2.6).

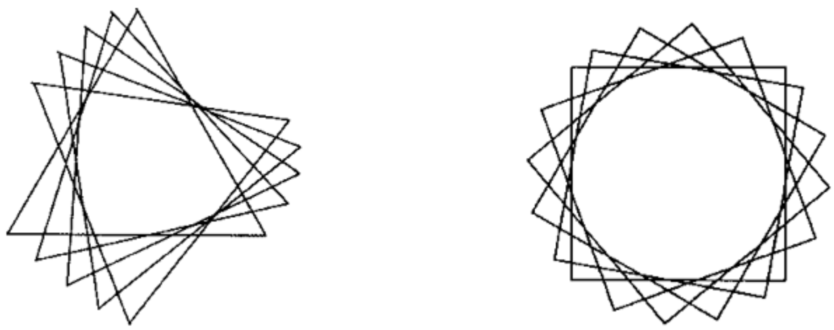


Figura 1.2.6: Interseção de triângulos e interseção de quadrados

Problema 1.2.10. As linhas d_1 e d_2 são paralelas. Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ estão em d_1 e os pontos $B_1, B_2, \ldots, B_n$ estão em d_2. Construímos todos os pontos de interseção dos segmentos A_iB_j. Os pontos são organizados de tal forma que o número de interseções internas entre os segmentos de linha é maximizado (para atingir esse objetivo, não devemos permitir que mais de dois segmentos de linha se interceptem em um ponto).

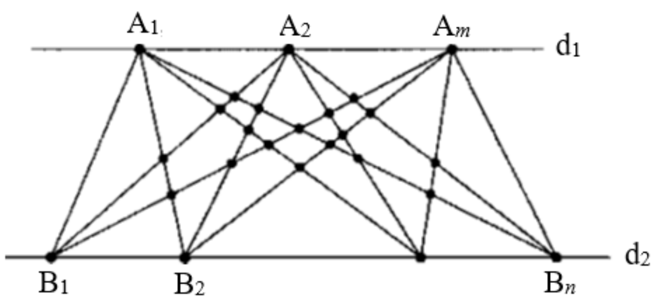


Figura 1.2.7: Interseções interiores

Resolução: Se o número de pontos de interseção for máximo, não haverá três linhas concorrentes entre as construídas. Isso implica que escolher dois pontos em d_1 e dois pontos em d_2 determinam um único ponto de interseção (como na figura a seguir).

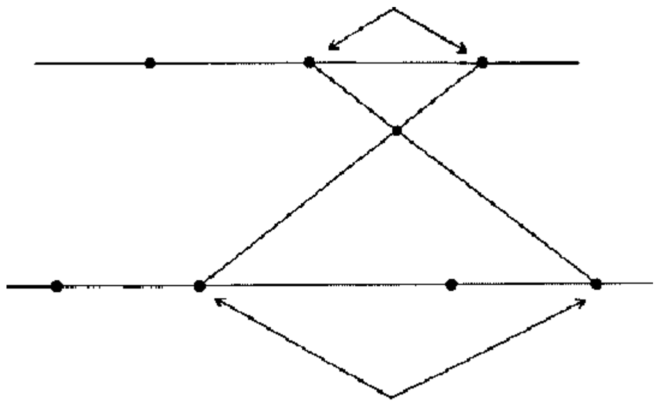


Figura 1.2.8: Interseção interior

Em d_1 podemos escolher um par de pontos de $\frac{m(m-1)}{2}$ maneiras possíveis, enquanto em d_2 podemos escolher um par de pontos $\frac{n(n-1)}{2}$ maneiras, então o número de pontos de interseção é $\frac{mn(m-1)(n-1)}{4}$, (porque cada par de d_1 pode ser usado com qualquer par de d_2 para construir um ponto de interseção).

Problema 1.2.11. (Székely Miko Memorial Contest, 1998) Pinte os vértices de um convexo 2n-gon alternativamente com duas cores e desenhe as diagonais com extremidades de cores diferentes. Qual é o número máximo de pontos de interseção determinados por essas diagonais?

Resolução: Usamos a mesma técnica do Observação anterior. Uma diagonal d com pontos de extremidade de cores diferentes determina dois meio-planos indicados por H_+ e H_-. Se o número de vértices coloridos com a primeira cor for j em H_+, então o número de vértices em H_+, colorido com a segunda cor também é j e o número de vértices em H_- é n–j–1 para ambas as cores. Portanto, o número de pontos de interseção em d é $2j(n$–1–$j)$. Contando os pontos de interseção em todas as diagonais, cada ponto de interseção é contado quatro vezes, portanto, o número de pontos de interseção é

$$S = \frac{n}{4} 2 \sum_{j=1}^{n-2} j\,(n-1-j).$$

Usando $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ e $1^2+2^2+\cdots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ obtemos

$$\frac{n^2\,(n-1)\,(n-2)}{6}.$$

Capítulo 2

Contagem de segmentos e caminhos

Nesse capítulo, serão apresentados métodos, técnicas e fórmulas que podem ser trabalhados desde as séries iniciais até o ensino médio visando ampliar a capacidade de raciocínio e percepção. Nesse sentido, começaremos com situações envolvendo contagem de segmentos colineares, segmentos, caminhos e finalizaremos com a dedução de algoritmos que calcule a quantidade de segmentos e caminhos, presentes numa figura plana cuja região interna foi dividida por pontos ou linhas que determinam figuras secundárias de diversas formas e tamanhos.

2.1 Contagem de segmentos

2.1.1 Contagem de segmentos colineares

Inicialmente, serão apresentadas figuras simples formada por vários segmentos colineares com o objetivo de contar a quantidade de segmentos presentes na figura maior.

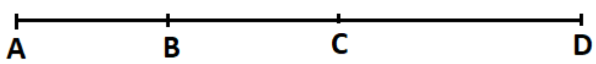


Figura 2.1.1: Segmento AD

Utilizando uma simples inspeção, podemos obter a quantidade exata de segmentos presentes na figura. Temos então os seguintes segmentos:

$$AB,\ AC,\ AD,\ BC,\ BD,\ CD.$$

Ampliando a figura principal, temos:

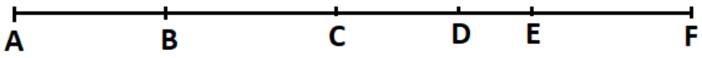


Figura 2.1.2: Segmento AF

Inspecionando novamente a figura, temos os seguintes segmentos

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ AF,\ BC,\ BD,\ BE,\ BF,\ CD,\ CE,\ CF,\ DE,\ DF,\ EF.$$

Observa-se que a medida que a figura principal é ampliada, a quantidade de segmentos também aumenta, dificultando assim a contagem por inspeção. Sendo assim, faz-se necessário o uso de uma nova forma de contagem, rápida, precisa e eficiente. Para isso, uma análise indutiva a fim de deduzir uma fórmula para contar segmentos colineares. Isso será feito na seguinte

Proposição 2.1.1. *Se um segmento está dividido em n partes então ele possui $\frac{n(n+1)}{2}$ segmentos contidos nele.*

Demonstração. Observe que a soma desses últimos n segmentos é a soma dos termos de uma progressão aritmética (P.A.). Portanto, sem perda de generalidade, um segmento dividido em n partes possui $\frac{n(n+1)}{2}$ segmentos contidos nele. □

Note que essa situação pode ser utilizada como uma atividade investigativa ou exercício introdutório para o estudo de sequências, como a P.A.

Agora colocaremos alguns exemplos em que as figuras principais são formadas por segmentos de retas horizontais interceptados por segmentos transversais determinando assim vários segmentos.

Exemplo 2.1.2. Para determinar o número de segmentos da Figura 2.1.3,

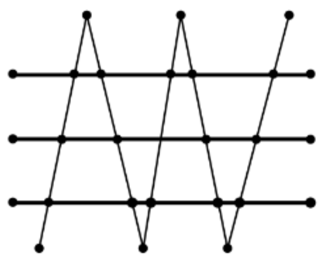


Figura 2.1.3: Segmentos transversais

a resolução será feita em duas etapas. Primeiramente, faremos a contagem dos segmentos horizontais usando a Proposição 2.1.1, como segue a figura abaixo

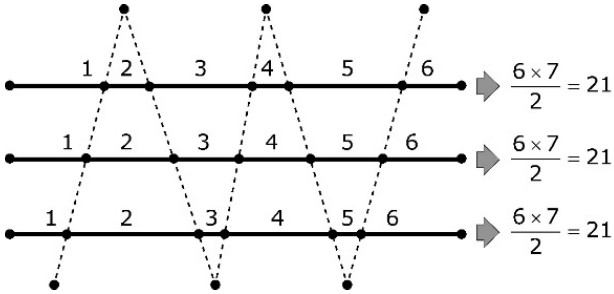


Figura 2.1.4: Segmentos transversais

Posteriormente, faremos a contagem dos segmentos transversais, aplicando novamente a Proposição 2.1.1

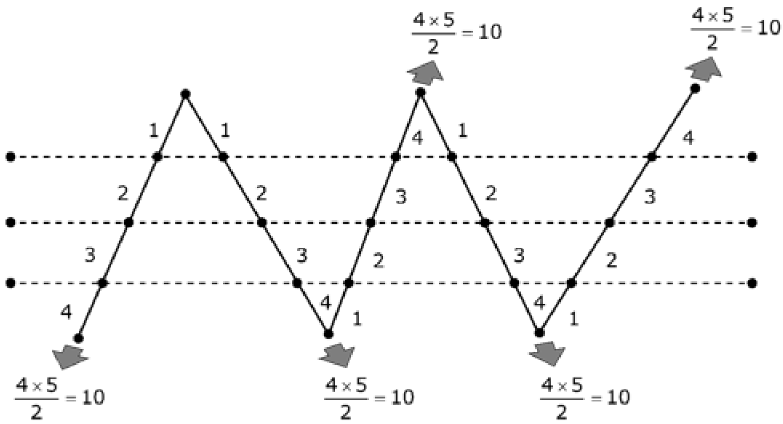


Figura 2.1.5: Segmentos transversais

Portanto, somando a quantidade de segmentos obtidas nas duas etapas, concluímos que o total de segmentos é 113.

Exemplo 2.1.3. Neste exemplo, queremos determinar a quantidade de segmentos que possui a Figura 2.1.6

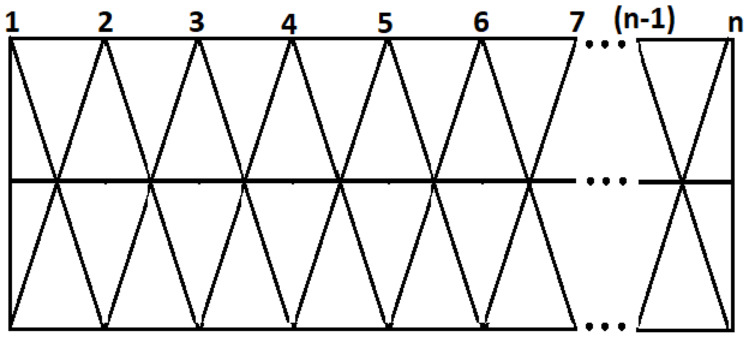


Figura 2.1.6: Segmentos transversais

Analogamente ao que foi feito no Exemplo 2.1.2, aplicaremos a Proposição 2.1.1, para contar os segmentos horizontais e verticais, como mostra a Figura 2.1.7. Sendo assim, podemos dizer que há $\frac{3n^2-n}{2}$ segmentos horizontais.

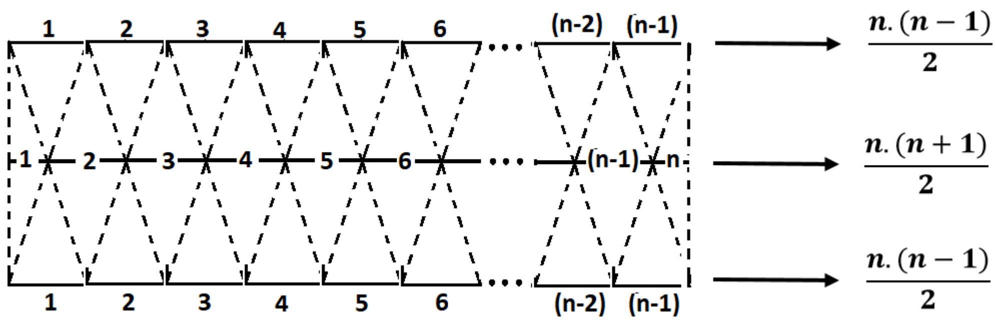


Figura 2.1.7: Segmentos transversais

Do mesmo modo, podemos dizer que há $6n$ segmentos transversais, que podem ser observados, na Figura 2.1.8.

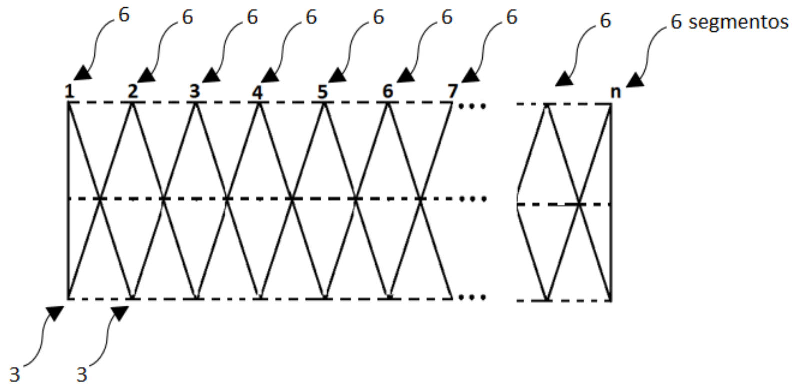


Figura 2.1.8: Segmentos transversais

Portanto, somando todos os segmentos obtidos temos $\frac{n(3n+11)}{2}$ segmentos nessa figura (Figura 2.1.6)

Exemplo 2.1.4. Considere H o conjunto de vértices de uma malha quadriculada $2 \times n$ conforme Figura 2.1.9

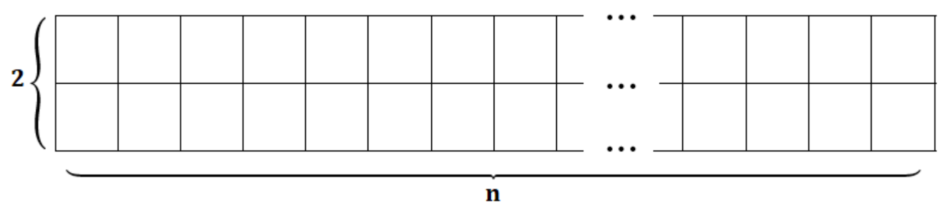


Figura 2.1.9: Malha quadriculada

Vamos calcular o número de segmentos cuja interseção com H contém exatamente os pontos extremos desses segmentos.

Iniciaremos, chamando de segmento AB todos os segmentos que satisfazem as condições do acima. Sendo assim, a interseção de cada um desses segmentos com H terá apenas os pontos A e B, ou seja, $AB \cap H = \{A, B\}$.

Analisando o segmento AB, nota-se que podem ocorrer as seguintes possibilidades:

i) O segmento AB está contido nas linhas da malha e contém pelo menos 3 elementos de H. Nesse caso, não precisamos contar nada pois $AB \cap H \neq \{A, B\}$.

ii) O segmento AB está contido nas linhas da malha e contém apenas 2 elementos de H. Nessa situação, o segmento AB deve ter comprimento 1.

Há 2 situações:

1) O segmento AB está contido nas linhas horizontais da malha

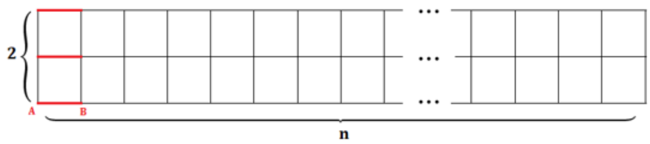


Figura 2.1.10: Malha quadriculada

De acordo com a Figura 2.1.10, existem 3 possibilidades para o segmento horizontal AB em cada uma das n colunas da malha. Logo, sob essas condições, há segmentos horizontais contidos nas linhas da malha que contém apenas 2 elementos de H.

2) O segmento AB está contido nas linhas verticais da malha

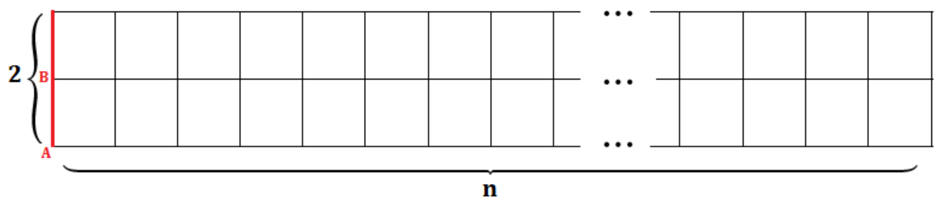


Figura 2.1.11: Malha quadriculada

Agora, de acordo com a Figura 2.1.11, há 2 possibilidades para o segmento vertical AB em cada um dos $n+1$ segmentos verticais da malha, como os destacados na figura. Logo, sob essas condições, há $2\,(n+1)$ segmentos horizontais contidos nas linhas da malha que contém apenas 2 elementos de H.

Portanto o número de segmentos AB contidos nas linhas da malha e que contém apenas 2 elementos de H é $3n + 2\,(n+1) = 5n + 2$

iii) O segmento AB não está contido nas linhas da malha e contém pelo menos três pontos de H.

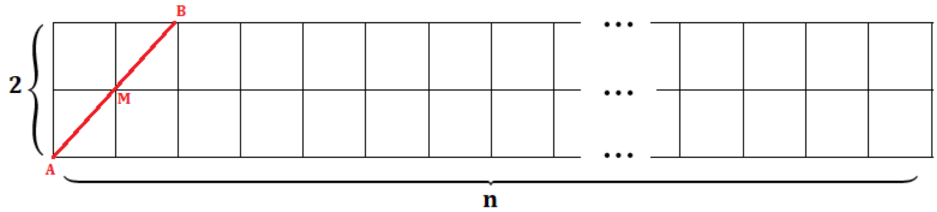


Figura 2.1.12: Malha quadriculada

Note, pela Figura 2.1.11, que os pontos do conjunto $AB \cap H$ dividem o segmento AB em partes iguais, mas eles não podem dividi-lo em mais de 2 partes, então $AB \cap H = \{A, M, B\}$, em que M é o ponto médio do segmento AB.

iv) O segmento AB não está contido nas linhas da malha e contém apenas 2 pontos de H.

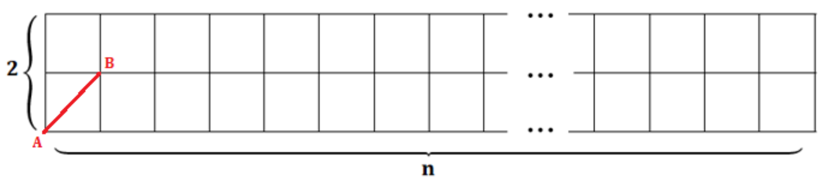


Figura 2.1.13: Malha quadriculada

A partir dos resultados de casos anteriores, temos que escolher as coordenadas $A(u, v)$ e $B(x, y)$ de forma que $u \neq x$ e $v \neq y$ e uma das somas $u + x$, $v + y$ é ímpar.

Observando a Figura 2.1.12, note que $v, y \in \{0, 1, 2\}$ pois são coordenadas verticais e a malha é $2 \times n$. Sendo assim temos 6 possibilidades para escolher as coordenadas v e y. Há 2 situações a considerar:

I) $y = 0$, $v = 2$ e $y = 2$, $v = 0$

Percebe-se que há 2 casos em que isso acontece. Daí, temos que escolher u e x para ser de paridade diferente e isto garante $u \neq x$.

Ademais, na malha $2 \times n$ há $(n + 1)$ coordenadas horizontais das quais $\frac{n+1}{2}$ são ímpares. Portanto há $n - 1 - \left(\frac{n+1}{2}\right)$ coordenadas pares.

Pelo Princípio Multiplicativo temos $\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(n + 1 - \frac{n+1}{2}\right)$ possibilidades de escolher u e x.

Por isso, com esses 2 casos, obtemos $2\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(n + 1 - \frac{n+1}{2}\right)$ segmentos.

II) $y = 0$, $v = 1$; $y = 1$, $v = 0$; $y = 1$, $v = 2$ e $y = 2$, $v = 1$

Agora, nesses 4 casos restantes, não temos qualquer outra restrição na escolha de x e y além de $x \neq u$, então existem $\frac{(n+1)n}{2}$ possibilidades para cada um dos casos, ou seja há nesses $4\frac{(n+1)n}{2}$ últimos casos.

Sendo assim há $2\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(n + 1 - \frac{n+1}{2}\right) + 4\frac{(n+1)n}{2}$ segmentos AB que não estão contidos nas linhas da malha e contém apenas 2 pontos de H.

Portanto, somando os resultados encontrados em i), ii), iii) e iv) temos

$$(5n+2)+4\frac{(n+1)\,n}{2}+2\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(n+1-\frac{n+1}{2}\right)$$

segmentos cuja interseção com H contém exatamente os pontos extremos desses segmentos.

O estudo do próximo tópico, cálculo do número de diagonais de um polígono convexo, é bastante comum em situações envolvendo contagem de segmentos, mas isto não o torna menos importante.

2.1.2 Cálculo do número de diagonais de um polígono convexo com n lados, $n > 3$.

É notório que todo polígono convexo com 4 ou mais lados possui diagonais e que de cada vértice partem $n-3$ diagonais.

Neste tópico, proponho que seja feita, antes de apresentar a fórmula do número de diagonais $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, comum nos livros didáticos, uma abordagem usando o raciocínio recursivo (recorrência) como forma de ampliar a capacidade de raciocínio. Através da recorrência, será deduzida a fórmula $D_{n+1} = D_n + n - 1$ que permite calcular o número de diagonais de um polígono convexo de $n+1$ lados através do número de diagonais do polígono anterior (n lados).

Após a inspeção do funcionamento desse resultado, vamos prová-lo a seguir.

Proposição 2.1.5. *Se um polígono com n lados tem D_n diagonais então o polígono com $(n+1)$ lados possui $D_{n+1} = D_n + n - 1$ diagonais.*

Demonstração. Considere um polígono incompleto com $n+1$ lados, consequentemente com $n+1$ vértices representado na Figura 2.1.14

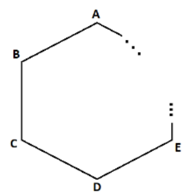


Figura 2.1.14: Polígono

Vamos determinar a quantidade de diagonais, denotada por D_{n+1}, que esse polígono com $n+1$ lados tem. Traçando o segmento AC, obtemos um polígono com n lados, representado na região cinza da Figura 2.1.15, pois perdemos dois lados, BC e AB, e ganhamos o lado AC.

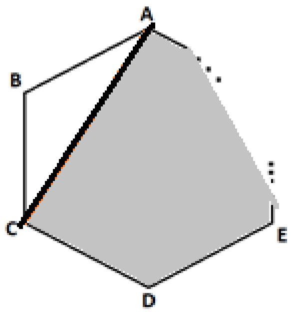


Figura 2.1.15: Polígono

Por hipótese, esse polígono possui D_n diagonais. Observando novamente o polígono com $n+1$ lados, temos D_n diagonais vindas do polígono de n lados, a diagonal AC e $[(n+1)-3]$ diagonais saindo do vértice B, ou seja:

$$D_{n+1} = D_n + 1 + [(n+1) - 3] .$$

Logo, o polígono com $(n+1)$ lados possui uma quantidade de diagonais dada por

$$D_{n+1} = D_n + n - 1.$$

□

Proposição 2.1.6. *Se um polígono tem n lados então a quantidade de diagonais D_n é dada por*

$$D_n = \frac{n\,(n-3)}{2}.$$

Demonstração. De acordo com a recorrência obtida na Proposição 2.1.5, temos:

$$\begin{aligned}
&D_3 = 0\\
&D_4 = D_3 + (3-1)\\
&D_5 = D_4 + (4-1)\\
&D_6 = D_5 + (5-1)\\
&\vdots\\
&D_n = D_{n-1} + [(n-1)-1]
\end{aligned}$$

Somando membro a membro as equações, teremos

$$D_3 + D_4 + D_5 + \cdots + D_n = 0 + D_3 + (3-1) + D_4 + (4-1) + \cdots + D_{n-1} + [(n-1)-1].$$

Portanto, $D_n = 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 2$, que se trata de uma PA com $n-3$ termos, cuja soma é $\frac{n(n-3)}{2}$. Sendo assim, $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$. $\square$

2.2 Contagem de caminhos

Entende-se por caminhos as diversas trajetórias que se pode escolher para sair de um ponto e chegar a outro obtendo assim caminhos ou a formação de figuras, palavras, inseridas numa figura maior. Neste tópico, queremos contar de quantas formas um evento pode ocorrer e isto é, basicamente, o objetivo da Análise Combinatória. Os Princípios Aditivo e Multiplicativo serão abordados, entretanto o objetivo principal deste tópico é apresentar uma técnica prática de contagem, específica para contagem de caminhos, chamada Técnica do Nós.

2.2.1 Princípios Fundamentais da Contagem

No que diz respeito às técnicas de contagem, existem dois princípios fundamentais: aditivo e multiplicativo.

2.2.1.1 Princípio aditivo

Vejamos em que consiste este princípio.

Suponha que:

i) Uma decisão D_1 possa ser tomada de d_1 maneiras;

ii) Uma segunda decisão D_2 possa ser tomada de d_2 maneiras;

iii) Não seja possível que ambas as decisões sejam tomadas ao mesmo tempo.

Então, o número de maneiras pelo qual a decisão pode ser tomada por D_1 ou D_2 é $(d_1 + d_2)$.

Exemplo 2.2.1. Maria quer comprar 1 bilhete de trem e sabe que esse bilhete é vendido, exclusivamente nas bilheterias A, B e C. Na bilheteria A há 2 guichês para pagamento, na bilheteria B há 4 guichês e na bilheteria C há 3 guichês. Maria está em frente aos guichês e precisa decidir em qual guichê ela vai comprar o bilhete e caminhar até lá. De quantas maneiras distintas Maria pode se dirigir a um dos guichês?

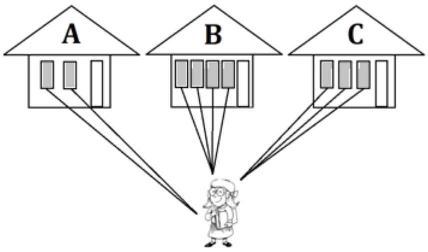


Figura 2.2.1: Bilheterias

Pelo princípio aditivo, Maria pode se dirigir a um dos 2 guichês da bilheteria A ou a um dos 4 guichês da bilheteria B ou a um dos 3 guichês da bilheteria C assim ela pode caminhar para adquirir esse bilhete de $2 + 4 + 3 = 9$ maneiras distintas.

2.2.1.2 Princípio multiplicativo

Vejamos em que consiste este princípio.

Suponha que:

i) Uma decisão D_1 possa ser tomada de $d1$ maneiras;

ii) Uma segunda decisão D_2 possa ser tomada de d_2 maneiras;

iii) Cada maneira de tomar a decisão D_1 pode ser seguida por qualquer daquelas maneiras para tomar a decisão D_2.

Então, o número de maneiras pelo qual pode ser tomada a decisão D_1 e depois a decisão D_2 é $(d_1.d_2)$.

Exemplo 2.2.2. De quantas maneiras distintas podemos escolher um quadrado preto e um quadrado branco num tabuleiro de xadrez 8×8?

Um tabuleiro de xadrez, como o descrito no enunciado, possui 32 quadrados brancos e 32 quadrados pretos. Sendo assim, temos 32 opções para escolher um quadrado preto e 32 opções para escolher um quadrado branco.

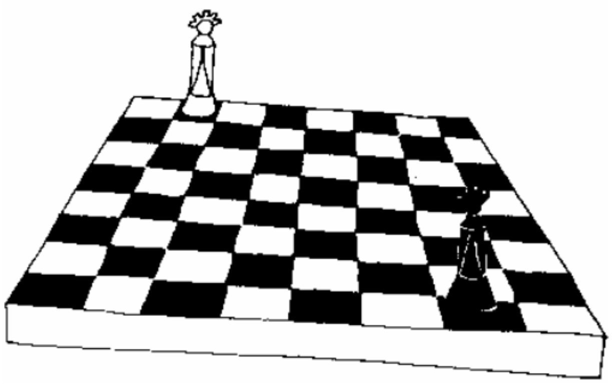


Figura 2.2.2: Tabuleiro de xadrez

Portanto, pelo princípio multiplicativo temos $32 \times 32 = 1024$ maneiras distintas de se escolher um quadrado preto e um quadrado branco.

Na situação a seguir, os dois princípios serão necessários. É fundamental que o professor enfatize, para os alunos, a importância dos conectivos "e" e "ou", como forma de determinar a estratégia que será utilizada na resolução das situações problema.

2.2.2 Técnica dos Nós

A Técnica do Nós usa princípios simples de contagem e pode ser aplicada desde as séries iniciais do Ensino Fundamental mas, infelizmente, é desprezada nos livros didáticos e consequentemente pelos professores de Matemática em sala de aula.

Considere a figura a seguir.

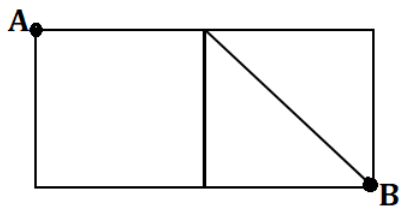


Figura 2.2.3: Malha quadriculada

De quantas formas distintas se pode ir de A até B, sem retroceder e nem passar por um mesmo caminho?

Note que: De A para M, há um caminho. De A para N, há um caminho

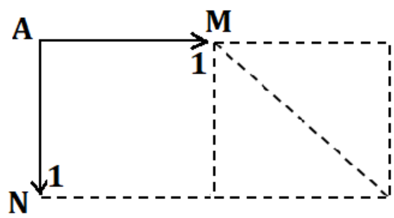


Figura 2.2.4: Malha quadriculada

De A para P, há um caminho, mas de A para Q, há dois caminhos.

De A para B, há 4 caminhos, mas de A para Q, há dois caminhos.

Portanto, se pode ir de A até B, sem retroceder e nem passar por um mesmo caminho, de 4 formas distintas.

Note que a quantidade de caminhos é contada de "esquina" em "esquina". Daqui para frente, essas "esquinas" serão chamadas de nós.

Definição 2.2.3. Chama-se de **nó** o entrelaçamento (interseção) entre duas ou mais partes lineares de uma figura.

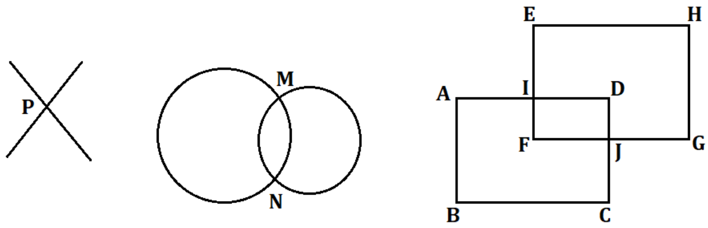


Figura 2.2.5: Interseção entre figuras

Nos exemplos acima, P, M, N, A, B, C, D, E, F, G, H, I e J são nós.

Para aplicar a técnica dos nós deve-se fazer o seguinte:

i. Identifique o ponto de partida com o número 1. Note que este ponto é um nó.

ii. A partir de 1 siga para outros nós, sem retroceder e nem passar por um mesmo caminho, contando os caminhos possíveis de se chegar a um novo nó.

Note que a quantidade de caminhos que levam a cada novo nó, é obtidos adicionando a quantidade de caminhos obtidos ao conectar o ponto de partida com os nós anteriores.

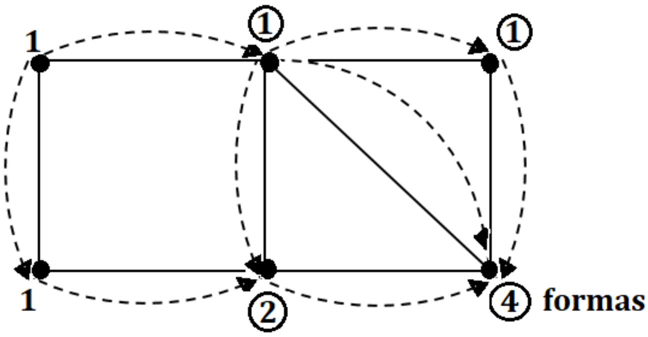


Figura 2.2.6: Malha quadriculada

Veja

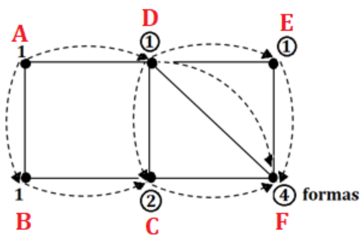


Figura 2.2.7: Malha quadriculada

De A para B, há 1 caminho(AB).

De A para D, há 1 caminho(AD).

De A para C, há 2 caminhos (ADC e ABC).

De A para C, há 2 caminhos (ADC e ABC).

De A para E, há 1 caminho (ADE).

De A para F, há 4 caminhos ($ADEF$, $ABCF$, $ADCF$ e ADF).

Exemplo 2.2.4. Na figura abaixo

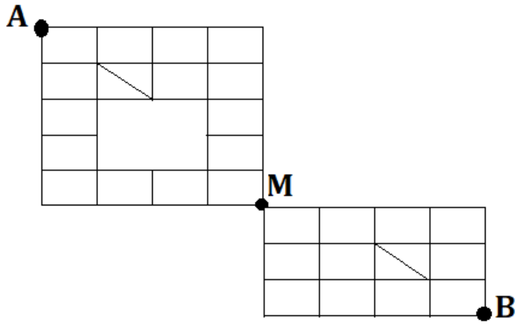


Figura 2.2.8: Malha quadriculada

vamos determinar o número de maneiras de ir de A ate B sem retroceder

Usando a técnica dos nós, temos

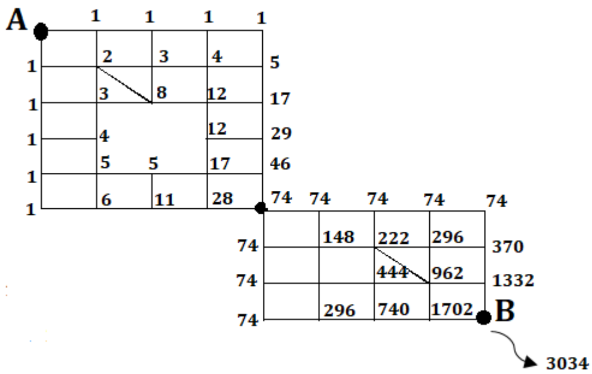


Figura 2.2.9: Malha quadriculada

Logo, é possível ir de A até B, sem retroceder, de 3034 maneiras distintas.

Uma outra maneira de resolver esse problema seria determinar o número de maneiras de ir de A até M, em seguida o número de maneiras de ir de M até B e por fim, aplicar o princípio multiplicativo.

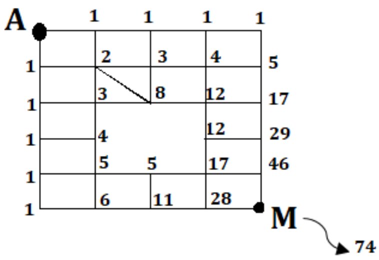


Figura 2.2.10: Malha quadriculada

De A para M há 74 caminhos e de M para B há 41 caminhos, logo há, pelo princípio multiplicativo, $74 \times 41 = 3034$ caminhos distintos de ir de A para B sempre avançando.

Exemplo 2.2.5. Na figura abaixo

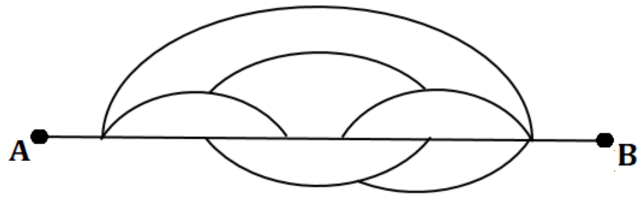


Figura 2.2.11: Caminhos

vamos determinar de quantas maneiras distintas se pode ir de A até B, sempre avançando.

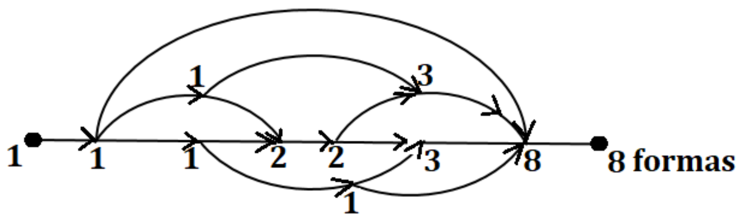


Figura 2.2.12: Caminhos

Portanto, pela Técnica dos Nós, se pode ir de A até B de 8 formas distintas.

Embora essa técnica não seja muito conhecida, ela é útil e de fundamental importância para resolver problemas, sem precisar recorrer às estratégias conhecidas da Análise Combinatória como permutação, arranjo e combinação. Como forma de reiterar a importância e a utilidade da Técnica dos Nós, apresentaremos, uma questão da prova do Exame Nacional de Acesso(ENA) do PROFMAT.

Exemplo 2.2.6. (PROFMAT, ENA – 2013) Uma pequena praça tem a forma de um hexágono dividido em triângulos, como ilustrado na figura abaixo.

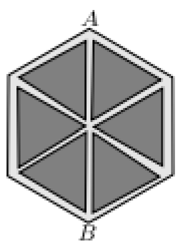


Figura 2.2.13: A praça

A reta que liga A e B está alinhada com a direção norte-sul, sendo A mais ao norte. Os espaços do hexágono fora dos triângulos são ruas nas quais uma pessoa pode caminhar.

Quantos são os caminhos diferentes que uma pessoa pode seguir (sem sair da praça) para ir do ponto A ao ponto B se, durante sua caminhada, ela sempre está mais ao sul do que estava em qualquer instante anterior?

Solução Oficial:

No primeiro trecho há 3 alternativas. A do meio e as laterais. O número de caminhos começando por uma das laterais é igual ao número de caminhos começando pela outra lateral, de modo que basta contar uma delas. Começando pelo meio: desce-se ao centro, e do centro há 3 opções. Seguindo cada uma delas, a regra de caminhar para o sul faz com que não haja mais opções depois. Então são 3 caminhos quando se parte pelo meio. Começando por uma lateral: depois do primeiro trecho há duas opções, seguir pelo contorno da praça ou rumar para o meio. Se seguir a opção do contorno da praça o caminho posterior fica determinado (1 caminho). Se seguir para o meio, há 3 opções, como no caso anterior (3 caminhos). Então são 4 caminhos no total.

Usando diretamente a técnica dos nós temos:

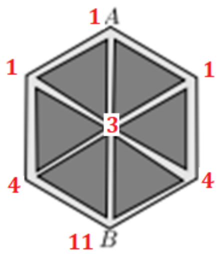


Figura 2.2.14: A praça

Portanto são 4 caminhos começando pela esquerda, 4 pela direita e 3 pelo meio, perfazendo um total de 11

Note que, nas soluções oficiais dos Exemplos 2.2.5 e 2.2.6, a técnica dos nós foi utilizada juntamente com a simples inspeção, entretanto nenhuma menção à técnica, em si, foi feita. Porém, a necessidade da técnica fica mais evidente quando nos defrontamos com figuras maiores como as que aparecem nos exemplos a seguir.

Capítulo 3

Contagem de regiões e figuras planas

O objetivo desse capítulo é apresentar métodos de contagem que permitem averiguar o número exato (máximo) de regiões ou figuras planas, com determinadas características. Esses métodos levam o estudante a descobrir, também, propriedades comuns às figuras estabelecendo relações e percebendo o espaço ocupado por elas. Desse modo, o aluno amplia sua capacidade de raciocínios aritmético, algébrico e geométrico.

Uma figura pode ser **simples**,

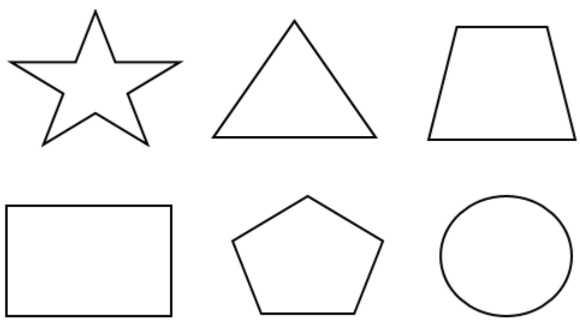


Figura 3.0.1: Figuras simples

que são figuras que no seu interior não aparecem outras figuras, ou **composta**,

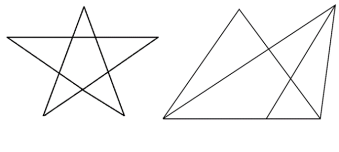


Figura 3.0.2: Figuras compostas

que são figuras que no seu interior aparecem outras figuras.

3.1 Métodos de contagem

Os métodos a serem apresentados não possuem, necessariamente, uma ordem de prioridade. A eficiência do método está intimamente relacionada com a forma em que a situação é apresentada.

3.1.1 Método da simples inspeção

Nesse caso, contamos diretamente na figura dada utilizando apenas nossa capacidade de observação.

A princípio, os desafios lançados podem parecer simplistas, mas na prática tenho observado que existe uma tendência muito grande em dar uma resposta equivocada, resultado de impaciência, falta de organização e cautela. Entretanto também é necessário ressaltar que esse tipo de situação consegue atrair a atenção inicial e desperta um certo interesse aos que são confrontados com as mesmas, seja numa sala de aula ou num ambiente informal. Acredito que essa atração inicial é resultado da nossa necessidade de dar respostas que julgamos estar ao nosso alcance.

Exemplo 3.1.1. Vamos contar os números de triângulos que estão presentes na Figura 3.1.1.

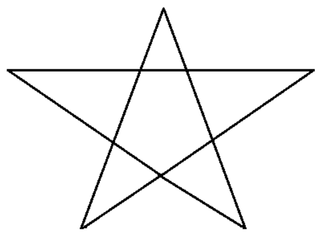


Figura 3.1.1: Estrela

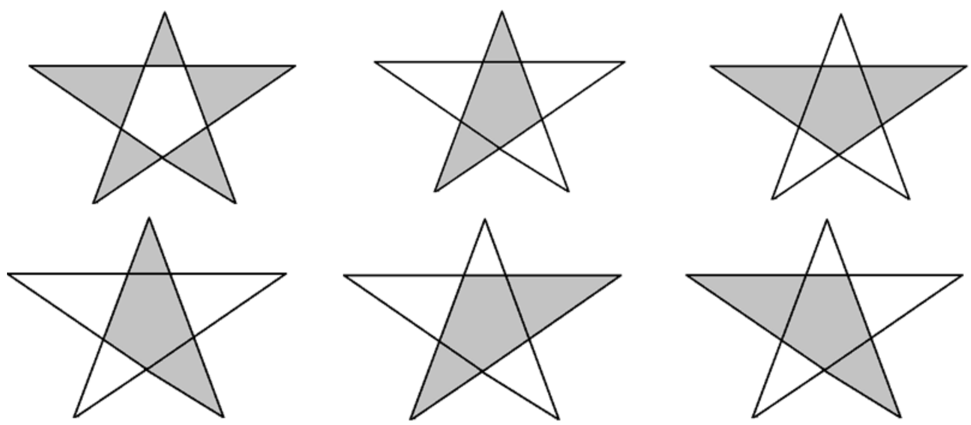


Figura 3.1.2: Triângulos

Logo, pela Figura 3.1.2, há 10 triângulos.

Exemplo 3.1.2. Agora, vamos determinar a quantidade de triângulos, da figura abaixo, que contém no máximo dois corações no seu interior.

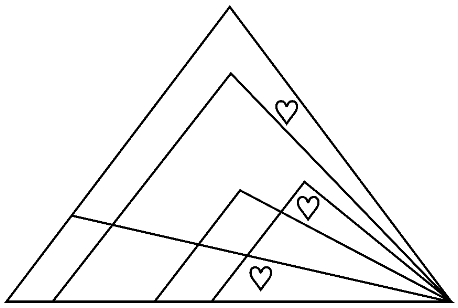


Figura 3.1.3: Triângulos

Devemos contar os triângulos que não contêm coração, os triângulos que contêm um coração e aqueles que contêm dois corações. Inspecionando atentamente a figura temos: 2 Triângulos sem coração, 9 Triângulos com 1 coração e 3 Triângulos com 2 corações

Temos assim um total de 14 triângulos que contém no máximo dois corações no seu interior.

3.1.2 Método Combinatório

Consiste em atribuir dígitos ou letras às figuras simples que compõem a figura dada e depois contar de maneira ordenada e crescente; ou seja, 1 dígito, 2 dígitos e assim por diante.

O recurso utilizado nesse método se justifica quanto maior for o número de figuras simples que compõe a figura dada.

Exemplo 3.1.3. Vamos determinar o número máximo de triângulos da figura abaixo

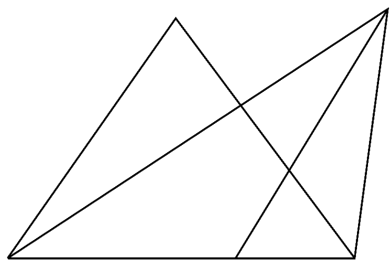


Figura 3.1.4: Triângulos

Atribuindo dígitos ás regiões simples, teremos

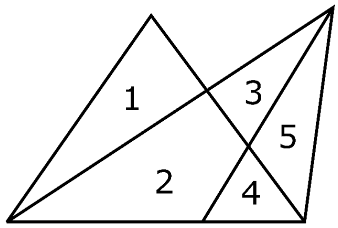


Figura 3.1.5: Triângulos

Nº de regiões simples	Triângulos que se formam	Nº de triângulos
1	1; 3; 4; 5	4
2	24; 35; 45; 23	4
3	124	1
4	2345	1
5	nenhum	0

um total de 10 triângulos.

3.1.3 Método indutivo

Esse método será utilizado em figuras que apresentam uma sequência de repetição e, para isso, faremos uso do resultado citado no Capítulo 2, Proposição 2.1.1, abordando a contagem de quadriláteros, de triângulos, de ângulos e de setores circulares. Em alguns casos, vamos construir três figuras semelhantes à que nos foi dada, porém mais simples, para então contar as figuras geométricas ordenadas e relacionar os resultados que nos ajudarão a deduzir uma regra de correspondência, fórmula fechada, que aplicaremos no problema.

3.2.3.1. Contando Triângulo

Exemplo 3.1.4. Dada a seguinte a figura abaixo

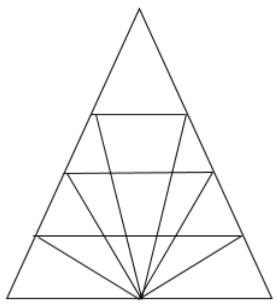


Figura 3.1.6: Triângulos

vamos determinar a quantidade total de triângulos. Contando separadamente, vamos analisar 4 figuras.

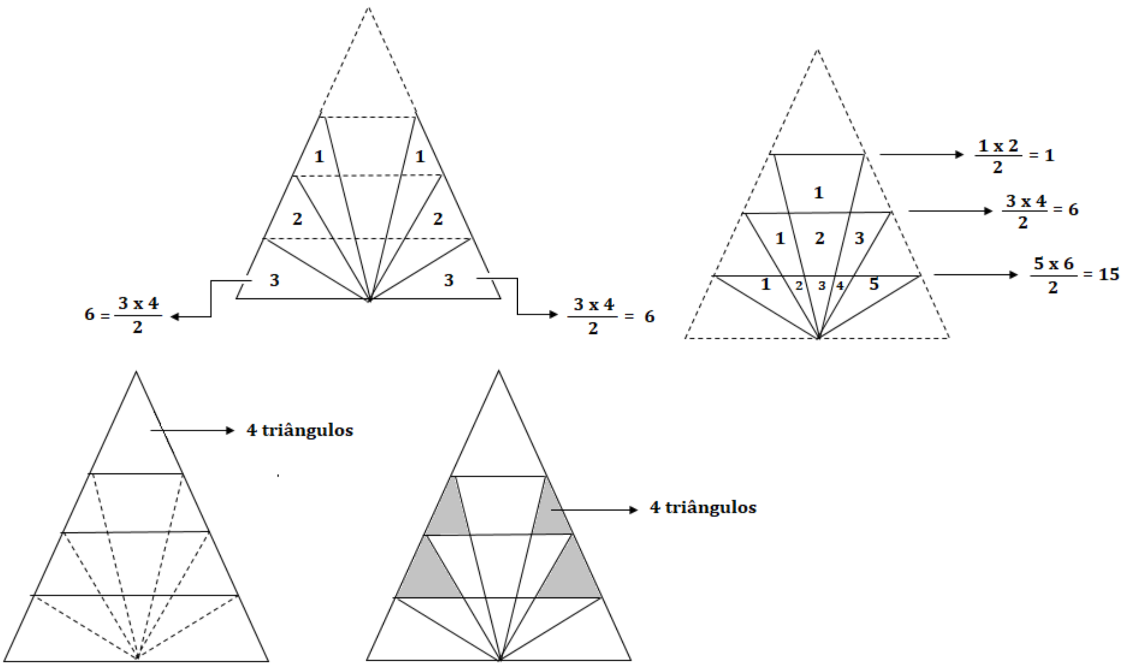


Figura 3.1.7: Triângulos

Nas duas primeiras, aplicaremos o resultado da Proposição 2.1.1 do Capítulo 2. Nas duas restantes, aplicaremos o método da simples inspeção. Assim, temos um total de 42 triângulos.

Vale a pena ressaltar a importância de resolver por etapas esse tipo de problemas permitindo assim uma visualização detalhada dos triângulos e o direcionamento conveniente da técnica a ser utilizada.

Exemplo 3.1.5. Vamos contar por indução a quantidade de triângulos na figura abaixo

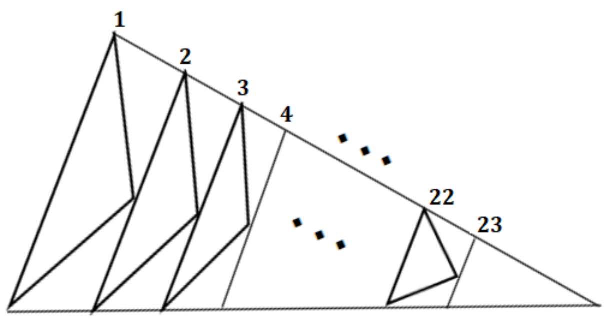


Figura 3.1.8: Triângulos

analisando separadamente a figura

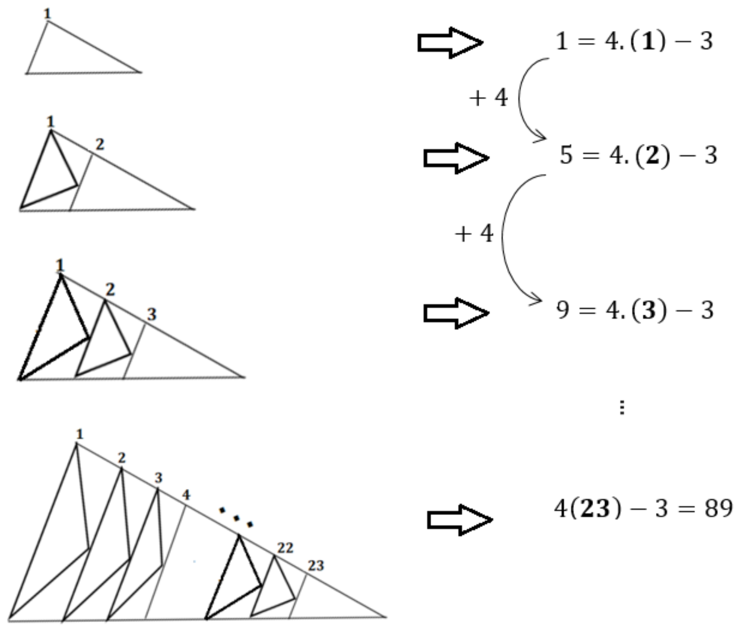


Figura 3.1.9: Triângulos

O total de triângulos T_n é dado por $T_n = 4n - 3$

3.2.3.2. Contando Quadriláteros

Nesse tópico vamos contar quadriláteros, priorizando a contagem em malhas quadriculadas, mas também em pontos dispostos em formas que permitam identificar quadriláteros.

Agora, contaremos quadriláteros nas situações que se seguem.

Situação 1:

1	2	3	...	n

Pela Proposição 2.1.1, a quantidade de quadriláteros é dada por

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Situação 2:

1	2	3	...	n
2				
3				
⋮				
m				

Note que para contar a quantidade de quadriláteros na 1ª coluna recaímos na Situação 1. Desse modo, a quantidade de quadriláteros nessa coluna é dada por

$$1 + 2 + \cdots + m = \frac{m\,(m+1)}{2}.$$

Daí para contar a quantidade total de quadriláteros na malha quadriculada acima, basta aplicar o princípio multiplicativo

$$\frac{m\,(m+1)}{2}\frac{n\,(n+1)}{2}$$

Outra maneira de chegar a esse resultado é observar que o problema consiste em escolher dois segmentos verticais dentre os $n+1$ existentes e, em seguida, escolher dois segmentos horizontais dentre os $m+1$ existentes. Tais escolhas serão feitas por meio de combinações simples. Sendo assim teríamos o total de quadriláteros

$$C_{n+1}^{2}C_{m+1}^{2} = \frac{(n+1)!}{2!\,(n+1-2)!}\frac{(m+1)!}{2!\,(m+1-2)!} = \frac{m\,(m+1)}{2}\frac{n\,(n+1)}{2}.$$

3.2.3.3. Contando quadrados numa malha quadriculada

Uma pergunta intrigante: Quantos quadrados há num tabuleiro de xadrez?

Mas do que apenas encontrar uma resposta para essa pergunta, o objetivo desse tópico é explorar ao máximo as realidades matemáticas que possam advir da busca por um resultado que nos permita contar a quantidade máxima de quadrados presentes numa malha quadriculada. Se faz necessário observar a priori, que serão considerando apenas os quadrados cujos lados sejam dois a dois paralelos aos limites horizontais e verticais da malha e cujos vértices sejam pontos de nó da malha quadriculada. Na figura a seguir, estão representados em azul um quadrado permitido e em vermelho um quadrado não permitido.

Uma malha $n \times n$ será usada como ponto de partida para nos conduzir à solução desse problema.

Como estratégia, observaremos o que está acontecendo em casos mais simples, por exemplo, para $n = 1, 2, 3, 4$, buscando regularidades que nos permitam resolver o problema no caso geral. Analisemos os seguintes casos:

i) $n = 1$

Neste caso, só há 1 quadrado.

ii) $n = 2$

Neste caso, contaremos quantos quadrados de lados $l = 1, 2$, respectivamente, podemos encontrar.

Observe que há exatamente n2 quadrados de lado l=1, ou seja há 4 quadrados de lado unitário e há apenas 1 quadrado de lado l=n=2. Portanto temos um total de 5 quadrados.

iii) $n = 3$

Neste caso, contaremos quantos quadrados de lados $l = 1, 2, 3$, respectivamente, podemos encontrar.

Observe que há exatamente n^2 quadrados de lado $l = 1$, ou seja há 9 quadrados de lado unitário e há apenas 1 quadrado de lado $l = n = 3$. Podemos identificar também, na figura acima, 4 quadrados de lado $l = 2$. Portanto temos um total de 14 quadrados.

iv) $n = 4$

Neste caso, contaremos quantos quadrados de lados $l = 1, 2, 3, 4$, respectivamente, podemos encontrar

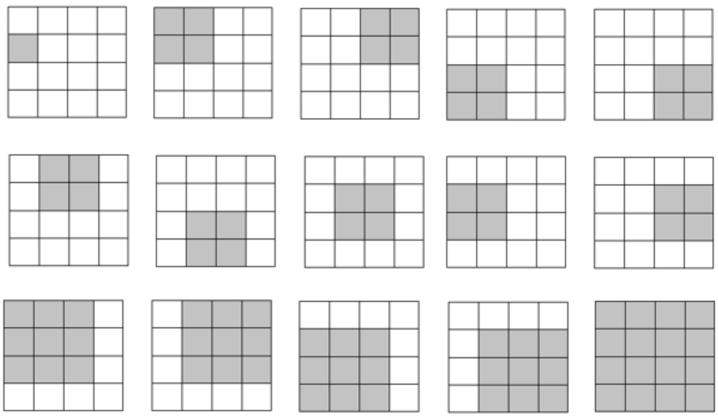


Figura 3.1.10: Quadrados

Observe que há exatamente n^2 quadrados de lado $l = 1$, ou seja 16 quadrados de lado unitário e há apenas 1 quadrado de lado $l = n = 4$. Podemos identificar também, na figura acima, 9 quadrados de lado $l = 2$ e 4 quadrados de lado $l = 3$. Portanto temos um total de 30 quadrados.

Após analisar os casos anteriores, busquemos regularidade entre a malha $(n \times n)$ e a quantidade total de quadrados que podemos obter. Até agora, vimos que

Malha $(n \times n)$	Quantidade de quadrados (S_n)
1×1	$S_1 = 1 = 1^2$
2×2	$S_2 = 5 = 1^2 + 2^2$
3×3	$S_3 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$
4×4	$S_4 = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

Nossa intuição, nos leva a suspeitar que

Malha ($n \times n$)	Quantidade de quadrados (S_n)
1×1	$S_1 = 1^2$
2×2	$S_2 = 1^2 + 2^2$
3×3	$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$
4×4	$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$
$\vdots$	$\vdots$
$n \times n$	$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$

Capítulo 4

Proposta de sequência didática

Essa parte do trabalho será dedicada a elaboração de uma sequência didática que pode ser aplicada em alunos do ensino fundamental e médio. O objetivo é oferecer oportunidade para que os alunos pratiquem coletar dados, aplicar métodos, construir tabelas, elaborar esquemas, estudar padrões, fazer e testar conjecturas, aplicar as ferramentas da análise combinatória, Progressão Aritmética e explorar o processo de recursão. Em particular para o ensino médio, os padrões que ocorrem entre sequências de números poligonais fornecem muitas oportunidades para o aprendizado de progressões e funções, além de propiciar familiaridade com uma notação mais sofisticada. A sequência será apresentada, particularmente, aos alunos do 3º ano do Ensino Médio, levando em conta o fato de que ficará subentendido que aos mesmos já foi ministrado aulas de Progressão Aritmética e Análise combinatória. Todo processo ocorrerá durante o decurso das aulas no período de duas semanas totalizando 6 aulas para cada turma. Geralmente, cada aluno compreende os problemas de forma particular, por isso, no primeiro momento a atividade será direcionada, individualmente, a cada um deles. Em seguida, a turma será dividida em grupos com no máximo 7 alunos, onde será socializado as noções sobre o que foi pedido no primeiro momento. A partir daí, a atividade deverá seguir sendo realizada pelos grupos.

4.1 Desenvolvimento da sequência didática

- Inicialmente será apresentado aos alunos 4 situações problemas que exigem contagem;
- Os problemas serão analisados um de cada vez até que seja esgotada todas as etapas propostas;
- No primeiro momento, será dado ao aluno 10min para que, individualmente, ele responda ao que foi pedido;

- No segundo momento, a sala será dividida em grupos. Agora, os alunos deverão socializar inquietações e resultados;
- No terceiro momento, o professor assume a turma e apresenta a tempestade de ideias e resultados coletados dos grupos;
- No quarto momento, os grupos deverão generalizar os resultados.

Conteúdos a serem trabalhados

- Progressão Aritmética;
- Progressão Aritmética de 2ª ordem;
- Recorrência;
- Princípio Aditivo;
- Princípio Multiplicativo;
- Permutação e Combinação.

Objetivo Geral

Desenvolver estratégias, ampliando a capacidade de observação, melhorando a velocidade de raciocínio e precisão no processo de contagem fazendo uso de métodos de contagem que permitem contar de forma prática.

Objetivos específicos

Reconhecer números poligonais e suas propriedades;
Contar segmentos, caminhos e regiões representadas por figuras planas;
Contar a quantidade de quadrados contidos numa malha quadriculada $n \times n$, limitando-se aos quadrados cujos lados são segmentos da malha.

Materiais e ferramentas a serem utilizados

- Folha de papel ofício e milimetrado;
- Régua;
- Lápis de cor;
- PrtSc na construção das figuras;
- Computador;

- Caroços de feijão.

Encaminhamentos

- Cada um dos alunos receberá apenas uma questão por vez;
- Apresentação dos materiais e recursos a serem utilizados;
- Divisão dos grupos;
- Cada aula terá a duração de 50min.

Cronograma das aulas.

- 1ª Aula: Situação 1, abordando números poligonais.
- 2ª Aula: Situação 1, abordando números poligonais.
- 3ª Aula: Situação 1, abordando contagem de segmentos e caminhos.
- 4ª Aula: Situação 2, abordando contagem de segmentos e caminhos por figuras planas.
- 5ª Aula: Situação3, contando regiões representadas por figuras planas.
- 6ª Aula: Situação 4, contando a quantidade de quadrados presentes numa malha quadriculada $n \times n$.
- 7ª Aula: Situação 4, Contando a quantidade de quadrados presentes numa malha quadriculada $n \times n$.

4.2 Apresentação das situações-problema a serem trabalhadas

4.2.1 Situação problema 1

Faça uma leitura do texto abaixo e, em seguida, tente responder o que se pede:

Números poligonais

Os números poligonais são casos particulares de números figurados. Denominam-se figurados, números que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Caso tal arranjo seja um polígono regular, esses números são chamados de poligonais.

A figura baixo mostra a representação de alguns números poligonais.

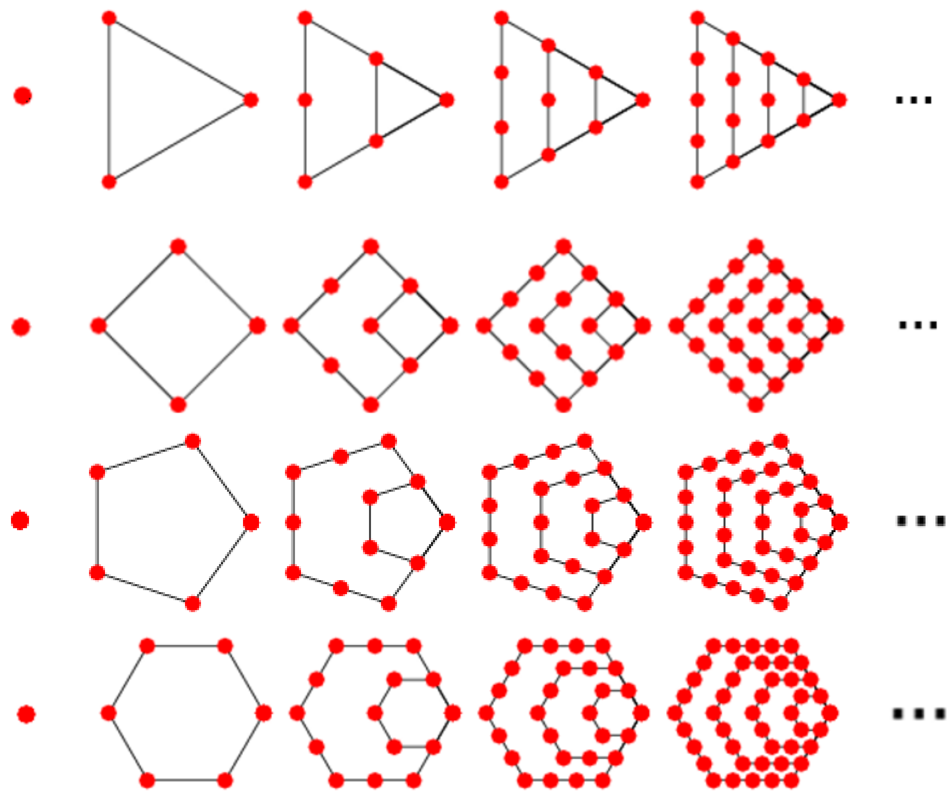
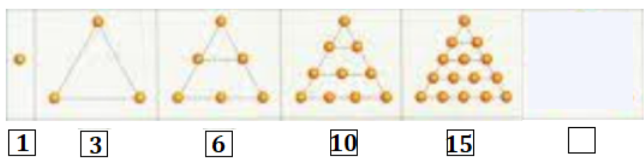


Figura 4.2.1: Números poligonais [7]

A partir da primeira linha superior temos os números: Triangulares, Quadrangulares, Pentagonais, hexagonais e Heptagonais.

Agora faça e responda o que se pede:

- Observe, mais uma vez, a tabela acima.
- Agora, junto com os colegas do seu grupo, socialize, a compreensão inicial sobre números poligonais e responda se 27 é um número triangular?
- Complete a tabela abaixo, desenhando a representação do 5º número triangular e anote, abaixo da representação, a quantidade de pontos utilizada.



1) Quantos pontos você desenhou, para obter a figura que representa o 5º número triangular?

2) Quantos pontos terá a figura que representa o 6º número triangular? E o 7º?

3) Escreva a sequência dos 10 primeiros números triangulares.

4) Agora complete a tabela abaixo, subtraindo os termos consecutivos da sequência de números triangulares.

3-1	6-3	10-6	15 -10						
2	3	4	5						

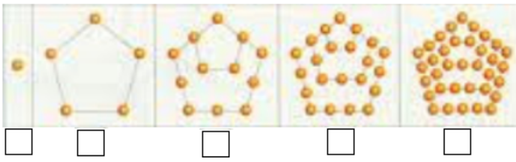
5) A sequência acima segue algum comportamento padrão? Qual?

Nesse momento, será retomado o conceito de P.A.

6) Podemos dizer que essa sequência é uma PA? Em caso afirmativo, qual é o valor da razão?

Agora, será pedido que os grupos repitam os 6 procedimentos anteriores, para números pentagonais.

1) Complete a tabela abaixo e anote, abaixo de cada representação, a quantidade de pontos utilizada.



2) Quantos pontos terá a figura que representa o 5º número pentagonal?

3) Quantos pontos terá a figura que representa o 6º número pentagonal? E o 7º?

4) Escreva a sequência dos 10 primeiros números pentagonais.

5) Agora complete a tabela abaixo, subtraindo os termos consecutivos da sequência de números pentagonais.

5-1	12-5	22-12							
4	7	10							

6) A sequência acima segue algum comportamento padrão? Qual?

7) Podemos dizer que essa sequência é uma PA? Em caso afirmativo, qual é o valor da razão?

Na aula seguinte, será feita a generalização dos números poligonais para um n qualquer apresentando, através de uma exposição dialogada as fórmulas recursiva, interativa. Em seguida, será preenchida, coletivamente, as colunas das fórmulas recursiva e interativa da tabela abaixo.

Como tarefa de casa, será pedido que os alunos determinem a sequência de números octogonais através das formulas e não mais por representação de pontos.

Na 3ª e última aula, faremos a correção da tarefa de casa, socializando os resultados encontrados na sequência de números octogonais. Em seguida preencheremos, coletivamente, a coluna da fórmula fechada.

4.2.2 Situação Problema 2

Nas figuras a seguir, determine a quantidade de caminhos e os caminhos possíveis para ir de A até B sempre avançando, seguindo os seguintes passos:

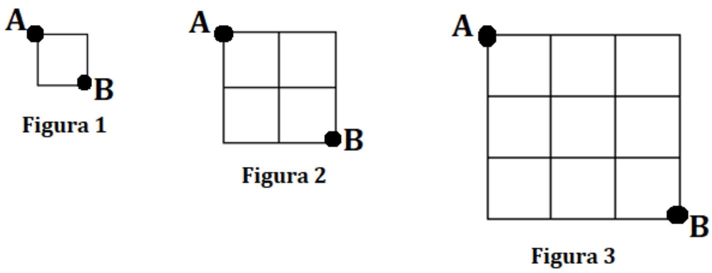


Figura 4.2.2: Malha quadriculada

1) Na primeira ilustração da Figura 4.2.2, quantos são os caminhos possíveis para ir de A até B, sempre avançando?

2) Na segunda ilustração da Figura 4.2.2, quantos são os caminhos possíveis para ir de A até B, sempre avançando?

3) Na terceira ilustração da Figura 4.2.2, quantos são os caminhos?

Nesse momento, socializar impressões e discutir, coletivamente, a importância de se ter uma técnica prática e precisa que permita obter o total de caminhos possíveis para ir de A até B, sempre avançando.

Apresentar a técnica dos nós.

Pedir que os alunos calculem, usando a técnica dos nós, na Figura 4.2.3 o total de caminhos possíveis para ir de A até B, sempre avançando.

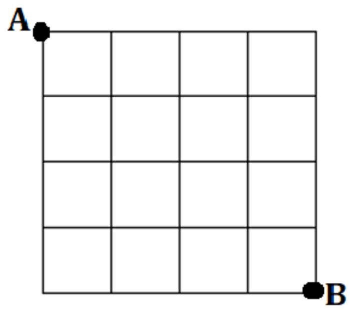


Figura 4

Figura 4.2.3: Malha quadriculada

Pedir que os alunos observem mais uma vez a figura 4 e identifiquem a quantidade de deslocamentos horizontais e verticais. Em seguida será retomado o conceito de permutação com repetição, mostrando que o total de caminhos possíveis para ir de A até B, sempre avançando também pode ser calculado fazendo $P_8^{4,4}$.

Capítulo 5

Conclusão

Esse trabalho possui o objetivo de promover uma reflexão sob a necessidade de apresentar a matemática de uma maneira mais significativa. Sendo assim, o tema contagem de figuras contribuiu com esse objetivo por possibilitar, com entusiasmo, explorar uma diversidade de argumentos iniciais. Tais argumentos por sua vez, se manifestam no interesse inicial do aluno, na curiosidade, na aproximação da álgebra, aritmética e geometria. No que diz respeito ao ensino da matemática no Brasil, existem dois erros igualmente prejudiciais ao desenvolvimento da disciplina: um deles consiste na busca desenfreada pela contextualização que, em muitos casos não justificam a si mesmas. O outro, é igualmente danoso por apresentar uma matemática repetitiva, fria e prematura direcionada a atender equívocos do nosso sistema de educação. Essa realidade é de fácil observação nos cursos de graduação. A presença de uma "guerra fria" entre os Matemáticos puros e os Educadores matemáticos, era notório. Ainda sentimos os efeitos desastrosos dessas tendência. Uma mudança no ensino da matemática, não na forma, mas na essência, se faz imperativa no nosso pais. Esse trabalho, na forma em que está apresentando, não é, em si, uma tentativa de resolver problemas de ordem social ou política. Ele nos convida a resgatar elementos da matemática que evidenciam a sua essência. Tenho aqui um desafio que aponta em duas direções: Descrever a essência da Matemática para os de dentro, colegas de profissão, e para os de fora, alunos. Esta é uma difícil tarefa. Em nenhum momento houve à pretensão de esgotar esse tema nesse trabalho de dissertação. Que esse trabalho proporcione a satisfação de mentes vigorosas, mentes que, quando provocadas por problemas matemáticos desafiadores, se expandem rumo ao desconhecido, resinificando o fazer pedagógico, resgatando a simplicidade e a beleza do pensamento matemático.

Referências Bibliográficas

[1] Dante, L. R. Matemática: contexto e aplicações. *São Paulo: Ática*, **3** (2010).

[2] Galvão, M. E. E. L., da Costa, N. M. L., and Prado, M. E. B. B. Construção de funções a partir de problemas geométricos: uma abordagem investigativa. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, **8** (2017), 39.

[3] Giovanni, J. R. and Giovanni, J. R. *A conquista da Matemática: Teoria e aplicação.* FTD (1992).

[4] Iezzi, G., Murakami, C., Hazzan, S., and Dolce, O. *Fundamentos de matemática elementar.* Atual (1995).

[5] Mol, R. S. Introdução à história da matemática. *Belo Horizonte: CAED-UFMG*, (2013), 8.

[6] Szilárd, A. *Geometria Combinatória Elementar.* Editora: Gil Publishers (2007).

[7] Weisstein, E. W. Polygonal numbers. *From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/topics/PolygonalNumbers.html.*

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, s/n, Campus Universitário de Cruz das Almas - BA
CEP: 44380-000
<http://www.ufrb.edu.br/profmat>
<http://www.profmat-sbm.org.br>