



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Bernardo Oliveira Kuntz

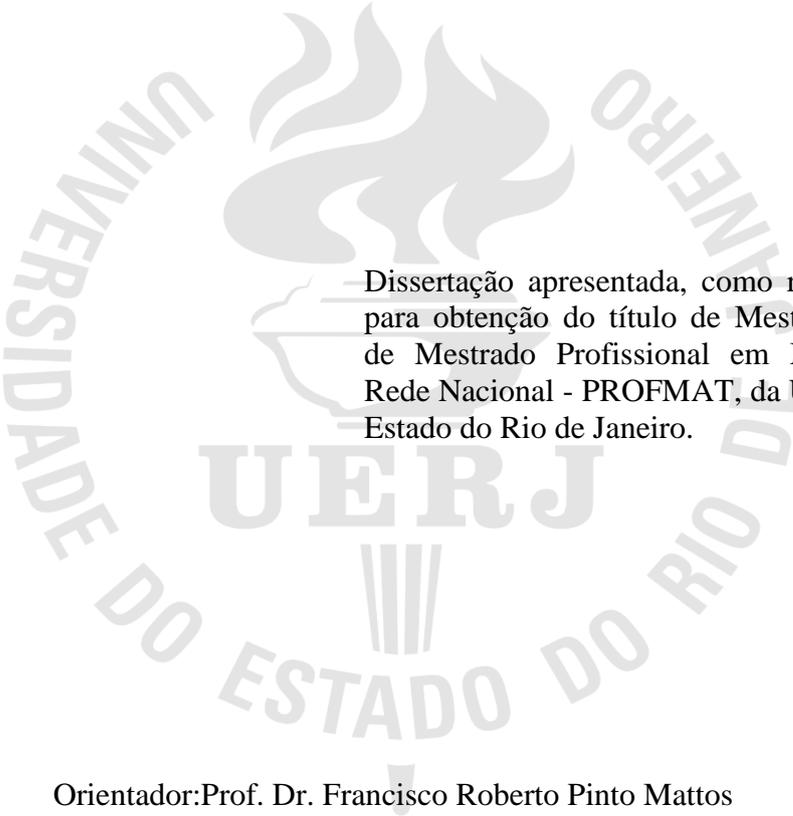
**Teorema de Euler pela Geometria Esférica**

Rio de Janeiro

2016

Bernardo Oliveira Kuntz

**Teorema de Euler pela Geometria Esférica**



-Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos

Rio de Janeiro

2016

CATALOGAÇÃO NA FONTE  
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

K96 Kuntz, Bernardo Oliveira  
Teorema de Euler pela Geometria Esférica / Bernardo Oliveira  
Kuntz – 2016.  
54f. : il.

Orientador: Francisco Roberto Pinto Mattos  
Dissertação( Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional - Profimat) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Instituto de Matemática e Estatística

1. Poliedros - Teses. 2. Euler, Teorema de I. Mattos, Francisco  
Roberto Pinto. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto  
de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU514.113.5

PatriciaBelloMeijinhos CRB7/5217 -Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta  
dissertação, desde que citada a fonte.

---

Assinatura

---

Data

Bernardo Oliveira Kuntz

## **Teorema de Euler pela Geometria Esférica**

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Aprovada em 31 de Agosto de 2016.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

---

Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva  
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

---

Prof.<sup>a</sup> Dra. Christine Sertã Costa  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2016

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Renato CeconelloKuntz, Maria Fernanda FontenelesKuntz e ao próximo FontenelesKuntz que está por vir. Vocês são a minha fonte inesgotável de inspiração.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha esposa, CamilleFonteneles, meu mais atencioso agradecimento por toda a paciência, incentivo e suporte para que mais esta etapa da minha vida pudesse ser concluída.

Às minhas colegas de turma Bárbara Teles e Araceli Bicalho, amigas das horas de estudo, agradeço pela parceria e amizade que começamos neste curso de mestrado.

Ao meu orientador Francisco Matos, pela paciência de parceria com o projeto.

Agradeço a todo o corpo docente e coordenação do PROFMAT-UERJ, pela seriedade e competência com que encaram o curso.

Por fim, e não menos importante, minha eterna gratidão a Helena Oliveira Kuntz. Ela foi de essencial ajuda.

Aquele que se sabe profundo esforça-se por ser claro; aquele que gosta de parecer profundo à multidão esforça-se por ser obscuro.

*Friedrich Nietzsche*

## RESUMO

KUNTZ, Bernardo Oliveira. **Teorema de Euler pela Geometria Esférica**. 2016. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016

A partir de conceitos básicos de Geometria Plana e de Geometria Espacial proporemos uma demonstração do Teorema de Euler que seja acessível, digamos assim, a pessoas minimamente iniciadas. Farei uma prova que, até então, não encontrei em nenhum livro de Ensino Médio que tive contato. Fascinado com sua simplicidade e perplexo por nunca ter tido acesso a esse tipo de abordagem em tempos de estudante do nível secundário, resolvi expor aqui um material que pode servir de consulta e inspiração para professores que buscam novas propostas para suas aulas de Geometria Espacial, em especial, geometria esférica e poliedros. Inicialmente falaremos sobre alguns conceitos de Geometria Esférica e os resultados encontrados no triângulo esférico que nos servirão de base para a demonstração da relação de Euler para poliedros convexos. Em seguida há uma abordagem sobre Poliedros Regulares (ou Sólidos Platônicos), onde faremos um estudo que mostra quantos são e quais são estes sólidos. Esse resultado é proveniente de uma análise bastante simples dos poliedros e suas respectivas condições de existência. Para ilustrar os resultados desenvolvidos neste trabalho, proponho, no final, algumas atividades que podem ser aplicadas em salas de aula para alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Geometria esférica. Teorema de Euler. Poliedros Regulares. Sólidos platônicos. Triângulos esféricos.

## ABSTRACT

KUNTZ, Bernardo Oliveira. **Euler's Theorem by Spherical Geometry** 2016. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016

From basic concepts of plane geometry and spatial geometry we propose a demonstration of Euler's theorem that is accessible, so to speak, to initiated people. I will make a proof that, so far, wasn't found in any high school book that I had access to. Fascinated by its simplicity and perplexed for never have had access to this type of approach when in secondary school, I decided to expose here a material that can help as a consultation and inspiration for teachers seeking new proposals for their spatial geometry classes, in special spherical geometry and polyhedron. Initially we will talk about some concepts of spherical geometry and the results found in spherical triangle that will serve as the basis for demonstrating the Euler relation for convex polyhedra. Then there is a discussion of regular polyhedra (or Platonic Solids), where we will do a study that shows how many and what are these solids. This result comes from a very simple analysis of polyhedra and their conditions of existence. To illustrate the results developed in this work, I propose, in the end, some activities that can be applied in classrooms for high school students.

Keywords: Spherical geometry. Euler's theorem. Regular polyhedra. Platonic solids. Spherical triangles.

## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Esfera.....                               | 14 |
| Figura 2 – Pontos Antípodas.....                     | 15 |
| Figura 3 – Segmento de uma linha geodésica.....      | 15 |
| Figura 4 – Ângulo entre duas linhas geodésicas.....  | 17 |
| Figura 5 – Fuso esférico completo ou fuso duplo..... | 17 |
| Figura 6 – Fuso esférico de ângulo $\alpha$ .....    | 18 |
| Figura 7 – Triângulo esférico I.....                 | 18 |
| Figura 8 – Triângulo esférico II.....                | 19 |
| Figura 9 – Fuso esférico de ângulo $\alpha$ .....    | 20 |
| Figura10– Referências na superfície da terra.....    | 21 |
| Figura11– Triângulo trirretângulo.....               | 23 |
| Figura12– Projeção do triângulo esférico.....        | 24 |
| Figura13– Triângulo esférico I.....                  | 25 |
| Figura14– Triângulo esférico II.....                 | 26 |
| Figura15– Octaedro regular inscrito.....             | 29 |
| Figura16– Decomposição do octaedro regular.....      | 29 |
| Figura17– Octaedro esférico.....                     | 30 |
| Figura18– Hexaedro esférico.....                     | 30 |
| Figura19– Tetraedro esférico.....                    | 30 |
| Figura20– Poliedro não-convexo I.....                | 32 |
| Figura21– Poliedro convexo.....                      | 32 |
| Figura22– Poliedro não-convexo II.....               | 33 |
| Figura23– Poliedro não-convexo III.....              | 33 |
| Figura24– Poliedro não-convexo IV.....               | 34 |
| Figura25– Poliedro não-convexo V.....                | 34 |
| Figura26– Poliedro não-convexo VI.....               | 35 |
| Figura27– Toro simples.....                          | 35 |
| Figura28– Toro duplo.....                            | 35 |
| Figura29– Poliedros de Platão.....                   | 39 |
| Figura30– O ponto por materiais manipuláveis.....    | 42 |
| Figura31– A reta por materiais manipuláveis.....     | 43 |

|           |  |    |
|-----------|--|----|
| Figura32– | Linhas geodésicas por materiais manipuláveis.....  | 43 |
| Figura33– | Pontos antípodas por materiais manipuláveis.....   | 44 |
| Figura34– | Ângulo de fuso por materiais manipuláveis.....     | 45 |
| Figura35– | Triângulo esférico por materiais manipuláveis..... | 46 |
| Figura36– | Octaedro esférico por materiais manipuláveis.....  | 46 |
| Figura37– | Cubo esférico por materiais manipuláveis.....      | 47 |
| Figura38– | Tetraedro esférico por materiais manipuláveis..... | 49 |

## SUMÁRIO

|     |  |    |
|-----|--|----|
|     | <b>INTRODUÇÃO.....</b>   | 11 |
| 1   | <b>GEOMETRIA ESFÉRICA .....</b>  | 13 |
| 2   | <b>A ESFERA.....</b>   | 14 |
| 2.1 | <b>Definição.....</b>  | 14 |
| 2.2 | <b>Ponto.....</b>  | 14 |
| 2.3 | <b>Reta.....</b>   | 15 |
| 2.4 | <b>A interseção de um plano com uma esfera.....</b>  | 16 |
| 2.5 | <b>Distância na Superfície Esférica.....</b>   | 17 |
| 2.6 | <b>Ângulo.....</b>   | 18 |
| 2.7 | <b>Fuso esférico.....</b>  | 19 |
| 2.8 | <b>Alguns referenciais sobre a superfície terrestre.....</b>                                     | 20 |
| 3   | <b>TRIÂNGULO ESFÉRICO.....</b>   | 22 |
| 3.1 | <b>Fórmulas Fundamentais.....</b>  | 23 |
| 3.2 | <b>Área do triângulo esférico.....</b>   | 25 |
| 3.3 | <b>Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.....</b>                                   | 25 |
| 3.4 | <b>Soma dos ângulos externos de um triângulo esférico.....</b>                                   | 26 |
| 4   | <b>TEOREMA DE EULER PELA GEOMETRIA ESFÉRICA.....</b>   | 28 |
| 5   | <b>POLIEDROS CONVEXOS E NÃO-CONVEXOS, A FÓRMULA DE EULER E A ABORDAGEM NO ENSINO BÁSICO.....</b> | 31 |
| 6   | <b>POLIEDROS DE PLATÃO.....</b>  | 36 |
| 6.1 | <b>Definição.....</b>  | 36 |
| 6.2 | <b>Propriedade.....</b>  | 36 |
| 6.3 | <b>Nomes dos poliedros de Platão.....</b>  | 38 |
| 6.4 | <b>Poliedros regulares.....</b>  | 38 |
| 6.5 | <b>Propriedades.....</b>   | 38 |
| 7   | <b>PROPOSTAS DE ATIVIDADES.....</b>  | 40 |
|     | <b>REFERÊNCIAS.....</b>  | 49 |

## INTRODUÇÃO

A Geometria Esférica, como a própria terminologia sugere, aborda conceitos da Geometria na esfera. Noções que temos sobre a Geometria Plana, como pontos, linhas retas, ângulos, triângulos e etc., também fazem sentido na Geometria Esférica. Entretanto, alguns resultados que temos na Geometria Plana não são verdadeiros para a Geometria Esférica.

Por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo em uma esfera não é  $\pi$ ! Verificaremos que quanto maior a área de um triângulo esférico, maior é a diferença entre a soma dos seus ângulos e  $\pi$ . Esse resultado iremos demonstrar.

Dedicamos os três primeiros capítulos deste trabalho à geometria na esfera.

No primeiro capítulo fazemos uma introdução da geometria esférica apresentando algumas comparações entre geometrias plana e esférica no intuito de preparar o leitor para o contato com uma geometria que exige um certo grau de abstração.

No segundo fazemos um estudo da esfera apresentando algumas propriedades e resultados sobre a sua superfície. Definições básicas como ponto, reta, ângulos, fusos, área de fuso e alguns referenciais que adotamos sobre a superfície terrestre baseado em conceitos da geometria que aqui abordamos.

Ao triângulo esférico separamos o terceiro capítulo. Neste faremos a apresentação de um triângulo esférico e algumas de suas propriedades que nos serão essenciais para a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Área, soma dos ângulos internos e externos e outras propriedades sobre triângulos esféricos serão abordadas neste capítulo.

No entanto, o nosso objetivo principal é a demonstração do teorema de Euler, proposto no capítulo quarto. Ele diz que não importa qual poliedro convexo você escolha se você contar o número de vértices subtrair o número de arestas e adicionar o número de faces, encontrará sempre 2. Esse resultado é facilmente verificado em um cubo, por exemplo. Para tal demonstração utilizaremos os resultados da geometria esférica.

Em seguida, no quinto capítulo, mostraremos que a relação de Euler para poliedros convexos vale para alguns poliedros não-convexos também.

Para evitar equívocos em relação aos termos empregados neste trabalho, é prudente relembrar algumas definições.

Um conjunto  $C$ , do plano ou do espaço, é convexo quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ .

Um poliedro é uma reunião finita de polígonos convexos, chamados de faces do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se arestas do poliedro e os vértices dos polígonos serão vértices, também, do poliedro.

Denominamos poliedro convexo quando ele limita um sólido convexo conforme a definição acima. Cada aresta de um poliedro convexo é lado de exatamente duas faces desse poliedro.

Finalizaremos a parte teórica com o capítulo seis. Ali faremos um estudo sobre os poliedros platônicos e a prova da existência de apenas cinco deles.

Propomos algumas atividades no último capítulo, o sétimo. Por meio de atividades lúdicas pretendemos tornar a geometria esférica acessível a pessoas minimamente iniciadas em conceitos básicos da geometria plana.

## 1 GEOMETRIA ESFÉRICA

Esta geometria, que tem como um de seus axiomas que apresenta, contrariando o 5º Postulado de Euclides, que não existem retas paralelas a uma reta dada. Ela foi apresentada inicialmente em 1851 por Georg Bernhard Riemann em sua aula de admissão para a Universidade de Göttingen, como professor-adjunto. Na ocasião mostrou a possibilidade de outras geometrias que não a Euclidiana.

Difícilmente a Geometria Não-Euclidiana está presente no currículo dos cursos de graduação em Matemática, seja no Bacharelado, ou na Licenciatura. Muito menos nos programas das escolas de nível secundário. No entanto não podemos negar que a geometria é uma poderosa ferramenta para desenvolver a percepção e interação do ser com o espaço em que vive. Estimular os alunos de nível secundário propondo atividades sobre Geometrias Não-Euclidianas pode contribuir para uma ampliação de perspectivas em diversas áreas de conhecimento.

Não estudar geometria pode comprometer a capacidade de inserção do ser no espaço em que vive. A visão do seu entorno fica comprometida, limitando, assim, a sua capacidade de abstração geométrica e limita a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento. A Geometria constitui uma parte importante da Matemática. Estuda o espaço, as formas nele existentes e as suas relações. Sua importância pode ser percebida tanto do ponto de vista prático quanto na organização do pensamentológico e dedutivo.

Um aspecto interessante é que nem toda propriedade da Geometria Euclidiana pode ser aplicada na Geometria Esférica, motivando desta forma, algumas reflexões e comparações sobre essas geometrias.

A principal propriedade de uma linha reta no plano é que o comprimento de qualquer segmento  $AB$  é a menor distância entre os pontos  $A$  e  $B$ . Nós usamos essa propriedade para definir linhas retas (chamadas linhas geodésicas ou simplesmente geodésicas) em uma esfera.

Apenas para desfazer qualquer tipo de desconforto com relação às definições de círculo e circunferência, vale ressaltar que há autores que não fazem distinção entre os dois conceitos e há os que definem círculo como uma região circular e circunferência como o contorno dessa região. Aqui faremos a distinção entre esses conceitos.

Nas seções abaixo apresentaremos a definição de alguns elementos da Geometria Esférica que nos dará embasamento para o desenvolvimento deste trabalho.

## 2 A ESFERA

### 2.1 Definição

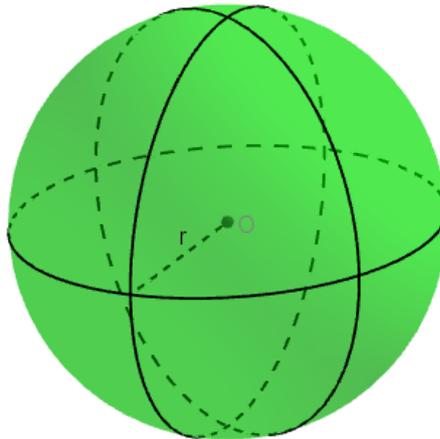
Dados um ponto  $O$  (o centro da esfera) e  $r$  (o raio dessa esfera) um número real positivo, chamamos de esfera o lugar geométrico dos pontos  $P$  do espaço, cujas distâncias a  $O$  são menores ou iguais a  $r$ . Ou seja, a esfera é um sólido geométrico.

Neste trabalho trataremos apenas da superfície esférica.

Superfície esférica é o lugar geométrico dos pontos que distam exatamente  $r$  do centro  $O$  da esfera.

No material que tive contato encontrei algumas definições muito parecidas já em outras bibliografias a definição de esfera sequer foi apresentada.

Figura 1: Esfera



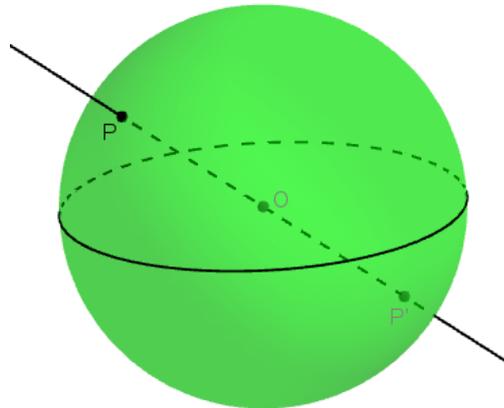
Fonte: O autor, 2016

### 2.2 Ponto

Na Geometria Esférica o plano euclidiano é substituído pela superfície da esfera. Os pontos desta Geometria são os pontos da superfície esférica. Portanto o conceito de ponto é o mesmo que na geometria euclidiana.

Temos, também, na geometria esférica o par de pontos denominados antípodas. Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos, isto é, dado um ponto  $P$ , seu antípoda,  $P'$ , é o único ponto da superfície esférica tal que  $PP'$  é um diâmetro dessa esfera centrada em  $O$ .

Figura 2 - Pontos antípodas



Fonte: O autor, 2016

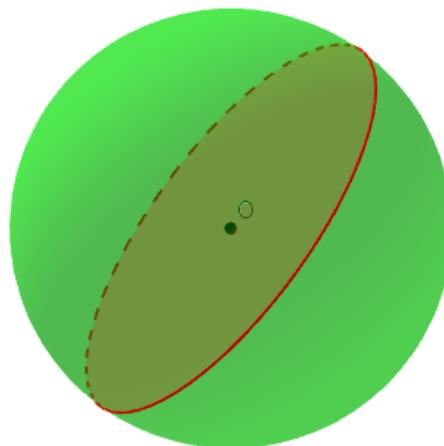
### 2.3 Reta

Assim como na geometria euclidiana, a menor distância entre dois pontos na geometria esférica também é uma “reta”. Entretanto não podemos nos esquecer que se trata de uma superfície esférica, portanto uma “reta” em uma esfera, na verdade, é um segmento esférico de uma circunferência de raio máximo.

A partir daí, é perceptível que uma reta na superfície esférica possua propriedades próprias. Ela deixa de ser infinita e torna-se limitada.

Sobre a superfície da esfera não existem retas paralelas, pois quaisquer duas retas sempre se cruzam em pontos antípodas uma vez que ambas são circunferências de raio máximo.

Figura 3 - Reta sobre a superfície esférica



Fonte: O autor, 2016

## 2.4 A interseção de um plano com uma esfera

Se um plano corta uma esfera, a sua interseção com a esfera é uma circunferência máxima ou uma circunferência menor.

As circunferências são máximas quando os planos que intersectam a esfera passam pelo centro da esfera. Essas circunferências são menores quando o plano que intersecta a esfera não passar pelo centro desta.

As circunferências de raio máximo, ou seja, raio igual ao raio da esfera, denominamos geodésicas.

O que são geodésicas em uma esfera? Linhas geodésicas são circunferências de raio máximo sobre a superfície da esfera.

Duas geodésicas são perpendiculares se formam um ângulo reto quando se interceptam.

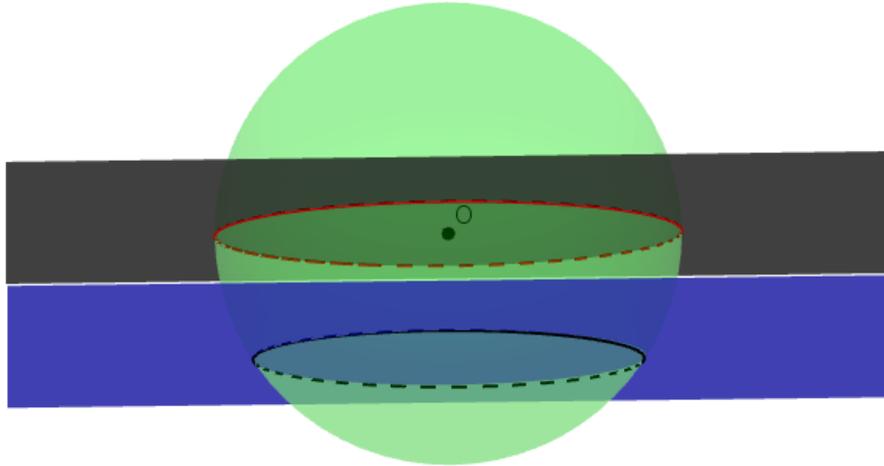
Enquanto na Geometria Euclidiana retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si, na Geometria Esférica isto não acontece pois as geodésicas perpendiculares a uma geodésica  $Z$  não são paralelas entre si, mas sim, concorrentes, isto é, todas as geodésicas perpendiculares a  $Z$  têm um ponto comum chamado de pólo de  $Z$ .

A Figura 7 mostra as geodésicas  $BA$  e  $BC$ , concorrentes.

Na verdade, na superfície esférica, quaisquer duas circunferências máximas são secantes, ou seja, se interceptam, aliás, em dois pontos e evita-se esse inconveniente considerando-se idênticos os dois pontos de intersecção. Isto é observado também na Figura 7, onde as circunferências máximas, ou seja, as geodésicas  $BA$  e  $BC$ , interceptam-se nos pontos antípodas  $B$  e  $B'$  (extremidades de um mesmo diâmetro da esfera). Estes dois,  $B$  e  $B'$  são os pólos dessas geodésicas.

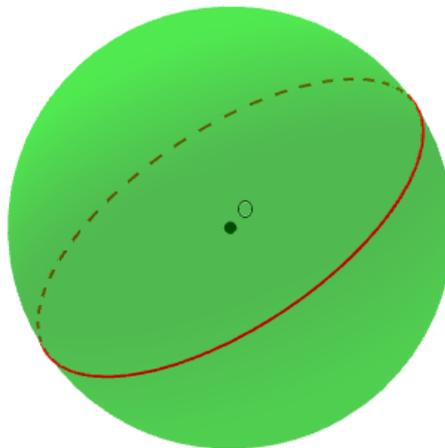
Assim, quaisquer duas retas na superfície esférica têm um ponto de encontro (postulado de Riemann).

Figura 4 - Planos secantes a uma esfera



Fonte: O autor, 2016

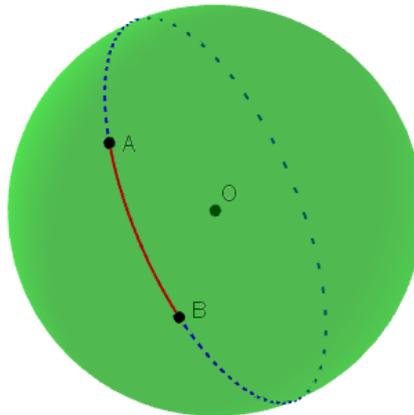
Figura 5: Linha geodésica



Fonte: O autor, 2016

### 2.5 Distância na Superfície Esférica

Dados dois pontos  $A$  e  $B$  sobre uma esfera, a distância entre esses dois pontos é a menor porção da circunferência máxima que contém esses pontos. Embora possamos ter outras circunferências passando por  $A$  e  $B$ , a distância entre eles é sempre medida sobre a menor porção da única circunferência de raio máximo determinado por esses pontos.

Figura 6 - Segmento de reta  $AB$ 

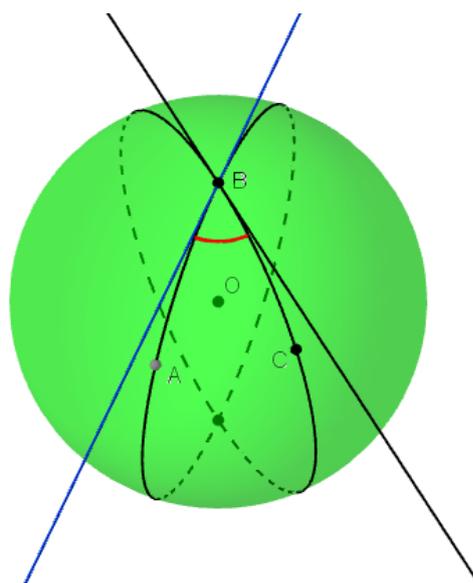
Fonte: O autor, 2016

## 2.6 Ângulo

Deixe duas geodésicas  $AB$  e  $BC$  começarem pelo mesmo ponto  $B$ . O ângulo  $ABC$  entre as duas geodésicas é o ângulo (aquele que não é maior que  $\pi$ ) entre o correspondente semiplano contendo o ponto  $B$  comum.

Define-se ângulo esférico como sendo a interseção de duas circunferências máximas e a sua medida é a mesma do ângulo formado pelas retas tangentes pertencentes aos semiplanos que contém o ponto  $B$ .

Figura 7: Ângulo entre duas linhas geodésicas



Fonte: O autor, 2016

## 2.7 Fuso Esférico

A região limitada por duas circunferências de raio máximo é denominada fuso esférico. Essas circunferências têm dois pontos antípodas que são os vértices do fuso. O ângulo do fuso é o ângulo  $\alpha$ , que não é maior do que  $\pi$  entre duas circunferências de raio máximo que constituem os lados do fuso.

Dois circunferências máximas determinam um fuso completo ou fuso duplo.

Sabemos da Geometria Euclidiana, que o polígono com o menor número de lados é o triângulo. Na esfera é diferente, os lados dos polígonos são arcos menores de círculo máximo. Dados dois círculos máximos, estes intersectam-se sempre em dois pontos antípodas, dividindo a esfera em quatro regiões, cada uma das quais com dois lados; estas regiões denominam-se por biângulos (Figura 8). Portanto, ao contrário do que acontece na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica existem polígonos com dois lados, os biângulos, cujos vértices são pontos antípodas e cujos lados são semicírculos máximos.

Podemos calcular a área de um biângulo de forma simples, conhecendo a amplitude do seu ângulo, a área da esfera e observando que a área do biângulo é diretamente proporcional à amplitude do ângulo.

Seja  $AA'$  um fuso esférico formado por duas geodésicas (Figura 9). Seja  $\alpha$  o ângulo entre elas. Então a área do fuso é igual a  $2\alpha R^2$ , onde  $R$  é o raio da esfera.

Prova: Claramente, a área do fuso esférico (que denotaremos por  $S_\alpha$ ) é proporcional a área da esfera e é proporcional ao ângulo  $\alpha$ . Então  $S_\alpha = c\alpha(2\alpha R^2)$ . Para achar o coeficiente  $c$  note que quando  $\alpha$  é igual a  $\pi$  nós podemos obter a área da semiesfera, isto é,  $2\pi R^2$ . Então  $2\pi R^2 = c\pi(4\pi R^2)$ , logo  $c = \frac{\pi}{2}$  e  $S_\alpha = 2\alpha R^2$ .

Figura 8 - Fuso esférico completo ou fuso duplo

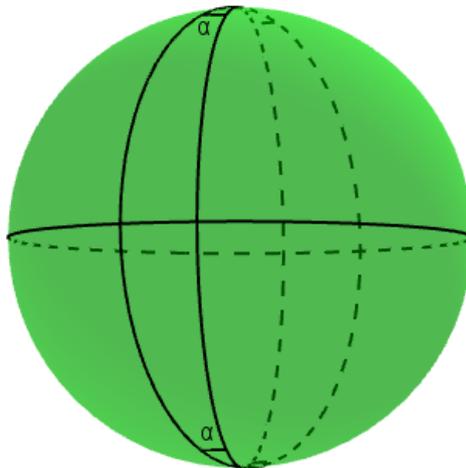
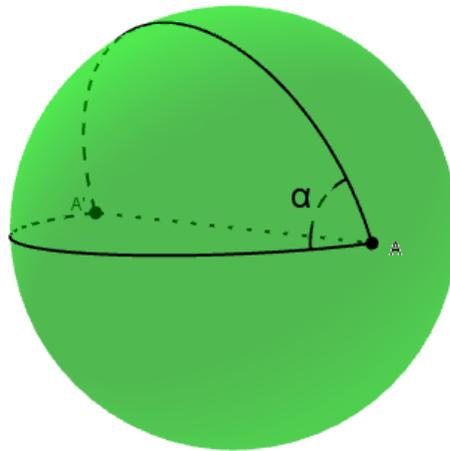


Figura 9 - Fuso esférico de ângulo  $\alpha$ .



Fonte: O autor, 2016

## 2.8 Alguns referenciais sobre a superfície terrestre

Há alguns referenciais sobre a superfície da terra que são de ampla aplicação. Por exemplo, para a navegação marítima são utilizadas coordenadas de latitude e longitude. Essas coordenadas são definidas a partir de determinados referenciais que veremos abaixo.

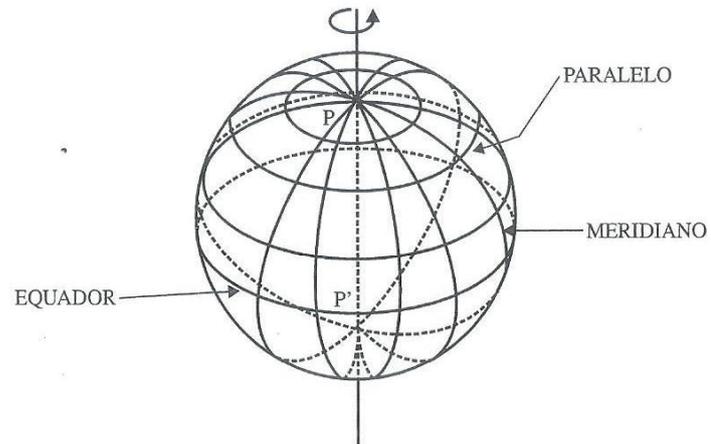
**Pólos:** A Terra gira diariamente em torno do seu eixo de rotação, e os pontos  $P$  e  $P'$  em que esse eixo corta a sua superfície chamam-se, respectivamente, Pólo Norte e Pólo Sul.

**Linha do Equador:** É o círculo máximo cujo plano é perpendicular ao eixo de rotação da Terra e, conseqüentemente, divide a Terra em duas partes iguais, denominadas Hemisfério Norte e Hemisfério Sul. Por isso, a distância angular de um dos pólos a qualquer ponto da Linha do Equador mede  $90^{\circ}$ .

**Meridianos:** São as circunferências de raio máximo passando pelos pólos.

**Paralelos:** São os diversos círculos menores paralelos à Linha do Equador.

Figura 10 -Referencias na superfície da terra



Fonte: Coutinho, Lazaro, 2001.[3]

### 3 TRIÂNGULO ESFÉRICO

Uma vez definida a analogia de linhas retas numa esfera e num plano, a definição de triângulo se (ou qualquer polígono) transfere do plano para a esfera: os vértices são pontos pertencentes a uma esfera e os lados são interseções de geodésicas. Chamamos triângulos ( ou polígonos) em uma esfera de triângulos esféricos (ou polígonos).

Considerar  $A$ ,  $B$  e  $C$ , três pontos distintos sobre a superfície de uma esfera e não pertencentes a uma mesma circunferência máxima. Unindo esses pontos, dois a dois, por arcos de circunferências máximas, todos menores que uma semicircunferência, teremos um triângulo esférico  $ABC$  (figuras 13 e 14), com lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  que denotamos por  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, e medidos pelos ângulos subtendido por eles no centro da esfera. Os ângulos do triângulo  $ABC$  são os ângulos esféricos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , que também podem ser indicados por  $B\hat{A}C$ ,  $A\hat{B}C$  e  $A\hat{C}B$ , respectivamente.

Além dos lados e ângulos, os triângulos esféricos possuem três alturas, três bissetrizes, três medianas, etc., que são definidas da mesma forma que são no plano, porém baseado no conceito de retas sobre a esfera.

Os lados dos triângulos esféricos são medidos em graus ou em radianos pois são arcos de circunferências de raio igual ao raio da esfera.

Ao contrário dos triângulos planos, os esféricos podem ter os três ângulos retos ou três lados, medindo cada um  $90^0$ . Assim podemos classificar triângulos esféricos quanto aos ângulos:

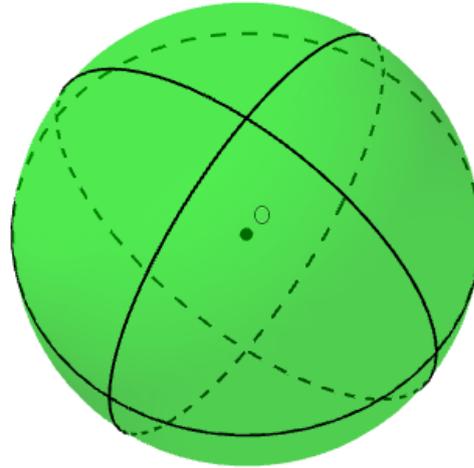
- i. retângulo, quando possuem um ângulo reto;
- ii. birretângulo, quando possuem dois ângulos retos;
- iii. trirretângulo, quando possuem os três ângulos retos.

Ou quanto aos lados:

- i. retilátero, quando possuem um lado medindo  $90^0$ ;
- ii. birretilátero, quando possuem dois lados medindo  $90^0$  cada um;
- iii. trirretilátero, quando possuem cada um dos lados medindo  $90^0$ .

Note que, se um triângulo esférico é trirretângulo, então é trirretilátero e, reciprocamente. Trata-se de um triângulo que cobre exatamente a oitava parte da superfície esférica associada (figura 11).

Figura 11 - Triângulo trirretângulo



Fonte: O autor, 2016

### 3.2 Fórmulas Fundamentais

Se  $ABC$  é um triângulo esférico de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, opostos aos ângulos  $B\hat{A}C$ ,  $A\hat{B}C$  e  $A\hat{C}B$ , então

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A \quad (3.1.1)$$

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo esférico da esfera de centro  $O$  e lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , medidos, respectivamente, pelos ângulos  $B\hat{O}C$ ,  $A\hat{O}C$  e  $A\hat{O}B$ . As tangentes  $t_1$  e  $t_2$  aos círculos máximos  $AB$  e  $AC$  são, ambas, perpendiculares ao raio  $AO$  da esfera. Os prolongamentos dos raios  $OB$  e  $OC$  encontram as tangentes  $t_1$  e  $t_2$  nos pontos  $D$  e  $E$ , formando o triângulo plano  $ADE$ .

De acordo com a figura 12, notam-se quatro triângulos planos, dois deles retângulos em  $A$ . À vista disto, escrevem-se as relações pertinentes.

No  $\triangle AOD$ , temos

$$\operatorname{tg} B\hat{O}A = \frac{AD}{OA} \Leftrightarrow AD = OA \cdot \operatorname{tg} B\hat{O}A \text{ e } \operatorname{sec} B\hat{O}A = \frac{OD}{OA} \Leftrightarrow OD = OA \cdot \operatorname{sec} B\hat{O}A.$$

Como  $B\hat{O}A = c$ , resulta:

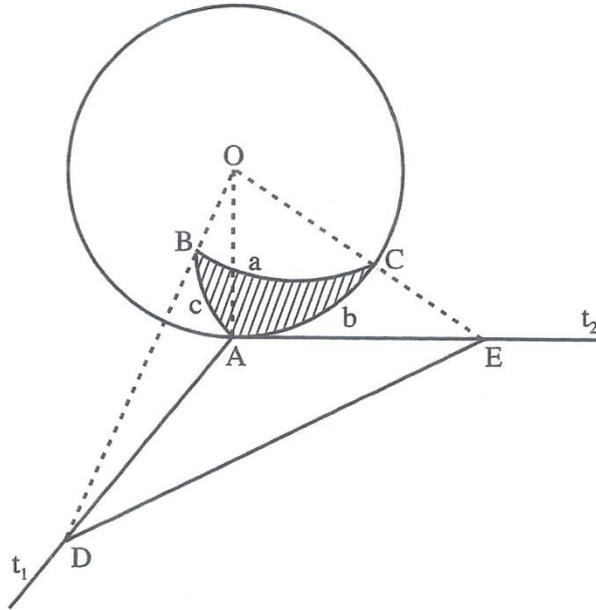
$$AD = AO \cdot \operatorname{tg} c \text{ e } OD = OA \cdot \operatorname{sec} c. \quad (3.1.2)$$

No  $\triangle AOE$ , temos

$$\operatorname{tg} A\hat{O}C = \frac{AE}{OA} \Leftrightarrow AE = OA \cdot \operatorname{tg} b \text{ e } \operatorname{sec} A\hat{O}C = \frac{OE}{OA} \Leftrightarrow OE = OA \cdot \operatorname{sec} b, \quad (3.1.3)$$

pois  $A\hat{O}C = b$ .

Figura 12: Projeção do triângulo esférico



Fonte: Coutinho, Lazaro, 2001.[3]

Nos triângulos  $DAE$  e  $DOE$  aplicamos a lei dos cossenos e obtemos

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos \widehat{DAE} \text{ e } DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2 \cdot OD \cdot OE \cdot \cos \widehat{DOE} \quad (3.1.4)$$

Considerando-se a esfera de raio unitário e usando as igualdades (3.1.2) e (3.1.3), escrevem-se as relações (3.1.4) da seguinte forma:

$$DE^2 = \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \text{ e } DE^2 = \sec^2 c + \sec^2 b - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a \quad (3.1.5)$$

onde  $\widehat{DAE}$  e  $\widehat{DOE}$  medem, respectivamente, o ângulo esférico  $\hat{A}$  e o lado do triângulo esférico  $ABC$  (figura12).

Das relações (3.1.5), resulta

$$\begin{aligned} \sec^2 c + \sec^2 b - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a &= \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \\ 1 + \operatorname{tg}^2 c + 1 + \operatorname{tg}^2 b - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a &= \operatorname{tg}^2 c + \operatorname{tg}^2 b - 2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \\ 2 - 2 \cdot \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a &= -2 \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \\ 1 - \sec b \cdot \sec c \cdot \cos a &= -\operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c \cdot \cos A \\ 1 - \frac{1}{\cos b} \cdot \frac{1}{\cos c} \cdot \cos a &= -\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} \cdot \frac{\operatorname{sen} c}{\cos c} \cdot \cos A \\ \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A + \cos b \cdot \cos c &= \cos a. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

### 3.3 Área do triângulo esférico

Seja  $ABC$  um triângulo esférico com os ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Se continuarmos os lados do triângulo eles vão se encontrar nos outros três pontos  $A', B'$  e  $C'$  opostos a  $A, B$  e  $C$  respectivamente. O triângulo  $A'B'C'$  é oposto ao triângulo  $ABC$ , então eles têm a mesma área.

O resto da superfície da esfera é coberto por três polígonos esféricos:  $ABA'C'$ , com ângulos  $\pi - \alpha$ .  $BCB'A'$  com ângulos  $\pi - \beta$  e  $CAC'B'$  com ângulo  $\pi - \gamma$ . Estes segmentos não são sobrepostos, podemos escrever então:

$$S_{ABC} + S_{A'B'C'} + S_{\pi-\alpha} + S_{\pi-\beta} + S_{\pi-\gamma} = 4\pi R^2$$

Desde que  $S_{ABC} = S_{A'B'C'}$ . Usando o fato apresentado anteriormente de que  $S_{\alpha} = 2\alpha R^2$ , podemos afirmar que:

$$2S_{ABC} = 4\pi R^2 - 2(\pi - \alpha)R^2 - 2(\pi - \beta)R^2 - 2(\pi - \gamma)R^2$$

Finalmente:

$$S_{ABC} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2 \quad (3.2.1)$$

### 3.3 Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

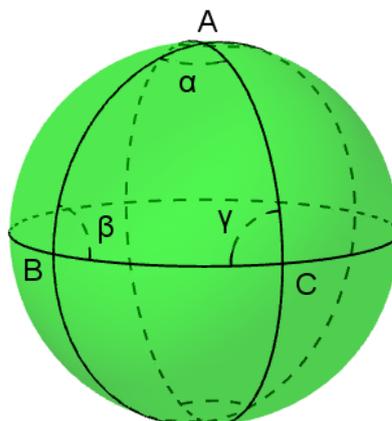
Com o resultado de (3.2.1) conseguimos provar a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico e que, diferente da Geometria Euclidiana, onde a soma dos ângulos internos é sempre  $\pi$ , na Geometria Esférica a soma dos ângulos internos de um triângulo varia de acordo com a sua área e é sempre maior do que  $\pi$ .

Seja  $ABC$  um triângulo esférico com os ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Logo:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S_{ABC}}{R^2} \quad (3.3.1)$$

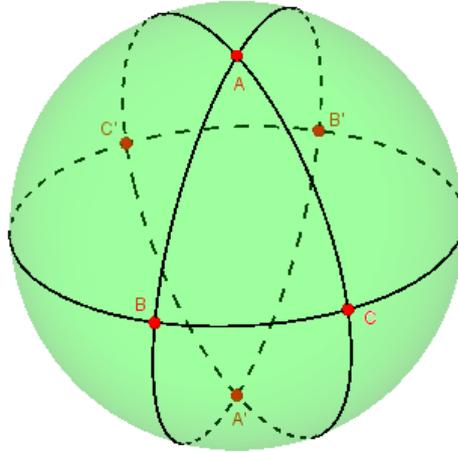
onde  $S_{ABC}$  é a área do triângulo e  $R$  é o raio da esfera.

Figura 13 - Triângulo esférico I



Fonte: O autor, 2016

Figura 14 - Triângulo esférico II



Fonte: O autor, 2016

### 3.4 Soma dos ângulos externos de um polígono esférico

É também de muita ajuda achar a soma dos ângulos externos de um triângulo esférico. Sejam  $\hat{\alpha} = \pi - \alpha$ ,  $\hat{\beta} = \pi - \beta$ ,  $\hat{\gamma} = \pi - \gamma$  os ângulos externos de um triângulo  $ABC$ .

Assim:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 2\pi - \frac{S_{ABC}}{R^2} \quad (3.4.1)$$

Agora nós vamos generalizar a soma dos ângulos externos de um triângulo esférico para qualquer polígono esférico. Nós vamos mostrar que para cada polígono esférico a soma dos ângulos externos deles é igual a  $2\pi$  menos sua área dividida por  $R^2$

Seja  $P = A_1A_2 \dots A_n$  um polígono esférico. Seja  $\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_n$  seus ângulos externos. Então,

$$\hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_n = 2\pi - \frac{S_P}{R^2}, \quad (3.4.2)$$

Onde  $S_p$  é a área do polígono  $P$  e  $R$  é o raio da esfera.

A prova é por indução em  $n$ . Considere o polígono  $P' = A_1A_2 \dots A_{n-1}$  obtido de  $P$  removendo-se o último vértice  $A_n$ . Os ângulos externos  $\hat{\alpha}'_i$  de  $P'$  são os mesmos de  $P$  exceto por  $\hat{\alpha}'_1$  e  $\hat{\alpha}'_{n-1}$ . É fácil observar que

$$\hat{\alpha}'_1 = \hat{\alpha}_1 + \angle A_1, \hat{\alpha}'_i = \hat{\alpha}_i, (2 \leq i \leq n-2) \hat{\alpha}'_{n-1} = \hat{\alpha}_{n-1} + \angle A_{n-1}, \quad \text{onde}$$

$\angle A_1$  e  $\angle A_{n-1}$  são ângulos correspondentes do triângulo  $\Delta A_1A_{n-1}A_n$ .

Seja  $\hat{\alpha}'_1 + \dots + \hat{\alpha}'_n = 2\pi - \frac{S_{P'}}{R^2}$  onde  $S_{P'}$  é a área de  $P'$  e  $R$  é o raio da esfera.

Por suposição indutiva

$$\hat{\alpha}'_1 + \dots + \hat{\alpha}_{n-1} = 2\pi - \frac{S_{P'}}{R^2}$$

Logo,

$$(\hat{\alpha}_1 + \angle A_1) + \dots + (\hat{\alpha}_{n-1} + \angle A_{n-1}) + \hat{\alpha}_n = 2\pi - \frac{S'p}{R^2} + \hat{\alpha}_n,$$

Desde que  $\hat{\alpha}_n = \pi - \angle A_n$  nós deduzimos

$$\hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_n = 2\pi - \frac{S'p}{R^2} - (\angle A_1 + \angle A_{n-1} + \angle A_n - \pi).$$

Pelo resultado (3.3.1),  $\angle A_1 + \angle A_{n-1} + \angle A_n = \pi + \frac{S_{A_1 A_{n-1} A_n}}{R^2}$ , podemos concluir, portanto, deduzir  $\hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_n = 2\pi - \frac{S'p}{R^2} - \frac{S_{A_1 A_{n-1} A_n}}{R^2} = 2\pi - \frac{S_P}{R^2}$ .

No próximo capítulo utilizaremos esses resultados para tratar um assunto estudado no Ensino Médio e que da forma como é estudado deixa muitos alunos e professores inseguros pela dependência com exemplos e contra-exemplos: o Teorema de Euler para poliedros convexos.

#### 4 TEOREMA DE EULER

Leonhard Euler nasceu em 15 de abril de 1707, em Basileia, na Suíça, e morreu em 18 de setembro de 1783 em São Petersburgo, Rússia (Gonçalves, 2009). Euler produziu muitos trabalhos, sendo dois deles sobre poliedros onde buscava encontrar uma relação consistente entre Vértices, Faces e Arestas de um poliedro. Nessa busca consegue mostrar casos especiais em que valia a conhecida relação  $V-A+F=2$ , em que  $V$ ,  $A$  e  $F$  representam vértices, arestas e faces, respectivamente, de um poliedro. Porém nesses trabalhos não reconhecemos uma prova rigorosa e sem falhas. Muitos matemáticos trabalharam para obter provas que eliminassem tais falhas, dentre eles Cauchy(1813), que fez a prova mais conhecida para o caso de poliedros homeomorfos à esfera. Porém a demonstração definitiva da Relação de Euler para Vértices, Arestas e Faces de um poliedro, foi feita por Poincaré (1893) ao estabelecer a relação  $V - A + F = 2$  como um invariante topológico do poliedro, tratando do Teorema de Euler como um teorema da Topologia.

Assim, nessa seção iremos provar que o teorema de Euler é baseado nos resultados da geometria esférica.

**Seja  $\Delta$  um poliedro convexo. Denotamos  $V$ ,  $A$  e  $F$  o número de vértices, arestas e faces, respectivamente. Logo,  $V - A + F = 2$ .**

Prova: Imagine o poliedro  $\Delta$  dentro de uma esfera, centralizado no ponto  $O$ , onde  $O$  é algum ponto dentro de  $\Delta$ .

Projete  $\Delta$  do centro  $O$  na superfície da esfera. Podemos visualizar melhor esse poliedro se ele fosse feito de borracha, com ar bombeando até se tornar um balão esférico com vértices e arestas desenhadas nele.

Agora a esfera é coberta por  $F$  polígonos esféricos  $P_1, \dots, P_F$  que vêm das faces de  $\Delta$ . Portanto, a soma das áreas desse polígono é  $4\pi$ . (Nós assumimos que o raio da esfera é 1).

Usando o resultado 3.4.2 nós inferimos

$$4\pi = SP_1 + \dots + SP_f = 2\pi F - \sum \hat{\alpha}_i, \quad (4.1)$$

onde do lado direito nós temos a soma de todos os ângulos externos de todos os polígonos da esfera.

Obsevemos a soma por um diferente ponto de vista. Em cada vértice ‘v’ a soma dos ângulos internos é  $2\pi$ :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{A_v} = 2\pi$$

onde  $A_v$  denota o número de arestas que começam no vértice  $v$ . Entretanto,  $\alpha_i = \pi - \hat{\alpha}_i$ , logo para algum vértice  $v$

$$\hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_{A_v} = \pi A_v - 2\pi.$$

Portanto, a soma de todos os ângulos externos de um polígono é

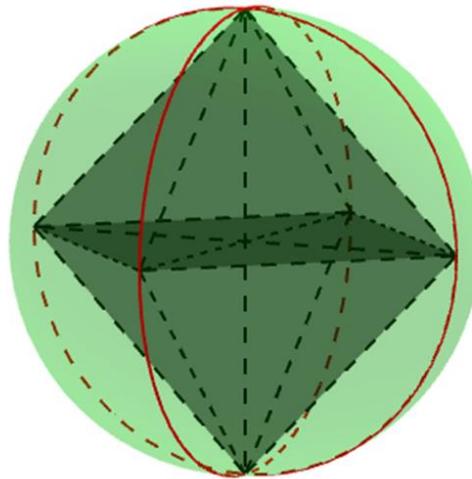
$$\sum_v (\pi A_v - 2\pi) = \pi (\sum_v A) - 2\pi V.$$

Desde que toda aresta conecte exatamente dois vértices  $\sum_v A_v = 2A$ .

Finalmente, de (4.1) nós temos

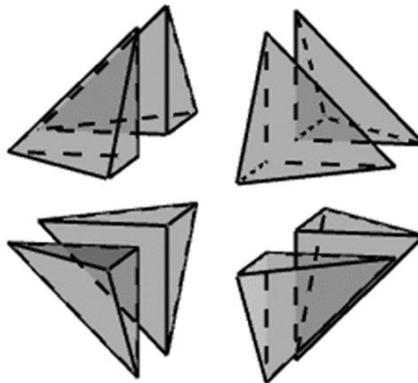
$$4\pi = 2\pi F - 2\pi A + 2\pi V, \text{ i.e. } V - A + F = 2$$

Figura15 - Octaedro Regular Inscrito



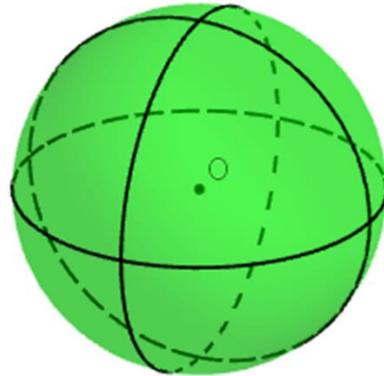
Fonte: O autor, 2016

Figura 16 - Decomposição do Octaedro Regular



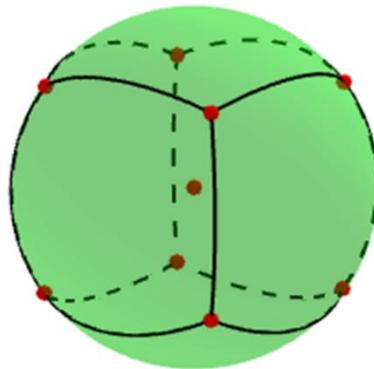
Fonte: O autor, 2016

Figura 17 - Octaedro esférico



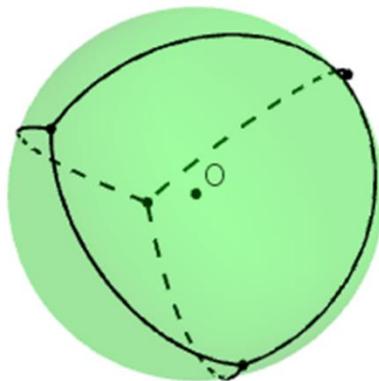
Fonte: O autor, 2016

Figura 18 - Hexaedro esférico



Fonte: O autor, 2016

Figura 19 - Tetraedro esférico



Fonte: O autor, 2016

## 5 POLIEDROS CONVEXOS E NÃO CONVEXOS, A FÓRMULA DE EULER E A ABORDAGEM NO ENSINO BÁSICO

Utilizando a definição de Lima (2006) para poliedros:

*Reunião de um número finito de polígonos planos, chamados face. Cada lado de um desses polígonos, é também lado de um, e apenas um outro polígono. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por um vértice.*

Todo poliedro limita uma região do espaço denominada interior do poliedro.

Ainda segundo Lima (2006) um Poliedro Convexo:

*Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior  $C$  é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ . Em um poliedro convexo toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o corta em, no máximo, dois pontos.*

Assim, retomando a formulação usual do teorema de Euler encontrada nos livros didáticos do Ensino Básico:

Seja um poliedro convexo. Denotamos  $V$ ,  $A$  e  $F$  o número de vértices, arestas e faces, respectivamente, desse poliedro. Logo,  $V - A + F = 2$ .

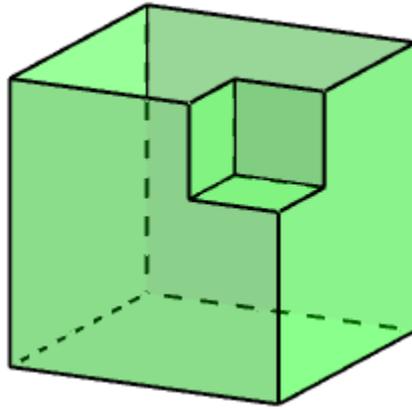
A grande questão que se apresenta, para alguns alunos, causa insegurança e alguma inquietação no aprendizado com o fato da relação de Euler valer para todos os convexas e alguns “casos” não convexas, como por exemplo:

1) O poliedro da figura 20 possui:

$V= 14$ ;  $A= 21$ ;  $F= 9$ .

$14-21+9=2$ . Logo, mesmo sendo não-convexo, vale a relação de Euler para este poliedro.

Figura 20 - Poliedro Não-convexo I



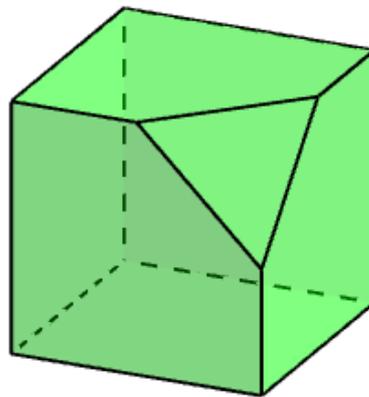
Fonte: O autor, 2016

2) Abaixo, representado pela figura 21, temos um poliedro convexo onde:

$$V= 10; A= 15; F= 7$$

$10-15+7=2$ . Logo, o poliedro em questão satisfaz a relação de Euler. Poderíamos ter afirmado isso sem precisarmos de verificação, uma vez que, trata-se de um poliedro convexo, e nestes, sempre vale a relação de Euler.

Figura 21 - Poliedro convexo



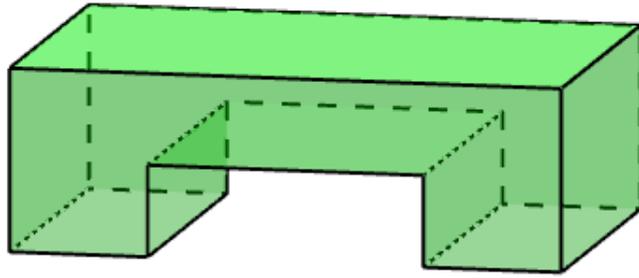
Fonte: O autor, 2016

3) Na figura 22 temos um poliedro convexo com:

$$V= 16; A= 24; F= 10;$$

$16-24+10=2$ . Logo, vale a relação de Euler para este poliedro, mesmo ele sendo não-convexo.

Figura 22 - Poliedro não-convexo II



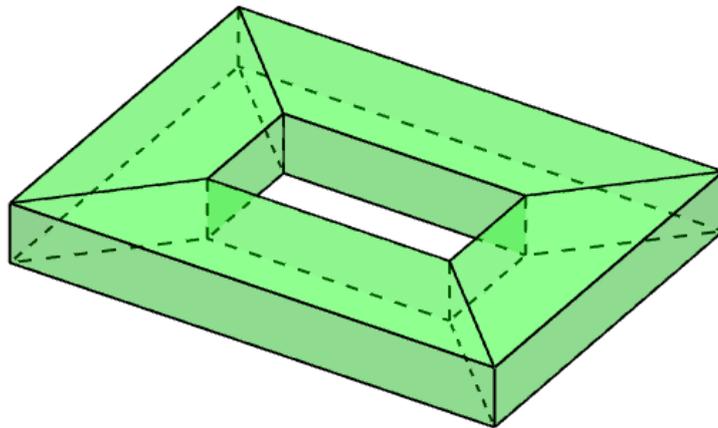
Fonte: O autor, 2016

4) Na figura 23 temos um paralelepípedo vazado, o que o configura como um poliedro não-convexo. Sabemos que ele tem:

$$V= 16; A= 28; F=16$$

$16-28+16=4$ . Logo o poliedro não satisfaz a relação de Euler.

Figura 23 - Poliedro não-convexo III



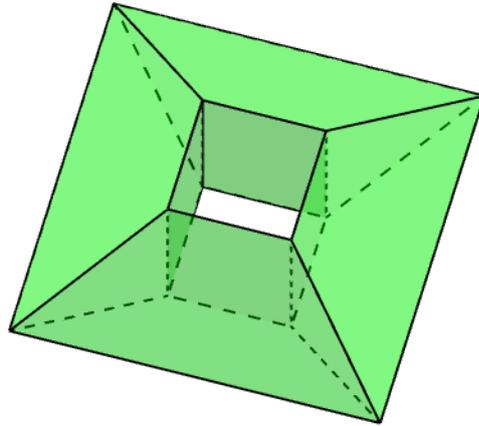
Fonte: O autor, 2016

5) O poliedro da figura 24 possui:

$$V=12; A= 24; F= 12$$

$12-24+12=0$ . Logo este sólido não satisfaz a relação de Euler.

Figura 24 - Poliedro não-convexo IV



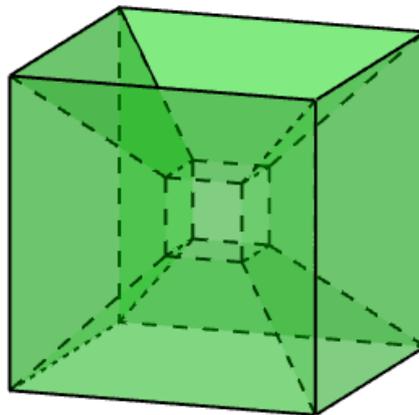
Fonte: O autor, 2016

6) Na figura 25 temos:

$$V = 16; A = 24; F = 16$$

$16 - 24 + 16 = 8$ . Logo, este poliedro não satisfaz a relação de Euler.

Figura 25 - Poliedro não-convexo V



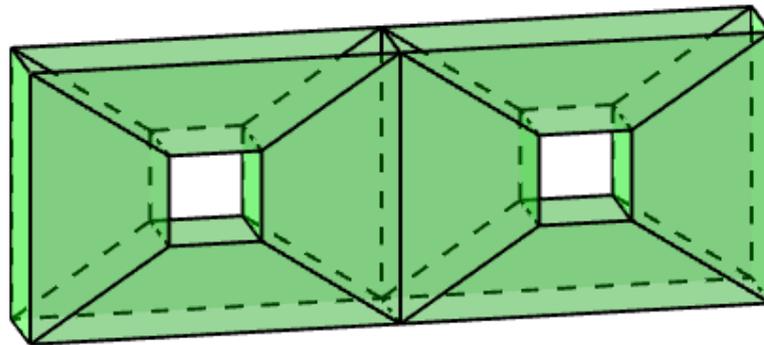
Fonte: O autor, 2016

7) Da figura 26, temos:

$$V = 28; A = 62; F = 23$$

$28 - 62 + 23 = -11$ . Logo o poliedro não satisfaz a relação de Euler.

Figura 26 - Poliedro não-convexo VI



Fonte: O autor, 2016

Para facilitar a observação de um poliedro em relação ao teorema de Euler nos baseamos no conceito de homeomorfismo de poliedros em relação a uma esfera, um toro simples ou , até mesmo, um toro duplo.

Se imaginarmos os poliedros feitos de um material de borracha de modo que possamos inflá-lo de arteremosuns que ficarão em formato esférico, outros em formato de camara de ar (toros simples).Aos que ficam em formato esférico possuem a característica topológica 2, ou seja, vale a relação de Euler, são homeomorfos a esfera. Já aos que ficam em formato de toro simples ou toro duplo, não possuem a característica topológica 2, não são homeomorfos a esfera, mas sim ao toro duplo ou toro simples.

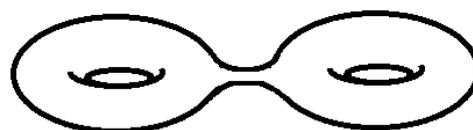
Portanto, os poliedros, convexos e não-convexos, que são homeomorfos a esfera podemos garantir que vale a relação de Euler. Já os que são homeomorfos a um toro simples ou duplo, podemos afirmar que não será satisfeita a relação de Euler.

Figura 27 - Toro simples



Fonte: O autor, 2016

Figura 28 - Toro duplo



Fonte: O autor, 2016

## 6 POLIEDROS DE PLATÃO

Neste capítulo estudaremos o Teorema de Euler para os poliedros regulares e identificamos e provamos a existência de apenas cinco desses poliedros regulares, conhecidos por Poliedros de Platão, a partir de uma aplicação que relaciona a soma dos ângulos internos das faces com os respectivos número de vértices.

Os poliedros de Platão são poliedros regulares e assim denominados em homenagem ao filósofo grego Platão (427-347a.C) que utilizava-os para representar fenômenos naturais como Terra, Ar, Água e Fogo.

### 6.1 Definição

Um poliedro é chamado de poliedro de Platão (ou poliedro regular) se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições são satisfeitas:

- i. Todas as faces têm o mesmo número ( $n$ ) de arestas;
- ii. Todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número ( $m$ ) de arestas;
- iii. Vale a relação de Euler.

### 6.2 Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, *classes* de poliedros de Platão.

Demonstração.

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos:

- i. cada uma das  $F$  faces tem  $n$  arestas ( $n \geq 3$ ), e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{n} \quad (1)$$

- ii. cada um dos  $V$  ângulos poliédricos tem  $m$  arestas ( $m \geq 3$ ), e como cada aresta contém dois vértices:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \quad (2)$$

$$\text{iii. } V - A + F = 2 \quad (3)$$

Substituindo (1) e (2) em (3) e depois dividindo por  $2A$ , obtemos:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \quad (4)$$

Sabemos que  $n \geq 3$  e  $m \geq 3$ . Notemos, porém, que se  $m$  e  $n$  fossem simultaneamente maiores que 3, teríamos:

$$\left. \begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

o que contraria a igualdade (4), pois  $A$  é um número positivo.

Concluimos então que, nos poliedros de Platão,  $m = 3$  ou  $n = 3$  (isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, triedro ou triângulo):

1º) Para  $m = 3$  (supondo que tem triedro).

Em (4) vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6.$$

Então,  $n = 3$  ou  $n = 4$  ou  $n = 5$  (respectivamente faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais).

2º) Para  $n = 3$  (supondo que tem triângulo).

Em (4):

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6.$$

Então,  $m = 3$  ou  $m = 4$  ou  $m = 5$  (respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos).

Resumindo os resultados encontrados no 1º e no 2º, concluimos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares  $(m, n)$  da tabela ao lado, sendo, portanto, cinco, e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

Consequência

Para saber o número de arestas  $A$ , o número de faces  $F$  e o número de vértices  $V$  de cada poliedro de Platão, basta substituir em (4) os valores de  $m$  e  $n$  encontrados e depois trabalhar com (1) e (2).

Exemplo

Uma das possibilidades encontradas para  $m$  e  $n$  foi  $m = 3$  e  $n = 5$ .

Com esses valores em (4), temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 30.$$

$$\text{Em (2): } V = \frac{2 \cdot 30}{3} \Rightarrow V = 20.$$

$$\text{Em (1): } F = \frac{2 \cdot 30}{5} \Rightarrow F = 12.$$

Como é o número de faces que determina o nome, o poliedro do nosso exemplo é o *dodecaedro*.

Notemos que  $m = 3$  significa ângulos *triédricos* (ou triedros) e  $n = 5$ , faces pentagonais.

### 6.3 Nomes dos poliedros de Platão

Procedendo como indicamos no problema acima, temos, em resumo:

| M | n | A  | V  | F  | Nome       |
|---|---|----|----|----|------------|
| 3 | 3 | 6  | 4  | 4  | Tetraedro  |
| 3 | 4 | 12 | 8  | 6  | Hexaedro   |
| 4 | 3 | 12 | 6  | 8  | Octaedro   |
| 3 | 5 | 30 | 20 | 12 | Dodecaedro |
| 5 | 3 | 30 | 12 | 20 | Icosaedro  |

### 6.4 Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes, e seus ângulos poliédricos são congruentes.

### 6.5 Propriedade

Existem cinco, e somente cinco, tipos de poliedros regulares.

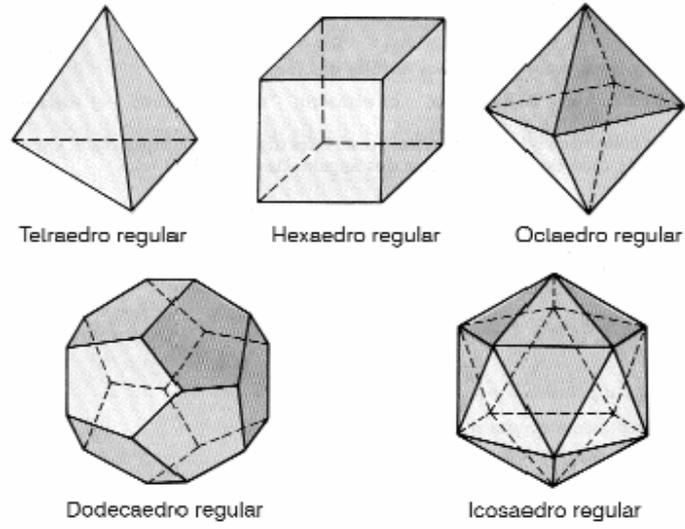
Demonstração

Usando as condições para um poliedro ser regular, temos:

- Seus faces são polígonos regulares e congruentes, então todas têm o mesmo número de arestas;
- Seus ângulos poliédricos são congruentes, então todos têm o mesmo número de arestas.

Por essas conclusões temos que os poliedros regulares são poliedros de Platão e portanto existem cinco e somente cinco tipos de poliedros regulares: *tetraedro regular*, *hexaedro regular*, *octaedro regular*, *dodecaedro regular* e *icosaedro regular*.

Figura 29 - Poliedros de Platão



Fonte: Coutinho, Lazaro, 2001.[3]

## 7 PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Nesta parte proporemos algumas atividades que podem ser aplicadas em salas de aula do Ensino Médio, ou até mesmo, do ensino fundamental. O objetivo é a apresentar, de uma forma mais lúdica, a existência de outras geometrias além da euclidiana.

Daremos exclusividade por atividades envolvendo a geometria esférica e poliedros, pela proposta do tema central deste trabalho, e a facilidade de se encontrar materiais manipuláveis de baixo custo. Desta forma a atividade torna-se acessível a um número maior de pessoas.

Iremos, também, introduzir conceitos por meio de situações-problema, levando, assim, a uma maior reflexão por parte dos alunos em termos de conhecimentos que eles têm sobre a geometria e a sua forma de enxergar o mundo.

Daremos início à parte das atividades propondo oficinas para introdução dos primeiros conceitos da geometria esférica.

As esferas de isopor utilizadas nestas atividades vieram com algumas marcas de fabricação que foram aproveitadas como referenciais. Essas marcas podem ser observadas durante a realização dessas tarefas em sala de aula, por exemplo. Ajudam bastante nas construções a serem feitas, tendo em vista a limitação de instrumentos de precisão sobre a superfície esférica. O fato é que o objetivo das atividades não é uma construção milimetricamente precisa. Acredito que com essas atividades estimulamos o desenvolvimento dos alunos em se tratando de uma percepção geométrica mais condizente com a realidade da nossa condição de habitantes de um planeta praticamente esférico.

**Atividade 1 – O caminho do urso**

Material: Folha de papel, lápis, borracha e régua.

Um urso saiu de sua casa e caminhou 100 km ao sul. Depois virou e caminhou por mais 100 km a leste. Então virou novamente e caminhou por mais 100 km ao norte. Qual não foi sua surpresa descobriu que voltara novamente para a sua casa.

- 1) Esboce numa folha de papel o percurso do urso. Que conclusões você chega com seu desenho?
- 2) É possível que o urso tenha chegado ao mesmo ponto de partida?

**Atividade 2 – Caminho do urso sobre a superfície esférica**

Material: Esfera de isopor e caneta para isopor.

- 1) Agora descreva a trajetória do urso sobre a superfície esférica. Que conclusões você chega com o seu desenho?
- 2) É possível que o urso tenha chegado ao mesmo ponto de partida?
- 3) Qual a cor do urso? Justifique a sua resposta.

**Atividade 3 – O ponto sobre a superfície esférica**

Material: Esfera de isopor; alfinete;

- 1) Utilizando o alfinete, represente um ponto na superfície esférica.

Figura 30 - O ponto sobre a superfície esférica por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

#### Comentários ao Professor:

Esta atividade tem por objetivo comparar as representações do ponto no plano e na esfera. A condução do professor deve culminar num entendimento claro, dentro de toda a sua abstração, o conceito de ponto em ambas as geometrias. Seria interessante se você, professor que se proponha a praticar essas atividades em sala, fizesse, em todas as atividades, comparações com a Geometria Euclidiana, tendo em vista que os alunos são iniciados no “mundo geométrico” por essa geometria e passam a maior parte da sua vida escolar estudando e exercitando apenas a geometria plana. Terão contato com a geometria que trata do espaço somente no ensino médio e mesmo os que optam por uma carreira mais “matemática” não têm mais contato com a geometria espacial.

#### **Atividade 4**– Reta sobre a esfera

Material: Esfera de isopor; alfinete; barbante colorido;

- 1) Marque dois pontos distintos na esfera de isopor.
- 2) Una os dois pontos pela distância mais curta.
- 3) Construa a circunferência máxima que passa por esses dois pontos.

O que podemos observar é que a menor distância entre dois pontos na superfície da esfera é um segmento de circunferência de raio igual ao raio da esfera.

Figura 31 - A reta sobre a esfera por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

### Atividade 5 –Circunferência máxima – Geodésicas

Material: Esfera de isopor; alfinete; barbante colorido;

1) Utilizando os alfinetes, represente um ponto qualquer sobre a superfície da esfera de isopor.

2) Com o barbante colorido represente uma circunferência de raio máximo (ou seja, aquela que tem o raio igual ao raio da esfera) que passa pelo ponto marcado anteriormente.

3) Agora, ainda com o barbante colorido, marque sobre a superfície da esfera uma outra circunferência máxima que passa pelo mesmo ponto que você já havia marcado.

Há alguma outra circunferência de raio máximo que passa por esse ponto?

Quantas circunferências máximas passam por esse ponto?

Figura 32 - Linha geodésica por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

Comentários ao Professor:

Esta atividade tem como objetivo apresentar o conceito de geodésica, incentivar a observação das duas interseções que as duas, ou mais, geodésicas irão determinar sobre a esfera. Pontos antípodos, ou pólos.

Além disso podemos observar que estas duas circunferências determinam quatro partes na esfera de isopor. Os pares dessas regiões são o que denominamos por fuso completo ou fuso duplo. Essas regiões são polígonos esféricos formado por apenas dois lados. Eles são denominados “biângulo” ou “fuso esférico”.

### **Atividade 6 - Pontos antípodos.**

Material: Esfera de isopor; alfinetes; barbante colorido.

1) Aproveitando a mesma construção realizada na atividade anterior, já com duas geodésicas passando pelo mesmo ponto. Podemos observar que se duas geodésicas concorrem em um mesmo ponto sobre a superfície esférica, na verdade, este sempre terá um ponto diametralmente oposto, ou seja, que dista uma distância idêntica ao diâmetro da esfera em questão, denominado “ponto antípoda”, que também será um ponto de concorrência entre essas geodésicas.

Com um alfinete determine essa outra interseção das geodésicas.

Figura 33 - Pontos antípodos por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

**Atividade 7 – Ângulo de fuso**

1) Aproveitando a construção realizada na tarefa anterior, com uma caneta para isopor, marque o menor dos ângulos formado por essas geodésicas.

2) Com o auxílio de um transferidor meça esse ângulo marcado. Lembrando que o ângulo entre duas geodésicas é igual ao ângulo formado pelas retas tangentes as circunferências no ponto de interseção das retas.

Figura 34 - Ângulo de fuso esférico por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

**Atividade 8 – Triângulo esférico**

Material: Esfera de isopor; alfinete; barbante colorido.

- 1) Construa duas circunferências máximas.
- 2) Em seguida construa uma terceira circunferência a partir de um ponto distinto dos pontos antípodas já determinados pelas circunferências já construídas anteriormente.

Figura 35 - Triângulo esférico por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

### Atividade 9 – Octaedro esférico

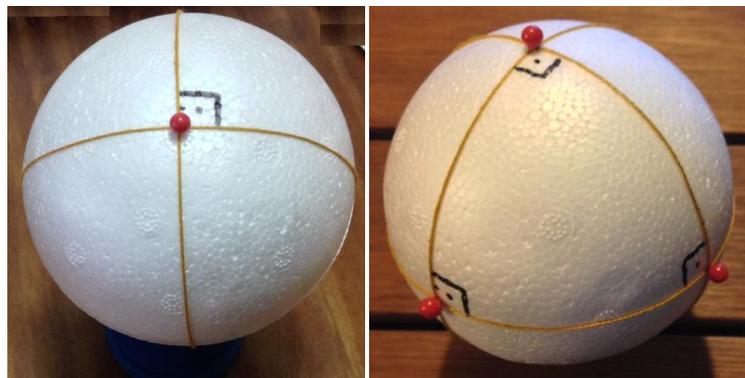
Material: Esfera de isopor; alfinete; barbante colorido.

- 1) Construa uma circunferência máxima.
- 2) Construa uma outra circunferência máxima perpendicular a anterior.
- 3) Em seguida construa uma terceira circunferência máxima que seja perpendicular às duas já existentes.

Em quantas partes dividimos a esfera?

Quantos pontos de interseção teremos?

Figura 36 - Octaedro esférico por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

### Atividade 10 – Hexaedro esférico( cubo esférico)

Material: Esfera de isopor; alfinete; barbante colorido.

- 1) Utilizando a construção da atividade anterior, marque com alfinete o baricentro de cada um dos oito triângulos formados com a interseção das três geodésicas.
- 2) Retire as três retas marcadas e os alfinetes que representam os pontos de interseção dessas retas ficando, assim, apenas os pontos referentes aos baricentros.
- 3) Agora com um barbante colorido ligue apenas os baricentros adjacentes.

Figura 37 - Cubo esférico por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

### Atividade 12– Tetraedro esférico

Material: Esfera de isopor; alfinete; barbante colorido.

- 1) Selecione uma face do cubo esférico e trace uma diagonal nesta face.
- 2) Trace diagonais em todas a faces restantes, de modo que, no vértice da face que termina uma diagonal, tenha início a diagonal da outra face.
- 3) Elimine as arestas do cubo esférico, terminando, desta maneira o tetraedro esférico.

Figura 38 - Tetraedro esférico por materiais manipuláveis



Fonte: O autor, 2016

## REFERÊNCIAS

- [1] ABREU, Shyrlene Martins de. **Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à astronomia de posição**. Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei – MG, 2015
- [2] ANDERSON, Anna. **Archimedean Solids**. 2008
- [3] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática/ revistapor Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide – 2ª ed. – São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [4] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Epacial**. IMPA/VITAE, 1993.
- [5] COLLINS, Benjamin. **Euler's polyhedron formula**. Madison College Math Club, 2012.
- [6] COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2. Ed. Rio de janeiro: interciência, 2001.
- [7] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**, volume 10: Geometria espacial-posição e métrica.
- [8] FILHO, Zoroastro Azambuja. **Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos**. Revista do Professor de Matemática 03, 2010.
- [9] GONÇALVES, Daciberg Lima. **HISTORICAL ASPECTS OF THE DISCOVERY OF THE EULER CHARACTERISTIC AND SOME OF ITS DEVELOPMENTS IN MODERN TOPOLOGY**, RBHM, Vol. 9, n o 66 17, p. 65-75, 2009.
- [10] GOULART, Márcio Cintra. **Arte-Ciência Matemática**, volume 2. CG Editora, 1995.
- [11] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade**, 6º ano. Editora Atual, 2009.
- [12] KALEF, Ana Maria Martensen Roland Kaleff. **Vendo e entendendo POLIEDROS**. EdUFF, 2003.

[13] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. SBM, 2011.

[14] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, volume 2. SBM, 2006.

[15] MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática Temas e Metas**, volume 4: Áreas e Volumes. Editora Atual, 2008.

[16] MARQUEZE, João Pedro. **As faces dos Sólidos Platônicos na superfície esférica: uma proposta para o ensino-aprendizagem das noções básicas da Geometria Esférica**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo - SP, 2006.

[17] MITHALAL, Joris. **3D Geometry and learning of mathematical reasoning**. Lyon, 2009.

[18] OLIVEIRA, Inácio Antônio Athayde; GANDULFO, Ana Maria Redolfi. **Um novo olhar para o Teorema de Euler**. X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador – BA, 2010.

[19] REIS, Joana d'Arc da Silva. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro – SP, 2006.

[20] RIBEIRO, Ricardo Silva. **Geometrias Não-Euclidianas na escola: Uma proposta de ensino através da geometria dinâmica**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, 2013.

[21] SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática Compreensão e Prática**, 6º ano. Editora Moderna, 2013.

[22] SOPRUNOV, Ivan. **Spherical Geometry and Euler's formula**.

[23] SOUZA, Paulo Aírton Cordeiro de. **Triângulos Esféricos**. Universidade Federal do Piauí. Teresina – PI, 2013.

[24] ZANELLA, Ildemar André. **Geometria Esférica: uma proposta de atividades com aplicações**. Universidade Estadual de Londrina, Londrina - PR, 2013.

[25] WAGNER, Eduardo. **V-A+F=2. Existe o Poliedro?** Revista do Professor de Matemática 47, 2001.