Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Gabriel Cacau Boucinhas

Uma abordagem didática para o ensino das operações básicas dos números fracionários e o uso de tecnologias digitais e não-digitais

Rio de Janeiro
2019

Gabriel Cacau Boucinhas

Uma abordagem didática para o ensino das operações básicas dos números fracionários e o uso de tecnologias digitais e não-digitais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B755 Boucinhas, Gabriel Cacau.
Uma abordagem didática para o ensino das operações básicas dos números fracionários e o uso de tecnologias digitais e não-digitais/ Gabriel Cacau Boucinhas. – 2019.
96 f. : il.

Orientador: Rogério Luiz Quintino de Oliveira Junior
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Frações - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática - Métodos de ensino - Teses.. 3. Ensino auxiliado por computador - Teses. I. Oliveira Junior, Rogério Luiz Quintino de. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 511.13

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Gabriel Cacau Boucinhas

Uma abordagem didática para o ensino das operações básicas dos números fracionários e o uso de tecnologias digitais e não-digitais

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 25 de junho de 2019.

Banca Examinadora:

Rogerio Luiz Q. de O. Junior

Prof. Dr. Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Douglas Monsôres de Melo Santos

Prof. Dr. Douglas Monsôres de Melo Santos
Instituto de Ciências Exatas - UFRRJ

Mariana G. Villapouca

Prof.ª Dra. Mariana Gesualdi Villapouca
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Rio de Janeiro

2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida e por cada dia me dar forças para continuar firme em minha caminhada.

À minha mãe e meu pai (em memória), assim como familiares, que sempre se esforçaram para que eu tivesse melhores condições de vida do que a deles.

À minha namorada Ligia, que sempre incentivou e apoiou na execução desse trabalho.

Aos meus amigos da turma PROFMAT 2016 pelos momentos compartilhados.

Aos meus colegas de trabalho da Escola Municipal Ceará pelo incentivo constante e pelas trocas de experiências, assim como aos meus alunos, os quais não só ensino como também aprendo com eles diariamente.

Ao meu orientador pela contribuição e busca do aperfeiçoamento do trabalho.

À UERJ e aos professores do curso, pela oportunidade do aperfeiçoamento profissional.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante o período de realização deste mestrado.

RESUMO

BOUCINHAS, G. C. **Uma abordagem didática para o ensino das operações básicas dos números fracionários e o uso de tecnologias digitais e não-digitais.** 2019. 96 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

O ensino das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão com números fracionários é pautado, muitas vezes, através da memorização e da algoritmização de processos e regras. Acreditamos que isso provoca desinteresse e desmotivação nos alunos, causando uma deficiência nesse tópico que é utilizado em diversas outras áreas do conhecimento. Utilizaremos uma metodologia de pesquisa de campo em uma escola pública municipal de Ensino Fundamental do município do Rio de Janeiro através de experimentos com os alunos e desenvolveremos todos os conceitos teóricos e atividades práticas baseando-nos na ideia de uma educação matemática crítica, que tem como um de seus objetivos formar o aluno como um ser pensante e, portanto, um ser crítico da sociedade como um todo e do meio em que vive. Além disso, defenderemos o uso de novas tecnologias em sala de aula, como o software computacional GeoGebra, e o uso de materiais concretos, sempre com o objetivo de facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Pretendemos que este trabalho seja útil para outros professores que ensinam matemática no ensino fundamental, cujas ideias estejam interligadas por uma linha de raciocínio prática e com uma abordagem didática.

Palavras-chave: Frações. Educação matemática crítica. Atividades didáticas.

ABSTRACT

BOUCINHAS, G. C. **A didactic approach to teaching the basic operations of fractional numbers and the use of digital and non-digital technologies.** 2019. 96 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

The teaching of addition, subtraction, multiplication, and division operations with fractional numbers is often based on memorization and algorithmization of processes and rules. We believe that this causes disinterest and demotivation in students, causing a deficiency in this topic that is used in several other areas of knowledge. We will use a field research methodology in a municipal public elementary school in the city of Rio de Janeiro through experiments with the students and will develop all the theoretical concepts and practical activities based on the idea of a critical mathematical education, one of his goals is to form the student as a thinking being and therefore a critical being of society as a whole and the environment in which he lives. In addition, we will defend the use of new classroom technologies, such as GeoGebra computational software, and the use of concrete materials, always with the objective of facilitating the teaching-learning process. We intend this work to be useful for other teachers who teach math in elementary school, whose ideas are interconnected by a line of practical reasoning and a didactic approach.

Keywords: Fractions. Critical mathematics education. Didactic activities.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tabuleiro de Batalha Naval de matemática... 22

Figura 2 – Tabuleiro de Sodoku.. 23

Figura 3 – Dinâmica do jogo Quem sou eu?.. 23

Figura 4 – Tabuleiro de Qual é a senha?... 24

Figura 5 – Tabuleiro de Jogo de Matemática... 25

Figura 6 – Painel de Labirinto... 26

Figura 7 – 1º Tabuleiro de questão da 2ª fase da OBMEP de 2016 do nível 1........ 26

Figura 8 – 2º Tabuleiro de questão da 2ª fase da OBMEP de 2016 do nível 1........ 27

Figura 9 – Pizza dividida em 8 pedaços.. 36

Figura 10 – Círculo representando cinco oitavos.. 37

Figura 11 – Retângulos divididos em quatro partes.. 37

Figura 12 – Retângulo dividido em quatro partes de áreas iguais............................ 39

Figura 13 – Representação gráfica de cinco terços.. 39

Figura 14 – Representação da reta numérica dos números inteiros......................... 40

Figura 15 – Representação do número 0,8 na reta numérica.................................. 40

Figura 16 – Representação gráfica de frações através de círculos.......................... 47

Figura 17 – Representação gráfica de frações através de retângulos...................... 48

Figura 18 – Representação gráfica de dois quintos.. 49

Figura 19 – Representação gráfica de quatro décimos... 49

Figura 20 – Representação de uma folha A4 sendo dividida em duas partes iguais. 50

Figura 21 – Divisões sucessivas da folha A4 pela metade....................................... 50

Figura 22 – Representações de frações equivalentes em uma folha A4.................. 50

Figura 23 – Divisão na metade e terça parte.. 54

Figura 24 – Divisão em seis partes iguais.. 54

Figura 25 – Quadrado unitário... 57

Figura 26 – Divisão do quadrado em quatro e em cinco partes iguais...................... 57

Figura 27 – Representação gráfica de dois quintos e três quartos........................... 58

Figura 28 – Sobreposição dos quadrados.. 58

Figura 29 – Representação gráfica de três décimos.. 59

Figura 30 – Representação gráfica de quatro quintos.. 61

Figura 31 – Divisão gráfica de quatro quintos por três... 62

Figura 32 – Representação gráfica de um terço e um meio com sobreposição........ 64

Figura 33 – Divisão em partes iguais da sobreposição entre um meio e um terço.... 65

Figura 34 – Octógono dividido em duas partes iguais.. 70

Figura 35 – Octógono dividido em quatro partes iguais... 70

Figura 36 – Octógono dividido em oito partes iguais.. 71

Figura 37 – Octógono dividido em dezesseis partes iguais...................................... 71

Figura 38 – Cartaz feito pelos alunos na atividade de frações equivalentes............. 72

Figura 39 – Cartaz feito pelos alunos na atividade de soma/subtração de frações... 73

Figura 40 – Cartazes feitos pelos alunos expostos no corredor da escola............... 74

Figura 41 – Cartazes feitos pelos alunos expostos na sala de aula.......................... 75

Figura 42 – Peças do Tangram.. 75

Figura 43 – Quadrado com Tangram.. 76

Figura 44 – Casa com as peças do Tangram.. 77

Figura 45 – Gato com as peças do Tangram... 77

Figura 46 – Cavalo com as peças do Tangram.. 78

Figura 47 – Cartaz sobre o Tangram... 78

Figura 48 – Frações correspondentes às peças do Tangram.................................... 79

Figura 49 – Triângulo representando um terço... 81

Figura 50 –	Justaposição de triângulos formando a unidade....................................	81
Figura 51 –	Unidade a partir de dois quintos..	82
Figura 52 –	Construção de unidades por diversas frações	83
Figura 53 –	Quadrados de palitos de sorvete divididos em partes iguais..................	84
Figura 54 –	Quadrados divididos em quartos e sextos sobrepostos..........................	85
Figura 55 –	Tela do “Multiplicador de frações”..	87
Figura 56 –	Tela do “Multiplicador de frações”: três meios por dois quartos.............	88
Figura 57 –	Tela do “Multiplicador de frações”: três meios por cinco terços.............	89
Figura 58 –	Peças correspondentes a um oitavo e um quarto no Tangram..............	91

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO..	13
1	**FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**..	15
1.1	**Educação Matemática crítica**..	17
1.1.1	Valorização do erro..	17
1.1.2	Contextualizações..	18
2	**O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS EM SALA DE AULA**...............	20
2.1	**Tecnologias não-digitais**...	21
2.2	**Tecnologias digitais**..	27
3	**O CONCEITO DE FRAÇÃO**..	30
3.1	**Base Nacional Comum Curricular e as frações**............................	30
3.1.1	A fração como parte de um todo...	36
3.1.2	A fração como um número..	39
3.1.3	A fração como ferramenta de resolução de problemas......................	43
3.1.3.1	Razão e proporção...	43
3.1.3.2	Porcentagem..	44
3.1.3.3	Probabilidade..	46
3.2	**Operações com frações**..	47
3.2.1	A ideia de equivalência e simplificação entre frações.......................	47
3.2.2	Soma e subtração de frações..	53
3.2.3	Multiplicação de frações..	56
3.2.4	Divisão de frações...	60
3.2.4.1	Divisão entre fração e número natural...	60
3.2.4.2	Divisão entre número natural e fração...	63
3.2.4.3	Divisão entre duas frações...	64
4	**ATIVIDADES PROPOSTAS**..	67
4.1	**Frações equivalentes e soma de frações**......................................	68
4.2	**Tangram**...	75
4.3	**Construir a unidade a partir da fração**..	80
4.4	**Multiplicação entre frações**...	83
4.4.1	Multiplicação de frações com palitos de sorvete..............................	84
4.4.2	Multiplicação de frações com GeoGebra..	86

4.5 **Divisão entre frações**.. 90
CONCLUSÃO.. 94
REFERÊNCIAS... 96

INTRODUÇÃO

O homem começou a contar e construiu um sistema para controlar a quantidade de coisas que produzia ou possuía utilizando nós feitos em cordas, pedras ou outros objetos para facilitar o processo. Posteriormente, criou os números naturais, fazendo a correspondência entre o símbolo do número com a quantidade que ele representa.

O progresso humano exigiu que novas representações fossem criadas, dentre elas os números inteiros e os números racionais. A fração é uma simbologia para os números racionais que tem como um dos objetivos representar que existe algo no intervalo entre dois números inteiros.

É claro que a definição acima não é formal e nem abrange todo o conceito de fração, mas dá uma clara ideia que uma fração representa uma divisão em partes igualitárias que não se preocupa com o resto do quociente, afinal, intuitivamente, tudo pode ser dividido, nem que seja necessário repartir em pedaços menores.

Não é difícil imaginarmos alunos do Ensino Fundamental ou até mesmo do Ensino Médio cometendo diversos erros com as operações envolvendo números fracionários. Podemos verificar, ainda hoje, que estes alunos, de modo geral, sentem muita dificuldade em exercícios que envolvam a ideia de fração de alguma maneira. Além disso, conversando com diversos professores do Ensino Fundamental, constatou-se que o ensino de frações é um dos tópicos em que o professor tem maior dificuldade na hora da aula, principalmente quando se trata das operações com frações, sendo a divisão entre duas frações a parte mais difícil.

Neste trabalho, inicialmente buscar-se-á descrever o contexto em que o número fracionário é inserido no Ensino Fundamental através da nova Base Nacional Comum Curricular redigida em 2017. Também serão vistas as simbologias, representações e as operações realizadas com estes números.

É importante, no estudo das frações e em todo conteúdo matemático, priorizar o ensino através de uma estratégia lógica e intuitiva sem a memorização de definições e regras, ou seja, se preocupando com a compreensão dos conteúdos e fazendo com que o aluno possa participar de todo o processo de obtenção do conhecimento estando consciente do que e para que está adquirindo tal informação.

Dessa forma, buscaremos mostrar uma metodologia de ensino-aprendizagem intuitiva através de atividades para o Ensino Fundamental, além de elaborar atividades que utilizem os recursos tecnológicos disponíveis hoje em dia, objetivando, assim, tornar o ensino sobre números fracionários mais interessante e acessível aos alunos.

É válido dizer que, todas as atividades que serão aplicadas e analisadas nesse trabalho foram aplicadas ao longo do ano de 2018 em pelo menos uma das turmas ministradas pelo autor deste trabalho: 1701, 1702, 1704 e 1705, todas do sétimo ano do ensino fundamental com cerca de 40 alunos cada uma, da Escola C, Localizada próximo ao Complexo do Alemão e atende, em sua maioria, alunos moradores de comunidades próximas.

Esta escola tem como caraterística ser uma escola pública do município do Rio de Janeiro, de turno único de 7:30 até 14:30, contendo, ao todo, 6 tempos semanais para a disciplina de matemática.

O trabalho está divido desta forma: no primeiro capítulo, será feita uma fundamentação teórica, conceituando e explicitando algumas ideias relacionadas à educação matemática crítica.

No segundo capítulo, será explorada a ideia do uso de novas tecnologias em sala de aula: as digitais, como a utilização do software GeoGebra em sala de aula, e as não-digitais, como o desenvolvimento de atividades com materiais concretos.

No terceiro capítulo, definiremos frações, suas propriedades e as operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) de maneira lógica e intuitiva, baseando-nos no conceito explorado em educação matemática crítica que tem por objetivo facilitar a compreensão do trabalho como um todo.

No quarto capítulo, serão apresentadas algumas atividades, com o objetivo de tornar o ensino mais divertido e eficaz, e, também, o relato dos resultados quando aplicados em sala de aula.

Por fim, teremos a conclusão deste trabalho fazendo as devidas considerações e analisando os resultados obtidos. Esta análise será feita com base no que foi proposto inicialmente, sempre deixando claro que o foco de qualquer atividade pedagógica é o aluno e o seu desenvolvimento escolar e pessoal, pois visa facilitar a assimilação do conteúdo estudado para o desenvolvimento de um ser pensante e crítico.

1 **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Neste capítulo, dissertaremos sobre a importância de se pensar em um ensino construtivista tendo como base uma educação matemática crítica, que tem como objetivo formar um ser humano pensante dentro da sociedade em que vive. Essa metodologia é oposta a uma metodologia tradicional onde o professor é o total detentor do conhecimento e o aluno é apenas um expectador.

Ainda pensando nessa matemática crítica, vamos discorrer sobre a importância da valorização do erro e das contextualizações dos conteúdos matemáticos.

1.1 **Educação Matemática crítica**

Aulas chamadas tradicionais são aplicadas por grande parte dos professores de matemática. Nestas aulas, o professor é o total detentor do conhecimento, que é apresentado através de suas aulas expositivas, exemplificando cálculos e fórmulas com pouca contextualização e induzindo à memorização e à algoritmização por parte dos alunos.

Na década de 80, surgiu o conceito de educação matemática crítica que vem contra esse conceito tradicional e valoriza o processo de ensino-aprendizagem como um todo. Ole Skovsmose foi um autor que ajudou a popularizar a ideia através de suas publicações nesta área e que, posteriormente, foram traduzidas para diversos idiomas, inclusive o português.

A educação matemática crítica é um conceito com uma definição bastante abrangente, já que resume um conjunto de práticas que faz com que o ensino da matemática tenha por objetivo analisar e interpretar criticamente a sociedade como um todo.

Essa ideia pode ser relacionada com uma pedagogia de Paulo Freire que diz que os alunos não deveriam apenas aprender a ler e escrever, mas também interpretar e criticar a situação social e política do seu meio.

Segundo Alrø e Skovsmose (2010), as atividades desenvolvidas no âmbito da educação matemática não podem ser classificadas como um conjunto de ações homogêneas que se preocupam apenas em ensinar os conteúdos de matemática, mas além disso:

> [...] preocupa-se com a maneira como a Matemática em geral influencia nosso ambiente cultural, tecnológico e político e com as finalidades para as quais a competência matemática devem servir. Por essa razão, ela não visa somente a identificar como os alunos, de forma mais eficiente, vêm a saber e a entender os conceitos de, digamos fração, função e crescimento exponencial. A Educação Matemática crítica está também preocupada com questões como "de que forma a aprendizagem de Matemática pode apoiar o desenvolvimento da cidadania e "como o indivíduo pode ser *empowered* através da Matemática" (ALRØ & SKOVSMOSE, 2010, p. 18).

Podemos observar que, na Educação Matemática Crítica, a matemática é muito mais do que uma simples ferramenta de resolução de problemas: ela pode ser interpretada também como uma linguagem. Desta forma, através desta linguagem, o ser humano pode observar, interpretar e modificar o meio em que vive e, por conseguinte, sua própria vida.

Em outras palavras, o ensino da matemática crítica baseada em contextualizações e aplicações dos conteúdos matemáticos não só aproxima a relação entre o professor e o aluno como faz com que o aluno passe a ter uma visão crítica da sociedade e do seu próprio meio.

Em qualquer conteúdo, acreditamos que a relação entre quem ensina e quem aprende é fundamental no processo de ensino-aprendizagem. Em uma sala de aula, há diversas interações que afetam esse processo, sejam elas entre professor e aluno ou até entre os próprios alunos.

Uma melhor relação interpessoal, principalmente entre professor e aluno, pode trazer diversos benefícios no ensino de matemática, pois é um fator crucial para a aprendizagem:

> Aprender é uma experiência pessoal, mas ela ocorre em contextos sociais repletos de relações interpessoais. E, por conseguinte, a aprendizagem depende da qualidade do contato nas relações interpessoais que se manifesta durante a comunicação entre os participantes. Em outras palavras o contexto em que se dá a comunicação afeta a aprendizagem dos envolvidos no processo. (ROGERS, 1994 apud ALRØ & SKOVSMOSE, 2010, p. 12).

Entendemos “qualidade do contato” referida acima como a eficiência da comunicação entre professor e aluno, deixando claro que toda a comunicação deve ser planejada para que essa qualidade seja sempre a melhor possível.

Dessa forma, nossa proposta para tentar melhorar essa qualidade de contato nas relações interpessoais no processo de ensino e aprendizagem foi através de uma proposta no ensino de frações a partir de um encadeamento lógico de ideias e o desenvolvimento de atividades lúdicas através do uso dos recursos tecnológicos disponíveis, tais como softwares e materiais concretos.

1.1.1 Valorização do erro

O erro é um componente que está presente quando pensamos no processo de ensino-aprendizagem de qualquer conteúdo ou prática. Por exemplo, é comum quando uma pessoa está aprendendo a dirigir deixar, por algumas vezes, o carro “morrer”. Na matemática, o erro pode ser interpretado de duas maneiras: como uma tentativa válida de um raciocínio que, por algum motivo, não conseguiu alcançar o objetivo esperado, podendo este ser a resolução de uma questão ou uma situação-problema, ou ainda pode ser encarado como apenas um maneira incerta de se tentar resolver alguma coisa. Alrø & Skovsmose (2010) observam que essa interpretação absolutista em sala de aula está aliada a uma “superioridade” do professor, pois há um empoderamento inquestionável do seu saber, cuja única função real é criar barreiras no processo de aprendizagem do aluno.

Na primeira interpretação, o resultado errado é o que menos importa, valendo mais o processo para alcançar o mesmo. Já na segunda interpretação, é analisada somente a resposta final, ou seja, é uma avaliação binária de certo ou errado, onde o processo e raciocínio utilizados não são levados em conta.

Apesar desta última interpretação, há casos em que o erro é encarado a partir de uma perspectiva contrária à absolutista:

> [...] percebemos como os alunos tentam tomar as rédeas do processo educacional. Eles querem fazer parte do processo e ajustam suas perspectivas de acordo com as intenções do professor. [...] Os estudantes assumem novos papéis e surgem novos padrões de comunicação. Os

> alunos não adotam estratégias comodistas. Eles participam ativamente (ALRØ & SKOVSMOSE, 2010, p. 30).

Uma situação análoga a essas duas interpretações do erro por parte do professor consiste na diferença entre uma prova discursiva e uma prova múltipla-escolha. Citamos uma experiência em relação à prova de avaliação da rede pública de ensino do município do Rio de Janeiro, onde o autor desta dissertação trabalha desde abril de 2016. Todo bimestre, os alunos realizam uma avaliação da rede que consiste em uma prova de 15 questões de múltipla-escolha. Além de ser cobrado o cartão-resposta a ser preenchido pelo aluno, também é pedido pelo professor, desde o 3º bimestre de 2017, o raciocínio empregado em cada uma das questões.

Com isso, foi observado que a maioria dos alunos melhoraram suas notas, pois, segundo alguns deles, por ter que justificar cada uma das respostas eles passaram a olhar a prova com uma maior seriedade. Além disso, considerando a correção das provas de duas maneiras: uma apenas pelo cartão-resposta e a segunda observando os desenvolvimentos das justificativas das questões, percebemos que a maior nota dentre os alunos, na maioria dos casos, foi na correção com as justificativas.

A situação acima é um exemplo de um caso que embasa a importância de analisarmos os erros, tendo o cuidado de como estes foram cometidos e valorizando o processo de obtenção do resultado, visto que o raciocínio do aluno pode estar parcialmente correto.

Um outro exemplo, neste caso hipotético, seria um professor pedir para que um aluno calculasse o perímetro de um retângulo de dimensões 3,2 cm e 1,3 cm e este aluno, por descuido, desse como resposta o valor de 4,5 cm. Nessa situação, o professor pode se aproveitar do erro do aluno e explicar o porquê da resposta estar errada, explicando que existem 4 lados iguais dois a dois e, portanto, o valor correto é o dobro do obtido, não anulando, simplesmente, o raciocínio do aluno.

Em todas as atividades desenvolvidas neste trabalho, o erro será valorizado como uma oportunidade, ou seja, como uma ferramenta no processo de ensino-aprendizagem. Isso está baseado na ideia de uma educação em matemática crítica.

1.1.2. Contextualizações

Percebe-se que as crianças ou adolescentes, de um modo geral, são curiosos e têm desejo de aprender. No entanto, muitas vezes, essa curiosidade e desejo entram em confronto com o modo que o conteúdo matemático é apresentado, seja por falta de contextualização ou por nenhuma aplicação prática aparente.

Podemos relacionar esse estilo de aula onde o professor apenas explicita uma série de algoritmos sem contextualizá-los ou aplicá-los em situações práticas com o que Freire (1967) chama de antidiálogo:

> [...] que implica numa relação vertical de A sobre B, é o oposto a tudo isso [à prática em que o diálogo é predominante]. É desamoroso. É acrítico e não gera criticidade, exatamente porque desamoroso. Não é humildade. É desesperançoso. Arrogante. Auto-suficiente. No antidiálogo quebra-se aquela relação de "simpatia" entre seus pólos, que caracteriza o diálogo. Por tudo isso, o antidiálogo não comunica. Faz comunicados. (FREIRE, 1967, p.107).

Podemos perceber, na maioria dos casos, um aumento no interesse dos alunos quando são apresentados a problemas contextualizados ao invés de problemas ditos como diretos. É claro que isso não é uma garantia de um bom resultado. No entanto, essa ideia de contextualizar e aplicar os conteúdos matemáticos, que vão de encontro com os ideais da educação matemática crítica, ajudam a desmistificar a matemática, tornando-a mais acessível e, de modo geral, fazendo com que ela seja mais interessante para o aluno.

2 **O USO DE NOVAS TECNOLOGIAS EM SALA DE AULA**

Quando se pensa em tecnologia, geralmente se pensa em computadores e softwares, muitas vezes com algum nível de complexidade na sua criação, elaboração ou utilização. No entanto, ao pesquisar as palavras “tecnologia significado” no buscador *Google*, encontramos a definição “teoria geral e/ou estudo sistemático sobre técnicas, processos, métodos, meios e instrumentos de um ou mais ofícios ou domínios da atividade humana (p.ex., indústria, ciência etc.).”, ou seja, pode ser interpretada como uma ferramenta facilitadora de um determinado processo.

A partir dessa definição, podemos pensar em tecnologia como sendo qualquer ferramenta útil e facilitadora do processo de ensino-aprendizagem.

Além de motivar e aumentar o interesse dos alunos, qualquer tipo de tecnologia pode garantir uma maior inclusão e acessibilidade no ensino para aqueles que têm algum tipo de necessidade especial. Um exemplo de um caso deste é um aluno, que chamaremos de F, que possui transtorno do espectro autista, da mesma Escola C que foi o nosso ambiente de aplicação deste trabalho.

O aluno F interage apenas com palavras simples, sem formulação de frases. Especificamente no ensino de matemática, o aluno consegue ter um bom encadeamento lógico de ideias. Uma das habilidades desenvolvidas por esse aluno ao longo do ano de 2018 foi resolver equações com uma variável, sabendo que, para encontrar o valor procurado, ele deveria isolar a variável pensando em operações inversas.

Um problema inicialmente encontrado pela professora responsável pelo aluno (o aluno não era do autor deste trabalho) foi de F não ter desenvolvido a habilidade de fazer contas, a não ser que fossem bem simples. Uma saída para F poder avançar foi o uso de calculadoras, ou seja, nesse caso, a calculadora foi uma tecnologia fundamental para o desenvolvimento pedagógico de F.

Assim, foi feita a inserção de um simples equipamento que normalmente é coibido por parte dos professores. No entanto, esta tecnologia pode ajudar em diversos tipos de inclusão. PEREIRA (2013) corrobora com essa ação quando afirma que

> [...] na escola adaptam-se móveis, teclados, computadores, serviços, conforme a necessidade do aluno, buscando a inclusão de forma consciente e comprometida. Usa-se não somente a parte estrutural e administrativa, mas também a promoção de um trabalho interdisciplinar envolvendo professores, coordenadores pedagógicos, terapeutas e arquitetos, entre tantos que militam na área. A atenção volta-se para as tecnologias físicas (equipamentos, mobiliários, instrumentos de comunicação e informação, adaptações estruturais espaciais, próteses, órteses, etc.); as tecnologias simbólicas (escrita, gestos, sinalizações, verbalizações, simbologias, etc.); as organizadoras (projetos, planos, estratégias, procedimentos, aulas, etc.) e as articulações entre elas. (PEREIRA 2013, p. 90)

A partir disso, neste capítulo, teremos como objetivo combinar os recursos tecnológicos com atividades pedagógicas, e, dessa forma, tornar as aulas mais dinâmicas procurando despertar um maior interesse por parte do aluno.

O trabalho desenvolvido não teve uma ligação direta com o tema desta dissertação e, desta forma, não há jogos envolvendo frações. No entanto, é válido citar a experiência a partir do momento que, com a definição que será dada, estes jogos podem ser encarados como uma tecnologia que pode ser inserida no processo de ensino-aprendizagem.

2.1 **Tecnologias não-digitais**

Interpretamos como *tecnologias não-digitais* qualquer instrumento facilitador que não utilize tecnologia digital. Todo material utilizado em sala de aula, tais como: quadro, caneta, lápis, borracha e outros são exemplos de tecnologias não-digitas que ajudam no processo de ensino-aprendizagem. Pensando em matemática, régua e compasso são dois exemplos que podem ser citados. No entanto, podemos pensar também na utilização de jogos como meio de ensino.

Na escola C ao longo dos anos de 2017 e 2018, foram desenvolvidas algumas experiências com jogos matemáticos. Tais jogos foram desenvolvidos pelos professores ou pelos alunos, ou ainda adaptados de jogos já existentes. Além disso, na maioria destes jogos usou-se materiais reutilizados.

Nosso objetivo com essas atividades lúdicas no formato de jogos matemáticos é tornar o processo de ensino-aprendizagem mais divertido e espontâneo, mas mantendo a eficácia do ensino do conteúdo que se busca em um método tradicional.

É claro que, como toda atividade proposta, há oportunidades e desafios. Dentre as oportunidades podemos citar: um aumento do interesse por parte dos alunos, geração de uma competitividade sadia entre os envolvidos, melhora na relação aluno-professor dentro de sala de aula e o processo de aprendizagem acontecer de maneira informal. Como desafios podemos citar: o comportamento e comprometimento dos alunos como um fator importante para o sucesso de uma determinada atividade, a necessidade de um planejamento detalhado e o tempo disponível em sala de aula, que pode prejudicar a continuidade de um trabalho.

Abaixo serão explicitados alguns dos jogos desenvolvidos e uma breve descrição dos mesmos.

Jogo 1: Batalha Naval de matemática

Figura 1 – Tabuleiro de Batalha Naval de matemática

Fonte: O autor

Esse jogo foi desenvolvido por alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e tem como objetivo responder perguntas que estariam escondidas em uma das 90 casas do tabuleiro. Há surpresas em algumas casas: as bombas. Essas surpresas podem ser boas ou ruins, ou seja, com essas surpresas o jogador pode ganhar ou perder pontos sem ter que responder nenhuma pergunta.

Jogo 2: Sudoku

Figura 2 – Tabuleiro de Sudoku

Fonte: O autor

O jogo é idêntico ao original, sendo que feito com a junção de 9 tabuleiros com malha quadriculada 3x3 de EVA (espuma vinílica acetinada) em tamanho grande (cerca de 45 cm cada lado de um tabuleiro). Vale ressaltar que cada um dos tabuleiros também pode ser aproveitado para outros jogos, como jogo da velha.

Jogo 3: Quem sou eu?

Figura 3 – Dinâmica do jogo Quem sou eu?

Fonte: O autor

Neste jogo, dois participantes colocam uma espécie de chapéu com uma carta presa a ele e, em cada carta, há um número inteiro. O participante só vê a carta de um outro jogador. Um moderador dará o resultado de operações matemáticas com os dois números envolvidos, por exemplo: “a soma dos dois números é 30”, “o produto dos dois números é 70”, “o quociente entre os dois números é 10”, etc. Daí, os alunos devem acertar qual é o número que está no seu chapéu a partir do número que ele vê na carta do outro jogador e do resultado da operação fornecido pelo moderador. Este jogo pode ser jogado em turnos e o participante que acertar a maior quantidade de turnos é o vencedor. Além disso, este jogo foi pensado para alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Jogo 4: Qual é a senha?

Figura 4 – Tabuleiro de Qual é a senha?

Fonte: O autor

Para o desenvolvimento desse jogo, é necessário o professor ser o moderador que escolhe, aleatoriamente, uma senha, que deve ser única para todos os participantes e ser um número dentre os disponíveis no tabuleiro. Os participantes (individualmente ou em grupos escolhidos) terão uma cópia desse tabuleiro.

A partir da senha escolhida pelo moderador, o mesmo deve fazer afirmações sobre essa senha, tais como: “minha senha é um número par”, “minha senha é um múltiplo de 5”, “minha senha não é um número primo”, etc., até que um dos participantes (ou um grupo, se for o caso) descubra a senha.

Esse jogo foi pensado em uma reunião de um grupo de estudos sobre educação matemática na UFRJ que uma das professoras da escola C participou ao longo de 2017.

Jogo 5: Jogo de Matemática

Figura 5 – Tabuleiro de Jogo de Matemática

Fonte: O autor

É similar a um jogo de tabuleiros tradicional com dados. Em cada casa, há um desafio matemático. O jogador só pode andar o número de casas que tirou no lançamento de um dado caso acerte o desafio da casa correspondente. Esse jogo foi desenvolvido por alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental da escola C.

Jogo 6: Labirinto

Figura 6 – Painel de Labirinto

Fonte: O autor

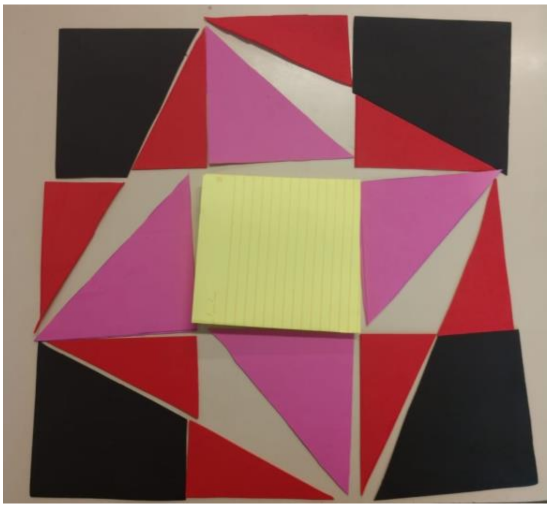
O labirinto tem como objetivo o participante entrar e sair por lugares determinados e trabalha, principalmente, o raciocínio lógico do aluno. Ao entrar em um caminho, ele não pode retornar e só podem ser feitos movimentos virando-se à direita do caminho em que está. Esse labirinto é idêntico à uma atividade vista em uma visita com alunos à Feira de Matemática na Nave do Conhecimento do Engenhão em 2017 pela Bienal de Matemática desenvolvida pelo Sesi Matemática.

Jogo 7: Tabuleiros de questões da OBMEP

Figura – 1º Tabuleiro de questão da 2ª fase da OBMEP de 2016 do nível 1

Fonte: O autor

Figura 8 – 2º Tabuleiro de questão da 2ª fase da OBMEP de 2016 do nível 1



Fonte: O autor

Esses dois tabuleiros foram construídos para auxiliar a resolução de duas questões da segunda fase da OBMEP do ano de 2016 do nível 1. A principal ideia desse material seria possibilitar que os alunos fizessem experimentações sobre possíveis ideias de resoluções e verificar se os seus raciocínios estavam corretos ou não[1].

2.2 **Tecnologias digitais**

É evidente que, atualmente, o uso de tecnologias digitas é intrínseco à nossa sociedade. Há diversos estudos sobre o impacto dessas tecnologias na vida humana nas áreas sociais e até culturais, sobre o nosso comportamento e como nos relacionamos com as outras pessoas e os serviços disponíveis através delas.

Um relatório da UNESCO afirma que:

> [...] o desenvolvimento das tecnologias pode criar um ambiente cultural e educativo suscetível de diversificar as fontes do conhecimento e do saber. Por outro lado, as tecnologias caracterizam-se pela sua complexidade

[1] As questões estão disponíveis em <http://www.obmep.org.br/provas_static/pf2n1-2016.pdf>. Acesso em 16 mai. 2019.

> crescente e pela gama cada vez mais ampla de possibilidades que oferecem. (UNESCO apud PEREIRA 2013, p. 86)

Essa contrapartida do aumento de possibilidades que estas tecnologias oferecem não pode ser considerada negativa, pois, mesmo aumentando-se o nível de complexidade, é fundamental os professores pensarem em atualizar-se e adaptar-se à realidade da sociedade atual, que é uma sociedade tecnológica e em constante mudança. BRITO (2008) corrobora com isto quando afirma que

> Há uma necessidade real de que os educadores comprometidos com o processo educativo se lancem à produção ou assimilação crítica de inovações de caráter pedagógico, podendo, assim, aproveitar o estreito espaço existente no campo educacional, para gerar mudanças que não sejam simplesmente pura expressão da modernidade. Dessa forma, no conceito de inovação que se propõe hoje, está envolvida a utilização de novas tecnologias em sala de aula, o que implicará novos projetos fundamentados em concepções de ensinar e aprender diferentes das propostas já existentes (BRITO, 2008 apud PEREIRA, 2013).

Referindo-se especificamente à área de educação, em cada época fez-se o uso de uma tecnologia específica. Até o final do século XX, as provas eram rodadas no mimeógrafo, ato que hoje é desconhecido pela maioria dos estudantes da educação básica. Acreditamos que o uso das tecnologias digitas é essencial, pois dessa forma, surgem novas oportunidades, o que as tornam ferramentas democratizadoras do ensino, vide os diversos cursos à distância existentes atualmente e até os diferentes exemplos de conteúdos educativos existentes na internet, por exemplo.

Uma outra utilização é a de softwares educacionais tais como o GeoGebra, que pode ser uma ferramenta facilitadora de diversos conteúdos.

É notório que, quando se trata de uma escola pública, que é onde este trabalho foi aplicado, faltam investimentos em diversas áreas. Por exemplo, na escola que chamamos de C, apesar dos alunos apresentarem bons resultados em provas internas e externas, há uma grande falta de mobiliário.

Pensando que essa precarização de investimentos se dá em diversas áreas, na parte da tecnologia não seria diferente. Há relatos de escolas que não possuem, ainda hoje, equipamentos eletrônicos como projetores ou computadores disponíveis para o uso do professor.

Outro problema é a dificuldade que alguns alunos ainda encontram em ter acesso a essas tecnologias. Alguns deles não possuem acesso à internet em casa, seja por computador, tablet ou celular, nos dias atuais.

Neste trabalho, daremos o exemplo de uma atividade para multiplicação de fração através do software Geogebra. Podemos acrescentar, também, que as demais atividades também poderiam ser desenvolvidas através do uso de tecnologias digitais. No entanto, nosso foco foi trabalhar com materiais concretos.

3 **O CONCEITO DE FRAÇÃO**

Uma fração pode ser definida pela representação $\frac{a}{b}$, onde a e b são números naturais e b é diferente de zero. Aqui, não estamos trabalhando com números inteiros propositalmente, já que não faz parte do contexto deste trabalho números negativos. O número a é chamado de numerador e, o número b, de denominador.

A partir dessa definição, podemos dar alguns significados às frações. Inicialmente, neste capítulo, teremos como objetivo discorrer sobre as frações e como a Base Nacional Comum Curricular, redigida em 2017, pretende apresentar esse conteúdo. Dessa forma, exibiremos estes significados, algumas aplicações e, por fim, apresentaremos a ideia de operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) entre frações.

3.1 **Base Nacional Comum Curricular e as frações**

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), tem como objetivo ser:

> [...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) [...] e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNEB). (BRASIL, 2017, p.7)

Além disso, é referência para a formulação dos currículos e das propostas pedagógicas de todas as escolas do país, e ainda, segundo o próprio documento, tem o objetivo de igualitar as políticas educacionais, ou seja, tenta proporcionar um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, seja qual for a esfera da escola ao qual está inserido.

São apresentadas ainda, nas páginas 16 e 17 do referido documento, algumas condutas que vão ao encontro com o ideal de uma educação matemática crítica e o uso de uma abordagem didática. Citamos como exemplo:

a) contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;

b) decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;

c) selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de alunos, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;

d) conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens;

e) construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos alunos;

f) selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;

g) criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem.

As propostas didáticas são expostas através do componente curricular, ano de escolaridade, unidades temáticas, objetos de conhecimento, habilidades e comentários e sugestões de como utilizar o conteúdo proposto.

Cada uma das habilidades propostas tem um código distinto. Esse código tem como objetivo ser único e identificar as habilidades necessárias para desenvolver um conteúdo, prova ou questão. Ele é composto da junção de EF + “ano de escolaridade” + MA + “identificação”. Por exemplo, o código EF06MA09 significa que é a habilidade esperada número 9 de matemática do sexto ano do ensino fundamental.

No endereço eletrônico http://basenacionalcomum.mec.gov.br/, pode-se fazer uma busca mais específica selecionando os componentes e os anos de escolaridade desejados. Fizemos uma busca selecionando os campos “matemática”, em componentes, e “todos”, em ano de escolaridade. Após isso, foi feito o download de uma planilha contendo todas as propostas didáticas em matemática em todos os anos de escolaridade do Ensino Fundamental. Fizemos um estudo buscando todos os conteúdos que envolvem, de alguma maneira, a ideia de fração. Podemos visualizar essa seleção de conteúdos de frações na tabela abaixo:

Tabela 1 – Dados sobre frações no BNCC

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
2º	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
3º	Significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte	(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.
4º	Números racionais: frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100)	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5º	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
5º	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.
5º	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
5º	Cálculo de porcentagens e representação fracionária	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos

		e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
5º	Cálculo de probabilidade de eventos equiprováveis	(EF05MA23) Determinar a probabilidade de ocorrência de um resultado em eventos aleatórios, quando todos os resultados possíveis têm a mesma chance de ocorrer (equiprováveis).
6º	frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
6º	frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
6º	frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
6º	frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
6º	Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
6º	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos

	equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	sucessivos.
7º	fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
7º	fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
7º	fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
7º	fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
7º	fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
7º	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
7º	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.
7º	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
8º	Dízimas periódicas: fração geratriz	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
9º	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias

		digitais, no contexto da educação financeira.
9º	Razão entre grandezas de espécies diferentes	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
9º	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
9º	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Fonte: BRASIL, 2018.

Pode-se observar que, nos 2º e 3º anos, não há, ainda, o uso do termo fração, no entanto a ideia de divisão em partes iguais já é empregada. Já no 4º ano, seriam apresentadas algumas frações de numerador unitário com ressalva para a utilizações da reta numérica como recurso facilitador.

No quinto ano, tem-se um estudo mais completo das frações e já se começa a induzir no aluno que há dois possíveis significados para uma fração: como a parte de um todo ou como o resultado de uma divisão. Também se apresenta a ideia de frações equivalentes. Como uma forma de aplicação dos números fracionários, temos o cálculo de porcentagens e de probabilidades em eventos equiprováveis.

Esse é o ano do principal contato do aluno com os números fracionários, pois é nesse momento que o aluno deve aprender todos os conceitos básicos para efetuar as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, utilizando, principalmente, a ideia de frações equivalentes.

No sexto ano, há uma revisão de tudo foi visto nas séries anteriores, além de ser acrescentada a ideia de fração (divisão em partes iguais) de um número natural e a soma e subtração entre frações. Vale ressaltar que tudo isso é visto através da ideia de frações equivalentes.

No sétimo ano, além de aprofundar todo o conhecimento visto até então, é acrescentada a ideia de números racionais e a representação decimal, inclusive na reta numérica.

No oitavo ano, o foco é na introdução das dízimas periódicas, dando mais um significado para as frações. Já no nono ano, o uso de frações é aplicado aprofundando-se o conhecimento obtido até então em porcentagens, razão e proporção e probabilidade.

De um modo geral, espera-se que, ao fim desta etapa, o aluno seja capaz de: identificar o significado de uma fração em cada uma de suas operações, realizar as operações básicas e aplicar estes conhecimentos em outros conteúdos.

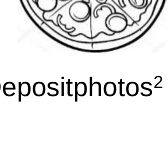
Visto que a compreensão de um número racional pode envolver muitas interpretações diferentes dependendo do tipo de situação ou problema trabalhado, é importante discorrermos sobre estes significados e suas aplicações. Isto será visto na próxima seção.

3.1.1 A fração como parte de um todo

A representação de uma fração como uma divisão de um todo em partes iguais é vista pelo aluno, desde o primeiro contato com o tema, em problemas como dividir um bolo ou uma pizza em uma quantidade definida de pessoas. Estes problemas são muito aplicados e de fácil entendimento.

Dessa forma, é passado para o aluno que o denominador da fração representa o total de partes iguais a ser considerado e o numerador representa a quantidade de partes a ser selecionada. Por exemplo, se ao pedir uma pizza, ela já vem cortada em 8 fatias e há apenas 5 pessoas, sendo que cada pessoa come apenas um pedaço, a fração da pizza que será consumida é de $\frac{5}{8}$, onde 8 é o denominador e representa o total de partes iguais (que compõem a pizza) e 5 é o numerador e representa a quantidade de partes selecionadas, isto é, a quantidade de fatias que serão consumidas pelas 5 pessoas.

Figura 9 – Pizza dividida em 8 pedaços

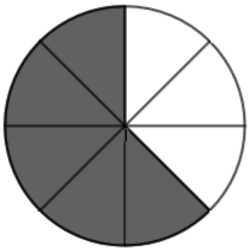


Fonte: Depositphotos[2]

[2] Disponível em: <https://br.depositphotos.com/54982051/stock-illustration-italian-pizza-cartoon-coloring-page.html>. Acesso em: 26 set. 2018.

Vale observar que, nesse caso, estamos supondo, apesar da figura, que os oito pedaços da pizza possuem a mesma área. Esse raciocínio pode, facilmente, ser representada de maneira gráfica:

Figura 10 – Círculo representando cinco oitavos



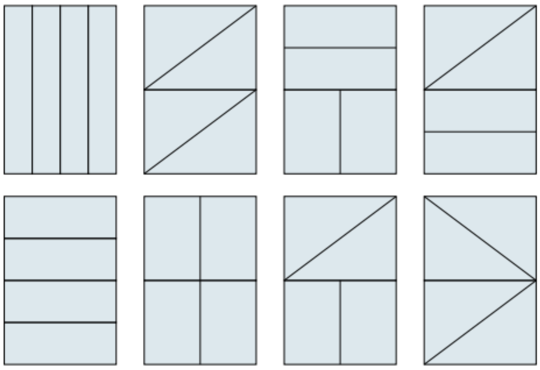
Fonte: O autor

É importante, ao representar uma fração graficamente, utilizar diversas formas: círculos, retângulos, quadrados ou até polígonos não usuais como estrelas, entre outros. Dessa forma, aumenta o poder de percepção no aluno de que a fração é uma divisão em partes iguais, independente do todo que está sendo trabalhado.

Além disso, é válido ressaltar que, para que partes representem frações, essas partes devem ter áreas iguais. O problema abaixo foi retirado do livro FRAÇÕES no Ensino Fundamental – Volume I[3] e foi proposto no último trimestre de 2017 para um grupo de 20 alunos com bom rendimento em matemática da mesma escola em que as demais propostas descritas neste trabalho foram aplicadas:

“Quais dos oito retângulos a seguir foram repartidos em quartos?”

Figura 11 – Retângulos divididos em quatro partes



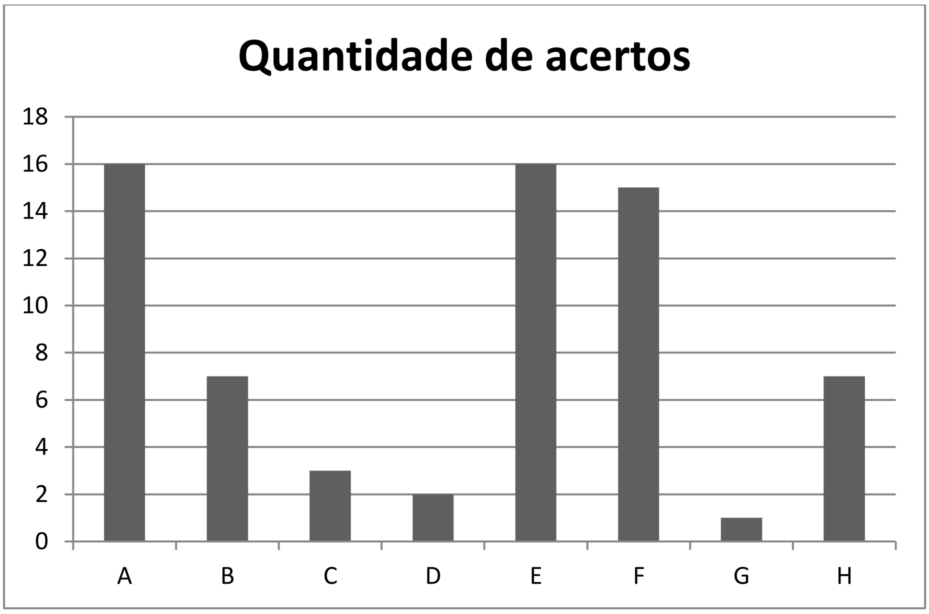
Fonte: FRAÇÕES no Ensino Fundamental – Volume I

[3] Disponível em: <https://www.umlivroaberto.com/livro/lib/exe/fetch.php?media=fracoes_v2_book_view.pdf>. Acesso em: 27 set. 2018.

Para facilitar, nomeamos as figuras da esquerda para a direita começando pela primeira linha, de figura A, B, C, D, E, F, G e H, onde a figura A é a primeira figura da esquerda pra direita da primeira linha e a figura H é a quarta figura da esquerda para a direita da segunda linha.

O resultado sobre a quantidade de acertos estes 20 alunos pode ser visto no gráfico abaixo, onde estão representadas as quantidades de acertos de cada figura acima.

Gráfico 1 – Quantidade de acertos por figura



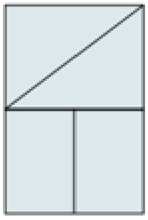
Fonte: O Autor

Após a análise dos resultados, pudemos observar que nenhuma figura foi relacionada corretamente por todos os alunos e o contrário também não aconteceu, isto é, nenhum aluno considerou que todas as figuras estavam divididas em quatro partes iguais, que é a resposta correta para esse exercício.

Com isso, vê-se a importância de representar a fração a partir de diversas representações gráficas e também de utilizar diferentes formas de apresentar as partes de um mesmo todo, conforme já foi dito anteriormente.

Além disso, esse exercício nos mostra que, para que a figura esteja dividida em quartos, as partes não precisam ser, necessariamente congruentes, basta que as áreas de cada uma das partes sejam iguais, como pode ser observado na figura G, que destacamos abaixo.

Figura 12- Retângulo dividido em quatro partes de áreas iguais



Fonte: Adaptado de FRAÇÕES no Ensino Fundamental – Volume I

Pode-se observar que temos dois pares de figuras distintas acima, no entanto é fácil ver que todas as figuras possuem a mesma área. Assim, o retângulo está dividido em quartos.

Até esse ponto, tudo é muito visual e de fácil entendimento, mas as frações também podem ser impróprias, ou seja, o numerador pode ser maior que o denominador. Nesse caso, a quantidade de partes a serem selecionadas é maior que o total de partes presentes no todo e a dificuldade se dá na contextualização dessa etapa da construção do conhecimento. Acreditamos que essa dificuldade pode ser enfrentada através de uso de materiais concretos, facilitando o entendimento do conteúdo. Além disso, essas frações, chamadas impróprias, podem ser transformadas em uma soma de uma parte inteira com uma fração própria, isto é, aquela que equivale a menos do que o todo.

Vejamos a fração $\frac{5}{3}$. Podemos considerar que $\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$, logo essa representação gráfica se daria com um inteiro e esse mesmo inteiro dividido em três partes com duas delas selecionadas. Observe que isso é o mesmo que selecionar 5 partes de um inteiro que está dividido em 3 pedaços, mas essa segunda interpretação é mais abstrata.

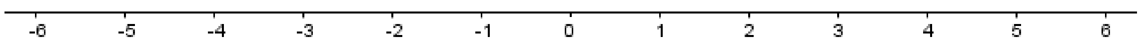
Figura 13 - Representação gráfica de cinco terços

Fonte: O autor

3.1.2 <u>A fração como um número</u>

Uma das importantes interpretações de fração é como a representação de um número. Para isso, vamos utilizar uma reta numérica, onde inicialmente representaremos os números inteiros:

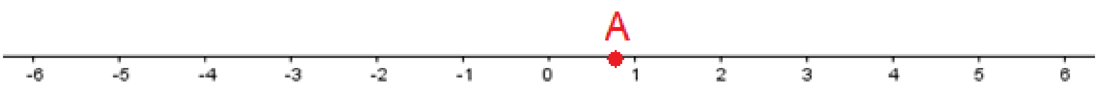
Figura 14 – Representação da reta numérica dos números inteiros



Fonte: O autor

A partir disso, podemos interpretar uma fração como uma divisão do numerador pelo denominador. Por exemplo, a fração $\frac{4}{5}$ é a divisão do numerador 4 pelo denominador 5. Efetuando essa divisão chegamos ao resultado 0,8, ou seja, dizemos que $\frac{4}{5} = 0{,}8$. Com isso, podemos representar essa fração na reta numérica desta forma: como o número 0,8 está compreendido entre os números inteiros 0 e 1 e está mais próximo de 1, ele é assinalado como o ponto A na figura abaixo:

Figura 15 – Representação do número 0,8 na reta numérica



Fonte: O autor

Vale ressaltar que, nesse trabalho, não nos prenderemos em como efetuar as contas, já que nosso foco será em desenvolver uma proposta de ensino a partir de um encadeamento lógico de ideias da maneira mais intuitiva possível.

Pensando ainda no exemplo acima, na etapa de assinalar o ponto A, pode-se desenvolver, também, a ideia de comparação entre números decimais. É comum alunos dizerem, por exemplo, que 0,85 > 0,9 com a justificativa de que 85 é maior do que 9. Assim, é conveniente instruir o significado do algarismo após a vírgula e que o zero, no final e depois da vírgula não é um algarismo que altera o valor do número, por exemplo, 0,635 é exatamente igual à 0,6350, que é exatamente igual à 0,63500, e assim sucessivamente.

É claro que não seria obrigatório utilizar a representação decimal para determinar a posição da fração em uma reta numérica. Uma estratégia válida seria dividir a unidade em cinco partes, já que este é o denominador, e posicionar o ponto na quarta marcação feita.

Além disso, muitas vezes, utilizamos a ideia de que fração é um número (sem pensar em partes de um todo) de forma intuitiva, como, por exemplo, quando resolvemos alguma equação.

Vejamos o caso da equação 3x – 10 = 11. Utilizando a ideia de operações inversas, temos que somar 10 em ambos os lados da equação e, feito isso, dividir ambos os lados da equação por 3. Normalmente, essa divisão por 3 é representada através de uma fração de denominador 3. Observe:

$$3x - 10 + 10 = 11 + 10$$

$$3x = 21$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$

Ou seja, a fração vinte e um terços é o resultado dessa equação. É claro, que, neste caso, a divisão é exata, logo, podemos dizer que o valor da solução x da equação é 7.

Vale ressaltar que, muitas vezes, essa última etapa não resulta em um número inteiro e geralmente é suficiente dar o resultado na forma fracionária. Por exemplo, na equação 5x + 2 = 14, seguindo raciocínio análogo ao feito anteriormente através de operações inversas, temos:

$$5x + 2 - 2 = 14 - 2$$

$$5x = 12$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{12}{5}$$

Nesse caso, ocorre exatamente o que foi dito anteriormente, ou seja, é suficiente a solução x = $\frac{12}{5}$.

Vale dizer também que, caso necessário, pode ser utilizado a representação decimal dessa fração, ou seja, considerando a fração como uma divisão entre numerador e denominador, temos x = 2,4.

Sabe-se que toda fração pode ser transformada em algum número decimal, seja ele finito ou uma dízima periódica e, reciprocamente temos o mesmo: todo número decimal finito e toda dízima periódica podem ser representados em uma única fração. Vale ressaltar que, quando dizemos que a representação é única, estamos considerando que frações equivalentes representam o mesmo número, por exemplo, as frações $\frac{3}{7}$ e $\frac{9}{21}$ são representações da dízima periódica 0,428571428571....

O fato de todo número decimal finito poder ser transformado em fração é direto, pois, se o número é finito ele pode ser escrito na forma de uma potência de 10 com expoente negativo e, portanto, por definição, pode ser colocado na forma de uma fração cujo denominador é uma potência de 10. Naturalmente, dependendo do número trabalhado, essa fração pode ser simplificada.

Por exemplo, considerando o número 3,134, por termos três casas decimais, esse número pode ser escrito da forma 3134×10^{-3} e, por fim, colocado da forma $\frac{3134}{1000}$, que pode ser simplificada para $\frac{1567}{500}$. Vale observar que esse raciocínio pode ser generalizado para qualquer número decimal finito da forma $x_1, x_2x_3x_4 \dots x_n$, onde x_n, para todo n natural, é um algarismo pertencente ao conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Para o caso das dízimas periódicas podemos, inicialmente, defini-las como a soma de um valor i com uma série geométrica da forma abaixo:

$$i + \underbrace{ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} + \cdots}_{Série\ geométrica\ com\ primeiro\ termo\ ar\ e\ razão\ r} = i + \sum_{n=1}^{\infty} ar^n,$$

onde, i é um número inteiro ou um decimal finito, n é um número natural e 0 < r < 1.

Podemos concluir que, como a série geométrica possui razão maior que zero e menor que 1, ela converge para o número $\frac{ar}{1-r}$, e portanto, a dízima periódica pode ser escrita da forma $i + \frac{ar}{1-r} = \frac{i-ir+ar}{1-r}$. Vale observar que 1 – r será um número decimal, já que r é um número decimal positivo menor que um, o que não nos traz problema, pois, como mostrado acima, todo número decimal pode ser escrito na forma de fração e, portanto, esse resultado seria uma divisão entre duas frações, que resulta em uma fração.

Consideremos, por exemplo, a dízima periódica 2,1323232... Ela pode ser escrita como:

$$2{,}1 + 0{,}032 + 0{,}00032 + 0{,}0000032 + \cdots =$$

$$2{,}1 + 32.10^{-3} + 32.10^{-5} + 32.10^{-7} + \cdots$$

onde:

$$\begin{cases} \mathrm{i} = 2{,}1 = \dfrac{21}{10} \\ \mathrm{ar} = 32.10^{-3} = \dfrac{32}{1000} \\ \mathrm{r} = 10^{-2} = \dfrac{1}{100} \, . \end{cases}$$

Com isso, utilizando a relação vista acima, vemos que

$$2{,}1323232\ldots = \frac{21}{10} + \frac{\frac{32}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{21}{10} + \frac{\frac{32}{1000}}{\frac{99}{100}} =$$

$$\frac{21}{10} + \frac{\frac{32}{1000}}{\frac{990}{1000}} = \frac{21}{10} + \frac{32}{990} = \frac{21.99 + 32}{990} = \frac{2111}{990}$$

É válido ressaltar que as dízimas não periódicas, como radicais não exatos da forma $\sqrt[n]{a}$, com a natural e n inteiro, não podem ser escritos na forma de fração, e, portanto, são classificados como irracionais.

3.1.3 A fração como ferramenta de resolução de problemas

Como já citado anteriormente, muitas vezes utilizamos um dos significados existentes para fração em outras áreas e conteúdos da matemática ou de outras disciplinas. Nesta seção, trabalharemos com alguns desses usos nos casos de razão e proporção, porcentagem e probabilidade. É evidente que há diversas outras aplicações, mas essas três são vistas inclusive no ensino fundamental, que é o ciclo em que o nosso trabalho é aplicado.

3.1.3.1 Razão e proporção

É importante definirmos que razão, na matemática, pode ser interpretada como uma fração que representa uma comparação entre duas grandezas. Por exemplo, dizer que a razão entre o número de alunos de uma turma que gosta de vôlei para os que não gostam de vôlei é $\frac{1}{3}$ é o mesmo que dizer que o número de alunos que não gostam de vôlei é o triplo do número de alunos que gostam.

Um erro comum é interpretar essa informação como se $\frac{1}{3}$ da turma gostasse de vôlei. O erro reside no fato que se a razão dada é de 1 para 3, quer dizer que temos que separar a turma em quatro (1 + 3) grupos e não em três grupos. Esse tipo de interpretação é fundamental na construção do conhecimento para o aluno, pois a partir dele é que poderemos resolver problemas envolvendo este conteúdo.

Após fazer essa introdução, pode-se definir proporção como uma igualdade entre razões. Ou seja, quando temos duas razões iguais, temos uma proporção. Vamos analisar um pouco mais essa definição.

Se podemos interpretar uma razão como uma fração, dizer que uma proporção é uma igualdade de duas (ou mais) razões, significa dizer que trabalhar com proporção, nada mais é do que trabalhar com frações equivalentes, que será a base do nosso trabalho para a construção de todas as operações com frações.

Podemos concluir que trabalhar dessa forma é fazer uma aplicação direta de conceitos de frações que ajudam a resolver problemas envolvendo proporções e vão contra a métodos algoritmizados, o famoso “multiplicar cruzado”. Ou seja, o importante é explorar os diversos significados atrelados aos conceitos envolvidos.

Vale ressaltar que, após a ideia ser bem entendida, a algoritmização é algo positivo, até porque, no caso de proporções, os valores envolvidos podem ser decimais e trabalhar com frações equivalentes pode ser um dificultador neste caso.

3.1.3.2 Porcentagem

Uma porcentagem, por definição, é uma fração com denominador 100. Por exemplo, quando se afirma que 40% de uma população possui determinada característica, significa que uma fração $\frac{40}{100}$ dessa população está nesse conjunto.

Esse conceito é muito importante, pois a partir dele podemos entender melhor como aplicá-lo. De maneira mais formal, aplicamos o conceito de porcentagem quando fazemos uma comparação com uma escala de 0% (nenhum elemento) a 100% (todos os elementos).

Por exemplo, ao dizermos que 40% de uma turma de 40 alunos são representados por meninos, significa dizer que 16 alunos são meninos. Isso quer dizer que podemos relacionar a fração de 16 meninos pelo total de 40 alunos com a representação 40% ou à fração $\frac{40}{100}$.

A partir dessa ideia, para qualquer problema envolvendo cálculos percentuais, pode-se fazer uma relação direta com uma proporção.

Vale observar que essa fração de denominador 100, quando interpretada como uma porcentagem, por mais que possa ser transformada em um número, ela tem um significado maior do que o valor desse número, pois é um indicativo do quão grande (ou pequeno) é um dado selecionado em relação a um determinado universo, que pode ser chamado de 100% ou o total de objetos (ou pessoas) dado em uma situação-problema.

É importante, também, que esses conceitos básicos fiquem claros para o aluno pois, a partir disso, serão diretas algumas correspondências entre frações e números percentuais, como por exemplo que 50% corresponde à metade (do todo ou do total), 25% corresponde a um quarto, 10% corresponde a um décimo, e assim sucessivamente.

Sabemos que leituras de dados envolvendo porcentagem são cotidianas na nossa vida; assim, é importante que fique claro para o aluno, por exemplo, que ao ler uma informação em um jornal sobre uma pesquisa eleitoral que diz que 51% das intenções de voto em uma eleição é para um determinado candidato, ignorando-se a margem de erro, este é um valor que não pode ser considerado a metade do total, no entanto é um pouco maior que a metade.

Ou seja, segundo essa pesquisa fictícia, esse candidato possui não só a maioria das intenções de votos como essa quantidade é maior do que as quantidades das intenções dos votos de todos os demais candidatos somadas.

Segundo a educação matemática crítica, dessa forma estaremos formando um ser que sabe ler e interpretar uma informação e inferir conclusões sobre a relevância da mesma, como no exemplo da pesquisa hipotética acima.

3.1.3.3 Probabilidade

Em diversas situações, certos fenômenos, mesmo que sejam repetidos diversas vezes e sob as mesmas condições, podem não apresentar o mesmo resultado. Por exemplo, ao lançarmos uma moeda para o alto e verificarmos qual a face ficou virada para cima após a sua queda, se o resultado for cara, isso não garante que, nos demais lançamentos, também seja cara e nem que seja coroa.

Dessa forma, definimos esse tipo de ocorrência como um evento aleatório, que são justamente os fenômenos cujos resultados não podem ser garantidos ao serem repetidos mais de uma vez.

A probabilidade é o ramo da matemática que estuda estes fenômenos e, através de métodos de contagem, busca, em um determinado evento aleatório, o provável resultado de um experimento, ou ainda, tenta mostrar a chance do resultado do mesmo ocorrer.

Em probabilidade, definimos como *espaço amostral* o conjunto de todos os possíveis resultados de um fenômeno e *evento* como todos os casos favoráveis a uma situação. Pensando pela teoria de conjuntos, podemos dizer que evento é um subconjunto do espaço amostral, já que os casos favoráveis devem ser possíveis de serem realizados.

Dessa forma, podemos definir que a probabilidade de certo evento acontecer é igual a $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{n(E)}}{\mathrm{n(A)}}$, onde n(E) representa a quantidade de eventos favoráveis e n(A) representa a quantidade de resultados possíveis. Para definirmos essas quantidades, utilizamos conceitos de teoria da contagem.

Nosso foco, neste trabalho, não é desenvolver essas teorias de contagem. Vamos nos focar apenas na importância da utilização da fração como uma simbologia ao representar a probabilidade de ocorrer determinado evento.

A fração, como dissemos, é usada como uma notação e essa simbologia, por mais que também possa ser interpretada como uma divisão entre dois números, possui um significado mais importante, isto é, quando se diz que um evento aleatório tem, por exemplo, $\frac{1}{5}$ de probabilidade de ocorrer, significa que a cada cinco tentativas, é provável que uma será favorável, isto, no entanto, não sendo uma garantia de que este evento realmente ocorrerá.

3.2 **Operações com frações**

Antes de pensarmos em realizar operações com números fracionários, é importante introduzir o conceito de equivalência de frações, pois, com esta ideia, poderemos trabalhar com todas as operações básicas entre esses números de maneira lógica e construiremos, gradativamente, o conhecimento com os alunos. Neste capítulo, abordaremos esse tópico e a aplicação de cada uma das operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre frações.

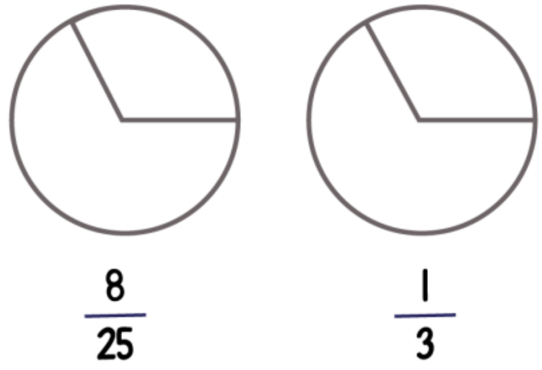
3.2.1 A ideia de equivalência e simplificação entre frações

Para introduzirmos este assunto, traremos um problema sugerido no livro FRAÇÕES no Ensino Fundamental – Volume I.

Situação 1: Considere as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$. Qual das frações é a maior?

Possivelmente, ao apresentar esse problema a um aluno de Ensino Fundamental, ele tentará representar essas duas frações de maneira gráfica para, posteriormente, dizer qual das frações é a maior. No livro, esse problema é apresentado através de uma charge com dois alunos, onde um deles apresenta a solução através de uma divisão de um círculo. Observe abaixo a figura correspondente:

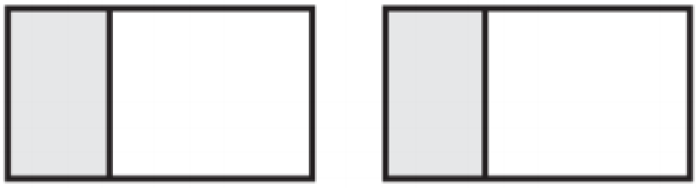
Figura 16 – Representação gráfica de frações através de círculos



Fonte: Adaptada de FRAÇÕES no Ensino Fundamental – Volume I

Através dessa representação gráfica, é muito difícil determinar visualmente qual das frações é a maior, pois suas representações aparentam ser iguais na figura. Na referida charge, o outro aluno ainda tenta representar graficamente utilizando retângulos dessa forma:

Figura 17 - Representação gráfica de frações através de retângulos



Fonte: Adaptada de FRAÇÕES no Ensino Fundamental – Volume I

É claro que, feito isso, os alunos não chegaram a nenhuma conclusão, assim como ocorreu com a divisão no círculo. Ou seja, através desse raciocínio, fica parecendo que ambas as frações são iguais, o que sabemos que não é verdadeiro.

Uma das maneiras de tentar resolver essa questão poderia ser interpretar ambas as frações como uma divisão do numerador pelo denominador, ou seja, representar ambas as frações através de números decimais.

Ao dividir 1 por 3 chegamos ao resultado de 0,333... e, ao dividir 8 por 25, chegamos ao resultado de 0,32. Dessa maneira, podemos concluir que a fração $\frac{1}{3}$ é maior, mas a diferença entre essas duas frações, de apenas 0,01333..., ao ser representada graficamente, não pode ser observada por ser muito pequena.

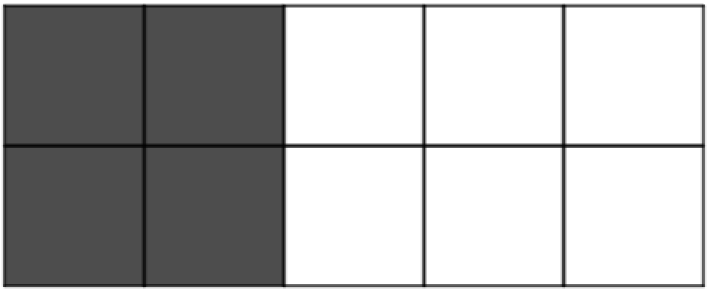
Vamos dizer que duas ou mais frações que representam a mesma parte de um todo, ou ainda, o mesmo número decimal, são chamadas de *frações equivalentes*.Consideremos a fração $\frac{2}{5}$, por exemplo. Vamos, inicialmente, representar essa fração de maneira gráfica:

Figura 18 – Representação gráfica de dois quintos

Fonte: O autor

Considere que dividimos cada uma das partes acima em duas partes iguais através de um traço horizontal ligando os pontos médios dos lados menores do maior retângulo. Observe, na figura abaixo, a representação gráfica dessa divisão:

Figura 19 – Representação gráfica de quatro décimos



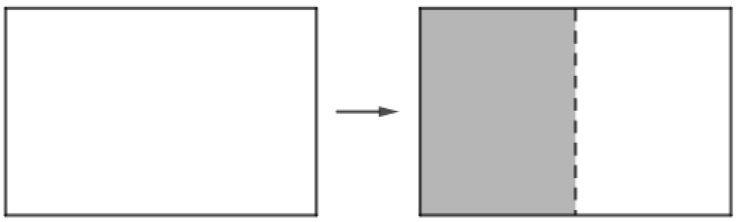
Fonte: O autor

Notemos que a parte pintada do todo não mudou, só que agora temos 4 partes pintadas de um todo contendo 10 partes, ou seja, podemos representar a parte pintada pela fração $\frac{4}{10}$. Como a parte do todo é a mesma, dizemos que as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$ são equivalentes. Outra maneira de se chegar nessa conclusão é dividindo 2 por 5 ou 4 por 10, chegando ao mesmo resultado de 0,4.

Uma atividade prática interessante para ser proposta em sala de aula é cada aluno pegar uma folha de papel A4 e pedir que a dobre ao meio pela mediatriz do maior lado da folha, por exemplo. Feito isso, pode-se pintar uma das metades que ficou formada a partir da marca da dobra.

Observe a figura:

Figura 20 – Representação de uma folha A4 sendo dividida em duas partes iguais

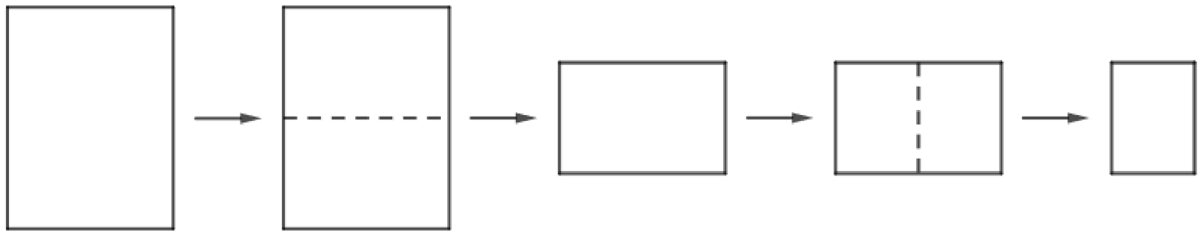


Fonte: O autor

A partir disso, repetimos esse processo algumas vezes dobrando a folha sempre pela metade através da mediatriz do maior lado que sobra a cada etapa.

Observe o esquema abaixo onde as linhas pontilhadas representam as dobras na folha:

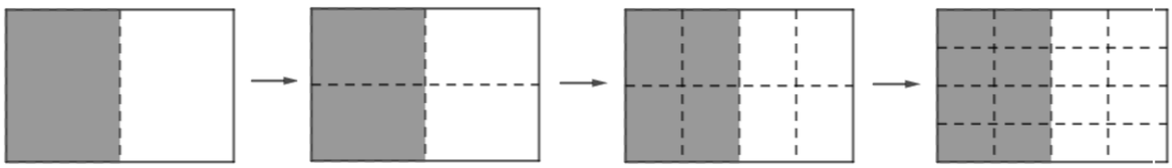
Figura 21 – Divisões sucessivas da folha A4 pela metade



Fonte: O autor

Observemos que, ao dobrar pela primeira vez, a fração representada pela parte pintada da folha corresponde a $\frac{1}{2}$, ao dobrar pela segunda vez, ela corresponde a $\frac{2}{4}$, ao dobrar pela terceira vez, corresponde a $\frac{4}{8}$ e, finalmente, ao dobrar pela quarta vez, corresponde a $\frac{8}{16}$. Vamos visualizar essas frações equivalentes na figura abaixo.

Figura 22 – Representações de frações equivalentes em uma folha A4



Fonte: O autor

Caso continuemos esse processo mais vezes, ao abrir a folha por completo, o número total de partes feitas com as marcas das dobras será igual a 2^{n}, onde n representa o número de vezes que a folha foi dobrada. Dentre essas dobras, a quantidade de partes pintadas será $2^{\mathrm{n}-1}$. Assim, a fração que representa a parte pintada da folha é $\frac{2^{\mathrm{n}-1}}{2^{\mathrm{n}}}$.

Podemos, com isso, concluir que todas essas frações envolvidas são equivalentes, já que representam a mesma parte da folha (todo), ou seja, vemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{2^{n-1}}{2^{n}}.$$

Vale observar que, para encontrarmos frações equivalentes, basta multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número. Essa ideia pode ser compreendida se interpretarmos a fração como uma divisão de numerador pelo denominador. Dessa forma, o numerador representa o dividendo e o denominador o divisor, e, quando multiplicamos ou dividimos dividendo e divisor pelo mesmo número, o resultado da divisão não é alterado. Logo, o mesmo ocorre com as frações.

Observe o exemplo para encontrarmos frações equivalentes à fração $\frac{1}{2}$. Basta multiplicarmos numerador e denominador pelo mesmo número, ou seja,

$$\frac{1}{2} = \frac{1.2}{2.2} = \frac{1.3}{2.3} = \frac{1.4}{2.4} = \cdots = \frac{1.\mathrm{n}}{2.\mathrm{n}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \cdots = \frac{\mathrm{n}}{2\mathrm{n}},$$

onde número n acima é um número natural arbitrário.

A partir do que foi discutido até aqui, podemos, finalmente, resolver a situação-problema proposta no início desa seção. Queremos, portanto, definir, qual das frações entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{25}$ é a maior utilizando a ideia de frações equivalentes, sem transformá-las em números decimais.

Iremos pensar que, para compararmos duas frações de mesmo denominador, precisamos, apenas, observar os numeradores, ou seja, a maior fração será aquela que apresenta o maior numerador. Isto é válido, pois as partes divididas de cada todo contêm a mesma área. Com isso, escreveremos ambas as frações envolvidas no problema a partir de um mesmo denominador.

Como já visto, para encontrarmos frações equivalentes temos que multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número. Assim, temos que multiplicar tanto o 3 quanto o 25 por algum número e encontrar um resultado em comum. O mais fácil seria pegar o menor desses números. Percebemos que esse é um problema de se encontrar o mínimo múltiplo em comum entre 3 e 25. Como MMC(3 ; 25) = 75, temos que a fração $\frac{1}{3}$ deve ser multiplicada por $\frac{25}{25}$, enquanto a fração $\frac{8}{25}$ deve ser multiplicada por $\frac{3}{3}$. Portanto,

$$\frac{1}{3} = \frac{1.25}{3.25} = \frac{25}{75} \quad \text{e} \quad \frac{8}{25} = \frac{8.3}{25.3} = \frac{24}{75}.$$

Podemos, então, concluir que a fração $\frac{1}{3}$ é a maior.

Vale ressaltar que podemos utilizar o conteúdo de equivalência de frações como uma oportunidade para revisar conteúdo vistos anteriormente em outras séries, como mínimo múltiplo comum e a fatoração de um inteiro positivo em números primos.

É claro que não devemos engessar o raciocínio do aluno dizendo que esta é a única maneira de chegar à resposta correta, pois o aluno poderia encontrar qualquer múltiplo comum dos denominadores das frações, não necessariamente o menor. Para isso, podemos, também, escrever os múltiplos dos números envolvidos e identificar, dessa forma, algum múltiplo em comum qualquer para resolver o problema.

Uma aplicação dessa ideia de equivalência é a simplificação de frações, que consiste em trabalhar com frações equivalentes, mas que possuam numeradores e denominadores sendo os menores possíveis. É comum preferirmos efetuar operações com números menores do que maiores. Dessa forma, a ideia de simplificação é bastante útil.

Para simplificarmos uma fração temos que pensar no raciocínio inverso do que foi feito até então. Se, para buscarmos frações equivalentes com numeradores e denominadores maiores, temos que multiplicar numerador e denominador por um mesmo número, para simplificarmos uma fração temos que dividir numerador e denominador por um mesmo número.

A representão gráfica dessa operação é análoga às figuras 10 e 11, só que agora, na ordem inversa apresentada. Inicialmente, temos a fração $\frac{4}{10}$ (figura 11) e, podemos perceber que, cada duas das partes pintadas podem ser aglutinadas e ainda teremos o inteiro dividido em partes iguais, obtendo, assim, a figura 10. Ou seja, na prática, temos, ao dividir numerador e denominador por 2, que

$$\frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5}.$$

Vamos, por exemplo, simplificar a fração $\frac{16}{20}$. De maneira prática, temos que pensar em um divisor comum a 16 e 20, obtendo, por exemplo, o número 2. Com isso teríamos que

$$\frac{16}{20} = \frac{16:2}{20:2} = \frac{8}{10}.$$

Observe que a fração $\frac{8}{10}$ ainda pode ser simplificada, dividindo-se o 8 e o 10 por 2. Dessa forma,

$$\frac{8}{10} = \frac{8:2}{10:2} = \frac{4}{5}.$$

A fração $\frac{4}{5}$, por fim, não pode mais ser simplificada. Quando isso ocorre dizemos que a fração é *irredutível*.

Em outras palavras, uma fração é irredutível quando numerador e denominador são primos entre si, ou seja, quando não existir divisores comuns entre eles além do número 1.

Após os conceitos de equivalência e simplificação de frações, podem ser estudadas as operações básicas entre os números fracionários, o que será a continuação deste capítulo.

3.2.2 Soma e subtração de frações

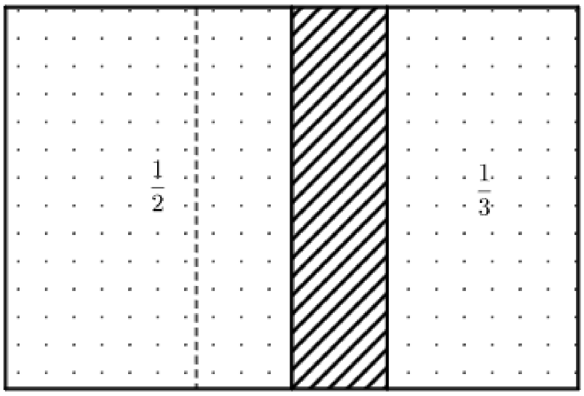
Observe a situação-problema a seguir pensada a partir das frações envolvidas na solução do problema proposto no conto “Os Trinta e Cinco Camelos”, de Malba Tahan:

Situação 2: Considere um pai que deseja repartir um terreno entre seus 3 filhos da seguinte maneira: o mais velho deve ficar com a metade do terreno, o filho do meio deve ficar com a terça parte do terreno e o mais novo com o restante. Qual a fração do terreno que caberá ao filho mais novo?

É fácil perceber que, para resolver esse problema, temos que, inicialmente, somar as frações correspondentes ao filho mais velho e ao filho do meio, e, posteriormente a isso, subtrair esse resultado da unidade. Ou seja, $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ é uma expressão numérica que resolve essa questão. Até o final desta seção, teremos por objetivo dar esse resultado tanto de forma geométrica quanto de forma algébrica.

Vamos, inicialmente, pensar de forma geométrica. Observe a imagem abaixo onde a dividimos, simultaneamente, na metade e em 3 partes iguais:

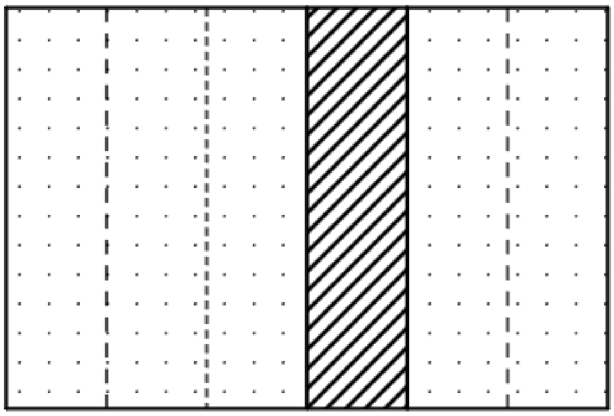
Figura 23 – Divisão na metade e terça parte



Fonte: O autor

Feita essa figura, vemos que a parte que cabe ao filho mais novo corresponde à área tracejada, enquanto as partes que cabem aos outros dois filhos correspondem à área pontilhada. Podemos observar que uma metade pode ser dividida em três partes iguais, ou seja, podemos dividir o todo em seis partes, e, dessa maneira, cabe ao filho mais velho três partes, ao filho do meio duas partes e ao filho mais novo, consequentemente, 6 – (3 + 2) = 1 parte. Observe a representação geométrica desse raciocínio:

Figura 24 – Divisão em seis partes iguais



Fonte: O autor

Dessa forma, podemos observar que a parte que cabe ao filho mais novo representa $\frac{1}{6}$ do total, enquanto a parte que cabe ao filho mais velho está à esquerda da área tracejada, sendo, portanto, a metade do total. Por fim, a parte que cabe ao filho do meio está à direita da área tracejada e corresponde à terça parte do total.

No momento que dividimos uma metade em três partes iguais, estamos trabalhando com frações equivalentes, ou seja, a fração $\frac{1}{2}$ é equivalente à fração $\frac{3}{6}$. De maneira análoga, a fração $\frac{1}{3}$ é equivalente à fração $\frac{2}{6}$. Além disso, pensando que dividimos o total em seis partes iguais, podemos ver que a unidade pode ser substituída por $\frac{6}{6}$.

A partir disso, podemos concluir que $1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$ é o mesmo que $\frac{6}{6}-\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)$, que tem como resultado $\frac{1}{6}$.

Já podemos chegar a uma conclusão importante: só podemos somar ou subtrair frações algebricamente caso os denominadores sejam iguais, e, além disso, fazemos as operações (soma e subtração) somente com os numeradores, ou seja, quando somamos ou subtraímos frações, na verdade, somamos ou subtraímos partes, sem alterar o total de partes que o todo foi dividido.

É importante citar que, nesse trabalho, optamos por iniciar o tópico com uma situação-problema onde as operações devem ser feitas com frações cujos denominadores são diferentes. No entanto, em uma sala de aula, acreditamos que convém fazer o inverso, isto é, começar a resolver problemas em que se utiliza soma e subtrações de frações cujos denominadores são iguais para que, dessa maneira, facilite a compreensão do aluno e o encadeamento lógico do conteúdo.

Para usar frações equivalentes com mesmo denominador comum, de um modo geral, ensina-se que deve ser calculado, necessariamente, o MMC (mínimo múltiplo comum) entre os denominadores. Essa prática, no entanto, pode contribuir para dificultar o ensino de frações. Pensamos que seja preferível que se desenvolva a ideia de frações equivalentes de modo que os denominadores das frações envolvidas sejam iguais, ou seja, devemos encontrar um múltiplo em comum dos denominadores das frações envolvidas, sem se preocupar se é o menor múltiplo em comum.

Obviamente que, caso o aluno encontre o menor múltiplo, isto facilitará as contas, já que ele estará efetuando cálculos com números menores. Porém, nosso objetivo é fazer com que o aluno não precise gravar procedimentos fechados.

Um exemplo do que estamos ressaltando aqui se deu, certa vez, em uma aula ministrada pelo autor deste trabalho sobre soma e subtração de frações de denominadores diferentes, quando um dos alunos perguntou se ele poderia, simplesmente, multiplicar os denominadores para obter o denominador comum sem se preocupar em calcular o MMC ou escrever os múltiplos dos números envolvidos. É claro que esse é um raciocínio válido e que não deve ser coibido, ainda mais porque foi um raciocínio intuitivo e originado a partir de um encadeamento lógico do conteúdo. Estamos defendendo, neste trabalho, uma pedagogia construtivista, onde o conhecimento prévio do aluno e suas ideias devem ser valorizadas.

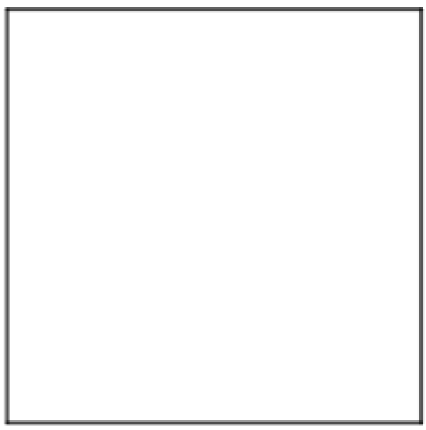
Acreditamos que este deva ser o comportamento do professor: citar todos os métodos e raciocínios válidos para uma situação-problema, deixando claro que não há um único método correto, ou seja, que há vários raciocínios que são válidos na resolução de um dado problema.

3.2.3 Multiplicação de frações

Tomemos uma multiplicação entre duas frações, por exemplo, $\frac{2}{5} \text{x} \frac{3}{4}$. Vamos interpretar essa multiplicação como o cálculo da área de um retângulo cujas dimensões são $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$. É importante ressaltar que, nesse caso, estamos interpretando essas duas frações como uma medida, ou seja, um número.

Considere o quadrado abaixo de área unitária, ou seja, os lados medem 1 unidade de comprimento.

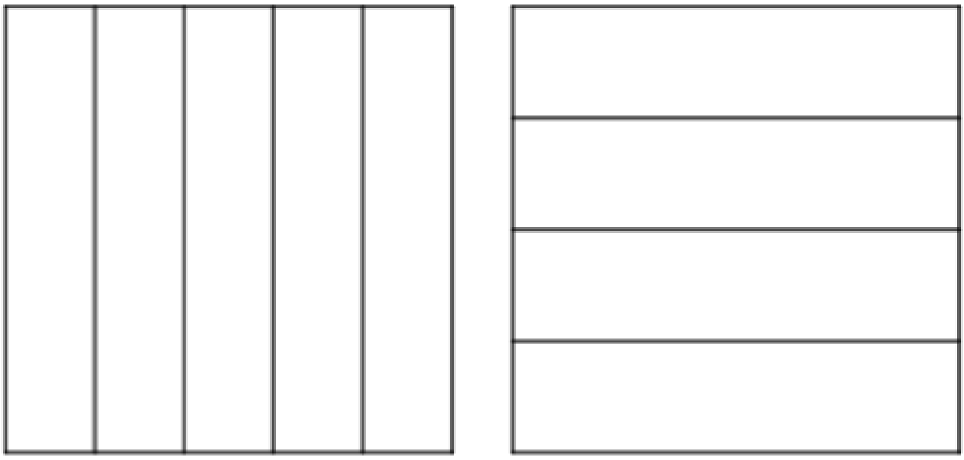
Figura 25 – Quadrado unitário



Fonte: O autor

Vamos repartir esse quadrado em cinco partes iguais com segmentos de reta verticais e em quatro partes iguais com segmentos de reta horizontais. Observe a figura representando essas divisões:

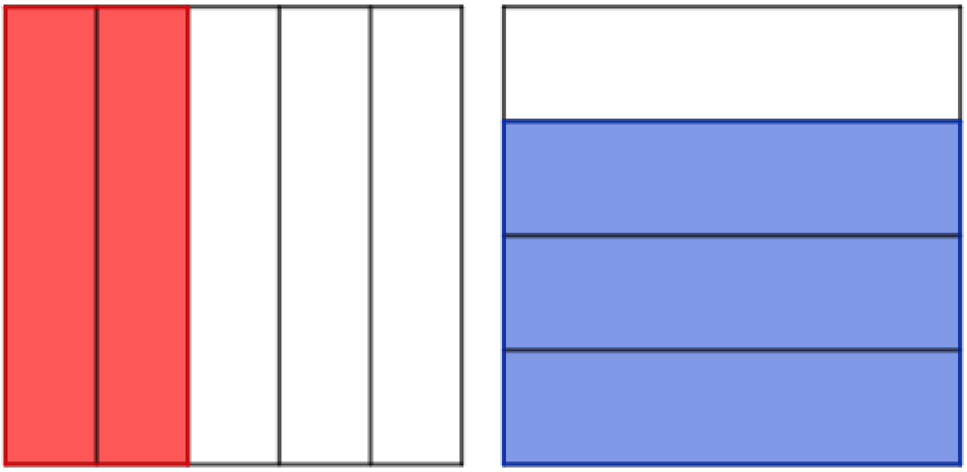
Figura 26 – Divisão do quadrado em quatro e em cinco partes iguais



Fonte: O autor

Representaremos, agora, as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$, citadas inicialmente, em cada uma das figuras acima, respectivamente.

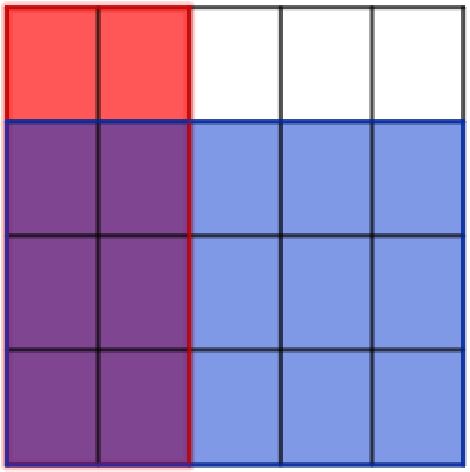
Figura 27 – Representação gráfica de dois quintos e três quartos



Fonte: O autor

Finalmente, vamos sobrepor as figuras, ou seja, construir o retângulo (na figura abaixo em roxo) cujas dimensões são $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$.

Figura 28 – Sobreposição dos quadrados



Fonte: O autor

Podemos observar que, feita a sobreposição, o quadrado unitário ficou dividido em 5 x 4 = 20 pedaços, enquanto o retângulo cujas dimensões são $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$ ficou com 2 x 3 = 6 desses 20 pedaços. Portanto, a área procurada, que é o resultado da multiplicação de $\frac{2}{3}$ por $\frac{3}{4}$, é $\frac{6}{20}$.

Esse raciocínio pode ser empregado para quaisquer multiplicações de frações, no entanto, isto serve apenas para introduzir o tópico, fazendo com que o aluno entenda não só o procedimento a ser executado como o porquê de executá-lo. Nessa etapa, vamos generalizar dizendo que, na prática, para multiplicarmos frações temos que multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador. Ou seja, a multiplicação proposta inicialmente pode ser feita da seguinte maneira:

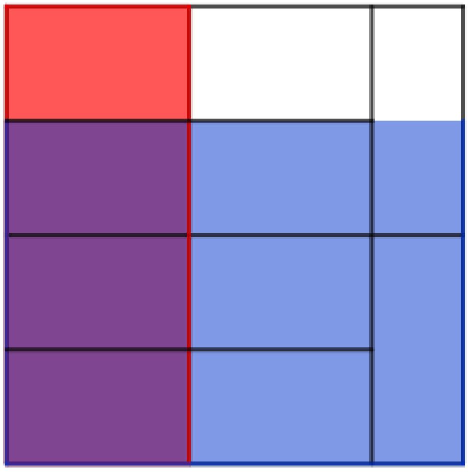
$$\frac{2}{5} \text{x} \frac{3}{4} = \frac{2 \text{ x } 3}{5 \text{ x } 4} = \frac{6}{20}.$$

Podemos ressaltar que esse resultado está correto, mas, de modo geral, os resultados fracionários são dados na forma irredutível, ou seja, podemos ainda dividir numerador e denominador da fração obtida nesta multiplicação por 2:

$$\frac{6}{20} = \frac{6 : 2}{20 : 2} = \frac{3}{10}.$$

Isso, também, pode ser verificado graficamente:

Figura 29 – Representação gráfica de três décimos



Fonte: O autor

Na figura acima, transformamos dois pedaços da etapa anterior em um único pedaço. Como cada um dos vinte pedaços possui a mesma área, os novos dez pedaços obtidos pela união, apesar de não serem todos congruentes, possuem a mesma área.

Podemos, inclusive, explorar o fato de que alguns desses novos retângulos na figura 21 possuem dimensões $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{4}$, enquanto outros possuem dimensões $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{4}$. Ao calcular a área desses dois tipos de retângulo, encontramos a mesma. De fato, a área do retângulo de dimensões $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{4}$ é dada por:

$$\frac{2}{5} \text{x} \frac{1}{4} = \frac{2 \text{ x } 1}{5 \text{ x } 4} = \frac{2}{20} = \frac{2 : 2}{20 : 2} = \frac{1}{10}.$$

Enquanto a área do retângulo de dimensões $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{4}$ é:

$$\frac{1}{5} \text{x} \frac{2}{4} = \frac{1 \text{ x } 2}{5 \text{ x } 4} = \frac{2}{20} = \frac{2 : 2}{20 : 2} = \frac{1}{10}.$$

Com isso, vemos que multiplicações diferentes podem ter o mesmo resultado, fato que também ocorre com os números inteiros.

3.2.4 Divisão de frações

É um consenso que este é o tópico de maior dificuldade de entendimento por parte dos alunos dentro do estudo de frações. Nesta etapa, é comum o professor ensinar o algoritmo da divisão de frações conhecido como "repete a primeira e multiplica pelo inverso da segunda", ou seja, sem fazer com que o aluno entenda o que está fazendo, havendo, portanto, uma mecanização do conteúdo.

Como nosso objetivo é tornar o processo de ensino-aprendizagem mais intuitivo, vamos partir para uma interpretação gráfica da divisão entre frações onde serão vistas todas as etapas do raciocínio e o encadeamento lógico empregados. Por fim, chegaremos à conclusão de que podemos utilizar a ideia de frações equivalentes para dividir duas frações, assim como esta foi utilizada na soma e na subtração entre duas frações de denominadores diferentes.

Antes de pensarmos em divisão entre duas frações, vamos ver a divisão entre fração e número natural e o inverso disso, a divisão entre um número natural e uma fração.

3.2.4.1 Divisão entre fração e número natural

Vamos considerar a situação-problema a seguir que foi elaborada pelo autor deste trabalho a partir de pesquisa nos livros didáticos utilizados como fonte bibliográfica no desenvolvimento do mesmo:

Situação 3: Uma doceira tem como especialidade fazer chocolates de diversos sabores. Diariamente, ela aloca $\frac{4}{5}$ de sua produção em 3 caixas para facilitar o transporte para a venda. Qual a fração da produção diária é colocada em cada caixa?

Uma possível dificuldade para a resolução desse problema se encontra na interpretação do texto envolvido. O aluno poderia pensar, por exemplo, em calcular quatro quintos de 3, o que não é o que é pedido no problema.

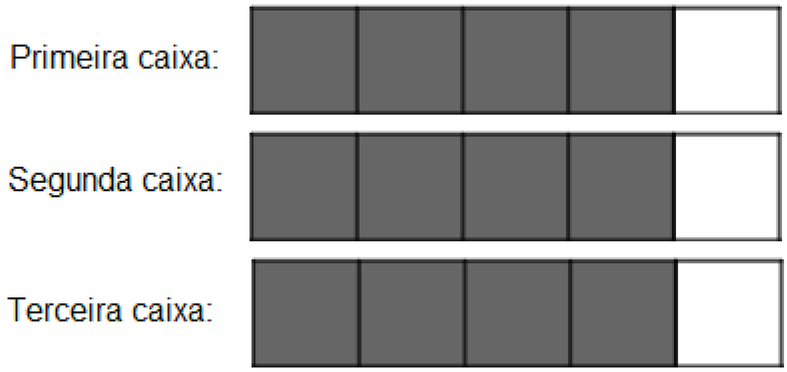
Na verdade, temos que observar que desejamos dividir $\frac{4}{5}$ da produção diária em 3 caixas. Vamos, inicialmente, representar de maneira gráfica através de um retângulo a produção total diária e a fração que ela deseja alocar nas caixas, ou seja, $\frac{4}{5}$ do total. Na figura abaixo, a parte pintada de cinza representa o que deverá ser alocado em caixas e a parte branca é o restante. Observe que não foi dito no problema o que seria feito com essa última parte.

Figura 30 – Representação gráfica de quatro quintos

Fonte: O autor

Desejamos dividir essa quantidade em 3 caixas, ou seja, vamos dividir a figura acima em três partes iguais através de cortes horizontais.

Figura 31 – Divisão gráfica de quatro quintos por três



Fonte: O autor

Podemos observar que, ao todo, temos 15 partes, sendo 12 correspondentes ao que devem ser alocados em caixas e 3 representando o restante. Dessas 15 partes, em cada uma das caixas ficarão 4 partes, ou seja, vemos que $\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{15}$.

Agora, vamos analisar essa operação de maneira algébrica, pensando em frações equivalentes a $\frac{4}{5}$ e a 3 com o mesmo denominador. Vale ressaltar que o número 3, pode ser escrito na forma fracionária $\frac{3}{1}$. Observe que, devemos encontrar um múltiplo em comum entre 5 e 1, podendo ser o próprio número 5. Ou seja, temos que transformar a fração $\frac{3}{1}$ em uma fração de denominador 5, bastando para isso multiplicar o numerador e o denominador desta fração por 5:

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{3.5}{1.5} = \frac{15}{5}.$$

Dessa forma, podemos concluir que:

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{4}{5} : \frac{3}{1} = \frac{4}{5} : \frac{15}{5}$$

Analogamente ao que foi feito na soma e subtração entre frações de mesmo denominador, a operação de divisão deve ser feita apenas com os numeradores, já que não importa o total dividido e sim as partes envolvidas nas operações. Com isso, temos que

$$\frac{4}{5} : \frac{15}{5} = \frac{4}{15}.$$

Conforme já foi comentado anteriormente, vale observar que esse raciocínio não envolve a utilização de algoritmos, mas sim apenas a ideia de frações equivalentes, facilitando, assim, o encadeamento lógico da construção do conteúdo.

3.2.4.2 Divisão entre número natural e fração

Vamos considerar a situação-problema a seguir:

Situação 4: Júlia comprou garrafas de refrigerantes de 3 litros para a festa de aniversário de seu filho e comprou copos descartáveis com a capacidade de 200 ml cada um. Quantos copos Júlia conseguirá encher com cada garrafa?

Vamos observar, inicialmente, que desejamos saber quantas vezes cabem 200 ml em 3 litros. Ou seja, queremos dividir 3 litros por 200 ml. É evidente que esse problema poderia ser facilmente resolvido através de uma conversão de unidade, ou seja, sabendo-se que 3 litros correspondem a 3000 ml, podemos dividir 3000 por 200 para resolvermos esse problema.

No entanto, nosso foco é trabalharmos com frações, que também é uma possibilidade válida. Para isso, podemos considerar que 200 ml correspondem a $\frac{1}{5}$ de litro, ou seja, queremos dividir 3 por $\frac{1}{5}$.

Vamos utilizar raciocínio análogo ao utilizado na seção anterior, ou seja, desejamos encontrar frações equivalentes às frações envolvidas de modo que os denominadores sejam iguais e, por fim, podermos dividir os numeradores envolvidos. Assim como no exemplo anterior, vamos transformar o número 3 na fração $\frac{15}{5}$ e, com isso:

$$3 : \frac{1}{5} = \frac{15}{5} : \frac{1}{5} = \frac{15}{1} = 15.$$

Podemos concluir, portanto, que Júlia conseguirá encher 15 copos com cada garrafa de 3 litros de refrigerante.

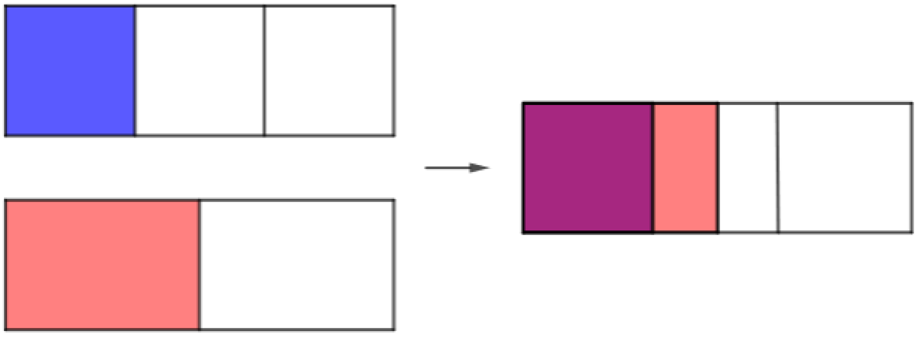
3.2.4.3 Divisão entre duas frações

Para resolvermos a divisão entre duas frações, vamos pensar na ideia de “quantos cabem” da mesma forma que é pensado na divisão de dois números inteiros. Por exemplo, ao perguntar quantas vezes o número 5 cabe no número 10, é imediato a resposta 2, pois 10 dividido por 5 resulta em 2. Considere o problema abaixo.

Situação 5: Quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em $\frac{1}{2}$?

Inicialmente, vamos representar graficamente ambas as frações lado a lado e, depois, sobrepor a representação gráfica da fração $\frac{1}{3}$ na representação gráfica da fração $\frac{1}{2}$.

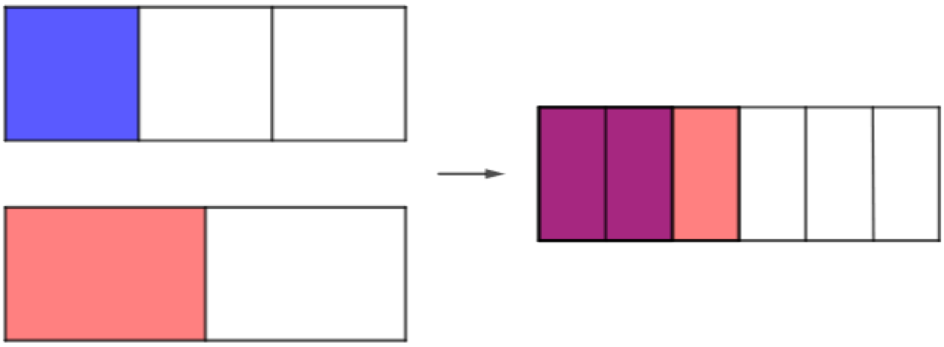
Figura 32 – Representação gráfica de um terço e um meio com sobreposição



Fonte: O autor

Assim como fizemos no tópico de soma e subtração entre frações, vamos dividir a representação onde as frações estão sobrepostas em partes iguais, tendo, assim, seis partes iguais.

Figura 33 – Divisão em partes iguais da sobreposição entre um meio e um terço



Fonte: O autor

Podemos observar que a parte em roxo, cabe uma vez por inteiro mais metade na representação correspondente à $\frac{1}{2}$. Ou seja, temos que: $\frac{1}{2}:\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Esse raciocínio é útil para que o aluno entenda o conceito de divisão. No entanto, temos que formalizar o conteúdo também de maneira algébrica. Para isso, utilizaremos a ideia de frações equivalentes de mesmo denominador, como feito em todo este trabalho até então.

Buscaremos frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ com mesmo denominador. Vimos, anteriormente, que temos que multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número e buscar algum múltiplo em comum dos denominadores. Assim, temos que:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{(1 \text{ x } 3)}{(2 \text{ x } 3)} : \frac{(1 \text{ x } 2)}{(3 \text{ x } 2)} = \frac{3}{6} : \frac{2}{6}.$$

Agora que conseguimos escrever ambas as frações com denominadores iguais, podemos dar o resultado da divisão assim: o numerador da fração que representa o dividendo será o numerador do resultado e o numerador da fração que representa o divisor será o denominador do resultado da divisão, ou seja, $\frac{3}{6} : \frac{2}{6} = \frac{3}{2}$.

Vale ressaltar que, nesse caso, a fração obtida já está na forma irredutível. No entanto, quando possível, podemos simplificar o resultado. Por exemplo, na divisão entre $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$, temos:

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4 \text{ x } 3}{5 \text{ x } 3} : \frac{2 \text{ x } 5}{3 \text{ x } 5} = \frac{12}{15} : \frac{10}{15} = \frac{12}{10}.$$

Ao simplificar, dividindo numerador e denominador por 2, encontramos:

$$\frac{12 \ : \ 2}{10 \ : \ 2} = \frac{6}{5}$$

Observemos que a divisão entre uma fração e um número natural e a divisão entre um número natural e uma fração podem ser compreendidas como a divisão entre duas frações, bastando, para isso, considerarmos que o número natural envolvido é uma fração com numerador sendo este mesmo número e com denominador 1.

Vale observar, também, que o ensino do algoritmo “repete a primeira e inverte a segunda” não está errado, no entanto acreditamos que o procedimento utilizado nesse trabalho possui uma riqueza lógica de grande valia e é intuitiva a partir do momento que utiliza raciocínio análogo ao procedimento de soma e subtração entre duas frações e, com isso, ajuda o aluno em todas essas operações. Além disso, também reforça a importância da equivalência de frações, pois é a única ferramenta utilizada para desenvolver esse procedimento.

4 ATIVIDADES PROPOSTAS

Como já discutido nesse trabalho, ao contextualizar um determinado conteúdo, baseando-se na realidade socioeconômica do aluno, vemos que o interesse por parte deste é despertado com uma maior facilidade. Seguindo esse raciocínio, é necessário desenvolver práticas que promovam uma interatividade entre o lúdico e o conteúdo formal e, através delas, incentivar uma maior participação dos alunos em sala de aula.

Aumentando essa participação, acreditamos que desenvolvemos não só o conteúdo matemático como também um senso crítico no aluno, já que estimulamos o mesmo a participar da construção do conteúdo, além de refletir e questionar sobre outras formas de alcançar um mesmo resultado em determinada atividade.

Desenvolver essas atividades, segundo Moraes (MORAES, 1997 apud MARTINS & GONÇALVES, 2009), é "propor situações-problema, desafios, desencadear reflexões, estabelecer conexões entre o conhecimento adquirido e os novos conceitos, entre o ocorrido e o pretendido".

Essa ideia é fundamentada também no conceito de educação matemática crítica já descrito brevemente neste trabalho, já que se preocupa com a construção do conteúdo matemático e não somente com uma algoritmização de processos e fórmulas.

Finalmente, este capítulo tem por objetivo descrever as atividades lúdicas propostas, os resultados esperados e os resultados obtidos nas atividades que foram aplicadas em sala de aula. Vale observar que os resultados obtidos em qualquer atividade que se aplica em uma sala de aula dependem de inúmeros fatores externos e internos, como, por exemplo, o nível de motivação e interesse dos alunos, comprometimento dos alunos e até condições físicas da sala como temperatura e conservação dos materiais.

Conforme já foi citado na introdução deste trabalho, todas as atividades que serão descritas nesse capítulo foram aplicadas na escola C, em turmas de sétimo ano do ensino fundamental. Abaixo, descreveremos brevemente cada uma das turmas.

A turma 1701 tinha como perfil ser composta por uma grande maioria de alunos com um grande grau de comprometimento, sem defasagem de conteúdo, além destes alunos, de uma maneira geral, gostarem e se destacarem positivamente em matemática. Eles eram competitivos entre si, o que, de certa forma, ajudava no desenvolvimento de trabalhos em grupo, pois tentavam acabar mais rápido e com a melhor qualidade possível as atividades propostas.

A turma 1702, por sua vez, possuía um grupo de alunos que apresentava bastante dificuldade e com alguma defasagem de conteúdo que, ao longo do ano de 2018, foi sendo recuperada. Grande parte da dificuldade desses alunos era na interpretação de problemas e em efetuar contas. Poucos alunos se destacavam em matemática, no entanto era uma turma com um bom grau de comprometimento e acolhia as atividades propostas, pois os alunos se empenhavam em executá-las mesmo com as dificuldades encontradas. Os alunos não eram muito detalhistas e, com isso, o acabamento dos materiais, muitas vezes, não eram dos melhores. No entanto, os resultados obtidos foram positivos.

A turma 1704 tinha como perfil ser composta por dois grupos, um com alunos com bastante defasagem no conteúdo, mais até que os alunos da turma 1702, e outro que apresentava os conteúdos esperados para alunos de sétimo ano. A turma era bastante agitada e indisciplinada. Com isso, as atividades demoraram mais para serem executadas e muitas vezes não apresentaram os resultados esperados.

A turma 1705 pode ser dividida em dois grupos: o primeiro possuía grande facilidade em matemática e apresentava nenhuma defasagem de conteúdo, enquanto o segundo era exatamente o oposto disso. Esta era uma turma com um bom grau de comprometimento e que acolhia bem as atividades propostas apesar das dificuldades encontradas. Mesmo com uma parte da turma possuindo extrema dificuldade em matemática, os alunos se ajudavam e as atividades, na maioria das vezes, saíram como planejado. Os alunos eram dedicados e caprichosos com detalhes, tendo a maioria dos seus trabalhos um bom acabamento.

4.1 **Frações equivalentes e soma de frações**

A atividade proposta abaixo foi desenvolvida pelo autor. Alguns de seus detalhes foram tomados com base em um curso de formação de professores desenvolvido pela Escola de Formação de Professores Paulo Freire, da Secretaria

Municipal de Educação do Rio de Janeiro, ao longo do ano de 2018. As atividades desse curso se basearam na discussão de atividades para tornar a sala de aula mais interativa e interessante para o aluno.

Nossa atividade tem como objetivos: identificar fração como representação gráfica através da divisão de um todo em partes iguais, identificar frações equivalentes através de uma representação gráfica, calcular soma de frações de mesmo denominador, e identificar que, para somar frações de denominadores diferentes, precisamos trabalhar com múltiplos comuns dos mesmos e, por conseguinte, com frações equivalentes.

Os recursos e materiais necessários para a realização da atividade são: cartolina, folha em branco tamanho A4, tesoura, cola, régua, canetinha hidrocor, lápis de cor e uma folha com figuras geométricas como retângulo, círculo, estrela regular de oito pontas e octógono regular.

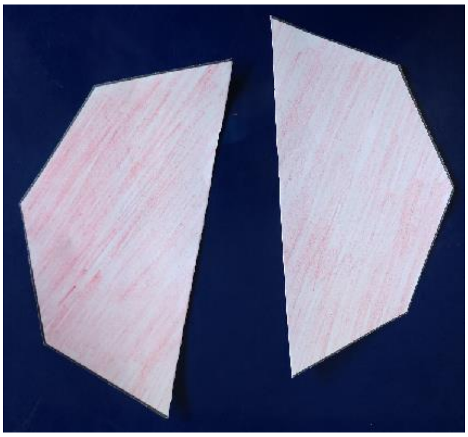
Uma estrela regular de oito pontas pode ser descrita como um polígono não-convexo, com dezesseis vértices e todas as arestas e todos os ângulos internos nos vértices das pontas sendo congruentes entre si.

A seguir, descreveremos cada etapa da atividade com suas imagens relacionadas para um melhor entendimento.

Etapa 1: Separar a turma em grupos de quatro alunos. Para uma maior organização do espaço de sala de aula, cada grupo deverá promover e escolher um líder. Esse líder será responsável por coordenar as atividades do grupo, controlar o tempo e pleitear os materiais necessários com o professor. No caso de turmas em que o número de alunos não seja múltiplo de 4, podem ser formados alguns grupos de 5 alunos.

Etapa 2: Entregar para cada grupo uma folha com uma figura geométrica diferente e pedir que os alunos dividam a figura em duas partes iguais. Os alunos podem usar a criatividade: por exemplo, caso a figura seja um quadrado, eles podem dividir pela diagonal ou pela mediatriz de um dos lados. Para facilitar a visualização, foi solicitado que os alunos pintassem as partes usando um mesmo lápis de cor. Abaixo vemos uma foto de uma dessas figuras dividida e pintada pelos alunos.

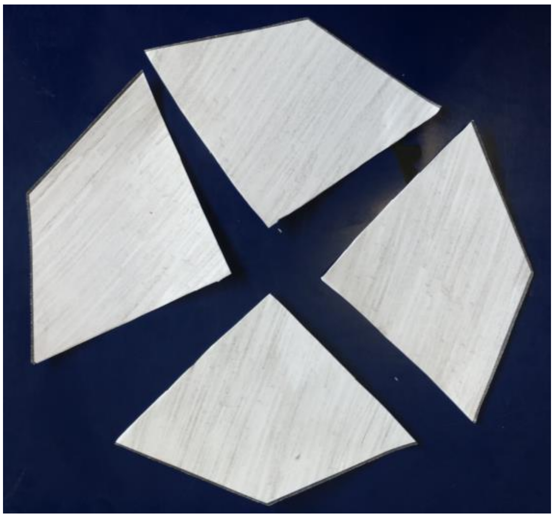
Figura 34 – Octógono dividido em duas partes iguais



Fonte: O autor

Etapa 3: Entregar para cada grupo a mesma figura da etapa anterior, sendo que, dessa vez, será pedido que os alunos repitam a etapa anterior e dividam cada uma das partes em outras duas iguais, ficando, desta forma, com a figura original dividida em quatro partes iguais. Do mesmo modo, foi solicitado que pintassem as partes usando um mesmo lápis de cor.

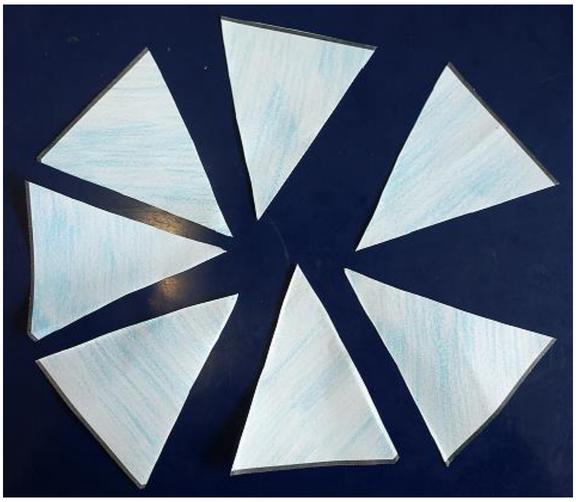
Figura 35 – Octógono dividido em quatro partes iguais



Fonte: O autor

Etapas 4 e 5: Repetir o que foi feito nas etapas anteriores dividindo, assim, a figura geométrica original em 8 e 16 partes, respectivamente.

Figura 36 – Octógono dividido em oito partes iguais



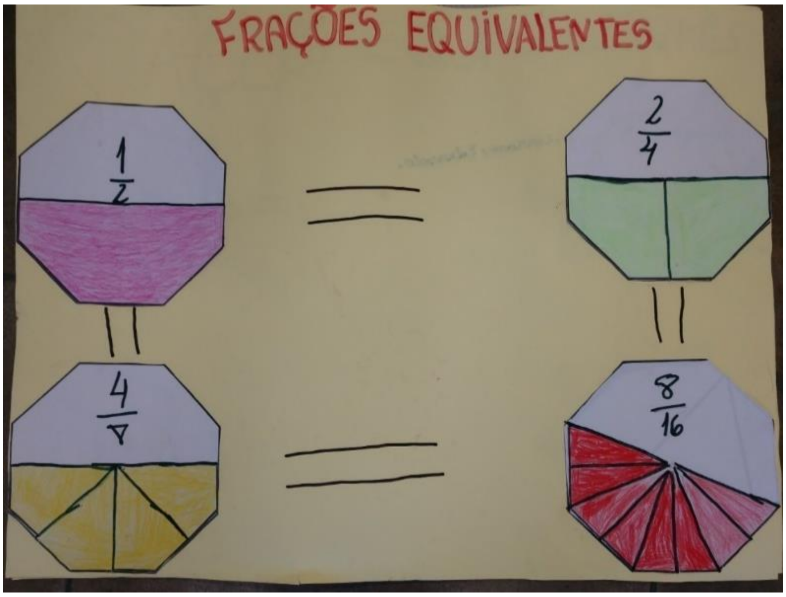
Fonte: O autor

Figura 37 – Octógono dividido em dezesseis partes iguais

Fonte: O autor

Etapa 6: Entregar para cada grupo quatro folhas com a mesma figura da etapa 2 e pedir que os alunos representem as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{8}{16}$, uma em cada folha. Discutir o que foi feito com os alunos e fazer com que identifiquem as frações equivalentes. Formalizar o conteúdo, apresentando também o mesmo da maneira tradicional. Os alunos podem finalizar essa etapa em uma cartolina explicando o raciocínio empregado.

Figura 38 – Cartaz feito pelos alunos na atividade de frações equivalentes



Fonte: O autor

Etapa 7: Entregar quatro folhas para cada grupo com a mesma figura da etapa 2 e pedir para que os alunos representem as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{1}{8}$ em duas dessas folhas. Nas duas outras folhas, pedir que os alunos representem a soma e a subtração das duas frações, cada uma em uma folha. Discutir com os alunos sobre o porquê de, na soma e subtração de frações, fazer a operação pedida somente com o numerador e manter o denominador na fração final. Pode-se aplicar uma lista de exercícios com outros exemplos para que facilite a fixação do conteúdo.

Etapa 8: Entregar quatro folhas para cada grupo com a mesma figura da etapa 2, e pedir que os alunos representem as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ em duas dessas folhas. Nas duas outras folhas, pedir que os alunos representem a soma e a subtração dessas duas frações, uma em cada folha. Discutir com os alunos sobre como se chega algebricamente nos resultados pedidos. Induzir os alunos a chegarem na ideia de que o denominador do resultado deve ser um múltiplo em comum dos denominadores envolvidos na soma ou na subtração. Os alunos podem finalizar essa etapa em uma cartolina explicando o raciocínio empregado.

Figura 39 – Cartaz feito pelos alunos na atividade de soma/subtração de frações

Fonte: O autor

Acreditamos que essa atividade, ao ser desenvolvida da maneira proposta, apresenta alguns pontos positivos como desenvolver uma autonomia nos alunos ao criar o líder do grupo e promover uma interação entre os mesmos. A atividade pode ser desenvolvida no ritmo dos alunos, ou seja, cada grupo estando em uma etapa distinta da atividade. Apesar das etapas serem simples, a figura do líder pode ser usada para, cada vez que o grupo termina uma etapa, o mesmo procure o professor para explicar para os demais do grupo a próxima etapa a ser realizada, promovendo, assim, um raciocínio lógico por parte dos alunos ao desenvolver os conceitos trabalhados.

Em relação aos pontos negativos desta atividade, podemos citar que, dependendo do perfil da turma, pode ser que a atividade não se desenvolva da maneira planejada por conta da indisciplina e falta de interesse dos alunos, já que é necessário a participação dos mesmos.

Essa atividade foi aplicada em três das turmas descritas no início desse capítulo. Na turma 1702, o trabalho não pôde ser concluído por conta da indisciplina de alguns alunos que atrapalharam todo o procedimento. Já nas turmas 1704 e 1705, os trabalhos foram concluídos, sendo que, na turma 1705, houve um maior comprometimento e interesse.

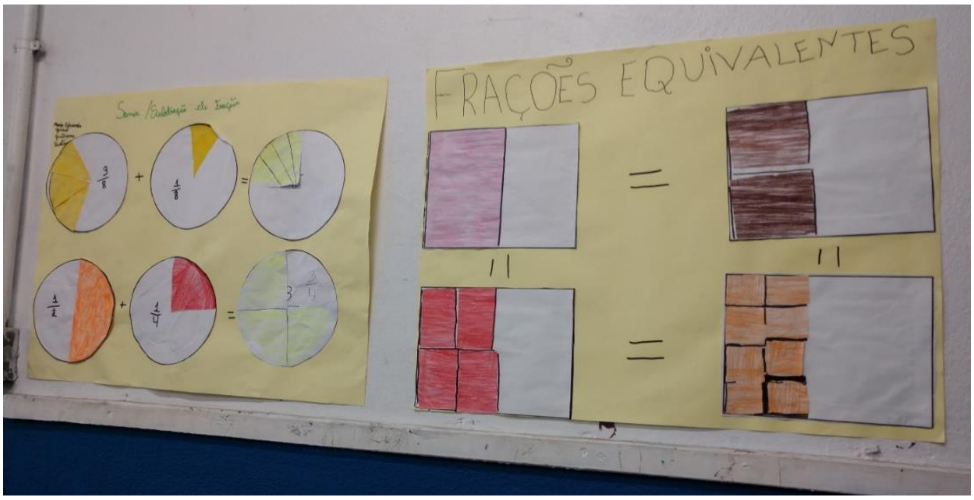
Na primeira etapa da atividade, foi interessante observar as diferentes estratégias para dividir uma mesma figura em duas partes iguais, principalmente entre os grupos que ficaram com o retângulo. Alguns grupos iniciaram a divisão pela mediatriz do lado maior, outros na mediatriz do lado menor e ainda houve um grupo que o dividiu pela diagonal. O grupo que inicialmente dividiu o retângulo pela diagonal, quando chegou na terceira etapa, em que se tinha que dividir em 8 partes iguais, teve dificuldade e preferiu reiniciar o trabalho, trocando a estratégia e dividindo o retângulo pela mediatriz do lado maior, mesmo sendo orientado pelo professor a continuar com o processo.

Por conta do tempo de planejamento da atividade, a maioria dos grupos terminou o trabalho fora do horário escolar, mas com a orientação do professor-autor. Além disso, no final da atividade, os cartazes que foram concluídos foram expostos no corredor da escola e na sala de aula dos alunos.

Figura 40 – Cartazes feitos pelos alunos e expostos no corredor da escola

Fonte: O autor

Figura 41 – Cartazes feitos pelos alunos expostos na sala de aula



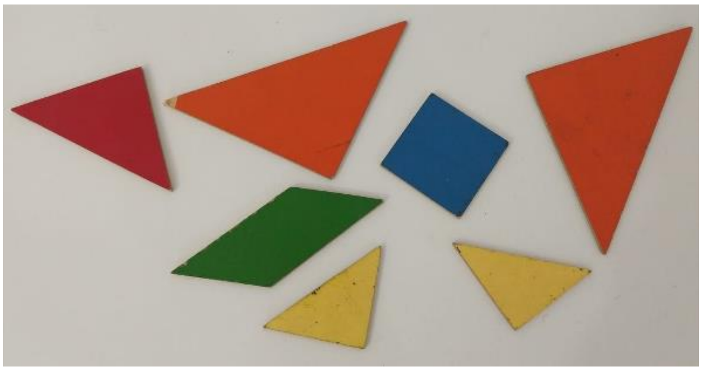
Fonte: O autor

4.2 **Tangram**

O Tangram é um quebra-cabeça chinês composto por sete peças. Existem muitas lendas por trás desse jogo. A mais interessante é a de um súdito que deixou cair o espelho de formato quadrangular, que pertencia ao seu rei, no chão e o mesmo se partiu em 7 pedaços. A fim de retornar com o espelho no formato original o súdito formou diversas figuras até conseguir formar novamente um quadrado.

As sete peças que compõem o Tangram são dois triângulos maiores, um triângulo médio, dois triângulos menores, um paralelogramo e um quadrado. Observe a figura abaixo que representa as sete peças do Tangram.

Figura 42 - Peças do Tangram



Fonte: O autor

O Tangram pode auxiliar não só no ensino de frações como no de diversas outras áreas da geometria, tais como, no estudo dos polígonos, perímetro e área, por exemplo. Além de desenvolver o raciocínio lógico com a busca por uma solução através da criação de estratégias de resolução.

Esta atividade foi desenvolvida pelo autor deste trabalho e tem como objetivos identificar fração a partir de uma unidade definida e relacionar a soma das partes resultando em um inteiro.

Os materiais e recursos necessários são as peças do Tangram, que podem ser confeccionados em EVA (espuma vinílica acetinada), plástico, madeira ou até impressas em uma folha de papel e plastificadas. Deve-se observar a quantidade necessária para atender todos os grupos de alunos com um mesmo conjunto de peças.

A seguir, descrevemos cada etapa da atividade com imagens relacionadas.

Etapa 1: distribuir as sete peças e pedir que o aluno se coloque no lugar do súdito que quebrou o espelho, ou seja, deverá formar um quadrado utilizando todas as peças do jogo. Caso o participante tenha dificuldade para formar o quadrado podem ser dadas dicas ao longo do processo.

Esta etapa tem como objetivo ambientar o aluno no jogo, fazendo com que entenda o mecanismo, desenvolvendo a habilidade de desenvolver uma situação-problema através de uma estratégia de tentativa e erro.

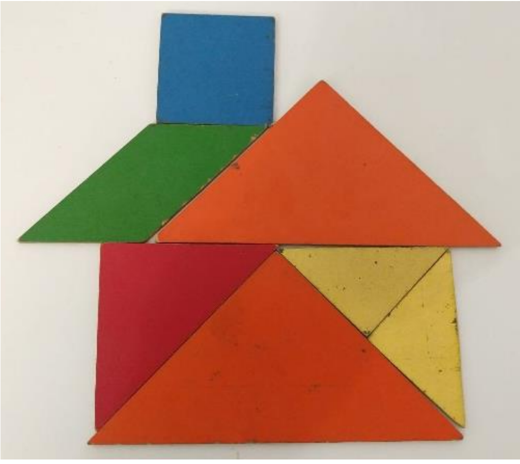
Figura 43 - Quadrado com Tangram

Fonte: O autor

Etapa 2: distribuir alguns moldes de figuras prontas como casas, pássaros, entre outros, e pedir para que o aluno tente formar estas figuras com as sete peças do Tangram.

Esta etapa tem como objetivo aprofundar as ideias propostas na etapa 1. Dessa forma, o aluno consegue visualizar outras formas montadas com as mesmas peças. Pode-se nesta etapa, apesar deste trabalho ser sobre frações, relacionar áreas, citando que todas as figuras formadas e o quadrado possuem a mesma área, já que foram construídas com as mesmas peças.

Figura 44 - Casa com as peças do Tangram

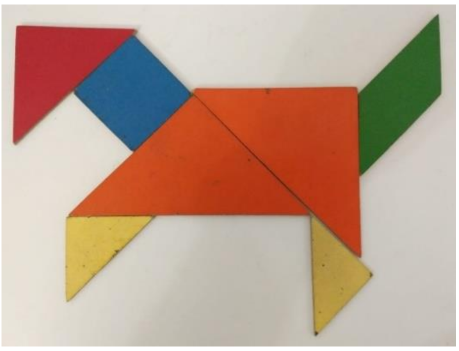


Fonte: O autor

Figura 45 - Gato com as peças do Tangram

Fonte: O autor

Figura 46 - Cavalo com as peças do Tangram



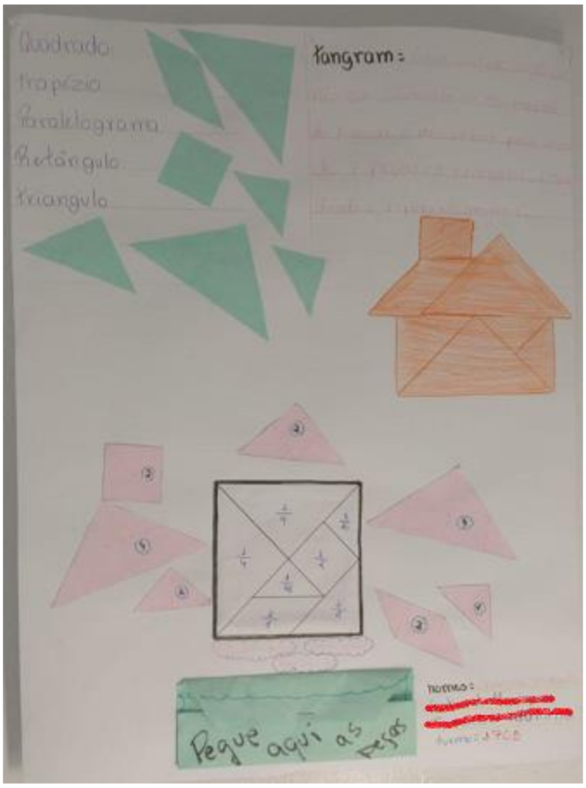
Fonte: O autor

Etapa 3: Vamos considerar que o quadrado formado representa uma unidade. Nosso próximo objetivo é determinar que fração da área total representa cada uma das peças do Tangram.

Esta etapa tem como objetivo os alunos desenvolverem a habilidade de reconhecer qual o número de peças de cada tipo no jogo do Tangram seria necessário para completar o quadrado e, a partir disso, identificar cada uma das frações correspondentes.

Nessa etapa, um grupo desenvolveu o cartaz a seguir:

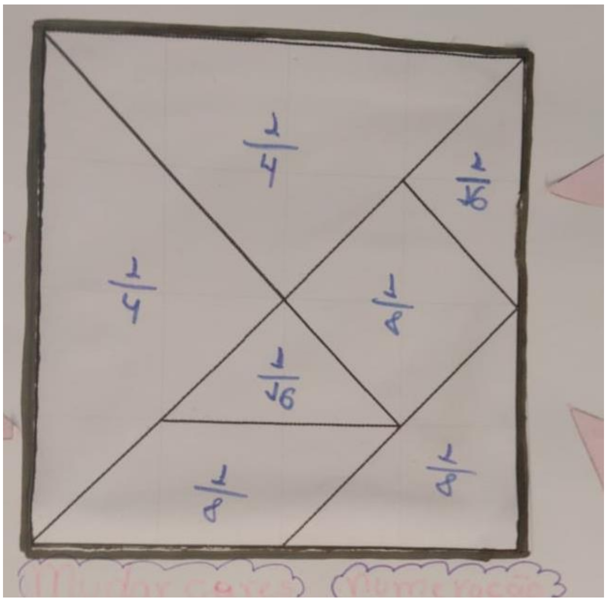
Figura 47 - Cartaz sobre o Tangram



Fonte: O autor

O quadrado com bordas pretas na figura acima está destacado abaixo.

Figura 48 - Frações correspondentes às peças do Tangram



Fonte: O autor

Etapa 4: Mostrar, através de frações equivalentes, que a soma das frações relacionadas a cada uma das peças resulta em 1, ou seja, juntas as peças formam uma unidade.

Nesta etapa, dever-se-á desenvolver a habilidade de soma de frações de denominadores diferentes através de frações equivalentes e, assim, verificar que

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{16}{16}=1,$$

ou seja, a soma das frações correspondentes às peças do Tangram resulta em uma unidade.

Acreditamos que essa atividade apresenta alguns pontos positivos, tais como: a facilidade na visualização das frações através das peças do Tangram, por ser um material concreto, a possibilidade de aplicações em outras áreas da matemática, como a geometria estudando áreas de polígonos, e a facilidade na construção do material das peças que podem ser feitas de EVA (espuma vinílica acetinada), madeira ou ainda impressas em uma folha branca.

Como ponto negativo acreditamos que, dependendo do perfil da turma, caso seja indisciplinada, pode haver complicações por ser um trabalho em grupo.

Esta atividade foi aplicada pelo autor deste trabalho nas turmas 1701 e 1705, já descritas anteriormente. No entanto, não pôde ser concluído por conta do planejamento apertado dos conteúdos do bimestre.

Por esse mesmo motivo, o trabalho não pôde ser aplicado nas demais turmas, já que estavam com conteúdos atrasados e não haveria tempo hábil para aplicar a atividade e terminar o conteúdo programático do bimestre. Além disso, a atividade teve que ser aplicada em partes, ou seja, cada etapa foi desenvolvida em um dia diferente.

De um modo geral, na primeira etapa, todos os alunos conseguiram construir o quadrado proposto e já tentavam construir outras figuras, antecipando, dessa forma, a segunda etapa. Foi interessante, nesta etapa, induzir o raciocínio no aluno de que todas as figuras construídas teriam a mesma área, já que foram construídas com as mesmas sete peças. Alguns alunos tiveram dificuldade em observar esse fato.

Nas terceira e quarta etapas, também foi interessante observar a curiosidade dos alunos para provar algebricamente o fato geométrico de que a soma das partes é igual a uma unidade.

De um modo geral, os resultados na turma 1701 foram positivos, já que o trabalho pôde ser concluído e houve uma boa participação por parte dos alunos. Já na turma 1705, o trabalho foi desenvolvido até a terceira etapa e houve a confecção voluntária do cartaz da figura 47.

4.3 **Construir a unidade a partir da fração**

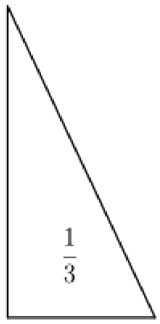
É comum nos depararmos com diversas atividades onde os alunos devem encontrar a fração desejada a partir de uma unidade definida, como por exemplo quando se desenha um retângulo e pede-se para que o aluno represente uma fração nesta figura. Esta atividade que descrevemos tem como objetivo a construção usando o pensamento inverso, ou seja, construir a unidade a partir de uma parte sua, de uma fração. Ela foi proposta por uma professora presente no curso de formação de professores desenvolvido pela Escola de Formação de Professores

Paulo Freire, da Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro, já descrito na atividade 4.1.

Etapa 1: Entregar aos alunos uma folha com diversas figuras geométricas, tais como triângulos, quadrados, trapézios, entre outras.

Define-se uma fração com numerador 1 e com qualquer denominador correspondendo a cada figura. Por exemplo, a figura abaixo deve corresponder a $\frac{1}{3}$ de uma unidade.

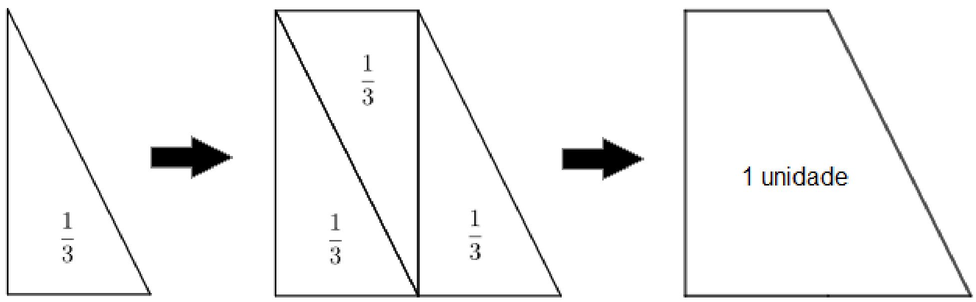
Figura 49 – Triângulo representando um terço



Fonte: O autor

Etapa 2: Deve-se solicitar ao aluno criar uma figura que corresponda a uma unidade a partir da fração e sua respectiva figura. Veja, abaixo, uma possível solução com o encadeamento lógico de ideias.

Figura 50 – Justaposição de triângulos formando a unidade



Fonte: O autor

É importante discutir que não existe uma única resposta correta, já que a construção da unidade pode ser dada de diversas maneiras.

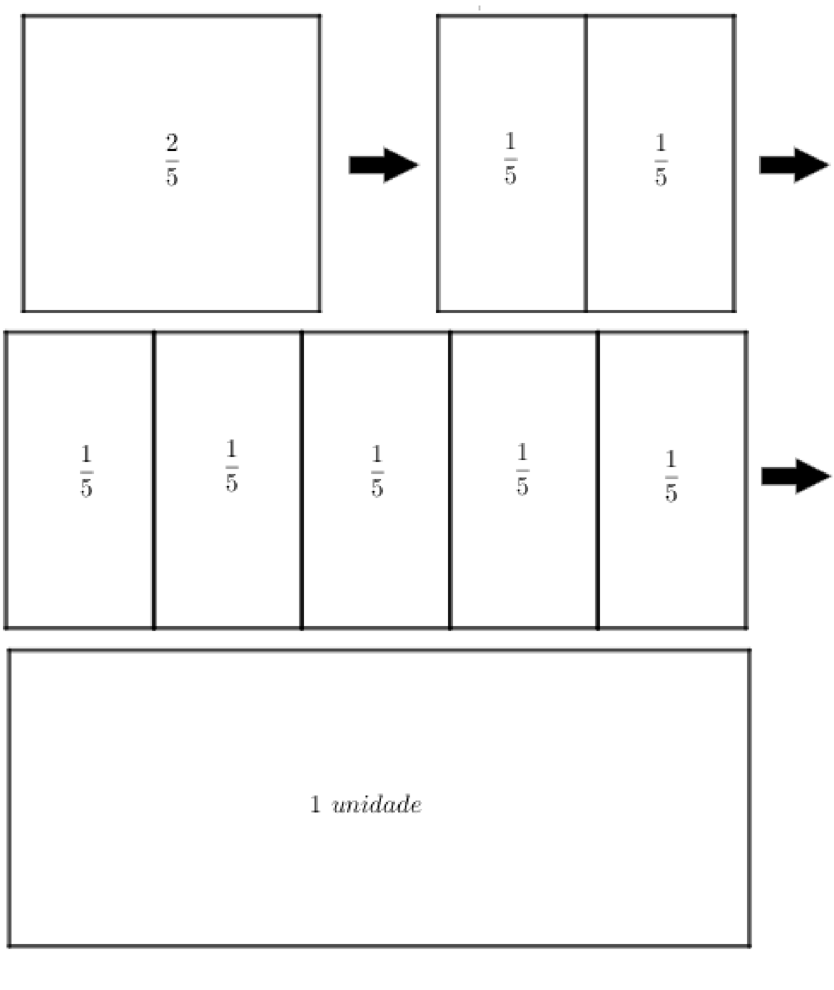
O objetivo desta etapa é que o aluno compreenda que, como o numerador da fração é 1, basta que coloque uma quantidade de figuras congruentes à figura dada sendo igual ao denominador da fração determinada.

Etapa 3: A partir disso, podendo continuar com a mesma figura ou não daremos uma fração cujo numerador é diferente de 1. Por exemplo, vamos supor que um quadrado deva corresponder a dois quintos de uma unidade e o aluno deve construir a unidade a partir disso.

Desta vez, antes de construir a unidade o aluno deve pensar na divisão em cinco partes iguais, já que estamos dividindo em quintos. Feito isso, poderá seguir raciocínio análogo à etapa anterior.

Veja o esquema a seguir que descreve o raciocínio empregado:

Figura 51 – Unidade a partir de dois quintos

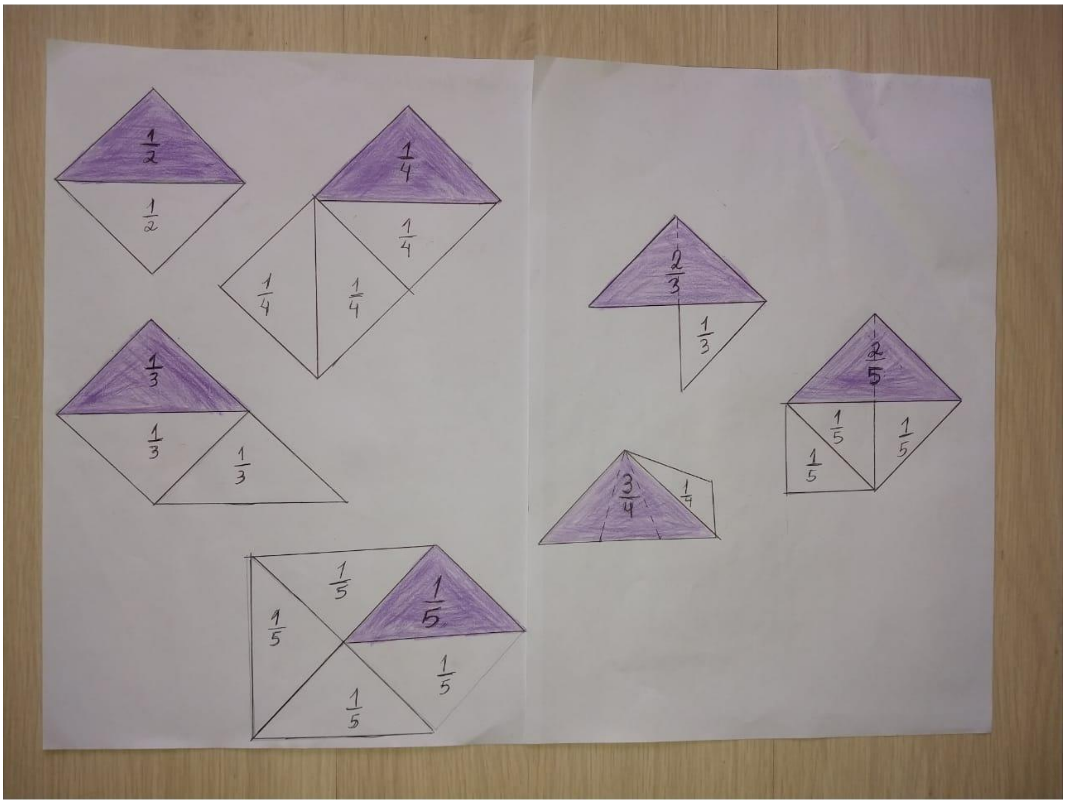


Fonte: O autor

É válido ressaltar que nosso objetivo com essa atividade é desenvolver no aluno a capacidade de pensar uma fração como a divisão em partes iguais e a habilidade de construir a unidade a partir de qualquer fração, ou seja, o processo inverso ao que normalmente é desenvolvido, ou seja, o foco é desenvolver corretamente o conceito de fração desapegando-se de cálculos operatórios.

Essa atividade foi aplicada com alguns alunos, a maioria com dificuldade em matemática, em uma aula de reforço. Pôde ser observado que na maior parte dos casos os alunos conseguiram desenvolver a unidade e, ao serem questionados, entenderam a ideia da fração como uma divisão em partes iguais. Abaixo, seguem algumas fotos da atividade num mural:

Figura 52 – Construção de unidades por diversas frações



Fonte: O autor

4.4 **Multiplicação entre frações**

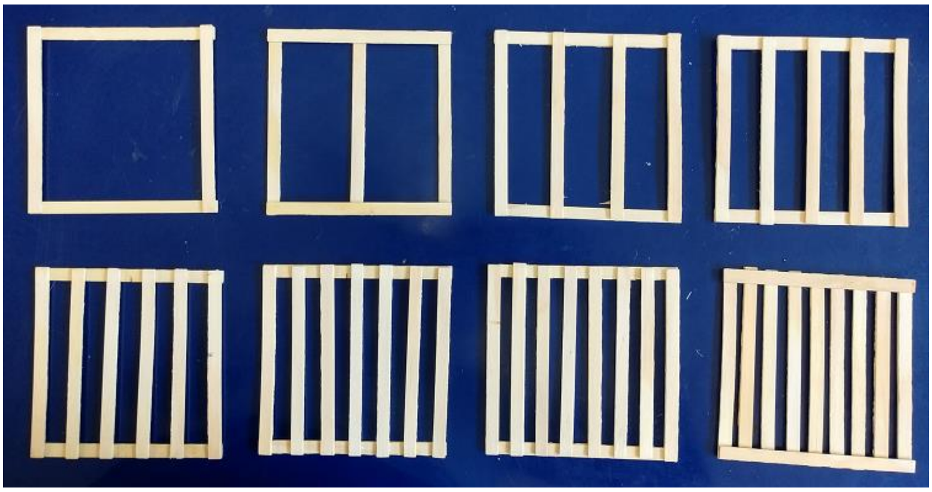
Conforme visto anteriormente, multiplicar duas frações é determinar a área de um retângulo cujas dimensões são as frações envolvidas. Tentaremos, através de duas atividades, facilitar a visualização desse raciocínio. Uma delas foi desenvolvida utilizando palitos de sorvete e a outra utilizando o software GeoGebra.

4.4.1 Multiplicação de frações com palitos de sorvete

Esta atividade foi desenvolvida pelo autor deste trabalho e tem como principal objetivo justificar o porquê de, quando multiplicamos duas frações com numeradores iguais a 1, multiplicamos os dois denominadores destas frações para obter o denominador da fração correspondente ao produto e seu numerador também é 1. Os materiais utilizados são palitos de sorvete e cola.

Etapa 1: Inicialmente, é pedido para os alunos construam oito quadrados utilizando quatro palitos de sorvete cada. Feito isso, pede-se que dividam sete destes quadrados em duas, três, quatro, cinco, seis, sete e oito partes iguais, respectivamente, e que deixem um quadrado sem divisão para representar uma unidade.

Figura 53 - Quadrados de palitos de sorvete divididos em partes iguais



Fonte: O autor

Etapa 2: É pedido para os alunos sobreporem um par de quadrados formados na etapa anterior. Por exemplo, a sobreposição do quadrado dividido em 4 partes e o quadrado dividido em 6 partes irá representar a multiplicação de $\frac{1}{4}$ por $\frac{1}{6}$.

Figura 54 - Quadrados divididos em quartos e sextos sobrepostos

Fonte: O autor

Etapa 3: A partir de cada sobreposição, pedir para os alunos chegarem ao resultado de cada multiplicação entre as frações envolvidas. Por exemplo, na figura acima, os alunos devem perceber que, ao sobrepor os quadrados correspondentes, ficaram com um quadrado unitário dividido em 6 x 4 = 24 partes iguais, sendo cada uma dessas partes um retângulo com dimensões $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$. Dessa forma, os alunos devem concluir que a área de cada um desses retângulos corresponde a $\frac{1}{24}$ do quadrado unitário, isto é, que $\frac{1}{4}$ x $\frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.

Etapa 4: Generalizar para os alunos a ideia da operação desenvolvida na etapa 3: se temos uma figura dividida em x partes iguais e sobrepomos uma outra figura dividida em y partes iguais, teremos, então, uma figura dividida em x.y retângulos iguais de área $\frac{1}{x.y}$. Com isso, vemos que $\frac{1}{x}.\frac{1}{y} = \frac{1}{x.y}$. Assim, o aluno deve perceber que na multiplicação de frações com numeradores iguais a 1 será obtida uma fração com este mesmo numerador e com o denominador sendo o produto dos denominadores iniciais.

Acreditamos que esta atividade tem como ponto positivo a facilidade de visualização na sobreposição dos quadrados através de um material concreto, além de relacionar o conteúdo de multiplicação de frações com a ideia de área de retângulos e, com isso, construir o conteúdo a partir de um conhecimento prévio dos alunos.

Esta atividade foi pensada posteriormente ao conteúdo ter sido apresentado para o aluno. Com isso, ela foi aplicada com apenas alguns alunos que estavam com dificuldade de compreender o processo de multiplicação de frações.

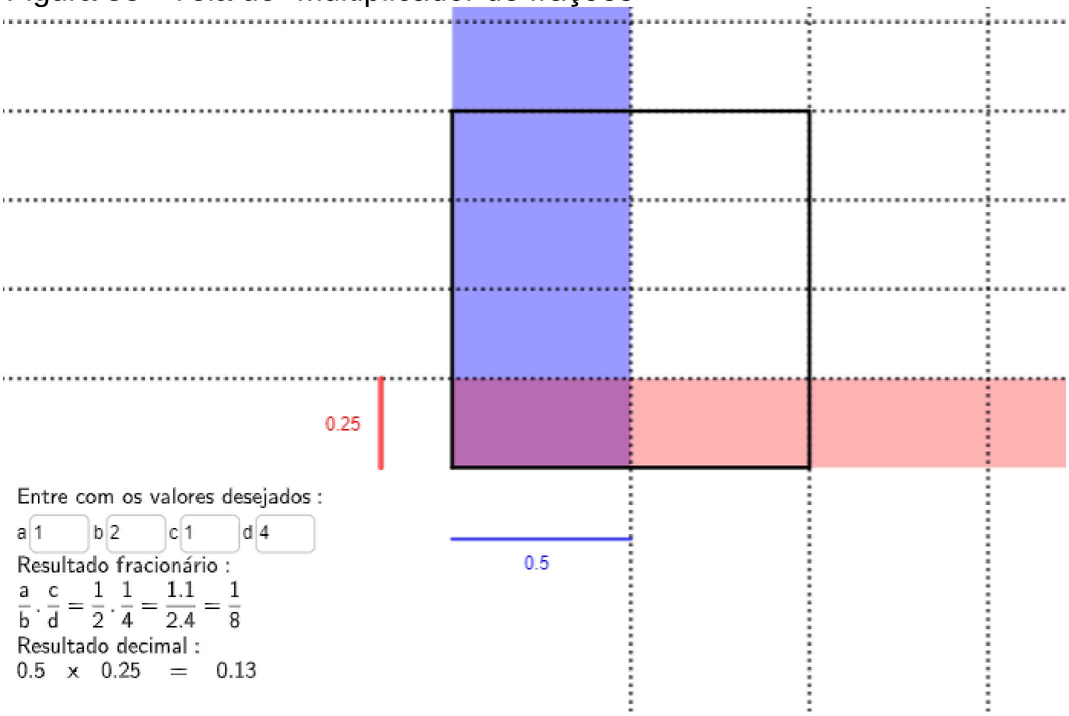
Foi interessante observar que alunos que normalmente não mostravam interesse no processo de aprendizagem se mostraram participativos e questionadores ao manusear os palitos (material concreto).

4.4.2 Multiplicação de frações com GeoGebra

Foi desenvolvido pelo autor deste trabalho, através do software GeoGebra, uma atividade que chamaremos de "Multiplicador de frações". Essa atividade está disponível em https://www.geogebra.org/m/pbmu3b5s para que possa ser acessada e utilizada por qualquer pessoa.

Ao abrir a atividade, há quatro caixas de textos localizadas no canto inferior esquerdo da tela. Ali, podem ser digitados números inteiros de 1 até 10 e o programa efetuará a multiplicação das frações envolvidas, tanto algebricamente quanto graficamente.

Figura 55 - Tela do “Multiplicador de frações”



Fonte: O autor

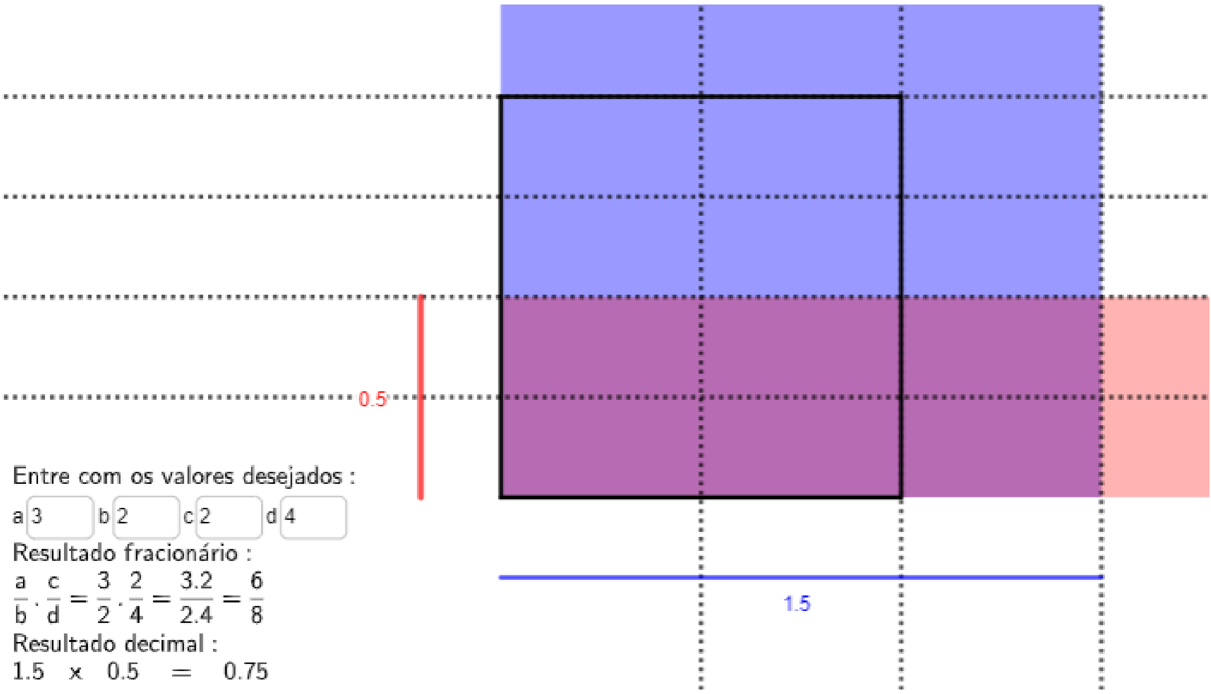
Na tela da atividade, aparecem um quadrado representando a unidade, e uma malha retangular onde ele está contido.

No campo de texto da figura 55, estão digitados os valores a = 1, b = 2, c = 1 e d = 4. Dessa forma, o programa fará a multiplicação entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$**.** Na parte gráfica, vemos que o comprimento do retângulo em azul é igual a $\frac{1}{2}$ e a altura do retângulo em vermelho é igual a $\frac{1}{4}$**.** Vale observar que as representações na figura estão na forma decimal, ou seja, 0,5 e 0,25, respectivamente.

Com isso, o retângulo em roxo representa a multiplicação entre as frações envolvidas, sendo que a fração resultante deste produto possui o numerador correspondendo à quantidade de retângulos roxos e o denominador correspondendo ao total de retângulos interiores ao quadrado unitário marcado com a linha contínua preta. Observando a figura, vemos que este resultado é, portanto, igual a $\frac{1}{8}$.

Conforme dito anteriormente, o arquivo aceita nas caixas de texto números inteiros de 1 até 10 e faz a multiplicação entre todos os casos possíveis dentro dessa restrição, inclusive quando há frações impróprias envolvidas, isto é, quando o numerador da fração é maior que o denominador. Temos, abaixo, a tela do programa referente à multiplicação de $\frac{3}{2}$ por $\frac{2}{4}$:

Figura 56 – Tela do “Multiplicador de frações”: três meios por dois quartos

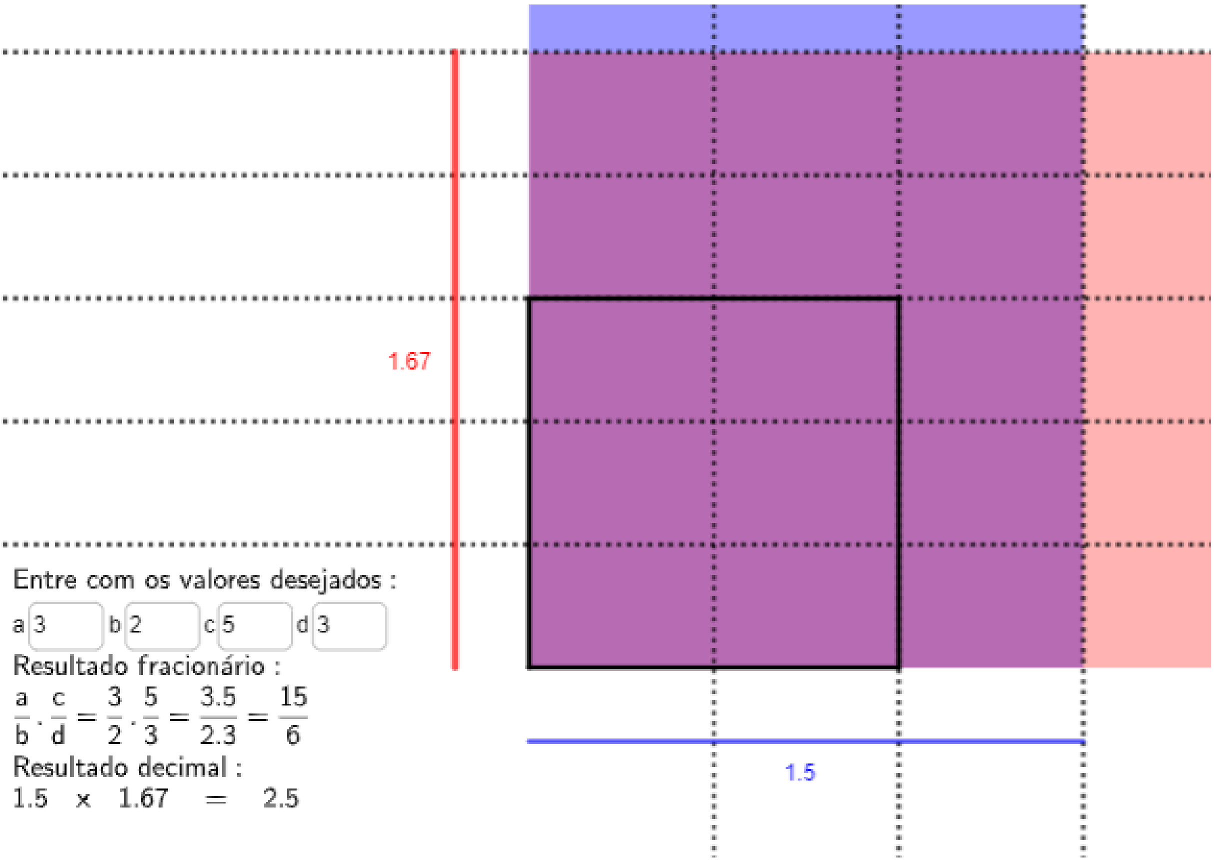


Fonte: O autor

Podemos perceber que, neste caso, o comprimento do retângulo em azul ficou maior que o lado horizontal do quadrado que representa a unidade, pois temos uma fração imprópria (e, portanto, maior do que 1). No entanto, o raciocínio para o cálculo da multiplicação é análogo ao feito anteriormente, ou seja, vemos que a área em roxo corresponde à fração resultante do produto entre as frações dadas cujo numerador é a quantidade de retângulos roxos e o denominador é o total de retângulos interiores ao quadrado unitário, isto é, $\frac{6}{8}$.

Vejamos mais um exemplo no caso em que ambas as frações envolvidas são impróprias. O raciocínio para o cálculo da multiplicação é o mesmo feito até aqui e a solução pode ser vista na figura abaixo.

Figura 57 – Tela do “Multiplicador de frações: três meios por cinco terços



Fonte: O autor

Vale ressaltar que, nesta atividade, não estamos preocupados com a solução simplificada do produto, mas apenas que o aluno compreenda o conceito de multiplicar frações através da visualização do número de retângulos roxos que aparecem e o número de retângulos interiores ao quadrado que representa a unidade.

Podemos citar, como pontos positivos, a facilidade em relacionar a multiplicação na forma algébrica e a sua visualização correspondente na forma geométrica. Acreditamos que, ao utilizar este software de geometria, a aula se torna mais dinâmica, e, com isso, faça com que o interesse do aluno seja aumentado.

Como ponto negativo citamos a necessidade de materiais tecnológicos computacionais para que se rode o arquivo da atividade. Sabemos que, em pleno ano de 2018, quando esta atividade foi pensada, ainda havia escolas que não dispunham de tal tecnologia.

Essa atividade foi elaborada após o conteúdo ter sido dado. Dessa forma, foi disponibilizada como uma ferramenta extra. Alguns alunos comentaram que a estavam utilizando como uma ferramenta para verificação de seus cálculos.

4.5. **Divisão entre frações**

Esta atividade tem como objetivo introduzir o conceito de divisão entre duas frações com a ideia de "quantos cabem" a partir do jogo Tangram, já utilizado na atividade da seção 4.2. Foi pensada a partir da atividade chamada "Caixa de frações" proposta no material didático do CAp-UERJ (apostila) do sétimo ano do Ensino Fundamental.

Encaramos esse fato como um ponto positivo, pois o material utilizado já é de conhecimento prévio dos alunos. Outro ponto positivo é introduzir o conceito sem utilizar regras e algoritmos prontos, priorizando o ensino construtivista, onde o aluno desenvolve um conteúdo a partir de outro conhecimento prévio.

Vale ressaltar que, como as frações envolvidas nas peças do Tangram são $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$, e essa atividade é introdutória ao tema, ela se restringe a casos específicos de divisões entre frações onde os denominadores são algumas potências de 2 e cujos numerados são sempre iguais a 1.

A seguir, descrevemos cada etapa da atividade com as imagens relacionadas.

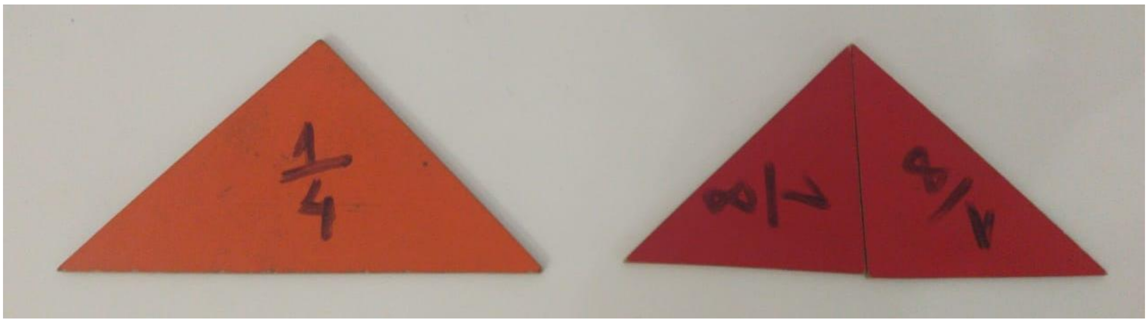
Etapa 1: Dividir os alunos em grupos, preferencialmente os mesmos da atividade da seção 4.2, se possível.

Etapa 2: Pedir para que os alunos respondam algumas questões propostas sem desenvolver contas, mas tentando observar quantas frações "cabem" uma na outra. Veja, abaixo, um exemplo:

Situação 6: Quantos $\frac{1}{8}$ cabem em $\frac{1}{4}$?

Essa pergunta tem como objetivo fazer com que os alunos percebam que são necessárias duas peças correspondentes a $\frac{1}{8}$ para cobrir as peças correspondentes a $\frac{1}{4}$ no Tangram. Veja a figura abaixo:

Figura 58 - Peças correspondentes a um oitavo e um quarto no Tangram



Fonte: O autor

Outras situações podem ser propostas como: "quantos $\frac{1}{16}$ cabem em $\frac{1}{4}$?" ou "quantos $\frac{1}{16}$ cabem em $\frac{1}{8}$?". O aluno deverá tentar responder todas as perguntas seguindo raciocínio análogo ao descrito anteriormente.

Perceba que, nessa etapa, as respostas das perguntas propostas são números inteiros. Na próxima etapa, trabalhamos o caso em que isso não ocorre.

Etapa 3: Nesta etapa, a ideia é propor perguntas similares às da etapa 2, sendo que agora a divisão ocorrerá entre uma fração menor por outra maior. Abaixo, daremos um exemplo de uma situação desta forma e da resposta esperada.

Situação 7: Quantos $\frac{1}{4}$ cabem em $\frac{1}{8}$?

Assim como na etapa anterior, utilizaremos as figuras do Tangram como referência, sendo que, agora, tentaremos visualizar quantas peças correspondentes a $\frac{1}{4}$ são necessárias para formar uma peça correspondente a $\frac{1}{8}$. Visualmente, podemos verificar que cobrimos a peça correspondente a $\frac{1}{8}$ com metade de uma peça correspondente a $\frac{1}{4}$.

Outras situações podem ser propostas como: “Quantos $\frac{1}{4}$ cabem em $\frac{1}{16}$?” ou “Quantos $\frac{1}{8}$ cabem em $\frac{1}{16}$?”. O aluno deverá tentar responder todas as perguntas seguindo raciocínio análogo do descrito anteriormente.

Etapa 4: Nesta etapa, formalizamos o conteúdo. Para isso, devemos pedir que os alunos resolvam a divisão entre as frações envolvidas na etapa 2 e 3. A intenção desta etapa é conceituar a divisão entre duas frações com a ideia de “quantos cabem” e utilizar a ideia de frações equivalentes para auxiliar na divisão. Sugerimos fazer um ou dois exemplos com os alunos, conforme iremos refazer as situações 6 e 7 anteriores.

Situação 6 revisada: Quantos $\frac{1}{8}$ cabem em $\frac{1}{4}$?

Inicialmente, devemos induzir o aluno a concluir que essa pergunta é análoga a calcular $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$. Pensando em frações equivalentes devemos também induzir que, para dividir frações, devemos ter denominadores iguais, assim como na soma e na subtração. Para isso, devemos pensar no $\frac{1}{4}$ como $\frac{2}{8}$. Logo, queremos calcular $\frac{2}{8}:\frac{1}{8}$.

Vale lembrar nessa etapa que operar duas frações de mesmo denominador é operar com as partes, já que a divisão do todo é a mesma. Logo, podemos considerar que:

$$\frac{2}{8}:\frac{1}{8}=\frac{2}{1}=2.$$

Situação 7 revisada: Quantos $\frac{1}{4}$ cabem em $\frac{1}{8}$?

Vamos pensar de maneira análoga com a anterior. Logo, devemos calcular, nesse caso, $\frac{1}{8}:\frac{1}{4}$, que é o mesmo que $\frac{1}{8}:\frac{2}{8}$. Desta forma, temos que

$$\frac{1}{8}:\frac{2}{8}=\frac{1}{2}.$$

Após relacionar a ideia de “quantos cabem” com a divisão entre frações, o conteúdo pode, finalmente, ser formalizado. Nossa proposta é que se utilize sempre a ideia de frações equivalentes para isso, pois, desta forma, o aluno estará apto a desenvolver qualquer divisão entre duas frações.

CONCLUSÃO

Aplicar uma metodologia baseada na matemática crítica foi um desafio no decorrer desse trabalho. É claro que, como todo bom desafio deve ser, houve dificuldades que puderam ser pautadas.

Uma dessas dificuldades encontradas foi a pouca quantidade de tempo disponível em sala de aula aliada a um planejamento rígido voltado para uma prova externa que ainda é aplicada no município do Rio de Janeiro. Estes foram dificultadores, mas, com um planejamento detalhado, porém flexível, essas barreiras puderam ser enfrentadas.

Sobre a experiência em desenvolvimento de jogos ao longo dos anos de 2017 e 2018, pudemos observar um aumento no interesse por parte dos alunos na matemática como um todo e não somente no conteúdo envolvido na atividade. Este interesse se deu, principalmente, nas atividades desenvolvidas pelos próprios alunos, onde eles, como autores, se sentiram em uma posição de protagonistas da situação proposta.

Desenvolver esse protagonismo é fundamental, pois a partir dele, surgem possibilidades e ideias que podem ser colocadas em prática, mesmo com a falta de recursos humano e/ou financeiro já citados neste trabalho.

Especificamente na aplicação das atividades propostas, foi perceptível que, no decorrer do tempo, além do aumento na participação das atividades e no interesse com a matemática de um modo geral, houve uma melhora na qualidade da relação professor-aluno que, conforme já citamos no referencial teórico, acreditamos que melhora a qualidade de comunicação e, por consequência, o processo de ensino-aprendizagem.

Em relação ao tópico de frações, houve uma minimização de erros em relação às operações, principalmente na soma e subtração de frações com denominadores diferentes. Esse fato pôde ser percebido ao longo do ano letivo.

De modo geral, pode-se dizer que o principal ganho com essa metodologia descrita nesse trabalho foi a desmistificação da matemática como algo seletivo e inalcançável para alguns. É claro que não foram todos os alunos que alcançaram o objetivo principal deste trabalho, que era aprender de forma lúdica os conceitos fundamentais sobre números fracionários, no entanto com os alunos foi trabalhada uma ideia de que, com esforço e dedicação, esta meta poderia ser conquistada.

A maioria das considerações feitas até então não foram mensuradas através de instrumentos avaliativos formais como pesquisas ou provas. Dessa forma, um possível desdobramento futuro deste trabalho poderia ser rever a metodologia proposta e mensurar seus resultados através de processos bem definidos, isto é, avaliar a aplicação dessa metodologia de forma qualitativa e quantitativa.

Por fim, reforçamos que o ganho parcial descrito no parágrafo anterior foi o que predominou no decorrer das experiências deste trabalho, pois lidar com alunos de uma escola pública na cidade do Rio de Janeiro é trabalhar com alunos que, muitas vezes, moram em regiões com constantes conflitos e violência. Dessa forma, as atividades propostas também acabaram por desenvolver a autoestima dos alunos envolvidos e mostraram que eles são capazes de produzir conteúdos, sejam estes científicos ou culturais, e pô-los em prática, ou pelo menos que eles possam expressar suas ideias.

Em resumo, acreditamos que as atividades os ajudaram a se tornar seres um pouco mais críticos da sociedade em que vivem. Isto reforça o fato de ensinar matemática com a finalidade de fazer emergir os aspectos críticos na tarefa de aprender (e também de educar!), como defende Skovsmose em todas as suas obras.

REFERÊNCIAS

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Editora Autêntica, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. *A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*, 2017. 468 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 10 out. 2018.

CHAVANTE, E. *Convergências*: matemática, 6º ano: anos finais: ensino fundamental. São Paulo: Edições SM, 2015.

FREIRE, P. *Educação como prática da Liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1967.

MACHADO, L. Caderno de Matemática - 7º Ano - 1º Trimestre. CAp-UERJ. 2018

MARTINS, F. F.; GONÇALVES, T. V. O. *INTERATIVIDADE E DIÁLOGO EM SITUAÇÕES DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA*: nexos e reflexos de uma experiência formativa mediatizada por ambiente virtual de aprendizagem na Amazônia. Florianópolis, 2009. Disponível em <http://posgrad.fae.ufmg.br/posgrad/viienpec/pdfs/575.pdf>. Acesso em 09 out. 2018.

NASCIMENTO, A. C.; WEBER, T. C.; MERLI, R. F. *DÍZIMAS PERIÓDICAS DOIS OLHARES*: DO ENSINO MÉDIO E DO SUPERIOR. Disponível em <http://www.fap.com.br/forum_2012/forum/pdf/Exatas/Comunicacao_Oral/ResExaCO07.pdf>. Acesso em 22 jan. 2019.

OECD. *Ten Questions for Mathematics Teachers... and how PISA can help answer them*. Paris: OECD Publishing, 2016. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1787/9789264265387-en>. Acesso em 09 out. 2018.

PEREIRA, W. R. F. *Reflexão sobre o uso de tecnologias da educação no ensino superior*. Revista Intersaberes, v. 8, n. 16, p. 82-95, 2013.

RIPOLL, C. et al. *FRAÇÔES no Ensino Fundamental – Volume 1*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <https://www.umlivroaberto.com/livro/lib/exe/fetch.php?media=fracoes_v2_book_view.pdf>. Acesso em: 27 set. 2018.

SILVA, A. *Atividades multimodais em uma abordagem partitiva para frações*. Tese (Programa de Pós-graduação em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós-graduação – Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, 2017

SKOVSMOSE, O. *Um convite à educação matemática crítica*. Campinas – SP: Papirus, 2014.

TAHAN, M. *O Homem que Calculava*. Rio de Janeiro, Record, 2010.

TORRES, A.; FELIX, F.; MEIRA, G. *REFLEXÕES SOBRE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA NA OBRA DE OLE SKOVSMOSE*. Disponível em <http://www.editorarealize.com.br/revistas/conedu/trabalhos/TRABALHO_EV045_MD1_SA8_ID321_08092015172345.pdf>. Acesso em 09 out. 2018.