Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O Cálculo da Raiz Quadrada Através dos Séculos

Andreilson Oliveira da Silva

Junho/2013
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

O Cálculo da Raiz Quadrada Através dos Séculos †

por

Andreilson Oliveira da Silva

sob orientação do

Prof. Pedro Antonio Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Junho/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

O Cálculo da Raiz Quadrada Através dos Séculos

por

Andreilson Oliveira da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino da Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza - UFPB

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Junho/2013

Agradecimentos

A Deus pela minha vida, por ter me ajudado a perseverar nos momentos de fraqueza e pela minha saúde.

Aos meus pais Pereira e Luiza por todo o apoio e confiança em mim depositados em todos esses anos e pela educação que me foi proporcionada, vocês são os principais responsáveis por esse momento.

À minha segunda mãe Carminha pelos dias que reservou de sua vida para estar ao lado da minha.

Às minhas irmãs e sobrinhos por terem sempre acreditado na minha capacidade e entenderem o meu afastamento quando foi necessário.

A João Dias pela compreensão, companheirismo, apoio e cumplicidade em todos os momentos deste e de outros trabalhos e por não ter permitido que eu desistisse nos momentos de maior dificuldade.

Aos professores e coordenadores do Mestrado na UFPB pelas aulas e pelas contribuições, em especial aos meus orientadores professores Pedro Hinojosa e Fernando Xavier cujo as orientações foram de fundamental importância para a conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos de jornada Sandro Godeiro, Thiago Valentim e Aldrin Rufino pelas viagens, pela companhia, pela ajuda, pelo apoio e pelos conselhos.

Aos demais amigos de Mestrado que estiveram juntos comigo durante os dois anos do curso, em especial aos paraibanos Geraldo, Hebert, Sívio e Marco Viana.

Aos companheiros do IFRN de Currais Novos que sempre me apoiaram e entenderam quando não podia estar presente na escola, em especial aos amigos Ramon e Rady que me deram muita força para terminar essa capacitação.

Aos amigos de outras etapas da minha vida que sempre torceram por mim, em especial a Ana Maria, Tia Alzira, Carla Souto, Elioenai e Rose.

À CAPES pela bolsa concedida.

A todos o meu muito obrigado!

Dedicatória

À minha mãe cujo o amor incondicional, o seu exemplo e os conselhos me fizeram ser o profissional que sou hoje.

Resumo

Neste trabalho buscamos relatar, através de uma pesquisa bibliográfica, a história dos métodos para o cálculo da raiz quadrada durante os séculos e civilizações. Após uma apresentação do algoritmo fundamental e do método geométrico para extração de raízes foram expostos resultados e métodos antigos que datam de antes do nascimento de Cristo, do século X e do XVI, este último sendo o Algoritmo de Newton-Raphson que pode ser direcionado para encontrar raízes quadradas. O desenvolvimento histórico do símbolo da raiz quadrada também foi abordado e como fechamento apresentamos um procedimento "novo" que promete facilitar o algoritmo para encontrar raízes quadradas utilizando a sequencia de números ímpares negativos.

Palavras-Chave: Raiz Quadrada, Extração de raízes, Algoritmo para Extração de raízes.

Abstract

In this work we aim to report the history of the methods for calculating the square root over the centuries as well as civilizations through a bibliographical research. We first present the fundamental algorithm and the geometric method for extracting roots to later expose ancient results and methods, which are dated before the birth of Christ. Such results and methods encompass the 10^{th} and 16^{th} century, where the last algorithm is the Algorithm Newton-Raphson, the one that can be used to find square roots. The historical development of the square root symbol was also addressed in our research and we end our investigation presenting a “new”procedure that enables the algorithm to better find square roots using the sequence of negative odd numbers.

Keywords: Square Root, root extraction, Algorithm for Extracting Roots.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Matematicamente, a raiz quadrada de um número x não negativo é um número que, quando multiplicado por si próprio, iguala a x. A raiz quadrada de x é simbolizada por $\sqrt{x}$, a mesma é considerada por muitos matemáticos como uma importante operação matemática, assim como a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão.

O entendimento dos métodos de cálculos para encontrar o valor das raízes quadradas possui muita importância, pois vários problemas em linguagem algébrica atual conduzem a soluções onde precisam ser encontrados os valores de raízes, ressaltando, ainda, a sua acuidade na geometria, devido ao efetivo cálculo do lado de um quadrado cujo a área é conhecida.

Essa importância no cálculo da raiz quadrada é verificada através dos tempos a partir da análise de documentos históricos que nos mostram a preocupação em realizar o procedimento de extração de raízes nas mais diversas épocas do desenvolvimento humano.

Atualmente uma simples calculadora de bolso nos dá um resultado aproximado de qualquer valor positivo que desejarmos extrair a raiz quadrada, softwares de computadores poderosos nos permitem encontrar aproximações com a precisão que desejarmos.

De um modo geral, a imersão neste assunto segue uma linha metodológica de apresentação e desenvolvimento que consiste, inicialmente, na apresentação da definição formal de raiz quadrada com instruções relativas à sua forma de extração.

O objetivo deste trabalho é descrever de forma histórica os métodos para encontrar os valores de raízes quadradas, com o intuito de subsidiar estudiosos e professores da Educação Básica, afim de passar informações que os levem a correta manipulação dos algoritmos de extração de raízes e, consequentemente, melhorar o aprendizado dos alunos, oportunizando assim uma ampliação do conhecimento.

O desenvolvimento desse trabalho foi realizado a partir de uma pesquisa bibliográfica, que define-se como a *modalidade de estudo que se propõe a realizar análises históricas de estudos ou processos tendo como material de análises documentos escritos e/ou produções culturais garimpados a partir de arquivos e acervos* [10, p.71]. Dessa forma a pesquisa bibliográfica tem como objetivo o de conhecer e analisar as principais contribuições teóricas existentes sobre um tema em específico(ver [13]).

A partir dessa definição nos aprofundamos no tema a partir do estudo dos artigos de João Bosco Pitombeira de Carvalho (ver [5]), publicado na X SBEM e de Bernard Hodgson (ver [11]) que foi publicado na Revista Gazeta de Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática.

A utilização da História da Matemática não visou nesse trabalho falar somente à vida e à obra de matemáticos, mas foi utilizada para, conhecer, refletir e discutir sobre como se constituiu historicamente o saber matemático, mas especificamente como foi construído e desenvolvido o algoritmo de extração de raízes quadradas.

Procurou-se aprofundar um pouco na História das civilizações buscando informações na obra de Perry, (ver [18]) para contextualizar o período em que determinada civilização se encontrava quando do desenvolvimento para o algoritmo. A partir dessa contextualização colocou-se a História da Matemática em evidência, buscando referências nas obras de Boyer (ver [2]), Berlinghof e Gouveia (ver [1]) e traduções da obra de Cajori (ver [3] e [4]).

Esta dissertação desdobra-se em cinco seções das quais a primeira é a presente Introdução que serve como apresentação da proposta de trabalho.

No Capitulo 1 foi abordado o conceito usual de raíz quadrada, o seu algoritmo mais presente nas nossas salas de aula e a forma geométrica de encontrar a raiz quadrada, já contextualizando com o que foi apresentado por Descartes no seu *Lá Géometrie*.

No Capítulo 2 foi executada uma abordagem histórica chegando a algumas técnicas de extração de raízes conhecidas por diversos povos e em diferentes momentos da história das civilizações. Iniciamos nosso "passeio" histórico dos algoritmos para o cálculo das raízes quadradas pelas culturas que fazem parte do que é chamado de *Berço das Civilizações*: O início das abordagens sobre as raízes recaem na Mesopotâmia, onde aparecem valores aproximados para a $\sqrt{2}$ que podem ser justificados a partir de demonstrações geométricas; Em seguida a Grécia, com os cálculos de aproximações sucessivas desenvolvido por Herão de Alexandria e o Método conhecido como Escada de Theon; Na Índia apresenta-se um algoritmo que pode ser também justificado via geometria e a Fórmula de calcular raiz quadrada presente no manuscrito de Bakhshäli, temos também o algoritmo chinês para o cálculo de raízes quadradas e sua relação com o algoritmo utilizado até pouco tempo nas nossas escolas; Apresenta-se aqui um método desenvolvido pelos arquitetos da Europa Medieval no século X, e, concluindo, será exposto o método de Newton-Raphson dando uma breve explicação a despeito de sua nomenclatura.

No Capítulo 3 encontra-se uma tradução de parte do livro de Cajori (ver [3]) sobre a história das notações matemáticas que descreve como foi o desenvolvimento do símbolo que representa a raiz quadrada, mostrando que o mesmo já foi representado pela letra R (devido a palavra *radix* - raiz), l (derivado da palavra *latus* - lado), o sinal $\surd$ e o expoente fracionário.

No Capítulo 4 apresenta-se uma forma de calcular raízes que hoje é empregada na escola do ensino básico, como método milagroso cujo a promessa é facilitar o cálculo para extração de valores de raízes quadradas.

Capítulo 1

Raiz Quadrada

A raiz quadrada de um número real não negativo x é o número real y não negativo que ao multiplicarmos por si próprio, iguala a x. Ou seja, encontrar a raiz quadrada de um número real $x \geq 0$ é encontrar um outro número real y tal que $y^2 = x$. Geometricamente, este problema pode ser visto como, achar o valor do lado de um quadrado cujo conhecemos sua área, ou ainda, de forma algébrica, procurando as raízes da equação $x^2 - k = 0$, sendo k um número real positivo.

O cálculo explícito de uma raiz quadrada é bem mais complicado do que as quatro operações aritméticas elementares, tendo sido considerada por Descartes como uma "quinta operação elementar".

> *[...] toda a aritmética se compõe somente de quatro ou cinco operações, que são: adição, subtração, multiplicação, divisão e a extração de raízes, que podemos considerar com um espécie de divisão [...]* (Descartes apud [5, p.01]).

Neste capítulo trataremos do método geométrico para encontrar a raiz quadrada e do método das bisseções para encontrar raízes.

1.1 Encontrando a Raiz quadrada pelo método geométrico

Em [24] comenta-se que no livro I de sua principal obra *O Discurso do Método*, Descartes relata como as operações aritméticas se relacionam com as operações geométricas e ilustra como realizar a multiplicação, a divisão e a extração da raiz quadrada de forma geométrica isto é, usando apenas a régua e o compasso. Nessa obra, Descartes constrói todas as operações elementares usando régua e compasso.

Pode-se descrever a extração da raiz quadrada da seguinte forma:

Seja x o número que desejamos extrair a raiz quadrada. Para extrair a raiz quadrada do mesmo, construímos um segmento unitário BC acrescentando na sua extremidade o segmento de medida x, AC. Determinamos a circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento determinado pela unidade e por x, (Figura 1.1). Em seguida, construímos um triângulo retângulo levantando uma altura a partir do ponto C até E, ponto que está sobre a circunferência do semi-círculo construído.

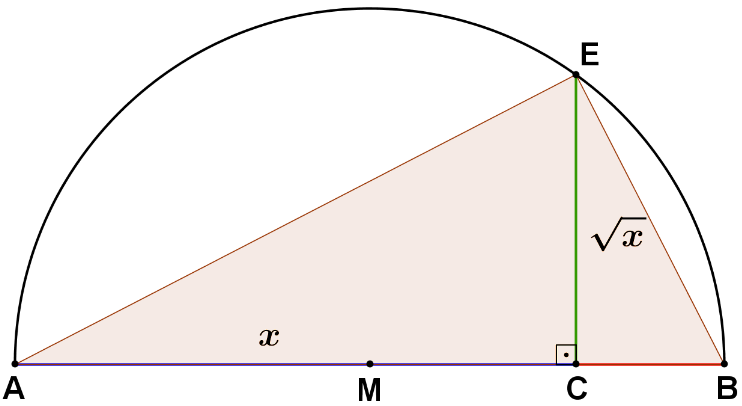


Figura 1.1: Esboço do esquema para encontrar a raiz quadrada

O segmento CE nada mais é do que a raiz quadrada do número x.

Teorema 1 *A altura EC representa geometricamente a raiz quadrada de um segmento de medida x.*

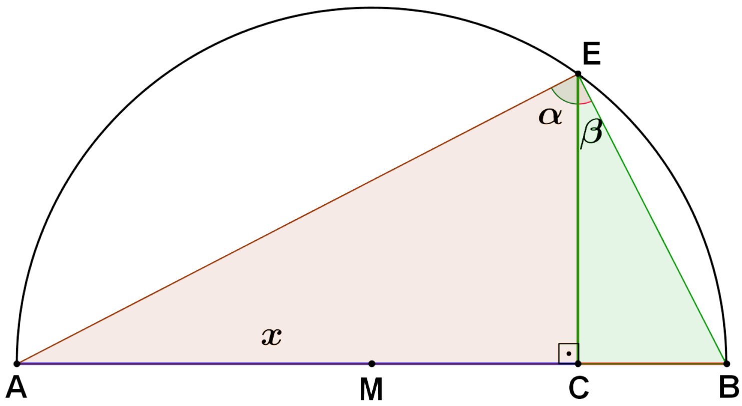


Figura 1.2: Encontrando a Raiz Quadrada pelo Método Geométrico

Demonstração: Como podemos observar na Figura 1.2 o ângulo AEB está inscrito em um semicírculo, logo ele é um ângulo reto. Portanto os ângulos α e β são complementares como $\angle\alpha$, $\angle A$ e $\angle\beta$, $\angle B$. Assim $\angle\alpha = \angle B$ e $\angle A = \angle\beta$ (complemento para os mesmos ângulos são iguais) e $\triangle ACE \sim \triangle ECB$ (similaridade AA). Portanto, $\frac{AC}{CE} = \frac{EC}{BC}$ ou $AC \times BC = (EC^2)$, logo sendo x qualquer comprimento e 1 como o comprimento de unidade que for escolhida, então temos $x.1 = (CE)^2 \Rightarrow (CE)^2 = x \Rightarrow CE = \sqrt{x}$.

$\square$

Uma outra alternativa de interpretação geométrica utiliza apenas o teorema de Pitágoras e foi apresentada em [17].

Seja $x > 1$, um segmento AB de comprimento x marquemos o ponto médio M e mais dois pontos C e D tais que $CM = MD$ e $CD = 1$ (Figura 1.3).

Pelo ponto C tracemos uma perpendicular à reta que contém o segmento AB e com centro no ponto A e o tamanho da abertura do compasso igual a AD determinamos um ponto E na perpendicular traçada sob C.

O segmento EC é a raiz quadrada de x.

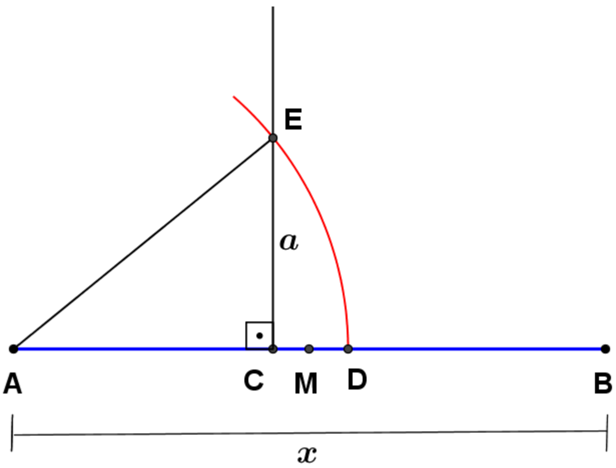


Figura 1.3: Encontrando a Raiz Quadrada pelo Método Geométrico

Demonstração: De forma algébrica podemos observar que $AM = \frac{x}{2}$, $CD = 1$, $AM = \frac{x-1}{2}$, $AE \equiv AC = \frac{x+1}{2}$ e $EC = a$.

Pelo Teorema de Pitágoras temos,

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2,$$

Desenvolvendo os produtos notáveis obtemos,

$$x^2 + 2x + 1 = 4a^2 + x^2 - 2x + 1$$

Que resulta em,

$$4a^2 = 4x \Longrightarrow a = \sqrt{x}$$

$\square$

1.2 O Algoritmo Fundamental para extração de Raízes Quadradas

Os estudantes e professores do Ensino Básico em sua grande maioria buscam apenas a solução para o valor da raiz quadrada procurada. Com essa finalidade, foi ensinado por muitos anos para esse público um algoritmo considerado o mais usual do Ensino Básico é o chamado método das bissecções.

Tomemos o símbolo $\sqrt{k}$ para representar a raiz quadrada positiva de k.

Dessa forma se x e y são números positivos, teremos

$$x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2. \tag{1.1}$$

Logo, dado um número $k > 0$ facilmente se pode localizar $\sqrt{k}$ entre dois números naturais consecutivos. Depois, prossegue-se calculando a média entre os extremos sucessivamente, para aproximar $\sqrt{k}$ satisfatoriamente.

Por exemplo, para calcular $\sqrt{13}$, procede-se da seguinte forma:

Como $9 < 13 < 16 \Rightarrow 3 < \sqrt{13} < 4$;
Como $\frac{3+4}{2} = 3,5 \Rightarrow 3,5^2 = 12,25 \Rightarrow 3,5 < \sqrt{13} < 4$;
Como $\frac{3,5+4}{2} = 3,75 \Rightarrow 3,75^2 = 14,0625 \Rightarrow 3,5 < \sqrt{13} < 3,75$;
Como $\frac{3,25+3,75}{2} = 3,5 \Rightarrow 3,5^2 = 12,25 \Rightarrow 3,5 < \sqrt{13} < 3,75$;
Como $\frac{3,25+3,75}{2} = 3,625 \Rightarrow 3,625^2 = 13,140625 \Rightarrow 3,5 < \sqrt{13} < 3,625$;
E assim sucessivamente.

O processo é fácil de ser observado. Se $a_n < \sqrt{13} < b_n$, achamos o ponto médio p_n do intervalo $[a_n, b_n]$. Se $p_n^2 < 13$, fazemos $a_{n+1} = p_n$, $b_{n+1} = b_n$, e repetimos o processo. Se $13 < p_n^2 < b_n$, fazemos $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = p_n$, e continuamos com a iteração do processo.

O grande problema desse e de outros algoritmos ensinados na escola é que os alunos aprendem os passos sem entendê-los e, dessa forma, esquece dos mesmos com muita facilidade. Isso não acontece apenas com os alunos, acontecem com alguns professores também.

Capítulo 2

Desenvolvimento Histórico da Raiz Quadrada

A Matemática como a concebemos atualmente foi fruto de uma demorada mais contínua evolução que teve inicio nos tempos dos homens das cavernas, passando por todas as grandes civilizações até chegar na complexidade do mundo globalizado atual. *Começa tão remotamente quanto a invenção do alfabeto, e novos capítulos ainda estão por vir* [1, p.04]. Neste sentido, podemos afirmar que a matemática vem sendo construída ao longo de toda a história da humanidade, evoluindo a partir de contagens, medições, cálculos e do estudo sistemático de formas geométricas e movimentos de objetos físicos.

Ninguém sabe quando começou a matemática. O que sabemos é que toda civilização que desenvolveu a escrita também mostra evidências de algum nível de conhecimento matemático[1, p.06]. É impossível referenciar qualquer assunto na matemática sem observar o surgimento e crescimento das grandes civilizações mundiais. Dessa forma nesse capítulo mostramos, de forma sucinta, o desenvolvimento da matemática durante os séculos, investigando as formas operacionais dos algoritmos que serviam para o cálculo da raiz quadrada existente nesse contexto histórico.

2.1 Mesopotâmia

A região da Mesopotâmia (*palavra grega que significa "terra entre rios"* [18, p.15]), localizava-se no Oriente Médio (Figura 2.1), entre os vales dos rios Tigre e Eufrates, atual território do Iraque e áreas adjacentes. Está inserida no que se denomina de Crescente Fértil tendo sido considerada um dos berços da civilização, tinha como sua capital a cidade da Babilônia. Iremos estudar essa civilização no período compreendido entre 2.000 a.C. e 1.600 a.C).

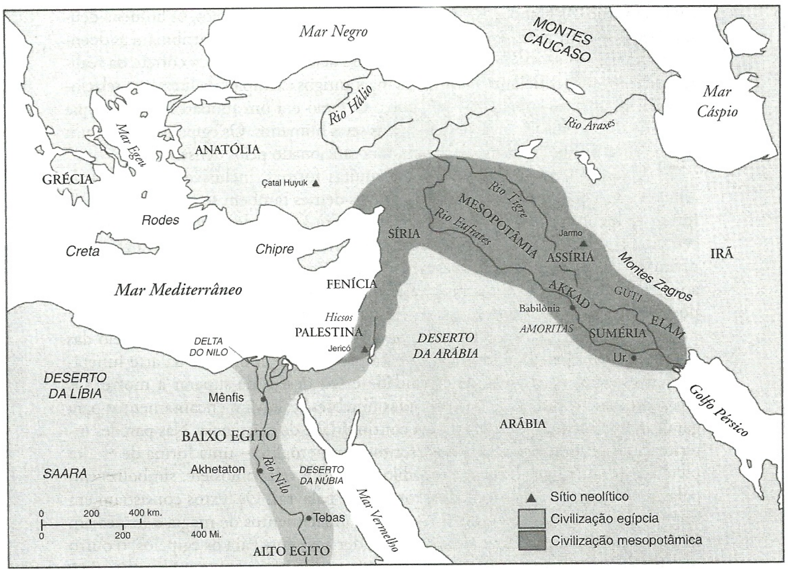


Figura 2.1: Civilizações Mesopotâmica e Egipícia

Fonte: [18, p.15].

A importância da história do Crescente Fértil é justificada por ela ser habitada por diversos povos e civilizações desde os mais primitivos estágios de evolução do homem moderno.

O homem da mesopotâmia fez avanços impressionantes na matemática[18, p.15]. Desenvolveram um sistema numérico que possuía como base o valor sessenta, acredita-se que este sistema tenha sido usado por ser possível sua subdivisão em metades, quartos, quintos, sextos, décimos, etc., até dez divisões são possíveis. Este sistema encontra-se presente em nossas unidades de tempo e medida de ângulos.

Ao mesmo tempo, podemos imputar aos mesopotâmicos, ou de forma equivalente babilônicos, a invenção do sistema posicional. Com apenas seus símbolos para unidades e dezenas, podiam representar qualquer número, por maior que fosse, por repetição e mudança de posição. Este é o mesmo princípio de nosso sistema numeral.

Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia desde antes da metade do século XIX, e já desenterraram mais de 500.000 tábulas de argila com escrita cuneiforme que datam de até 2.000 a.C, dessas quase 400 foram identificadas como estritamente matemáticas, algumas são listas de problemas e outras tábuas para resolver operações (ver [8]). Muitas dessas placas foram sendo guardadas em várias coleções, a maioria particulares. As placas possuem nomes a partir da coleção de qual faz parte, por exemplo a placa YBC 7289, da coleção da Universidade de Yale da cidade de New Haven, Connecticut, Estados Unidos da América, com a numeração 7289. *Todas as tábulas, incluindo as mais antigas, dão conta de que os Babilônicos tinham um alto grau de habilidade computacional e deixam claro que o sistema sexagesimal estava de longa data estabelecido* [8, p.60].

A geometria babilônica se relaciona com a mensuração prática. Acredita-se a partir da análise de diversos exemplos que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. deviam estar familiarizados com as regras gerais para o cálculo das áreas do retângulo, do triângulo retângulo, triângulo isósceles, do trapézio retângulo, do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e do volume de um prisma reto de base trapezoidal. Acredita-se ainda que eles conheciam o teorema de Pitágoras e existe uma tábula na qual se usa $3\frac{1}{8}$ como estimativa para o número irracional π.

Perto do ano 2.000 a.C. a aritmética babilônica já tinha evoluído para um álgebra bem desenvolvida, já se resolviam equações quadráticas pelo método de completar quadrados ou um método equivalente de substituição numa fórmula geral, se discutiam algumas equações de grau 3 e 4.

Considerada como uma das mais notáveis tábulas matemáticas babilônicas a Plimptom 322, pertencente a coleção G. A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, foi escrita no período Babilônico Antigo (aproximadamente entre 1.900 e 1.600 a.C.) e os primeiros a descreverem seu conteúdo foram Neugebauer e Sachs em 1945.

Descobriu-se que os números correspondentes dentre as quatro colunas que compõem a escrita na tábula, salvo quatro exceções, constituem a hipotenusa e um cateto de triângulos retângulos de lados inteiros, os ternos pitagóricos

> *Um terno de números, como (3,4,5), cujos termos são lados de um triângulo retângulo é chamado terno pitagórico. Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um terno pitagórico é a unidade, então esse terno se diz primitivo* [8, p.64].

A partir da análise das colunas de números da Plimpton 322, pode-se verificar que os babilônios desse remoto período tinham ciência da representação geral dos ternos pitagóricos primitivos que foi mostrado pelos gregos séculos depois.

2.1.1 A Raiz Quadrada na Mesopotâmia

Os babilônios deram algumas aproximações interessantes de raízes quadradas de números não quadrados perfeitos, como $\frac{17}{12}$ para $\sqrt{2}$ e $\frac{17}{24}$ para $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Talvez eles usassem a fórmula de aproximação

$$(a^2+b)^{\frac{1}{2}} \approx a + \frac{b}{2a}. \tag{2.1}$$

Encontraram ainda como aproximações de $\sqrt{2}$

$$1 + \frac{25}{60} \approx 1,4166666667. \tag{2.2}$$

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,414212963. \tag{2.3}$$

O tablete da Universidade de Yale, YBC 7289, datado entre 1800 a.C. e 1.600 a.C., mostra a aproximação para $\sqrt{2}$ descrita em (2.3). *Este tablete se refere à diagonal de um quadrado, muitos supõem que ele prova que os mesopotâmicos* *conheciam o Teorema de Pitágoras* [5, p.60].

Utilizando um software aplicativo de cálculo como uma planilha eletrônica do Excel ou Calc, podemos encontrar facilmente a $\sqrt{2}$ com 14 casas decimais corretas: 1,41421356237310, o que nos faz concluir que a aproximação utilizadas pelos mesopotâmios é correta até a quinta casa decimal de acordo com o resultado encontrado na YBC 7289.

A Tábula YBC 7289 (Figura 2.2) mostra um quadrado com lado 30 onde se pode ler em seu interior os dois números $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ e $42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$. Mas como:

$$30 \times \left(1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\right) = 42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$$

conclui-se que $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$ é uma aproximação da diagonal de um quadrado de lado 1.

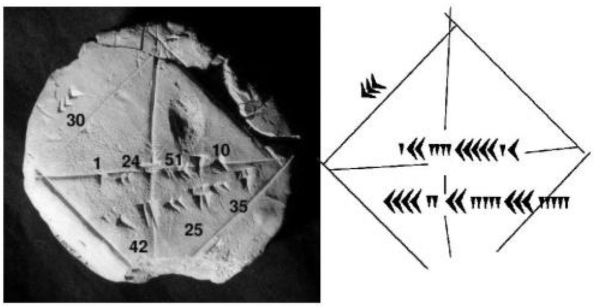


Figura 2.2: Tábula YBC 7289

Fonte: http://www.bibnum.education.fr, acesso em 30. fev. 2013.

Desconhece-se o raciocínio que teria levado os matemáticos da Mesopotâmia aos valores (2.2) e (2.3). No caso específico da aproximação $1+\frac{25}{60}$ imaginasse que se procedeu por tentativa e erro elevando ao quadrado determinados números.

O historiador Victor Katz propôs como aceitável a explicação seguinte para o processo que os Mesopotâmios poderiam ter seguido afim de determinar esses valores. O mesmo baseou-se em afirmações que existem em algumas tábulas e afirma que se trata de um método *para o qual existe alguma evidência textual* (KATZ apud [11, p.03]).

Interpretação geométrica do cálculo do valor de $\sqrt{k}$ pelo algoritmo mesopotâmico.

Do ponto de vista geométrico, calcular $\sqrt{k}$ pode ser concebido como a procura do lado de um quadrado com área k. Dessa forma pode-se tentar colocar no interior deste quadrado o maior quadrado possível cujo lado seja um valor conhecido (Figura 2.3). Para tanto poderia ser utilizado uma das numerosas tábuas de argila que continha números elevados ao quadrado de propriedade dos mesopotâmios.

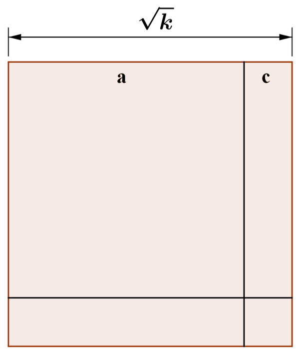


Figura 2.3: Interpretação Geométrica do Algoritmo mesopotâmico para encontrar o valor de $\sqrt{k}$

Seja a o lado deste quadrado conhecido e c o tamanho do comprimento que será necessário adicionar a a com o objetivo de obter $\sqrt{k}$, daí podemos concluir que $a{+}c{=}\sqrt{k}$.

Encontrar um valor a' que seja uma boa aproximação para $\sqrt{k}$ é o mesmo que encontrar um valor satisfatório para c, o que pode ser realizado examinando a região em forma de $\ll L \gg$ invertido que envolve o quadrado de lado a - esta região era chamada *gnómon*[1] pelos antigos gregos, por uma questão de analogia com o estilo de um relógio do sol ou ainda com um esquadro.

É fácil de observar que a área do *gnómon* é igual a $k - a^2$, porém podemos observar que o mesmo pode ser decomposto em dois retângulos de lados a e c e mais

[1]Em todo o paralelogramo a figura, que resulta de um paralelogramo daqueles, que existem na diagonal do paralelogramo maior, juntamente com os dois complementos, chama-se gnómon [9]

um quadrado de lado c. Daí temos:

$$2ac + c^2 = k - a^2$$

.

Se c for um número bem pequeno podemos desprezar c^2, e teremos assim a aproximação

$$2ac \approx k - a^2$$

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a}.$$

Podemos encontrar uma aproximação melhor para o valor de $\sqrt{k}$ (em relação ao valor inicial de a) tomando para a aproximação de $a{+}c$ a quantidade

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a} \tag{2.4}$$

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{a^2 + k}{2a}.$$

Identificamos facilmente que se $a< \sqrt{k}$, então $a'{>}\sqrt{k}$. Com efeito a última desigualdade pode ser justificada elevando ao quadrado cada um dos membros de 2.4. E assim temos que,

$$a'^2 - k = \frac{a^4 + 2a^2k + k^2 - 4a^2k}{4a^2} = \frac{(a^2 - k)^2}{4a^2}.$$

Observamos que $a'^2 - k > 0$ uma vez que o numerador e o denominador do membro da direita da última igualdade são estritamente positivos.

No caso da aproximação que já foi apresentada para $\sqrt{2}$, obtemos

$$c \approx \frac{k - a^2}{2a} = \frac{2 - 1,4^2}{2,8} \approx 0,01428571429. \tag{2.5}$$

Porém temos ainda,

$$c \approx \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 0,01421296963.$$

Tomando o valor obtido em 2.5 e comparando observamos que o erro cometido é menor do que 0,00007275133.

Conclui-se que partindo de uma aproximação para $\sqrt{k}$ por falta, encontramos uma aproximação a' por excesso. Chamando de b a diferença entre as áreas dos dois grandes quadrados da figura, ficamos com $b = k - a^2$,o método de aproximação pode ser reescrito na forma

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}. \tag{2.6}$$

Que é uma fórmula de aproximação bastante encontrada ao longo da história da matemática.

Como ficaria a situação acima ao contrário, se ao invés de um quadrado de lado a situado no interior do quadrado de área k, utilizássemos um quadrado que o contivesse (Figura 2.4)?

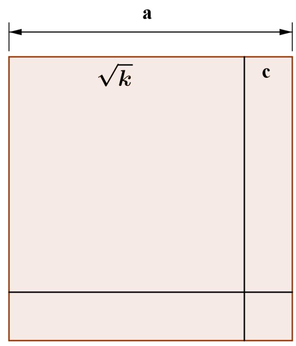


Figura 2.4: Interpretação Geométrica do Algoritmo mesopotâmico para encontrar o valor de $\sqrt{k}$

Teríamos então que $a - c = \sqrt{k}$. Além disso o *gnómon* que envolve o quadrado com área k agora possui a área dada por $a^2 - k$. Decompondo-se o *gnómon* em dois retângulos de lados $a - c$ e c mais um quadrado de lado c, temos assim que

$$2(a - c)c + c^2 = a^2 - k.$$

Resulta disso que $2ac - c^2 = a^2 - k$. Desprezando-se novamente o termo c^2, obtemos a aproximação c', onde $2ac' = a^2 - k$, ou seja,

$$c \approx c' = \frac{a^2 - k}{2a}.$$

Segue que, nesta situação, um melhor valor de $\sqrt{k}$ é obtida tomando a aproximação $a - c$ dada por

$$a' = a - c' = a - \frac{a^2 - k}{2a} = a + \frac{k - a^2}{2a}. \tag{2.7}$$

Como $a > \sqrt{k}$ segue-se que $a' > \sqrt{k}$.

É interessante observar que comparando (2.6) e (2.7) a fórmula de aproximação decorrente é exatamente a mesma. Dessa forma não importa se a primeira aproximação a foi por falta ou por excesso, a segunda a' será sempre por excesso.

De forma semelhante a anterior, podemos determinar a diferença b entre as áreas dos dois quadrados grandes da Figura 2.4 que, no caso, é $b = a^2 - k$ que é equivalente a 2.6, logo

$$\sqrt{a^2 - k} \approx a - \frac{b}{2a} \tag{2.8}$$

Uma outra forma de interpretar geometricamente o algoritmo mesopotâmico

A partir de manipulações algébricas podemos reescrever (2.7), onde obtemos

$$a' = a + \frac{k - a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right) \tag{2.9}$$

Esta nova forma de escrever (2.7) nos faz dar atenção aos número a e $\frac{k}{a}$, onde a pode ser tomado como um valor muito próximo de $\sqrt{k}$. Mais exatamente temos a média aritmética desses números, ou seja, a' é a média aritmética de a e $\frac{k}{a}$.

Podemos então dar uma nova interpretação geométrica. A determinação do lado do quadrado de área k pode ser realizada substituindo o quadrado por um retângulo de lados a e $\frac{k}{a}$, que também possui a área k, a Figura 2.5 representa essa nova situação.

O retângulo com área k e lados a e $\frac{k}{a}$ representa dessa forma uma aproximação do quadrado com a mesma área. Toma-se a média aritmética $a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{k}{a}\right)$ dos dois lados do retângulo obtendo-se um novo valor para a' que constitui uma melhor aproximação do lado do quadrado. A justificativa para essa afirmação se confirma pois sabemos que $a' < a$, pois a média a' está localizada entre os valores a e $\frac{k}{a}$, com

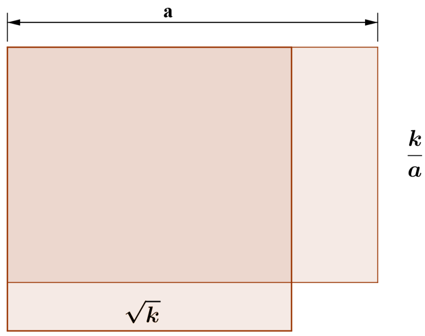


Figura 2.5: Outra Interpretação Geométrica do Algoritmo mesopotâmico para encontrar o valor de $\sqrt{k}$

$\frac{k}{a} < a$ e ainda que a aproximação *a'* é sempre maior do que $\sqrt{k}$. Obtemos então que $\sqrt{k} < a' < a$, de onde observamos que *a'* é mais próximo que $\sqrt{k}$ do que a.

2.2 Grécia

Os gregos tinham a idéia de que a natureza estava sujeita a princípios gerais, e não seguia leis e ordens determinadas por deuses ou demônios, acreditavam no pensamento racional do ser humano como seres livres concedendo cada vez mais importância a razão e às decisões humanas, afirmando inclusive que a razão é o caminho do conhecimento e que as pessoas são responsáveis pelo seu próprio comportamento, criando a concepção racional humanista.

Muitas culturas antigas desenvolveram vários tipos de matemática, mas os matemáticos gregos foram os únicos a inserirem o raciocínio lógico e a demonstração no âmago do tema [1, p. 14].

> *Assim, a matemática no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo e em uma das novas cidades comerciais localizadas na costa oeste da Ásia Menor. Segundo a tradição a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos "sete sábios" da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C.*[8, p. 95].

Segundo os historiadores antigos da geometria, os primeiros matemáticos que se tem notícia na Grécia foram Tales de Mileto, que viveu por volta de 600 a.C. e Pitágoras de Samos, um século depois disso.

Tales, é considerado como *o primeiro a tentar demonstrar algum teorema geométrico, inclusive as afirmações de a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que um círculo é cortado ao meio por qualquer dos seus diâmetros* [1, p. 15].

Pouco se sabe sobre Pitágoras com algum grau de certeza, as lendas sobre a figura desse matemático grego recaem sobre a sociedade pitagórica. Sua filosofia *baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros* [8, p. 97], ou seja, tudo era explicado a partir dos números.

Os Pitagóricos, como eram conhecidos os seguidores dessa sociedade, se preocupavam muito com o estudo de razões (que relacionavam com a música). Na geometria, eles possuem o crédito pelo Teorema de Pitágoras - *o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma dos quadrados sobre os catetos*[8, p. 103]. Esse teorema era conhecido pelos babilônios cerca de um milênio antes, mas sua primeira demonstração formal pode ter sido realizada por Pitágoras.

Ligado diretamente ao Teorema de Pitágoras está o problema em encontrar inteiros que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo, ou seja os ternos pitagóricos. Credita-se aos pitagóricos a fórmula no qual os três termos para todo m ímpar constituem um terno pitagórico.

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$$

A fórmula análoga, atribuída a Platão (c. 380a.C.), $(2m^2) + (m^2-1)^2 = (m+1)^2$ foi idealizada com o mesmo propósito, porém nenhuma dessas duas fórmulas fornecem todos os ternos pitagóricos.

É muito provável que o mais importante sucesso muitas vezes atribuídos à sociedade pitagórica seja a descoberta dos *incomensuráveis* [1, p. 16].

2.2.1 As grandezas irracionais

Os números inteiros surgem do processo de contagem de objetos. Porém a necessidade do cotidiano requer mais do que uma simples contagem, exige da matemática medições de várias quantidades como tempo, peso e comprimento. Para algumas dessas necessidade básicas referentes a medições são necessárias as frações.

Definindo-se, assim, um número racional como o quociente $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, de dois números inteiros, o sistema dos números racionais é suficiente para propósitos envolvendo medições, uma vez que eles contém todos os inteiros e todas as frações[8, p. 104].

Os primeiros matemáticos gregos acreditavam que todos os números poderiam ser representados através de uma reta, uma interpretação geométrica bastante simples, os inteiros positivos e negativos poderiam ser representados por um conjunto de pontos convenientemente espaçados a intervalos unitários, os positivos a direita de uma origem O e os negativos a esquerda de O. Já no caso das frações de denominador q poderiam ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q partes iguais. *Era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de arithmos, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões*[2, p. 50].

Deve ter sido um choque descobrir que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional. Essa descoberta foi uma das grandes realizações dos pitagóricos [8, p. 105] e é apontado por vários historiadores com um dos maiores marcos da História da Matemática.

Em [1] comenta-se que a grande percepção dos pitagóricos foi identificar que a razão de dois seguimentos não será sempre simples. De fato, eles demonstraram que a razão entre o lado e a digonal de um quadrado, nem sempre poderá ser a razão de quaisquer dois números inteiros. Chamaram segmentos dessa espécie de incomensuráveis, e chamaram de irracional a razão entre tais segmentos[2].

[2]Na verdade usaram as palavras gregas *alogos* e arrhetos, que também poderiam significar "não faláve" ou "inexprimível". Porém o termo "irracional"que significa "sem razão" foi a palavra que prevaleceu historicamente.

A irracionalidade da raiz quadrada de 2.

Geometricamente, para mostrar que $\sqrt{2}$ não é um número racional, basta provarmos que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser representado por um número racional. É bem conhecida a maneira de mostrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. A demonstração clássica, foi desenvolvida pelos matemáticos gregos e foi Aristóteles que observou que se baseava apenas na distinção entre os números pares e ímpares.

Teorema 2 *A raiz quadrada de 2, $\sqrt{2}$ é um número irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{2}$ é racional, logo podemos escrever que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Podemos escolher a e b de tal forma que $(a, b)^3 = 1$. Com essa alternativa a e b não possuem fatores comuns (dizemos nesse caso que eles são relativamente primos). Dessa forma, podemos escrever $\sqrt{2}$ como,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 2b^2. \tag{2.10}$$

Concluí-se que a^2 é um número par. Dessa forma a também é um número par, pois caso contrário, o produto de um número ímpar com um outro ímpar é sempre ímpar e a^2 também seria ímpar.

Como a é par podemos escrevê-lo como sendo $a = 2 \times r$, sendo r úm número natural. Assim, $a^2 = 4 \times r^2$.

Da equação (2.10) obtemos,

$$4r^2 = 2b^2 \Longrightarrow b^2 = 2r^2. \tag{2.11}$$

Onde, b^2 é par. Então, de forma análoga ao anterior para provar que a é par verifica-se também que b é par. Mas se a e b são pares possuem o fator 2 em comum. Isto contradiz com o fato de que $(a, b) = 1$, e portanto $\sqrt{2}$ não tem como ser racional, pois isso nos leva a uma contradição.

□

[3]O máximo divisor comum dos números a e b está sendo representado por (a,b).

Esbocemos uma demonstração geométrica alternativa da irracionalidade de $\sqrt{2}$ que consta em [8, p. 106], mostrando que um lado e a diagonal de um quadrado são *incomensuráveis.*

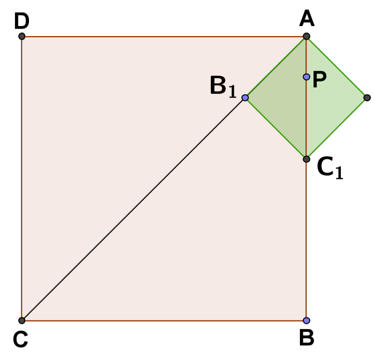


Figura 2.6: Demonstração alternativa, geométrica para $\sqrt{2}$.

Demonstração: Vamos provar por absurdo, ou seja vamos supor que um lado e uma diagonal de um quadrado são comensuráveis. Isso implica, então, a existência de um segmento AP (Figura 2.6) tal que tanto a diagonal AC como o lado AB do quadrado $ABCD$ são múltiplos inteiros de AP; isto é AC e AB são comensuráveis com relação a AP. Em AC tomemos o ponto B_1 de modo que $CB_1 = AB$ e tracemos B_1C_1 perpendicular a CA. Pode-se provar facilmente que $C_1B = C_1B_1 = AB_1$. Então $AC_1 = AB - AB_1$ e AB_1 são comensuráveis em relação a AP. Mas AC_1 e AB_1 são uma diagonal e um lado de um quadrado de dimensões menores que a metade daquelas do quadrado original. Segue-se então que, repetindo-se o processo, podemos obter finalmente um quadrado cuja diagonal AC_n e cujo lado AB_n são comensuráveis com relação a AP e $AC_n < AP$. Esse absurdo prova o teorema.

□

A primeira pergunta que surge a mente é se existem outras raízes quadradas irracionais. A primeira demonstração exibida na seção 2.2.1 pode ser modificada para mostrar, pelo menos mais uma raiz irracional, a $\sqrt{3}$.

Teorema 3 *A raiz quadrada de 3, $\sqrt{3}$ é um número irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{3}$ é racional. Logo existem dois números inteiros a e b, onde $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. Podemos escolher a e b de tal forma que $(a, b) = 1$, daí,

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Longrightarrow 3 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow a^2 = 3b^2. \tag{2.12}$$

O Teorema Fundamental da Aritmética, afirma que todo número inteiro se escreve de maneira única, a menos de ordem dos fatores, como um produto de potências de primos distintos [5, p. 03]. Desse teorema decorre que se o quadrado de um dado número é múltiplo de 3, então esse número tem de ser múltiplo de 3. Logo fazendo $a = 3r$ temos,

$$a^2 = (3r)^2 = 9r^2 = 3b^2 \Longrightarrow b^2 = 3r^2 \tag{2.13}$$

Observamos que b é um múltiplo de três. Desta forma os números a e b têm um fator em comum, o número 3, o que é uma contradição implicando em $\sqrt{3}$ ser um número irracional.

$\square$

Esse raciocínio pode ser utilizado para qualquer número que seja primo. Mas para quais outros valores inteiros n a $\sqrt{n}$ seria irracional? A resposta a essa questão é dada através do teorema abaixo.

Teorema 4 *A raiz quadrada do número natural n, $\sqrt{n}$, é um número natural se e somente se n é um quadrado. Em todos os outros casos, $\sqrt{n}$ é um número irracional.*

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $\frac{p}{q}$ é um número racional tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = n$, então $p^2 = nq^2$. Como os fatores primos de p^2 e q^2 aparecem todos com expoente par o mesmo deve ocorrer com os fatores primos de n. Então n é o quadrado de algum número natural.

$\square$

A Espiral de Teodoro de Cirene: Uma curiosidade

Os pitagóricos deram uma importância à matemática e um valor frente às outras ciências que estudavam (música, astronomia e oratória). Tudo se resumia aos números naturais e suas propriedades. *Para eles, por exemplo, duas grandezas* *do mesmo tipo admitiriam medidas em comum, tal como dois números admitem divisor comum, ou seja admitiam a comensurabilidade das grandezas* [16, p.163].

Quando as medidas de dois segmentos de reta podem ser expressas como um número inteiro de uma mesma unidade de medida dizemos que eles são comensuráveis. Ou seja, sejam A e B, duas grandezas, elas podem ser descritas em função de uma terceira, dizemos que $A = n.C$ e $B = m.C$.

Os pitagóricos entretanto tiveram dificuldades ao tentar solucionar problemas que envolviam medidas, uma delas a determinação da diagonal do quadrado. O que gerou muita frustração e preocupação entre os pitagóricos pois não conseguiam achar um número natural que pudesse representar a medida da diagonal em função dos lados do quadrado. Dessa forma sua idealização que tudo poderia ser explicado através dos números naturais e de suas propriedades estava ameaçada. Utilizando o Teorema de Pitágoras, podemos encontrar o valor da diagonal do quadrado como sendo,

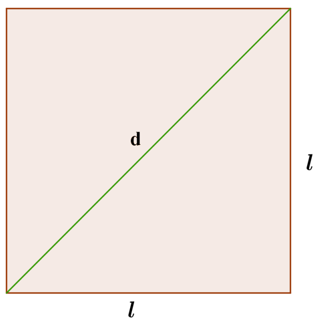


Figura 2.7: Cálculo do valor da diagonal do quadrado.

Daí podemos observar que,

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2.$$

A partir desse problema os números irracionais foram evidenciando-se na medida da hipotenusa de triângulos retângulos e pode-se ser representados geometricamente sobre a reta numérica, localizando os pontos entre os pontos racionais [16, p.164] (Ver Figura 2.8).

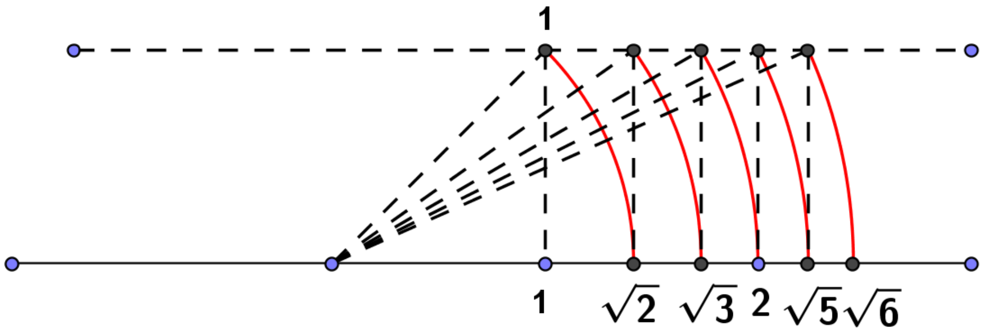


Figura 2.8: Representação dos Números Irracionais na Reta.

É nesse contexto que se desenvolveu a "Espiral de Teodoro de Cirene". Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido[4]. Mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene (425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$, também são irracionais (ver [8]).

Teodoro foi pioneiro no estudo da irracionalidade das raízes dos números inteiros não quadrados porém os documentos que comprovam tais afirmações foram perdidos e não chegaram até nós. Teodoro ensinou matemática a Platão (427 a.C.-347 a.C.) que transmitiu alguns de seus ensinamentos às gerações futuras.

Logo, podemos concluir que a Espiral de Teodoro é um método para construir geometricamente segmentos de comprimento $\sqrt{n}$, sendo $n \geq 2$. Como o triângulo inicial tem dois catetos unitários; portanto, sua hipotenusa mede $\sqrt{2}$. O segundo triângulo é apoiado na hipotenusa do primeiro, e seu menor cateto também é unitário, de modo que a medida da hipotenusa, pelo Teorema de Pitágoras é $\sqrt{3}$. O próximo triângulo se apoia na hipotenusa do segundo e, também, tem um cateto unitário, e, assim, vai sendo construída a espiral (Figura 2.9).

Muito se discute sobre qual teria sido a demonstração de Teodoro, e porque ele parou no $\sqrt{17}$ [5, p. 04]. Supõe-se que ele demonstrou, de forma geométrica, cada um dos resultados separadamente e que parou ao chegar ao número 17 porque a demonstração concreta para 19 era muito complicada e que a de 18 não oferecia interesse por reduzir-se à de casos anteriores. Alguns historiadores alegam que Teodoro pode ter parado por perceber que a espiral não completaria. Em 1958, E.

[4]É possível que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, que é a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, tenha sido o primeiro irracional conhecido.

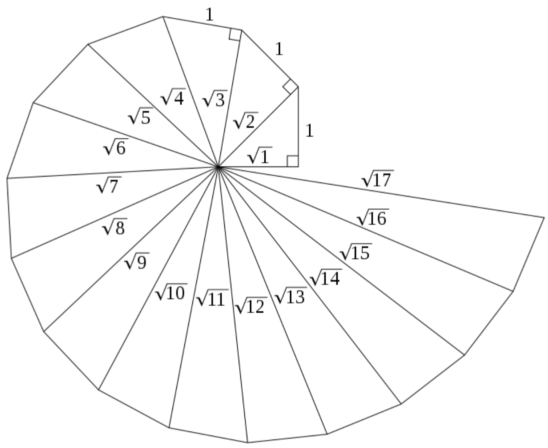


Figura 2.9: Espiral de Teodoro.

Teuffel provou que duas hipotenusas da espiral nunca coincidem, não importando o tamanho da espiral.

2.2.2 O Cálculo de Raízes Quadradas na Grécia: A escada de Theon

Boyer (ver [2]) afirma que a aritmética grega tinha mais coisas em comum com a filosofia do que com o que consideramos matemática. Theon de Smirna que viveu em torno do ano de 140 da Era Cristã, era um desses homens que se preocupavam mais com a aplicação da aritmética à música e à filosofia platônica do que com o progresso da matemática como ciência.

Mesmo assim, Theon de Smirna *apresentou um algoritmo muito simples para calcular a raiz quadrada de 2, e que pode facilmente ser generalizada para achar a raiz quadrada de qualquer número natural* [5, p. 15].

Apresentada em [5] vamos generalizar o método da escada de Theon para o cálculo da raiz quadrada. Seja c um racional qualquer maior do que 1, defina as sucessões x_n e y_n por recorrência como sendo:

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \qquad y_n = x_n + (c-1)x_{n-1}. \tag{2.14}$$

Podemos então escrever de forma imediata,

$$y_n = cx_{n-1} + y_{n-1}.$$

Seja uma sucessão r_n definida por $r_n = \frac{y_n}{x_n}$. Aceitando que r_n converge para r, então $r = \sqrt{c}$. Vejamos,

$$r_n = \frac{y_n}{x_n} = \frac{cx_{n-1} + y_{n-1}}{x_{n-1} + y_{n-1}} = \frac{c + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}}{1 + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}} = \frac{c + r_{n-1}}{1 + r_{n-1}}.$$

Se $\lim_{n\to\infty} r_n \to r$, então $\frac{c+r_{n-1}}{1+r_{n-1}} \to \frac{c+r}{1+r}$,

Ou seja,

$$r = \frac{c+r}{1+r} \Longrightarrow r + r^2 = c + r \Longrightarrow r = \sqrt{c}.$$

Para demonstrar que a sucessão r_n realmente converge se faz necessário utilizar alguns resultados apresentados aqui como lemas:

Lema 4.1 Se as sucessões x_n e y_n estão definidas como (2.14), *então*

$$y_n + \sqrt{c}x_n = (1 + \sqrt{c})^n, \qquad y_n - \sqrt{c}x_n = (1 - \sqrt{c})^n. \tag{2.15}$$

Para demonstração ver [5, p. 19].

Lema 4.2 Para todo $n \geq 3$,

$$x_n = 2x_{n-1} + (c-1)x_{n-2}. \tag{2.16}$$

Para demonstração ver [5, p. 19].

Teorema 5 *A sucessão r_n converge para $\sqrt{c}$.*

Demonstração: Temos de 2.14,

$$y_n = x_n + (c-1)x_{n-1} \Longrightarrow \left|\frac{y_n}{x_n} - \sqrt{c}\right| = \frac{(\sqrt{c}-1)^n}{x_n}.$$

Mas de (2.16) podemos obter que $x_n > (c-1)x_{n-2}$. Então,

$$x_n > (c-1)^2 x_{n-4},$$

$$x_n > (c-1)^3 x_{n-6},$$

$$\ldots$$

$$x_{2n} > (c-1)^n,$$

$$x_{2n+1} > (c-1)^n.$$

Assim, se tomarmos um valor de n par,

$$\left|\frac{y_{2n}}{x_{2n}} - c\right| = \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n}}{x_{2n}} < \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n}}{(c-1)^n} = \left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\right)^n,$$

e, para o valor de n, ímpar,

$$\left|\frac{y_{2n+1}}{x_{2n+1}} - c\right| = \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n+1}}{x_{2n+1}} < \frac{(\sqrt{c}-1)^{2n+1}}{(c-1)^n} = \left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\right)^n.$$

Mas como,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\right)^n = 0.$$

Segue-se em ambos os casos, que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \sqrt{c}.$$

□

Vamos realizar um exemplo prático com o algoritmo de Theon para achar raízes quadradas, dessa forma podemos visualizar melhor como o mesmo é simples. Encontraremos $\sqrt{3}$, afim de compararmos e comprovarmos sua eficácia, utilizando uma calculadora temos como solução exata dessa raiz até a oitava casa decimal $1,732050807$.

Façamos $x_1 = y_1 = 1$ e

$$x_n = x_{n_1} + y_{n-1}$$

$$y_n = x_n + (3-1)x_{n-1} \Longrightarrow y_n = x_n + 2x_{n-1}$$

$$r_n = \frac{y_n}{x_n}.$$

Temos então na tabela 2.1, os resultados

x	x_n	y_n	r_n
1	1	1	1
2	2	4	2
3	6	10	1,666666667
4	16	28	1,75
5	44	76	1,727272727
6	120	208	1,733333333
7	328	568	1,731707317
8	896	1552	1,732142857
9	2448	4240	1,732026144
10	6688	11584	1,732057416
11	18272	31648	1,732049037
12	49920	86464	1,732051282
13	136384	236224	1,73205068
14	372608	645376	1,732050842
15	1017984	1763200	1,732050798
16	2781184	4817152	1,73205081
17	7598336	13160704	1,732050807

Tabela 2.1: Exemplo do Algoritmo de Theon para o cálculo de $\sqrt{3}$

Observando as aproximações (r_n) podemos observar que após dez passos do processo já encontramos uma aproximação exata de até cinco casas decimais e após 17 passos encontramos a aproximação com nove casas decimais.

Interpretação Geométrica para a Escada de Theon

Carvalho explana que não há, hoje, como saber exatamente como os gregos chegaram ao resultado apresentado por Theon de Smirna para o cálculo de $\sqrt{2}$ e apresenta uma hipótese do historiador de matemática van der Waerden onde menciona que *Platão, no seu a República, afirma que 7 é a "diagonal racional"que corresponde ao lado 5* [5, p. 21]. Tendo como conceitos de números diagonais e de números lados:

> *Sendo a fonte de todos os números, a unidade é potencialmente um lado e uma diagonal. Ora, tomemos duas unidades, uma lateral e uma diagonal; então um novo lado é formado adicionando a unidade diagonal à unidade lateral, e uma nova diagonal, adicionando duas vezes a unidade lateral à unidade diagonal*(Proclus apud [5, p.21]).

De maneira geral, chamando de a_n o n-ésimo termo da sucessão de "números lados" obtido e de d_n o n-ésimo termo da sucessão de "números diagonais" teremos as recorrências que já estamos ambientados, $a_{n+1} = a_n + d_n$ e $d_{n+1} = 2a_n + d_n$.

Fazendo uma análise geométrica na Figura 2.10 , temos que AC é a digonal do quadrado de lado $a = AB = BC$, e tomamos $b = CD = CB$. Do ponto D traçamos DE perpendicular a AC. Então, $AD = DE = EB$.

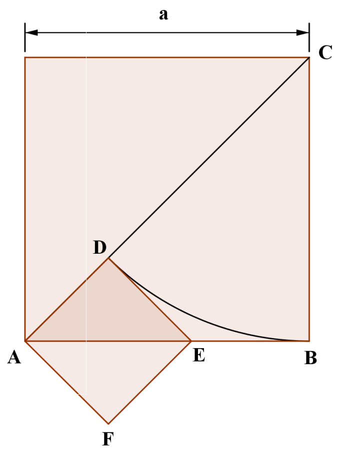


Figura 2.10: Interpretação Geométrica para o Processo da Escada de Theon

Sejam $b' = a - a'$ e $a' = b - a'$. Então,

$$a = a' + b', \qquad b = 2a' + b', \tag{2.17}$$

Que são recorrências análogas as que foram apresentadas.

O processo iterativo pode ser repetido no quadrado de lado AD, e assim de forma sucessiva, obtendo a'', a''',..., b'', b''',... . Dessa forma a e b podem ser escritos, usando as recorrências 2.17, em função dos sucessivos números lados e diagonais. Isso comprova que os gregos já conheciam recorrências do tipo que utilizamos para a escada de Theon.

2.2.3 O Cálculo de Raízes Quadradas na Grécia: O método de Heron

A matemática grega em sua forma clássica tem seu desfecho no final do século V. Porém neste contexto precisa-se reforçar uma idéia clara, não existia apenas essa idéia de matemática durante o período de esplendor grego (600 a.C. a 400d.C.). A tradição "científica" da matemática grega encobriu a matemática prática do dia a dia.

Em [2] verificamos que existiam dois níveis de configurações de estudo, uma divisão entre a teoria dos números e as técnicas de computação, uma era racional e a outra inteiramente prática. *Os babilônios não tinham a primeira, mas eram fortes na segunda, e é essencialmente o tipo de matemática babilônica que se encontra em Heron*[2, p.117].

Heron de Alexandria, viveu na segunda metade do século I d.C. e se destacou muito na matemática aplicada, *seus escritos, que com tanta frequência enfatizam mais aplicações práticas do que o acabamento teórico, mostram uma fusão curiosa do grego com o oriental*[8, p. 205].

Dos trabalhos geométricos de Heron o considerado mais importante é a obra *A Métrica*, que só foi redescoberta em 1896, na Constantinopla. O primeiro livro dessa obra apresentava diversos problemas de medida da área de quadrados, retângulos, triângulos, entre outras figuras e da superfície de algumas formas geométricas. No problema 8 da referida obra, é apresentado sua fórmula para o cálculo da área de um triângulo cujos três lados são conhecidos,

$$A = \sqrt{a(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{2.18}$$

Na qual $s = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo. Carvalho (ver [5]) cita em seu trabalho que Heron apresenta uma "demonstração geométrica" de (2.18) e aplica a fórmula para os valores de $a = 7$, $b = 8$ e $c = 9$, encontrando $\sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720}$.

Em alguns problemas escritos em sua obra, cuja a solução utilizava a equação (2.18), os números escolhidos por Heron tinham raízes fáceis de serem calculadas. Isso não aconteceu no problema 08, que deveria ser calculado $\sqrt{720}$. Em [5] comenta-se que Heron explica o procedimento para a solução,

> *Como 720 não tem lado racional, nós extrairemos o lado com uma diferença muito pequena, da maneira seguinte. Como o primeiro número quadrado maior do que 720 é 729, cujo lado é 27, divida 720 por 27, e o resultado é 26 e* $\frac{2}{3}$*, adicione 27 e obtemos* $53\frac{2}{3}$*; tome a metade disso, que é igual a* $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$*. Em verdade,* $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ *multiplicado por ele mesmo dá* $720\frac{1}{36}$*; de modo que a diferença (dos quadrados) é* $\frac{1}{36}$*. Se quisermos tornar essa diferença menor do que* $\frac{1}{36}$*, colocaremos* $720\frac{1}{36}$ *achado há pouco no lugar de 729 e, procedendo da mesma maneira acharemos que a diferença (sobre os quadrado) é muito menor do que* $\frac{1}{36}$.[5, p.11].

Esse texto de Heron deixa claro a idéia de repetir o procedimento que foi o grande mérito dele, pois já sabemos que os mesopotâmios conheciam esse método de resolver raízes quadradas, porém até hoje nunca ficou claro se eles tinham a idéia de repetir sucessivamente o processo afim de se obter aproximações cada vez melhores para $\sqrt{k}$.

Dessa forma obtemos, pela iteração do processo de Heron, uma sucessão infinita, a_n de números a_1, a_2, a_3,...., tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{k}$. Nesta sucessão, cada termo está imediatamente relacionado ao anterior através da fórmula

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right). \tag{2.19}$$

Temos assim uma recorrência, método poderoso para definir sucessões.

Para uma melhor visualização do método com a utilização das sequências vamos calcular a $\sqrt{95}$, com uma aproximação de oito casas decimais.Temos

$$k = 95$$

$$a_1 = 9$$
$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{k}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(9 + \frac{95}{9}\right) \approx 9,77777778$$
$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{k}{a_2}\right) = \frac{1}{2}\left(9,77777778 + \frac{95}{9,77777778}\right) \approx 9,74684343$$
$$a_4 = \frac{1}{2}\left(a_3 + \frac{k}{a_3}\right) = \frac{1}{2}\left(9,74684343 + \frac{95}{9,74684343}\right) \approx 9,74679434$$

Assim chegamos como solução para $\sqrt{95} \approx 9,74679434$. Calculando essa mesma raiz com o auxílio de uma máquina de calcular ou de uma planilha de cálculos encontramos uma solução com doze casas decimais, $\sqrt{95} \approx 9,746794344809$. Após a realização de 04 iterações do processo de Heron verifica-se que, os oito algarismos iniciais das casas decimais dos valores encontrados coincidem, ou seja, o método nos fornece um valor aproximado com uma margem de erro inferior a 0,00000001.

Justificativa do Algoritmo de Heron

Antes de iniciarmos a justificativa, precisamos apresentar algumas definições e resultados que se fazem necessário.

Definição 6 *Dizemos que uma sequencia (x_n) é limitada se existe um real positivo K tal que,*

$$|x_n| \leq K, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

De forma equivalente, uma sucessão (x_n) é limitada se existem números reais L e U tais que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se tem $L \leq x_n \leq U$.

Definição 7 *Uma sequencia (x_n) é dita:*

(a) ***Crescente*** *se $x_1 < x_2 < x_3 < ...$*
(b) ***Decrescente*** *se $x_1 > x_2 > x_3 > ...$*
(c) ***Não decrescente*** *se $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ...$*
(d) ***Não crescente*** *se $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ...$*

Uma sequencia é dita monótona se uma das condições acima ocorre.

Teorema 8 *Toda sequencia monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Consideremos a sequencia $(a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ...)$ não decrescente limitada. A hipótese de ser limitada significa que ela é limitada superiormente, ou seja, seu conjunto de valores possui supremo S. Afirmamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $S - \varepsilon < S$, o número $S - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos a_n. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S - \varepsilon < a_{n_0}$. Como a sequencia é monótona,

$$n > n_0 \Rightarrow a_{n_0} \leq a_n$$

e, portanto,

$$S - \varepsilon < a_n.$$

Como $a_n \leq S$ para todo n, vemos que

$$n > n_0 \Rightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon.$$

A demonstração para sequencias não crescentes e limitadas é análoga.

□

Para mais detalhes sobre convergência de sequencias ver [14].

Uma justificativa para esse método é dada em [21]:

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a > 0$. Vamos supor um valor inicial a_1 e definir

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2}. \tag{2.20}$$

Queremos mostrar que a sequencia obtida em (2.20) converge para $\sqrt{a}$. Iniciamos observando que para todo número real não nulo x temos

$$\left(x - \frac{x}{a}\right)^2 \geq 0$$

$$x^2 - 2a + \frac{a}{x} \geq 0$$

$$x^2 + \frac{a}{x} \geq 2a.$$

Adicionando 2a aos dois membros da inequação, ficamos

$$x^2 + \frac{a}{x} + 2a \geq 2a + 2a$$

$$\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 \geq 4a.$$

$$\frac{\left(x + \frac{a}{x}\right)^2}{4} \geq a. \tag{2.21}$$

Elevando os dois membros de (2.20) ao quadrado teremos,

$$(a_{n+1})^2 = \left(\frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2}\right)^2$$

$$(a_{n+1})^2 = \frac{(a_n + \frac{a}{a_n})^2}{4}.$$

$$(a_{n+1})^2 = \frac{(a_n + \frac{a}{a_n})^2}{4} \geq a, n \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Além disso, para todo número real positivo x, se $a \leq x^2$ então

$$\frac{(x + \frac{a}{x})^2}{4} \leq \frac{(x + x)^2}{4} = x^2.$$

Como $a \leq (a_{n+1})^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue-se que $(a_{n+2})^2 \leq (a_{n+1})^2$. O que implica que $(a_{n+2}) \leq (a_{n+1})$, pois esses números são maiores ou iguais a zero. Portanto mesmo que tivesse se escolhido $a_1 < \sqrt{a}$ vale sempre que $a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq$ ..., com $(a_{n+1})^2 \geq a$,para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo de acordo com o Teorema 8 existe $c = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Aplicando limite quando n tende ao infinito nos dois membros de (2.20), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2}$$

$$c = \frac{c + \frac{a}{c}}{2}$$

$$2c = \frac{c^2 + a}{c}$$

$$2c^2 - c^2 = a$$

$$c^2 = a.$$

Concluímos então que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

Uma Interpretação Geométrica do Algoritmo de Heron

Carvalho, (ver [5]) apresenta uma interpretação geométrica para o algoritmo de Heron, de forma bem ilustrativa temos,

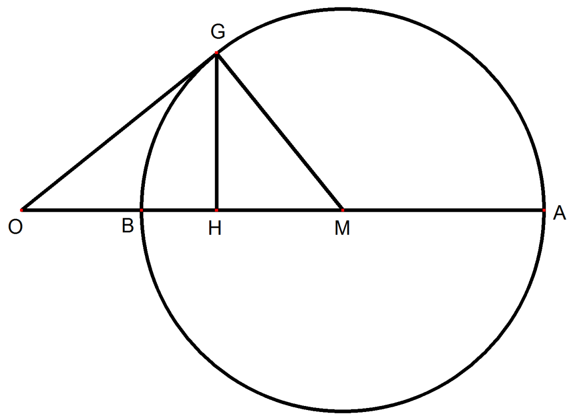


Figura 2.11: Demonstração Geométrica para o algoritmo de Heron

Na figura 2.11, sejam $OA = a$, $OB = b$, M o ponto que divide o segmento AB em duas partes iguais e OG a tangente, em G, à circunferência de centro M e raio MB. É fácil de verificar que OM é a média aritmética de a e de b, OG é a média geométrica desses números e OH é sua média harmônica. Para ver isso, é suficiente tomar um sistema de eixos coordenados cartesianos com origem em O e eixo dos x ao longo de OA. logo, as coordenadas de A, B e M são respectivamente, $(a, 0)$, $(b, 0)$ e $\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$.

A equação da circunferência de raio BM e centro em M será,

$$x^2 + y^2 - (a + b)x + ab = 0. \tag{2.23}$$

A equação da reta que passa por O e é tangente à circunferência em G, é da forma,

$$y = tx. \tag{2.24}$$

Para achar a interseção da reta que passa na origem O e G com a circunferência, basta resolvermos o sistema formado por (2.23) e (2.24).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (a+b)x + ab = 0 \\ y = tx \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, e admitindo que ele tenha uma única solução, obtemos que $t = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$, daí a equação da reta que passa por O e por G será,

$$y = \frac{(a-b)}{2\sqrt{ab}}x. \tag{2.25}$$

Substituindo o valor de y encontrado pela equação (2.25) na equação da circunferência (2.23), chegamos as coordenadas de H dadas por,

$$\left(\frac{2ab}{a+b}, 0\right)$$

Assim OH é realmente a média harmônica de a e de b.

Daí chegamos aa coordenadas do ponto G facilmente encontrando:

$$\left(\frac{2ab}{a+b}, \frac{\sqrt{ab}(a-b)}{a+b}\right).$$

Então, calculando a distância entre os ponto $O(0,0)$ e G, vemos que OG é igual a $\sqrt{ab}$. Se fizermos $b = \frac{k}{a}$, estamos exatamente na situação do algoritmo de Herão.

Dessa forma, demonstramos de fato que OM é a média aritmética de a e de b, OG é a média geométrica desses números e OH é a sua média harmônica.

Assim na Figura 2.11, podemos chamar $OM = a_1$, $OH = b_1$ e $OG = g_1 = g_0 = \sqrt{k}$.

Pode-se repetir a construção geométrica, obtendo uma nova figura (2.12) que mostra o segundo passo do algoritmo de Heron.

Observamos, que as sucessões $OM, OM_1, OM_2, ...OH, OH_1, ...$ são respectivamente decrescentes e crescentes e convergem, para o seu valor comum $g = \sqrt{k}$.

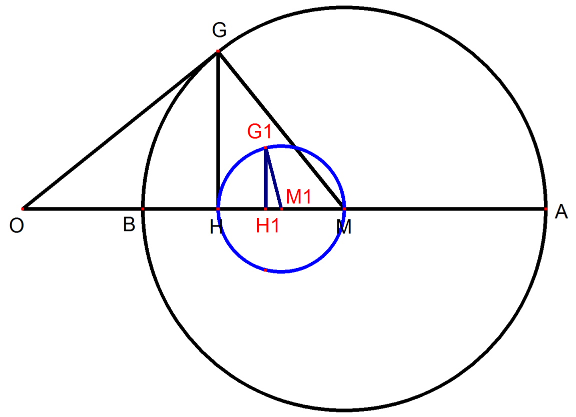


Figura 2.12: Interpretação Geométrica para o segundo passo do algoritmo de Heron.

2.3 Índia

Com a queda do Império Romano no Ocidente, no século VI a.C., a Índia foi invadida por tropas persas e nesse período foi que nasceram dois indianos famosos o gramático Panini e o pregador religioso Buda. Muito provavelmente essa é a época dos *Sulvasutras* ("as regras da corda").

Mesmo sofrendo várias invasões e influencias de culturas diferentes, os indianos conseguiram desenvolver uma cultura rica que se preservou por séculos. Em relação a matemática, os hindus foram muito bem com o desenvolvimento da aritmética e fizeram contribuições muito significativas à álgebra. Os problemas aritméticos eram resolvidos por *falsa posição* ou pelo método de *inversão*, no qual se trabalha para trás, a partir dos dados.

A maior parte da matemática hindu trazia em seus problemas escritos em versos, isso acontecia devido a textos escolares que eram escritos dessa maneira ou pelo fato dos problemas serem usados, constantemente, para entretenimento social.

Os hindus já faziam somas de progressões aritméticas e geométricas, encontrava soluções para problemas com fins comerciais que exigiam cálculos de juros simples e compostos e descontos. Aceitavam números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática com respostas reais tem duas raízes formais. Possuem o mérito ainda de unificarem a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método de completamento de quadrados (ver [2]).

2.3.1 A Raiz Quadrada na Índia

Na geometria, os hindus não eram tão eficientes quanto na aritmética. Sua geometria estava ligada diretamente a mensuração prática e era muito empírica, sem demonstrações ou postulados.

> *A Índia, como o Egito, tinha seus "estiradores de corda", e as primitivas noções geométricas adquiridas em conexão com o traçado de templos e medida e construções de altares tomaram a forma de um corpo de conhecimentos conhecidos como os Sulvasutras ou "regras de corda", Sulva (ou sulba) refere-se às cordas usadas para medidas e* sutra *significa um livro de regras ou aforismos relativos a um ritual ou ciência* [2, p. 141].

As *Sulvasutras* mostram aplicações de geometria na construção de altares, e ao fazê-lo exibem traços da relação pitagórica. Boyer (ver [2]) explica que, podem-se encontrar regras para a construção de ângulos retos utilizando cordas cujos comprimentos formam ternos pitagóricos, como 3, 4, 5 ou 5,11, 13 ou 8, 15, 17 ou 12, 35 e 37.

Eves (ver [8]) relata que dentre as regras existentes tinham algumas que traziam instruções para encontrar um quadrado igual à soma ou diferença de dois quadrados dados e um quadrado igual a um retângulo dado. Há soluções do problema de quadrar um círculo e também aparece um método para o cálculo do valor de $\sqrt{2}$ [5], que utiliza frações unitárias e tem seu resultado correto até a quinta casa decimal: *Aumenta a medida da sua terça parte, e essa terça parte da sua própria*

[5] *Provavelmente relacionado como projeto de construção de uma altar cuja área duplique a de um altar dado.*

quarta parte menos trinta e quatro-ésima parte dessa quarta parte (ver [11, p. 16]).

Dessa forma encontra-se como aproximação de $\sqrt{2}$ a expressão

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{(3)(4)} - \frac{1}{(3)(4)(34)}, \tag{2.26}$$

Esta aproximação dá como resultado, 1,414215686, e os autores dos *subasutras* não forneceram quaisquer orientações ou indicações de como eles chegaram a esse valor para $\sqrt{2}$.

Uma explicação para o método utilizado pelos hindus consiste em tomarmos dois quadrados de áreas iguais a 1 e tentar formar com eles um quadrado de área 2 (Figura 2.13) (ver [5]).

Iniciamos com dois quadrados de mesma área igual a 1, $ABCD$ e $PQRS$.

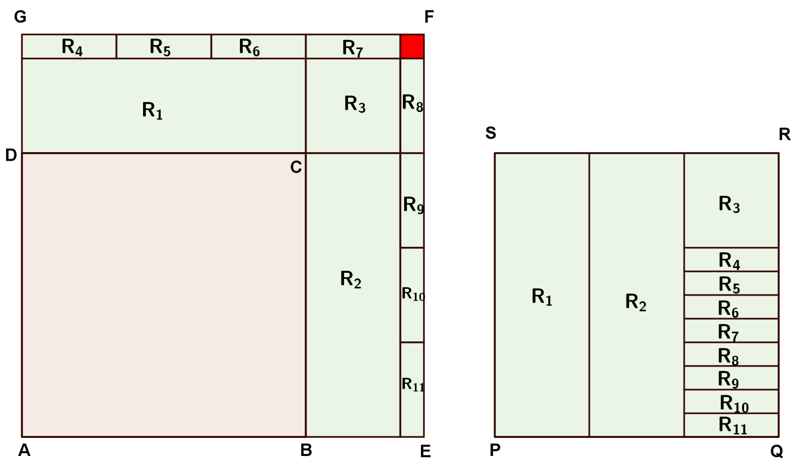


Figura 2.13: Interpretação Geométrica para o Algoritmo Hindu.

Dividimos o quadrado $PQRS$ em três retângulos congruentes, com seus lados maiores paralelos a PS. Os dois primeiros nomeados por R_1 e R_2, são colocados ao lado do outro quadrado $ABCD$ conforme segue na Figura 2.13.

O terceiro retângulo pode ser decomposto em três quadrados congruentes, um deles designado por R_3, é levado para a figura do quadrado $ABCD$ (Figura 2.13).

O que resta do terceiro retângulo é então dividido nos retângulos 4, 5, . . . , 10 e 11 de mesmas dimensões, que são colocados na figura da esquerda, como mostrado.

Dessa forma, transformamos o quadrado $ABCD$ em outro quadrado $AEFG$, cujo seu lado é igual a,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = 1\frac{5}{12}. \tag{2.27}$$

Se notarmos bem a área desse novo quadrado $AEFG$ é maior do que 2, pois o pequeno quadrado destacado em $ABCD$ não vem do quadrado $PQRS$. A área desse pequeno quadrado é igual a $\left(\frac{1}{3.4}\right)^2$. Para podermos ter uma área igual a duas vezes a área de $PQRS$, vamos eliminar duas pequenas faixas ao longo de AE e de AG, para podermos obter uma área igual a 2.

Seja x a largura de cada uma das pequenas faixas ao longo de AE e de AG. O Somatório de suas áreas pode ser dado por

$$2x\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right) - x^2. \tag{2.28}$$

Estamos pretendendo eliminar essa área de forma que a mesma seja igual a área do pequeno quadrado. Assim,

$$2x\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right) - x^2 = \left(\frac{1}{3.4}\right)^2. \tag{2.29}$$

Desprezando-se o termo x^2 teremos que,

$$2x\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}\right) \approx \left(\frac{1}{3.4}\right) \times \left(\frac{1}{3.4}\right). \tag{2.30}$$

$$2x\left(\frac{17}{3 \cdot 4}\right) \approx \left(\frac{1}{3.4}\right) \times \left(\frac{1}{3.4}\right). \tag{2.31}$$

$$x \approx \frac{1}{3.4.34}. \tag{2.32}$$

O matemático Victor Katz, propõe outra interpretação para a aproximação (2.26) (ver [5]). Partindo de (2.27), e do resultado $1\frac{5}{12}$, aplica-se o método mesopotâmico, obtendo de forma direta a aproximação descrita pelos hindus.

$$\frac{17}{12} - \frac{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 2}{2.\frac{17}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{34}{12}} = \frac{17}{12} - \frac{1}{3.4.34}. \tag{2.33}$$

Sobre este fato Neugebauer (apud [11, p.18]) faz o seguinte comentário: *Não me parece de excluir a possibilidade de que tanto o termo principal, como a correção subtraída sejam, em última instância, baseados nas duas aproximações babilônicas.*

2.3.2 O cálculo da Raiz Quadrada no Manuscrito de Bakhshäli

O Manuscrito de Bakhshäli (Figura 2.14) é um antigo trabalho matemático indiano escrito sobre a casca de Bétula. Atualmente, está sendo considerado como o documento matemático mais antigo da História da Índia, apesar da discussão acerca da sua confecção, acredita-se que ele pertença ao século IV d.C ou anterior a isso, o manuscrito encontrado é uma réplica do original datado do século VII ou VIII d.C. e foi localizado em escavações na aldeia de Bakhshäli, no Paquistão em 1881.

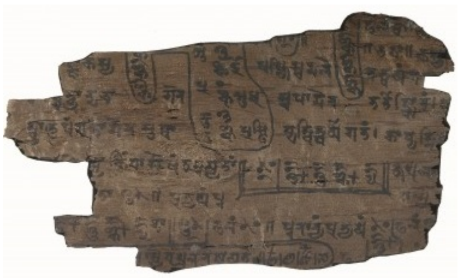


Figura 2.14: Manuscrito de Bakhshali.
Fonte: http://bruhaspati.com/tag/ancient-civilization, acesso em 24 mar. 2013.

Um dos assuntos mais interessantes no manuscrito de Bakhshäli é uma fórmula para estimar raízes quadradas, com uma grande precisão, chegando a ser até inacreditável considerando o tempo remoto a qual o manuscrito pertence (ver [22]).

Suponha que para encontrar a $\sqrt{n}$, com $n > 0$, expressamos n como $n = a^2+b$, onde $|b|$ é muito pequeno em comparação com a (tão pequeno quanto possível dentro dos limites da fácil maipulação aritmética, usando somente as operações básicas, adição, subtração, multiplicação e divisão). Nos valendo da aproximação linear $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ para $x \approx 0$ (utilizando a aproximação da tangente) obtemos,

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a}. \tag{2.34}$$

Está fórmula conhecida pelos babilônios é muito boa, entretanto a fórmula no Manuscrito de Bakhshäli vai mais longe através da inserção de um termo extra.

> *No caso de um número não quadrado, subtrair o número do quadrado mais próximo, dividir o resto por duas vezes o valor do quadrado mais próximo; a metade do quadrado desta é dividida pela soma da raiz aproximada e a fração. Este é subtraído e dará o valor da raiz corrigido* [22, p. 885].

Depois de decifrada a "receita" para o cálculo da raiz quadrada e utilizando linguagem moderna podemos escrever a fórmula,

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{b}{2a}\right)} \tag{2.35}$$

Exemplificando, se desejamos calcular a $\sqrt{11}$, podemos fazer $a = 3$ e $b = 2$. Com a aplicação da fórmula obtemos,

$$\sqrt{3^2+2} = 3 + \frac{2}{6} - \frac{\left(\frac{2}{6}\right)^2}{2\left(3+\frac{2}{6}\right)} = 3 + \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{9}}{2\times\left(3+\frac{1}{3}\right)}$$

$$\sqrt{11} = \sqrt{3^2+2} = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{60} = \frac{199}{60} \approx 3,31667.$$

Com o auxílio de uma máquina de calcular encontramos $\sqrt{11} = 3,3166247903$ onde observa-se uma precisão até a quarta casa decimal.

Porém, podemos encontrar valores melhores para a e b através de cálculos racionais simples, facilmente podemos obter $a = 3,3$ e $b = 11 - 3,3^2 = 0,11$, aplicando a fórmula de Bakhshäli,

$$\sqrt{3,3^2+0,11} = 3,3 + \frac{0,11}{6,6} - \frac{\left(\frac{0,11}{6,6}\right)^2}{2\left(3,3+\frac{0,11}{6,6}\right)} = 3,3 + \frac{1}{60} - \frac{\frac{1}{3600}}{2\times\left(3,3+\frac{1}{60}\right)}$$

$$\sqrt{11} = \sqrt{3,3^2+0,11} = \frac{79201}{23880} \approx 3,316624790.$$

Se compararmos novamente ao valor encontrado com o auxílio de uma calculadora, podemos verificar que o valor é correto até a nona casa decimal.

A precisão da fórmula é realmente surpreendente, porém nunca saberemos qual o caminho que foi utilizado pelos autores de Bakhshäli para organizar a fórmula.

Uma possível apresentação de como a Fórmula no manuscrito de Bakhshäli pode ter sido desenvolvida

A seguir temos um método plausível que poderia ter sido utilizado pelos autores do Manuscrito para se obter a fórmula (2.35). O método baseia-se no princípio da iteração. É realmente difícil dizer a partir de qual tempo a simples ideia de iteração veio a ser usada na matemática e em particular na análise numérica. Tudo o que podemos dizer é que deve ser uma ideia muito antiga para poder ser vislumbrada como um dos instintos humanos básicos de melhorar uma coisa dada com base em uma experiência anterior. Além disso, a aplicação dessa ideia simples, não exige o conhecimento de qualquer outro pensamento sofisticado matemático. Portanto, é bem plausível acreditar que o autor estava familiarizado com o processo de iteração.

Assim, poderia ter chegado a Equação (2.35), da seguinte forma,

Dado n, um número positivo, que desejamos encontrar $\sqrt{n}$ e seja a uma aproximação para a raiz quadrada e b a medida do erro em relação a a. Temos que:

$$b = n - a^2 \tag{2.36}$$

Substituindo a aproximação a pela sua aproximação de 1ª ordem,

$$a' = a + \frac{b}{2a} \tag{2.37}$$

Encontramos o novo erro b',

$$b' = n - (a')^2 \Rightarrow a^2 + b - \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{b^2}{4a^2}. \tag{2.38}$$

Repetindo o procedimento para encontrar uma segunda aproximação ficamos,

$$a'' = a' + \frac{b'}{2a'} \tag{2.39}$$

Substituindo os valores em (2.39) encontramos,

$$a'' = a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{4a^2}\left(\frac{1}{2\left(a + \frac{b}{2a}\right)}\right) = a + \frac{b}{2a} - \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{b}{2a}\right)} \tag{2.40}$$

Observe que uma simplificação da iteração, chegamos na equação (2.35).

Esse poderia ter sido, realmente o caminho seguido pelos antigos indianos para desenvolverem esse método, uma vez que eles eram muito hábeis envolvendo cálculos aritméticos.

2.4 China

Ao mesmo tempo em que os gregos desenvolviam sua sociedade, as civilizações orientais, como a China, também emergiam.

O desenvolvimento da civilização chinesa foi marcado por muitas mudanças de poder nas Dinastias que dominaram o império chinês por 1500 anos. *Não se pode ter certeza dos relatos históricos sobre esse período dado o fato de que os povos dessa época faziam muitos de seus registros em bambu, um material bastante perecível* [8, p. 234] .

Um outro agravamento em relação a fontes históricas deve-se ao fato de que em 213 a.C. o imperador da China ordenou uma queima de livros. *Algumas obras, evidentemente escaparam, seja pela persistência de cópias, seja por transmissão oral* [2, p. 135], devido a isso *hoje há dúvidas sobre a autenticidade de grande parte do material bibliográfico que se alega ser anterior àquela data infeliz* [8, p. 241].

A matemática e a ciência chinesas se atrasaram em relação a outras matérias, pois os eruditos chineses muitas vezes se interessavam mais por filosofia, arte e literatura (ver [8]).

Muitos autores referem-se como o mais importante dos textos matemáticos chineses antigos o *Nove Capítulos sobre a Arte da matemática* escrito por volta do início da era cristã,

> [...]*nele estão estabelecidos os traços da matemática antiga da China: cálculos orientados, com teoria e prática ligadas numa sequencia de problemas aplicados* [8, p. 243]. *Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos* [2, p. 134].

2.4.1 A Raiz Quadrada na China

O livro *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática* tem seu conteúdo apresentado de forma sumária e sem justificações *os chineses repetiam o mesmo hábito dos babilônios de compilar coleções de problemas específicos* [2, p. 134]. Esta obra foi durante muitos séculos objeto de comentários explicando e justificando algoritmos que ali estavam apresentados. Dentre os capítulos, o quarto se faz importante para o nosso estudo por trazer conteúdos sobre a extração de raízes quadradas.

Para o nosso estudo os comentários de Liu Hui (263) são bastante peculiares, dão uma interpretação geométrica bastante clara para o método de calcular raízes quadradas proposto nos *Nove capítulos sobre a Arte da Matemática.* Esses comentários foram apresentados em [5] e [11].

Interpretação Geométrica do Algoritmo Chinês para o Cálculo de $\sqrt{k}$

Para ilustrar o funcionamento do algoritmo chinês iremos nos valer da extração da raiz quadrada $\sqrt{55225}$ que é um dos exemplos numéricos tratados nos *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática.* Independente de ser quadrado perfeito ou não,*o algoritmo dá, um a um, os algarismos da raiz quadrada, qualquer que seja o seu valor posicional* [11, p. 18]. *Assim a discussão feita a seguir funciona igualmente para a raiz quadrada de um número qualquer* [5, p. 24].

Liu Hui menciona isso claramente, quando afirma que a raiz quadrada pode ser encontrada além da unidade, "na parte decimal" e que os algarismos obtidos sucessivamente são os numeradores, enquanto que os denominadores são 10, 100,...., e ainda complementa dizendo que quanto mais algarismos decimais forem obtidos, mais "finas" serão as frações correspondentes, de tal forma que, *embora o quadrado inicial não tenha sido completamente esgotado, a parte negligenciada se torna tão pequena que "não vale a pena mencioná-la"* [5, p. 24].

Bastante semelhante aos mesopotâmicos e aos hindus, Liu Hui interpreta a extração da raiz quadrada como achar o lado de um quadrado cujo se conhece a área. Porém, ao invés de decompor o quadrado, conforme era a prática dos mesopotâmicos e hindus, ele utiliza uma decomposição que se aproxima muito da representação decimal do número cuja a raiz quadrada desejamos encontrar.

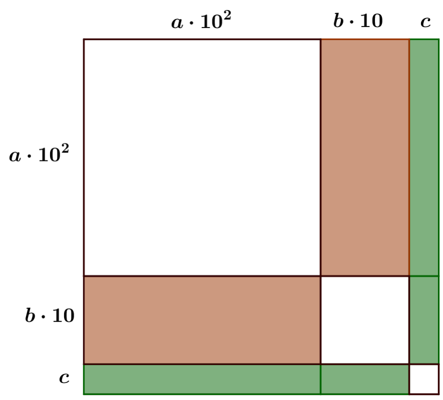


Figura 2.15: Interpretação Geométrica do Algoritmo Chinês

A Figura 2.15 está presente nos cometários de Liu Hui, e se baseia em cores para esclarecer melhor os passos sucessivos do algoritmo. *A figura deve ser lida etapa a etapa, enquanto se procura "esgotar" o quadrado de área dada por quadrados de área cada vez maior*[11, p. 19].

A primeira informação é de que $\sqrt{55225}$ é um número que expresso na forma decimal é constituído por três algarismos. Basta examinar o número de algarismos de potências sucessivas de 10. Escrito sob a forma de representação decimal o número $\sqrt{55225}$ tem seu formato abc que representa-se da forma $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$.

Para se tornar mais clara a análise, iremos dividi-la em três etapas que correspondem a cada um dos algarismos a, b e c.

Primeira etapa - O algarismo das centenas

Inicialmente, devemos achar o algarismo das centenas, a, de tal forma que o maior quadrado de lado $a \cdot 10^2$ esteja contido no quadrado de lado 55225, utilizando linguagem matemática atual,

$$(a \cdot 10^2)^2 \leq 55225 \tag{2.41}$$

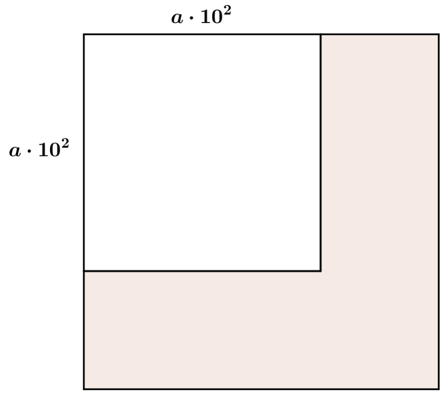


Figura 2.16: Interpretação Geométrica do Algoritmo Chinês - 1ª Etapa

Portanto,

$$a = 2$$

Como mostrado na figura, temos um *gnómon* em volta do quadrado de lado 200, pois $a = 2$, sua área será $55225 - 200^2 = 15225$.

Segunda etapa - O algarismo das dezenas

Em seguida, devemos agora determinar o algarismo b das dezenas, que seja o maior possível para que os dois retângulo de lados 200 e $b.10$ mais um quadrado de lado $b \cdot 10$, tenha área menor do que a do *gnómon* de área 15225 conforme ilustra a figura 2.17, ou seja,

$$2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2 \leq 15225. \tag{2.42}$$

Como $2 \cdot 200 \cdot 3 \cdot 10 + (3 \cdot 10)^2 = 12900$ e $2 \cdot 200 \cdot 4 \cdot 10 + (4 \cdot 10)^2 = 17600$ concluímos que $b = 3$. Assim, obtemos, agora um quadrado de lado 230 envolto por um *gnómon* de área $55225 - 230^2 = 2325$.

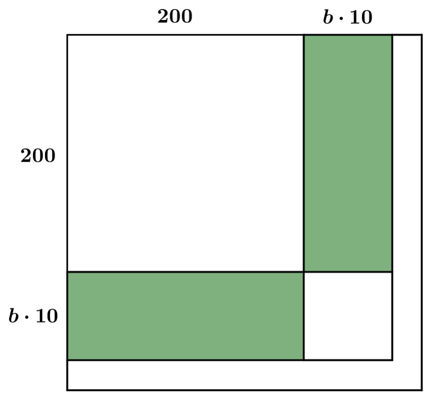


Figura 2.17: Interpretação Geométrica do Algoritmo Chinês - 2ª Etapa

Terceira etapa - O algarismo das unidades

Procuramos encontrar, agora, o algarismo das unidades c, que seja o maior possível de tal forma que dois retângulos de lados 230 e c mais um quadrado de lado c estejam contidos no *gnómon* de área 2325, ou seja,

$$2.230.c + c^2 \leq 2325. \tag{2.43}$$

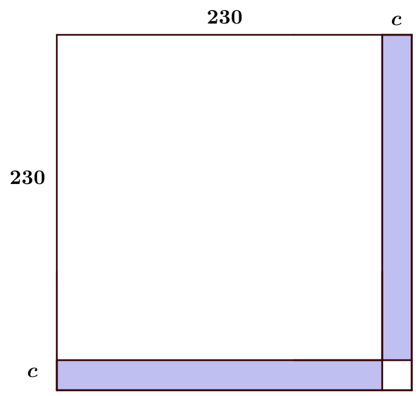


Figura 2.18: Interpretação Geométrica do Algoritmo Chinês - 3ª Etapa

Conclui-se facilmente, resolvendo a inequação (2.43), que $c = 5$, logo $\sqrt{55225} = 235$.

Um fato importante de observar, comparando esse método aos anteriores é de que, cada etapa do algoritmo chinês nos fornece, em ordem decrescente de grandeza, cada um dos algarismos da representação decimal da raiz procurada. Nos anteriores cada etapa permitia, de forma geral, obter vários algarismos da raiz de uma vez só.

A relação entre o algoritmo chinês e o algoritmo usual das escolas

Até recentemente ensinava-se no Ensino Básico, um algoritmo para achar a raiz quadrada de um número, que era apresentado de forma geral como uma quantidade de procedimentos a serem seguidos, sem qualquer justificativa. Esse procedimento nada mais é *do que uma disposição cômoda das manipulações numéricas que se executam usando um processo como o dos Nove Capítulos* [11, p. 21].

Esta forma de procurar a raiz quadrada se utiliza de uma disposição em forma de quadro dos números envolvidos nesse cálculo, trata-se da representação dos números com um tipo de "barras de calcular".

Etapa 0 - O Número de Algarismos da raiz quadrada

Iniciamos o processo dividindo o número que se deseja retirar a raiz quadrada em grupos de dois algarismos andando da direita para a esquerda a partir da virgula decimal. Se o número tiver uma parte decimal, fazemos a mesma coisa, da esquerda para a direita, a partir da virgula decimal.

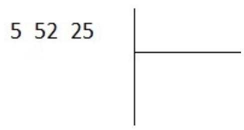


Figura 2.19: O número de algarismos na raiz quadrada - Etapa 0

No nosso caso, a $\sqrt{55225}$, na sua parte inteira, será composta por três algarismos.

Etapa 1 - O Algarismo das Centenas

Procuramos o maior valor para o número a, tal que $a^2 \leq 5$. Logo, $a = 2$. Elevamos a ao quadrado, $2 \cdot 2 = 4$, e subtraímos do valor 5, resultando 1. O procedimento é disposto nas "barras de calcular"conforme mostra a Figura 2.20.

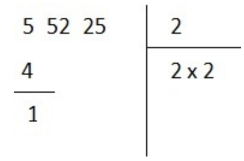


Figura 2.20: O algarismo das centenas - Etapa 1

Etapa 2 - O Algarismo das Dezenas

Para encontrar o algarismo das dezenas, “baixemos” o bloco de números seguinte (52), e cortamos o que não nos serve mais(o produto 2×2) e duplicamos o 2 para obter 4.

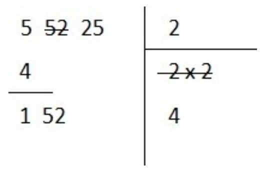


Figura 2.21: O algarismo das dezenas - Etapa 2

Vamos encontrar agora, o maior algarismo b tal que o número que se escreve ”$4b$” multiplicado por b, seja menor do que 152. De forma algébrica, queremos resolver a inequação $(2 \cdot 20 + b) \cdot b \leq 152$. Obtemos como resultado $b = 3$. Logo $43 \times 3 = 129$, onde subtraindo de 152, ficamos com resto 23.

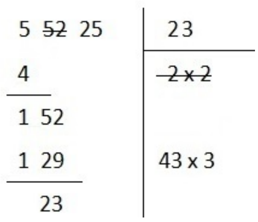


Figura 2.22: O algarismo das dezenas - Etapa 2

Etapa 3 - O Algarismo das Unidades

Afim de encontrar o algarismo das unidades, “baixemos” o próximo bloco (25) e eliminemos o produto 43×3 e duplicamos o número 23, obtendo 46.

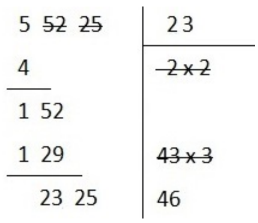


Figura 2.23: O algarismo das unidades - Etapa 3

Procuramos agora o maior algarismo c tal que o número que se escreve na forma "46c" seja tal que multiplicado por c seja menor do que 2325. Isso é queremos resolver a inequação $(2 \cdot 230 + c) \cdot c \leq 2325$. Resolvendo essa inequação, facilmente encontramos o valor de $c = 5$. Logo, $465 \cdot 5 = 2325$, de forma que o resto é zero, e a raiz quadrada é a encontrada na parte de cima à direita do algoritmo.

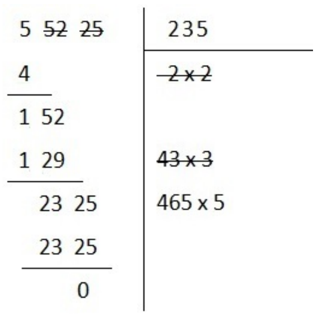


Figura 2.24: O algarismo das unidades - Etapa 3

As várias manipulações matemáticas realizadas para a utilização do algoritmo "algarismo a algarismo" tornam-se mais evidentes se tivermos o trabalho de escrever os zeros necessários para completar as posições decimais no decorrer do cálculo (ver [11]). Pode-se aproveitar para organizar os cálculos intermediários correspondentes às desigualdades (2.41), (2.42) e (2.43), com os produtos que aí resultam.

5 ~~52~~ ~~25~~	235
4 00 00	~~200 x 200~~
1 52 25	
1 29 00	~~430 x 30~~
23 25	
23 25	465 x 5
0	

Figura 2.25: O algoritmo usual escrito de forma completa

Interpretação algébrica do algoritmo chinês

De forma algébrica, o algoritmo chinês para extração de raízes quadradas, pode ser visto como a utilização repetidas vezes da identidade fundamental,

$$(r+s)^2 = r^2 + (2rs + s^2) \tag{2.44}$$

Vamos utilizar o mesmo exemplo $\sqrt{55225}$ para mostrar como funciona algebricamente o algoritmo chinês.

O Algarismo das Centenas

Podemos interpretar algebricamente o valor da raiz escrevendo $\sqrt{55225} = abc = a.10^2 + b.10 + c$, logo, procuramos o maior valor a tal que $(a.10^2)^2 \leq 55225$.

O Algarismo das Dezenas

Para encontra o algarismo das dezenas vamos utilizar a identidade (2.44), aplicada a $100 \cdot a$ e a $10 \cdot b$

$$(200 + b \cdot 10)^2 = 200^2 + 2 \cdot 200 + b \cdot 10 + (b \cdot 10)^2 \tag{2.45}$$

Observando bem, os dois últimos termos que estão do lado direito desta igualdade são exatamente os mesmos da inequação (2.42), e podem ser escritos na forma

$$2 \cdot 200 \cdot b \cdot 10 + (b \cdot 10^2 = (2 \cdot 200 = b \cdot 10) \cdot b \cdot 10 \tag{2.46}$$

Dessa forma, procuramos o maior valor de b tal que

$$(2 \cdot 200 = b \cdot 10) \cdot b \cdot 10 \leq 15225 \tag{2.47}$$

Achamos, $b = 3$.

O Algarismo das Unidades

Vamos utilizar, mais uma vez, a identidade (2.44). Para essa situação ela se torna,

$$(230 + c)^2 = 230^2 + (2.230.c + c^2) = 230^2 + (2.230 + c).c \tag{2.48}$$

Novamente os dois termos a direita da igualdade são os mesmos da desigualdade (2.43). Assim, procuramos o maior valor de b tal que

$$2 \cdot 230 \cdot c + c^2 \leq 2325 \tag{2.49}$$

Achamos, $c = 5$.

2.5 Europa do Século VI até o XVI

Em 750 d.C o Império Islâmico se estendia do oeste da Índia a algumas partes da Espanha, eram os abassistas que chegavam ao poder estabelecendo a nova capital do Império, Bagdá. Os primeiros trabalhos científicos que foram levados para Bagdá eram indianos sobre Astronomia, mas os califas fundaram o que chamaram de *Casa da Sabedoria*, um tipo de academia de ciências, e começaram a reunir documentos eruditos em grego e sânscrito e pessoas que os entendessem. Muitos livros importantes foram traduzidos e estudados, dentre eles os *Elementos* de Euclides, dando início a uma nova era de expansão da matemática como ciência.

Dentre os matemáticos da época Muhammad Ibn Müsa Al-Khwärizmï foi um dos primeiros a se destacar durante o século IX, escreveu vários livros que tiveram muita influência, se tornando fonte importante inclusive para os europeus que queriam aprender o sistema decimal com valores posicionais.

Depois de Al-Khwärizmï, a álgebra tornou-se parte importante da matemática *árabe* [1, p.30]. Alguns estudiosos trabalharam para fundamentar o assunto dando demonstrações no estilo de Euclides utilizando apenas palavras.

Além da álgebra, os matemáticos árabes realizaram trabalhos importantes na área de Geometria e Trigonometria principalmente nessa última, dada a sua importância no estudo da astronomia.

Em [1] observamos que os árabes eram intensamente criativos, escolhendo o melhor da matemática grega e indiana. Só uma pequena parte dessa matemática foi levada para a Europa, levando a redescoberta de vários resultados. Só no século XIX que estudiosos europeus se debruçaram em textos matemáticos árabes.

Um dos marcos da História a queda do Império Romano em 476 marca o início da Idade Média, tendo como fim a queda de Constantinopla perante os turcos em 1453.

> *Essa foi de fato a "Idade das Trevas" da ciência, mas não deveríamos cometer o erro de supor que isso fosse verdade para a Idade Média como um todo. Pelos dois séculos seguintes as sombras se mantiveram a tal ponto de ser dito que nada de erudito poderia ser dito na Europa[...]* [2, p. 170].

No século X, foram criadas as escolas catedrais, dedicadas à preparação de futuros padres e clérigos. Gerbert D´Aurillac (945-1003), aprendeu matemática na Espanha e reorganizou uma dessas escolas catedrais em Reims-França, reintroduzindo o ensino de aritmética e geometria, mais tarde Gerbert se tornou o Papa Sylvester II.

A partir do século XII os europeus perceberam que precisavam conhecer a língua árabe para ser tornarem bons em matemática ou em astronomia. O ressurgimento da ciência começou com uma série de traduções a princípio do árabe para o latim, mas posteriormente, do árabe para o espanhol, do árabe para o hebraico ou ainda do grego para o latim. Os Elementos de Euclides foi uma das primeiras obras clássicas a aparecerem em tradução latina do árabe em 1142.

De acordo com Boyer (ver [2]), apesar de aparecerem muitas exposições dos numerais indo-arábicos, a transição entre o sistema de numeração romano para o decimal foi muito lenta, talvez pelo uso do ábaco que era muito comum na época.

Além das escolas catedrais e das universidades que surgiam na época o comércio também era uma fonte de contato entre os europeus e o Império Islâmico, estreitando os laços para o desenvolvimento da matemática. Leonardo de Pisa, o Fibonacci, aprendeu bastante sobre a matemática árabe e em seus livros, buscou explicar e estender o conteúdo que tinha aprendido.

A partir do século XV os europeus começaram a desenvolver a arte da navegação e passaram a viajar para continentes distantes, levando a cultura europeia. No final do século XVI as escolas jesuítas tinham sido estabelecidas em muitos lugares da América do Sul à China, levando a matemática europeia a ser estudada em toda parte do planeta.

Devido as navegações a Trigonometria teve um destaque muito grande frente a outros assuntos da matemática nos séculos XV e XVI. Porém, paralelo a esse interesse, existia uma classe social mercantilista que precisava ser capaz de efetivar cálculos.

No século XVI e início do século XVII a álgebra ocupa o centro das atenções. Porém ainda muito retórica a álgebra não possuía ainda uma notação generalizada para expressões matemáticas.

Apareceram na Europa os chamados *cossistas* que inventavam notações, símbolos para incógnitas,o quadrado da incógnita e assim por diante (ver [1]).

Muitos algebristas desse período tentaram encontrar um método para resolver equações cúbicas [1, p.38]. Tartaglia (1500-1557) desenvolveu um método de resolver algumas equações cúbicas e o compartilhou com Cardano (1501-1576) que generalizou o método para resolver qualquer equação cúbica e o divulgou sendo conhecido até hoje como a "fórmula de Cardano".

No fim do século XVI a álgebra começou a se parecer mais com o que temos hoje, por meio da obra de Viète (1540-1603). Que, provavelmente, a partir de seu trabalho como criptógrafo pode ter desenvolvido a ideia de usar letras para representar elementos matemáticos.

Descartes (1596-1650) em seu famoso *La Geométrie*, propôs essencialmente a notação que usamos hoje com o uso de letras minúsculas do fim do alfabeto para quantidades desconhecidas e as do começo do alfabeto para as conhecidas.

Em 1660, Issac newton (1642-1727) e Gottfriend Wilhelm Leibniz (1646-1716), de forma independente, *descobriram um tal método. Na verdade, descobriram dois métodos ligeiramente diferentes* [1, p. 43]. A utilizada por Newton enfativaza o que o próprio chamava de "quantidades de fluentes" e as taxas de fluxo, chamadas de "fluxões". Já Leibiniz usava a idéia de "infinitésimos" e definia sua "diferencial" dx como a quantidade, representada por x, pela qual ela variava em tempo infinitamente pequeno. Tanto uma idéia quanto a outra é basicamente o que chamamos de *derivadas.*

2.5.1 Método de encontrar raízes usado pelos arquitetos europeus no século X

Dennis, (ver [7]) apresentou um método pesquisado por uma estudante de arquitetura na Universidade da Califórnia, onde foi investigado como arquitetos europeus do século X aproximava raízes quadradas. De acordo com o autor a estudante deparou-se com o procedimento a seguir. Considere a sequência geométrica

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, ...2^n$$

com uma razão constante de 2. Pense em como seria uma inserção de médias geométricas na sequência. Isto é como alguém poderia refinar ou interpolar a sequência de tal modo a que se mantenha uma sequência geométrica (i.e. termos consecutivos com uma razão constante). O que se quer é a sequência:

$$1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}, 16, 16\sqrt{2}32, ...(\sqrt{2})^n$$

Agora começa-se por fazer uma suposição a $\sqrt{2}$. Por exemplo, vamos começar com o palpite bruto $\sqrt{2} \approx 1$. A sequência torna-se então: $1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, ...$ A partir desta sequência, forma-se então uma nova sequência na qual cada novo termo é a soma de dois termos consecutivos na anterior (da mesma forma que gera um Triângulo de Pascal). Ao fazer isso a cada nova sequência, vem cada vez mais perto de ter uma relação comum de $\sqrt{2}$.

Vamos continuar a sequencia para servir de exemplo:

1	1	2	2	4	4	8	8	16	16	32	32
2	3	4	6	8	12	16	24	32	48	64	
5	7	10	14	20	28	40	56	80	112		
12	17	24	34	48	68	96	136	192			
29	41	58	82	116	164	232	328				
70	99	140	198	280	396	560					
169	239	338	478	676	956						
408	577	816	1154	1632							
985	1393	1970	2786								
2378	3363	4756									
5741	8119										

Não é necessário fazer a soma final. A raiz quadrada de 2 é a aproximação da razão entre os dois números finais.

$$\frac{8119}{5714} \approx 1,414213552...$$

Um calculadora moderna daria como resultado, $\sqrt{2} \approx 1,414213562$. Logo, o algoritmo utilizado pelos antigos arquitetos gerava uma aproximação de sete casas decimais para o valor de $\sqrt{2}$.

Justificativa do método

Os arquitetos europeus organizavam a sequencia e iam somando os termos dois a dois formando algo parecido com o Triângulo de Pascal. Ao final das somas os dois últimos valores encontrados era efetivado um quociente entre os valores maior e menor, nessa ordem, e dessa forma encontrava-se uma aproximação para a raiz desejada. Essa é a mesma ideia do algoritmo da escada de Theon, basicamente os métodos são exatamente iguais, porém apresentados e desenvolvidos de forma diferente, pois o método de Theon já se aplicava diretamente as recorrências para encontrar os valores necessários para a aproximação.

Partindo da ideia apresentada pelos arquiteto vamos escrever a sequencia para encontrarmos o valor de $\sqrt{k}$ que seria,

$$1, 1, k, k, k^2, k^2, k^3, k^3, k^4, ..., k^n$$

Onde o valor de n é o número de elementos menos um que iguala ao número de linhas necessárias para obtermos os valores da aproximação.

Analisando a situação caso a caso teríamos para os dois valores iniciais apenas uma linha pois já chegaremos a quantidade de valores necessários.

$$1 \qquad 1$$

Fazendo para três termos teremos $n = 2$ pois seriam necessárias duas linhas do triângulo para chegarmos na aproximação.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & & k \\ & 2 & & 1+k & \end{array}$$

Para quatro termos precisaríamos de 3 linhas, ou seja $n = 3$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & k & & k \\ & 2 & & 1+k & & 2k & \\ & & 3+k & & 1+3k & & \end{array}$$

Para 5 termos na sequência teremos $n = 4$,

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 1 & & k & & k & & k^2 \\ & 2 & & 1+k & & 2k & & k^2+k & \\ & & 3+k & & 1+3k & & k^2+3k & & \\ & & & 4k+4 & & k^2+6k+1 & & & \end{array}$$

Para a sequência $1, 1, k, k, k^2, k^2$, teríamos 6 termos e $n = 5$ chegando aos termos,

$$k^2 + 10k + 5 \qquad 5k^2 + 10k + 1$$

Aumentando mais um termo para a sequencia teríamos $1, 1, k, k, k^2, k^2, k^3$, com $n = 6$ e encontraríamos,

$$6k^2 + 20k + 6 \qquad k^3 + 15k^2 + 15k + 1$$

Para cada "triângulo" de polinômios chegamos aos dois que seria necessário para efetivar a divisão e encontrar a aproximação de $\sqrt{k}$. Vamos definir x_n como sendo a sequência dos polinômios que seriam os denominadores de cada aproximação (os que ficam a esquerda no final de cada "triângulo") y_n a sequência dos polinômios que seriam os numeradores (ficam à direita no final de cada triângulo). Escrevendo essas sequências teremos:

$$x_n = \big(1, 2, 3+k, 4k+4, k^2+10k+5, 6k^2+20k+6, ...\big)$$

$$y_n = \big(1, 1+k, 1+3k, k^2+6k+1, 5k^2+10k+1, k^3+15k^2+15k+1, ...\big)$$

Analisando as sequências podemos chegar a duas recorrências que aparecem também na seção 2.2.2,

$$x_{n+1} = x_n + y_n \tag{2.50}$$

$$y_{n+1} = y_n + x_n \cdot k \tag{2.51}$$

De (2.50) chegamos aos resultados,

$$y_n = x_{n+1} - x_n \qquad y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} \tag{2.52}$$

Substituindo em (2.51) encontramos,

$$x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n + x_n \cdot k$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + (k-1) \cdot x_n$$

Daí, obtendo a recorrência linear homogênea de segunda ordem para $n \geq 3$ com $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$,

$$x_n = 2x_{n-1} + (k-1) \cdot x_{n-2} \tag{2.53}$$

Que é a mesma recorrência utilizada para provar o algoritmo da Escada de Theon (ver resultado (2.16)). A solução dessa recorrência é do tipo,

$$x_n = p(r_1)^n + q(r_2)^n$$

onde r_1 e r_2 são as raízes da equação característica $x^2 - 2x - (k-1) = 0$. Resolvendo a equação quadrática encontramos $r_1 = 1 + \sqrt{k}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{k}$.

Logo a solução da recorrência será do tipo,

$$x_n = p(1+\sqrt{k})^n + q(1-\sqrt{k})^n \tag{2.54}$$

Mas sabemos que $x_1 = 1$ e substituindo em (2.54) chegamos ao valor para p igual a,

$$p = \frac{1-q+q\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \tag{2.55}$$

Substituindo agora $x_2 = 2$ e (2.55) em (2.54) ficamos com,

$$\frac{1-q+q\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}} \cdot (1+\sqrt{k})^2 + q \cdot (1-\sqrt{k})^2 = 2$$

Quem tem como resultado,

$$q = \frac{1-\sqrt{k}}{2\cdot(k-\sqrt{k})} = \frac{1-\sqrt{k}}{2\sqrt{k}(\sqrt{k}-1)} = \frac{(-1)(\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}(\sqrt{k}-1)} \Rightarrow q = -\frac{\sqrt{k}}{2k} \tag{2.56}$$

De (2.55) e (2.56) encontramos,

$$p = \frac{1}{1+\sqrt{k}} - \left(-\frac{\sqrt{k}}{2k} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)\right) \Rightarrow p = \frac{\sqrt{k}}{2k} \tag{2.57}$$

Logo ficamos com,

$$x_n = \frac{\sqrt{k}}{2k}\left[(1+\sqrt{k})^n - (1-\sqrt{k})^n\right] \tag{2.58}$$

E de (2.51) e (2.58) chegamos ao resultado da outra recorrência,

$$y_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{k})^n - (1-\sqrt{k})^n\right] \tag{2.59}$$

Essas soluções das recorrências me permitem encontrar os valores necessários para encontrar a aproximação de $\sqrt{k}$ utilizando tantos termos quanto acharmos necessários.

Dividindo as soluções encontradas para os valores finais dos triângulo teremos,

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{k})^n - (1-\sqrt{k})^n\right]}{\frac{\sqrt{k}}{2k}\left[(1+\sqrt{k})^n - (1-\sqrt{k})^n\right]}$$

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{k}}{2k}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{\sqrt{k}} \Longrightarrow \frac{y_n}{x_n} = \sqrt{k} \qquad (2.60)$$

É plausível que os arquitetos europeus tenham se baseado no Algoritmo da Escada de Theon para encontrar o valor de raízes quadradas.

2.5.2 O Método de Newton-Raphson ou Simplesmente Método de Newton?

Uma busca rápida em obras sobre extração de raízes pode deixar o pesquisador confuso com qual denominação usar *Método de Newton* ou *Método de Newton-Raphson*?

Newton explicou seu método de aproximação para o cálculo de raízes de equações numéricas no seu trabalho *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* passando seus resultados para seu professor em 1669, esse trabalho também tem grande destaque por ter sido o primeiro a conter explicações do Teorema Binomial tendo sido impresso entre 1704 e 1711. Newton repetiu a mesma explicação em um segundo trabalho denominado *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, impresso em 1736 (ver [4]).

O método de aproximação desenvolvido por Newton não é o mesmo que é denominado "Método de Newton" na maioria dos livros textos modernos: *Se r é uma aproximação inicial para a raiz de equação f(x)=0, então* $r_1 = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$ *e* $r_2 = r_1 - \frac{f(r_1)}{f''(r_1)}$, [4, p.31].

Porém esse processo é diferente do de Newton. Newton deriva cada passo sucessivo para o cálculo da raiz a partir de uma nova equação, enquanto que nesse processo moderno cada abordagem é feita por substituição na equação original.

Esta modificação do processo de Newton foi efetuada por Joseph-Raphson (1648-1715) na sua obra *Analisys aequationum universalis* publicada em 1690. De Morgan fez observações de que Raphson não cita Newton em seu trabalho. Para

Raphson, a diferença era suficiente para que seu trabalho fosse considerado independente dos estudos realizados por Newton.

Entretanto a modificação do processo executada por Raphson tem sua importância identificada por grandes pesquisadores. *Lagrange reconheceu o processo modificado como "mais simples" que o de Newton*[4, p.31].

Duvida-se que Raphson tenha trabalhado de forma isolada dos estudos de Newton, porém seu sucesso na modificação tem sido aceito como uma melhoria ao método.

Quase todos os escritores do século dezoito e a maioria do dezenove foram cuidadosos na distinção entre os métodos de Newton e Raphson. Em seguida, apareceram escritores como Euler, Laplace, Lacroix e Legendre, que explicam o processo de Newton-Raphson em suas obras, mas sem citar seus criadores.

Algumas publicações incluindo as de Fourier em 1818 e 1831 atribui o método apenas a Newton e devido a grande popularidade do seu trabalho, Fourier ajudou a universalizar o nome "Método de Newton" de forma equivocada quando o mais coerente seria intitular "Método de Newton-Raphson".

2.5.3 O Método de Newton-Raphson

Isaac Newton (1642-1716) criou um método, que permite o cálculo de raízes quadradas não exatas com aproximações. *Além disso, o método de Newton tem a facilidade de ser um algoritmo bastante simples para uma implementação computacional*(ver [23]).

Antes de explicarmos o método, faz-se necessária algumas considerações sobre um número real positivo que chamaremos de a e $\sqrt{a}$ sua raiz quadrada. Sejam b e c números reais positivos tais que $a = bc$. Neste caso temos que: se $c \geq \sqrt{a}$ então $b \leq \sqrt{a}$; se $c \leq \sqrt{a}$ então $b \geq \sqrt{a}$ de modo que $\sqrt{a}$ pertence sempre ao intervalo de extremidades b e c, isto é, $\sqrt{a} \in [b, c]$ ou $\sqrt{a} \in [c, b]$, como mostram as figuras abaixo:

Além disso, como ilustram as figuras 2.26 e 2.27, temos: Se b crescer então c deverá decrescer, isto é, se $a = b'c'$ e $b < b'$ então $c' < c$. Se a crescer então b deverá decrescer, isto é, se $a = b'c'$ e $c' < c$ então $b' < b$.

Figura 2.26: Intervalos que contém $\sqrt{a}$

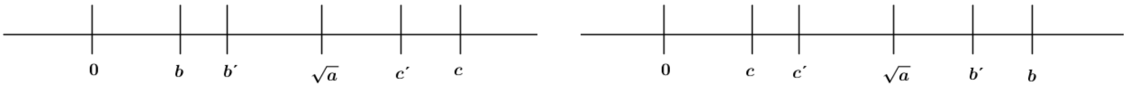


Figura 2.27: Intervalos que contém $\sqrt{a}$

Observando as figuras acima, podemos chegar às seguintes conclusões:

Cada intervalo $[i, j]$, onde $i > 0$ e $ij = a$ contém $\sqrt{a}$. A veracidade desse fato pode ser visualizada de forma geométrica representando-se o lugar geométrico dos pontos (x, y) com $x > 0$, $y > 0$ e $xy = a$ (Figura 2.28).

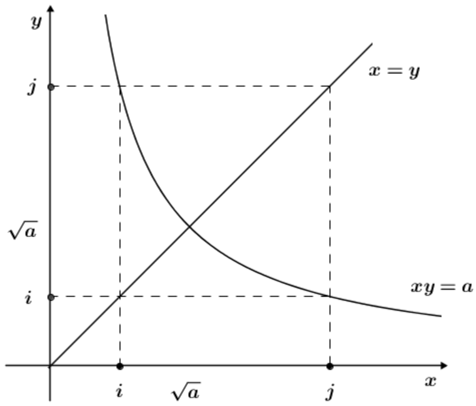


Figura 2.28: Método de Newton - Justificativa

Dados dois intervalos $[i, j]$ e $[k, l]$, com $ij = k_1 = a$, se $i \in [k, l]$ ou $j \in [k, l]$, então $[i, j] \subset [k, l]$, ou seja, todo intervalo, que contém um extremo de um segundo intervalo, contém integralmente este segundo intervalo;

As extremidades à esquerda desses intervalos são aproximações por falta de $\sqrt{a}$ com erros cada vez menores, e as extremidades à direita são aproximações por excesso também com erros cada vez menores. O método de Newton consiste em determinar uma sucessão de intervalos cada vez menores, todos contendo $\sqrt{a}$, de modo que as amplitudes dos intervalos tendam a zero.

A partir desse método, Newton deu um primeiro passo para uma outra forma de interpretar a raiz quadrada de um número, ao invés de procurarmos o lado de um quadrado de área conhecida, agora podemos procurar um número x tal que $x^2 = k$, ou ainda $x^2 - k = 0$.

> *Isso nos leva a considerar a função $y = f(x) = x^2 - k$ e a buscar encontrar os seus zeros, ou seja, os pontos aonde ela se anula. Geometricamente, embora em outro contexto, isso significa procurar os pontos em que o gráfico $y = f(x) = x^2 - k$ corta o eixo dos x.*[5, p. 28].

Joseph Raphson foi o responsável em 1960, por "aprimorar" e introduzir a fórmula de iteração hoje empregada na utilização desse método.

Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes derivável, isto é existem duas derivadas, $f'(x)$ e $f''(x)$ de $y = f(x)$.

Suponha que foi possível achar um intervalo $[c, d]$ no qual se encontra o zero procurado de $f(x) - k$. Na situação que estamos estudando de $f(x) = x^2 - k$ isso não apresenta maiores dificuldades. Basta achar o maior quadrado menor do que $\sqrt{k}$ e o menor quadrado maior do que $\sqrt{k}$.

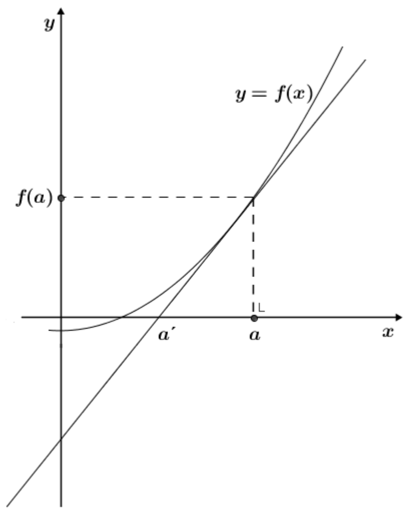


Figura 2.29: Método de Newton-Raphson

O método consiste em iniciar de um valor arbitrário a, "próximo" de $\sqrt{k}$ e tomar como aproximação da raiz a interseção a' da tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - k$ com o eixo das abcissas (Figura 2.29). No caso em questão realmente a aproximação a' está realmente mais próximo de $\sqrt{k}$ do que a. Isso nem sempre acontece.

Procuramos, agora, a interseção da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ e que passa pelo ponto $(a, f(a))$. A derivada da função no ponto a, ou seja, $f'(a)$ é o coeficiente angular dessa reta. Sabemos,também que a reta tangente passa pelo ponto $(a, f(a))$. Facilmente encontramos a equação da reta que resulta,

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \tag{2.61}$$

Quando $x = a', y = 0$. Assim, obtemos que,

$$-f(a) = f'(a)(a' - a). \tag{2.62}$$

De forma imediata,

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{2.63}$$

Se repetirmos esse processo, com um novo valor inicial igual a a', obtemos uma sequencia de aproximações $a_1, a_2, a_3, ...$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Com esta notação podemos escrever

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}. \tag{2.64}$$

Se aplicarmos este processo à função $f(x) = x^2 - k$ teremos,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - k}{2a_n} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right). \tag{2.65}$$

Que é exatamente o método utilizado pelos mesopotâmios e por Heron.

Hodgson (ver [11]) observa que um dos interesses em associar a técnica mesopotâmica com a de Heron ao método de Newton-Raphson é que pode-se retirar dados conclusivos quanto a eficácia destes algoritmos. A convergência do método Newton-Raphson é da *forma quadrática*, isto é o erro cometido em uma determinada etapa exprime-se em função do quadrado do erro da etapa anterior.

Dessa forma se situarmos próximo nosso valor ao da raiz procurada, por exemplo um erro da ordem de 10^3, uma nova iteração do método mesopotâmico ou de Heron dará um erro da ordem de 10^6, tendo uma eficiência notável.

Capítulo 3

Símbolos para representar raízes

Cajori, na sua obra *A History of Mathematical Notations* (História das Notações Matemáticas)(ver[3]), tece com detalhes o desenvolvimento dos símbolos matemáticos durante os séculos. Em especial, o símbolo que representa raízes, objeto do nosso estudo. A despeito desse símbolo é que relatamos a sua historicidade a partir da tradução do capítulo da mencionada obra.

3.1 A história da Simbologia para Representação de Raízes

Os símbolos para as raízes aparecem muito cedo no desenvolvimento da matemática. Já no Egito o sinal  para a raiz quadrada ocorre em dois papiros, ambos encontrados em Kahum, um dos papiros foi descrito por F.L. Griffith[1] e o outro por H.Schack-Schackenburg[2].

Os principais símbolos para a designação de raízes que foram desenvolvidos desde a chegada do aprendizado árabe à Europa no Século XII, se resume em quatro grupos tendo como símbolos básicos o R (devido a palavra *radix* - raiz), l (derivado da palavra *latus* - lado), o sinal $\sqrt{}$ e o expoente fracionário.

[1]F. L. Griffith, The Petrie Papyri, I. Kahun Papyri, Plate VIII. (apud [3, p. 361]).

[2]H. Schack-Schackenburg in Zeitschrift fur aegyptische Sprache und Altertumskunde, Vol. XXXVIII (1900), p. 136; also Plate IV. See also Vol. XL, p. 65.text (apud [3, p. 361])

A primeira aparição do sinal ℞

Em uma tradução do árabe para o latim de um comentário do livro X dos Elementos de Euclides a palavra *radix* é usada para a raiz quadrada. O sinal ℞ foi usado de forma muito intensiva para representar a raiz, porém ocasionalmente também serviu para representar a primeira potência do valor x.

O matemático e professor Johan Widman (1462 - 1498), em 1489, utilizava o símbolo ℞ e a abreviatura *ra* para representa a raiz. Porém antes dele o francês Chuquet em 1445 já havia utilizado o símbolo no manuscrito *Le Triparty*[3] indicava ℞^{2}16 é igual a 4, ℞^{4}16 igual a 2 por exemplo.

Em toda a Europa, diferentes usos de ℞ foram identificados, na França De la Roche(1884-1919) seguiu Chuquet e usou o ℞. O símbolo apareceu na Itália, inicialmente, na Álgebra de Chaligai (1521), na Holanda apareceu em 1537 na aritmética de Giel Van Der Hoecke, em expressões como *item wildi aftreckem* ℞ $\frac{1}{5}$ *van* ℞ $\frac{4}{5}$ *resi* ℞ $\frac{1}{5}$, isto é $\sqrt{\frac{4}{5}} - \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}}$. Cardano utiliza essa representação no seu estudo de cálculo de radicais (ver Figura 3.1).

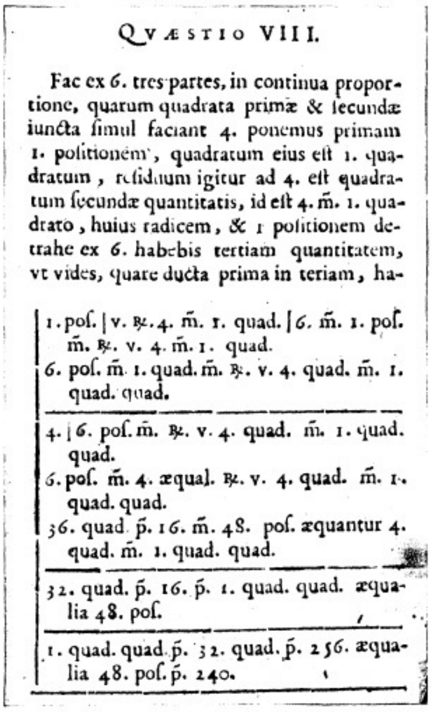
Uma notação diferente é encontrada na álgebra de Johannes Scheubel (1494-1570) ele usou a abreviação *ra.*, e também o sinal $\surd$, indicava raiz cubica por *ra. cu.* ou por $\sim\!\!\surd$. Como exemplo temos *ra.15 ad ra.17* dá *ra. col. 32 +* $\surd$1020, isto é, $\sqrt{15} + \sqrt{17} = \sqrt{32 + \sqrt{1020}}$, o termo *col.*, vem de *collecti*, significando aqui agregação.

O italiano Nicolo Tartaglia em 1556, também utilizou ℞ e Francis Maurolyeus de Messina,em 1575, utilizou a letra minúscula com um ponto, escrevendo *r.18* para $\sqrt{18}$, muito parece que na Itália o símbolo ℞ foi o mais utilizado sem que tivesse outra para a raiz quadrada durante o século XVI.

Na Espanha alguns autores adotaram a notação de abreviação importada da Itália, ajustadas à linguagem espanhola e o matemático espanhol J. Peres de Moya (1513-1597) na sua obra *Aritmetica practica y speculativa* (1562), indica a raiz quadrada por *r*, raiz cúbica por *rrr*.

Quando a aritmética de Tartaglia foi traduzido para o francês em 1611, encontra-se o ℞*cu.* para raiz cúbica, James Hum, em 1603 inseriu algarismos roma-

[3]Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien ...par M. Aristide Marre in Boncompagni's Bullettino, Vol. XIII, p. 655; (reprint,Rome, 1881), p. 103.(Apud [3, p. 362])


QVÆSTIO VIII.

Fac ex 6. tres partes, in continua proportione, quarum quadrata primæ & ſecundæ iuncta ſimul faciant 4. ponemus primam 1. poſitionem, quadratum eius eſt 1. quadratum, reſiduum igitur ad 4. eſt quadratum ſecundæ quantitatis, id eſt 4. m̃. 1. quadrato, huius radicem, & 1 poſitionem detrahe ex 6. habebis tertiam quantitatem, vt vides, quare ducta prima in teriam, ha-

1. poſ. | v. ℞. 4. m̃. 1. quad. | 6. m̃. 1. poſ. m̃. ℞. v. 4. m̃. 1. quad.
6. poſ. m̃. 1. quad. m̃. ℞. v. 4. quad. m̃. 1. quad. quad.

4. | 6. poſ. m̃. ℞. v. 4. quad. m̃. 1. quad. quad.
6. poſ. m̃. 4. æqual. ℞. v. 4. quad. m̃. 1. quad. quad.
36. quad. p̃. 16. m̃. 48. poſ. æquantur 4. quad. m̃. 1. quad. quad.

32. quad. p̃. 16. p̃. 1. quad. quad. æqualia 48. poſ.

1. quad. quad. p̃. 32. quad. p̃. 256. æqualia 48. poſ. p̃. 240.

Figura 3.1: Parte de uma página do *Ars Magna* que foi republicado como *H. Cardano Operum Tomus Quartus* (Lugdvni, 1663).
Fonte: [3, p. 121].

nos para representar a ordem da raiz e o francês Jacques de Billy usou ℞Q para a raiz quadrada e ℞QC para a raiz cúbica.

O sinal R ou ℞ como um radical foi mais forte nos países da Itália e na Espanha, e mais fraco na Inglaterra. Com o fim do século XVII ele praticamente morreu como representação de raiz e o símbolo $\surd$ ganhou representação.

O sinal l representando uma raiz

A palavra latina *latus* (lado de um quadrado) foi introduzida na matemática para significar raiz pelos romanos no século II d.C. e foi usado nesse sentido por Platão de Tivoli em 1145 na tradução da obra arábe *Líber Embadorum*.

O símbolo l (lado) foi utilizado por Peter Ramus[4] como l27 *ad* l12 *dá* l75,

[4] P. Rami Scholarvm mattiematicarvm libri unus et triginti (Basel, 1569), Lib. XXIV, p. 276, 277. (apud [3, p.364]

isto é $\sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{75}$.

O l foi usado algumas vezes pelo grande algebrista Francis Vietá que parecia declinado a adotar o ℞ ou $\surd$ para indicar raízes.

O uso da letra l para calcular radicais nunca se tornou popular, principalmente após a invenção dos logaritmos, pois essa letra foi usada para identificá-los.

John Napier[5] preparou um manuscrito sobre Álgebra que só foi impresso em 1839. Fez uso da notação de Stifel para representar radicais, mas ao mesmo tempo criou um esquema de sua autoria. Apesar dele ter inventado uma excelente notação, o mesmo não a utilizou em sua obra, usando-a apenas quando achava necessário para evitar algum tipo de ambiguidade que pudesse surgir. Sua notação foi derivada a partir da figura abaixo:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Figura 3.2: Esquema para Notação de Radicais Elaborado por John Napier

Sua notação funcionava do seguinte modo o símbolo $\sqcup$ como prefixo de um número era sua raiz quadrada, $\sqsupset$, sua raiz quarta, $\square$ sua raiz quinta e assim por diante.

O sinal $\surd$ para apresentar raiz

Este símbolo teve origem na Alemanha. L. Euler[6] cogitou que era uma letra r deformada, a primeira letra de radix. Esta opinião é aceita até recentemente, alguns estudiosos fizeram uma pesquisa em quatro manuscritos antigos de álgebra alemães e aceitaram essa explicação, a priori, por acharem a teoria de que o símbolo originou-se a partir de um ponto muito menos provável.

O mais antigo dos manuscritos data de 1480 está na Biblioteca de Dresden e

[5]De Arte Logistica Joannis Naperi Merchistonii Baronis Libri qui superaunt(Edinburgh, 1839), p. 84(apud [3, p.365]).

[6]L. Euler, Institutiones calculi differentialis (1775), p. 103, art. 119; J. Tropfke, op. cit., Vol. II (2d ed., 1921), p. 150. (aoud [3, p. 366])

contém diferentes tratados algébricos em latim e um em alemão em um dos escritos em latim pontos são usados para significar extração de raiz, está escrito : *Isto é um ponto (·)colocado antes do radicando significa raiz quadrada, dois pontos (··)significa raiz da raiz, três pontos (···)significa raiz cúbica, para quatro pontos (····)raiz cúbica da raiz cúbica, ou raiz nona.*É evidente que essa notação não foi muito feliz. Se um ponto significava raiz quadrada, dois ponto raiz da raiz ($\sqrt{\sqrt{}}$). Em seguida, três pontos deveriam significar a raiz quadrada, da raiz quadrada, da raiz quadrada ou raiz oitava, mas não foi isso que aconteceu, os três pontos foram utilizados para significar raiz cúbica e quatro, raiz nona. Nenhuma explicação satisfatória foi dada para esse sistema.

O segundo documento está em Vienna MS[7] Nº 5277, Regule-Cose-Algebre. Contém a passagem: Quum ʒ assimiletur radici de radice punctus deleatur de radice, ʒ in se ducatur et remanet adhuc inter se aequalia *Isto é quando* $x^2 = \sqrt{x}$ *apagar o ponto antes de* x *e multiplicar* x^2 *por ele mesmo, então as coisas são iguais para cada um.* Em outro lugar se encontra a declaração *per punctum intellige radicem* - por um ponto se entender uma raiz. Ou seja, o ponto era usado como raiz no manuscrito.

O terceiro manuscrito pertence a Universidade de Gottingen. É uma carta escrita em latim por Initus Algebras, provavelmente antes de 1524. Uma elaboração desse manuscrito foi feita para o alemão por Andreas Alexander[8], nele o sinal do radical é um ponto forte com um golpe de caneta para cima e curvando-se à direita, assim ʃ. É seguido por um símbolo que significa a ordem da raiz, ʃʒ, indica a raiz quadrada, ʃc^e para a raiz cúbica, ʃcc^e para a raiz nona, e assim por diante. Além disso ʃcs|$\underline{8+}$ʃ$\underline{22}$ʒ, para $\sqrt{8+\sqrt{22}}$, onde *cs* significa a raiz do binômio que está mostrado como uma quantidade e encontra-se destacado entre as linhas horizontal e vertical, o ʒ indicando a ordem da raiz é colocado como um subscrito no final.

O quarto manuscrito é um documento sobre Algebra completada por Adam Riese[9] em 1524. Reese estava um pouco familiarizado com a algebra latina da coleção de Dresden, citado anteriormente; Não usa o ponto na sua forma simples,

[7]C. J. Gerhardt, Monatsberichte Akad. (Berlin, 1867), p. 46; ibid. (1870),p. 143-47; Cantor, op. cit., Vol. II (2d ed., 1913), p. 240, 424. (apud [3, p. 366])

[8]G. Enestrom, Bibliotheca mathematica (3d ser.), Vol. Ill (1902), p. 355-60. (apud [3, p.367])

[9]B. Berlet, Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbucher und seine Art zu rechnen; die Coss von Adam Riese (Leipzig-Frankfurt a/M., 1892). (apud [3, p. 367])

mas o ponto com um golpe ligado a ele, embora ainda aconteça o ponto. Na sua obra ele compara o $\surd$ com o símbolo ʒ, dando-lhes o mesmo significado, ou seja a raiz quadrada.

Foram apresentados aqui os principais fatos dos quatro manuscritos. Os mesmos, mostram conclusivamente que o ponto foi associado como um símbolo de extração de raiz. No primeiro manuscrito, o ponto realmente aparece como um sinal para as raízes. O ponto não aparece como um sinal no segundo manuscrito, mas é mencionado no texto. No terceiro e quarto manuscritos, o ponto, pura e simples, não ocorre para a designação das raízes, o símbolo é descrito pelos autores mais recentes como um ponto com um traçado a ele ligado. A questão é saber se o nosso sinal algébrico $\surd$ tomou sua origem no ponto. Alguns escritores alemães acreditam nesse ponto de vista, mas a evidência está longe de ser conclusiva.

Christoff Rudolff estava familiarizado com o Manuscrito de Viena, que usa o ponto com uma extensão. Na sua obra em 1525 fala de ponto em conexão com o simbolismo de raiz, mas usa uma marca com um curto golpe pesado para baixo (quase um ponto), seguido por uma linha reta ou traçado, inclinada para cima (Figura 3.3).

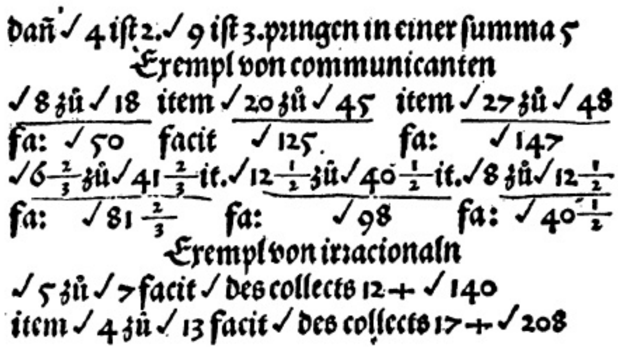

dañ √4 ist 2. √9 ist 3. pringen in einer summa 5
Exempl von communicanten
√8 zů √18 item √20 zů √45 item √27 zů √48
fa: √50 facit √125. fa: √147
√6 $\frac{2}{3}$ zů √41 $\frac{2}{3}$ it. √12 $\frac{1}{2}$ zů √40 $\frac{1}{2}$ it. √8 zů √12 $\frac{1}{2}$
fa: √81 $\frac{2}{3}$ fa: √98 fa: √40 $\frac{1}{2}$
Exempl von irracionaln
√5 zů √7 facit √ des collects 12 + √140
item √4 zů √13 facit √ des collects 17 + √208

Figura 3.3: Parte do Coss de Rudolff (1525).
Fonte: [3, p. 135].

Deve-se acrescentar que se Rudolff olhou para o seu símbolo radical como realmente um ponto, ele foi menos propenso a ter usado o ponto novamente para um segundo propósito em seu simbolismo radical. É possível, talvez provável, em que o símbolo de Rudolff e nos manuscritos terceiro e quarto acima referidos não é um ponto de todo, mas um r, a primeira letra de radix. Que foi o entendimento do escritor espanhol do século XVI, Perez de Moya, onde é evidente por suas denominações de raiz quadrada por r, a raiz quarta por rr, e a raiz cúbica por rrr.

A história do nosso sinal radical $\surd$, depois do tempo de Rudolff, se relaciona principalmente com os simbolismos para indicar o índice da raiz e a agregação de termos quando a raiz de um binômio ou polinomial é necessária. Levou mais de um século para chegar a algum tipo de acordo sobre esses pontos. Além disso, Stifel deu ao símbolo $\surd$ sua forma moderna, tornando o lado esquerdo, mais aberto do que o de Rudolff.

Na Dinamarca Chris Diubuadius[10] em 1605 desenvolveu três denominações para o símbolo da raiz quadrada $\surd$, $\surd\ Q$ e $\surd\mathfrak{z}$, três para raíz cúbica $\surd\ C$, $\surd\ c$, $\surd\ c^e$ e para a raiz quarta, $\surd\surd$, $\surd\ QQ$ e $\surd\mathfrak{z}\mathfrak{z}$. Stifel teve um modo mais complicado e desajeitado de indicar a ordem das raízes do que Rudolff. Christoff Rudolff, em 1544 e 1553 tinha elaborado símbolos melhores de sua autoria, e encontrou adoção um pouco modificada da sua forma entre alguns escritores de data posterior. Ocorrem na obra *Arithmetical* do espanhol Aurel de 1552. Eles são dados em Recorde, de Whetstone Witte (1557), que, após a introdução do primeiro sinal $\surd$, prossegue usando o segundo sinal como $\cdot\!\sim\!\surd\cdot.16$ para significar a raiz cúbica de 16 e por outras vezes foram usados outros sinais com ele também, como $\sim\!\surd\cdot c^e 25$ para a raiz cúbica de 25.

Um momento de inovação considerável foi quando os índices de Stevin formado por numerais tomaram o lugar das letras de Stifel para marcar as ordens das raízes. Começando com Stifel o sinal $\surd$ sem qualquer marcação adicional veio a ser interpretado no sentido de raiz quadrada. Stevin adotou esta interpretação, mas no caso da raiz cúbica ele colocou após o $\surd$ o numeral 3 incluso por um círculo. Usando essa norma para as raízes de ordem superior. O uso de Stevin de números se encontrou com grande aprovação, mas ainda não tinha aceitação universal. Havia ainda aqueles que indicavam a ordem de uma raiz com o uso de letras, um deles foi Descartes, que em 1637 indicou raiz cúbica por $\surd C$. Mas em uma carta para Albert Girard de 1640 usou o numeral 3 e inclinou-se para a outra notação, quando escreveu $\surd 3)20 + \surd 392$ para $\sqrt[3]{20} + \sqrt{392}$.

[10] C. Dibvadii in Arithmeticam irrationalivm Euclidis (Arnhem, 1005).(apud [3, p. 369]

Mas a diversidade de muitos símbolos prevaleceu durante um século para se definir a posição exata do número relativo ao $\sqrt{}$.

A. Romanus a partir da idéia do círculo de Stevin utilizou dois parênteses, mesmo procedimento utilizado na Inglaterra por Richard Sault[11] que escreve $\sqrt{(3)a+b}$. Como Girard, Harriot escreve $\sqrt{}3.)26+\sqrt{}675$ para $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}$ (Figura 3.4). Substancialmente esta notação foi utilizada por Descartes em uma carta a Mersenne (Setembro 30, 1640), onde se representa a raiz cubica por $\sqrt{}3)$, a raiz quinta por $\sqrt{}5)$ e assim por diante. Outras vezes utilizou-se colchetes, $\sqrt{}[3]1000$ para $\sqrt[3]{1000}$ na nossa notação atual.

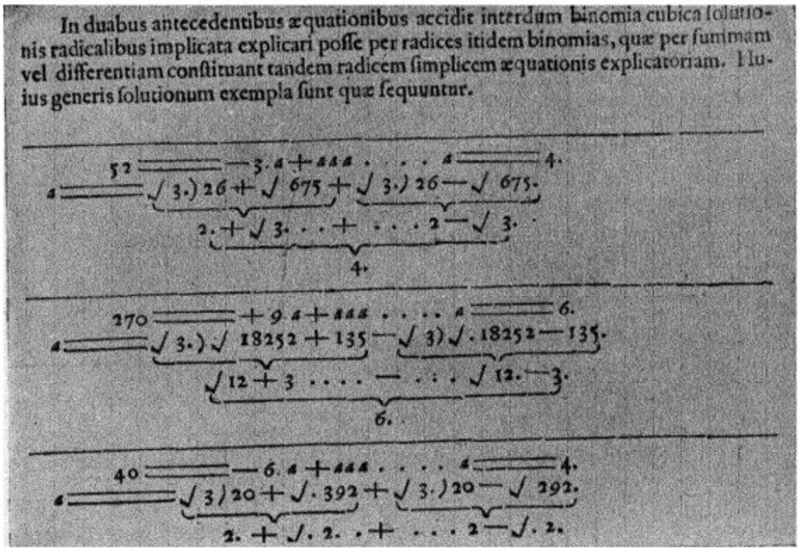

In duabus antecedentibus æquationibus accidit interdum binomia cubica ſolutionis radicalibus implicata explicari poſſe per radices itidem binomias, quæ per ſummam vel differentiam conſtituant tandem radicem ſimplicem æquationis explicatoriam. Huius generis ſolutionum exempla ſunt quæ ſequuntur.

Figura 3.4: Página 101 do *Artis Analyticae praxis*, 1631 de Thomas Harriot. Fonte: [3, p. 201].

Um passo na direção da notação atual é tomada por John Wallis[12] que em 1655 expressa os índices de raiz em números sem envolvê-los em um círculo como fez Stevin, ou entre parênteses como fez Romanus. No entanto, Wallis ainda escreve de forma diferente do atual; escreve $\sqrt{}^3 R^2$ para o nosso $\sqrt[3]{R^2}$. A colocação do índice dentro da abertura do radical tinha sido sugerida por Albert Girard, já em 1629. A Notação de Wallis é encontrada na aritmética universal do espanhol, José

[11]Richard Sault, A New Treatise of Algebra (London, n.d.).(apud [3, p. 371]

[12]John Wallis, Arilhmetica infinitorum (Oxford, 1655), p. 59, 87, 88.(apud [3, p.371]

Zaragoza[13], que escreve $\sqrt{}^{4}243 - \sqrt{}^{3}27$ para o nosso $\sqrt[4]{243} - \sqrt[3]{27}$ e $\sqrt{}^{2}(7 + \sqrt{}^{2}13)$ para o nosso $\sqrt{7 + \sqrt{13}}$. Wallis empregou essa notação na sua Algebra de 1685. Foi o primeiro a utilizar índices na expressão $\sqrt{}^{d}R^{d} = R$.

A idéia de Girard colocando o indicador na abertura do radical aparece em Traite Holle M. d'Algebre (Paris, 1690), numa carta de Leibniz[14], para Varignon do ano de 1702, na expressão $\sqrt{1 + \sqrt{-3}}$, e em 1708 em uma revisão de G. Manfred[15] com índices literais, $\sqrt[m]{aa + bb^{n}}$. Nesta altura, a preferência leibniziana para $\sqrt{}(aa + bb)$ em vez de $\sqrt{aa + bb}$ é tornado público; uma preferência que foi atendida na Alemanha e Suíça mais do que na Inglaterra e na França. Na obra *Arithmetica universalis*[16], de Isaac Newton de 1707 (escrito por Newton em algum momento entre 1673 e 1683, e publicado pela Whiston sem ter obtido o consentimento de mesmo) o numeral índice é colocado depois do radical, embaixo, como em $\sqrt{}3 : 64$ para $\sqrt[3]{64}$, causando o risco de confusão maior do que na maioria das outras notações.

Christian Wolff[17], em 1716, usou em um só lugar o caráter astronômico representando Áries ou o carneiro, para o sinal radical, e escreve o índice da raiz para a direita, assim $♈^{3}$ que significa raiz cúbica. No entanto, a notação $\sqrt[n]{}$ veio a ser adotada quase universalmente durante o século XVIII.

Variações aparecem aqui e ali. De acordo com W. J, Greenstrcet[18], a utilização de um sinal radical curioso encontra-se na *Walkingame's Tutor's Assistant* (20th ed., 1784). Emprega-se a letra V para raiz quadrada, mais utiliza V^{3} para o cubo ou terceira potência, V^{4} para a quarta potência. Em 1811, uma obra de aritmética anônima de Massachusetts sugere $^{2}4$ para $\sqrt[2]{4}$ e ^{m}b para $\sqrt[m]{b}$.

Ainda em 1847 encontra-se a notação $^{3}\sqrt{b}$, , $^{m}\sqrt{abc}$, para a raiz cúbica e a m-ésima raiz, o índice aparecia em frente do sinal radical. Esta forma não foi adotada tendo em conta as limitações da tipografia, para um artigo na mesma época, a partir da obra de De Morgan, o índice é colocado dentro da abertura do sinal radical[19].

René Descartes, em seu Géométry (1637), indica a raiz cúbica por $\sqrt{}C.$ como

[13]Joseph Zaragoza, Arithmetica universal (Valencia, 1669), p. 307.(apud [3, p.371]

[14]Journal des Sâvans, anne"e 1702 (Amsterdam, 1703), p. 300. (apud [3, p.371]

[15]Ibid., ann6e 1708, p. 271. 8 Ibid.(apud [3, p.371]

[16]Isaac Newton, Arithmetica universalis (London, 1707), p. 9; Tropfke, Vol. II, p. 154. (apud [3, p.371]

[17]Christian Wolff, Mathematisches Lexicon (Leipzig, 1716), p. 1081. (apud [3, p.371]

[18]W. J. Greenstreet in Mathematical Gazette, Vol. XI (1823), p. 315. (apud [3, p.371]

[19]A. de Morgan, "Study and Difficulties of Mathematics,"ibid., Mathematics, Vol. I (London, 1847), p. 56. (apud [3, p.371]

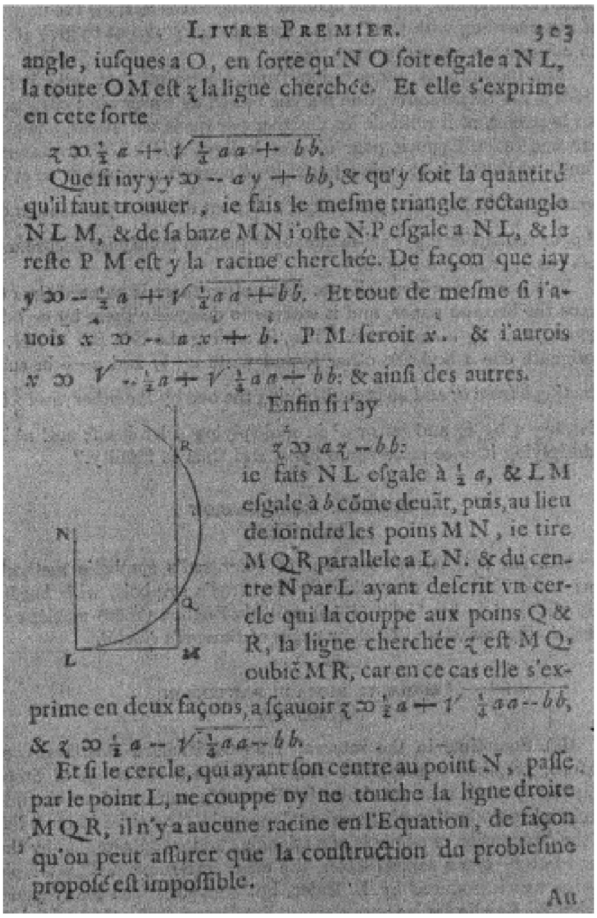
em

$$\sqrt{C.\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$$

para o nosso

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

Aqui uma inovação notável é a união do sinal radical $\sqrt{}$ com o vínculo —— (Figura 3.5).



LIVRE PREMIER. 303

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Que si iay $yy \propto -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que iay $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \propto -ax^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.

Enfin si i'ay

$z^2 \propto az - bb$:

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2}a$, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiẽ M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

Au

Figura 3.5: Página do livro *Geométrie* de René Descartes, 1637.
Fonte: [3, p. 207].

Esta combinação de sinal radical $\surd$ e vínculo é aquele que encontrou com grande apelo e tem mantido um lugar de destaque em livros de matemática até o nosso tempo. Antes de 1637, esta combinação de sinal radical e vínculo havia sido sugerida por Descartes (Euvres, vol. X, p. 292).

O expoente fracionário para indicar raiz

Grande como foram os serviços de Descartes para aperfeiçoar a notação algébrica, o mesmo perdeu uma excelente oportunidade de prestar um serviço ainda maior. Antes dele Oresme e Stevin tinha avançado o conceito de fracionário, bem como de expoentes inteiros. Descartes, ao invés de estender a aplicação do sinal radical $\surd$, com o vínculo, tivesse descartado o mesmo completamente e introduzisse a notação para expoente fracionário, então é concebível que o uso adicional de símbolos radicais teria sido desencorajada e que a duplicação desnecessária de notação, conforme ilustrada por $b^{\frac{3}{4}}$ e $\sqrt[4]{b^3}$, teria sido evitado. É concebível que gerações de alunos não teriam tido a necessidade de dominar as duas notações quando uma só (o exponencial) teria respondido todos os fins. Isaac Newton, mais tarde, também perdeu a oportunidade, até introduziu a notação da fração expoente, porém continuou usando radicais.

Leibniz e outros que estavam destinados a simplificar a impressão através da utilização em uma linha de símbolos desencorajou o uso do símbolo com o vínculo. Em 1915, o Conselho da Sociedade de Matemática de Londres, nas suas sugestões para Notação e impressão, recomendou que $\surd 2$ ou $2^{\frac{1}{2}}$ deveria ser adotado em vez de $\sqrt{2}$, também $\surd(ax^2 + 2bx + c)$ ou $(ax^2 + 2bx + c)^{\frac{1}{2}}$ em vez de $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$.

O Comitê Nacional dos Estados Unidos fez uma recomendação em relação ao uso dos símbolos para indicar raízes. No que diz respeito ao sinal de raiz $\surd$, a comissão reconhece que a conveniência da sua escrita assegura o seu uso contínuo, em muitos casos, ao invés de utilizar o expoente fracionário. Recomenda-se, contudo, que, quando o trabalho algébrico envolver situações complicadas o expoente fracionário deverá ser preferido. Chama-se atenção para o fato de que o símbolo $\sqrt{a}$ $(a > 0)$ significa apenas a raiz quadrada positiva e que o símbolo $\sqrt[n]{a}$ significa n-ésima raiz de a, e de forma similar para $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{n}}$ [20].

[20]Report of the National Committee on Mathematical Requirements under the Ausjyices of the Mathematical Association of America (1923), p. 81. (apud [3, p.379]

Capítulo 4

Um Método “novo” para extração de raízes quadradas

Neste capítulo, iremos apresentar uma “nova” forma de calcular a raiz quadrada que é abordada nas nossas escolas atualmente, afim de ampliar o leque de possibilidades de métodos de extração de raízes e sua utilização por alunos e docentes.

4.1 Método Apresentado por Jonofon Sérates

O método aqui descrito foi apresentado pelo matemático sergipano Jonofon Sérates, Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Brasília (ver [25]).

O método descrito pelo matemático promete facilitar o algoritmo usual conhecido na escola de tal forma que a partir de subtrações qualquer pessoa consiga encontrar o valor da raiz quadrada de um número positivo. O método na verdade é uma adequação ao método chinês de extrair raízes.

Vamos explicar passo a passo o procedimento e depois iremos justificar o método. Como exemplo, vamos extrair a raiz quadrada de 1024.

1º Passo: Separar os algarismos de dois em dois da direita para a esquerda.

$$\sqrt{10'24}$$

2º Passo: Do número que fica à esquerda, mais próximo a abertura do radical, iniciar a subtração pela sequência de números ímpares até que a subtração não seja mais definida no conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$).

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{10'24} \\
\underline{-1} \\
9 \\
\underline{-3} \\
6 \\
\underline{-5} \\
1
\end{array}
$$

3º Passo: A quantidade de subtrações realizadas é o primeiro algarismo da raiz quadrada procurada.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{10'24} = 3 \\
\underline{-1} \\
9 \\
\underline{-3} \\
6 \\
\underline{-5} \\
1
\end{array}
$$

4º Passo: Para prosseguir abaixar a dezena formada seguinte, imediatamente, à direita e juntar com o resto das subtrações anteriores.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{10'24} = 3 \\
\underline{-1} \\
9 \\
\underline{-3} \\
6 \\
\underline{-5} \\
1{\color{red}24}
\end{array}
$$

5º Passo: Colocar o número 01 abaixo das unidades do número 124 e somar o último ímpar que apareceu dentre as subtrações com valor 1 colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1 no resto. Ou seja, fica 5 (último ímpar que foi subtraído) $+$ 1 (fixo) $= 6$, colocar esse valor ao lado do algarismo 1 formando 61 para reiniciar a subtração.

$$
\begin{array}{r}
\sqrt{10'24} = 3 \\
-1 \\
\hline
9 \\
-3 \\
\hline
6 \\
-5 \\
\hline
124 \\
-61 \\
\hline
63 \\
-63 \\
\hline
0
\end{array}
$$

6º Passo: A quantidade de subtrações realizadas é o segundo algarismo do resultado.

$$
\begin{array}{r}
\sqrt{10'24} = 32 \\
-1 \\
\hline
9 \\
-3 \\
\hline
6 \\
-5 \\
\hline
124 \\
-61 \\
\hline
63 \\
-63 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Neste caso como o resto das subtrações foi zero temos uma raiz exata. Mas se a raiz não for exata, um número irracional por exemplo. Vamos extrair a raiz quadrada de 2 com aproximação de 3 casas decimais.

$\sqrt{2} = 1{,}414$

-1

100 — *acrescentamos 2 zeros para 1º casa decimal*

-21 — *Próximo ímpar*: $1 \cdot 20 + 1 = 21$

79

-23

56

-25

31

-27

400 — *acrescentamos 2 zeros para 2º casa decimal*

-281 — *Próximo ímpar*: $14 \cdot 20 + 1 = 281$

11900 — *acrescentamos 2 zeros para 3º casa decimal*

-2821 — *Próximo ímpar*: $141 \cdot 20 + 1 = 2821$

9079

-2823

6256

-2825

3431

-2827

604

Para extrairmos raízes quadradas irracionais ou não exatas, procedemos exatamente no mesmo método chinês, ou seja, "completando" com dois zeros e os associando às casas decimais.

A grande percepção desse método é a associação com a soma da sequencia dos números ímpares menores que o valor da raiz procurada que resulta em um número quadrado o que facilitou a extração das raízes.

A justificativa do método

Podemos escrever qualquer número quadrado perfeito como a soma dos n primeiros números ímpares menores que o valor que se quer encontrar a raíz quadrada. Ou seja,

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$(...)$$

$$k = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + a_n$$

Assim, é fácil observar que o 2º membro da última equação é a soma dos termos de uma progressão aritmética onde o $a_1 = 1$ e a razão $r = 2$, o termo geral dessa progressão é,

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$a_n = 1 + (n - 1).2$$

$$a_n = 2n - 1$$

E a soma é dada por

$$k = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$k = \frac{(1 + 2n - 1).n}{2} = k = n^2 \Longrightarrow n = \sqrt{k} \tag{4.1}$$

O valor de n é o número de parcelas da soma da progressão aritmética.

O método, como todos os outros também se torna exaustivo para números elevados e para aproximações com necessidade de muitas casas decimais, mas serve como mais um método que busca simplificar o cálculo das raízes quadradas exatas ou não.

Geometricamente a ideia é ir completando o quadrado com os números ímpares organizando-os de forma a "desgastar" a área inicial (figura 4.1).

Da mesma forma que o algoritmo chinês, esse método encontra os algarismos do valor da raiz quadrada um a um. Logo a $\sqrt{1024}$ pode ser escrito na forma ab onde teríamos $a \cdot 10 + b$. E daí,

$$a \cdot 10 \leq \sqrt{1024} \tag{4.2}$$

$$a^2 \cdot 10^2 \leq 1024$$

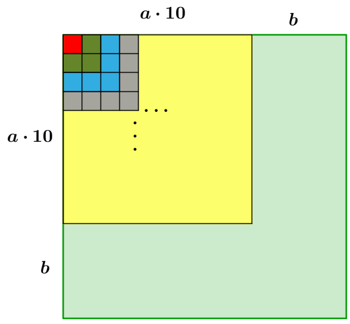


Figura 4.1: Interpretação Geométrica para o método apresentado pelo professor Jonofon

$$1024 - a^2 \cdot 10^2 \geq 0$$

Ou seja, precisamos descobrir qual o quadrado perfeito que multiplicado por 100 quando subtraído de 1024 ainda fique um valor positivo ou igual a zero. Dessa forma fica fácil ver que o valor de a^2 é 9 porém, vimos em (4.1) que um quadrado perfeito pode ser escrito como uma soma de uma sequencia de números ímpares menores que o valor quadrado logo,

$$a^2 = 9 = (1 + 3 + 5)$$

o número de termos é exatamente o valor de a, ou seja, 3.

Assim, de (4.2) ficamos com $30^2 < 1024$ o que significa dizer que a soma dos 30 primeiros números ímpares é o maior quadrado perfeito múltiplo de dez menor que o valor que desejamos extrair a raiz quadrada.

A ideia de sempre reiniciarmos a subtração colocando o número 1 na casa das unidades, dá-se pelo fato da quantidade de ímpares subtraída na verdade ser múltipla de dez. Logo, sempre o último número ímpar subtraído na sequencia tem sua unidade igual a nove e, consequentemente, temos de reiniciar a subtração a contar do algarismo das unidades igual a um.

De fato, seja n um múltiplo de dez, logo podemos escrevê-lo na forma $n = k.10^i$ com k e i números naturais. Assim podemos encontrar o último elemento da sequencia dos números ímpares através da lei de formação $a_n = 2n - 1$,

$$a_{k.10^i} = 2.k.10^i - 1$$

Como $2.k.10^i$ é múltiplo de 10, ao subtrairmos 1, obrigatoriamente, o resultado será um número com o algarismo das unidades igual a 9.

Outra situação é a de adicionarmos o último ímpar subtraído a um e escrevermos no "novo" número ímpar ao lado do número 1 comentando anteriormente. Como a quantidade é múltipla de dez e o último ímpar é o terminado na unidade 9, todos os outros ímpares que iniciavam com o aquele já subtraído foram computados.

Posso escrever, agora, a nova inequação $1024 - (30 + b)^2 \geq 0$, assim falta descobrir o valor de b.

Para continuar com o mesmo processo de ir diminuindo os números ímpares precisamos encontrar qual o próximo número ímpar a ser subtraído do resto da operação de $1024 - 900$, porém já visualizamos que foram utilizados 30 números ímpares, e dessa forma, o próximo será o 31^o , ou seja,

$$a_n = 2n - 1 \Rightarrow a_{31} = 2 \cdot 31 - 1 = 61$$

Daí segue-se que,

$$124 - 61 = 63$$

$$63 - 63 = 0$$

Como o resultado deu zero significa dizer que a soma da sequencia de números ímpares "esgotou" o quadrado inicial. E que o valor de b é a quantidade de números ímpares que faltava para que isso acontecesse, dessa forma, $b = 2$ e $\sqrt{1024} = 32$.

Referências Bibliográficas

[1] BERLINGHOFF, W. P.; GOUVEA, F. Q., *A matemática Através dos Tempos: Um guia fácil e prático para professores e entusiastas.* 2. ed. São Paulo, SP: Blucher, 1944. Tradução: Elza F. Gominde e Helena Castro.

[2] BOYER, C. B., *História da Matemática.* 2. ed. São Paulo, SP: Edgard Blucher, 1996. Tradução: Elza F. Gomide.

[3] CAJORI, F., *A History of Mathematical Notations: Notations in Elementary Mathematics.* 2 ed. Chicago, USA: The Open Court Company, 1928.

[4] CAJORI, F., *Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation.* The American Mathematical Monthly. Chicago, USA: Mathematical Association of America. v. 18, n. 02, p.29-32, fev. 1911. Disponível em <http://www.jstor.org/stable/2973939>. Acesso em 24 mar. 2013.

[5] CARVALHO, J. B. P. de., *A raiz quadrada ao longo dos séculos.* V Bienal da SBM, 2010. João Pessoa, PB, 2010.

[6] CERRI, C., *Desvendando os Números Reais.* Disponível em <http://share.pdfonline.com/661c583d99b4455aa4ef12b01cac76d1/Historia-numeros-reais.pdf>. Acesso 30 mar. 2013.

[7] DENNIS, D.; ADDINGTON, S., *Square Root Calculations.* Mathematical Intentions. Disponível em <http://quadrivium.info/MathInt/Notes/SquareRoots.pdf>. Acesso em 30 mar. 2013.

[8] EVES, H., *Introdução à história da matemática.* 5. ed. Campinas, SP: da Unicamp, 2011. Traduzido por Hygino H. Domingues.

[9] COMMANDINO, F., *Euclides - Elementos de Geometria.* 3. ed. São Paulo, SP: edições Cultura, 1944. Adicionados e Ilustrados por Roberto Simson.

[10] FIORENTINI, D.; LORENZATO, S., *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*, Campinas: Autores Associados, 2006.

[11] HODGSON, B. *Uma breve história da quinta operação.* Gazeta de Matemática, 2008. Portugal, n. 156, p. 07?30, 2008. Disponível em: <http://gazeta.spm.pt-/fichagazeta?id=156>. Acesso em: 2 mar. 2013.

[12] JARVIS, F., *Square roots by subtraction.* Mathematical Spectrum. Sheffield, UK: Mathematical Association of America, 2005, n. 37, p.119-122, set. 2004. Disponível em <http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/maths/jarvisspec02.pdf>. Acesso em 30 mar. 2013.

[13] KOCHE, J. C., *Fundamentos de metodologia científica: Teoria da Ciência e Prática da pesquisa*, Petrópolis: Vozes, 2001.

[14] LIMA, E. L., *Análise Real: Funções de uma variável.* 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2006.

[15] MENEZES D. B. et al, *O mistério da Espiral de Cirene.* In: III Encontro Nacional de Educação Matemática, Rio Grande do Norte, 30 set. - 02 out. 2011. Disponível em: <http://www.sbemrn.com.br/site/III20erem/relatos/doc/RE_Menezes_Freitas_Maia_e_Pereira.pdf>. Acesso em 01 abr. 2013.

[16] MENDES, I. A., *Investigação Histórica no Ensino da Matemática*, 1.ed., Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna Ltda, 2009.

[17] NETO, F. R. F., *Método geométrico para o cálculo da raiz quadrada.* Explorando o ensino da matemática. Brasília/DF, v. 1, n. 1, p. 156?158. Disponível em <http:/-/portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmaticap3.pdf>. Acesso em 23 mar. 2013.

[18] PERRY, M., *Civilização Ocidental: Uma História Concisa.* 3. ed. São Paulo, SP: Martins Fontes LTDA, 2011. Traduzido por Waltensir Dutra e Sivana Vieira.

[19] RAMPAZZO, L., *A Raiz Quadrada sem Tabus.* Revista do Ensino de Ciências. São Paulo, 1985, n. 14, p. 28-32 Disponível em <http://www.cienciamao.usp.br/dados/rec/_araizquadradasemtabusluc.arquivo.pdf>. Acesso em 28 fev. 2013.

[20] RIBEIRO, M. R. R., *Ainda a Raiz Quadrada.* III Simpósio de Matemática e Matemática Industrial. Catalão/GO. Disponível em <http://www.catalao.ufg.br/mat/simmi/simmi2011/arquivos/ST2.pdf>. Acesso em 27 fev. 2013.

[21] ROCHA, D. dos S., *Resgatando métodos para o cálculo de raízes quadradas e raízes cúbicas.* Caderno Dá Licença, 1999. Niterói, RJ, v. 2, n. 2, p. 36?43, 1999. Disponível em <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume2-/resgatando metodos para o calculo de raizes quadradas e raizes cubicas.pdf>. Acesso em 26 fev. 2013.

[22] SHIRALI, S. A., *The Bakhshali Square Root Formula.* Resonance: Journal of Science Education. Mathematical Association of America. 2012, v. 17, n. 09, p.884-895, set. 2012. Disponível em <http://www.ias.ac.in/resonance/September2012/p884-894.pdf>. Acesso em 24 mar. 2013.

[23] TUNALA, N., *Cálculo Aproximado da Raiz Quadrada.* Cd-Rom: Revista do Professor de Matemática. São Paulo, v. 1, 2011.

[24] VAZ, D. A. de F., A matemática e a filosofia de René Descartes. Matemática e Atualidade, 2006. Brasil, n. 1, 2006. Disponível em: <http://www.catalao.ufg.br/mat/revista/ART-017.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2013. Citado na página 17.

[25] SERATES, J., *Métodos cuca legal.* São Paulo: Editora Teixeira 2011.