

---

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

**Tiago Del Penho Mazzoni**

**Análise Dimensional:  
materiais para um livro aberto**

Juiz de Fora  
2019

**Tiago Del Penho Mazzoni**

**Análise Dimensional:  
materiais para um livro aberto**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Jair Koiller

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Mazzoni, Tiago.

Análise Dimensional:

materiais para um livro aberto / Tiago Del Penho Mazzoni. – 2019.

109 f. : il.

Orientador: Jair Koiller

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT , 2019.

1. Análise dimensional. 2. Teorema Pi. 3. Metrologia. I. Koiller, Jair, orient. II. Título.

**Tiago Del Penho Mazzoni**

**Análise Dimensional:  
materiais para um livro aberto**

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 11 de julho de 2019

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Jair Koiller - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Grigori Chapiro  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professora Dra. Sônia Pinto de Carvalho  
Universidade Federal de Minas Gerais

*Dedico este trabalho a Gabriela a quem esteve sempre do meu lado esses anos todos  
e aos meus filhos Gabriel e Sabrina.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Jair Koiller pela paciência na orientação, incentivo e dedicação que tornaram possível a conclusão desta monografia, e agradeço também aos meus professores que durante muito tempo me ensinaram o quanto é bom estudar.

## RESUMO

Este trabalho tem como um primeiro objetivo facilitar a compreensão da Mecânica, assim como de toda a Física, para os alunos do Ensino Médio, e servir de material de referência para os professores de Ciências e Matemática. Porém nosso objetivo principal é mostrar que a Análise Dimensional é muito mais do que simplesmente uma ferramenta para lembrar fórmulas em exames. Na realidade representa um entendimento mais profundo das invariâncias de escala e das similitudes encontradas nos fenômenos da Natureza. Apresentamos várias notas históricas, realçando o legado do Prof. Fernando Lobo Carneiro para a Engenharia brasileira. Utilizando os teoremas de Bridgman e de Vaschy-Buckingham, apresentamos um bom número de exemplos, alguns lúdicos, outros históricos, outros já em nível universitário, além de muitas sugestões para estudos futuros - colocadas em “para saber mais”. O primeiro Teorema é aqui tomado pragmaticamente, mais como definição de uma grandeza derivada das sete grandezas fundamentais do Sistema Internacional da Metrologia - cujas definições foram recentemente revistas. Apresentamos uma prova do teorema Pi de Vaschy-Buckingham utilizando idéias da teoria dos grupos de transformações. Esta monografia é redigida como uma proposta para um livro aberto, enfatizando a importância da Análise Dimensional como guia para o desenvolvimento de uma teoria matemática, e como ferramenta indispensável no planejamento de experimentos.

Palavras-chave: Análise Dimensional. Teorema Pi. Metrologia.

## ABSTRACT

This work has as a first objective facilitate the understanding of Mechanics, and in fact all Physics for Middle and High School students, and to serve as reference material for teachers. But our main goal is to show that Dimensional Analysis is much more than a simple tool to remember formulas for exams. It represents in reality a deep understanding of scale invariances and similitudes found in the phenomena of Nature. We present several historical notes, highlighting the legacy of Prof. Fernando Lobo Carneiro to the Brazilian Engineering. Using Bridgman's and Vaschy-Buckingham theorems, we present a good number of examples, some playful, others historical, others already at university level, as well as many suggestions for future studies - put as "to learn more". The first Theorem is here taken pragmatically as a definition of a derived quantity from the seven fundamental quantities of the recently revised International System of Metrology. We present a demonstration of Vaschy-Buckingham's Pi-theorem using ideas from the theory of transformation groups. This monograph is written as a proposal for an open book, emphasizing the importance of Dimensional Analysis as a guide for the development of mathematical theories, and as an indispensable tool in the planning of experiments.

Key-words: Dimensional Analysis. Pi Theorem. Metrology.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Matrioscas: invariância de escala . . . . .	12
Figura 2 – As sete grandezas fundamentais do Sistema Internacional . . . . .	13
Figura 3 – Artigo fundamental de Buckingham, 1914 . . . . .	19
Figura 4 – Bridgman, 1922 . . . . .	20
Figura 5 – Prefácio . . . . .	20
Figura 6 – Índice do livro de Bridgman . . . . .	21
Figura 7 – Dimensional Analysis, Bridgman (Introdução) . . . . .	21
Figura 8 – Constantes universais no SI [1] . . . . .	24
Figura 9 – Redefinição do Sistema SI . . . . .	27
Figura 10 – O novo SI e o ensino de Ciências . . . . .	29
Figura 11 – Período do pêndulo simples . . . . .	36
Figura 12 – Teorema de Pitágoras . . . . .	44
Figura 13 – <i>Discorsi</i> de Galileu, 1638 . . . . .	50
Figura 14 – Um oscilador massa-mola . . . . .	51
Figura 15 – Teste nuclear em Trinity (1945) . . . . .	54
Figura 16 – Artigo de G. I. Taylor . . . . .	54
Figura 17 – Rompimento da barragem de Brumadinho . . . . .	56
Figura 18 – Análise Dimensional para a erosão (Shields) . . . . .	63
Figura 19 – Diagrama de Shields e curva obtida teóricamente . . . . .	64
Figura 20 – Rompimento de barragens: tempo para evacuação . . . . .	66
Figura 21 – Lei de escala para o rompimento de barragem . . . . .	66
Figura 22 – Balística nos esportes . . . . .	67
Figura 23 – O preço da velocidade/original] . . . . .	69
Figura 24 – O preço da velocidade/revisitada . . . . .	69
Figura 25 – O pulo do rato jerboa . . . . .	71
Figura 26 – Análise Dimensional do salto dos mamíferos . . . . .	72
Figura 27 – Tensão superficial . . . . .	73
Figura 28 – O evangelho segundo John . . . . .	74
Figura 29 – Um desenho de Leonardo da Vinci. . . . .	74
Figura 30 – Como o cachorro se seca? . . . . .	75
Figura 31 – Objetivos da BNCC . . . . .	109

## PARA SABER MAIS (E TAREFAS PARA O LIVRO ABERTO)

1	Buckingham, Bridgman e Palacios . . . . .	18
2	Redefinição do SI . . . . .	25
3	Quilograma e a constante de Planck . . . . .	26
4	Física e Filosofia . . . . .	26
5	Vocabulário internacional da metrologia . . . . .	27
6	Metrologia . . . . .	28
7	“Powers of Ten” (um filme premiado) . . . . .	28
8	Ensino Técnico . . . . .	30
9	Alguns recursos Educacionais . . . . .	30
10	<i>Análise Dimensional</i> de Fernando Lobo Carneiro . . . . .	32
11	Biografia Fernando Lobo Carneiro . . . . .	32
12	Grandezas derivadas . . . . .	34
13	Período do pêndulo simples e o pêndulo isócrono . . . . .	37
14	Exemplo: Medições de vazão . . . . .	37
15	Do operacionalismo de Bridgman ao GUM . . . . .	38
16	Algoritmo para os $\Pi_k$ . . . . .	42
17	Quantificação de incertezas (tema de pesquisa) . . . . .	43
18	A Análise Dimensional não é uma panacéia . . . . .	43
19	Queda de dominós . . . . .	45
20	Matemática de briga de rua . . . . .	46
21	Exercícios propostos por Terence Tao . . . . .	47
22	Problema do nascer do sol . . . . .	48
23	Queda livre num plano inclinado e Galileu . . . . .	51
24	Experimento em laboratório . . . . .	52
25	Outro experimento em laboratório . . . . .	52
26	Trinity: estimando a constante . . . . .	55
27	Brumadinho . . . . .	58
28	Estudos sobre rompimento de barragens . . . . .	58
29	Estimativa de tempo disponível para a evacuação . . . . .	65
30	Esportes! . . . . .	67
31	O custo da velocidade . . . . .	68
32	Locomoção de animais . . . . .	70
33	Quem pula mais alto? . . . . .	71
34	A fraqueza dos gigantes . . . . .	72
35	Flutuando na água . . . . .	73
36	Porquê a chuva não mata o mosquito? . . . . .	75
37	Como o cachorro molhado se seca (e outros mistérios)? . . . . .	75
38	Bitcoin . . . . .	76

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AD	Análise Dimensional
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAT	Autorização para lecionar a título precário em escola estadual básica
CECO	Colégio Estadual Círculo Operário
CEFET	Centro Federal de Educação Tecnológica
CES-JF	Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora
COMUT	Programa de Comutação Bibliográfica
CSIC	Consejo Superior de Investigaciones Científicas
DIMCI	Diretoria de Metrologia Científica e Tecnologia
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
EURAMET	European Association of National Metrology Institutes
GUM	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
INMETRO	Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia
NIST	National Institute of Standards and Technology
NPL	National Physical Laboratory
PISM	Programa de Ingresso Seletivo Misto da UFJF
PMMG	Polícia Militar de Minas Gerais
PTB	Physikalisch-Technische Bundesanstalt
SI	Sistema Internacional de Unidades Metrológicas
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
VIM	Vocabulário Internacional da Metrologia

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>14</b>
1.1	HISTÓRIA DA ANÁLISE DIMENSIONAL . . . . .	17
1.2	AS SETE GRANDEZAS FUNDAMENTAIS . . . . .	22
1.3	METROLOGIA E O ENSINO TÉCNICO . . . . .	30
1.4	FERNANDO LOBO CARNEIRO . . . . .	31
<b>2</b>	<b>HOMOGENEIDADE DIMENSIONAL E O TEOREMA PI .</b>	<b>33</b>
2.1	GRANDEZAS FUNDAMENTAIS E DERIVADAS . . . . .	34
2.2	HOMOGENEIDADE DIMENSIONAL E O TEOREMA DE BRIDGMAN	35
2.3	O TEOREMA PI (VASCHY E BUCKINGHAM) . . . . .	39
<b>3</b>	<b>DESAFIOS LÚDICOS (PARA INICIAR) . . . . .</b>	<b>44</b>
3.1	TEOREMA DE PITÁGORAS . . . . .	44
3.2	QUEDA DE DOMINÓS . . . . .	45
3.3	MATEMÁTICA DE BRIGA DE RUA . . . . .	46
3.4	“DICAS” DE UM FIELDS MEDAL (E DE UM QUE NÃO FOI) . . . .	47
<b>4</b>	<b>EXEMPLOS ACESSÍVEIS NO ENSINO MÉDIO . . . . .</b>	<b>49</b>
4.1	CRESCIMENTO EXPONENCIAL (MALTHUS) . . . . .	49
4.2	QUEDA LIVRE E RAMPAS (GALILEU) . . . . .	50
4.3	MOVIMENTO OSCILATÓRIO (HOOKE) . . . . .	51
4.4	ENERGIA LIBERADA NUMA BOMBA ATÔMICA (TAYLOR) . . . .	53
4.5	ROMPIMENTO DE UMA BARRAGEM . . . . .	56
<b>5</b>	<b>TEMAS MAIS AVANÇADOS (NEM TODOS!) . . . . .</b>	<b>59</b>
5.1	AD EM FLUIDOS . . . . .	60
5.2	TRANSPORTE DE SEDIMENTOS . . . . .	62
5.3	BARRAGENS: TEMPO DISPONÍVEL PARA EVACUAÇÃO . . . . .	65
5.4	O CUSTO DA VELOCIDADE . . . . .	68
5.5	BIOLOCOMOÇÃO . . . . .	69
5.6	MAIS TEMAS ... PARA O FUTURO . . . . .	76
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>77</b>
6.1	FEYNMAN NO BRASIL . . . . .	78
6.2	REFLEXÃO FINAL . . . . .	79
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>80</b>

APÊNDICE A – BUCKINGHAM . . . . .	91
APÊNDICE B – BRIDGMAN . . . . .	92
APÊNDICE C – PALACIOS . . . . .	93
APÊNDICE D – LOBO CARNEIRO . . . . .	94
APÊNDICE E – CONGRESSO SOBRE MEDIÇÃO 2018 . .	100
APÊNDICE F – EXERCÍCIOS DE VESTIBULAR . . . . .	101
APÊNDICE G – ANÁLISE DIMENSIONAL NA BNCC . . .	107

Figura 1 – Matrioscas: invariância de escala



Fonte: <https://www.fromrussia.com/russian-dolls/nesting-dolls-matryoshkas>

Figura 2 – As sete grandezas fundamentais do Sistema Internacional



Fonte: Sociedade Brasileira de Metrologia [www.metrologia.com.br](http://www.metrologia.com.br)

## 1 INTRODUÇÃO

A Análise Dimensional surge de premissas aparentemente muito simples para a modelagem dos fenômenos físicos, químicos e biológicos. Relacionam as *grandezas físicas fundamentais* com outras grandezas, delas derivadas, e associadas às suas respectivas unidades de medida. As grandezas derivadas são simplesmente produtos de potências das unidades de base. São sete as *grandezas físicas fundamentais* no Sistema Internacional (SI). Estão discutidas em mais detalhe na Seção 1.2 e nas leituras ali recomendadas.

A análise dimensional - precipuamente o “Teorema Pi” (ou  $\Pi$ , por causa do símbolos  $\pi_j$  usados por Buckingham para designar os grupos adimensionais) permite antever a estrutura básica das fórmulas que relacionam as grandezas envolvidas, fundamentais e derivadas. A análise dimensional serve a todos os ramos da Física, iniciando pela Mecânica, e de fato tem infindáveis aplicações, em todas as Ciências - não apenas as Exatas e da Vida, mas também nas Ciências Humanas. Estamos convencidos que a compreensão deste Teorema Pi (sem se preocupar com sua prova formal) deveria fazer parte da formação básica de todo aluno, e deveria ser introduzido já no ensino médio de forma sistemática<sup>1</sup>.

Os pré-requisitos de matemática necessários para o desenvolvimento deste trabalho são extremamente simples: operações com potências, equação do primeiro grau e resolução de sistemas lineares, ferramentas estas que são ministradas durante a fase do ensino fundamental dois. Sem mais delongas, enunciaremos agora o Teorema de Vaschy-Buckingham (será provado na seção 2.3 em sua forma explícita, que em geral é a mais útil).

**Teorema.** *Um modelo (teórico ou experimental)*

$$f(W_1, \dots, W_{n+1}) = 0$$

*para um fenômeno envolvendo  $n + 1$  grandezas físicas derivadas  $W_j$ , independentes, expressas em termos de  $k$  grandezas fundamentais  $L_i$ , sob forma de produtos elevados a potências,*

$$W_j = L_1^{\beta_{1j}} \dots L_k^{\beta_{kj}}, \quad 1 \leq j \leq n + 1$$

*pode ser reescrito através de uma relação funcional entre  $n + 1 - k$  variáveis reduzidas, os chamados grupos adimensionais independentes,  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n+1-k}$ , da forma*

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n+1-k}) = 0,$$

*onde cada “grupo  $\Pi$ ” é um monômio **adimensional** envolvendo produtos das grandezas  $W_j$  elevados a certas potências (e que podem ser determinadas de forma algorítmica).*

---

<sup>1</sup> Ver o lúcido artigo de Fabio Silva, [2], professor do CEFET/BH.



Em Engenharia, usando os grupos adimensionais, modelos em escala reduzida são estudados antes de se construir pontes e barragens; asas de avião são analisadas em túneis de vento. A Fig. 1 serve como uma evocação para as invariâncias de escala. Enfatizamos que a primeira tarefa na Análise Dimensional de um problema - e que é o mais difícil - é identificar quais são as grandezas envolvidas no fenômeno em estudo. Isto requer boa intuição e muita experimentação. É também fundamental descobrir as relações entre as grandezas envolvidas, muitas vezes físico-biológicas. Um exemplo está ilustrado na capa de sum delicioso pequeno livro *Mathematical ideas in biology*, de J. Maynard Smith. Ele pergunta: “até qual altura um mamífero pode pular?” O leitor deve pular (perdão pelo trocadilho) para a seção 5.5 para ver a resposta. Uma dica: Galileu observou que a força limite (“mechanical strength”) que um membro pode exercer ou suportar é proporcional a área de sua seção transversal:  $F \propto L^2$ . Informações como esta são chamadas de “argumentos de escala”, e que fazem muitas vezes o pulo do gato (desculpem de novo).

## MOTIVAÇÃO PESSOAL

Eu havia me formado em Matemática no CES-JF em 2009 e estava tentando entrar para o mercado de trabalho no ano de 2012. Naquela época, eu participava de várias seleções para obter um cargo de professor de Matemática. Como as coisas estavam muito difíceis para mim em 2012, eu resolvi participar de um processo seletivo para ministrar aulas de física no colégio Tiradentes. Obtive o cargo para lecionar (física) para as quatro turmas do terceiro ano do Ensino Médio.

Naquele momento, me senti diante de um grande desafio que era ministrar aulas para uma turma de alunos muito aplicados que tinham como principal objetivo enfrentar concursos militares, o PISM e o ENEM. Os alunos queriam revisar todos os conteúdos de física, iniciando na mecânica de Newton e finalizando com uma introdução à física moderna, incluindo conceitos básicos da mecânica quântica e da relatividade restrita!

Eu sempre tive um grande interesse pela física desde a época do meu ensino médio, isso me levou a ser monitor nesta disciplina na graduação e a conseguir o CAT (autorização para lecionar em casos precários). Mas como os meus conhecimentos não estavam à altura de um professor graduado em física, resolvi recorrer à “rainha” de todas as Ciências: a Matemática. Ela me levou à descobrir a Análise Dimensional.

Naquela época foi meramente um recurso de apoio. Percebi agora, nos estudos para esta monografia, que a Análise Dimensional é uma “atitude de vida” de todos os cientistas envolvidos em experimentos. Bem utilizada, deixa de ser um mero recurso para lembrar fórmulas decoradas e depois esquecidas. Mostraremos que o aluno não precisa ser um “expert” para atacar problemas teóricos, ou entender (e participar) de experimentos. Mas deixemos esta discussão para as conclusões, onde faremos alguns comentários sobre os conselhos de Richard Feynman após suas visitas ao Brasil.

## ESTRUTURA DA MONOGRAFIA

Apresentamos aqui algumas aplicações da Análise Dimensional (de ora em diante abreviada frequentemente por AD) em temas variados. Tendo em vista a vastidão do assunto, esta monografia é apresentada, modestamente, como uma proposta para um Livro Aberto. O assunto pode ser abordado desde o Ensino Fundamental, em nível adequado de sofisticação para cada etapa. É especialmente importante para o Ensino Médio Técnico.

Desenvolvemos o trabalho fazendo discussões periódicas com o orientador, cada um no seu tempo disponível buscando exemplos e levantando literatura na web. Nos últimos capítulos colocamos referências em nível universitário e de pesquisa. O exemplo do rompimento de uma barragem foi uma demanda do orientado, chocados que todos estamos com a tragédia de Brumadinho em em 25 de janeiro de 2019.

Em resumo, nosso trabalho contém:

- (i) Uma demonstração do Teorema Pi de Vaschy-Buckingham ([3], 1892, [4], 1914) seguindo o texto de Bluman e Kumei [5], inspirada nas idéias da teoria dos Grupos de Transformações introduzida por Sophus Lie. Achamos desnecessário discutir o chamado Teorema de Bridgman [6], que simplesmente formaliza o fato intuitivo de que *grandezas físicas derivadas são sempre monômios nas grandezas fundamentais*.
- (ii) “Para saber mais” (no final de cada seção). São atividades, tarefas, exemplos e exercícios, e indicações de sítios da internet, que podem ser usadas como materiais de cabeceira para o professor<sup>2</sup>. Para estes desenvolvimentos, e como fontes para um futuro Livro Aberto, levantamos uma extensa (mas por certo ainda muito incompleta) bibliografia, com referências históricas, artigos científicos, e materiais didáticos.
- (iii) Um bom número de referências em metrologia, em particular sobre a recente reformulação do Sistema Internacional de Unidades (abreviado por SI), envolvendo além dos aspectos concretos as implicações filosóficas. O tema está muito atual<sup>3</sup>.
- (iv) Destacamos o legado do Prof. Fernando Lobo Carneiro para a Engenharia brasileira. Achamos muito importante que nossos estudantes saibam sobre a vida e obra deste importante cientista, que utilizava a Análise Dimensional como ferramenta diária em seus trabalhos.

Agradecemos aos examinadores por suas críticas e sugestões e à colega Leise Vieira pela ajuda nas várias versões em Latex.

<sup>2</sup> A seção 3.3 por exemplo advoga a “matemática de briga de rua”.

<sup>3</sup> <https://physicsworld.com/a/new-views-on-units/>. Antecipamos que são inúmeros os links aqui apresentados (e o leitor deve procurar muitos outros!). Durante a revisão final após a defesa da dissertação, repassamos todos eles, verificando que não estavam quebrados. A data de acesso pode ser tomada como 21/7/2019 (um domingo trabalhoso).

## 1.1 HISTÓRIA DA ANÁLISE DIMENSIONAL

Aé aparecer o artigo fundamental de Edgar Buckingham ([4], 1914), argumentos dimensionais para a modelagem de fenômenos físicos já eram de uso rotineiro, porém eram feitos de modo informal. Um exemplo típico é um trabalho de Einstein ([7], 1911) sobre três problemas de física do estado sólido. Este artigo foi revisitado em em 2000 pelo Prof. Fernando Lobo Carneiro [8] de quem falaremos muito na Seção 1.4.

Desde 1900 Rayleigh já vinha publicando vários trabalhos sobre fluidos, calor e eletromagnetismo envolvendo argumentos de escala<sup>4</sup>. Possivelmente ainda desconhecendo o artigo de Buckingham, Rayleigh publicou uma nota em Nature ([11] em 1915<sup>5</sup>. No mesmo ano D' Arcy Thompson [12] escreve uma outra nota, também na Nature, chamando a atenção para os argumentos de semelhança de Galileu nos *Discorsi* [13], que foram admiravelmente discutidos por Lobo Carneiro em 1965 ([14])<sup>6</sup>.

A rigor, deve-se creditar o nascimento da disciplina a Fourier ([15], 1822) e a Maxwell (*On dimensions*, 1877, p. 517-520 [16]), a quem se atribui a a notação [ ] para a dimensão de uma grandeza [17]. Martins [18] analisa alguns dos argumentos dimensionais usados no final do século 18<sup>7</sup>. Para uma apreciação desde a Antiguidade, ver Sterret ([19], 2009), em que revisita as idéias de similaridade dos modelos físicos, e em [20], [21] os desenvolvimentos e repercussões de Galileu até a atualidade.

A referência mais completa que encontramos sobre a história da AD é a tese de doutorado de Francisco Redondo ([22], 2000) na Universidad Politecnica de Madrid<sup>8</sup>. Ele toma como marco inicial para a AD, entendida como uma disciplina científica, a publicação em 1922 do tratado *Dimensional Analysis* de Percy W. Bridgman [23], exatamente cem anos depois de Fourier<sup>9</sup>. Já outro historiador também espanhol, Andrés Rivadulla, afirma que o livro *Unidades Físicas* de José Muñoz del Castillo, publicado em 1890 foi o primeiro livro de análise dimensional [25]. Talvez com certo exagero, Redondo afirma que a Análise Dimensional consolidou-se apenas com o tratado de Julio Palacios [26], publicado em 1956, e que revisa em [27], apontando as diferenças filosóficas com Bridgman.

*Analisis Dimensional* de Palacios é uma obra importante: é a primeira entrada bibliográfica do livro de Lobo Carneiro *Análise Dimensional e Teoria da Semelhança e dos Modelos Físicos* [28]. Lobo Carneiro diz em uma entrevista em 1991 que deve a Palacios a publicação em espanhol do seu estudo sobre Galileu.

<sup>4</sup> Para uma descrição dos estudos de Rayleigh sobre aeroacústica, ver [9] e [10].

<sup>5</sup> Entre 1915 e 1916 houve uma troca de correspondência entre Rayleigh e Buckingham.

<sup>6</sup> Disponível em [http://www.rac.es/ficheros/Revistas/REV\\_20100409\\_04368.pdf](http://www.rac.es/ficheros/Revistas/REV_20100409_04368.pdf)

<sup>7</sup> Ver também <http://www.ghc.usp.br/server/hf2.htm>.

<sup>8</sup> O orientador, Francisco González de Posada, conduziu durante vários anos um *Grupo de trabajo de Analisis Dimensional* na Universidade Politécnica de Madrid. É interessante observar que ao mesmo tempo, Lobo Carneiro estava fazendo o mesmo na COPPE/UFRJ.

<sup>9</sup> Nem todas as resenhas da época foram favoráveis ao livro de Bridgman [24].

Do sumário de [22], em tradução livre do Espanhol:

“... A análise dimensional, estritamente falando, é um método de análise dos fenómenos físicos ou problemas físicos, que se aplica ao estudo de equações gerais... As principais características desta tese são as seguintes: a) é concebida a partir da perspectiva oferecida pela Análise Dimensional, constituída como disciplina científica, cujo momento original é a publicação em 1922 de Análise Dimensional de Bridgman. b) Usa as seguintes categorias históricas: História, desde a gestação da disciplina (Teorema de Buckingham, 1914), o núcleo da análise dimensional, até cerca de 1970; Proto-história, desde a aplicação clara de considerações dimensionais em teorias físicas (Fourier 1822) até a aceitação e difusão pela comunidade científica do referida Teorema Pi; Pré-história, um período em que “dimensional” é usado exclusivamente em campos matemáticos: geometria, álgebra e mecânica matemática e que decorre desde as primeiras civilizações até Fourier; e atualidade, aproximadamente a partir de 1970. c) É organizada em três capítulos: I. História da disciplina científica Análise Dimensional; II. Protohistória e Pré-História da Análise Dimensional ; e III. A problemática atual da análise dimensional”.

Os apêndices A, B, C contém notas biográficas sobre os autores principais na Análise Dimensional: Buckingham, Bridgman e Palacios.

### Arquivos pessoais de Buckingham

<https://history.aip.org/ead/20090266.html>

Uma apreciação da carreira científica de Edgar Buckingham, com ênfase em sua contribuição para a ciência dos solos, veja-se [29] e [30]. A Fig. 3 foi extraída do seu artigo seminal [4].

### Arquivos pessoais de Bridgman

<https://hollisarchives.lib.harvard.edu/repositories/4/resources/3995>  
<http://waywiser.fas.harvard.edu/people/321/percy-williams-bridgman>

As Figs. 4, 5, 6, 7 foram extraídas das páginas iniciais do tratado fundamental *Dimensional Analysis* de Percy Bridgman [23], que pode ser baixado deste sítio <https://catalog.hathitrust.org/Record/004393935>

ou

<https://archive.org/details/dimensionalanaly00bridrich/page/n8>

Note-se o primeiro exemplo da Introdução.

### Arquivos pessoais de Julio Palacios Martinez

Na página web da cátedra Julio Palacios, do Consejo Superior de Investigaciones Científicas da Espanha (<https://jpalacios.iqfr.csic.es/es/>) são encontrados vários documentos fornecidos pela família (inclusive uma autobiografia manuscrita) e pelo Departamento de Química do CSIC.

Pode ser baixado o seu livro *De la Física a la Biología*, de 1947, que antevia a matematização das ciências da vida. Um excelente texto de divulgação para a época.

O livro *Análisis Dimensional* de Palacios pode ser baixado de

[https://kupdf.net/download/analisis-dimensional-julio-palacios\\_5965d2d2dc0d60e766a88e77\\_pdf](https://kupdf.net/download/analisis-dimensional-julio-palacios_5965d2d2dc0d60e766a88e77_pdf)

Para saber mais 1: Buckingham, Bridgman e Palacios

Figura 3 – Artigo fundamental de Buckingham, 1914

The foregoing theorem may, if we choose, be applied to an imaginary transformation of the whole physical universe, but in this grandiose general form it is of only metaphysical interest; for it is merely a statement about what would happen if we were to bring about certain changes which it is obviously quite beyond our powers to effect. Nevertheless in particular elementary instances the notion of physical similarity is useful and it is convenient to have the conditions of physical similarity formulated in a general way. One of these is always that of similarity with respect to each separate kind of quantity, such as length, speed, density, etc., which may enter into the physical phenomenon with which we happen to be concerned.

376

E. BUCKINGHAM.

[SECOND  
SERIES.]

*Conclusion.*—A convenient summary of the general consequences of the principle of dimensional homogeneity consists in the statement that any equation which describes completely a relation subsisting among a number of physical quantities of an equal or smaller number of different kinds, is reducible to the form

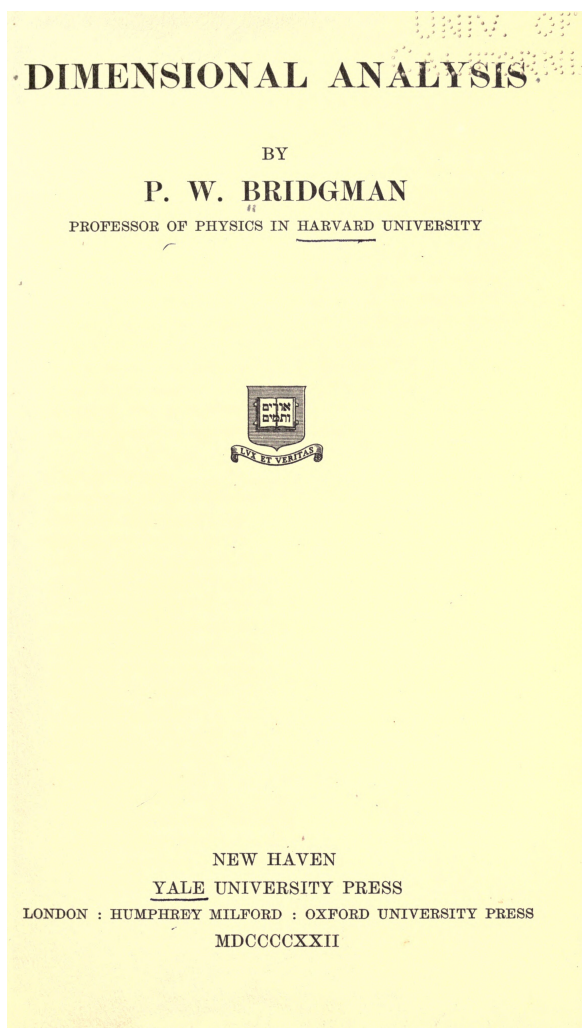
$$\psi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \text{etc.}) = 0,$$

in which the  $\Pi$ 's are all the independent dimensionless products of the form  $Q_1^x, Q_2^y, \dots$ , etc. that can be made by using the symbols of all the quantities  $Q$ .

While this theorem appears rather noncommittal, it is in fact a powerful tool and comparable, in this regard, to the methods of thermodynamics or Lagrange's method of generalized coordinates. It is hoped that the few sample illustrations of its use which have been given will prove interesting to physicists who have not been in the habit of making much use of dimensional reasoning; but if this paper merely helps a little toward dispelling the metaphysical fog that seems to be engulfing us, it will have attained its object.

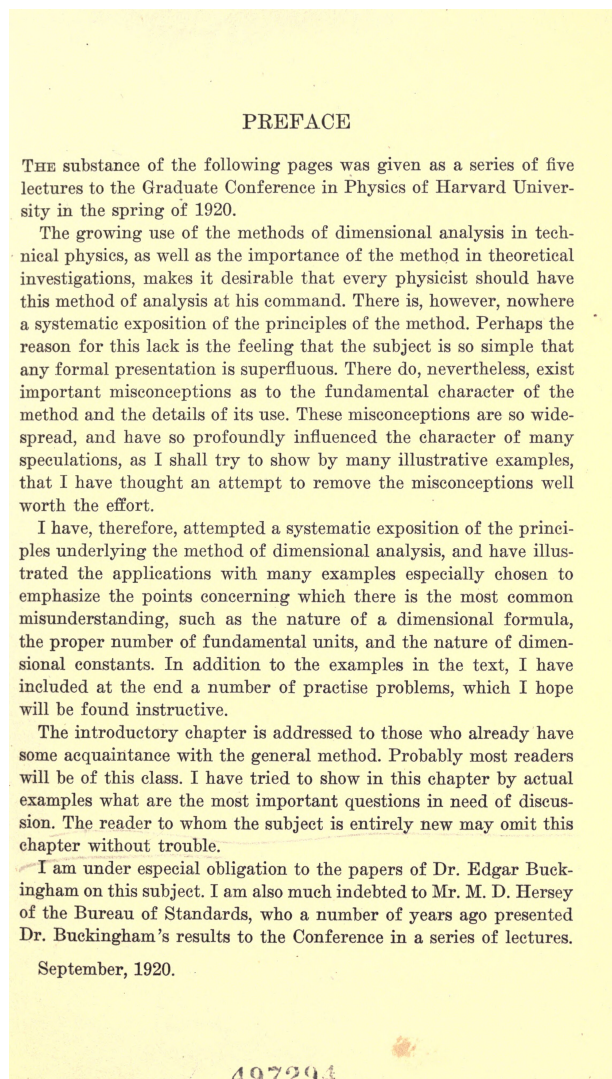
BUREAU OF STANDARDS.  
June 18, 1914.

Figura 4 – Bridgman, 1922



Fonte: <https://archive.org/details/dimensionalanaly00bridrich>

Figura 5 – Prefácio



Fonte: A mesma

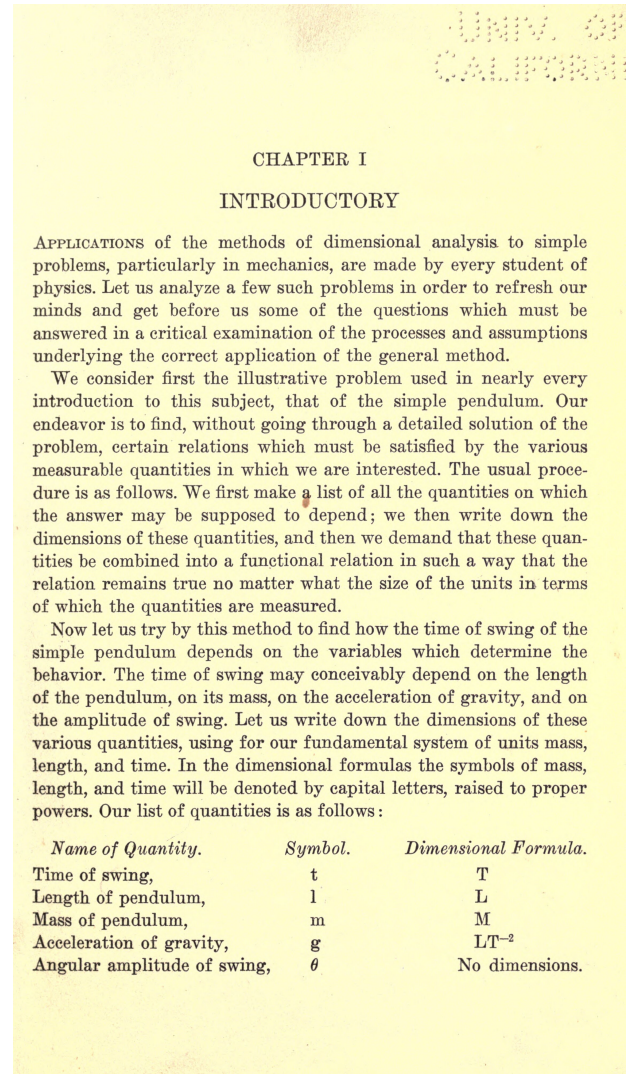


Figura 6 – Índice do livro de Bridgman

CONTENTS		PAGE
Chapter	I. Introductory . . . . .	1
Chapter	II. Dimensional Formulas . . . . .	17
Chapter	III. On the Use of Dimensional Formulas in Changing Units . . . . .	28
Chapter	IV. The $\Pi$ Theorem . . . . .	36
Chapter	V. Dimensional Constants and the Number of Fundamental Units . . . . .	48
Chapter	VI. Examples Illustrative of Dimensional Analy- sis . . . . .	56
Chapter	VII. Applications of Dimensional Analysis to Model Experiments. Other Engineering Applications . . . . .	81
Chapter	VIII. Applications to Theoretical Physics . . . . .	88
Problems	. . . . .	107
Index	. . . . .	111

Fonte: A mesma

Figura 7 – Bridgman: Introdução



Fonte: A mesma

## 1.2 AS SETE GRANDEZAS FUNDAMENTAIS

São estas as grandezas fundamentais do Sistema Internacional de Unidades:

- (i) comprimento [L] ;
- (ii) massa [M] (unidade quilograma kg);
- (iii) tempo [T] (unidade segundo s);
- (iv) corrente elétrica [I]; (unidade ampere A)
- (v) temperatura termodinâmica [ $\Theta$ ] (unidade kelvin K);
- (vi) quantidade de matéria N (unidade mole, mol);
- (vii) intensidade luminosa (unidade candela cd)

Uma revisão importante do SI foi realizada em 2018, e implementada em maio de 2019 [1]. Uma das importantes características foi a de evitar a “circularidade” que havia no sistema metrológico (fato curioso para os matemáticos).

Como noticiou o NIST (National Institute of Standards and Technology dos EUA), o órgão metrológico central dos Estados Unidos:

“Em 16 de novembro de 2018, em Versalhes, na França, um grupo de 60 países fez história [adicionamos: o Brasil participou]. Com uma votação unânime, eles transformaram dramaticamente o sistema internacional que sustenta a ciência e o comércio global. Esta ação finalmente realizou sonho de 150 anos dos cientistas para um sistema de medição baseado inteiramente em imutáveis propriedades fundamentais da natureza.”

(<https://www.nist.gov/si-redefinition>)

Unidades básicas, como o metro e o quilograma, tinham sido padronizadas no século 19 de uma forma que hoje em dia não faria mais sentido. O protótipo para o quilograma era uma peça de platínio e irídio depositada num pavilhão do BIPM em Saint-Cloud, perto de Paris. O metro era a distância entre duas marcas em uma barra de metal depositada em Sèvres, um outro suburbio de Paris.

Sobre a revisão do SI, como ponto de partida, recomendamos ler, em primeiro lugar, a pequena cartilha [31] produzida por Rodrigo Costa Felix e Alexandre Mendes<sup>10</sup> da qual reproduzimos as figuras 8 e 10, e uma matéria divulgatória na revista Piauí<sup>11</sup>.

Muito mais informações no “Para saber mais” desta seção.

<sup>10</sup> Uma parceria da Sociedade Brasileira de Metrologia ([www.metrologia.org.br](http://www.metrologia.org.br)) e Sociedade Brasileira de Física ([www.sbfisica.org.br](http://www.sbfisica.org.br)). Pode ser baixada do site da primeira.

<sup>11</sup> <https://piaui.folha.uol.com.br/materia/o-quilo-nao-e-mais-aquele/>



As Tabelas 1 e 2 foram obtidas dos documentos sobre a revisão do SI recentemente colocados online<sup>12</sup> na página web do BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), entidade que representa a comunidade metrológica mundial desde a convenção de Paris em 1875. Elas contém de forma concisa as redefinições das sete grandezas fundamentais, em termos de constantes físicas, e uma lista com algumas grandezas delas derivadas.

A Fig.9, da qual traduzimos a citação acima da página do NIST, ilustra a enorme empolgação da comunidade metrológica com a mudança realizada. Mas será esta a revisão final? Acreditamos que não. A metrologia evoluiu!

É provável, se não uma certeza, de que a comunidade metrológica virá anunciar no futuro novas redefinições, em decorrência de novas teorias que expliquem questões ainda abertas na física - falamos aqui da “grande unificação” ou de uma “teoria para tudo”<sup>13</sup>.

*O que é uma grandeza física?*

Nas várias respostas a esta pergunta crucial, concepções filosóficas aparecerão, explícita ou implicitamente. Aqui apenas podemos apontar para este tema fascinante, também com várias sugestões de leitura no final da seção: os cientistas mais criativos nunca desdenharam conversar com filósofos (sabiam escolher bem quais).

*As Ciências Exatas e as Humanas se beneficiam mutuamente*

Tomamos a liberdade de chamar a atenção para a importância das disciplinas de humanidades e artes para os alunos de Ciências Exatas e das Engenharias. Veja-se o artigo “Learning to be Astonished” [32], por Lincoln Carr, professor da escola de Minas na Universidade do Colorado<sup>14</sup> em que defende adicionar Arte e Filosofia nos programas STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) nos EUA.

Ainda esta direção, conselho dado por um importante artista plástico brasileiro, Abraham Palatnik, engenheiro mecânico de formação, um dos pioneiros da arte cinética:

“Para inventar alguma coisa é preciso possuir um comportamento anticonvencional. Eu acho que as indústrias deveriam convocar artistas plásticos porque eles possuem um potencial perceptivo que pode resolver muitos problemas’ (···) “Continuo apostando na intuição, embora meu trabalho sempre exija cálculos matemáticos” (···) (Era esta a proposta dos fundadores da Bauhaus (1919/1933) ao basearem sua didática no estabelecimento de um circuito arte-indústria, no qual a arte serviria para conter os excessos pragmáticos da indústria) [33].

<sup>12</sup> Ver <https://www.bipm.org/en/measurement-units/>

<sup>13</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Grand\\_Unified\\_Theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Grand_Unified_Theory).

<sup>14</sup> <https://people.mines.edu/lcarr/>

Figura 8 – Constantes universais no SI [1]

Table 1 *The seven base units of the SI*

Quantity	SI unit
<b>time</b>	The <b>second</b> , symbol s, is the SI unit of time. It is defined by taking the fixed numerical value of the caesium frequency $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ , the unperturbed ground-state hyperfine transition frequency of the caesium 133 atom, to be 9 192 631 770 when expressed in the unit Hz, which is equal to $\text{s}^{-1}$ .
<b>length</b>	The <b>metre</b> , symbol m, is the SI unit of length. It is defined by taking the fixed numerical value of the speed of light in vacuum $c$ to be 299 792 458 when expressed in the unit $\text{m s}^{-1}$ , where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .
<b>mass</b>	The <b>kilogram</b> , symbol kg, is the SI unit of mass. It is defined by taking the fixed numerical value of the Planck constant $h$ to be $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ when expressed in the unit J s, which is equal to $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ , where the metre and the second are defined in terms of $c$ and $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .
<b>electric current</b>	The <b>ampere</b> , symbol A, is the SI unit of electric current. It is defined by taking the fixed numerical value of the elementary charge $e$ to be $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ when expressed in the unit C, which is equal to A s, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .
<b>thermodynamic temperature</b>	The <b>kelvin</b> , symbol K, is the SI unit of thermodynamic temperature. It is defined by taking the fixed numerical value of the Boltzmann constant $k$ to be $1.380\,649 \times 10^{-23}$ when expressed in the unit $\text{J K}^{-1}$ , which is equal to $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$ , where the kilogram, metre and second are defined in terms of $h$ , $c$ and $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .
<b>amount of substance</b>	The <b>mole</b> , symbol mol, is the SI unit of amount of substance. One mole contains exactly $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ elementary entities. This number is the fixed numerical value of the Avogadro constant, $N_{\text{A}}$ , when expressed in the unit $\text{mol}^{-1}$ and is called the Avogadro number. The amount of substance, symbol $n$ , of a system is a measure of the number of specified elementary entities. An elementary entity may be an atom, a molecule, an ion, an electron, any other particle or specified group of particles.
<b>luminous intensity</b>	The <b>candela</b> , symbol cd, is the SI unit of luminous intensity in a given direction. It is defined by taking the fixed numerical value of the luminous efficacy of monochromatic radiation of frequency $540 \times 10^{12}$ Hz, $K_{\text{cd}}$ , to be 683 when expressed in the unit $\text{lm W}^{-1}$ , which is equal to $\text{cd sr W}^{-1}$ , or $\text{cd sr kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^3$ , where the kilogram, metre and second are defined in terms of $h$ , $c$ and $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .



Fonte: Sociedade Brasileira de Metrologia [www.metrologia.com.br](http://www.metrologia.com.br)

**Table 2** *Derived units with special names in the SI*

Derived quantity	Name of derived unit	Symbol for unit	Expression in terms of other units
plane angle	radian	rad	m/m
solid angle	steradian	sr	m <sup>2</sup> /m <sup>2</sup>
frequency	hertz	Hz	s <sup>-1</sup>
force	newton	N	kg m s <sup>-2</sup>
pressure, stress	pascal	Pa	N/m <sup>2</sup> = kg m <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>
energy, work, amount of heat	joule	J	N m = kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>
power, radiant flux	watt	W	J/s = kg m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup>
electric charge	coulomb	C	A s
electric potential difference	volt	V	W/A = kg m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> A <sup>-1</sup>
capacitance	farad	F	C/V = kg <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> s <sup>4</sup> A <sup>2</sup>
electric resistance	ohm	Ω	V/A = kg m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> A <sup>-2</sup>
electric conductance	siemens	S	A/V = kg <sup>-1</sup> m <sup>-2</sup> s <sup>3</sup> A <sup>2</sup>
magnetic flux	weber	Wb	V s = kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> A <sup>-1</sup>
magnetic flux density	tesla	T	Wb/m <sup>2</sup> = kg s <sup>-2</sup> A <sup>-1</sup>
inductance	henry	H	Wb/A = kg m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> A <sup>-2</sup>
Celsius temperature	degree Celsius	°C	K
luminous flux	lumen	lm = cd sr	cd sr
illuminance	lux	lx = cd sr m <sup>-2</sup>	lm/m <sup>2</sup>
activity referred to a radionuclide	becquerel	Bq	s <sup>-1</sup>
absorbed dose, kerma	gray	Gy	J/kg = m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>
dose equivalent	sievert	Sv	J/kg = m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>
catalytic activity	katal	kat	mol s <sup>-1</sup>

Uma palestra (em inglês) sobre o novo SI, pelos professores Vanderlei Bagnato, da USP de São Carlos, e William D. Phillips, do NIST

<https://www.youtube.com/watch?v=JsAPW27CeVY&feature=youtu.be>

(sessão pública na Conferência Internacional de Física Atômica de 2018, ICAP, <https://icap2018.eu>). Outros materiais:

<https://www.bipm.org/en/measurement-units/rev-si/faqs.html>

<https://www.nist.gov/si-redefinition>

<https://www.nist.gov/si-redefinition/turning-point-humanity-redefining-worlds-measurement-system>

<https://physics.nist.gov/cuu/Units/units.html>

<https://www.nist.gov/pml/productsservices/general-interest>

Para saber mais 2: Redefinição do SI

“New Measurement Will Help Redefine International Unit of Mass Ahead of July 1 deadline, NIST team makes its most precise measurement yet of Planck’s constant.” June 30, 2017

<https://www.nist.gov/news-events/news/2017/06/new-measurement-will-help-redefine-international-unit-mass>

Ver o vídeo neste link.

Como vimos, os protocolos de medição mudam com os avanços científicos. Assim, a partir de 20 de maio de 2019, o CIPM ( International Committee for Weights and Measures) determinou que o quilograma passa a ser definido em termos do espaço e do tempo: usando uma medição da constante de Planck<sup>a</sup>.

$$\hbar = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Para saber mais 3: Quilograma e a constante de Planck

<sup>a</sup> <https://en.wikipedia.org/wiki/Kilogram>

Em torno da filosofia da Física, mencionamos o livro recente de Robert Crease [34] (disponível online). Em sua coluna em *Physics World*, publicou um pequeno e interessante texto

*Why philosophers are fascinated by the redefinition of SI units*

<https://physicsworld.com/a/new-views-on-units/>.

Encontramos também discussões sobre estas questões filosóficas na página web de Nadine de Courtenay

<http://univ-paris-diderot.academia.edu/NADINEDECOURTENAY>.

Em 2018 o SI foi revisado: as constantes físicas universais são usadas para definir toda as grandezas fundamentais. As implicações filosóficas desta autêntica “revolução metrológica” são discutidas na coletânea [35], referente à conferência

*The making of measurement*, Cambridge, 2015,

da qual referenciamos alguns artigos [36] (sobre o novo SI, 2018), [37], [38] (sobre Maxwell), [39], [40], [41], [42], [43]. A terceira conferencia científica desta série,

<https://measurement2018.sciencesconf.org>

deve ter seus *proceedings* publicados em breve. O Apêndice E reproduz o anúncio da conferência.

Para saber mais 4: Física e Filosofia

Figura 9 – Redefinição do Sistema SI



On November 16, 2018, in Versailles, France, a group of 60 countries made history. With a unanimous vote, they dramatically transformed the international system that underpins global science and trade. This single action finally realized scientists' 150-year dream of a measurement system based entirely on unchanging fundamental properties of nature.

On that day, the International System of Units, informally known as the metric system — the way in which the world measures everything from coffee to the cosmos — changed in a way that is more profound than anything since its establishment following the French Revolution.

It was a turning point for humanity.

Fonte: <https://www.nist.gov/si-redefinition>

[https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM\\_200\\_2012.pdf](https://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_200_2012.pdf)  
Pode-se encontrar a tradução da brochura do BIPM e do vocabulário metrológico em português (VIM) em:

[http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si\\_versao\\_final.pdf](http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si_versao_final.pdf)  
(oitava edição)

[http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/vim\\_2012.pdf](http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/vim_2012.pdf)  
(vocabulário internacional da metrologia)

Para saber mais 5: Vocabulário internacional da metrologia

A metrologia pode ser entendida como a “física junto com a diplomacia”.

Os Institutos de metrologia no mundo estão listados em

<https://www.nist.gov/iaao/national-metrology-laboratories>.

sendo talvez os principais: NIST (EUA), NPL (UK), PTB (Alemanha).

Na ex-URSS, especialmente Rússia, os Institutos são descentralizados.

Na União Européia há uma rede de instituições metrológicas, a EURAMET

<https://www.euramet.org>.

Para saber mais 6: Metrologia

Vale a pena ver em sala

[http://en.wikipedia.org/wiki/Powers\\_of\\_Ten](http://en.wikipedia.org/wiki/Powers_of_Ten)

<https://www.eamesoffice.com/the-work/powers-of-ten/>

<https://www.youtube.com/watch?v=OfKBhvDjuy0>

[http://en.wikipedia.org/wiki/Charles\\_and\\_Ray\\_Eames](http://en.wikipedia.org/wiki/Charles_and_Ray_Eames)

Este video também é interessante e é mais recente:

<http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/sense-of-scale-string-theory.html>

Para saber mais 7: “Powers of Ten” (um filme premiado)

Abreviaturas adotadas pelo BIPM [1] para as potências de 10:

**Table 3** *The SI prefixes*

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
$10^1$	deca	da	$10^{-1}$	deci	d
$10^2$	hecto	h	$10^{-2}$	centi	c
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	mega	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	tera	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^{15}$	peta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	exa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y

Figura 10 – O novo SI e o ensino de Ciências

Do ponto de vista prático, as mudanças terão impacto somente nos Institutos Nacionais de Metrologia e em todas as atividades que requerem incertezas e exatidão da mesma ordem das que afetarão as unidades. No entanto, para o público em geral as mudanças serão imperceptíveis. Há, porém, uma importante diferença conceitual nas novas definições de unidades, pois todo equipamento, aparato ou método capaz de medir uma das constantes do SI será também capaz de realizar a unidade a ela associada. Deste modo, o detentor do equipamento possui o padrão da medida associada a esta unidade.

O novo SI irá permitir novas descobertas? A adição de mais casas decimais no valor final das medições faz muita diferença?

É difícil saber, mas a história mostra que toda vez que a humanidade aumentou a exatidão e a precisão das medições surgiram novas e melhores tecnologias.



Até recentemente, a pergunta "O que é um quilograma?" seria facilmente respondida pelos alunos que tivessem dado uma lida em textos básicos de ciências. Termos como "protótipo do quilograma", "muito velho" e "Paris" diziam tudo. De acordo com a nova definição, a mesma pergunta não seria facilmente respondida. Do ponto de vista da maioria das crianças em idade escolar, isso é um problema: o novo SI é consideravelmente mais abstrato e exigente intelectualmente do que o sistema atual. Para a melhor compreensão das definições do novo SI, todo aluno deve entender o significado geral das constantes fundamentais e questionar essa mesma noção. Quais são as constantes fundamentais? De onde elas surgiram pela primeira vez? Por que elas são do jeito que são?

Uma constante fundamental deve ser entendida mais profundamente. Isso provavelmente ainda funciona com a velocidade da luz, mas que tal uma constante com a dimensão joule vezes segundo, como a constante de Planck  $h$ ? O problema real com a compreensão do novo sistema é que as constantes fundamentais não são uma realização literal das unidades de base. Se este fosse o caso, a cada unidade seria atribuída "a sua própria constante". Isso, no entanto, pressupõe que essa constante tenha exatamente a mesma dimensão da unidade em questão. A definição anterior do metro, por exemplo, baseada no comprimento de onda de uma específica radiação eletromagnética era um exemplo dessa "atribuição simples".

Em contraste, o novo SI requer maior capacidade de abstração. Quase todas as grandezas usadas na mecânica (que são formadas com base nas unidades de tempo, comprimento e massa) são realizadas por meio das três constantes: a frequência de transição entre níveis atômicos no átomo de césio  $\Delta\nu$  (expressa em  $1/s$ ) a velocidade da luz no vácuo  $c$  (expressa em  $m/s$ ) e a constante de Planck  $h$  (expressa em  $J\cdot s$ ). O que é essencialmente feito aqui é uma representação do mundo por meio de um novo sistema de coordenadas. O desafio consiste em encontrar uma orientação nesse novo sistema - um desafio não apenas para cada aluno da escola, mas também para as abordagens de ensino de cada professor.



Fonte: Sociedade Brasileira de Metrologia [www.metrologia.com.br](http://www.metrologia.com.br)

### 1.3 METROLOGIA E O ENSINO TÉCNICO

O INMETRO ( Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia) recebe em seus laboratórios alunos da CECO, a Escola Técnica Colégio Estadual Círculo Operário, localizada ao seu lado. Além disso, produz um bom número de textos sobre metrologia. Levando em conta que o Ensino Técnico tem sido e será cada vez mais prioritário - como política de Estado em nosso país - estes materiais são extremamente úteis ao professorado.

Ementa do curso de Mestrado Acadêmico em Metrologia do INMETRO:  
[http://www.inmetro.gov.br/metcientifica/curso\\_metrologia/index.asp](http://www.inmetro.gov.br/metcientifica/curso_metrologia/index.asp)

Tarefa: levantar os currículos de algumas Escolas Técnicas modelo; uma disciplina de Análise Dimensional poderia ser oferecida?

Referência útil: livro recente sobre Metrologia, editado por Rodrigo Costa Félix e Américo Bernardes [44]. O vol.1 já é disponível eletronicamente .

Caso surjam oportunidades, submeter propostas a editais como este de 2014:

*Programa Apoio à melhoria do ensino em escolas  
da rede pública do Estado do Rio de Janeiro*

[http://www.faperj.br/downloads/livros/ME\\_web.pdf](http://www.faperj.br/downloads/livros/ME_web.pdf)

Para saber mais 8: Ensino Técnico

<https://www.nist.gov/pml/weights-and-measures/education-resources-metric-system-si>

<https://physics.nist.gov/cuu/Units/>

<https://www.tes.com/teaching-resource/use-of-si-units-and-their-prefixes-11438101>

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/units.html>

<https://www.physicsclassroom.com/class/energy/Lesson-1/Definition-and-Mathematics-of-Work>

Para saber mais 9: Alguns recursos Educacionais



## 1.4 FERNANDO LOBO CARNEIRO

O Prof. Fernando Lobo Carneiro (1913-2001), um dos fundadores da COPPE, ministrou por duas décadas no Programa de Engenharia Civil, a disciplina em nível de doutorado com o nome “Análise Dimensional e Teoria da Semelhança”<sup>15</sup>.

No final dos cursos, cada aluno apresentava uma aplicação a um problema de sua pesquisa de tese. Estas apresentações formam uma preciosa coleção, que pode ser consultada com a ajuda do Programa de Comutação Bibliográfica (COMUT) do IBICT.

O legado de Lobo Carneiro como professor e cidadão merece ser destacado:

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Fernando\\_Lobo\\_Carneiro](https://pt.wikipedia.org/wiki/Fernando_Lobo_Carneiro)  
<http://www.coppe.ufrj.br/pt-br/planeta-coppe-noticias/perfil/lobo-carneiro-um-brasileiro>  
<http://www.fgv.br/cpdoc/acervo/dicionarios/verbete-biografico/fernando-luis-lobo-barbosa-carneiro>

Um vídeo produzido pelo Globo Ciência de 25 min pode ser mostrado e discutido em sala de aula com alunos do Ensino Médio:

<http://redeglobo.globo.com/globocidadania/videos/v/grandes-cientistas-brasileiros-fernando-lobo-carneiro/1498751/>

Outro video, adequado ao público infantil, foi produzido pelo SESI:

<https://noticias.portaldaindustria.com.br/noticias/educacao/video-fernando-lobo-carneiro-criou-metodo-para-calcular-com-precisao-resistencia-do-concreto/>

Na página web do Prof. Eduardo C. S. Thomaz, do IME, podem ser encontrados vários trabalhos de Lobo Carneiro<sup>16</sup>. Em particular o artigo [8] que trata do uso que Einstein fez da AD para obter a frequência característica e a condutividade térmica de materiais cristalinos, antecipando em três anos o Teorema Pi. Lobo Carneiro revisita o problema usando as unidades SI (ainda não adotadas na época de Einstein).

No Apêndice D reproduzimos alguns trechos da entrevista que Lobo Carneiro concedeu em 1991 a Luiz Bevilacqua, Ildeu Moreira com a participação da jornalista científica Alicia Ivanissevich especialmente aqueles relacionados com Análise Dimensional<sup>17</sup>.

<sup>15</sup> As notas de aula converteram-se no livro [28]. As duas edições estão esgotadas. Urge republicá-lo e torná-lo disponível eletronicamente.

<sup>16</sup> <http://aquarius.ime.eb.br/~webde2/prof/ethomaz/>

<sup>17</sup> [http://www.canalciencia.ibict.br/notaveis/livros/fernando\\_lobo\\_carneiro\\_48.html](http://www.canalciencia.ibict.br/notaveis/livros/fernando_lobo_carneiro_48.html)

Resenhar *Análise Dimensional e Teoria da Semelhança e dos Modelo Físicos* [28]. Os quatro capítulos iniciais vão dos fundamentos até o teorema Pi, para o qual Lobo Carneiro sugere incluir o nome de Vaschy junto com Buckingham.

Os capítulos 5 a 8, fornecem exemplos em mecânica de sólidos e fluidos. O capítulo 10 foca em estruturas offshore (plataformas) e o capítulo 11 o eletromagnetismo.

Os capítulos 9 e 12 tratam da semelhança física e aplicações à biologia, reportando historicamente ao livro de Galileu (*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*, 1638, [13]).

Examinar os temas dos seminários dos alunos dos cursos dados entre 1981 a 2001, compilados em [45], [46], [47], [48], [49].

Para saber mais 10: *Análise Dimensional* de Fernando Lobo Carneiro

Leitura do livro da jornalista Teresinha Costa [50] sobre a vida e obra de Fernando Luiz Lobo Barboza Carneiro, incluindo sua atuação na campanha para a Lei do Petróleo no governo Vargas.

O livro está disponível em

[http://www.coppe.ufrj.br/sites/default/files/obra\\_lobo\\_carneiro.pdf](http://www.coppe.ufrj.br/sites/default/files/obra_lobo_carneiro.pdf).

Para saber mais 11: Biografia Fernando Lobo Carneiro

## 2 HOMOGENEIDADE DIMENSIONAL E O TEOREMA PI

Para um matemático puro ou mesmo aplicado, as explicações para o Teorema Pi (ou  $\Pi$ ) que se encontram em artigos ou notas de aula na Engenharia, Física ou Química em geral não parecem inteiramente satisfatórias. Valerá a pena um pouco de sofisticação.

Apresentamos neste capítulo a prova do Teorema Pi de Vaschy-Buckingham que encontramos no livro de Bluman e Kumei [5]. A demonstração utiliza idéias da chamada “Teoria de Lie”. Sophus Lie (1842-1899) foi o iniciador dos estudos sobre as simetrias contínuas e seus invariantes sob um grupo de transformações.

Veremos que os “grupos  $\Pi$ ” são os invariantes básicos de qualquer modelo físico, representando a essência da Análise Dimensional. Neste caso, o grupo das transformações de Lie são as mudanças de escala nas unidades físicas. Tentamos formalizar isto nas duas premissas que enunciaremos a seguir.

**Premissa 1.** *Para que um modelo ou lei da física seja válido, sua formulação não pode depender da escolha do sistema de unidades para as grandezas fundamentais.*

**Premissa 2.** *Grande parte dos fenômenos da Natureza podem ser estudados em várias escalas com a mesma modelagem matemática, pelas suas similaridades, geométricas, cinemáticas ou dinâmicas.*

Estas noções já eram reconhecidas e exploradas por Aristóteles, na Antiguidade, e por Galileu na Renascença. Somos capazes de escrever uma equação usando quaisquer unidades que desejarmos para as grandezas de base, e portanto para as grandezas derivadas. Por exemplo, em nanotecnologia a unidade de força mais adequada é o piconewton. Em astronomia é mais conveniente medir a distância em anos-luz. O que Vaschy e Buckingham mostraram é que, na direção oposta, qualquer lei física pode ser reescrita sob *uma forma totalmente adimensional*. Nesta formulação são reconhecidas as *similaridades* (ou *semelhanças*, se assim quisermos falar) do fenômeno em estudo.

Na engenharia é comum diferenciar as similaridades geométricas, cinemáticas (para as velocidades) ou dinâmicas (para as forças), relacionando o protótipo a ser construído com o modelo em escala<sup>1</sup>. Esta premissa é explorada rotineiramente no *design* de carros de corrida e asas de avião, em modelos de barragens, de redes de distribuição de energia, etc. O número de Reynolds que aparece na adimensionalização da equação de Navier-Stokes varia de  $10^{10}$  (nos aviões) a  $10^{-6}$  no movimento de microorganismos.

<sup>1</sup> [http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/aerothermal\\_dvd\\_only/aero/fprops/dimension/](http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/aerothermal_dvd_only/aero/fprops/dimension/)  
[http://w.astro.berkeley.edu/~eliot/Astro202/dimensional\\_PhysicsToday.pdf](http://w.astro.berkeley.edu/~eliot/Astro202/dimensional_PhysicsToday.pdf)  
[https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-25-advanced-fluid-mechanics-fall-2013/dimensional-analysis/MIT2\\_25F13\\_Similarity.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-25-advanced-fluid-mechanics-fall-2013/dimensional-analysis/MIT2_25F13_Similarity.pdf)

## 2.1 GRANDEZAS FUNDAMENTAIS E DERIVADAS

As grandezas físicas se dividem em fundamentais e derivadas. As grandezas fundamentais, ou de base, não são definidas em termos de outras. Em um determinado problema seu número deve ser o mínimo possível para a descrição do fenômeno.

A divisão entre fundamentais e derivadas é um tanto arbitrária. Por exemplo, na segunda lei de Newton, estão envolvidas as quatro grandezas força, espaço, tempo e massa; são suficientes três para que a quarta fique definida em função das outras. Assim, na mecânica, as grandezas fundamentais são normalmente tomadas como o espaço (L), o tempo (T) e a massa (M).

Cada grandeza física derivada pode ser obtida a partir de grandezas fundamentais, mas como denotamos isso? Uma notação adotada desde Maxwell para as grandezas de base envolvidas numa grandeza física X é [X]. Definimos a unidade dimensional de um número k puro (adimensional) como sendo  $[k] = 1$ . Por abuso de notação, nem sempre usaremos os colchetes, quando o contexto estiver claro.

Alguns exemplos bem conhecidos.

Para a *velocidade*  $v$ , escrevemos

$$[v] = L \cdot T^{-1}.$$

A *força* que atua sobre uma partícula de massa  $m$  é dada por  $\vec{f} = m\vec{a}$ , então

$$[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}, [a] = L \cdot T^{-2}.$$

O *momento linear*  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ , então

$$[p] = M \cdot L \cdot T^{-1}.$$

O *trabalho* realizado por uma força  $\vec{f}$  sobre uma partícula de massa  $m$  que se deslocou de  $\vec{d}$ , é dado por  $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ , então

$$[W] = (M \cdot L \cdot T^{-2}) \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}.$$

Há uma imensidão de grandezas derivadas das 7 unidades SI. A tarefa é olhar as páginas:

[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_physical\\_quantities](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_physical_quantities)

[https://en.wikipedia.org/wiki/SI\\_derived\\_unit](https://en.wikipedia.org/wiki/SI_derived_unit)

<https://www.technologyuk.net/physics/measurement-and-units/physical-quantities-and-si-units.shtml>

Para saber mais 12: Grandezas derivadas

## 2.2 HOMOGENEIDADE DIMENSIONAL E O TEOREMA DE BRIDGMAN

Um princípio básico na Análise Dimensional é o da *homogeneidade dimensional*, introduzido por Fourier [15]. Corresponde à noção intuitiva: quantidades dimensionalmente diferentes não podem ser adicionadas ou igualadas, assim, *se tivermos uma equação física que consiste em uma soma algébrica de diversos termos, a dimensão de qualquer das grandezas fundamentais em um dos termos deve ser a mesma que em qualquer um dos outros*. Por exemplo, no movimento retilíneo e uniformemente acelerado

$$s = s_o + v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

Dimensionalmente, esta equação pode ser expressa como

$$L = L + \frac{L}{T}T + \frac{L}{T^2}T^2.$$

Ou seja: uma equação física só pode ser verdadeira se ambos os lados da equação tiverem exatamente a mesma unidade dimensional e só podemos fazer operações de soma e de diferença de grandezas, quando todas elas possuírem as mesmas unidades dimensionais.

No caso da multiplicação a unidade dimensional do resultado é o produto das unidades dimensionais dos fatores, de mesmo modo na divisão de duas grandezas físicas, a unidade dimensional do resultado é a divisão das unidades dimensionais das grandezas anteriores, portanto, ao multiplicar ou dividir grandezas, fazemos isso com seus valores e com suas unidades. Esta prática é intuitiva e não acreditamos ser necessário formalizá-la. Apenas como reforço ou por crédito histórico é mais uma vez mencionado o nome de Percy Bridgman (que tem contribuições muito mais relevantes):

**Teorema.** *Todas as grandezas físicas derivadas são produtos de potências das grandezas fundamentais (ou se quisermos assim chamar, grandezas de base) do sistema de unidades sendo utilizado<sup>2</sup>.*

Lobo Carneiro também faz uma oportuna discussão sobre este Teorema em seu livro. Acreditamos que Bridgman merece ser lembrado por contribuições mais relevantes. Afinal, ganhou o prêmio Nobel por seus trabalhos na física de altas pressões. Para biografias, comentários sobre seus trabalhos científicos e outros escritos não científicos, [51], [52], [53], [54], [55], [56].

O Teorema de Bridgman nos leva ao “método dos expoentes desconhecidos”, exercícios elementares para um aluno do Ensino Médio. Pode ser até usada para relembrar uma fórmula. Vamos ilustrar com um exemplo clássico, o primeiro que aparece na introdução do livro de Bridgman (Fig. 7).

<sup>2</sup> Um matemático puro possivelmente iria preferir colocar o princípio da homogeneidade dimensional de Fourier e este assim chamado “Teorema’ de Bridgman como axiomas. Caso o leitor tenha interesse, pode consultar a referência [6] sobre o Teorema de Bridgman.

### Período $\tau$ de oscilação de um pêndulo simples

Um corpo de massa  $m$ , presa por um fio de comprimento  $l$ , em um ambiente de gravidade dada por  $g$ . Desprezamos a dissipação causada pela resistência do ar e atrito no pivot. É possível determinar o formato da relação matemática entre essas grandezas, dependendo do ângulo máximo  $\theta_o$  do pêndulo com a vertical?

Antecipando a formalização do Teorema de Buckingham, é razoável imaginar que a relação entre essas grandezas deve ser da forma  $\tau = \kappa(\theta_o) \cdot m^a \cdot l^b \cdot g^c$  onde  $k$  é uma constante numérica e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são expoentes desconhecidos das grandezas, respectivamente. Do princípio da homogeneidade temos que os dois lados da equação têm a mesma unidade dimensional:  $[\tau] = [k] \cdot [m]^a \cdot [l]^b \cdot [g]^c$  A próxima etapa é determinar a unidade dimensional de cada uma das grandezas envolvidas no problema:  $[k] = 1$ ,  $[\tau] = T$ ,  $[m] = M$ ,  $[l] = L$  e  $[g \simeq 9,8m/s^2] = L \cdot T^{-2}$  onde  $k$  é um número puro. Substituindo as unidades dimensionais temos que:

$$T = M^a \cdot L^b \cdot (L \cdot T^{-2})^c = M^a \cdot L^{b+c} \cdot T^{-2c} = M^0 \cdot L^0 \cdot T^1$$

Comparando o lado esquerdo com o direito da equação acima temos um sistema:

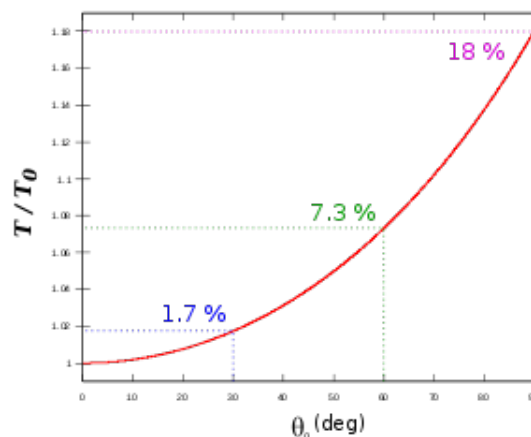
$$a = 0, \quad b + c = 0, \quad -2c = 1 \quad \implies \quad a = 0, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}$$

Portanto a relação que estamos procurando deve ser da forma:

$$T = \kappa \cdot m^a \cdot l^b \cdot g^c = k \cdot m^0 \cdot l^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}} = \kappa(\theta_o) \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

O valor de  $\kappa(\theta_o)$  não pode ser encontrado por meio de análise dimensional. Pode ser alvo de medição em laboratórios de Física. O valor de  $\kappa(\theta_o)$  pode ser obtido de forma exata através de uma integral, mas que não pode ser resolvida por funções elementares (Fig. 11).

Figura 11 – Período do pêndulo simples



Fonte: Wikipedia. A porcentagem é o desvio em relação a aproximação linear.

O movimento do pêndulo é um problema tradicionalmente usado para introduzir as chamadas funções elíticas, criadas pelos matemáticos na terceira década do sec. 19, especialmente Abel e Jacobi. Trata-se de um problema que sempre é feito num curso de Mecânica Analítica.

No limite de pequenas oscilações, pode-se provar que  $\kappa(\theta_o) \rightarrow 2\pi$  quando  $\theta_o \rightarrow 0$  e que  $\kappa \rightarrow \infty$  (logaritmicamente) quando  $\theta \rightarrow \pi$ .

Na segunda url se encontra a aproximação para o periodo por uma série de potências no angulo  $\theta_o$ :

<https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum>  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum\\_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics))

Em 1673, Huygens conseguiu a solução teórica para o problema do *pêndulo isócrono* usando anteparos com formato de cicloide invertida. Para uma bela apresentação, envolvendo idéias geométricas utilizadas por Huygens e conhecimentos rudimentares de Cálculo, ver [57]. Ver também os links:

<https://www.youtube.com/watch?v=UFzA-HU1Dnc>  
<https://galileo-unbound.blog/2018/09/20/huygens-tautochrone/>  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Tautochrone_curve)  
<https://www.youtube.com/watch?v=C1d0p3a43fU>

Para saber mais 13: Período do pêndulo simples e o pêndulo isócrono

Um dos setores da Diretoria de Metrologia Científica e Tecnologia (DIMCI/INMETRO) é a Divisão de Metrologia em Dinâmica de Fluidos

<http://www.inmetro.gov.br/metcientifica/fluidos/index.asp>

Seus técnicos são requisitados para realizar medições de volume e de vazão em líquidos e gases.

Dados sobre o gasoduto Bolívia-Brasil podem ser encontrados em

[http://www.tbg.com.br/pt\\_br/o-gasoduto/informacoes-tecnicas.htm](http://www.tbg.com.br/pt_br/o-gasoduto/informacoes-tecnicas.htm)

Aproximadamente, o contrato atual é de 20 milhões de metros cúbicos por dia de gás natural, que custa às distribuidores 1 real por metro cúbico.

Uma diferença de 1 por cento na medição equivale a quantos reais por ano?

Para saber mais 14: Exemplo: Medições de vazão

Segundo Percy Bridgman, o próprio desenvolvimento histórico da Física mostra que as grandezas fundamentais são descritas por meio de operações que permitam obter o seu valor a partir de experiências, isto é o que se chama de *definição operacional* de uma grandeza.

Sempre que este procedimento não foi seguido, diz Bridgman, irão surgir dificuldades de um tipo ou de outro. Ele foi mais além, afirmando que qualquer tipo de conceito não passa de, ou é equivalente a apenas uma sequência de operações.

“We mean by any concept nothing more than a set of operations; the concept is synonymous with the corresponding set of operations”.

(Bridgman, *The Logic of Modern Physics*, 1927).

O operacionalismo de Bridgman, como entidade filosófica, parece ter ficado fora de moda<sup>a</sup>. Mas seja como for, operacionalismo é o que mais vale para a metrologia.

Um processo de medição de uma grandeza envolve a escolha de uma unidade com múltiplos e submúltiplos e um procedimento para associar um número por comparação com o padrão. Porém é mais fácil falar do que fazer.

O que está envolvido?

Protocolos rigorosos para uma medição nos padrões metrológicos são dados pelo BIPM. Para a avaliação das incertezas é preciso sempre utilizar o GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement).

O próprio GUM está atualmente sendo revisto, incorporando os métodos Bayesianos ([58], [59]).

A correta aplicação destes protocolos é sistematicamente monitorada por comparações entre as instituições metrológicas dos países membro, para que as *incertezas na medição* fiquem dentro dos padrões estabelecidos<sup>b</sup>.

Para saber mais 15: Do operacionalismo de Bridgman ao GUM

<sup>a</sup> <https://plato.stanford.edu/entries/operationalism/>.

<sup>b</sup> Ver <https://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>; a tradução pode ser encontrada em [http://www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/iso\\_gum\\_ver\\_sao\\_site.pdf](http://www.inmetro.gov.br/noticias/conteudo/iso_gum_ver_sao_site.pdf).



### 2.3 O TEOREMA PI (VASCHY E BUCKINGHAM)

O teorema de Vaschy-Buckingham tem sido objeto de inúmeros estudos e resenhas. Em 1975 Görtler publicou um artigo de revisão ([60], em alemão), mencionando alguns precursores e mostrando o desenvolvimento do tema. A Wikipédia também apresenta algumas informações históricas.

Como antecipamos, seguiremos aqui a prova que encontramos no livro de Bluman e Kumei [5]. Apenas como curiosidade, pois não será preciso mais informação, mencionamos um comentário destes autores, de que são utilizadas idéias da teoria dos grupos de transformações de Sophus Lie, que fornecem invariantes de um problema sob a ação de um grupo contínuo de transformações.

Suponhamos que, por experimento ou intuição, percebe-se que certa grandeza  $u$  é modelada por uma dependência de  $n$  grandezas derivadas, mensuráveis no laboratório por exemplo, ou capazes de serem estimadas teóricamente:

$$u = f(W_1, \dots, W_n) \quad (2.1)$$

( $f$  sequer precisa ser uma função contínua).

Sejam  $L_1, \dots, L_m$  as grandezas fundamentais envolvidas no fenômeno, ou seja, como diz o Teorema de Bridgman, os  $W_j$  e  $u$  são grandezas derivadas dos  $L_i$ :

$$[W_j] = L_1^{b_{1j}} \dots L_m^{b_{mj}} \quad , \quad [u] = L_1^{a_1} \dots L_m^{a_m} \quad (2.2)$$

É costumeiro formar uma matriz  $B = (b_{ij})$ ,  $m \times n$  guardando a informação sobre os expoentes das grandezas derivadas  $W_j$ . A coluna  $j$  corresponde a  $W_j$ . Também se cria uma coluna adicional  $a$  (matriz  $m \times 1$ ) para os expoentes  $a_i$ . A equação (2.1) precisa ser coerente dimensionalmente,  $[u/f] = 1$ . Para isto, insere-se se preciso for, um fator dimensional conveniente,  $\alpha$ , multiplicando  $f$ .

**Teorema.** (*Teorema Pi*) A fórmula (2.1) pode ser reescrita em termos de variáveis adimensionais  $\Pi_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , na forma

$$u = W_1^{y_1} \dots W_n^{y_n} g(\Pi_1, \dots, \Pi_k) \quad (2.3)$$

1.  $[u] = [W_1^{y_1} \dots W_n^{y_n}]$ ,  $[g] = 1$

2.  $k$ , o “número de grupos  $\Pi$ ”, é dado por

$$k = n - \text{posto}(B) \quad (2.4)$$

3. Cada grupo  $\Pi_j$  é um monômio nos  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\pi_i = W_1^{x_{1i}} \dots W_n^{x_{ni}}$$

Há uma enorme vantagem em reescrever o modelo para o fenómeno físico, químico, ou biológico na forma (2.3) em vez de (2.1), pois temos menos variáveis livres. Além disso, experimentos podem ser feitos em escala conveniente.

Como veremos, aparecem como consequência da adimensionalização, conceitos físicos importantes, como o número de Reynolds, já mencionado, e muitos outros.

Vamos à demonstração. O fato crucial é que premissa 1 nos diz que a expressão (2.1) não pode depender da escolha do sistema de unidades para as grandezas fundamentais.

Isto é, a MESMA relação funcional precisa continuar valendo num novo sistema de unidades. Ou seja, quando as grandezas fundamentais sofrem  $m$  (diferentes) transformações de escala. deveremos necessariamente ter para a mesma função  $f$ :

$$u^* = f(W_1^*, \dots, W_n^*) \quad (2.5)$$

*Isto obviamente irá restringir as funções  $f$  que podem modelar um fenómeno.*

Podemos escrever convenientemente como

$$L_i \rightarrow L_i^* = \exp(\rho_i) L_i \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.6)$$

onde apenas por conveniencia escrevemos o fator de conversão entra as unidades da  $i$ -ésima grandeza fundamental na forma exponencial:  $\exp(\rho_i)$ .

Se mudamos o sistema de unidades, teremos por uma álgebra elementar

$$W_j \rightarrow W_j^* = \exp(\rho_1 b_{1j} + \dots + \rho_m b_{mj}) W_j$$

enquanto

$$u \rightarrow u^* = \exp(\rho_1 a_1 + \dots + \rho_m a_m) u$$

Obtém-se assim uma nova fórmula estendendo (2.1), que traduz a “ação do grupo das mudanças de escalas nas unidades”.

Mais precisamente, o modelo matemático ou empírico deve obedecer a um *grupo de transformações* de Lie:

$$\boxed{e^{\rho_1 a_1 + \dots + \rho_m a_m} f(W_1, \dots, W_n) = f\left(e^{\rho_1 b_{11} + \dots + \rho_m b_{m1}} W_1, \dots, e^{\rho_1 b_{1n} + \dots + \rho_m b_{mn}} W_n\right)} \quad (2.7)$$

Esta expressão traduz matematicamente as invariâncias subjacentes às premissas 1 e 2.

Para apreciar suas implicações, variemos a escala de uma das grandezas fundamentais, digamos  $L_1$ ,  $\rho_1 = \rho$ , mantendo as mesmas unidades nas demais grandezas fundamentais ( $\rho_2 = \dots = \rho_n = 0$ ).

O que decorre será mostrado a seguir.

Notemos que a primeira *linha* de  $B$  nos informa sobre o impacto da mudança de escala na grandeza  $L_1$  sobre as grandezas derivadas  $W_1, \dots, W_n$ . Como estamos tomando apenas as grandezas fundamentais realmente envolvidas, algum elemento desta linha é não nulo, e podemos supor  $b_{11} \neq 0$ . A grande idéia é mudar as  $n - 1$  demais grandezas  $W_2, \dots, W_n$  para

$$X_j = W_j / (W_1)^{b_{1j}/b_{11}}, \quad j = 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

porém mantendo a primeira,

$$X_1 = W_1 \quad (2.9)$$

e mudar  $u$  para

$$v = u / (W_1)^{a_1/b_{11}}. \quad (2.10)$$

**Afirmação:** Nesta nova representação temos:

$$v^* = v \text{ e } X_j^* = X_j \text{ para } j = 2, \dots, n.$$

Prova da afirmação:

$$v^* = u^* / (W_1^*)^{a_1/b_{11}} = e^{\rho a_1} u / \left( e^{\rho b_{11}} W_1 \right)^{a_1/b_{11}} = \frac{e^{\rho a_1}}{\left( e^{\rho b_{11}} \right)^{a_1/b_{11}}} u / W_1^{a_1/b_{11}} = v$$

Uma conta exatamente igual também mostra que  $X_j^* = X_j$  para  $j = 2, \dots, n$ .  $\square$

O que isto significa? Um pouco de reflexão nos fará concluir que tanto  $[v]$  quanto as novas grandezas derivadas  $[X_2], \dots, [X_n]$  *não podem mais conter* a grandeza fundamental  $L_1$ . Porém para  $X_1 = W_1$  temos algo diferente:

$$X_1^* = W_1^* = e^{\rho b_{11}} W_1 = e^{\rho b_{11}} X_1.$$

Em consequência a família de transformações (2.7) com  $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \dots = \rho_n = 0$  se reescreve na nova representação do fenômeno como

$$v = \tilde{f} \left( e^{\rho b_{11}} X_1, X_2, \dots, X_n \right)$$

**Isto mostra que não há dependência de  $\tilde{f}$  na primeira coordenada  $X_1$  e portanto esta variável pode (e deve) ser suprimida na expressão funcional.**

$$v = \tilde{f} \left( e^{\rho b_{11}} X_1, X_2, \dots, X_n \right) = \tilde{f} \left( \cancel{e^{\rho b_{11}} X_1}, X_2, \dots, X_n \right)$$

**Afirmação:** Repetindo este procedimento com as outras  $m - 1$  grandezas fundamentais, uma de cada vez, chegaremos finalmente a uma representação equivalente a (2.1) da forma

$$z = g \left( \pi_{\text{rank}(B)+1}, \dots, \pi_n \right) \quad (2.11)$$

onde os  $\pi$  (e portanto também  $z$ ) são totalmente adimensionais, pois não “sentem” nenhum efeito de mudanças de unidades em todas as grandezas fundamentais  $L_i, i = 1, \dots, m$ .  $\square$

**Nota bene.** Normalmente  $\text{rank}(B) = m$  e teremos então  $n - m$  grupos adimensionais. Porém podem haver casos nos quais existem interações adicionais entre as grandezas mensuráveis  $W_1, \dots, W_n$ . Neste caso, acabaremos por ter de utilizar um número maior de grupos adimensionais no modelo.

Como consequência de uma conta típica da Álgebra Linear (ver a Tarefa a seguir), segue que o número correto de grupos adimensionais é

$$n - \text{rank}(B).$$

Recapitulando: são fornecidas a matriz  $B$  ( $m \times n$ ) das grandezas derivadas  $W_j$  e o  $m$ -vetor  $a$  da variável  $u$  sendo modelada. Programe a receita  $B \mapsto B_1$ ,  $a \mapsto a_1$  com  $B_1$   $(m - 1) \times (n - 1)$  e  $a_1$  um  $(m - 1)$  vetor. Este processo se esgota após  $\text{rank}(B)$  etapas. Note-se que em cada etapa as grandezas derivadas são modificadas através de multiplicações por uma delas (aquela que está sendo eliminada) elevada a um dado expoente. Assim, tendo chegado ao final do processo, voltando de trás para diante, podemos obter os grupos adimensionais em termos das grandezas derivadas que estão originalmente no modelo, ou seja: cada um destes grupos serão formados por produtos de potências dos  $W_j$ .

O processo é semi-automatizado: cada passo requer uma escolha a ser feita pelo humano: a linha  $i$  de  $B$  se refere à grandeza fundamental e a coluna  $j$  à grandeza derivada que serão descartadas.

Estas escolhas seguem a intuição do modelador, visando ao final obter os grupos adimensionais na forma mais útil ao estudo do problema.

No desenvolvimento deste projeto sugerimos examinar o artigo [61] e a discussão no livro de Lobo Carneiro.

Para saber mais 16: Algoritmo para os  $\Pi_k$

Um projeto mais ambicioso envolverá métodos estatísticos modernos (inclusive os bayesianos, onde a “crença no modelo” é levada em conta). Do ponto de vista experimental, mesmo quando  $\text{rank}(B) < m$ , valerá a pena manter as variáveis redundantes, caso estas independentemente possam ser medidas.

Estes dados adicionais podem ser úteis na chamada *quantificação das incertezas*, uma área de pesquisa muito atual, e muito importante em metrologia. Numa outra direção, mas também relacionada, imagine que medidas foram feitas em vários protótipos, que foram construídos em diferentes escalas. Pode-se usar o teorema Pi de forma a ser aceita pela comunidade metrológica? No breve levantamento que fizemos, conseguimos estas referências: [62], [63], [64], [65].

Para saber mais 17: Quantificação de incertezas (tema de pesquisa)

Como apontamos já na introdução, e é muito bem discutido no livro de Fernando Lobo Carneiro, a Análise Dimensional é apenas um começo para o estudo de um problema. É preciso entender bem a física do fenômeno, através de experimentos e de boa intuição. Grandezas irrelevantes podem levar a expressões dimensionalmente corretas, porém inúteis ou mesmo deletéreas.

Por exemplo, um termo como  $[ML^2T^{-2}]$ , o que ele poderá significar, trabalho, energia, torque?

Alguns aperfeiçoamentos da AD foram tentados, sem grande sucesso, principalmente para na tentativa de incorporar grandezas vetoriais [66], [67], [68]. Em outra direção, Sonin [69] apresentou recentemente uma extensão do Teorema Pi quando algumas das quantidade que definem o problema tem valores fixos em todos os casos de interesse.

Para saber mais 18: A Análise Dimensional não é uma panacéia

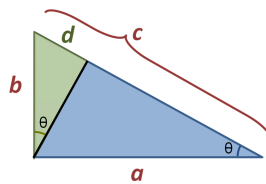
### 3 DESAFIOS LÚDICOS (PARA INICIAR)

Os dois exemplos a seguir foram encontrados no capítulo 1 do excelente texto de Fernando Pestana da Costa [70], publicado pela Sociedade Portuguesa de Matemática<sup>1</sup>. Em seguida, fazemos propaganda de um maravilhosos livro, de Sanjoy Mahajan, sobre a “matemática de briga de rua”. Concluímos o capítulo com algumas sugestões de leitura, incluindo conselhos de dois matemáticos de altíssimo nível.

#### 3.1 TEOREMA DE PITÁGORAS

Considere um triângulo retângulo com catetos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , e com hipotenusa  $\mathbf{c}$ . Passando pelo vértice oposto a  $\mathbf{c}$  uma perpendicular  $\mathbf{ac}$  obtemos dois triângulos retângulos com hipotenusas  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , os quais, pelo critério **AA** de semelhança de triângulos, são semelhantes ao triângulo dado inicialmente (Fig. 12).

Figura 12 – Teorema de Pitágoras



Fonte: F. Pestana da Costa [70]

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{C}$  a área do triângulo com hipotenusa  $\mathbf{c}$ , e, analogamente, por  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  os de hipotenusa  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , respectivamente. Designando esse ângulo por  $\theta$  podemos escrever  $C = G(c, \theta)$ , onde  $G$  é uma função desconhecida. Mas como  $[C] = L^2$ ,  $[c] = L$  e  $[\theta] = 1$  a análise dimensional nos diz que  $G$  é *necessariamente* da forma  $G(c, \theta) = c^2 g(\theta)$ , para alguma função  $g$ . O mesmo raciocínio aplicado aos triângulos de hipotenusas  $a$  e  $b$  (e que tem o mesmo ângulo  $\theta$ ) permite obter expressões análogas a  $C = G(c, \theta)$  para estes triângulos, portanto as suas áreas serão

$$A = G(a, \theta) = a^2 g(\theta) \quad , \quad B = G(b, \theta) = b^2 g(\theta).$$

Como  $A + B = C$ , temos  $a^2 g(\theta) + b^2 g(\theta) = c^2 g(\theta)$ . Finalmente, como  $g(\theta) \neq 0$  se  $\theta \neq 0$ , concluímos que  $a^2 + b^2 = c^2$ .  $\square$

Encontramos este exemplo também neste artigo [71], que traz exemplos sobre o uso de AD no Cálculo<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Disponível em [https://repositorioaberto.uab.pt/bitstream/10400.2/7413/1/Intro\\_Modelacao\\_Matematica\\_SPM\\_2018\\_07\\_08.pdf](https://repositorioaberto.uab.pt/bitstream/10400.2/7413/1/Intro_Modelacao_Matematica_SPM_2018_07_08.pdf)

<sup>2</sup> Sobre as inúmeras demonstrações do teorema de Pitágoras, ver [72], [73].

### 3.2 QUEDA DE DOMINÓS

Até agora não observamos a presença de grupos Pi. Este primeiro exemplo é uma aplicação lúdica (sua simplicidade é apenas aparente) em que surgem dois grupos.

O problema dos dominós pode ser estudado de maneira aprofundada (ver e.g. [74], [75]), mas é sempre bom de início olhar fenômenos complexos por Análise Dimensional. Temos uma fileira de peças de dominó, de altura  $l$ , espessura  $a$  e massa  $m$ , dispostas a uma distância  $d$  entre elas.

A queda da primeira, provocada por um mínimo peteleco (quase sem dar nenhuma energia cinética inicial) provoca a queda das seguintes. Vamos supor que quase imediatamente a propagação das quedas se dará a velocidade constante  $v$ . Escrevemos então  $v = f(l, a, d, g, m)$ , com  $g$  é a aceleração da gravidade. As dimensões são

$$[v] = L \cdot T^{-1}, [l] = [a] = [d] = L, [g] = L \cdot T^{-2}, [m] = M$$

e temos portanto

$$L \cdot T^{-1} = [v] = [l^\alpha a^\beta d^\gamma g^\delta m^\epsilon] = L^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} M^\epsilon T^{-2\delta},$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1/2, \quad \delta = 1/2, \quad \epsilon = 0$$

O sistema é indeterminado: sua solução não é única. Pelo Teorema de Vaschy-Buckingham sabemos que vamos ter dois grupos Pi. Escolhendo

$$\beta = \frac{1}{2} - \alpha - \gamma$$

segue  $[l^\alpha a^\beta d^\gamma g^\delta m^\epsilon] = [l^\alpha a^{\frac{1}{2}-\alpha-\gamma} d^\gamma g^{\frac{1}{2}}] = [(ga)^{\frac{1}{2}} (l \cdot a^{-1})^\alpha (d \cdot a^{-1})^\gamma]$ . Os termos  $l \cdot a^{-1}$  e  $d \cdot a^{-1}$  são adimensionais. O Teorema Pi nos garante que relação  $v = f(l, a, d, g, m)$  passará à forma

$$v = \sqrt{ga} \psi\left(\frac{l}{a}, \frac{d}{a}\right),$$

onde  $\psi$  é uma função das variáveis adimensionais  $\frac{l}{a}$  e  $\frac{d}{a}$ .

O comportamento da função  $\psi$  pode ser investigado experimentalmente. Bom projeto para uma feira de ciências!

Ver [http://iyptmag.phy.ntnu.edu.tw/upload/journal/prog/f4caea5a\\_20140508.pdf](http://iyptmag.phy.ntnu.edu.tw/upload/journal/prog/f4caea5a_20140508.pdf)

<http://www.math.udel.edu/~rossi/Math512/archives.html>

Vale a pena olhar alguns dos videos:

[https://www.youtube.com/results?search\\_query=New+Years+Dominos](https://www.youtube.com/results?search_query=New+Years+Dominos)

Para saber mais 19: Queda de dominós

### 3.3 MATEMÁTICA DE BRIGA DE RUA

São preciosos os livros de Sanjoy Mahajan [76], [77]. O primeiro, com o delicioso título *Street-Fighting Mathematics* tem acesso livre em

<https://mitpress.mit.edu/books/art-insight-science-and-engineering>

Sugerimos ler também ler esta entrevista com o autor:

<https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/PT.5.3027/full/>

A tarefa aqui é ler os capítulos 1 e 2 (dimensões). O §1.1 discute falácias que surgem frequentemente nas páginas de Economia dos jornais ou até mesmo em artigos científicos. Algumas vezes cientistas sociais comparam índices dimensionalmente diferentes.

Mas engenheiros também fazem bobagens. Sanjoy relata que em 1999 a missão da NASA para Marte fracassou porque um dos programadores esqueceu de fazer uma conversão de unidades<sup>a</sup>.

Um problema muito ilustrativo é discutido no §2.4.

*Larga-se dois cones de papel.*

*Um deles tendo dimensões duas vezes maior que o outro.*

*Qual a relação entre as velocidades limite de queda?*

O leitor está desafiado a pensar neste problema. Depois olhe a solução (baixe o livro!). Achamos um experimento real em [78].

Para saber mais 20: Matemática de briga de rua

<sup>a</sup> E quando os médicos nos passam receitas, é importante checar com muito cuidado!

O livro também é disponível como curso no MIT. Na primeira versão, de 2008, há algumas listas de exercícios com soluções

<https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-098-street-fighting-mathematics-january-iap-2008/>.

Alguém publicou todas as soluções:

[https://waxworksmath.com/Authors/G\\_M/Mahajan/mahajan.html](https://waxworksmath.com/Authors/G_M/Mahajan/mahajan.html).



### 3.4 “DICAS” DE UM FIELDS MEDAL (E DE UM QUE NÃO FOI)

Terence (Terry) Chi-Shen Tao é um dos matemáticos mais influentes da atualidade. Gênio precoce, nascido em 1975, foi medalhista Fields em 2006. Vladimir Igorevich Arnold não recebeu a medalha Fields - provavelmente por “fogo amigo” [79]. Falecido em 2010, sua influência continua presente através de seus discípulos e inúmeros seguidores.

Começemos por Tao. Ele aconselha, pragmáticamente<sup>3</sup>:

“In the more quantitative areas of mathematics, such as analysis and combinatorics, one has to frequently keep track of a large number of exponents in one’s identities, inequalities, and estimates ... Calibration is best used for the type of quick-and-dirty calculations one uses when trying to rapidly map out an argument that one has roughly worked out already, but without precise details .... if all goes well, the exponents obtained in that process should match up with the preliminary guesses for those exponents obtained by calibration, which adds confidence that there are no exponent errors have been committed.”

Os exemplos que êle dá neste tópico do seu blog são na maior parte muito avançados, mas deixamos como tarefa o Exemplo 1 e o Exercício 1, que podem ser facilmente lidos. O Exemplo 2, em grafos/combinatória, é um desafio duro, mas o enunciado pode ser entendido.

Para saber mais 21: Exercícios propostos por Terence Tao

### Problema do nascer do sol (Arnold)

Terminamos esta seção com um desafio, que encontramos entre os comentários que encontramos, alguns a sério e outros um tanto irônicos, ao fazer uma busca com a palavra chave “dimensional analysis in mathematics” num ótimo site: MathOverflow.

<https://mathoverflow.net/questions/63749/dimensional-analysis-in-mathematics>.

Arnold relata sua primeira experiência real com a matemática<sup>4</sup>. Foi um problema dado em 1949 pelo professor de sua turma, I. V. Morozkin, quando ele tinha 12 anos:

<sup>3</sup> <https://terrytao.wordpress.com/tag/calibration/>

<sup>4</sup> <http://www.ams.org/notices/199704/arnold.pdf>

“Duas velhinhas começam a andar ao nascer do sol, cada uma delas com velocidade constante, mas diferente. Uma vai de A para B e a outra de B para A. Elas se encontram ao meio dia e continuando a andar sem parar, chegam respectivamente em B as 16:00 e em A as 21:00.

A que horas foi o nascer do sol?”

“I spent a whole day thinking on this oldie, and the solution (based on what is now called scaling arguments, dimensional analysis, or toric variety theory, depending on your taste) came as a revelation. The feeling of discovery that I had then (1949) was exactly the same as in all the subsequent much more serious problems ... It is the greed to experience such a wonderful feeling more and more times that was, and still is, my main motivation in mathematics (V. Arnold).”

Para saber mais 22: Problema do nascer do sol

Parte do problema aqui tem a ver em descobrir onde análise dimensional está envolvida. E o que isso tem a ver com “variedades tóricas na geometria algébrica, fibrados e categorias”? Talvez uma *boutade* típica de Arnold, mas os matemáticos tem um olhar abstrato. Basta dar uma olhada numa das indicações nesta página do MathOverflow:

<https://ncatlab.org/jamesdolan/published/Algebraic+Geometry>

Pode-se ler mais sobre o problema do nascer do sol em:

<https://mathoverflow.net/questions/52585/>

<https://math.stackexchange.com/questions/622775/a-problem-v-i-arnold-solved-as-a-primary-school-student>

<https://www.algebra.com/algebra/homework/word/travel/Another-unusual-Travel-problem.lesson>

Em tempo: resolvemos!

De fato, tem um sabor de Análise Dimensional: conseguimos reduzir um sistema de três equações, que inicialmente tinha quatro incógnitas, para três.

## 4 EXEMPLOS ACESSÍVEIS NO ENSINO MÉDIO

### 4.1 CRESCIMENTO EXPONENCIAL (MALTHUS)

Iniciamos com uma pequena incursão na biologia. Desde D'Arcy Thompson<sup>1</sup> os biólogos estão muito interessados em morfometria [80], [81], [82]. Ainda assim, em artigo de revisão publicado em 2011, Houle et al. [83] advogam mais atenção dos biólogos para a análise dimensional, relatando algumas falácias que podem surgir ao negligencia-la.

Um aspecto que ressaltam é o de procurar justificar modelos usando o mínimo de hipóteses subjacentes. A seguinte aplicação da análise dimensional é ilustrativa.

O crescimento populacional envolve quatro variáveis:

- a população no tempo  $t$ ,  $N(t)$ ;
- a população no tempo zero,  $N(0)$ ;
- o tempo  $t$ ;
- e um parâmetro  $r$ , a taxa de crescimento, que pode ser positiva ou negativa.

Assim, o modelo de crescimento populacional é da forma

$$N(t) = f(N(0), r, t)$$

para uma função não especificada  $f$ .

As unidades de  $N(t)$  e  $N(0)$  são indivíduos (ou indivíduos por área), a unidade de tempo é um intervalo (por exemplo, segundos ou gerações), e a unidade de  $r$  é o inverso do tempo. Temos, portanto, *três* variáveis relacionadas por *duas* grandezas fundamentais, que são aqui o número de indivíduos e o tempo.

O teorema Pi nos dirá que

$$N(t) = N(0)g(rt).$$

Neste exemplo, podemos ir mais além: como  $g$  apenas depende de  $rt$ , podemos concluir também que

$$N(t) = N(s)g(r(t - s))$$

para todos os tempos  $s < t$ . Ou equivalentemente

$$g(rt) = g(rs)g(rt - rs)$$

e esta equação funcional leva a lei malthusiana (bem, isto é um exercício de Análise)

$$N(t) = N(0) \exp(rt).$$

---

<sup>1</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/On\\_Growth\\_and\\_Form](https://en.wikipedia.org/wiki/On_Growth_and_Form)

## 4.2 QUEDA LIVRE E RAMPAS (GALILEU)

Este problema pode ser extremamente motivador em sala de aula (ver por exemplo [84]), também por sua importância para o início da ciência moderna (Fig. 13). Nos permite indagar se seria possível chegar nas equações de queda livre na época de Euclides, muito antes de Galileu, caso a análise dimensional fosse utilizada. Mostraremos, passo a passo, como se estabelece uma relação entre a altura e a velocidade final atingida pelo corpo no instante final da queda (desprezando a resistência do ar).

Seja  $v = f(h, g, m)$  onde,  $h$ (altura),  $v$ (velocidade no final),  $g$ (aceleração da gravidade) e  $m$ (massa do corpo). Tomando as unidades fundamentais  $M, L, T$  podemos escrever a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

que possui posto máximo 3. *Aqui não temos grupos adimensionais*, pois  $3 - 3 = 0$ . Teremos apenas que adequar os expoentes. Deixamos a cargo do leitor verificar que a análise dimensional de

$$v = h^a g^b m^c \gamma$$

com  $\gamma$  uma constante numérica, leva a

$$a = b = 1/2, c = 0.$$

$$v = \gamma \sqrt{gh}$$

Figura 13 – *Discorsi* de Galileu, 1638



Fonte: Wikipedia

Combinar com o professor de física: replicar as experiências de Galileu em planos inclinados. Pode-se observar que  $\gamma = \sqrt{2}$  na vertical?

Como referências, [85], e as páginas web

<https://catalogue.museogalileo.it/object/InclinedPlane.html>  
<http://www.dartmouth.edu/~phys1/labs/lab1.pdf>  
<https://catalogue.museogalileo.it/object/InclinedPlane.html>  
<https://www.aps.org/publications/apsnews/200201/backpage.cfm>

Este tópico é também um bom momento para discutir uma peça de teatro de Bertold Brecht sobre Galileu, de falar na época renascentista, das relações da Igreja Católica com a Ciência (que tem evoluído nos papados recentes).

A peça não perde atualidade. Muitos problemas do nosso tempo, tanto nacionais quanto internacionais, são causados pela falta de conhecimento ou negligência em relação a temas científicos, mostrando a grande importância da divulgação.

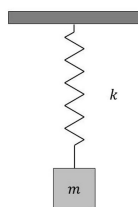
[https://en.wikipedia.org/wiki/Life\\_of\\_Galileo](https://en.wikipedia.org/wiki/Life_of_Galileo).

Para saber mais 23: Queda livre num plano inclinado e Galileu

### 4.3 MOVIMENTO OSCILATÓRIO (HOOKE)

Consideremos a situação ilustrada na figura, em que temos uma mola com uma das extremidades fixas e a outra ligada a um corpo de massa  $m$ . Supomos que a mola pode oscilar sem atrito com o ar (Fig. 14), ou em cima de uma mesa, se colocada em posição horizontal.

Figura 14 – Um oscilador massa-mola



Fonte: Próprio autor

Sendo deixada em repouso, a mola fica numa posição de equilíbrio com a força da gravidade. Se deslocarmos o corpo dessa posição de equilíbrio para uma nova posição a uma distância vertical  $|x|$  da posição de equilíbrio, observamos que ocorre um movimento vibratório em torno da posição de equilíbrio.

O período  $\tau$  deveria, a princípio, ser uma função da massa  $m$ , do deslocamento  $|x|$  e das características físicas da mola.

Na situação de pequenos alongamentos, Hooke verificou experimentalmente que a mola reage ao deslocamento exercendo uma força  $F$  que é diretamente proporcional ao afastamento da posição de equilíbrio.

A constante de proporcionalidade  $k = |F|/|x|$  é uma característica de cada mola é uma grandeza dimensional, a chamada constante de Hooke. Vamos deduzir uma relação  $\tau = f(k, x, m)$  entre o período das oscilações  $\tau$  e as três grandezas  $k, x$  e  $m$ . De novo, não teremos grupos adimensionais, e portanto o Teorema de Bridgman nos diz que a relação é da forma

$$\tau = \delta k^\alpha x^\beta m^\gamma$$

$$[\tau] = \delta (MT^{-2})^\alpha \cdot L^\beta \cdot M^\gamma = \delta M^{\alpha+\gamma} \cdot L^\beta \cdot T^{-2\alpha} = T$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\alpha = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1/2 \end{cases} \implies T = \delta \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Em parceria com o professor de física: obter um valor aproximado de  $\delta$  (que vale  $2\pi$ ) efetuando uma série de experiências. Um bom problema para o método dos mínimos quadrados.

Para saber mais 24: Experimento em laboratório

Por falar de obter  $\pi$  por experimentos físicos...

Pode-se refazer este experimento: “Determinação do número  $\pi$  por meio de uma rede quadrada de resistores idênticos” [86], baseado em [87].

Para saber mais 25: Outro experimento em laboratório

#### 4.4 ENERGIA LIBERADA NUMA BOMBA ATÔMICA (TAYLOR)

A primeira explosão de uma bomba atômica foi o teste conhecido por “Trinity”<sup>2</sup> no Novo México, em 16 de julho de 1945. Dois anos mais tarde, após o final da segunda guerra e no início da guerra fria, uma série de fotos da explosão, com uma escala de tamanho, e os respectivos tempos foram liberados pelo exército americano, e publicadas em revistas populares. Baseado *sòmente* nestas fotografias, o físico matemático britânico Geoff Ingram Taylor estimou em 1949 a energia liberada pela explosão (Fig. 15). Segundo o blog do Prof. Peter Lynch<sup>3</sup> há uma lenda urbana que Taylor teve problemas por causa disso.

Na época, isto ainda era um segredo militar. Sabe-se agora que a bomba atômica Little Boy que caiu em Hiroshima em 6 de agosto de 1945, explodiu com uma energia de cerca de 15 kilotons de TNT (63 TJ), e a Fat Man lançada em Nagasaki em 9 de agosto de 1945, explodiu com uma energia de cerca de 20 kilotons de TNT (84 TJ). TJ significa terajoule (1 tera =  $10^{12}$ ). Assim,  $100 \text{ TJ} \sim$  vinte e cinco quilo-toneladas de TNT.

Taylor publicou dois artigos, o primeiro mais técnico. Em seu segundo artigo, usando Análise Dimensional, Taylor usou mais imagens do que as mostradas na Fig. 15 (ver a primeira página do artigo na Fig. 16), mas estas já podem ser usadas para fazer essa estimativa. Considerando que o efeito da gravidade, e as diferenças de densidades do ar são desprezíveis quando comparadas à força interna da explosão nuclear, podemos admitir que a explosão da bomba atômica tome forma esférica. Temos pelas fotografias o tamanho da bola de fogo ( $R$  como uma função de  $t$ ) em vários momentos diferentes. Fazendo uma análise dimensional, podemos chegar ao modelo matemático do raio da esfera.

Por intuição física Taylor argumenta que o raio ( $R$ ) depende da:

- energia liberada no instante da explosão ( $E$ ),  $[E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ .
- tempo ( $t$ ),  $[t] = T$ .
- densidade do ar do lado de fora ( $\rho$ ),  $[\rho] = M \cdot L^{-3}$

As unidades fundamentais são as usuais  $M, L, T$  e não temos nenhum grupo Pi ( $3 - 3 = 0$ ). Sabemos então que  $R(t) = \kappa E^x \rho^y t^z$ ,  $\kappa = \text{const.}$  A análise dimensional do problema é simples.

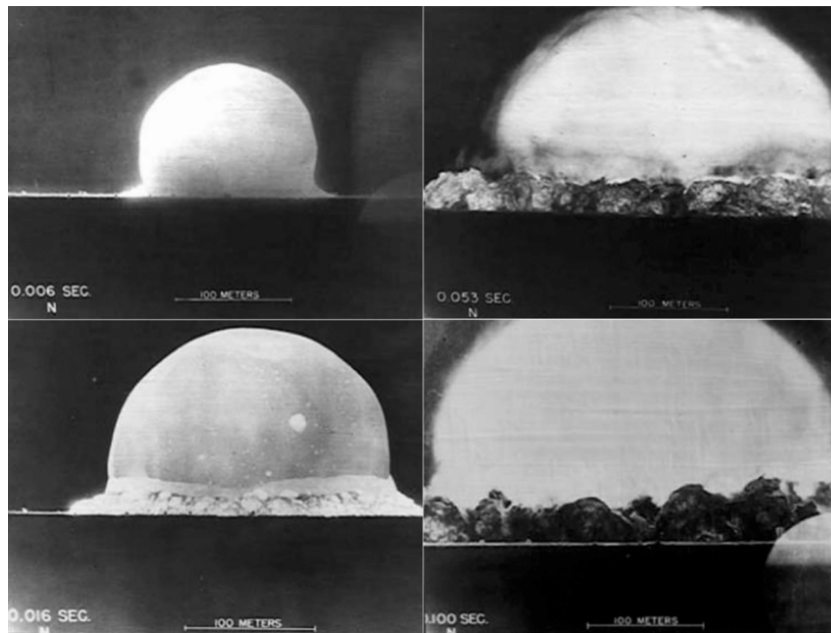
$$[R] = L = [E^x \rho^y t^z] \Leftrightarrow [R] = L = (M \cdot L^2 \cdot T^{-2})^x \cdot (M \cdot L^{-3})^y \cdot T^z$$

<sup>2</sup> Nome escolhido por Robert Oppenheimer, diretor do projeto Manhattan.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Trinity\\_\(nuclear\\_test\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Trinity_(nuclear_test))

<sup>3</sup> <https://www.irishtimes.com/news/science/that-s-maths-how-big-was-the-bomb-1.1922968>

Figura 15 – Teste nuclear em Trinity (1945)



Fonte: U.S. Army e <https://nuclearweaponarchive.org/Usa/Tests/Trinity.html>

Figura 16 – Artigo de G. I. Taylor



G.I. Taylor  
1886-1975

The formation of a blast wave by a very intense explosion.  
II. The atomic explosion of 1945

BY SIR GEOFFREY TAYLOR, F.R.S.

(Received 10 November 1949)

Photographs by J. E. Mack of the first atomic explosion in New Mexico were measured, and the radius,  $R$ , of the luminous globe or 'ball of fire' which spread out from the centre was determined for a large range of values of  $t$ , the time measured from the start of the explosion. The relationship predicted in part I, namely, that  $R^2$  would be proportional to  $t$ , is surprisingly accurately verified over a range from  $R=20$  to 185 m. The value of  $R^2t^{-1}$  so found was used in conjunction with the formulae of part I to estimate the energy  $E$  which was generated in the explosion. The amount of this estimate depends on what value is assumed for  $\gamma$ , the ratio of the specific heats of air.

Two estimates are given in terms of the number of tons of the chemical explosive T.N.T. which would release the same energy. The first is probably the more accurate and is 16,800 tons. The second, which is 23,700 tons, probably overestimates the energy, but is included to show the amount of error which might be expected if the effect of radiation were neglected and that of high temperature on the specific heat of air were taken into account. Reasons are given for believing that these two effects neutralize one another.

Source: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 201, No. 1065 (Mar. 22, 1950), pp. 175-186

Fonte: [https://math.mit.edu/~dunkel/Teach/18.354/slides/L02\\_dimensional\\_analysis.pdf](https://math.mit.edu/~dunkel/Teach/18.354/slides/L02_dimensional_analysis.pdf)



$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 1 \\ -2x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{5}, y = -\frac{1}{5}, z = \frac{2}{5}.$$

Portanto  $R = \kappa \cdot E^{1/5} \cdot \rho^{-1/5} \cdot t^{2/5}$ , onde para  $\kappa$  tomamos o valor igual a 1 (um) por falta de informação. Resolvendo para a energia obtemos

$$E = (R^5 \rho) / t^2.$$

Em  $t = 0,006$  segundos, o raio da onda de choque foi de aproximadamente 80 metros. A densidade do ar é  $\rho = 1,2 \text{ Kg/m}^3$ . Substituindo esses valores na equação da energia,

$$E = (80^5) \times 1,2 / (0,006)^2 \simeq 1 \times 10^{14} \text{ Kg} \times \text{m}^2 / \text{s}^2 = 100 \text{ TJ} \sim 25 \text{ quilotons}.$$

Para mais detalhes, sugerimos [88], e as notas de aula de vários cursos [89], [90], disponíveis na web. O leitor mais curioso pode espiar os artigos originais de Taylor, [91] e [92]. A vasta obra científica deste físico-matemático britânico é descrita em [93] e em [94].

Teríamos como estimar o valor da constante  $\kappa$ ? Talvez algo adicional possa ser feito. Temos duas equações e duas incógnitas, a constante numérica  $\kappa$  e  $E$ . Como temos potências é sempre melhor logaritmizar.

Use estes dados, tirados das fotos:

Tempo (s)	Raio (m)
0,006	80
0,016	100
0,056	180
0,100	250

É um exercício de mínimos quadrados. Um roteiro é dado em [89].

Para saber mais 26: Trinity: estimando a constante

O artigo de Deakin [88] é mais detalhado. Uma boa parte pode ser estudada no nível de Ensino Médio. O §1 deste artigo utiliza um número maior de grandezas derivadas envolvidas no problema, incluindo as pressões (interna e externa) e a densidade internas. Aplicando Buckingham (teremos 4 grupos!) se chega ao mesmo resultado (equação (1), pg. 1070). A partir da pg. 1074 Deakin mostra como Taylor deduziu teóricamente num dos seus dois artigos o valor de  $\kappa$ .

Também estudaram o problema, nos EUA o famoso matemático von Neumann (“Dr. Strangelove”) e na URSS o físico L. Sedov. Curiosamente, na Rússia a análise foi publicada numa revista científica, aparentemente sem tentativa de censura. Vale a pena procurar mais informações sobre este acontecimento, que deu origem a era nuclear. Ver

#### 4.5 ROMPIMENTO DE UMA BARRAGEM

O rompimento da barragem de Brumadinho em 25 de janeiro de 2019, causou a morte de mais de 240 pessoas. A tragédia empalidece o desastre ecológico, que se soma ao de Mariana, em 5 de novembro de 2015, que já havia causado 19 mortos naquela ocasião.

Especialistas em todos os aspectos envolvidos na mineração precisarão trabalhar em conjunto, para que a atividade possa se tornar segura, minimizando o impacto no ambiente e os riscos para a população. Em nossos encontros para a preparação deste TCC, procuramos na rede alguns aspectos em que a Matemática pode contribuir.

São dois os aspectos que nos chamaram mais a atenção:

- i) Estimativas do tempo disponível para evacuação (“early warning”).
- ii) Previsão do alcance dos rejeitos após o rompimento (Fig. 17).

Figura 17 – Rompimento da barragem de Brumadinho



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Rompimento\\_de\\_barragem\\_em\\_Brumadinho](https://pt.wikipedia.org/wiki/Rompimento_de_barragem_em_Brumadinho)

Fazemos aqui apenas algumas simples considerações. Usando a análise dimensional, tentaremos estimar a energia liberada, dada por uma função  $E = f(V, h, g, \rho)$ .

- $[E] = M^1 \cdot L^2 \cdot T^{-2}$  (energia liberada)
- $[V] = L^3$  (volume do fluido)
- $[h] = L$  (altura da barragem)
- $[g] = L \cdot T^{-2}$  (aceleração da gravidade)
- $[\rho] = M \cdot L^{-3}$  (densidade do fluido)

Sendo as grandezas de base MLT, teremos um grupo adimensional. Como poderia raciocinar alguém que desconhecesse o Teorema Pi?

$$[E] = [V]^x \cdot [h]^y \cdot [g]^z \cdot [\rho]^w \Leftrightarrow M^1 \cdot L^2 \cdot T^{-2} = (L^3)^x \cdot L^y \cdot (L \cdot T^{-2})^z \cdot (M \cdot L^{-3})^w$$

$$M^1 \cdot L^2 \cdot T^{-2} = M^w \cdot L^{3x+y+z-3w} \cdot T^{-2z}$$

Resulta um sistema indeterminado:

$$\begin{cases} w = 1 \\ 3x + y + z - 3w = 2 \\ -2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 1 \\ 3x + y = 4 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Poderíamos tentar reescrever na forma

$$E = k \cdot g \cdot \rho \cdot V^x \cdot h^{4-3x} \Leftrightarrow E = k \cdot g \cdot \rho \cdot h^4 \cdot (V/h^3)^x.$$

com o expoente  $x$  desconhecido.

Embora isto não seja correto, nos dá uma intuição para o que deve ser feito, como prevê o teorema de Buckingham. De fato, o que o teorema de Buckingham nos garante é que sendo  $\pi_1 = V/h^3$  um grupo adimensional, a relação  $E = f(V, h, g, \rho)$  tomará a forma

$$E = g \cdot \rho \cdot h^4 \cdot \psi_1(V/h^3),$$

onde  $\psi_1$  é uma função de variável adimensional a ser caracterizada experimentalmente e que depende da forma geométrica do reservatório.

O reservatório de Brumadinho tinha a forma aproximada de um paralelepípedo. Imaginando camadas horizontais de rejeitos superpostas, um raciocínio físico elementar nos dirá que a energia potencial acumulada seria de

$$E = \frac{1}{2} mgh$$

onde  $m = \rho V = \rho S h$  é a massa total derramada,  $S$  a área da base do paralelepípedo.

Para quem estudou cálculo, o fator de 1/2 vem da integral  $\int z dz$ , onde  $z$  denota a altura das camadas. Assim neste caso

$$\psi_1 = \frac{1}{2} S/h^2 = \frac{1}{2} V/h^3.$$

[ Pode ser também utilizado um raciocínio elementar de geometria, comumente usado em sala de aula, análogo ao que se usa para o deslocamento no movimento uniformemente acelerado. ]

Segundo informações da Vale<sup>4</sup> a altura da barragem de Brumadinho era  $h = 85m$ , e o volume  $V = 12$  milhões de  $m^3$ . Não conseguimos informações no site da Vale sobre a densidade dos rejeitos, mas o que encontramos na literatura permite supor que seria algo em torno de duas vezes a densidade da água (a do ferro sólido é oito). Portanto tomaremos  $\rho = 2 \times 10^3 kg/m^3$ . Isto nos dá a estimativa de

$$E = \frac{1}{2}g\rho Vh \sim \frac{1}{2} 10m/s^2 \times (2 \times 10^3 kg m^{-3}) \times (12 \times 10^6 m^3) \times 90m \sim 10^{13} J.$$

Este valor está apenas entre uma e duas ordens de magnitude a menos do que a das bombas atômicas de Hiroshima e Nagasaki. No caso do rompimento da barragem em Mariana, as informações oficiais são de que o volume foi  $V = 60$  milhões de  $m^3$ , com a altura da barragem  $h = 130m$ . A energia liberada equivale a meia bomba atômica.

#### Estimativa da energia e da potência

Pelos vídeos amplamente disponíveis observe o tempo que levou entre o rompimento da barragem e a chegada da frente de rejeitos ao refeitório.

Conseguiria estimar a potência na frente de onda? A potência (energia transmitida por unidade de tempo) é um dos parâmetros utilizados na comparação de explosivos, [95], [96].

<https://www.nytimes.com/pt/interactive/2019/02/20/world/americas/barragem-brumadinho-rompimento-brasil.html>

Para saber mais 27: Brumadinho

Criamos uma pasta no Dropbox com os materiais que coletamos, acessível pelo link

<https://www.dropbox.com/sh/kxtu60em1ih6e3u/AABEEkJyWLwEi3xgo20gLq9ga?dl=0>

Ver o roteiro no READMEFIRST.txt .

Para saber mais 28: Estudos sobre rompimento de barragens

<sup>4</sup> <http://www.vale.com/brasil/PT/aboutvale/news/Paginas/Vale-atualiza-informacoes-sobre-o-rompimento-da-barragem-de-Brumadinho.aspx>

## 5 TEMAS MAIS AVANÇADOS (NEM TODOS!)

“I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.”(Isaac Newton)

(Reportado por Sir David Brewster, *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton* (1855), Volume II. Ch. 27.)

Apresentaremos agora alguns tópicos - já em nível universitário - que encontramos em nossas buscas (bastante aleatórias) sobre assuntos envolvendo análise dimensional.

Há um capítulo sobre AD nas excelentes notas de aula de Fornberg e Herbst [97], que podem servir como material adicional numa disciplina sobre Matemática e Atualidade. Pode-se achar na web um bom número de notas de aula específicas sobre AD, como as do Prof. Howard Stone [98], as do Prof. Alan Dorsey [99], e especialmente as de Bahrami [100]. As notas de Sonin [101], com um grande número de problemas ilustrativos sobre AD em fluidos, estão disponíveis no curso do Prof. McKinley no MIT [102]

<https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-25-advanced-fluid-mechanics-fall-2013/>.

Citemos aleatoriamente alguns artigos com exemplos variados do uso da Análise Dimensional: [103], [84], [104], [105], [106], [107], [108] .

O primeiro capítulo do livro *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations* [5] de Bluman e Kumei tem por título “Dimensional Analysis, Modeling, and Invariance”. Deste capítulo extraímos a demonstração do Teorema Pi, utilizando as idéias da Teoria das Transformações de Sophus Lie.

Este livro contém muitos exemplos de como buscar soluções de semelhança em EDPs, um tema também muito caro a Garret Birkhoff [109], que utiliza com muita habilidade soluções de similaridade em seu livro sobre hidrodinâmica e faz um apanhado rápido do tema em [110]. A relação de auto-similaridade com as singularidades das soluções equações foi explorada recentemente em [111].

Os livros texto em Mecânica de Fluidos quase sempre contém capítulos sobre AD, como o de Frank White [112], [113], [114]. Para aplicações variadas em Engenharia, há o livro clássico de Sedov [115], traduzido em 1959 para o inglês.

Vários livros sobre Análise Dimensional tem aparecido recentemente, como [116], [117], [118], [119]. Zohuri [120], [121], também dá ênfase em soluções de auto-similaridade em EDPs.

## 5.1 AD EM FLUIDOS

Não há criança ou adulto que não goste de brincar com água! É importante ter um laboratório na Escola, mesmo que seja bem simples.

Alguns experimentos sobre o movimento de uma esfera num fluido já haviam sido feitos por Newton. D'Alembert já havia percebido a importância da viscosidade, mostrando matematicamente que na ausência de viscosidade os objetos se moveriam em fluido, paradoxalmente, sem nenhuma resistência.

Pode-se atribuir a Stokes a primeira análise teórica [122] sobre a resistência criada pelo ar no deslocamento de objetos. O assunto tem sido sempre revisto com o avanço de técnicas experimentais e de visualização. Uma resenha até o final do século XX pode ser encontrada em [123].

Em 1961 foram produzidos nos EUA uma série de filmes educacionais pelo NCFMF, National Committee for Fluid Mechanics Films (disponíveis em [124]). Foi uma iniciativa inovadora na época, e são ainda muito úteis para uma introdução à mecânica dos fluidos.

Há muitos números adimensionais no estudo dos fluidos (Fig. 17). O mais conhecido é o *número de Reynolds*. Citamos diretamente a Wikipédia:

“O número de Reynolds (abreviado como Re) é um número adimensional usado em mecânica dos fluidos para estimar o regime de escoamento. É utilizado, por exemplo, em projetos de tubulações industriais e asas de aviões. O seu nome vem de Osborne Reynolds, um físico e engenheiro irlandês. O seu significado físico é um quociente entre as forças de inércia e as forças de viscosidade. A importância fundamental do número de Reynolds é a possibilidade de se avaliar a estabilidade do fluxo podendo obter uma indicação se o escoamento flui de forma laminar ou turbulenta. O número de Reynolds constitui a base do comportamento de sistemas reais, pelo uso de modelos reduzidos.”

([https://pt.wikipedia.org/wiki/Coeficiente\\_de\\_Reynolds](https://pt.wikipedia.org/wiki/Coeficiente_de_Reynolds)).

Entre outros, os seguintes números adimensionais são muito utilizados:

Número		relaciona as escalas:
de Reynolds	$Re = \rho V L / \mu$	de inércia e de tensões viscosas
de Froude	$Fr = V / \sqrt{g L}$	de aceleração gravítica e de inércia
de Mach	$Ma = V / c$	de velocidade e de celeridade, $c$ , do som
de Strouhal	$Str = f / (V / L)$	de frequência $f$ e a escala geral de frequência
de pressão	$C_p = p / (\frac{1}{2} \rho V^2)$	de pressão estática (ou diferença de pressão) e de pressão dinâmica
de atrito	$C_f = \tau / (\frac{1}{2} \rho V^2)$	de tensão de corte e de pressão dinâmica
de resistência	$C_D = D / (d^2 \frac{1}{2} \rho V^2)$	de resistência, $D$ , e de pressão dinâmica vezes área, $d^2$
de sustentação	$C_L = L / (d^2 \frac{1}{2} \rho V^2)$	de sustentação, $L$ , e de pressão dinâmica vezes área, $d^2$
de momento	$C_M = m / (d^3 \frac{1}{2} \rho V^2)$	de momento, $m$ , e de pressão dinâmica vezes volume

Esta pequena tabela foi obtida de

<https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/3779572158309/Aula08-teor.pdf>

## Força de arrasto

Vamos fazer a análise dimensional para um experimento sobre a a força de arrasto num túnel de vento, levando em consideração as seguintes cinco grandezas:  $\rho$  (massa específica do fluido),  $\mu$  (viscosidade dinâmica do fluido),  $v$  (velocidade do escoamento),  $D$  (diâmetro do objeto) e a  $F$  (força de arrasto no objeto).

Trabalharemos aqui na forma implícita do Teorema Pi, que apresentamos na introdução, sem explicitar nenhuma das quantidades como sendo a dependente ds demais.

- Temos  $f(F, D, v, \mu, \rho) = 0$ .
- Todas as grandezas derivadas dependem das fundamentais  $M, L, T$ :

$$[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}, [D] = L, [v] = L \cdot T^{-1}, [\mu] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}, [\rho] = M \cdot L^{-3}.$$

A viscosidade dinâmica pode não ser familiar, mas sua dimensionalidade está correta. Olhar em

<https://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity>

para informações básicas sobre viscosidade (o site em inglês está melhor).

- Teremos assim 2 grupos Pi.

Mas como melhor escolher os grupos? Notemos que  $\rho, v, D$  são conhecidos, e temos interesse nas grandezas  $F$  e talvez  $\mu$ , se não conhecida. Escolhemos entao:

$$\pi_1 = \rho^{a_1} \cdot v^{b_1} \cdot D^{c_1} \cdot \mu, \quad \pi_2 = \rho^{a_2} \cdot v^{b_2} \cdot D^{c_2} \cdot F$$

com os expoentes desconhecidos a serem achados. Deixamos a cargo do leitor encontrar (ou pedir aos seus alunos do ensino médio):

$$a_1 = -1, b_1 = -1, c_1 = -1.$$

$$a_2 = -1, b_2 = -2, c_2 = -2$$

O número de Reynolds é escrito na forma

$$R_e = \frac{1}{\pi_1} = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (5.1)$$

e de fato representa o quociente entre força inercial e viscosa. Já

$$\pi_2 = \frac{F}{\rho v^2 D^2} \quad (5.2)$$

representa o coeficiente de arrasto.

## 5.2 TRANSPORTE DE SEDIMENTOS

Este problema aparece (entre inúmeros outros) no livro texto de Frank White [112] (P. 5.27, pg. 326): “Ao estudar o transporte de areia pelas ondas oceânicas, em 1936 Shields postulou que o limiar de tensão de cisalhamento  $\tau$  induzidas pelas ondas no fundo, requerida para mover partículas, depende da gravidade  $g$ , do tamanho  $d$  da partícula e da sua massa específica  $\rho_p$ , da massa específica  $\rho$  e da viscosidade  $\mu$  da água. Encontre números adimensionais adequados para esse problema, que em 1936 resultou no célebre diagrama de transporte de areia de Shields.”

Das grandezas envolvidas o limiar da tensão de cisalhamento (em inglês, “shear stress”), pode nos ser desconhecida, mas a Wikipedia vem sempre ao nosso socorro. O leitor pode procurar detalhes em

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Tensão\\_de\\_cisalhamento](https://pt.wikipedia.org/wiki/Tensão_de_cisalhamento)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Shear\\_stress](https://en.wikipedia.org/wiki/Shear_stress)

O leitor pode ter uma idéia da relevância da tese de doutorado de Shields para a ciência dos solos (por coincidência a área de atuação de Buckingham) olhando materiais neste excelente curso do Prof. John Southard, disponível no Open CourseWare OCW/MIT [125]. Informações básicas podem ser encontradas em

[https://en.wikipedia.org/wiki/Sediment\\_transport](https://en.wikipedia.org/wiki/Sediment_transport)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Shields\\_parameter](https://en.wikipedia.org/wiki/Shields_parameter)

O trabalho de Shields, pioneiro nos estudos sobre erosão, pode ser baixado de

<http://resolver.tudelft.nl/uuid:61a19716-a994-4942-9906-f680eb9952d6>

A Fig. 19 (colocada aqui apenas como curiosidade) apresenta o famoso diagrama de Shields. Miedema, [126] conseguiu reproduzi-lo teoricamente.

Trabalhando na forma implícita temos:

$$f(\tau, g, d, \rho_p, \rho, \mu) = 0.$$

Determinemos as dimensões básicas das grandezas envolvidas  $\tau, g, d, \rho_p, \rho, \mu$ . Temos:

$$[\tau] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}, [d] = L, [g] = L \cdot T^{-2}, [\mu] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}, [\rho] = [\rho_p] = M \cdot L^{-3}.$$

As dimensões básicas são somente as três do MLT. Teremos  $6 - 3 = 3$  grupos Pi.

- Fazendo a escolha dos grupos, usamos  $g, d, \rho$  como as grandezas de referência para o problema:

$$\pi_1 = g^a \cdot d^b \cdot \rho^c \cdot \tau$$

$$\pi_2 = g^a \cdot d^b \cdot \rho^c \cdot \rho$$

$$\pi_3 = g^a \cdot d^b \cdot \rho^c \cdot \mu$$



- Fazendo a análise dimensional:

$$\pi_1 : (L \cdot T^{-2})^a \cdot (L)^b \cdot (M \cdot L^{-3})^c \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}) = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$$

$$M^{c+1} \cdot L^{a+b-3c-1} \cdot T^{-2a-2} = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0$$

$$\begin{cases} c + 1 = 0 \\ a + b - 3c - 1 = 0 \\ -2a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases} ,$$

substituindo os valores encontrados em  $\pi_1 = g^a \cdot d^b \cdot \rho^c \cdot \tau$ , temos

$$\pi_1 = g^{-1} \cdot d^{-1} \cdot \rho^{-1} \cdot \tau = \frac{\tau}{gd\rho}$$

- Procedendo análogamente, obtem-se

$$\pi_2 = \frac{\rho_p}{\rho}, \quad \pi_3 = \frac{\mu}{\rho\sqrt{gd^3}}.$$

Vamos conferir com a resposta, que está no manual de soluções (Fig.18, da quinta edição em inglês, p. 320).

Figura 18 – Análise Dimensional para a erosão (Shields)

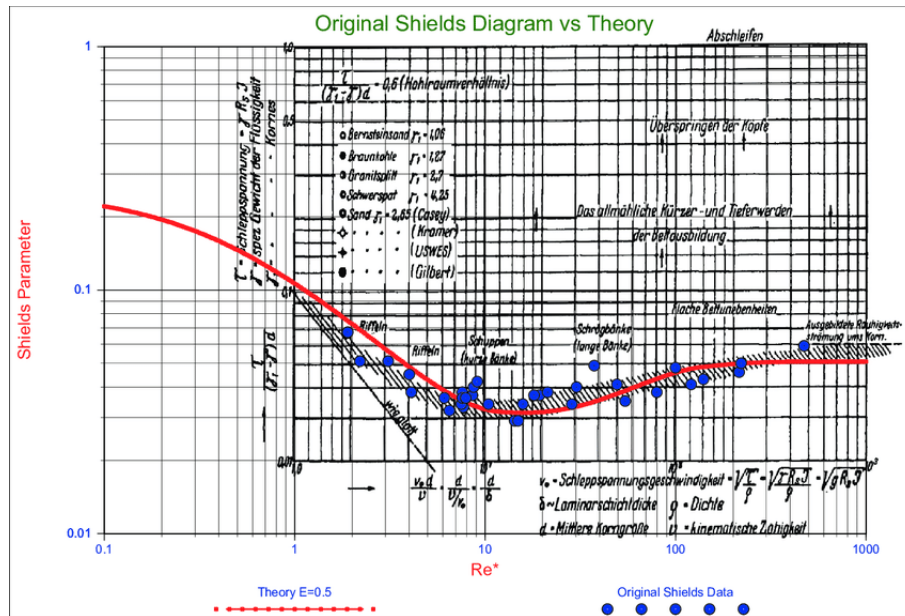
**Solution:** There are six variables ( $\tau$ ,  $g$ ,  $d$ ,  $\rho_p$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ) and three dimensions (M, L, T), hence we expect  $n - j = 6 - 3 = 3$  Pi groups. The author used ( $\rho$ ,  $g$ ,  $d$ ) as repeating variables:

$$\frac{\tau}{\rho g d} = fcn\left(\frac{\rho g^{1/2} d^{3/2}}{\mu}, \frac{\rho_p}{\rho}\right) \text{ Ans.}$$

The shear parameter used by Shields himself was based on *net* weight:  $\tau/[(\rho_p - \rho)gd]$ .

Fonte: Frank White, [112]

Figura 19 – Diagrama de Shields e curva obtida teóricamente



Fonte: S. Miedema, [126]

### 5.3 BARRAGENS: TEMPO DISPONÍVEL PARA EVACUAÇÃO

Stéphane Bonelli, do IRSTEA (Instituto Francês de Pesquisas em Ciência do Meio Ambiente e Tecnologias) lidera o grupo de trabalho europeu em erosão interna em reservatórios e barragens. Seria interessante comparar o resultado final que eles obtém, com o que resultaria do simples uso da Análise Dimensional. Um dos parâmetros utilizados é o coeficiente de erosão, relacionado ao limiar da tensão de cisalhamento de Shields, que discutimos na Seção anterior 5.1. Poderíamos talvez conseguir o critério de forma mais simples? De todo modo, com a ajuda de um matemático aplicado não seria muito complicado entender a modelagem feita por S. Bonelli e seus colaboradores.

#### Estimativa do tempo até o rompimento de uma barragem

No caso do rompimento por “piping erosion” (formação de um tubo de passagem de líquido, por debaixo da barragem) encontramos vários trabalhos a partir de 2006 do grupo de Bonelli, com estimativas para o tempo restante para o rompimento a partir dos primeiros sinais de alerta, ver [127], [128], [129].

A modelização utiliza as equações de Navier-Stokes para o escoamento dentro de um canal cujo diâmetro está alargando com o tempo. A idéia básica nestes trabalhos é incorporar a erosão de partículas na interface e seu transporte pelo próprio escoamento.

No modelo mais simples, em 1d, é obtida uma solução de similaridade, que permite obter uma expressão para o diâmetro do canal em função do tempo. Finalmente, se utiliza um critério (limiar) para o desabamento catastrófico do teto (Figs. 20 e 21).

A valor inicial do raio do canal pode ser inferido, por exemplo, a partir de observações visuais do aumento da vazão para o lado de fora, No caso de Teton (EUA, 1976) o valor de 2h30 coincide com o tempo decorrido após os primeiros relatos visuais de testemunhas de anormalidades.

Caso o coeficiente de erosão fosse uma ordem de grandeza menor, a estimativa teórica seria 20h. A conclusão é que 'e possível prever o rompimento com maior ou menor antecedência a partir de melhoras no monitoramento.

Para saber mais 29: Estimativa de tempo disponível para a evacuação

Figura 20 – Rompimento de barragens: tempo para evacuação

TABLE 2: WELL DOCUMENTED PIPING FAILURE CASES. THE FIRST FIVE COLUMNS ARE TAKEN FROM [23]. THE MAXIMUM RADIUS IS ESTIMATED BY USING EQ. (11)

Dam name and location	$H_{dam}$ (m)	$\Delta H_w$ (m)	$c_L$	$\Delta t_u$ (h)	$Q_{peak}$ ( $m^3 \cdot s^{-1}$ )	$R_u$ (m)
Ireland No. 5, Colo.	6.0	3.8	3.0	0.5	110	2.20
Lower Latham, Colo.	8.6	5.8	3.0	1.5	340	3.53
Frankfurt, Germany	9.8	8.2	3.0	2.5	79	1.42
Kelly Barnes, Ga.	11.6	11.3	1.7	0.5	680	3.66
French Landing, Mich.	12.2	8.5	2.8	1.16	929	5.30
Lake Latonka, Penn.	13.0	6.3	2.2	3	290	3.05
Lake Avalon, N.M.	14.5	13.7	2.9	2	2,320	6.94
Quail Creek, Utah	18.9	16.7	3.0	1	3,110	7.53
Hatchtown, Utah	19.2	16.8	2.3	4	3,080	7.40
Little Deer Creek, Utah	26.2	22.9	2.4	0.66	1,330	4.37
Bradfield, England	29.0	29.0	1.7	0.5	1,150	3.75
Apishapa, Colo.	34.1	28.0	2.4	3.25	6,850	9.51
Hell Hole, Calif.	67.1	35.1	1.5	0.75	7,360	9.30
Teton, Idaho	93.0	77.4	2.7	5.25	65,120	22.73

Fonte: Bonelli et al. [129]

Figura 21 – Lei de escala para o rompimento de barragem

The coefficient of erosion  $k_{er}$  can therefore serve as an indicator of the remaining time to breaching: a value of  $10^{-4}$  s/m would give a remaining time of 20 hours !

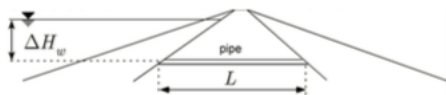


FIG. 3 – Sketch of the piping erosion in a dyke or a dam.

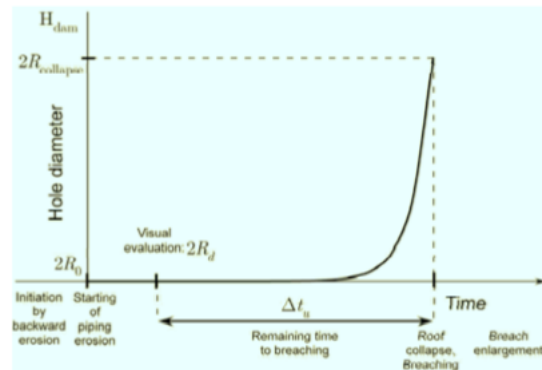


FIG. 4 – Evaluation of remaining time to breaching using the scaling law

Fonte: Bonelli et al. [128]

## Outros números adimensionais em fluidos (aparecem em grupos $\Pi$ ).

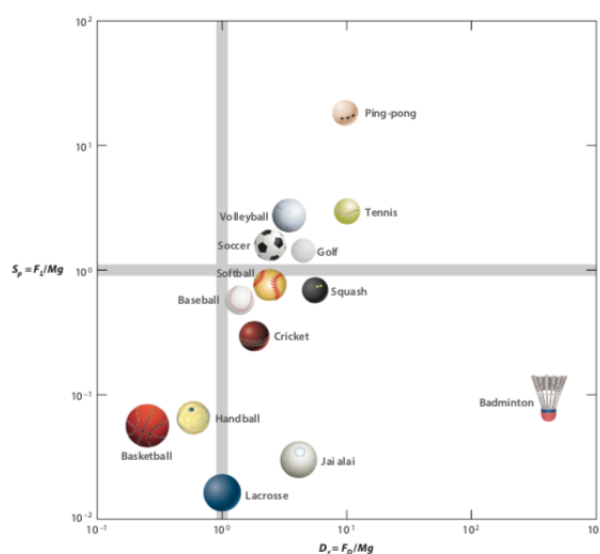
O *número de Froude* representa a razão entre forças inerciais e gravitacionais, importante para escoamentos com superfícies livres como ocorre em navios. O *número de Weber* representa a razão entre forças de inércia e a força da tensão superficial. Quando seu valor é pequeno, o efeito da tensão superficial é importante [130].

A micro/nanofluidica está em grande evidência hoje em dia. Fenômenos nestas escalas utilizam números adimensionais antes incomuns. Citamos do abstract da resenha de Squires e Quake [131], os seguintes:

Péclet number  $Pe$ , which concerns convective and diffusive transport; the capillary number  $Ca$  expressing the importance of interfacial tension; the Deborah, Weissenberg, and elasticity numbers  $De$ ,  $Wi$ , and  $El$ , describing elastic effects due to deformable microstructural elements like polymers; the Grashof and Rayleigh numbers  $Gr$  and  $Ra$ , describing density-driven flows; and the Knudsen number, describing the importance of noncontinuum molecular effects”.

São imensas as oportunidades de estudos em fluidos. Experiências interessantes podem ser feitas na Escola, ainda que de início com poucos recursos. Sugerimos para concluir a seção um tema fascinante: mecânica dos fluidos nos esportes! A Fig. 22 é do artigo de Christophe Cianet no prestigioso *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2015 [132].

Figura 22 – Balística nos esportes



Fonte: Sports ballistics [132]

A literatura na física dos esportes é vasta, ver por exemplo [133], [132], [134]. Um livro sobre a performance de atletas acaba de sair: [135].

Para saber mais 30: Esportes!

## 5.4 O CUSTO DA VELOCIDADE

Theodore von Kármán, considerado um dos maiores aerodinamicistas do século 20 (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Theodore\\_von\\_Kármán](https://en.wikipedia.org/wiki/Theodore_von_Kármán)) foi aluno de L. Prandtl em Göttingen, onde doutorou-se em 1908. Emigrou para os EUA em 1930, para escapar do emergente nazismo. von Kármán realizou sua carreira científica no Caltech, onde foi chamado para comandar o recém criado GALCIT (Guggenheim Aeronautical Laboratory). Mais tarde, foi um dos fundadores JPL (Jet Propulsion Laboratory) em Pasadena.

Em 1950 von Kármán e Gabrielli [136], produziram um famoso diagrama (Figs. 29 e 30) comparando o custo energético dos diversos modos de locomoção humana<sup>1</sup>.

O artigo é um clássico. Valeria a pena conferir o diagrama via Análise Dimensional.

### O custo da velocidade (Gabrielli e von Kármán 1950)

“The history of technique and engineering testifies to the irresistible urge of humanity toward increasing the speed of locomotion. Means of locomotion on the ground, on the surface of, and within water, through the air, and perhaps through empty space, compete in an ever-growing effort towards higher velocities. Obviously, there are limitations for every type of locomotion. At a certain speed, any particular type becomes so inefficient and uneconomical that it is unable to compete with more appropriate types.” (reproduzido do original, Gabrielli & von Kármán, 1950).

“Transport now consumes a large and increasing proportion of our energy budget. Efficient energy use is therefore of considerable importance, but a method of comparison over a wide range of speeds and different vehicle types is by no means obvious. In a classic paper written just over 50 years ago, Gabrielli and von Kármán suggested using specific traction force (or conversely specific resistance) to make such comparisons ... A further examination of this revealed that any form of transport is an economic balance between the cost of the transport and the value of the time that goods or people are incapacitated for during transit. As Gabrielli and von Kármán also predicted travel trends 50 years into the future, it is now opportune to revisit and update their work.” ([137])

O tema também é discutido em em [138] e em

<https://trainsboatsnplanes.wordpress.com/2010/01/07/the-price-of-speed/>

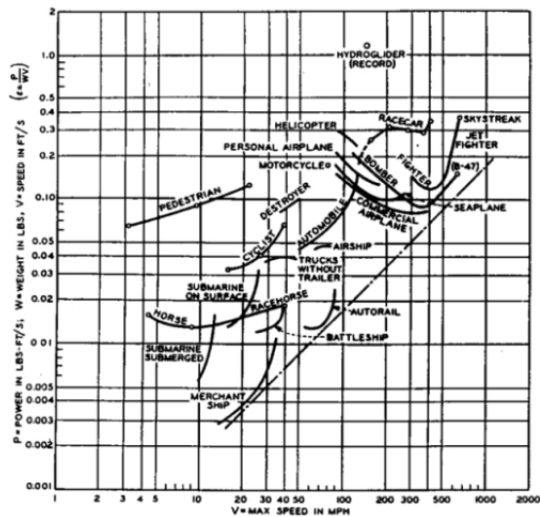
A Royal Aeronautical Society (UK) promoveu em 2016 uma conferência.

[https://www.aerosociety.com/Assets/Docs/Events/Conferences/2016/809/809\\_Bios.pdf](https://www.aerosociety.com/Assets/Docs/Events/Conferences/2016/809/809_Bios.pdf)

Para saber mais 31: O custo da velocidade

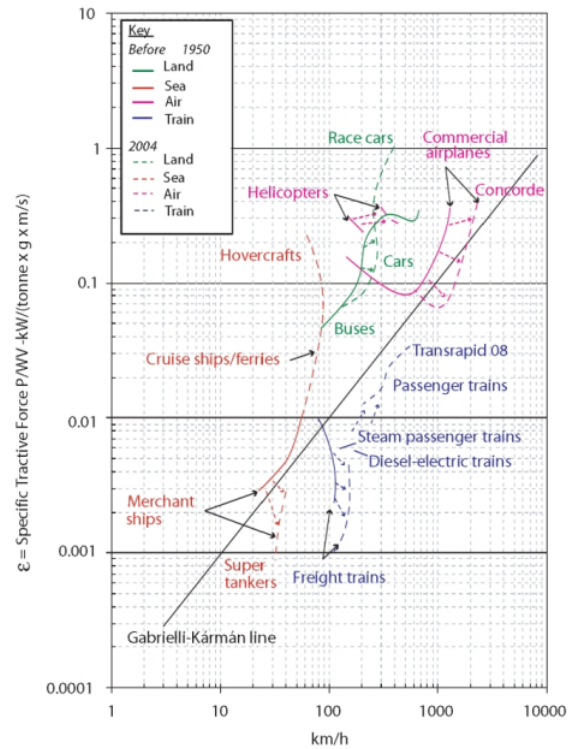
<sup>1</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Von\\_KármánGabrielli\\_diagram](https://en.wikipedia.org/wiki/Von_KármánGabrielli_diagram)

Figura 23 – O preço da velocidade/original]



Fonte: Gabrielli e von Kármán [136]

Figura 24 – O preço da velocidade/revisitada



Fonte: Yong et al. [137]

## 5.5 BIOLOCOMOÇÃO

Este tema não é novo: Aristóteles já tinha pensado no assunto<sup>2</sup>. Pode-se argumentar, das bactérias aos animais terrestres, aos peixes e às aves, que todos os seres vivos se locomovem com um objetivo principal: fazer sexo<sup>3</sup>. Algumas referências básicas são [139], [140], [141].

O movimento de seres vivos em fluidos tem tido um tamanho desenvolvimento, que uma palavra-chave foi cunhada por Sir James Lighthill, um dos maiores nomes do assunto: “biofluidynamics”. James Lighthill faleceu em 1988, aos 74 anos, fazendo o que mais gostava: nadando em volta da ilha de Sark, perto da Normandia<sup>4</sup>.

As seguintes referências são muito técnicas, colocadas apenas para se ter uma idéia do interesse científico atual: [143], [144], [145], [146], [147], [148],[149], [150], [151], [152].

<sup>2</sup> *De Motu Animalium*, traduzido por A. S. L. Farquharson, disponível em <http://etext.library.adelaide.edu.au/a/aristotle/motion/>.

<sup>3</sup> <https://newhumanist.org.uk/articles/5154/without-the-evolution-of-locomotion-there-would-be-no-sex-no-photosynthesis-no-ecology>

<sup>4</sup> Ver [142] e também <https://www.ams.org/notices/199910/mem-lighthill.pdf>, [https://en.wikipedia.org/wiki/James\\_Lighthill](https://en.wikipedia.org/wiki/James_Lighthill), <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Lighthill.html>.

Recomendamos o belo livro de S. Vogel, [153], que pode ser lido junto com um professor de biologia. O Prof. John Bush, do MIT em mensagem ao orientador recomendou estes dois textos:

*Why size matter*, de J. Tyler Bonner [154]

*On size and life*, de Bonner e McMahon [155].

Mencionamos também um livro bastante recente:

*How to Walk on Water and Climb up Walls Animal Movement and the Robots of the Future*, por D. Hu [156]

<https://press.princeton.edu/titles/13247.html>

Para saber mais 32: Locomoção de animais



## Quem pula mais alto: o rato jerboa ou um canguru?

Para nosso público (principalmente alunos do segundo grau e seus professores) uma tarefa muito interessante é ler o primeiro capítulo, que tem apenas onze páginas, intitulado “Some consequences of scale”, do delicioso livro

*Mathematical ideas in biology*, por John Maynard Smith [157].

Alguns exemplos são acessíveis até aos alunos do primeiro grau.

Um deles é o problema que foi o que mencionamos na introdução, e que aparece na capa do livro: qual altura um mamífero pode alcançar pulando? Maynard Smith propõe uma disputa entre o ratinho jerboa e o canguru (Fig. 23). Solução na próxima página (Fig. 24).

Vejam o vídeo

<https://www.sciencefriday.com/segments/jump-in-jerboas/>

Também vale a pena ver este vídeo comparando quanto pulam os jogadores de basquete Allen Iverson (1.83m) e LeBron James (2.03m):

[https://www.youtube.com/watch?v=PUzHav\\_k4fU](https://www.youtube.com/watch?v=PUzHav_k4fU)

Para nosso consolo em fase ruim, vejamos também o gol de Romário contra a Suécia em 1994, e o gol de Pelé, em 1970, contra a Itália.

<https://www.youtube.com/watch?v=SuUCXWFZt6o>

<https://www.youtube.com/watch?v=QPzNStFGno>

Para saber mais 33: Quem pula mais alto?

Figura 25 – O pulo do rato jerboa

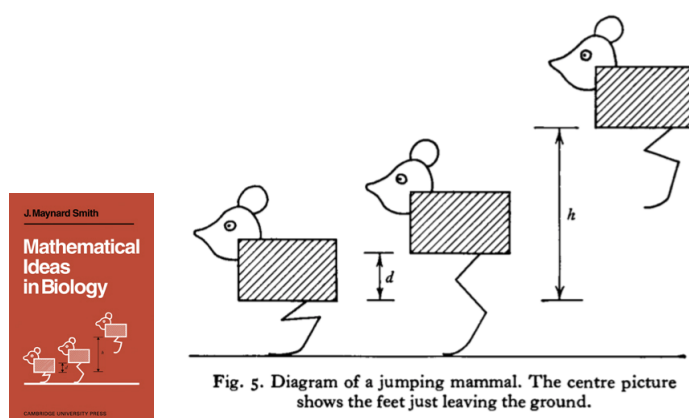


Fig. 5. Diagram of a jumping mammal. The centre picture shows the feet just leaving the ground.

Fonte: Maynard Smith [157]

Figura 26 – Análise Dimensional do salto dos mamíferos

**(iii) *Jumping***

**Fig. 5 shows three successive stages in a jump. The work done by the muscles is  $Td$ ; i.e. it is equal to the product of the force exerted on the ground and the distance through which the force moves. Then if the animal has mass  $m$ ,**

$$mgh = Td.$$

**$T$  is limited by the mechanical strength of the limb; i.e.  $T \propto L^2$ , and hence the height jumped,**

$$h = \frac{Td}{mg} \propto \frac{L^2 \times L}{L^3}.$$

**Hence  $h$  does not vary with size. In fact, a jerboa can jump approximately as high as a large kangaroo.**

Fonte: Maynard Smith [157]

**A fraqueza dos gigantes (Galileu)**

Como mencionamos na introdução, a relação entre o stress mecânico máximo (“mechanical loading”) exercida pela musculatura com a área da seção transversal de um osso já tinha sido observada por Galileu, em 1600. Há inúmeros artigos sobre o tema, inclusive na literatura biomédica. Aleatoriamente citamos estes três: [158], [159], [160].

Encontramos um curso de Física online que nos pareceu muito interessante, com um capítulo sobre Galileu e a “fraqueza dos gigantes”.

<http://galileo.phys.virginia.edu/classes/609.ra15q.fall04/>

<http://galileo.phys.virginia.edu/classes/609.ra15q.fall04/LecturePDF/L14-GALILEOSCALING.pdf>

<http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109.mf1i.fall03/lectures09.pdf>

<http://galileoand Einstein.physics.virginia.edu>

<http://galileoand Einstein.physics.virginia.edu/lectures/lecturelist.html>

<http://galileoand Einstein.physics.virginia.edu/lectures/scaling.html>

Para saber mais 34: A fraqueza dos gigantes

### Flutuando na água usando a tensão superficial (um pouco mais avançado)

A *tensão superficial*, denotada geralmente pela letra grega  $\sigma$  (sigma) tem dimensão de força por comprimento. Um objeto que toca a superfície ar-água (mas não se molha) deforma esta superfície formando um *menisco* (Fig. 25). Na estimativa que vamos fazer, iremos supor (um tanto arbitrariamente, pois o valor correto pode ser deduzido) que o ângulo da depressão na superfície da água com o plano horizontal na curva de contato seja de uns trinta graus.

Qual seria o perímetro de uma folha (redonda) que permitiria a um homem de 70kg ficar na água apenas sob o efeito da tensão superficial? Ignoremos o empuxo de Arquimedes, ou seja, desprezemos o efeito da parte abaixo do nível da água. Considere o círculo  $C$  que faz a borda do contato na água. A força resultante da tensão superficial calculada ao longo do perímetro  $C$  é dada por uma “integral de linha”  $\oint_C \sigma \cdot \hat{n} dl$ . Não se assustem, não teremos quase conta para fazer. Aqui  $\hat{n}$  é o vetor normal externo à curva, mas *tangente à superfície do menisco*.

i) Estime o perímetro. Informação: na interface água-ar  $\sigma = 70\text{dyn/cm}$ . (1 dyne =  $1.0 \times 10^{-5}$  Newtons;  $g \sim 10\text{m/seg}^2$ ).

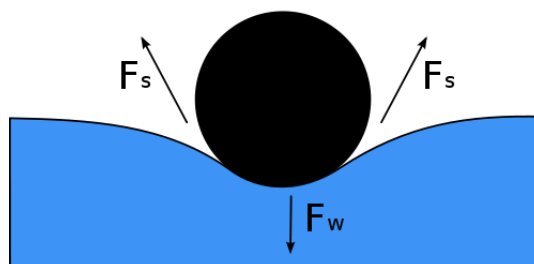
ii) Que tamanho deveria ter o homem, para que possa ficar de pé na água mantendo a proporção dos pés em relação ao corpo humano?

A solução é dada na próxima página. Que diria Leonardo da Vinci (Fig. 27)?

iii)\* Opcional: Leia sem entrar nos detalhes o verbete da wikipédia [http://en.wikipedia.org/wiki/Surface\\_tension](http://en.wikipedia.org/wiki/Surface_tension) Qual dos fenômenos mais lhe chamou a atenção?

Para saber mais 35: Flutuando na água

Figura 27 – Tensão superficial



Fonte: [http://en.wikipedia.org/wiki/Surface\\_tension](http://en.wikipedia.org/wiki/Surface_tension)

## Um amigo do Brasil

John Bush, professor do Departamento de Matemática do MIT, veio ao Brasil várias vezes pelo programa Ciência sem Fronteiras. Torce pelo Botafogo.

Sabe muito sobre biolocomoção. Vale a pena mostrar na escola alguns vídeos de sua página

<https://math.mit.edu/~bush/>

Nos artigos [161], [162], em parceria com seu colaborador David Hu, estudou como os insetos aproveitam a tensão superficial, ver <http://hdl.handle.net/1721.1/60845>. Encontramos também sobre este tema um artigo de revisão de D. Vella [163].

## Solução (Fig. 26)

Figura 28 – O evangelho segundo John

*“And when the disciples saw him walking on the sea, they were troubled, saying, It is a spirit; and they cried out for fear.”*

-Matthew 14:26, King James Version

Barring divine intervention, it is impossible for man to walk on water without the aid of flotation devices, such as those envisaged by Leonardo da Vinci (**Figure 1g**). As we have seen, the vertical force balance on water walkers requires that their weight be supported by either surface tension or inertial forces associated with their feet slapping the surface. A man of mass  $M = 70$  kg would require feet of perimeter  $P = Mg/\sigma \sim 10$  km to be supported by surface tension. If he relies alternatively on the inertial forces generated by slapping his feet at a mean speed  $U$ , he would require feet with area  $A = Mg/(\rho U^2)$ . Even generous estimates for  $U \sim 10$  m/s suggest that the area of a human's feet must be of order  $1$  m<sup>2</sup> in order for him to walk on water. However, as for all creatures that generate weight support by slapping the surface, thrust generation is not everything: Power generation and stability are

Fonte: John Bush ([161], page 358).

Figura 29 – Um desenho de Leonardo da Vinci.



Fonte: Fonte: [161]

## A chuva mata o mosquito?

O artigo “Mosquitoes survive raindrop collisions by virtue of their low mass” [164] mostra que há apenas uma pequena absorção de energia, portanto o mosquito sobrevive. Há também um efeito probabilístico. Seria possível fazer uma discussão simplificada por AD?

Para saber mais 36: Porquê a chuva não mata o mosquito?

## Secando sem toalha (Fig. 28)

Leia estes posts!!! Conseguiríamos aplicar análise dimensional?

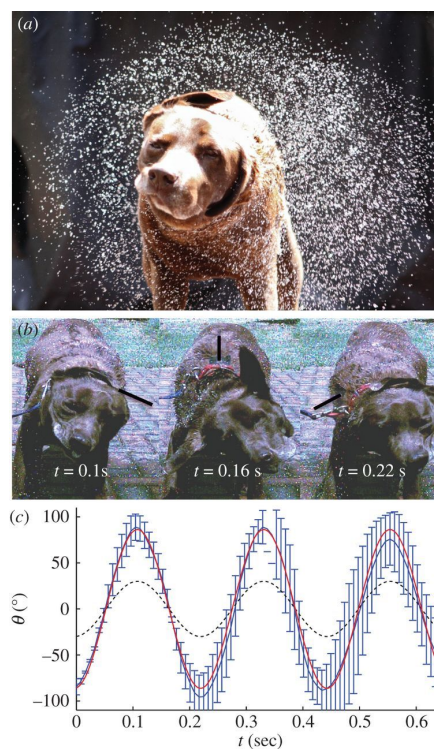
<https://www.nature.com/news/scientists-do-the-wet-dog-shake-1.11177>

<https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rsif.2012.0429>

<https://arxiv.org/abs/1010.3279>

Para saber mais 37: Como o cachorro molhado se seca (e outros mistérios)?

Figura 30 – Como o cachorro se seca?



Fonte: Dickerson [165]

## 5.6 MAIS TEMAS ... PARA O FUTURO

### Análise Dimensional na Física Moderna

Como discutimos, as constantes fundamentais da Natureza estarão sendo usadas diretamente na definição das sete grandezas de base, e vale a pena ver esta página do NIST, especialmente sobre o desenvolvimento histórico:

<https://physics.nist.gov/cuu/Constants/introduction.html>

e na Wikipedia,

[https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensionless\\_physical\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensionless_physical_constant)

Estes artigos podem ser examinados: [2], [166], [167], [105].

### Análise Dimensional em Robótica e Controle

Nesta dissertação de doutorado [168] é mostrado como a análise dimensional pode ser útil em controle e automação, fundamentais na Engenharia moderna. É disponível em

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.13.2546&rep=rep1&type=pdf>

### Análise Dimensional em Economia e Finanças

Encontramos na web esta tentativa de situar o tema: [169]. Mas como ocorre com frequência, também em relação a Análise Dimensional os economistas parecem sofrer da chamada “inveja da física”<sup>5</sup>. De todo modo, o esforço é louvável. Encontramos por exemplo um artigo interessante usando AD nas medidas de aversão ao risco: [170] .

#### Gasto de energia das criptomoedas

<https://www.theguardian.com/technology/2018/jan/17/bitcoin-electricity-usage-huge-climate-cryptocurrency>

<https://www.businessinsider.com/bitcoin-mining-electricity-usage-2017-11>

Para saber mais 38: Bitcoin

## MUITAS TAREFAS PARA O FUTURO...

Acreditamos ter apresentado nesta monografia um número bastante razoável de aplicações interessantes da Análise Dimensional. Esperamos que o leitor possa tirar proveito, e o mais importante: buscar suas próprias aplicações. Passemos assim às conclusões.

<sup>5</sup> <https://aeon.co/ideas/few-things-are-as-dangerous-as-economists-with-physics-envy>, [https://en.wikipedia.org/wiki/Physics\\_envy](https://en.wikipedia.org/wiki/Physics_envy)

## 6 CONCLUSÃO

Nossa idéia (para mais adiante) é a de apresentarmos uma proposta para um Livro Aberto sobre Análise Dimensional. Teríamos como inspiração (e alerta) as sugestões dadas por Richard Feynman, prêmio Nobel de Física em 1965, durante suas visitas ao Brasil nas décadas de 1950 e 1960. Feynman lamentava o estímulo ao desempenho meramente formal que prevalecia em nossas escolas. O que Feynman talvez não tenha se dado conta é que, infelizmente, a pressão de provas e os vários concursos (especialmente o ENEM), forçam ao aluno a se adestrar para a resolução de problemas, em grande número deles sem saber sequer do que se trata realmente o assunto.

Um dos conselhos que Feynman nos deu naquela época foi: **“observem a água”!**

A este respeito vale a pena ler os artigos de Ildeu Moreira, Nestor Caticha e Nelson Studard no volume da Revista Brasileira do Ensino de Física *Relembrando os 100 anos de nascimento de Feynman* (RBEF, vol.40: 4, 2018, <http://www.sbfisica.org.br/rbef/>).

Sem querer desdenhar os conselhos de Feynman aos brasileiros, gostaríamos apenas de mencionar que a “decoreba” e o uso dos métodos mnemônicos não é exclusividade nossa. Futuros médicos nos EUA precisam passar numa prova chamada MCAT (Medical College Admission Test, [https://en.wikipedia.org/wiki/Medical\\_College\\_Admission\\_Test](https://en.wikipedia.org/wiki/Medical_College_Admission_Test)).

Passemos os olhos nestes links: é assustador, patético, o modo como os estudantes precisam se preparar para provas de admissão.

### **A força é má ( $F = ma$ ) (tanto aqui como nos EUA)**

<https://www.passeidireto.com/arquivo/42983350/dicas-para-memorizar-formulas-de-fisica>

<https://www.sofisica.com.br/conteudos/FormulasEDicas/macetes/macetes.php>

<https://www.freemcatprep.com/2010/01/mcat-formula-sheet.html>

<https://itunes.apple.com/us/app/mcat-mnemonics/id793141174?mt=8>

<https://www.princetonreview.com/med-school-advice/mcat-study-guide/mcat-memorization-tips>

Nesta monografia tentamos apresentar um contraponto a este tipo de treinamento, mas reconhecemos que ainda estamos longe. Falta o contato direto com experimentos. Mas pelo menos tentamos mostrar aqui que a Análise Dimensional é um tema capaz de estimular, por sua própria natureza, um ensino mais fundamentado em experimentação, e que pode colocar em contato todas as Ciências, tanto as Exatas como as da Vida e as Humanas. A este respeito observamos que a CAPES vinha fazendo avaliações periódicas dos Mestrados Profissionalizantes em Ensino, mas o que pudemos perceber, ainda não foi possível promover uma integração entre os programas<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> <https://capes.gov.br/images/stories/download/avaliacao/relatorios-finais-quadrienal-2017/20122017-ENSINO-quadrienal.pdf>

## 6.1 FEYNMAN NO BRASIL

Ildeu Moreira, atual presidente da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, assim traduziu em [171] um trecho do livro de Feynman, *Surely You're Joking*):

“Em relação à educação no Brasil, tive uma experiência muito interessante. Eu estava dando aulas para um grupo de estudantes que se tornariam professores, uma vez que àquela época não havia muitas oportunidades no Brasil para pessoal qualificado em ciências. Esses estudantes já tinham feito muitos cursos, e esse deveria ser o curso mais avançado em eletricidade e magnetismo - equações de Maxwell, e assim por diante. Descobri um fenômeno muito estranho: eu podia fazer uma pergunta e os alunos respondiam imediatamente. Mas quando eu fizesse a pergunta de novo - o mesmo assunto e a mesma pergunta, [de outra maneira] até onde eu conseguia, eles simplesmente não conseguiam responder! Por exemplo, uma vez eu estava falando sobre luz polarizada e dei a eles alguns filmes polaroide (...) Finalmente descobri que os estudantes tinham decorado tudo, mas não sabiam o que queria dizer. Quando eles ouviram 'luz que é refletida de um meio com um índice', eles não sabiam que isso significava um material como a água. Eles não sabiam que a 'direção da luz' é a direção na qual você vê alguma coisa quando está olhando, e assim por diante. Tudo estava totalmente decorado, mas nada havia sido traduzido em palavras que fizessem sentido. Assim, se eu perguntasse: 'O que é o Ângulo de Brewster?', eu estava entrando no computador com a senha correta. Mas se eu digo: 'Observe a água', nada acontece - eles não têm nada sob o comando 'Observe a água.'"

Há também uma palestra de Feynman aos calouros do Caltech, muito citada :

“In the South Seas there is a Cargo Cult of people. During the war they saw airplanes land with lots of good materials, and they want the same thing to happen now. So they've arranged to make things like runways, to put fires along the sides of the runways, to make a wooden hut for a man to sit in, with two wooden pieces on his head like headphones and bars of bamboo sticking out like antennas - hes the controller - and they wait for the airplanes to land. They're doing everything right. The form is perfect. It looks exactly the way it looked before. But it doesn't work. No airplanes land. So I call these things Cargo Cult Science, because they follow all the apparent precepts and forms of scientific investigation, but they're missing something essential, because the planes don't land."

(Richard Feynman, 1974)

Sobre o que Feynman chamava de “cargo cult science”, o leitor pode conhecer mais detalhes nestas páginas:

<http://calteches.library.caltech.edu/51/2/CargoCult.htm>

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Culto\\_à\\_carga](https://pt.wikipedia.org/wiki/Culto_à_carga)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Cargo\\_cult\\_science](https://en.wikipedia.org/wiki/Cargo_cult_science)

<https://www.damninteresting.com/john-frum-and-the-cargo-cults/>



## 6.2 REFLEXÃO FINAL

Modestamente, apresentamos aqui o piloto de uma proposta que pretendemos submeter ao projeto Livro Aberto (<https://www.umlivroaberto.com/wp/>).

“Este é um esforço para produzir livros didáticos de Matemática com licença aberta a partir de um trabalho colaborativo envolvendo matemáticos, professores universitários e professores da Educação Básica. Um princípio fundamental desta iniciativa é que sua produção configure uma proposta pedagógica ancorada e acompanhada por pesquisa científica em Ensino de Matemática. O projeto tem também compromisso com a formação e o desenvolvimento profissional de professores. Em particular, pela composição característica da equipe, destaca-se o entendimento do potencial do projeto para enfrentar um reconhecido desafio: estreitar o diálogo entre a realidade e as demandas próprias da prática docente e a formação acadêmica do professor.”

Sem querer fazer críticas injustas (muito pelo contrário!), escolhemos no Apêndice F, exemplos do tipo de “cargo cult science” que Feynman comentava. São exercícios típicos de vestibular, nas apostilas de Ivan Guilhon Mitoso Rocha e do Prof. Prof. Fernando Valentim<sup>2</sup> e no livro texto *Fundamentos da Física*, vol. 3, capítulo 21, de Nicolau Gilberto Ferraro, Paulo Toledo Soares e Francisco Ramalho Junior [172].

Gostaria de provocar uma reflexão final, motivada por minhas discussões com o orientador. Este tipo de problemas de vestibular exemplifica tudo o que Feynman dizia sobre o Ensino de Ciências no Brasil.

Porém atribuir a culpa aos alunos ou aos professores pelos desempenhos ruins do Brasil nas avaliações tipo PISA<sup>3</sup> nos parece uma crueldade: pois o nosso sistema educacional é balizado prioritariamente (se não exclusivamente) em concursos. Poder-se-á no futuro encontrar uma outra forma que premie mérito e preparação para concursos, ao mesmo tempo com Ensino mais lúdico e mais formativo?

Para diminuir a desigualdade de oportunidades será preciso priorizar o Ensino Público. O BNCC (ver Apêndice G para o que diz respeito à Análise Dimensional) poderia ser um bom passo, se for implementado com recursos financeiros necessários, professores preparados, devidamente remunerados, com carga horária compatível com a qualidade, e valorizados socialmente.

O que todos desejamos que possa acontecer em nosso país é sairmos de vez do estágio da “cargo cult science”. O avanço científico do Brasil a partir da criação do CNPQ e da CAPES no pós guerra já nos dá a massa crítica necessária para esta transição.

---

<sup>2</sup> Disponíveis em <https://rumoaoita.com/materia/analise-dimencional/>

<sup>3</sup> <http://www.oecd.org/pisa/>

## REFERÊNCIAS

- [1] BUREU INTERNATIONAL DES POIS ET MESURES. <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>, acesso 21/7/2019.
- [2] DA SILVA, F. W. O ensino da análise dimensional. *Física na Escola*, v. 14, n. 1, p. 55–58, 2016.
- [3] VASCHY, A. Sur les lois de similtude on physique. *Annales télégraphiques*, v. 19, p. 25–28, 1892.
- [4] BUCKINGHAM, E. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Phys. Rev.*, v. 4, p. 345–376, Oct 1914.
- [5] BLUMAN, G.; ANCO, S. C. *Symmetry and integration methods for differential equations*. Springer-Verlag New York, 2002. v. 154 of *Applied Mathematical Sciences*.
- [6] BERBERAN-SANTOS, M. N.; POGLIANI, L. Two alternative derivations of Bridgman’s theorem. *Journal of Mathematical Chemistry*, v. 26, p. 255–261, 1999.
- [7] EINSTEIN, A. Elementare betrachtungen ueber die thermische molekularbewegung in festen koepern. *Annalen der Physik*, v. 35:9, p. 679–694, 1911.
- [8] CARNEIRO, F. L. L. B. On the use, by Einstein, of the principle of dimensional homogeneity, in three problems of the physics of solids. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 72, p. 591–596, 2000.
- [9] POWELL, A. Lord Rayleigh’s foundations of aeroacoustics. *Journal of The Acoustical Society of America - J ACOUST SOC AMER*, v. 98, p. 1839–1844, 10 1995.
- [10] STRASBERG, M. Comment on “Lord Rayleigh’s Foundations of Aeroacoustics”. *J. Acoust. Soc. Am.*, v. 100, n. 4, p. 1929, 1996.
- [11] RAYLEIGH. (Strutt, J. B.) The Principle of Similitude. *Nature*, London, v. 95, p. 65–68, March 1915 (<https://doi.org/10.1038/095066c0>).
- [12] THOMPSON, D. W. Galileo and the principle of similitude. *Nature*, London, v. 95, p. 426–427, 1915.
- [13] GALILEI, G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*. 1638 (em italiano, disponível na biblioteca virtual do museu <https://www.museogalileo.it>, ou em <http://www.fmboschetto.it/didattica/dimostrazionimatematiche.pdf>, tradução para o inglês disponível online em <http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/>).
- [14] CARNEIRO, F. L. Galileu e a teoria da semelhança física. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Madrid*, v. 59, n. 4, p. 525–553, 1965.
- [15] FOURIER, J. L. *Théorie analytique de la chaleur* (disponível em <https://archive.org/details/thorieanalytiqu00fourgoog/page/n6>). Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.

- [16] MAXWELL, J. C. *The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell. vol. 3.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [17] FORFAR, D. O. Maxwell on physical standards, [http://www.clerkmaxwellfoundation.org/newsletter\\_2017\\_autumn.pdf](http://www.clerkmaxwellfoundation.org/newsletter_2017_autumn.pdf).
- [18] MARTINS, R. D. A. A busca da ciência a priori no final do século xviii e a origem da análise dimensional. In: . Editors ARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C., P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. E. Associação de Filosofia e História da Ciência do Cone Sul (AFHIC), c2004 (<http://www.afhic.com/wp-content/uploads/2017/11/02-de-Andrade-Martins-y-otros-Filosofia-e-Historia-da-Ciencia-no-Cone-Sul-III-Encontro.pdf>). p. 391–402.
- [19] STERRETT, S. G. *Similarity and dimensional analysis, in philosophy of technology and engineering sciences, ed. by Anthonie Mejer.* Amsterdam: Elsevier/North Holland (disponível online em <https://soar.wichita.edu/handle/10057/10712>), 2009. p. 799–823.
- [20] STERRETT, S. G. Physically similar systems: A history of the concept, disponível em <https://philarchive.org/archive/stepss-2>. In: MAGNANI, L.; BERTOLOTI, T. W. (Eds.) *Springer Handbook of Model-Based Science.* Dordrecht Heidelberg London New York: Springer, 2017. p. 377–412.
- [21] STERRETT, S. Theory of dimensions (preprint, <http://philsci-archive.pitt.edu/14093/>). October 2017.
- [22] REDONDO, F. G. *Historia del Análisis Dimensional.* 2000 (<http://oa.upm.es/52425/>). Tese (Doutorado em Física) - Universidad Politécnica de Madrid, Programa de Doctorado, Análisis Dimensional. Aplicaciones a la Física, la Ingeniería y la Arquitectura, 2000 (<http://oa.upm.es/52425/>).
- [23] BRIDGMAN, P. W. *Dimensional analysis.* New Haven: Yale University Press, 1922 (1963).
- [24] MURNAGHAN, F. D. Book review: Dimensional analysis, by P. Bridgman. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 30, p. 277, 1924.
- [25] RIVADULLA, A. Unidades físicas de José Muñoz del Castillo, primer libro de análisis dimensional en la historia. *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía*, v. 22, n. 1, p. 65–80, 2017 (disponível em <http://www.revistas.uma.es/index.php/contrastes/article/view/3415>).
- [26] PALACIOS, J. *Análisis dimensional.* Madrid: Madrid : Espasa-Calpe, 1964.
- [27] DE POSADA, G.; FRANCISCO; GONZÁLEZ REDONDO, F. Génesis histórica, enunciado y evolución del análisis dimensional de Julio Palacios. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, v. 25, n. 53, p. 399–424, 01 2002.
- [28] CARNEIRO, F. *Análise dimensional e teoria da semelhança e dos modelos físicos, 2da edição.* Editora UFRJ, 1996.
- [29] NARASIMHAN, T. N. Central ideas of Edgar Buckingham (1907), a century later. *Vadoso Zone Journal*, v. 6, n. 4, p. 687–693, 12 2007.

- [30] NIMMO, J. R.; LANDA, E. R. The soil physics contributions of Edgar Buckingham. *Soil Science Society of America Journal*, v. 69, n. 2, p. 328–342, 2005.
- [31] COSTA-FÉLIX, R. P. B.; MENDES, A. O novo Sistema Internacional de Unidades (SI), disponível em [www.metrologia.org.br/wpsite/wp-content/uploads/2019/07/cartilha\\_O\\_novo\\_SI\\_29.06.2029.pdf](http://www.metrologia.org.br/wpsite/wp-content/uploads/2019/07/cartilha_O_novo_SI_29.06.2029.pdf).
- [32] CARR, L. Learning to be astonished (<https://physicsworld.com/a/learning-to-be-astonished/>). *Physics World*, May 1, 2019.
- [33] MORAES, F. Abraham Palatnik: um pioneiro da arte tecnológica. In: *Retrospectiva Abraham Palatnik: a trajetória de um artista inventor*. Itau Cultural, 1999.
- [34] CREASE, R. P. Philosophy of Physics (<https://iopscience.iop.org/book/978-0-7503-1542-5>). 2017.
- [35] MITCHELL, D. J.; TAL, E.; CHANG, H. The making of measurement: Editors' introduction. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 1–7, 2017.
- [36] QUINN, T. From artefacts to atoms - a new SI for 2018 to be based on fundamental constants. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 8 – 20, 2017. The Making of Measurement.
- [37] MARI, L.; CARBONE, P.; GIORDANI, A.; PETRI, D. A structural interpretation of measurement and some related epistemological issues. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 46 – 56, 2017. The Making of Measurement.
- [38] MITCHELL, D. J. What's nu? a re-examination of Maxwell's 'ratio-of-units' argument, from the mechanical theory of the electromagnetic field to 'on the elementary relations between electrical measurements'. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 87 – 98, 2017.
- [39] BASSO, A. The appeal to robustness in measurement practice. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 57 – 66, 2017.
- [40] DE COURTENAY, N.; GRÉGIS, F. The evaluation of measurement uncertainties and its epistemological ramifications. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 21 – 32, 2017.
- [41] TAL, E. Calibration: Modelling the measurement process. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 33 – 45, 2017.
- [42] FALCONER, I. No actual measurement ... was required: Maxwell and cavendish's null method for the inverse square law of electrostatics. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 74 – 86, 2017.
- [43] ISAAC, A. M. Hubris to humility: Tonal volume and the fundamentality of psychophysical quantities. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, v. 65-66, p. 99 – 111, 2017.
- [44] COSTA-FÉLIX, R. P. B.; BERNARDES, A. T. *Metrologia vol. 1: Fundamentos*. Brasport, eBook Kindle, Amazon, 2017.

- [45] CARNEIRO, F. L. L. B. *Análise dimensional e teoria da semelhança e dos modelos físicos - seminários dos alunos da turma de 1994, da COPPE/UFRJ/Programa de Engenharia Civil*, [coordenado por] Fernando Lobo Carneiro. COPPE/UFRJ, 1994.
- [46] CARNEIRO, F. L. L. B. *Análise dimensional e teoria da semelhança e dos modelos físicos - seminários dos alunos da turma de 1995, da COPPE/UFRJ/Programa de Engenharia Civil*, [coordenado por] Fernando Lobo Carneiro. COPPE/UFRJ, 1995.
- [47] CARNEIRO, F. L. L. B. *Análise dimensional e teoria da semelhança dos modelos físicos - seminários dos alunos da turma de 1997, da COPPE/UFRJ/Programa de Engenharia Civil* [coordenado por] Fernando Lobo Carneiro. COPPE/UFRJ, 1997.
- [48] CARNEIRO, F. L. L. B. *Análise dimensional e teoria da semelhança e dos modelos físicos - seminários dos alunos da turma de 1998, da COPPE/UFRJ /Programa de Engenharia Civil*, [coordenado por] Fernando Lobo Carneiro. COPPE/UFRJ, 1998.
- [49] CARNEIRO, F. L. L. B. *Análise dimensional e teoria da semelhança e dos modelos físicos - seminários dos alunos da turma de 1999, da COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil*, [coordenado por] Fernando Lobo Carneiro. COPPE/UFRJ, 1999.
- [50] COSTA, T. *Vida e obra de Lobo Carneiro*. COPPE, UFRJ, 2005.
- [51] BECKER, J. A. Obituary: Percy W. Bridgman. *Physics Today*, v. 14, n. 10, p. 78, 1961.
- [52] MCMILLAN, P. F. Pressing on: The legacy of Percy W. Bridgman. *Nature Materials*, v. 4, p. 715 EP –, 10 2005.
- [53] BUNDY, F. P. Book review: Science and cultural crisis: An intellectual biography of Percy Williams Bridgman, by Mila Walter. *Physics Today*, v. 44, n. 5, p. 63–64, 1991.
- [54] KEMBLE, E. C.; BIRCH, F. *Percy Williams Bridgman (1882-1961)*. National Academy of Sciences, Washington D.C., 1970.
- [55] SWANN, W. F. G. Book review: Reflections of a physicist: by Percy Williams Bridgman. *Journal of the Franklin Institute*, v. 250, n. 2, p. 181–182, 1950.
- [56] COHEN, I. B. Book review: Maila Walter. Science and Cultural Crisis: An intellectual biography of Percy Williams Bridgman. *Journal of the History of the Behavioral Sciences*, v. 29, n. 4, p. 393–395, 1993.
- [57] BURROWES, M.; FARINA, C. Sobre o pêndulo isócrono de Christian Huygens. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, p. 175–179, 2005.
- [58] BICH, W.; COX, M.; MICHOTTE, C. Towards a new GUM - an update. *Metrologia*, v. 53, n. 5, p. S149–S159, 2016.
- [59] LIRA, I. The GUM revision: the Bayesian view toward the expression of measurement uncertainty. *European Journal of Physics*, Bristol, v. 37, n. 2, p. 025803, 2016.
- [60] GÖRTLER, H. Zur gesehichte des  $\pi$ -theorems. *ZAMM*, v. 55, p. 3–8, 1975.
- [61] HAPP, W. W. Computer-oriented procedures for dimensional analysis. *Journal of Applied Physics*, New York, v. 38, p. 3918–3926, 1967.

- [62] DEL ROSARIO, Z.; LEE, M.; IACCARINO, G. Lurking variable detection via dimensional analysis. *SIAM/ASA J. Uncertainty Quantification*, v. 7, n. 1, p. 232–259, 2019.
- [63] CONSTANTINE, P. G.; DEL ROSARIO, Z.; IACCARINO, G. Data-driven dimensional analysis: algorithms for unique and relevant dimensionless groups (<https://arxiv.org/abs/1708.04303>).
- [64] GLAWS, A. T. *Parameter dimension reduction for scientific computing*. 2018. Tese (Doutorado em Física) - Department of Computer Science, U. Colorado, 2018.
- [65] VIGNAUX, V. A.; SCOTT, J. L. Theory & methods: Simplifying regression models using dimensional analysis. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, v. 41, p. 31–41, 03 1999.
- [66] SIANO, D. B. Orientational analysis - a supplement to dimensional analysis - I. *Journal of the Franklin Institute*, v. 320, n. 6, p. 267–283, 1985.
- [67] SIANO, D. B. Orientational analysis, tensor analysis and the group properties of the si supplementary units - II. *Journal of the Franklin Institute*, v. 320, n. 6, p. 285–302, 1985.
- [68] HUNTLEY, H. E. *Dimensional Analysis*. Dover, 1967.
- [69] SONIN, A. A. A generalization of the pi-theorem and dimensional analysis. *Proc Natl Acad Sci U S A*, v. 101, n. 23, p. 8525–8526, 06 2004.
- [70] DA COSTA, F. P. Uma breve introdução à modelação matemática. Sociedade Portuguesa de Matemática, 7 2018.
- [71] TORCZYNSKI, J. R. Dimensional analysis and calculus identities. *The American Mathematical Monthly*, v. 95, n. 8, p. 746–754, 10 1988.
- [72] LOOMIS, E. S. *The pythagorean proposition*, available on <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.84599/page/n8>. Edwards Brothers, Inc, 1940.
- [73] MAOR, E. *The pythagorean theorem: A 4,000-year history*. Princeton University Press, 2010.
- [74] VAN LEEUWEN, J. Domino magnification, <https://arxiv.org/pdf/1301.0615.pdf>.
- [75] VAN LEEUWEN, J. The domino effect <http://arxiv.org/abs/physics/0401018>.
- [76] MAHAJAN, S. *Street-fighting mathematics: The art of educated guessing and opportunistic problem solving*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2019.
- [77] MAHAJAN, S. *The art of insight in science and engineering*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2014.
- [78] YAGINUMA, T.; ITŌ, H. Drag and wakes of freely falling 60° cones at intermediate Reynolds numbers. *Physics of Fluids*, v. 20, n. 11, p. 117102, 2008.
- [79] KHESIN, B. A.; TABACHNIKOV, S. L. *Arnold: Swimming Against the Tide*. American Mathematical Society.

- [80] ROSEN, R. The derivation of D'Arcy Thompson's theory of transformations from the theory of optimal design. *The bulletin of mathematical biophysics*, v. 24, n. 3, p. 279–290, 1962.
- [81] ROSEN, R. Dynamical similarity and the theory of biological transformations. *Bulletin of Mathematical Biology*, v. 40, n. 5, p. 549–579, 1978.
- [82] GÜNTHER, B.; MORGADO, E.; JIMÉNEZ, R. F. Homeostasis and heterostasis: from invariant to dimensionless numbers. *Biological Research*, v. 36, p. 211–221, 2003.
- [83] HOULE, D.; PÉLABON, C.; WAGNER, G. P.; HANSEN, T. F. Measurement and meaning in biology. *The Quarterly Review of Biology*, v. 86, n. 1, p. 3–34, 2019/05/06 2011.
- [84] SZNITMAN, J.; STONE, H. A.; SMITS, A. J.; GROTBORG, J. B. Teaching the falling ball problem with dimensional analysis. *European J. of Physics Education*, v. 4, p. 32–42, Feb. 2013.
- [85] RIESS, F.; HEERING, P.; NAWRATH, D. Reconstructing Galileo's inclined plane experiments for teaching purposes.
- [86] TADEU, E.; ALVES, L. M.; JARDIM, M. I. A.; QUEIROS, W. P.; GONCALVES, A. M. B. Determinação do número  $\pi$  por meio de uma rede quadrada de resistores idênticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, p. e2304–2, 2018.
- [87] VENEZIAN, G. On the resistance between two points on a grid. *American Journal of Physics*, Woodbury, v. 62, n. 11, p. 1000–1004, 2019/05/13 1994.
- [88] DEAKIN, M. A. G.I. Taylor and the Trinity test. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 42, n. 8, p. 1069–1079, 2011.
- [89] LAUB, P. B. The black box, or the significance of  $r = (Et^2/\rho)^{1/5}$ . na página do curso de Rob Phillips, <http://rpdata.caltech.edu/courses/aph105c/2006/articles>, 2004.
- [90] ZAJAC, M. Estimate of the energy released in the first atomic bomb explosion, <https://www.math.utah.edu/zajac/math1170/blastradius.pdf>, 2004.
- [91] TAYLOR, G. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. - ii. the atomic explosion of 1945. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, v. 201, n. 1065, p. 175–186, 2019/05/08 1950.
- [92] TAYLOR, G. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. i. theoretical discussion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 201, n. 1065, p. 159–174, 1950.
- [93] BRENNER, M. P.; STONE, H. A. Modern classical physics through the work of G. I. Taylor. *Physics Today*, v. 53, n. 5, p. 30–35, 2000.
- [94] BATCHELOR, G. *The life and legacy of G.I. Taylor*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [95] SOCHET, I. Blast effects of external explosions (hal-00629253), 2010.

- [96] SOCHET, I. *Blast effects: Physical properties of shock waves*. Shock Wave and High Pressure Phenomena. Springer International Publishing, 2017.
- [97] FORNBERG, B.; HERBST, B. Modeling in applied mathematics, em preparação, disponível em <http://appliedmaths.sun.ac.za/herbst/research/publications/modeling.pdf>.
- [98] STONE, H. Dimensional Analysis. [http://216.92.172.113/courses/phys39/Thermal Measurement/Stone DimensionalAnalysis08 SizeAndScale.pdf](http://216.92.172.113/courses/phys39/Thermal%20Measurement/Stone%20DimensionalAnalysis08%20SizeAndScale.pdf).
- [99] DORSEY, A. Dimensional analysis <http://www.phys.ufl.edu/courses/phy3221/fall07/dimension.pdf>.
- [100] BAHRAMI, M. Ensc 283: Introduction to Fluid Mechanics [www.sfu.ca/~mbahrami/ensc283.html](http://www.sfu.ca/~mbahrami/ensc283.html).
- [101] SONIN, A. A. The physical basis of Dimensional Analysis [http://web.mit.edu/2.25/www/pdf/da\\_unified.pdf](http://web.mit.edu/2.25/www/pdf/da_unified.pdf), 2001.
- [102] MCKINLEY, G. 2.25 Advanced Fluid Mechanics. Fall 2013. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare <https://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-25-advanced-fluid-mechanics-fall-2013/>.
- [103] BOHREN, C. F. Dimensional analysis, falling bodies, and the fine art of not solving differential equations. *Am. J. Phys.*, v. 72, p. 534–537, 2004.
- [104] LIRA, I. Dimensional analysis made simple. *European Journal of Physics*, Bristol, v. 34, n. 6, p. 1391–1401, 2013.
- [105] ROBINETT, R. W. Dimensional analysis as the other language of physics. *American Journal of Physics*, Woodbury, v. 83, n. 4, p. 353–361, 2019/05/09 2015.
- [106] MISIC, T.; NAJDANOVIC-LUKIC, M.; NESIC, L. Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem. v. 31, n. 4, p. 893–906, 2010.
- [107] PAGARE, A.; CHERAYIL, B. J. The different dimensions of Dimensional Analysis. *Resonance*, v. 23, n. 6, p. 641–661, 2018.
- [108] ALBUQUERQUE, B. N.; JR, A. G. L.; SANTOS, F. C. Estudo do rompimento de fios sob a ação de impactos de tração. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, 2016.
- [109] BIRKHOFF, G. *Hydrodynamics. study in logic, fact and simultitude*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960.
- [110] BIRKHOFF, G. Mathematics for engineers —iii: Dimensional analysis of partial differential equations. *Electrical Engineering*, v. 67, n. 12, p. 1185–1188, 1948.
- [111] EGGERS, J.; FONTELOS, M. A. The role of self-similarity in singularities of partial differential equations. v. 22, n. 1, p. R1–R44, 2008.
- [112] WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. McGraw-Hill Interamericana, 1962.
- [113] PRITCHARD, P. J. *Introduction to Fluid Mechanics*. 8. ed. John Wiley & Sons, 2011.



- [114] MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentals of Fluid Mechanics*. John Wiley & Sons, 2002.
- [115] SEDOV, L. I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Academic Press, 1959.
- [116] YARIN, L. *The pi-theorem: Applications to fluid mechanics and heat and mass transfer*. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [117] SIMON, V.; WEIGAND, B.; GOMAA, H. *Dimensional Analysis for Engineers*. Springer International Publishing, 2017.
- [118] GIBBINS, J. C. *Dimensional Analysis*. Springer-Verlag London, 2011.
- [119] TAN, Q.-M. *Dimensional Analysis with case studies in Mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
- [120] ZOHURI, B. *Dimensional Analysis and self-similarity methods for Engineers and Scientists*. Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2015.
- [121] ZOHURI, B. *Dimensional Analysis beyond the Pi theorem*. Springer International Publishing Switzerland, 2017.
- [122] STOKES, G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums (reprinted in Mathematical and Physical Papers, Sir George Gabriel Stokes and Sir J. Larmor, vol. 3, 1880-1905). *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, v. 9, n. 8, 1851.
- [123] BUKREEV, V. I.; GUSEV, A. V. Motion of a sphere in a fluid due to gravity. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, v. 37, n. 4, p. 494–500, 1996.
- [124] SHAPIRO, A. National committee for fluid mechanics films <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>, 1961.
- [125] SOUTHARD, J. Introduction to fluid motions, sediment transport, and current-generated sedimentary structures. <https://ocw.mit.edu/courses/earth-atmospheric-and-planetary-sciences/12-090-introduction-to-fluid-motions-sediment-transport-and-current-generated-sedimentary-structures-fall-2006/index.htm>.
- [126] MIEDEMA, S. Constructing the Shields curve, a new theoretical approach and its applications. In: *19th World Dredging Congress 2010 (WODCON XIX)*, <http://www.proceedings.com/20386.html>. 2010.
- [127] BONELLI, S.; BRIVOIS, O.; BENAHMED, R. B. A. On the modelling of piping erosion. *Comptes Rendus Mecanique*, v. 334, n. 8-9, p. 555–559, 2006.
- [128] BONELLI, S.; BRIVOIS, O.; LACHOUETTE, D. The scaling law of piping erosion. 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France (hal-00305500).
- [129] BONELLI, S.; BENAHMED, N. Piping flow erosion in water retaining structures: inferring erosion rates from hole erosion tests and quantifying the failure time, 2010.
- [130] DRAKOS, N.; MOORE, R. Aerodynamics for students: non-dimensional numbers [http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/aerothermal\\_dvd\\_only/aero/fprops/dimension/node5.html](http://www-mdp.eng.cam.ac.uk/web/library/enginfo/aerothermal_dvd_only/aero/fprops/dimension/node5.html).

- [131] SQUIRES, T. M.; QUAKE, S. R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale. *Reviews of Modern Physics*, Woodbury, v. 77, p. 977–1026, 2005.
- [132] CLANET, C. Sports ballistics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 47, n. 1, p. 455–478, 2019/06/02 2015.
- [133] SHAH, K.; SHAKYA, R.; MITTAL, S. Aerodynamic forces on projectiles used in various sports. *Physics of Fluids*, v. 31, n. 1, p. 015106, 2019/05/30 2019.
- [134] TEXIER, B. D.; COHEN, C.; DUPEUX, G.; QUÉRÉ, D.; CLANET, C. On the size of sports fields. *New Journal of Physics*, v. 16, n. 3, p. 033039, 2014.
- [135] BAKER, B. *Science in the arena: Explanations and analyses of performances and phenomena in sport*. Morgan & Claypool Publishers, 2019.
- [136] GABRIELLI, G.; VON KÁRMÁN, T. What price speed? (first appeared in Mechanical Engineering, October 1951). *Journal of the American Society for Naval Engineers*, v. 63, n. 1, p. 188–200, 2019/05/28 1951.
- [137] YONG, J.; SMITH, R.; HATANO, L.; HILLMANSEN, S. What price speed - revisited (the railway research group, imperial college). *Ingenia online* (<https://www.ingenia.org.uk>), v. 22, p. 47–51, 2005.
- [138] TRANCOSSI, M. What price of speed? a critical revision through constructal optimization of transport modes. *International Journal of Energy and Environmental Engineering*, v. 7, n. 4, p. 425–448, 2016.
- [139] ALLEN, H. A Prodrome of a Memoir on Animal Locomotion. *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia*, v. 39, n. 1, p. 60–67, 1887.
- [140] SCHMIDT-NIELSEN, K. Locomotion: Energy cost of swimming, flying, and running. v. 177, n. 4045, p. 222–228, 1972.
- [141] SCHMIDT-NIELSEN, K. *Scaling: Why is animal size so important?* Cambridge University Press, 1984.
- [142] CRIGHTON, D. G.; PEDLEY, T. J. Michael James Lighthill (1924–1998). *Notices of the AMS*, v. 46, n. 10, p. 1226–1229, 1999.
- [143] AZUMA, A. *The Biokinetics of Flying and Swimming*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [144] WU, T. (Ed.). *Swimming and flying in nature, vols,1,2*. Springer US, 1975.
- [145] LIGHTHILL, J. *Mathematical biofluidynamics*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1975.
- [146] BLAKE, R. *Fish locomotion*. Cambridge University Press, 1983.
- [147] BLAKE, R. (ed) *efficiency and economy in animal physiology*. Cambridge environmental chemistry series. Cambridge University Press, 2005.
- [148] LIGHTHILL, M. J. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 44, n. 2, p. 265–301, 1970.

- [149] PEDLEY, T. *Scale effects in animal locomotion: Based on the Proceedings of an International Symposium held at Cambridge University, September, 1975*. Acad. Press, 1977.
- [150] WU, T. Y.; VAN DER GIESSEN. On theoretical modeling of aquatic and aerial animal locomotion. *Advances in Applied Mechanics*, v. 38, p. 291–353, 2002.
- [151] SPARENBERG, J. A. Survey of the mathematical theory of fish locomotion. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 44, n. 4, p. 395–448, 2002.
- [152] ELLERBY, D. J. How efficient is a fish? *The Journal of Experimental Biology*, v. 213, n. 22, p. 3765, 11 2010.
- [153] VOGEL, S. *Life in moving fluids: The physical biology of flow*. Princeton University Press, 1996.
- [154] BONNER, J. T. *Why size matter: from bacteria to blue whales*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 2006.
- [155] MCMAHON, T. A.; BONNER, J. T. *On size and life*. Scientific American books, New York, 1983.
- [156] HU, D. *How to walk on water and climb up walls: Animal movement and the robots of the future*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 2018.
- [157] SMITH, J. M. *Mathematical ideas in biology*. Cambridge University Press, 1968.
- [158] JUDEX, S.; RUBIN, C. *Mechanical influences on bone mass and morphology*. Totowa, NJ: Humana Press, 2003. p. 199–220.
- [159] MARTIN, R. B. The importance of mechanical loading in bone biology and medicine. *J Musculoskelet Neuronal Interact*, v. 7, n. 1, p. 48–53, Jan-Mar 2007.
- [160] KLEIN-NULEND, J.; BACABAC, R. G.; BAKKER, A. D. Mechanical loading and how it affects bone cells: the role of the osteocyte cytoskeleton in maintaining our skeleton. *European cells & materials*, v. 24, p. 278–91, 2012.
- [161] BUSH, J. W.; HU, D. L. Walking on water: Biocomotion at the interface. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, v. 38, p. 339–369, 2006.
- [162] BUSH, J. W. M.; HU, D. L. Walking on water. *Physics Today*, v. 63, n. 6, p. 62–63, 2010.
- [163] VELLA, D. Floating versus sinking. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 47, n. 1, p. 115–135, 2019/06/02 2015.
- [164] DICKERSON, A. K.; SHANKLES, P. G.; MADHAVAN, N. M.; HU, D. L. Mosquitoes survive raindrop collisions by virtue of their low mass. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 109, n. 25, p. 9822, 06 2012.
- [165] DICKERSON, A. K.; MILLS, Z. G.; HU, D. L. Wet mammals shake at tuned frequencies to dry. *Journal of The Royal Society Interface*, v. 9, n. 77, p. 3208–3218, 2019/06/02 2012.

- [166] TRANCANELLI, D. Grandezas físicas e análise dimensional: da mecânica à gravidade quântica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, 2016.
- [167] BASTOS FILHO, J. B.; ARAÚJO, R. M. X. D. A entropia de Hawking para buracos negros: um exercício de análise dimensional a partir de um texto de divulgação. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, p. 527–533, 2007.
- [168] BRENNAN, S. N. On size and control: the use of dimensional analysis in controller design. *Ph.D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Mechanical Engineering*, 2002.
- [169] RAMOS, G. P. El análisis dimensional en Economía. *Revista Soluciones de Postgrado EIA*, v. 12, p. 67–94, 2014.
- [170] THOMAS, P. J. Measuring risk-aversion: The challenge. *Measurement*, v. 79, p. 285–301, 2016.
- [171] MOREIRA, I. D. C. Feynman e suas conferências sobre o ensino de física no brasil. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, 2018.
- [172] FERRARO, N. G.; SOARES, P. T.; JUNIOR, F. R. *Os fundamentos da Física. Eletricidade, Introdução à Física Moderna e Análise Dimensional*. Editora Moderna, 10 ed., 2009. v. 3.
- [173] WALTER, M. *Science and cultural crisis: An intellectual biography of Percy Williams Bridgman (1882-1961)*. Stanford University Press, 1990.
- [174] BRIDGMAN, P. W. Society and the individual. *Bulletin of the Atomic Scientists*, v. 14, n. 10, p. 413–416, 12 1958.
- [175] BRIDGMAN, P. W. *Reflections of a physicist (first edition 1950)*. Three centuries of science in America. Arno press, 1980.
- [176] RUSK, R. D. Book review: Reflections of a physicist, by Percy Williams Bridgman. *The Educational Forum*, v. 15, n. 1, p. 119–120, 11 1950.
- [177] OLIVA, J. M. Julio Palacios Martínez (1891-1970): Un científico entre la física y la química. *Anales de Química*, v. 109, n. 2, p. 106–109, 2013.
- [178] ROQUÉ, X.; HERRAN, N. *La física en la dictadura. físicos, cultura y poder en España, 1939–1975*. Servei de Publicacions de la UAB, 2012.
- [179] CAMPRUBÍ, L. *Engineers and the making of the francoist regime*. MIT Press, 2014.
- [180] CARVAJAL, L. E. O. *La destrucción de la ciencia en España: depuración universitaria en el franquismo*. Editorial Complutense, 2006.
- [181] REDONDO, F. G. La reorganización de la Matemática en España tras la Guerra Civil. La posibilidad del retorno de Esteban Terradas y Julio Rey Pastor. *La Gaceta de la RSME, Mirando hacia atrás, sección cargo de Manuel de León y Francisco A. González Redondo*, v. 5:2, p. 463–490, 2002.

## APÊNDICE A – BUCKINGHAM

Praticamente toda a da carreira de Buckingham, desde 1907 até falecer foi realizada no National Bureau of Standards (atualmente NIST, National Institute of Standards and Technology). Tendo graduado em Harvard, fez doutorado em Leipzig com Wilhelm Ostwald, e em 1893 voltou aos EUA trabalhar no Bryn Mawr College, onde ficou por um período de seis anos, e por um ano na Universidade de Wisconsin.

A seguir foi para a USDA Bureau of Soils, onde trabalhou de 1902 a 1906 estudando a dinâmica de gases e água em solos. Seus dois artigos são hoje em dia considerados fundamentais para a hidrologia [29], [30]. Do sumário deste segundo artigo, onde fica claro que a experiência foi um pouco traumática.

“During 1902 to 1906 as a soil physicist at the USDA Bureau of Soils (BOS), Edgar Buckingham originated the concepts of matric potential, soil-water retention curves, specific water capacity, and unsaturated hydraulic conductivity (K) as a distinct property of a soil. He applied a formula equivalent to Darcy’s law (though without specific mention of Darcy’s work) to unsaturated flow. He also contributed significant research on quasi-empirical formulas for K as a function of water content, water flow in capillary crevices and in thin films, and scaling. Buckingham’s work on gas flow in soils produced paradigms that are consistent with our current understanding. His work on evaporation elucidated the concept of self-mulching and produced sound and sometimes paradoxical generalizations concerning conditions that favor or retard evaporation. Largely overshadowing those achievements, however, is that he launched a theory, still accepted today, that could predict transient water content as a function of time and space. Recently discovered documents reveal some of the arguments Buckingham had with BOS officials, including the text of a two-paragraph conclusion of his famous 1907 report on soil water, and the official letter documenting rejection of that text. Strained interpersonal relations motivated the departure of Buckingham and other brilliant physicists (N.E. Dorsey, F.H. King, and Lyman Briggs) from the BOS during 1903 to 1906. Given that Buckingham and his BOS colleagues had been rapidly developing the means of quantifying unsaturated flow, these strained relations probably slowed the advancement of unsaturated flow theory.”

Vale a pena olhar a página web

[http://www.history-of-hydrology.net/mediawiki/index.php?title=Buckingham,\\_Edgar](http://www.history-of-hydrology.net/mediawiki/index.php?title=Buckingham,_Edgar) onde há também um interessante parágrafo sobre seu período aventureiro na Velho Oeste 1898-1900. e seu casamento com Elizabeth Holstein em 1901.

Em sua longa carreira no National Bureau of Standards, Buckingham trabalhou em diferentes áreas, especialmente acústica, fluidos e radiação.

## APÊNDICE B – BRIDGMAN

Segundo Maila Walter [173], Percy Bridgman (1882-1961) foi uma das figuras mais importantes no desenvolvimento da ciência americana no século XX: criou técnicas e protocolos para o estudo de altas pressões em laboratório, que permitiram posteriormente a síntese de novos materiais como o diamante sintético e estudos geofísicos. Por estas contribuições, foi agraciado com o premio Nobel em 1943 [52], talvez uma das últimas vezes em que o comitê escolheu uma tema todo voltado para a física clássica.

Um “puritano da ciência”, nas décadas de 30 e 40 Bridgman foi um dos expoentes, talvez relutantemente, em filosofia da ciência. O termo operacionalismo que usava agradou aos positivistas. Bridgman foi um membro muito influente na atmosfera científica e cultural de Harvard até sua aposentadoria em 1954. Curiosamente, tendo tido um *background* familiar puritano, e tendo estudado antes da relatividade e da mecânica quântica, ele terminou rejeitando argumentos absolutos e se tornou um ateu sem concessões. Puritano até no seu ateísmo. Sofrendo de uma cancer incurável e muito doloroso, decidiu tirar sua própria vida aos 20 de agosto de 1961 aos 79 anos.

Em artigo de 1958 [174], motivado pela reação popular na época ao lançamento do Sputnik, Bridgman discute a importância da ciência pura para a tecnologia, alertando para a tendência a mediocridade, que segundo ele advém da frequente hostilidade da organização do trabalho aos indivíduos com talentos especiais.

Talvez valha a pena destacar o que Bridgman pensava sobre ensino e aprendizado nas suas memórias ‘Reflections of a Physicist’ [175], ecoadas nas resenhas [176] e [55]. Desta última extraímos:

"It must be confessed that those portions of the book which deal with philosophical matters will probably be found hard reading for those who have not, of their own volition, thought deeply about these matters. Quite early in the book, Professor Bridgman voices the situation which must have been experienced by many thoughtful physicists when he says: "As I get older, I lose my sense of ease in the operations of logic. I do not think this loss is due to senile decay, but I believe that it is rather because I now see more than I did before.' The present reviewer has had this conviction strongly and has the feeling that, if he could forget all that he knew but retained his experience in thinking, he would probably be at the bottom of the class in trying to understand a high school presentation of mechanics. However, it is because the mind develops in this way that points of view which are significant to it in its maturity may tend to leave the layman - or even the unphilosophical physicist - in a state of mind in which he finds difficulty in knowing what is being talked about. As Professor Bridgman implies, the actual understanding is largely a personal affair which the individual must grow within himself, for it is probably not far from the truth to assert that there is no teaching, but only inspiration to learn."

## APÊNDICE C – PALACIOS

Pode-se perguntar: haveria motivação “política” em Palacios, físico-químico de formação [177], para escrever um livro sobre Análise Dimensional, na Espanha, durante a era de Franco? Especulamos que sim: a Engenharia era a área prioritária<sup>1</sup>; modelos reduzidos eram utilizados rotineiramente na Espanha como no mundo no planejamento de grandes obras como a construção de represas ([179], pg. 131, 157).

A ideologia dominante era o do “catolicismo produtivo”:

“Engineers sought to redeem Spain from war, poverty, and the betrayal of its national identity. The victors of the Civil War saw themselves as agents of a Catholic restoration with the moral duty and authority of repressing insubordinates, disciplining the population, and producing a new state. ... Industrialists, Catholic ideologues, agricultural scientists, and civil engineers who construed the ideology and practice of National Catholicism articulated a productive Catholicism. Paraphrasing Karl Marx’s famous description of the Roman costumes of French revolutionaries, one could contend that early Francoist technologists were dressed up as the Catholic Monarchs”. (Campubri, 2014, p. 157 [179]).

Monarquista católico, Palacios permaneceu em Madrid durante a guerra civil, ocupando cargos importantes em toda a era franquista até falecer em 1970. Já Blas Cabrera, republicano, que era o mais destacado físico espanhol da “Edad de Plata” da ciência espanhola, exilou-se no México, onde faleceu em 1945. Sobre as depurações nas universidades espanholas, veja-se [180]. Porém Palacios não é tido atualmente como um falangista. Como outros, considera-se que era leal ao rei D. Juan, buscando minimizar as perdas para a ciência espanhola, tendo feito por exemplo as gestões para permitir visitas de Rey Pastor da Argentina para a Espanha [181] e possivelmente outras gestões por detrás dos panos.

---

<sup>1</sup> ROQUE ET AL [178] afirmam que a Física na época não tinha o mesmo prestígio. Este livro também descreve (imparcialmente) o esforço que Palacios fez para refutar a teoria restrita da relatividade, propondo uma alternativa sem o paradoxo dos gêmeos.

## APÊNDICE D – LOBO CARNEIRO

Reproduzimos alguns trechos da entrevista que Lobo Carneiro concedeu os Profs. Luiz Bevilacqua, Ildeu Moreira com a participação de Alicia Ivanissevich em 1991<sup>1</sup>.

### UMA IGREJA SOBRE ROLOS

“Foi um episódio muito singular, que ocorreu em 1943, durante a Segunda Guerra Mundial. Eu ainda estava no início da carreira quando surgiu a idéia de se deslocar a igreja de São Pedro - uma igreja histórica, pequena, barroca e com planta elíptica - para o outro lado da avenida Presidente Vargas, de modo a evitar que fosse demolida. O projeto consistia em substituir a parte inferior das paredes da igreja por concreto. Sob o concreto, seriam colocados rolos que serviriam para deslocar a igreja até o outro lado da avenida.

... Quando pus o rolo de concreto na máquina, ele quebrou de uma maneira inteiramente diferente dos de aço: por uma fissura vertical, abrindo-se em dois. Estudei isso teoricamente e me ocorreu propor um novo método para a determinação da resistência à tração dos concretos. A resistência à compressão era determinada em cilindros ensaiados verticalmente. Pondo esses cilindros deitados entre os pratos da máquina se determinaria a resistência à tração.

... No Brasil, na época, ninguém deu muita importância àquilo, mas na França logo começou a ser usado e passou a ser chamado de 'essai brésilien'. Depois de ser aceito pela American Society for Testing Materials, em 1962, ficou conhecido também nos Estados Unidos como 'Brazilian test'. Recentemente, em 1980, foi adotado pela International Organization for Standardization (ISO)... [A igreja] Acabou sendo demolida, porque suas alvenarias eram bastante espessas - algumas tinham mais de um metro - mas completamente heterogêneas. Dentro delas havia pedaços de estátuas, madeira, tijolos etc., o que as tornava fracas. Além disso, o prefeito da época, Henrique Dodsworth, começou a ser ridicularizado. Diziam: "O velho está gagá, quer deslocar uma igreja sobre rolos...", embora esse tipo de transporte tivesse sido feito na Europa com êxito. Fizeram até um samba sobre o assunto<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> [http://www.canalciencia.ibict.br/notaveis/livros/fernando\\_lobo\\_carneiro\\_48.html](http://www.canalciencia.ibict.br/notaveis/livros/fernando_lobo_carneiro_48.html)

<sup>2</sup> O prefeito mandou então um ofício à Franki, perguntando se a empresa garantia que a igreja chegaria intacta do outro lado da avenida. O diretor respondeu: "Garantir eu não posso, porque, dada a heterogeneidade das paredes da igreja, pode haver um acidente durante o transporte e ela desmoronar". Diante disso, o prefeito deu o caso por encerrado e mandou demolir a igreja.



## NO INT: MODELOS REDUZIDOS

“Depois dessa fase, passei a trabalhar na elaboração de normas brasileiras para o cálculo do concreto armado para a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) ... ..Dediquei muito tempo à questão da normalização, ainda dentro do INT, mantendo sempre meu trabalho em pesquisa experimental sobre o comportamento de grandes estruturas de concreto. Tive a oportunidade também de começar a estudar modelos reduzidos. Foi quando aconteceu um problema com a fundação de um dos pilares da avenida Perimetral, em frente à Praça XV. Fiz então um modelo reduzido para estudar em laboratório o que ocorreria com o protótipo. Tentei imitar o comportamento de uma estaca, baseado na teoria da semelhança física. A pesquisa foi bastante complexa, porque incluiu o modelo do pilar, sua fundação e as estacas.”

Nota: o modesto estudo do jovem pesquisador tornou-se o famoso teste conhecido como “essai brésilien (Brazilian test)”.

## A LEI DO PETRÓLEO

“Empenhei-me nessa campanha por quatro a cinco anos, desde o seu início, em 1946. Fui secretário técnico do Centro Nacional de Defesa do Petróleo e redigi praticamente todo o material publicado na época. Tive o máximo de cuidado para publicar apenas afirmações verídicas; nada de palpites. Monteiro Lobato, por exemplo, dizia: "O Brasil está cercado por países que tem petróleo; não é possível que, justamente no Brasil, Deus não tenha colocado petróleo". Mas devemos lembrar que nesses países ocorrem grandes terremotos e, no Brasil, não. Por força do mesmo raciocínio, Deus deveria também ter brindado o Brasil com terremotos... Fui deputado apenas durante o período de discussão da lei que criou a Petrobrás, em 1951. Getúlio Vargas mandara ao Congresso um projeto de lei dito "flexível", que permitia as mais diversas alternativas, inclusive a concessão dos direitos de exploração a empresas estrangeiras. O projeto foi sendo modificado e, quando ficou pronto, o líder do governo na Câmara, Gustavo Capanema, que era muito meu amigo, disse: "O presidente acha que vocês todos estão com fantasias na cabeça porque o que ele quer é o mesmo que vocês querem". Podia até ser, mas não foi bem isso que escreveu em seu projeto. Só houve um ponto de que Getúlio fazia questão fechada: a manutenção das concessões a duas refinarias particulares ... O projeto, reformulado, foi então aprovado por unanimidade, só não recebendo o voto do integralista Raimundo Padilha. Eram mantidas as concessões dadas aos dois grupos, desde que sua atual capacidade, expressa em "barris por dia", não fosse aumentada. Antes que a lei fosse votada, apresentei uma emenda. Preocupado, o Capanema comentou: "Mas Lobo Carneiro, já estava tudo tão certinho, todo mundo de acordo!"Expliquei então que a expressão "barris por dia"era ilegal, porque, no sistema de medidas brasileiro, barril não era unidade. Capanema ficou aliviado e, como líder da maioria, apoiou a minha emenda.”

## METROLOGIA

“Criada pelo Paulo Sá, a comissão pertencia ao INT e mais tarde foi transformada no Instituto Nacional de Metrologia (Inmetro). Nossa missão era restabelecer os padrões nacionais de pesos e medidas. Quando o Brasil aderiu a Convenção Internacional de Pesos e Medidas, recebemos de Paris o metro e o quilograma-padrão. Só que, por obra do destino, o metro-padrão sumiu. Ninguém conseguia achar.... Não estava em lugar algum! Muito tempo depois, encontraram, na Casa da Moeda, uma caixa fechada à chave que estava servindo de calço para uma mesa. Foram ver o que havia lá dentro: era o metro-padrão!

## A COPPE

“Um belo dia de 1967 eu estava no INT quando recebi a visita de Luiz Bevilacqua, trazendo uma carta do idealizador da Coppe, Alberto Coimbra, em que me convidava a ser professor da instituição... Para mim, tudo era novidade. Nunca tinha ouvido falar em engenheiro com doutorado. Na minha época, conhecia apenas um, o diretor do INT, que era catedrático da Escola de Engenharia e que, no concurso para livre-docente, tinha recebido o título de doutor. Chegando à Coppe, a primeira coisa que fiz foi um curso em Fortran, para aprender a trabalhar com computador. Fiz junto com os alunos e obtive o segundo lugar, o que foi motivo de gozações. O professor Pacitti disse que eu me saíra bem para minha idade - estava com 55 anos! - porque a lógica do computador é inteiramente diferente e os jovens assimilam com muito mais facilidade que os mais velhos. Começamos a organizar o programa de engenharia civil, com poucos professores: um norte-americano, Sidney Santos (professor da Escola de Engenharia), Dirceu Velloso e Paulo Alcântara Gomes (aluno e professor ao mesmo tempo). Posteriormente, convidamos os melhores alunos com mestrado completo para serem docentes, o que foi considerado por muitos uma heresia. Dediquei todo o meu tempo ao programa de engenharia civil e, durante alguns anos, ministrei as disciplinas relacionadas com a aplicação de computadores ao cálculo de estruturas, passando mais tarde para a parte de reologia do concreto e de semelhança física e modelos.”

## GALILEU

Escrevi esse artigo quando estava na França, em 1964. As pessoas em geral pensam que saí exilado. De fato, tinha sido muito visado quando participava da campanha do petróleo. Na ocasião, o presidente da República, Eurico G. Dutra, telefonou para o ministro Marcial Dias Pequeno, pedindo a minha demissão. O motivo principal era um discurso que eu tinha feito na Paraíba em defesa do monopólio estatal do petróleo. Meu chefe no INT, Paulo Sá, me chamou e disse: "Olha, eu e o Marcial já falamos com o Dutra. Dissemos a ele que a tese que você defendeu era a mesma que o Arthur Bernardes sustentava". O

Dutra respondeu: "Se é assim, tudo bem". Mas não fui para a França por causa desse episódio. Fui porque Zenaide, minha mulher, que tinha feito o curso superior em língua e literatura francesa da Universidade de Nancy, na Maison de France, ganhou uma bolsa do governo francês. Procurei então conseguir uma bolsa de estudos para mim. Já estávamos na França quando aconteceu o golpe de 1964. Trabalhei durante um ano no Centro Experimental de Estudos e Pesquisas sobre Materiais e Estruturas, que era dirigido pelo Robert L'Hermitte. Eis que, no limiar de 1964, houve em Paris uma exposição da Unesco sobre o tricentenário do nascimento de Galileu. O então embaixador da Unesco, Paulo Carneiro, que era meu primo, me convidou para conhecer todo o material da exposição. Havia textos sobre ele como astrônomo, como físico, seus instrumentos, mas não havia uma palavra sobre as atividades de Galileu ligadas à resistência dos materiais. Lembrei que no livro de história da teoria da resistência dos materiais, de Timoshenko, um capítulo situava Galileu como o fundador dessa teoria. Por sinal, o nome original dado por Galileu era muito melhor: Resistência dos corpos sólidos a serem rompidos. Portanto, embora Galileu fosse o criador dessa teoria, nada havia na exposição sobre o assunto. Meu primo me encorajou a escrever um artigo que corrigisse essa falha. Procurei bibliografia em todas as livrarias de Paris, mas nada encontrei. Resolvi ir a Florença, onde visitei o Instituto e Museu História da Ciência, conversei muito, obtive informações e consegui a bibliografia para escrever o artigo. Ele foi publicado na revista da RILEM. Só que, antes de escrevê-lo, fiquei com certo receio, porque pretendia propor alguma coisa original, que era justamente a contribuição de Galileu sobre a semelhança física - a "teoria da fraqueza relativa dos gigantes". Galileu mostrou que, quando se faz um modelo pequeno e se passa para um protótipo maior, o peso cresce com o cubo da escala e a resistência, com o quadrado. De modo que o maior fica menos forte que o menor, o gigante é mais fraco do que o homem normal. Feito o artigo, mandei cópia para as duas maiores autoridades em análise dimensional e modelos da época, o norte-americano H.L. Langhaar e o físico espanhol J. Palácios. O primeiro me respondeu com uma carta, dizendo que achara meu artigo "esplêndido" e que estava de acordo com a minha proposta de dar o nome de Galileu a um certo parâmetro adimensional. Citou ainda uns escritos de Vitruvius, que eu não conhecia. Já no primeiro século da Era Cristã, ele dizia que havia modelos que, quando feitos "em grande", resistiam, e outros que não. De Palácios, recebi um pedido de autorização para traduzir o artigo para o espanhol e publicá-lo nos Anais da Academia de Ciências da Espanha. Considero esse artigo o que fiz de mais importante, até hoje. Não se trata de vaidade. Foi a partir dele que me interessei pela história da ciência e fui me aproximando dela cada vez mais. Estudando história da ciência, verifiquei que tinha errado de vocação: devia ter escolhido física, em vez de engenharia.

## HISTÓRIA DA CIÊNCIA

Antes de ir como delegado junto à RILEM, estive na Europa, como representante do INT no Comitê ISO em 1956, em Viena. Fui também representante do Brasil no Comitê Europeu do Concreto desde 1960. Recentemente, viajei à Europa com uma licença-prêmio e, depois, em semestre sabático, e aproveitei para estudar análise dimensional e modelos físicos, em bibliotecas. Consegui uma autorização do Instituto e Museu de História da Ciência, em Florença, para manusear os manuscritos de Galileu conservados na Biblioteca Nacional da Itália. Foi algo realmente comovente, já que não se tratava de uma reprodução e sim dos próprios manuscritos. Não descobri nada de novo, porque tudo fora publicado e comentado por Stillman Drake. No entanto, encontrei uns manuscritos de Viviani sobre resistência dos materiais, que apresentavam aspectos interessantes... Na França, frequentei a Biblioteca Nacional, junto com minha mulher: ela pesquisando sobre as expedições francesas no Brasil e eu nessa linha da análise dimensional. Não podemos ir a Paris sem visitar essa biblioteca. É fabulosa! Lá eu descobri, por exemplo, exemplares raríssimos dos Annales Télégraphiques, uma revista dos engenheiros telegráficos do século passado, onde Vashy publicou os artigos em que o teorema de "pi", hoje atribuído a Buckingham, foi enunciado pela primeira vez. Naquele tempo, o telégrafo era a aplicação mais sofisticada da eletricidade. Fora lançado o cabo submarino, ligando a Inglaterra aos Estados Unidos e, para isso, Lord Kelvin conseguiu integrar a "equação diferencial do telégrafo", descobrindo uma lei que determinava o tempo que o sinal levava para atingir certa distância. Vashy aplicou a análise dimensional a esse problema de Kelvin de forma mais completa.

## O LIVRO SOBRE ANÁLISE DIMENSIONAL

“O tema do livro não é história da ciência, é o curso de análise dimensional, semelhança e modelos físicos que ministrei nos últimos anos. Estou trabalhando nos últimos capítulos. O texto já está sendo digitado e espero que saia até o final do ano. É um livro didático, com 12 capítulos, que vai ser editado pela UFRJ. Que importância tem a história da ciência para a formação de um engenheiro ou de um cientista? Por dez anos, além de lecionar na Coppe, fui professor da Escola de Engenharia, onde ensinei resistência dos materiais. Sempre que dava esse curso, procurava falar da parte histórica para despertar o interesse dos alunos, falando por exemplo da "fraqueza dos gigantes". Perguntava que comprimento máximo pode ter um fio sob a ação do seu próprio peso, ou que altura máxima podia ter uma montanha na Terra - o que dá um pouquinho mais que o Everest - ou na Lua, com uma gravidade de intensidade seis vezes menor, em que a montanha poderia ser seis vezes mais alta etc. Procurava assim mostrar esse lado histórico para os alunos, e eles achavam muito interessante.”

## CIÊNCIA BÁSICA

“Acho que os jovens engenheiros precisam estudar mais as matérias básicas, como matemática e física. O sujeito vai aprender engenharia é na vida prática mesmo. Não adianta aprender na universidade como se constrói uma casa, ou como se detalha ferragem para concreto armado, porque para isso seria preciso transformar a sala de aula num escritório, com pranchetas etc. Isso ele vai aprender trabalhando. Na universidade deve ter a parte básica. Uma das melhores experiências da minha vida foi lidar com os estudantes de mestrado, que acabaram constituindo o atual corpo docente não só do Programa de Engenharia Civil, como de grande parte dos programas da Coppe.”

## APÊNDICE E – CONGRESSO SOBRE MEDIÇÃO 2018

<https://measurement2018.sciencesconf.org>

History, philosophy and sociology of measurement

“Measurement at the Crossroads is the third interdisciplinary conference to explore the history and philosophy of measurement after Dimensions of Measurement in Bielefeld (2013) and The Making of Measurement in Cambridge (2015). The conference will bring together historians, philosophers and sociologists of science to address questions related to measurement across disciplines ranging from the natural sciences to the life and human sciences.

The recent revival of the philosophy of measurement in the early 2000s appears to be instrumental in overcoming the tensions that obstructed science studies during much of the second half of the twentieth century. The Paris conference aspires to promote the new ways of addressing issues of quantification and measurement that are now emerging and promising to bridge the various gulfs - theoretical versus practical, descriptive versus normative - that have divided the philosophical, historical and sociological approaches to science. It is now recognized that questions of quantification transcend the earlier focus on meaning and representation which formerly attracted the attention of philosophers of science, and that these questions benefit from investigation alongside the means and processes that enable scientists, and human agents in general, to agree on their measurement results and make them reliable bases for decision and action. The resulting shift of attention towards the uses of measurement results in inference and prediction places the new agenda of philosophy of measurement at the crossroads of conceptual, epistemic, historical, material, technological and institutional issues.

The 2018 conference comes at a time when the field of metrology is about to reach an important turning point with the reform of the International System of Units (SI) that is to be announced by the end of 2018. With Measurement at the Crossroads we aspire to connect the discussions developing in the emerging field of history and philosophy of measurement with some of the issues arising from this major reshaping of the field of metrology. Special attention will thus be given to issues pertaining to the formation of systems of units and standards, as well as to related institutional matters. The conference will build upon the two former ones by inscribing these issues more explicitly in a world-wide and a long-term perspective. In addition to the enquiries related to the contemporary SI reform, time will therefore be allotted for studies concerned with how measurement units have been worked out in the past, from Antiquity to today's reform, in different regions of the world. This will offer a cultural-anthropological outlook on metrology.”

## APÊNDICE F – EXERCÍCIOS DE VESTIBULAR

Como mencionamos na Conclusão, as referências para este Apêndice são as apostilas de Ivan Guilhon Mito Rocha e do Prof. Prof. Fernando Valentim, disponíveis em <https://rumoaoita.com/materia/analise-dimENSIONAL/> e o livro texto *Fundamentos da Física*, vol. 3, capítulo 21 [172].

Navegando no projeto “Rumo ao ITA” percebe-se ser uma linda iniciativa cidadã, não institucional, como muitas que estão surgindo em nosso país, buscando oportunidades para alunos de baixa renda<sup>1</sup>

Já para os “Fundamentos” , encontramos o relato de sua bela história em

<http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2012/01/historia.html>

O livro resultou de uma iniciativa corajosa em 1972 de quatro professores do Ensino Médio e de cursos pré-vestibulares. Além dos autores, contribuiu inicialmente o Prof. José Ivan Cardoso dos Santos. O Prof. Paulo Toledo faleceu em 2008. A primeira edição do livro saiu em 1974 e em 2012 já estava na décima. A descrição do conteúdo se encontra em

<https://www.moderna.com.br/fundamentos/index.html>

1. Considere a equação dimensional e homogênea  $x = at^2 - bt^3$ , em que  $x$  e  $t$  são, respectivamente, comprimento e tempo. Como são as expressões de  $a$  e  $b$  em função de  $M, L, T$ ?

**Resolução:** Este é um bom exemplo da aplicação do princípio da homogeneidade dimensional. Como  $x = at^2 - bt^3 \Leftrightarrow [x] = L = [a]T^2 - [b]T^3 \Leftrightarrow [a]T^2 = L + [b]T^3$  isolando  $[a]$ , temos  $[a] = LT^{-2} + [b]T$ , pelo princípio da homogeneidade  $[b] = LT^{-3}$ , logo  $[a] = M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-2}$  e  $[b] = M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-3}$ .

2. Considere um problema em que existem quatro grandezas físicas  $W, X, Y, Z$  e desejamos expressar  $W$  em função das outras. Então

$$W = C_1 X^a Y^b Z^c + C_2 X^{a'} Y^{b'} Z^{c'} + \dots$$

onde  $C_1, C_2, \dots$  são coeficientes numéricos. Como todos os termos possui dimensões equivalentes, escreveremos simplesmente  $W = CX^a Y^b Z^c$ . Sejam, agora,  $w_l, w_m, w_t$  as dimensões de  $W$  em  $L, M$  e  $T$  (comprimento, massa e tempo), logo

$$\begin{aligned} W &= L^{w_l} M^{w_m} T^{w_t} \\ X^a &= (L^{x_l} M^{x_m} T^{x_t})^a = L^{ax_l} M^{ax_m} T^{ax_t} \\ Y^b &= (L^{y_l} M^{y_m} T^{y_t})^b = L^{by_l} M^{by_m} T^{by_t} \\ Z^c &= (L^{z_l} M^{z_m} T^{z_t})^c = L^{cz_l} M^{cz_m} T^{cz_t} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Não conseguimos maiores informações em <https://rumoaoita.com/o-projeto/>.

como  $L^{w_l} M^{w_m} T^{w_t} = C X^a Y^b Z^c = C(L^{ax_l} M^{ax_m} T^{ax_t}) \cdot (L^{by_l} M^{by_m} T^{by_t}) \cdot (L^{cz_l} M^{cz_m} T^{cz_t}) = CL^{ax_l+by_l+cz_l} M^{ax_m+by_m+cz_m} T^{ax_t+by_t+cz_t}$ , igualando os expoentes encontramos o sistema linear

$$\begin{cases} w_l = x_l a + y_l b + z_l c \\ w_m = x_m a + y_m b + z_m c \\ w_t = x_t a + y_t b + z_t c \end{cases}$$

resolvendo este sistema encontramos os valores de  $a, b$  e  $c$ .

3. (ITA-2002) Em um experimento verificou-se a proporcionalidade existente entre energia e a frequência de emissão de uma radiação característica. Nesse caso, a constante de proporcionalidade, em termos dimensionais, é equivalente a:

- a) Força
- b) Quantidade de movimento
- c)\* Momento angular
- d) Pressão
- e) Potência

**Resolução:** Para uma partícula com quantidade de movimento  $\vec{Q}$  ocupando uma posição  $P$ , defina-se quantidade de movimento angular  $\vec{\psi}$ , em relação ao ponto  $O$ , como sendo o produto vetorial entre  $\vec{Q}$  e o vetor posição  $\vec{r} = P - O$ .

O módulo de  $\vec{\psi}$  é  $|\vec{\psi}| = |\vec{Q}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha$ . Com relação as grandezas fundamentais do  $MLT$ , temos:  $[\psi] = M \cdot (L \cdot T^{-1}) \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$

Como  $\hbar = \frac{E}{f}$  então  $[\hbar] = (M \cdot L \cdot T^{-2}) \cdot L \cdot T = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$  que é o momento angular.

4. (ITA-2009) Sabe-se que o momento angular de uma massa pontual é dado pelo produto vetorial do vetor posição pelo seu momento linear. Então, em termos das dimensões de comprimento ( $L$ ), de massa ( $M$ ), e de tempo ( $T$ ), um momento angular qualquer tem sua dimensão dada por:

- a)  $L^0 \cdot M^1 \cdot T^{-1}$
- b)  $L^1 \cdot M^0 \cdot T^{-1}$
- c)  $L^1 \cdot M^1 \cdot T^{-1}$
- d)  $L^2 \cdot M^1 \cdot T^{-1}$
- e)\*  $L^2 \cdot M^1 \cdot T^{-2}$

**Resolução:**  $\vec{\varphi} = |\vec{Q}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha$  logo  $[\varphi] = (M \cdot L \cdot T^{-1}) \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$ .



5. (ITA-2008) Define-se intensidade  $I$  de uma onda como a razão entre a potência que essa onda transporta por unidade de área perpendicular à direção dessa propagação. Considere para uma certa onda de amplitude  $A$ , frequência  $f$  e velocidade  $v$ , que se propaga num meio de densidade  $\rho$ , foi determinada que a intensidade é dada por:  $I = 2\phi^2 \cdot f^x \cdot \rho \cdot v \cdot a^y$  Indique quais são os valores para  $x$  e  $y$ , respectivamente.

a)\*  $x = 2, y = 2$

b)  $x = 1, y = 2$

c)  $x = 1, y = 1$

d)  $x = -2, y = 2$

e)  $x = -2, y = -2$

**Resolução:** Como a potência é o trabalho sobre o tempo, temos a equação dimensional da potência: Equação 1  $[P] = \left[\frac{\tau}{t}\right] = \left[\frac{F \cdot d}{t}\right] = \frac{(M \cdot L \cdot T^{-2}) \cdot L}{T} = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$  Como a intensidade é a potência sobre a área, temos: Equação 2  $[I] = \left[\frac{P}{A}\right] = \frac{M \cdot L^2 \cdot T^{-3}}{L^2} = M \cdot T^{-3}$ . Substituindo a equação 2 na relação dada  $I$ , temos

$$M \cdot T^{-3} = (T^{-1})^x \cdot M \cdot L^{-3} \cdot L \cdot T^{-1} \cdot L^y = T^{-x-1} \cdot M \cdot L^{-3+1+y} \text{ logo}$$

$$\begin{cases} -x - 1 = -3 \\ -3 + 1 + y = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema temos  $x=2$  e  $y=2$  o que conduz a  $I = 2\phi^2 \cdot f^2 \cdot \rho \cdot v \cdot a^2$ .

6. (ITA-2005) Quando camadas adjacentes de um fluido viscoso deslizam regularmente umas sobre as outras, o escoamento é dito laminar. Sob certas condições, o aumento de velocidade provoca o regime de escoamento turbulento, que é caracterizado por movimento aleatórios das partículas do fluido. Observa-se, experimentalmente, que o regime de escoamento (laminar ou turbulento) depende de um parâmetro adimensional (número de Reynolds) dado por  $R = \rho^\alpha \cdot v^\beta \cdot d^\gamma \cdot \mu^\tau$ , em que  $\rho$  é a densidade do fluido,  $v$ , sua velocidade,  $\mu$ , seu coeficiente de viscosidade e  $d$ , uma distância característica associada à geometria do meio que circunda o fluido. Por outro lado, num outro tipo de experimento, sabe-se que uma esfera de diâmetro  $D$ , que se movimenta num meio fluido, sofre a ação de uma força de arrasto viscoso dada por  $F = 3\pi \cdot D \cdot \mu \cdot v$ . Assim sendo, com relação aos respectivos valores de  $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ , uma das soluções é:

a)\*  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \tau = -1$

b)  $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1, \tau = 1$

c)  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1, \tau = 1$

d)  $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 1, \tau = 1$

e)  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, \tau = 1$

**Resolução:** Como  $F = 3\pi \cdot D \cdot \mu \cdot v$ , se isolarmos  $\mu$ , temos a seguinte equação  $\mu = \frac{F}{3\pi \cdot D \cdot v}$ ,  $\logo [\mu] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{L \cdot (L \cdot T^{-1})} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$ .

Fazendo a análise dimensional do número de Reynolds  $R = \rho^\alpha \cdot v^\beta \cdot d^\gamma \cdot \mu^\tau$ , temos  $[R] = M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = (M \cdot L^{-3})^\alpha \cdot (L \cdot T^{-1})^\beta \cdot L^\gamma \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1})^\tau$  daí  $M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = M^{\alpha+\tau} \cdot L^{-3\alpha+\beta+\gamma-\tau} \cdot T^{-\beta-\tau}$ .

$$\logo, \begin{cases} \alpha + \tau = 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma - \tau = 0 \\ -\beta - \tau = 0 \end{cases}$$

Como temos três equações e quatro incógnitas, temos que optar por um valor de  $\alpha$  sugerido nas alternativas e encontrando os demais valores. Com  $\alpha = 1$ , temos  $\beta = 1, \tau = -1, \gamma = 1$ , portanto  $R = \rho \cdot v \cdot d \cdot \mu^{-1}$ .

7. (ITA-2004) Durante a apresentação do projeto de um sistema acústico, um jovem aluno do ITA esqueceu-se da expressão da intensidade de uma onda sonora. Porém, usando da sua intuição, concluiu ele que a intensidade média  $I$  é uma função da amplitude do movimento do ar  $A$ , da frequência  $f$ , da densidade do ar  $\rho$  e da velocidade do som  $c$ , chegando à expressão  $I = A^x \cdot f^y \cdot \rho^z \cdot c$ . Considere as grandezas fundamentais: massa, comprimento e tempo, assinale a opção correta que representa os respectivos valores dos expoentes  $x, y$  e  $z$ .

- a) -1,2,2  
 b) 2,-1,2  
 c) 2,2,-1  
 d)\* 2,2,1  
 e) 2,2,2

**Resolução:** Fazendo a análise dimensional de  $I = A^x \cdot f^y \cdot \rho^z \cdot c$  temos a seguinte equação dimensional  $[I] = L^x \cdot (T^{-1})^y \cdot (M \cdot L^{-3})^z \cdot (L \cdot T^{-1}) = L^{x-3z+1} \cdot M^z \cdot T^{-y-1}$  como  $I = \frac{P}{A} = \frac{E}{t \cdot A} = \frac{E}{t \cdot A} = \frac{F \cdot d}{t \cdot A}$ , obtemos  $[I] = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L}{T \cdot L^2} = M \cdot L^{-3}$ .

Igualando as duas equações, tem-se:  $M \cdot T^{-3} = L^{x-3z+1} \cdot M^z \cdot T^{-2y-1}$

$$\logo \begin{cases} z = 1z \\ -3 = -2y - 1 \\ x - 3z + 1 = 0 \end{cases},$$

resolvendo o sistema temos  $x = 2, y = 2$  e  $z = 1$ , portanto

$$I = A^2 \cdot f^2 \cdot \rho^1 \cdot c$$

8. (ITA-2010) Pela teoria Newtoniana da gravitação, o potencial gravitacional devido ao Sol, assumindo simetria esférica, é dado por  $-V = \frac{GM}{r}$ , em que  $r$  é a distância média do centro do corpo ao Sol. Segundo a teoria da relatividade essa equação deve ser corrigida para  $-V = \frac{GM}{r} + \frac{A}{r^2}$ , em que  $A$  depende de  $G$ , de  $M$  e da velocidade da luz,  $c$ . Com base na análise dimensional e considerando  $K$  uma constante adimensional, assinale a opção que apresenta a expressão da constante  $A$ , seguida da ordem de grandeza da razão entre o termo de correção,  $\frac{A}{r^2}$ , obtido por Einstein, e o termo  $\frac{GM}{r}$  da equação de Newton, na posição da Terra, sabendo que a priori  $K = 1$ .

- a)  $A = KGM/c$  e  $10^{-5}$   
 b)  $A = KG^2M^2/c$  e  $10^{-8}$   
 c)  $A = KG^2M^2/c$  e  $10^{-3}$   
 d)  $A = KG^2M^2/c^2$  e  $10^{-5}$   
 e)\*  $A = KG^2M^2/c^2$  e  $10^{-8}$

**Resolução:**

$$\text{I } F = G \cdot M \cdot \frac{m}{r^2} \Rightarrow M \cdot L \cdot T^{-2} = [G] \cdot \frac{M^2}{L^2} \Rightarrow [G] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$$

$$\text{II } \left[\frac{A}{r^2}\right] = \left[\frac{G \cdot M}{r}\right] \Rightarrow \left[\frac{A}{L^2}\right] = \frac{(M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}) \cdot M}{L} \Rightarrow [A] = L^4 \cdot T^{-2}$$

$$\text{III } A = K \cdot G^x \cdot M^y \cdot c^z$$

substituindo (I) e (II) em (III) temos  $L^4 \cdot T^{-2} = (M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2})^x \cdot M^y \cdot (L \cdot T^{-1})^z$   
 então  $L^4 \cdot T^{-2} = M^{-x+y} \cdot L^{3x+z} \cdot T^{-2x-z}$

$$\text{da igualdade acima tem - se } \begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x + z = 4 \\ -2x - z = -2 \end{cases},$$

resolvendo o sistema linear encontramos a solução  $x = 2, y = 2$  e  $z = -2$ . Substituindo em (III) temos  $A = K \cdot G^2 \cdot \frac{M^2}{c^2}$ ,  $K = 1 \Rightarrow A = G^2 \frac{M^2}{c^2}$  como  $\varphi \cdot \frac{GM}{r} = \frac{A}{r^2} \Rightarrow \varphi \cdot GMr = A$  igualando as duas equações acima temos:

$$\varphi = \frac{GM}{rc^2} = \frac{6,67 \times 10^{-11} \cdot 1,99 \times 10^{30}}{1,5 \times 10^{11} \cdot 9 \times 10^{16}}$$

$$\text{logo } \varphi = 0,98 \times 10^{-8}.$$

9. Deduza a equação da aceleração centrípeta de um corpo em uma curva de raio  $r$ .

**Resolução:** Por dedução, os agentes físicos envolvidos neste problema seria o raio da curva, a velocidade do corpo e a massa do corpo.

Aplicando a análise dimensional em  $a_c = k \cdot r^\alpha \cdot v^\beta \cdot m^\gamma$  logo  $[a_c] = k \cdot L^\alpha \cdot (L \cdot T^{-1})^\beta \cdot M^\gamma = k \cdot M^\gamma \cdot L^{\alpha+\beta} \cdot T^{-\beta} = M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-2}$  resolvendo o sistema

$$\begin{cases} -\beta = -2 \\ \alpha + \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

temos como solução  $\alpha = -1, \beta = 2$  e  $\gamma = 0$ . Neste caso como  $k = 1$ , temos  $a_c = 1 \cdot r^{-1} \cdot v^2 \cdot m^0 \Rightarrow a_c = \frac{v^2}{r}$

10. Uma moeda se encontra no fundo de uma caixa cubica de volume  $V$  e totalmente submersa em um liquido de densidade  $\rho$ , sabendo que a gravidade local é  $g$ . Deduza uma equação que expresse a pressão sobre a moeda em função dessas três grandezas. Despreze a pressão atmosférica e use  $k = 1$ .

**Resolução:** O exercício em si pede para deduzimos o famoso teorema de Stevin, muito aplicado em hidrostática e manobras de mergulho. Talvez a intuição primaria de um aluno do ensino médio o leve a crer que a pressão sobre a moeda esteja relacionada com o volume, o que veremos que não é bem assim.

A pressão  $\mathcal{P}$  é igual a força aplicada por unidade de área  $\mathcal{P} = \frac{F}{A}$ , fazendo a análise dimensional temos  $[\mathcal{P}] = \frac{M \cdot (L \cdot T^{-2})}{L^2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$  Os elementos envolvidos em questão são  $\mathcal{P}, \rho, g$  e  $V$ , então podemos escrever

$\mathcal{P} = k \cdot \rho^\alpha \cdot g^\beta \cdot V^\gamma \Rightarrow [\mathcal{P}] = k \cdot (M \cdot L^{-3})^\alpha \cdot (L \cdot T^{-2})^\beta \cdot (L^3)^\gamma$  portanto igualando as duas equações tem-se  $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2} = k \cdot M^\alpha \cdot L^{-3\alpha + \beta + 3\gamma} \cdot T^{-2\beta}$  dai

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ -1 = -3\alpha + \beta + 3\gamma \\ -2 = -2\beta \end{cases} ,$$

resolvendo o sistema a solução é  $\alpha = 1, \beta = 1$  e  $\gamma = 1/3$  logo  $\mathcal{P} = \rho^1 \cdot g^1 \cdot V^{1/3} \Rightarrow \mathcal{P} = \rho \cdot g \cdot \sqrt[3]{V}$

## APÊNDICE G – ANÁLISE DIMENSIONAL NA BNCC

A Base Nacional Curricular Comum recentemente homologada pelo MEC, tem por objetivo

“nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, como também as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio, em todo o Brasil” (<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>, Fig. 32).

### AD NA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL

Com o risco de algum exagero, é possível afirmar que a Análise Dimensional entra nos primeiros tópicos do BNCC relativos ao Ensino Fundamental! Sem termos competência para entrar no fascinante campo da psicologia infantil (mas temos interesse), observamos aqui que a experimentação física já é enfatizada no primeiro item do módulo “Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações’ na planilha BNCC Ensino\_Fundamental.xlsx , que trata das crianças até um ano de idade:

“Os bebês aprendem com todo o seu corpo e seus sentidos. Por meio de suas ações de explorações, aprendem sobre o mundo à sua volta. A qualidade das vivências de explorações que os bebês têm nesse momento oferece uma base de experiência para interpretar o mundo. Na sua vontade de interagir e aprender sobre os objetos e materiais, usam como ferramentas aquilo que está ao seu alcance: olhos, nariz, mãos, boca, ouvidos e pés. Nesse contexto, é importante que os bebês participem de situações nas quais possam agir sobre os materiais repetidas vezes, divertindo-se, explorando, investigando, testando diferentes possibilidades de uso e interação, encontrando e resolvendo problemas; que possam explorar objetos com formas e volumes variados e identificar algumas propriedades simples dos materiais, como, por exemplo, a luminosidade, a temperatura, a consistência e a textura; que possam também explorar temperatura e inclinação dos diferentes tipos de solo da unidade de Educação Infantil. Além disso, é importante que possam, por meio da repetição com significado dessas situações, descobrir a permanência do objeto.”

Já entre quatro e seis anos;

“As crianças pequenas aprendem, por meio de suas explorações e investigações, sobre os objetos e as relações entre eles. Ao brincar explorando livremente diferentes tipos de materiais e objetos, as crianças percebem suas características e começam a estabelecer relações entre os diferentes materiais, como, por

exemplo, a diferença de tamanho, de peso, de temperatura, de comprimento etc. Ao viverem situações em que são incentivadas a medir objetos observando-os, comparando-os e percebendo seus atributos, as crianças avançam em suas noções sobre medidas e sobre as diferentes formas de expressá-las. Nesse contexto, é importante que as crianças pequenas tenham a oportunidade de participar de situações individuais, em pares ou pequenos grupos, nas quais sejam convidadas a usar instrumentos de medida (convencionais ou não) para medir, por exemplo, o comprimento da sala ou a quantidade de determinado ingrediente de uma receita; comparar objetos buscando respostas a perguntas como “Quantas vezes é maior?, Qual é mais pesado? Por quê? Como você sabe?” A partir de suas ações exploratórias e investigativas, e do contato e reflexão sobre diferentes formas de expressão e registro destas, as crianças também têm a oportunidade de iniciar suas primeiras reflexões de construções de gráficos básicos e outras representações para expressar medidas.

....

Para as crianças pequenas, é possível construir objetivos específicos relacionados à exploração de diferentes procedimentos para comparar grandezas, como usar unidades de medidas convencionais ou não em situações nas quais necessitem comparar distâncias ou tamanho. O currículo pode considerar objetivos específicos relacionados ao uso de gráficos básicos, como, por exemplo, usar gráficos simples para comparar quantidades. O currículo local pode, ainda, abordar atitudes a serem desenvolvidas, como interessar-se em participar de situações de resolução de problemas envolvendo medidas.”

## REFORMA DO ENSINO MÉDIO

As discussões sobre a Reforma do Ensino Médio foram iniciadas em 2014 e a Reforma foi decretada em 2017 por medida provisória. A Base Nacional Curricular Comum foi aprovada no final de 2018. Há que se reconhecer que o terreno está, infelizmente, um tanto minado. Não é o foco deste TCC entrar nesta seara. Apenas tomamos a liberdade de apontar que as Sociedades Científicas fizeram muitos questionamentos em relação a Reforma do Ensino Médio.

De nossa parte não somos pessimistas. Urge buscar consensos para políticas de Estado, e não apenas de cada Governo. Temos a esperança de que programas como o Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego, PRONATEC (<http://portal.mec.gov.br/pronatec>, criado em 2011, serão aperfeiçoados. Acreditamos na consolidação e aperfeiçoamento do sistema de Escolas Técnicas, tanto as públicas quanto as particulares e as que pertencem do sistema S.

Figura 31 – Objetivos da BNCC

## O QUE É A BNCC

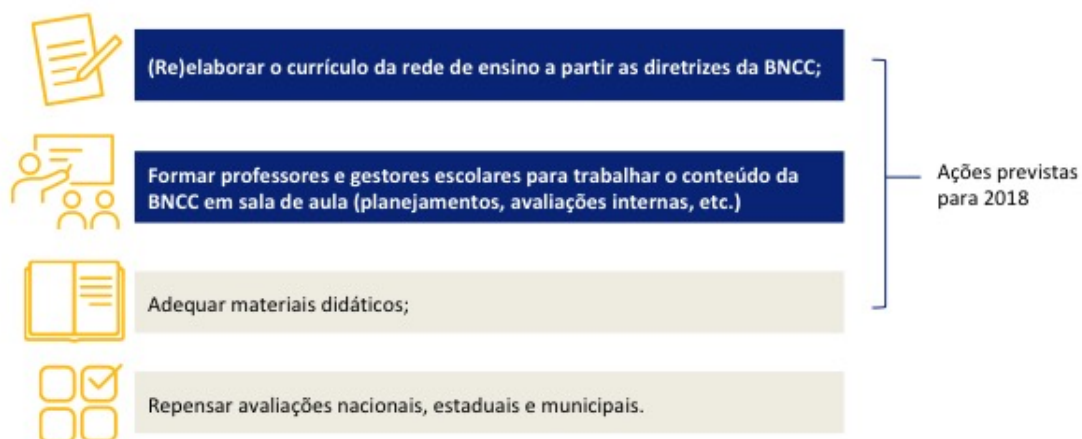


- 1** Documento que define as **aprendizagens essenciais** que **todos os alunos** devem desenvolver ao longo da educação básica – de forma progressiva e por áreas de conhecimento
- 2** **Referência nacional e obrigatória para a formulação dos currículos** dos sistemas e das redes escolares dos estados, do DF e dos municípios e das propostas pedagógicas das escolas
- 3** Soma-se aos propósitos que direcionam a educação brasileira para a **formação humana integral** e para a construção de uma **sociedade justa, democrática e inclusiva**

**1**  
ATIVIDADE

## IMPLEMENTAÇÃO DA BNCC

A BNCC foi aprovada. E agora?  
Será necessário, entre outras ações:



**1**  
ATIVIDADE