Seja no papel de aluna do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina ou como professora neste mesmo curso e instituição, duas queixas são muito comuns quando conversamos com alunos ingressantes: a matemática da escola – aquela que eles gostavam – não é a mesma da universidade e a matemática da universidade é muito difícil e formal se comparada à matemática que terão que trabalhar nas salas de aula da Escola Básica. Pensando numa forma de relacionar a “matemática da escola” com a “matemática da universidade”, elaboramos e aplicamos uma sequência didática abordando equações diofantinas com uma turma de primeira fase, na disciplina de Introdução à Teoria de Números, no primeiro semestre de 2018. A sequência proposta contemplou inicialmente um estudo histórico sobre Diofanto seguido por um estudo formal das equações diofantinas e, por fim, pela busca de aproximações entre conteúdos da Educação Básica, Diofanto e as equações diofantinas. Durante as atividades trabalhamos questões como a criação de roteiros, a criatividade, a elaboração e verificação de hipóteses, o trabalho em equipe, a resolução de exercícios e a análise crítica de livros didáticos, buscando desenvolver habilidades necessárias para o futuro professor de matemática paralelamente ao estudo do conteúdo matemático propriamente dito. Pudemos perceber a importância do uso da história da matemática para instigar os alunos a olharem para a matemática como uma ciência construída por pessoas e em contante transformação. Foi possível estimulá-los a analisarem e refletirem criticamente sobre materiais didáticos e sobre conteúdos matemáticos da Escola Básica. Ainda, verificamos a importância de oferecer um feedback ao aluno a cada etapa de uma sequência didática, afim de sanar dúvidas, discutir concepções e aprender por meio do erro.

Orientadora: Elisandra Bar de Figueiredo
Coorientadora: Ivanete Zuchi Siple

Joinville, 2019

ANO
2019

DÉBORA ELOISA NASS KIECKHOEFEL | EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: ENTRE O FORMALISMO DO ENSINO SUPERIOR E A SALA DE AULA DA ESCOLA BÁSICA

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TENCOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: ENTRE O FORMALISMO DO ENSINO SUPERIOR E A SALA DE AULA DA ESCOLA BÁSICA

DÉBORA ELOÍSA NASS KIECKHOEFEL

JOINVILLE, 2019

DÉBORA ELOÍSA NASS KIECKHOEFEL

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: ENTRE O FORMALISMO DO ENSINO SUPERIOR E A SALA DE AULA DA ESCOLA BÁSICA

Trabalho de Mestrado apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Coorientadora: Dra. Ivanete Zuchi Siple

JOINVILLE-SC
2019

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,

com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Kieckhoefel, Débora Eloísa Nass
Equações Diofantinas Lineares : Entre o formalismo do Ensino Superior e a sala de aula da Escola Básica / Débora Eloísa Nass Kieckhoefel. -- 2019.
128 p.

Orientadora: Elisandra Bar de Figueiredo
Coorientadora: Ivanete zuchi Siple
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2019.

1. História da matemática. 2. Formação de professores. 3. Criação de hipóteses. I. Figueiredo , Elisandra Bar de. II. Siple, Ivanete zuchi . III. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. IV. Titulo.

Equações Diofantinas Lineares: entre o formalismo do Ensino Superior e a sala de aula da Escola Básica

por

Débora Eloísa Nass Kieckhoefel

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRA EM MATEMÁTICA

Área de concentração em "Ensino de Matemática"
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

EBFigueiredo
Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)

Prof. Dr. Mateus Bernardes
UTFPR/Curitiba

Viviane Mª Beuter
Profa. Dra. Viviane Maria Beuter
CCT/UDESC

Joinville,SC, 31 de julho de 2019.

AGRADECIMENTOS

Não quero usar esse espaço de maneira negligente ou descuidada, como se escrever os agradecimentos fosse uma formalidade ou algo banal. Por isso, optei por escrever esses agradecimentos após a realização da defesa. Quero que esse espaço expresse minha verdadeira gratidão. Quero falar aqui, daqueles que realmente impactaram essa pesquisa e minha formação durante o mestrado.

Maisa, muito obrigada por me convidar para entrar nessa aventura contigo. Por me tirar da zona de conforto e me arriscar numa área que eu não me sentia capaz. Obrigada por todas as horas de estudo, exercícios, discussões e explicações compartilhadas. Você é uma pessoa maravilhosa, com um coração enorme, e uma calma contagiante.

Elis, quanto aprendi contigo! Seja nas aulas, seja como orientadora, seja como pessoa. Um cuidado com as palavras, uma dedicação a tudo que faz, um exemplo em tantos aspectos. Tua dedicação, tuas “cobranças” cuidadosas, teu jeitinho de me motivar quando eu não via muita saída, não me deixaram desistir desse trabalho, que por fim, só me enche de orgulho! Muito obrigada!

Iva, quanta energia, quanto conhecimento e quantas discussões e reflexões tão proveitosas. Me sinto privilegiada por ter trabalhado um pouquinho com você. Me sinto grata pela tua disponibilidade, pela tua dedicação e por todas as contribuições que, mesmo na correria, você sempre dá um jeitinho de fazer. Obrigada por tudo!

Vivi, que alegria ter você na minha banca e como colega de trabalho. Que troca legal! Obrigada por estar presente nesse momento tão importante da minha formação, por se dispor a avaliar meu trabalho com tanto cuidado e por compartilhar as reflexões que ele sucitou. Foi especial pra mim!

Mateus, tenho certeza que teus questionamentos e provocações vão me acompanhar por um longo tempo. Mais do que contribuir para essa pesquisa, essa troca trouxe reflexões profundas sobre o que quero e o que acredito enquanto professora. E sou extremamente grata por isso! Obrigada pelo impacto que você causou em mim!

Gabriel, foi muito divertido e muito agregador ter você como colega durante o Profmat. Só me traz lembranças boas e coloca um sorriso no rosto lembrar o quanto nos divertimos, nos desesperamos e estudamos juntos. Obrigada pela parceria.

Amor, obrigada pelo apoio de sempre. Obrigada por acreditar em mim, torcer e me animar quando as coisas parecidas pesadas demais.

“No fim tu hás de ver que as coisas mais leves são as únicas
que o vento não conseguiu levar:
um estribilho antigo
um carinho no momento preciso
o folhear de um livro de poemas
o cheiro que tinha um dia o próprio vento...”

Mario Quintana

RESUMO

Seja no papel de aluna do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina ou como professora neste mesmo curso e instituição, duas queixas são muito comuns quando conversamos com alunos ingressantes: a matemática da escola – aquela que eles gostavam – não é a mesma da universidade e a matemática da universidade é muito difícil e formal se comparada à matemática que terão que trabalhar nas salas de aula da Escola Básica. Pensando numa forma de relacionar a "matemática da escola" com a "matemática da universidade", elaboramos e aplicamos uma sequência didática abordando equações diofantinas com uma turma de primeira fase, na disciplina de Introdução à Teoria de Números, no primeiro semestre de 2018. A sequência proposta contemplou inicialmente um estudo histórico sobre Diofanto seguido por um estudo formal das equações diofantinas e, por fim, pela busca de aproximações entre conteúdos da Educação Básica, Diofanto e as equações diofantinas. Durante as atividades trabalhamos questões como a criação de roteiros, a criatividade, a elaboração e verificação de hipóteses, o trabalho em equipe, a resolução de exercícios e a análise crítica de livros didáticos, buscando desenvolver habilidades necessárias para o futuro professor de matemática paralelamente ao estudo do conteúdo matemático propriamente dito. Pudemos perceber a importância do uso da história da matemática para instigar os alunos a olharem para a matemática como uma ciência construída por pessoas e em contante transformação. Foi possível estimulá-los a analisarem e refletirem criticamente sobre materiais didáticos e sobre conteúdos matemáticos da Escola Básica. Ainda, verificamos a importância de oferecer um feedback ao aluno a cada etapa de uma sequência didática, afim de sanar dúvidas, discutir concepções e aprender por meio do erro.

Palavras-chave: História da matemática. Formação de professores. Criação de hipóteses.

ABSTRACT

Whether as an undergraduate student in Mathematics at the Santa Catarina State University or as a professor at the same program and institution, two complaints commonly surface when talking to incoming students: the “school math” - the one they used to like - is not the same in college, and the college math is very difficult and formal when compared to the math they will have to teach in the elementary and secondary school classrooms. In an atempt to connect the "school math" to the "college math", we developed and applied a didactic sequence regarding diophantine equations to a first-term class in the Introduction to Number Theory course, in the first half of 2018. The proposed sequence consisted initially of a history study on Diophantus, followed by a formal study of the Diophantine equations and, finally, a search for approximations between contents of elementary and secondary Education, Diophantus and Diophantine equations. During the activities, we worked on topics such as script creation, creativity, hypothesis formulation and verification, teamwork, resolution of exercises and critical analysis of textbooks, seeking to develop the necessary skills for the future mathematics teacher alongside with the study of the mathematical content itself. We were able to see the importance of using the history of mathematics to instigate students to look at mathematics as a science built by people and in constant transformation. They were stimulated to critically analyze and reflect on didactic materials and on mathematical contents of the elementary and secondary school. Furthermore, we noticed the importance of providing feedback to the student at each step of a didactic sequence, in order to answer questions, discuss conceptions and learn through error.

Key words: History of mathematics. Teacher training. Hypotheses formulation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 PARA COMEÇO DE CONVERSA...

No ano de 2016 comecei a atuar como professora da turma de ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Como costumo fazer na primeira aula, pedi que os alunos se apresentassem e falassem brevemente sobre o motivo de terem escolhido cursar Licenciatura em Matemática. As respostas variavam, mas entre as que mais apareceram foram: “sempre quis ser professor e a disciplina que eu me dava melhor era matemática”; “na escola sempre gostei de matemática”; “tive um professor de matemática que me inspirou”; “não sei muito bem o que quero ainda e como a universidade é de graça resolvi fazer para não ficar sem estudar”; “não consegui passar no vestibular em engenharia por isso estou fazendo matemática (que não tem concorrência), e no próximo semestre tento engenharia novamente”. Com exceção dessas duas últimas, as outras justificativas estão intimamente relacionadas com a matemática que o aluno conhece. Aquela matemática que ele aprendeu na escola e, muito provavelmente, tinha bastante facilidade em compreender.

Não demorou muito para que começassem as primeiras desistências, e aos poucos a sala de aula ficava cada vez mais vazia. Algo razoável seria imaginar que aqueles que estavam em dúvida sobre o que “fazer da vida” viram que a matemática não era bem o seu caminho e acabaram desistindo. Mas, e quando aquele aluno que no primeiro dia de aula parecia tão animado com a matemática, ou com o ser professor, desistia? E o que pensar dos alunos que permaneciam no curso, mas pareciam cada vez mais desmotivados?

Essas questões começaram a me intrigar e, conversando com os alunos informalmente, duas queixas apareceram mais fortemente[1]. Uma delas se referia ao fato de estarem cursando licenciatura e precisarem estudar uma matemática, que, na visão deles, não era aquela que precisariam ensinar na escola. Outra queixa dizia respeito ao fato de terem escolhido cursar matemática por gostarem da matemática da escola, mas essa não era a mesma que encontravam no Ensino Superior.

---

[1] Ressalto aqui que não realizei nenhuma pesquisa e não fiz nenhum levantamento de dados. Abordo apenas minhas observações e perspectivas diante de conversas “de corredor” que tive com meus alunos nos últimos dois anos. Sei que as duas queixas apresentadas não são as vilãs das desistências, mas que há inúmeros fatores que influenciam na desistência de cursos de licenciatura e existem várias pesquisas a esse respeito. Exploro aqui apenas esses pontos para expressar a motivação para essa pesquisa.

Analisando as disciplinas presentes na primeira fase do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC, temos: Desenho Geométrico, que trabalha com noções de geometria e principalmente, construções geométricas com régua e compasso; Filosofia da Ciência, que, como o nome já diz, discute questões envolvendo a filosofia, a ciência e articulando com a educação; Geometria Plana e Espacial, que trabalha com vários conceitos geométricos já conhecidos dos alunos, porém agora ampliando o foco de demonstração de teoremas e propriedades; Introdução à Teoria dos Números (ITN), aborda a aritmética e apresenta a construção dos conjuntos numéricos juntamente com suas operações, utilizando para isso, de demonstrações; Lógica Matemática, que trabalha a questão da lógica proposicional; Matemática Básica, na qual se faz um estudo sobre funções, aprofundando e demonstrando conceitos que já foram vistos no Ensino Médio e, Língua Brasileira de Sinais que apresenta e introduz essa forma de comunicação e expressão.

Pensando em, de alguma forma, minimizar as duas queixas expressas acima, me questionei sobre qual disciplina eu poderia propor uma atividade diferenciada de modo a possibilitar que os alunos vissem uma relação entre a matemática da escola e a matemática da universidade. Recordando da minha própria experiência como aluna de Licenciatura em Matemática da UDESC, lembrei que tive muita dificuldade com a disciplina de Introdução à Teoria de Números (ITN), pois parecia ser uma disciplina completamente diferente de tudo que eu já conhecia sobre matemática. Mas, olhando para a ementa da disciplina de ITN, na qual temos: Números naturais; Números inteiros; Números racionais e Polinômios, vemos que todos estes conteúdos são abordados na Educação Básica. Quer dizer que, na verdade, eu já tinha tido contato com todo aquele conteúdo. Mais do que isso, todos os alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática já tiveram contato com esses conteúdos e como futuros professores de matemática terão que abordá-los em algum momento da vida profissional. Contudo, como o enfoque da disciplina de ITN é apresentar esses conteúdos, priorizando uma construção axiomática e demonstrativa, muitas vezes os alunos, assim como aconteceu comigo, não conseguem relacionar com o conteúdo apresentado da Educação Básica. Tendo isso em vista, optei por desenvolver um trabalho voltado para a disciplina de ITN.

Tendo esse panorama em mente, tínhamos como intuito aproximar o aluno ingressante no curso de Licenciatura em Matemática, da matemática que ele gosta, por meio do conteúdo axiomático[2] visto na universidade. E, simultaneamente, motivar aqueles que desejam ser

[2] Uma determinada afirmação para ser aceita na comunidade matemática precisa ser demonstrada de modo que seja irrefutável a validade daquela afirmação. Na Escola Básica, em sua grande maioria, o professor de matemática não faz uso de demonstrações, apresentando o conteúdo como "pronto" e "acabado" e o aluno apenas aceita que

professores, por meio da busca da relação entre o conhecimento axiomatizado e aquele que será apresentado ao aluno da Escola Básica.

Em resumo, o questionamento que nos moveu nessa pesquisa é: **de que forma podemos relacionar os conteúdos da disciplina de Introdução à Teoria dos Números com aqueles apresentados na sala de aula do Ensino Básico?** Com isso, esperamos minimizar os dois problemas que motivaram a realização dessa pesquisa. Aquele aluno que se sente desmotivado, porque quer ser professor, terá a possibilidade de visualizar como o conteúdo de teoria dos números que parece tão "formal" e "puro" pode ser aplicado na sala de aula. Por outro lado, o aluno que tinha paixão pela matemática "da escola", pode relacionar o conteúdo da universidade com aquela matemática que o fez escolher o curso de Licenciatura em Matemática.

Em função do curto prazo para a realização dessa pesquisa, sabemos que não é possível abordar todos os conteúdos da disciplina de ITN de maneira diferenciada, de modo que foi necessário escolher apenas um conteúdo para o desenvolvimento da pesquisa. Pensando nisso, conversamos com dois professores que já ministraram a disciplina de ITN, questionando sobre algum conteúdo que eles viam que poderia ser explorado de uma maneira diferenciada. Como sugestões desses professores, apareceram os conteúdos/temas: equações diofantinas, congruências lineares, sistemas de congruências e código de barras, sendo que "equações diofantinas" foi um conteúdo comum sugerido pelos dois professores consultados. Assim, como o conteúdo de equações diofantinas apareceu como sugestão dos dois professores, e por ter sido um conteúdo que eu mesma tive dificuldades durante a graduação, pareceu um tópico interessante a abordar.

Tendo escolhido trabalhar com equações diofantinas, reformulamos nossa pergunta reescrevendo-a como: **de que forma podemos relacionar o conteúdo de equações diofantinas visto na disciplina de Introdução à Teoria dos Números com conteúdos apresentados na sala de aula do Ensino Básico?**

Tal pergunta, por sua vez, nos encaminha para o objetivo geral que é apresentar uma possiblidade de relacionar o conteúdo de equações diofantinas visto em ITN com o contexto da Escola Básica. E este, se abre para os seguintes objetivos:

- Estudar a construção histórica do conteúdo de equações diofantinas, buscando artifícios que ajudem a perceber a importância da aplicação e do conhecimento deste conteúdo.

---

aquilo é válido. Já na universidade, o aluno de Licenciatura em Matemática se depara com o conhecimento axiomatizado e precisa compreender como esse conhecimento foi construído e demonstrado ao longo da história. Nesse sentido, entendemos que um conteúdo axiomático é aquele que é construído de modo a demonstrar a validade de cada uma das afirmações, utilizando para isso o método axiomático-dedutivo.

- Analisar livros de aritmética para verificar de que forma o conteúdo de equações diofantinas aparece no seu estudo em nível superior.
- Verificar de que forma esse conteúdo aparece, ainda que indiretamente, nos documentos oficiais, como nos Parâmetros Curriculares Nacionais, na Base Nacional Curricular Comum, na Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina e na Matriz Curricular do Município de Joinville.
- Analisar livros didáticos a fim de verificar se existem e de que forma são propostos exercícios que estejam relacionados ao conteúdo de equações diofantinas.
- Construir uma sequência didática.
- Experimentar e analisar a referida sequência numa turma de ITN.

Almejando alcançar os objetivos acima propostos, realizaremos uma pesquisa de caráter qualitativo.

1.1 QUAIS CAMINHOS A PESQUISA EM ARITMÉTICA JÁ PERCORREU NO CONTEXTO DO PROFMAT

Uma vez que estamos inseridos no contexto do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), nos interessou conhecer sobre as pesquisas já realizadas sobre conteúdos de aritmética desenvolvidas nesse programa. No dia 19 de outubro de 2018, realizamos uma busca no banco de dissertações do Profmat com a palavra "aritmetica[3]", obtendo 74 registros. Neste banco a pesquisa retorna apenas dissertações em que a palavra buscada encontra-se no título do trabalho. Dentre esses resultados, são de interesse dessa pesquisa apenas aqueles que tem como foco conteúdos que fazem parte da disciplina de ITN. Pesquisas envolvendo "progressão aritmética" apareceram nessa busca, mas não contribuem para a presente dissertação. Assim, selecionando apenas as pesquisas envolvendo os conteúdos de nosso interesse, restaram as 44 dissertações apresentadas no quadro abaixo:

Quadro 1 - Dissertações defendidas no Profmat que possuem a palavra "Aritmética" no título

Nº	Data da Defesa	Aluno	Título da Dissertação

[3] Ao pesquisar a palavra "Aritmética" com acento, não obtivemos nenhum resultado.

01	29/06/2018	Kátia Aparecida da Cruz	Investigação matemática em problemas de aritmética
02	25/05/2018	Joselito Elias de Araujo	Divisibilidade, congruência e aritmética modular em problemas olímpicos
03	15/05/2018	Rodolfo Cavalcante Pinheiro	Aritmética modular: uma aplicação no ensino fundamental
04	20/02/2018	Francisca Daniella Andreu Simões Moraes Lage	Um estudo de aritmética modular para a educação básica
05	19/02/2018	Augusto Sergio Furquim	Da aritmética à álgebra: um passo importante nos anos iniciais do ensino fundamental
06	29/11/2017	Jair da Silva Matos	Aritmética e aplicações
07	24/11/2017	Carlos Maurício de Sousa	Aritmética, frações contínuas e aplicações à música
08	29/09/2017	Sumaia Almeida Ramos	O jogo caça ao tesouro como recurso didático para o ensino da aritmética modular
09	01/09/2017	Marco Antonio Lopes	Introdução à criptografia usando aritmética modular
10	06/07/2017	Romenia Karoline de Aguiar Couto	Proposta de utilização de código de barras como recurso didático para o ensino da aritmética modular e de vetores em uma turma do 3º ano do ensino médio de uma escola pública da cidade de Petrolina-PE
11	28/04/2017	Rosangela Ferreira Domingues	A aritmética como conteúdo extracurricular
12	11/04/2017	Nilciede Silva Cruz	Aritmética em sala de aula: jogos, mágicas, diversão e desafios.
13	03/03/2017	Lais Aline Casagrande Pires de Melo	Decifrando a aritmética para o ensino fundamental
14	07/12/2016	Débora Danielle Alves Moraes Priebe	Tópicos de aritmética para as séries finais do ensino fundamental: uma proposta focada na resolução de problemas
15	06/12/2016	Henrique Bernardes da Silva	Construção dos conjuntos numéricos e o processo de significação das operações aritméticas
16	25/11/2016	Maily Marques Pereira	A resolução de questões das olimpíadas de matemática com teoremas da aritmética
17	02/09/2016	Diego Aparecido Maronese	Tópicos de aritmética modular na educação básica: uma proposta de atividades
18	29/03/2016	Samuel Cardoso Oliveira Silva	Aritmética modular a aplicações
19	15/02/2016	Natalia Ojeda Mastronicola	Aritmética por apps
20	15/12/2015	Luciana Mota Cerqueira	Aritmética modular nos códigos de barras
21	11/12/2015	Paulo da Silva Belizario	Aritmética e criptografia com aplicações no ensino médio

22	18/11/2015	Fernando Ramires de Carvalho	Números primos e o teorema fundamental da aritmética no sexto ano do ensino fundamental
23	18/11/2015	Gabriela dos Santos Barbosa	Números primos e o teorema fundamental da aritmética no sexto ano do ensino fundamental
24	18/11/2015	Roberta Marcele Vaz da Costa	Números primos e o teorema fundamental da aritmética no sexto ano do ensino fundamental
25	24/09/2015	Antonio Maciel Goes	Aritmética: divisibilidade, congruências e números primos - uma proposta para o ensino médio
26	06/08/2015	Emmanuel Cristiano Lopes de Moraes	Revisitando os algoritmos para operações aritméticas fundamentais
27	11/04/2015	Renato da Cruz Avelar	Uma abordagem da aritmética modular na primeira série do ensino médio
28	10/03/2015	Glauber Paiva Santos	Aritmética modular: noção de congruência da teoria dos números para a teoria de anéis
29	25/02/2015	Carlos Wilson Vieira da Silva	A aritmética no ensino médio
30	25/02/2015	Silvio Luiz Fernandes Freitas	A aritmética no ensino médio
31	12/11/2014	Allisson Cordeiro	Tópicos de aritmética: a sequência de Fibonacci
32	12/11/2014	Julio Cezar Cordeiro de Paula	Tópicos de aritmética: equações diofantinas
33	12/11/2014	Luana Fonseca Duarte	Tópicos de aritmética: quadrados mágicos
34	12/11/2014	Rafael da Silva Cortiano	Tópicos de aritmética: o algoritmo de Euclides
35	30/08/2014	Tércio das Neves Almeida	Uma abordagem da aritmética modular no ensino básico
36	29/08/2014	Regene Chaves Pimentel Pereira Barreto	Aritmética modular, códigos elementares e criptografia
37	20/05/2014	Francisco Ailton Alcantara	Tópicos de aritmética: uma proposta para a educação básica
38	14/04/2014	Carlos Costa dos Reis	Oficina de aritmética: o uso dos números primos na resolução de problemas e algumas curiosidades
39	11/04/2014	Marco Antonio de Oliveira Barros	Aritmética modular: aplicações no ensino médio
40	08/04/2014	Rosipleia Souza dos Santos	Relações de Girard e aritmética: construção de conceitos básicos e atividades para o ensino fundamental e médio
41	28/06/2013	Gilvan Lira Souza	Resolução de problemas sobre aritmética para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.
42	17/04/2013	Iury Kersnowsky de Santanna	A aritmética modular como ferramenta para as séries do ensino fundamental

43	15/04/2013	Maykon Costa de Oliveira	Aritmética: criptografia e outras aplicações de congruências
44	15/04/2013	Josiane Colombo Pedrini Esquinca	Aritmética: códigos de barras e outras aplicações de congruências

Fonte - Produção da autora, 2018.

Por meio, apenas, da observação dos títulos dos trabalhos elencados, montamos o quadro abaixo que relaciona o tema de cada trabalho citado no quadro apresentado anteriormente.

Quadro 2 - Categorização das dissertações defendidas no Profmat que possuem a palavra "Aritmética" no título

Conteúdo / Tema	**Dissertações**
Aritmética	01, 05, 06, 07, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 25, 26, 29, 30, 37, 40, 41
Criptografia	09, 21, 36, 43
Código de barras	10, 20, 44
Congruência / Aritmética modular	02, 03, 04, 08, 17, 18, 27, 28, 35, 36, 39, 42, 43, 44
Números primos	22, 23, 24, 38
Sequência de Fibonacci	31
Equações diofantinas	32
Quadrados mágicos	33
Algoritmo de Euclides	34

Fonte – Produção da autora, 2018.

Podemos observar que a grande maioria das pesquisas não aborda um tema específico, mas abrange o conteúdo de aritmética de maneira mais ampla. Destacam-se também as pesquisas envolvendo a aritmética modular.

Realizar o levantamento nos permitiu observar que, no âmbito da aritmética como um todo, o tema equações diofantinas apareceu pouco como tópico principal da pesquisa. Observando o Quadro 2, vemos que trabalhos envolvendo congruências e código de barras – temas que, como mencionamos anteriormente, foram sugeridos pelos professores que já lecionaram ITN – aparecem com mais frequência do que aqueles que tratam especificamente de equações diofantinas (que apareceu em apenas um trabalho).

Assim, novamente no banco de dissertações do Profmat, fizemos uma busca, agora pela expressão "equacoes diofantinas", a fim de analisar os caminhos já percorridos pelas pesquisas nesse tema. Qual não foi nossa surpresa ao encontrar 25 trabalhos! Uma das justificativas para a escolha desse conteúdo específico da disciplina de ITN, havia sido justamente a quantidade pequena de trabalhos envolvendo esse tema. Optamos, contudo, por fazer uma breve análise de cada um a fim de constatar caminhos ainda não percorridos por essas pesquisas.

Analisamos cada pesquisa individualmente, consultando o resumo, o sumário, e “folheando” brevemente o trabalho. A partir daí, construímos o quadro abaixo, contendo a data de defesa do trabalho, o autor, o título e uma breve descrição sobre a pesquisa.

Quadro 3 - Dissertações defendidas no Profmat que possuem a expressão “equações diofantinas” no título

Data da Defesa	Aluno	Título da Dissertação
01		
31/08/2018	Marcia Eni Voelz	Utilização dos métodos vieta jumping e descida infinita na solução de equações diofantinas e problemas envolvendo divisibilidade
Descrição breve: O trabalho explora a matemática envolvida nos métodos da Descida Infinita de Fermat e Vieta Jumping para problemas de equações diofantinas e de divisibilidade. Além disso, propõe sua utilização na abordagem de problemas clássicos e das Olimpíadas Internacionais de Matemática.		
02		
07/05/2018	Bárbara Medeiros Vieira	Equações Diofantinas: Uma proposta didática para o 9º ano do ensino fundamental
Descrição breve: Neste trabalho a autora apresenta uma proposta pedagógica para o ensino das equações diofantinas no Ensino Fundamental e a aplica, usando a Engenharia Didática. O objetivo é melhorar os raciocínios algébrico e aritmético dos alunos; além de fomentar o trabalho do professor em sala de aula.		
03		
26/04/2018	Leandro Farias Maia	Equações Diofantinas
Descrição breve: O autor apresenta conceitos de Teoria dos Números, Equações Diofantinas Lineares e Não Lineares. Para cada um dos tópicos, traz exercícios de aprofundamento que propõe que sejam apresentados aos alunos participantes da Olimpíada de Matemática.		
04		
25/04/2018	Andre Fellipe Franco Pereira De Oliveira	Equações Diofantinas Lineares: Uma proposta para as séries finais do Ensino Fundamental
Descrição breve: O autor apresenta uma proposta de sequência didática sobre equações diofantinas para as séries finais do ensino fundamental, almejando que os alunos adquiram a capacidade de identificar situações-problema que possam ser modelados e resolvidos por meio dessas equações, uma vez que em processos seletivos de concursos militares, Colégio		

<table>
<tr><td colspan="3">Naval, Colégio Militar e em provas da Olimpíada Brasileira de Matemática esse tipo de questão é recorrente.</td></tr>
<tr><td colspan="3">05</td></tr>
<tr><td>20/12/2017</td><td>Lucinda Freese Alves</td><td>Aplicações de equações diofantinas e um passeio pelo último teorema de Fermat</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Com o intuito de auxiliar estudantes, professores e apaixonados pela matemática, a melhor compreender, interpretar e resolver problemas que possam ser solucionados através das equações diofantinas a autora apresenta conceitos básicos sobre equações diofantinas bem como algumas aplicações práticas. Fala ainda sobre o Último Teorema de Fermat para os casos de n=2, n=3 e n=4.</td></tr>
<tr><td colspan="3">06</td></tr>
<tr><td>04/05/2017</td><td>Eduarda Ferreira Barros</td><td>Equações Diofantinas não lineares: uma proposta didática para resolução de problemas</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Além do conteúdo matemático sobre produtos notáveis, congruências, geometria analítica e relações métricas no triângulo, conceitos requeridos para a resolução de equações diofantinas, apresenta planos de aula para a resolução de equações diofantinas não lineares no ensino fundamental.</td></tr>
<tr><td colspan="3">07</td></tr>
<tr><td>15/02/2017</td><td>Nadjara Silva Paixão de Deus</td><td>Equações Diofantinas lineares e o GPS: nova conexão curricular</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Utiliza o problema da localização de uma aeronave no espaço aérea brasileiro como contexto para a resolução de equações diofantinas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">08</td></tr>
<tr><td>24/08/2016</td><td>Altino da Silva Neto</td><td>Convite às equações Diofantinas: uma abordagem para a educação básica</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Apesar do título dar a entender alguma relação com Ensino Básico ou mesmo alguma proposta didática, o autor apresenta uma abordagem teórica dos conceitos de aritmética e equações diofantinas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">09</td></tr>
<tr><td>27/10/2015</td><td>Jackson Pereira Júnior</td><td>Frações contínuas e equações Diofantinas lineares e não-lineares</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Apresenta uma abordagem teórica acerca da relação entre frações contínuas e equações diofantinas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">10</td></tr>
<tr><td>26/08/2015</td><td>Antoniel Abreu dos Anjos</td><td>Equações Diofantinas: sequência didática e o método da descida infinita de Fermat</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Apresenta uma breve sequência didática envolvendo equações diofantinas e apresenta a teoria matemática sobre a descida infinita de Fermat.</td></tr>
<tr><td colspan="3">11</td></tr>
</table>

30/03/2015	Carlos Wagner Almeida Freitas	Equações Diofantinas
Descrição breve: O autor apresenta uma abordagem teórica de equações diofantinas, além de trazer alguns problemas. Também fala brevemente sobre a utilização do Maple e do Winplot na resolução e visualização de equações diofantinas lineares.		
12		
13/03/2015	Adilson de Campos	Equações Diofantinas lineares: possibilidades didáticas usando a resolução de problemas
Descrição breve: Além da explicação teórica, o autor apresenta a aplicação e análise de uma sequência de atividades para o Ensino Fundamental baseado na metodologia da Engenharia Didática.		
13		
12/11/2014	Julio Cezar Cordeiro de Paula	Tópicos de aritmética: equações Diofantinas
Descrição breve: Com um trabalho apresentado em formato de artigo o autor apresenta uma proposta de material para ser utilizado em cursos extracurriculares, com resoluções comentadas de problemas envolvendo equações diofantinas.		
14		
05/06/2014	Rildo Ribeiro	Equações Diofantinas: uma abordagem para o ensino médio
Descrição breve: Apresenta três sequências didáticas para a resolução de equações diofantinas no ensino médio. Uma delas por fatoração, outra por meio do uso de desigualdades e a terceira, por tentativa e erro e usando conceitos da Teoria de Números.		
15		
29/04/2014	Fábio Pinheiro Luz	O uso de equações Diofantinas lineares na resolução de problemas de preparação Olímpica
Descrição breve: Apresenta o contexto e a aplicação de uma oficina com alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática, utilizando a Engenharia Didática.		
16		
26/04/2014	Natália Medeiros do Nascimento	Equações Diofantinas e o método das secantes e tangentes de Fermat
Descrição breve: Apresenta um material teórico que busca oportunizar a realização de uma leitura consultiva para professores e futuros professores acerca das equações diofantinas.		
17		
12/04/2014	Josias Neubert Savóis	Método para resolver equações Diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais

Descrição breve: Apresenta o conceito de máximo divisor comum generalizado que permite resolver equações diofantinas com coeficientes racionais. Em seguida, apresenta a resolução de alguns problemas.		
18		
13/03/2014	Moésio Morais de Sales	Resolução de problemas de equações Diofantinas
Descrição breve: Apresenta o software Pari/GP para a resolução de equações Diofantinas, em especial, no caso de exponencial.		
19		
24/02/2014	Alexandre Hungaro Vansan	Equações Diofantinas: um projeto para a sala de aula e o uso do Geogebra
Descrição breve: Apresenta uma sequência didática detalhada de um projeto para a utilização do Geogebra na resolução e interpretação de equações diofantinas. Segundo o autor, ele almeja que o material seja usado pelos professores do Ensino Básico.		
20		
15/04/2013	Giseli Duardo Maciano Campos	Equações Diofantinas lineares
Descrição breve: Apresenta uma explanação teórica acerca das equações diofantinas lineares com *n* variáveis. Aborda a resolução de alguns problemas envolvendo 2, 3 e 4 variáveis.		
21		
15/04/2013	Francisco Derilson de Melo	Uso das matrizes na parametrização das soluções de equações Diofantinas lineares
Descrição breve: Utiliza o algoritmo de Euclides estendido para a resolução de equações diofantinas.		
22		
12/04/2013	Paulo Sergio de Almeida Santos	Congruência e equações Diofantinas: uma proposta para o ensino básico
Descrição breve: Apresenta duas sequências didáticas, uma delas abordando os conteúdos de congruência módulo *n* e a outra, equações diofantinas.		
23		
12/04/2013	Adriano Valeriano da Silva	Uso das equações Diofantinas lineares no ensino fundamental
Descrição breve: Apresenta detalhadamente quatro sequências de atividades para serem aplicadas pelos professores no contexto do Ensino Fundamental.		
24		
01/03/2013	Fábio Vieira de Andrade Borges	Equações Diofantinas lineares em duas incógnitas e suas aplicações

Descrição breve: Apresenta problemas resolvidos, atividades e fala da utilização do Maple e do Winplot para resolver e visualizar graficamente os problemas propostos.		
25		
01/03/2013	Diogo Geraldo Rios	Equações Diofantinas lineares na educação básica
Descrição breve: Em formato de artigo o autor apresenta a resolução de 15 situações-problema que podem ser resolvidas utilizando equações diofantinas. Busca apresentar formas de resolução além da tentativa e erro.		

Fonte – Produção da autora, 2018.

Podemos observar que os trabalhos listados acima, em sua grande maioria, apresentam algum tipo de relação com o contexto da Escola Básica. Seja propondo planos de aula, sequências didáticas, oficinas e atividades extraclasse, e, em alguns casos, inclusive aplicando a analisando essas aplicações. São raros os trabalhos que são compostos apenas por conceitos teóricos do conteúdo de equações diofantinas. Em nossa análise pudemos perceber que o foco principal das pesquisas já desenvolvidas, no contexto do Profmat, tem sido a aplicação e a proposição de atividades voltadas para o Ensino Básico.

Nossa proposta, contudo, conforme já explanamos, é propor atividades para uma turma de alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática. O foco em alunos de licenciatura apareceu em apenas um dos trabalhos acima, a saber a dissertação desenvolvida por Fábio Pinheiro Luz e intitulada “O uso de equações diofantinas lineares na resolução de problemas de preparação Olímpica”. Essa constatação mostra a relevância dessa pesquisa, uma vez que escolhemos trilhar um caminho ainda pouco explorado no contexto em que estamos inseridos.

1.2 CONTEXTO DE APLICAÇÃO E COMPOSIÇÃO DESSE TRABALHO

Apresento aqui uma breve descrição do contexto geral em que as atividades apresentadas nesse trabalho foram aplicadas[4]. Detalhes pertencentes a alguma atividade específica, serão descritos imediatamente antes da apresentação de cada atividade.

As atividades descritas neste trabalho foram aplicadas na turma ingressante no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina, no primeiro semestre de 2018. Havia 40 alunos matriculados na turma, contudo, como a aplicação ocorreu em maio, alguns deles já haviam desistido da disciplina. Além disso, alguns dos alunos da turma

[4] Todas as atividades propostas aos alunos estão nos Apêndices deste trabalho.

não eram ingressantes. Eles já haviam feito a disciplina em semestres anteriores, mas por não terem obtido a aprovação, estavam refazendo-a.

A disciplina de Introdução à Teoria dos Números foi ministrada pela professora Ivanete Zuchi Siple e eu também fui professora da referida turma, ministrando a disciplina de Lógica Matemática. Assim, já havia um contato e uma afinidade com os alunos da turma. Mesmo os que não eram ingressantes já haviam tido contato comigo em outras disciplinas.

Foram utilizados três encontros para a aplicação das atividades. Desses encontros, dois ocorreram durante o horário usual da disciplina de Teoria de Números e um ocorreu no horário da minha aula de Lógica Matemática, para que o projeto não atrasasse o cronograma já estabelecido pela professora Ivanete. Os alunos das duas turmas eram praticamente os mesmos, com pouquíssimas exceções. Na atividade aplicada no horário da disciplina de Lógica Matemática todos os alunos tinham disponibilidade para comparecer, de modo que nenhum deles foi prejudicado por conta de uma atividade fora do horário da aula de Introdução à Teoria de Números deles.

A primeira atividade foi realizada em equipes previamente estabelecidas nos trabalhos já realizados anteriormente pela professora Ivanete. Nos demais, os alunos se organizaram entre si, não alterando muito a configuração à qual estavam acostumados. Durante as aplicações eu assumia a turma e a professora Ivanete se mantinha em sala acompanhando as atividades, observando e auxiliando as equipes quando necessário.

Começamos o primeiro encontro fazendo uma breve introdução sobre Diofanto de Alexandria, falamos sobre suas contribuições para a matemática e discutimos sobre o porquê de ele ser conhecido como o "Pai da Aritmética". Os alunos já haviam realizado uma atividade[5] que envolvia a história de Diofanto, então esse momento serviu para reforçar pontos importantes e preencher algumas "lacunas" que haviam ficado nos trabalhos entregues por eles. Em seguida, propusemos a atividade 2[6], na qual objetivávamos que os alunos, por meio de um roteiro estruturado, conseguissem determinar quando uma equação diofantina tem solução e apresentassem a forma geral do seu conjunto solução.

Iniciamos o segundo encontro discutindo as conclusões que as equipes apresentaram na atividade 2, analisando quando as conjecturas eram válidas ou não. Em seguida, expusemos as proposições 1 e 2[7], que formalizavam o conteúdo da atividade 2, bem como suas demonstrações. Ainda, apresentamos exemplos de como fazer a resolução de equações

[5] A atividade 1 está descrita e analisada no tópico 2.2 e encontra-se, como proposta aos alunos, no Apêndice A.
[6] A atividade 2 está descrita a analisada no capítulo 3 e encontra-se, como proposta aos alunos, no Apêndice B.
[7] Essas proposições encontram-se enunciadas e demonstradas no tópico 3.1.

diofantinas. Ao final dessa aula, os alunos receberam uma lista[8] para praticarem a resolução de equações diofantinas, bem como a aplicação das proposições 1 e 2. Foi disponibilizado um horário de atendimento extraclasse com ambas as professoras para que os alunos pudessem sanar possíveis dúvidas quanto à realização dessa atividade.

No último encontro, realizamos a atividade 4[9], na qual buscávamos discutir a presença (ou não) do conteúdo de equações diofantinas no ensino regular. Esta era uma atividade bastante relevante para esta pesquisa, uma vez que, por meio dela, seria possível fazer a conexão entre a “matemática da universidade” e a “matemática da escola”, uma das grandes forças motrizes deste trabalho. Infelizmente, a atividade não ocorreu conforme o planejado uma vez que no período de sua aplicação estava ocorrendo a greve dos caminhoneiros. Em função das negociações e das incertezas da greve a universidade tomou algumas decisões com relação à maleabilidade na cobrança de presenças ou cancelamento de aulas. Isso acabou gerando instabilidades nas presenças dos alunos, em especial no dia da aplicação da atividade 4. Falaremos mais a respeito dessa atividade no capítulo 4.

Visando abordar os objetivos descritos anteriormente, bem como o cronograma de atividades proposto, dividimos esse trabalho em três partes: a história de Diofanto; a teoria matemática acerca do conteúdo de equações diofantinas; e as equações diofantinas no Ensino Básico. Para cada uma dessas partes, organizamos roteiros que foram aplicados aos alunos que estavam cursando a disciplina de Introdução à Teoria dos Números (ITN) no primeiro semestre de 2018. Em cada um dos capítulos apresentaremos o referencial teórico utilizado, a atividade proposta aos alunos e, em seguida, a análise da referida atividade.

Assim, no capítulo que segue falaremos sobre a utilização da história da matemática no ensino de matemática. Com base em Miguel (1997) discutiremos alguns argumentos que buscam defender a utilização da história da matemática como ferramenta pedagógica para o ensino de matemática. Apresentaremos ainda a primeira atividade proposta aos alunos, na qual buscamos trabalhar com história da matemática, matemática e criatividade por meio da pesquisa sobre Diofanto e a criação de uma história sobre sua vida.

Tendo um contexto histórico como base, partimos para o estudo do conhecimento matemático propriamente dito. No capítulo 3 apresentamos as proposições que embasam o estudo e a resolução das equações diofantinas e analisamos a atividade proposta aos alunos, na qual eles deveriam criar hipóteses para a existência de soluções de uma equação diofantina, e para a forma geral do conjunto solução.

[8] Essa lista foi a atividade 3 proposta aos alunos e está descrita e analisada no tópico 3.3.
[9] Esta atividade está descrita a analisada no capítulo 4.

No quarto capítulo trazemos discussões acerca das equações diofantinas e suas relações com conteúdos abordados no Ensino Básico. Também para essas discussões propusemos aos alunos um roteiro no qual eles deveriam analisar, refletir e discutir em equipes sobre as aproximações e distanciamentos entre expressões algébricas, função afim e equações lineares e as equações diofantinas.

Por fim, encerramos o trabalho tecendo algumas considerações quanto ao alcance dos objetivos propostos, possíveis respostas para nossa pergunta de pesquisa, bem como aspectos que se destacaram ao longo da aplicação ou análise das atividades e pontos a melhorar em aplicações futuras.

2 REVISITANDO DIOFANTO

Como falado anteriormente, dividimos esse trabalho, nesta ordem, em três partes: a história de Diofanto; a teoria matemática acerca do conteúdo de equações diofantinas; e as equações diofantinas no Ensino Básico.

Assim, embasados em Miguel (1997) e Miguel e Miorim (2008), começamos este capítulo falando sobre a história da matemática e sua utilização no ensino. Apresentamos, em seguida, a primeira atividade proposta aos alunos. Esta atividade foi enviada antes da primeira aula presencial e envolvia, além de história da matemática, a criatividade. Seguimos o capítulo amalgamando a história de Diofanto e a análise da atividade entregue pelos alunos.

2.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Já no final do século XIX, livros didáticos de matemática apresentavam em notas de rodapé alguns elementos históricos em observações ou comentários, acerca de temas e personagens da história da matemática. Mas, foi na década de 1930 que, por meio de decreto, instituiram-se as diretrizes da chamada Reforma do Ensino Secundário, no qual manifestou-se de maneira explícita a preocupação com a introdução de elementos históricos na matemática escolar brasileira (MIGUEL; MIORIM, 2008).

De lá pra cá vemos que as discussões acerca da importância e da utilização da história da matemática no ensino de matemática só cresceram. Podemos ver indícios disso, nas pesquisas que vem sendo desenvolvidas nos cursos de pós graduação; nas disciplinas de história da matemática oferecidas em alguns cursos de Licenciatura em Matemática; na inserção de elementos de história da matemática em livros didáticos; nos documentos oficiais – como os Parâmetros Curriculares Nacionais, que destacam a utilização da história no ensino da matemática; etc.

No primeiro capítulo de “História na Educação Matemática: Propostas e desafios”, Miguel e Miorim (2008) descrevem de que forma a história da matemática foi inserida no contexto da Educação Básica desde o final do século XIX até os dias atuais. Além disso, aborda a justificativa usada em cada época para “defender” a utilização da história da matemática.

No final do século XIX e início do século XX acreditava-se que a utilização da história da matemática no ensino despertaria o interesse do aluno pelo conteúdo matemático. Miguel e Miorim (2008) destacam que “os mais ingênuos acabam atribuindo à história um poder quase que mágico de modificar a atitude do aluno em relação à Matemática" (p. 16). Ainda hoje esse é um argumento bastante utilizado para justificar o uso da história da matemática no ensino.

A partir de seus estudos, Miguel (1997) elenca 12 argumentos – como o apresentado acima – que buscam reforçar as potencialidades pedagógicas da história da matemática. Ao expor esses argumentos ele discute criticamente algumas afirmações "românticas" que colocam a história da matemática como um grande trunfo no ensino da matemática. Além disso, os contrapõe a outros argumentos que tentam evidenciar os obstáculos para concretizar essas potencialidades durante as aulas de matemática. Ao discutir criticamente esses argumentos, tanto os que abordam as potencialidades como os que falam dos obstáculos, Miguel (1997) não assume uma posição, mas instiga o leitor a pensar e refletir sobre eles.

Os argumentos apresentados por Miguel (1997) são:

- A história é uma fonte de motivação para o ensino aprendizagem da matemática;
- A história constitui-se numa fonte de objetivos para o ensino da matemática;
- A história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino de matemática;
- A história é uma fonte para a seleção de problemas práticos, curiosos, informativos e recreativos a serem incorporados nas aulas de matemática;
- A história é um instrumento que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino;
- A história constitui-se num instrumento de formalização de conceitos matemáticos;
- A história é um instrumento de promoção do pensamento independente e crítico;
- A história é um instrumento unificador dos vários campos da matemática;
- A história é um promotor de atitudes e valores;
- A história constitui-se num instrumento de conscientização epistemológica;
- A história é um instrumento que pode promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática;
- A história é um instrumento que possibilita o resgate da identidade cultural;

O segundo argumento apresentado acima merece um destaque, pois nele estão embutidos alguns objetivos, que acreditamos, são concepções praticamente unânimes para qualquer professor de matemática. Assim, Miguel (1997) discute como objetivos de ensino que podem ser alcançados por meio da história da matemática:

a) a matemática como uma criação humana;

> b) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática;
> c) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das idéias matemática;
> d) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.
> e) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de idéias e teorias;
> f) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo;
> g) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL, 1997, p.77).

Após a discussão de cada um dos argumentos acima, ele apresenta argumentos questionadores, nos quais reflete sobre as dificuldades na utilização da história para o ensino de matemática. Os argumentos são: ausência de literatura adequada; natureza imprópria da literatura disponível; o elemento histórico é um fator complicador; e ausência na criança do sentido de progresso histórico. Nessa discussão, após apresentar cada um dos argumentos questionadores ele traz possibilidades para a superação dos mesmos.

Miguel (1997) finaliza o artigo dizendo que

> entre as posições extremadas que tentam nos convencer de que a história tudo pode ou de que a história nada pode, parece-nos mais adequado assumir uma posição intermediária que acredita que a história – apenas quando devidamente reconstituída com fins explicitamente pedagógicos e organicamente articulada com as demais variáveis que intervêm no processo de planejamento didático – pode e deve desempenhar um papel subsidiário em Educação Matemática, qual seja, o de um ponto de referência para a problematização pedagógica. (MIGUEL, 1997, p.101).

Adiante nesse capítulo, retomaremos alguns dos argumentos acima, bem como a discussão acerca do uso da história no ensino de matemática, ao analisarmos a atividade sobre Diofanto proposta aos alunos.

2.2 ATIVIDADE 1 – REVISITANDO DIOFANTO

Nesta atividade buscamos introduzir o conteúdo de equações diofantinas utilizando a história da matemática. Almejávamos que por meio das pesquisas os alunos atribuíssem significado ao estudo do conteúdo, historicamente contextualizado, e compreendessem o papel de Diofanto, hoje conhecido como “pai da Álgebra”.

Para introduzir o conteúdo de equações diofantinas, pedimos que os alunos se reunissem nas equipes já estabelecidas para os outros trabalhos da disciplina de ITN e realizassem a atividade conforme Quadro 4. No total foram nove equipes, nas quais a quantidade de integrantes da equipe variava de uma a seis pessoas. Como mencionado anteriormente, algumas das equipes se encontravam “desfalcadas” uma vez que alguns alunos já não estavam mais frequentando as aulas.

Quadro 4 - Atividade 1: Revisitando Diofanto

<u>Equações diofantinas</u>
Atividade 1: Revisitando Diofanto
Para esta atividade vocês vão precisar de criatividade, imaginação e pesquisa.
Vocês já pararam para pensar como uma pessoa faz para escrever uma história, uma novela ou um filme de época? Em primeiro lugar ela precisa pesquisar muito a fim de compreender como as pessoas viviam, como eram os estabelecimentos, as casas, as roupas, o comportamento, etc. das pessoas naquela referida época.
Hoje vocês vão escrever uma história de época!
Na verdade, vocês não precisam escrever. Vocês podem apresentar essa história de alguma outra maneira que acharem interessante: pode ser, por exemplo, numa história em quadrinhos, por meio de um vídeo, a filmagem de uma encenação, utilizando infográficos, ou escrevendo uma história. Usem a criatividade!
Imagine que vocês são roteiristas de um filme. Escrevam (ou apresentem de uma outra maneira, como exemplificado acima), com o máximo de detalhes possível, o contexto no qual vivia Diofanto de Alexandria. Pesquisem, imaginem, discutam e descrevam como eram as ruas, a casa onde ele vivia, as vestimentas, com o que trabalhava, como era sua rotina. Descrevam a personalidade dessa personagem, como ele pensava, quais eram suas preocupações.
Utilizem, na medida do possível, referências bibliográficas confiáveis para descrever o que foi pedido acima, mas quando não for possível, usem a criatividade para imaginar a realidade da época e “preencher as lacunas”.
Lembrem-se, vocês são roteiristas! Escrevam de modo a nos envolver e entrar na história. Ah, e não esqueçam de colocar ao final do texto, as referências bibliográficas utilizadas.

Fonte – Produção da autora, 2018.

A proposta da criação de uma história na qual os alunos seriam os roteiristas vem ao encontro das ideias apresentadas por Teresa Vergani em suas obras. Vergani é uma autora portuguesa, mais comumente citada na área de etnomatemática (MIARKA, 2011), mas que possui publicações em diversas outras áreas, graças a uma formação bastante variada, e às experiências com diversas culturas, seja em cidades européias ou nos países africanos pelos quais passou. Sua produção abrange, entre outras áreas, a educação, a antropologia, a cultura, a linguagem, a matemática e a literatura (KIECKHOEFEL, 2012).

Para Vergani (1991), na prática pedagógica, assim como em todas as relações interpessoais deve haver um equilíbrio entre o pensamento e a emoção, entre o raciocínio e a percepção, entre a lógica e a criatividade. Contudo, a escola ocidental valoriza as características pelas quais é responsável o lado esquerdo do cérebro, ou seja, a lógica, a dedução, a organização, deixando, quando muito, a arte, a criatividade, a emoção, em segundo plano (isto quando essas últimas não se tornam características indesejadas).

Ela defende ainda, que “sendo a matemática uma ciência onde o rigor lógico se une à imaginação criativa, há que saber geri-la e transmiti-la com a cabeça e com o coração, isto é, sem divorciar o pensar do sentir” (VERGANI, 1993, p.11). Logo, faz parte do papel do professor estabelecer, em sua ação pedagógica, um equilíbrio entre o pensar e o sentir, usando artifícios “da cabeça” (rigor lógico) e “do coração” (imaginação criativa). Nesse sentido, ao solicitar aos alunos que fossem os roteiristas de uma história, estamos buscando esse equilíbrio entre o rigor e a criatividade.

Ainda, usamos essa atividade para de alguma forma “preparar” os alunos, encaminhando-os para o roteiro que seria aplicado em sala, sobre o qual falaremos adiante.

Selecionamos alguns trechos das atividades enviadas pelos alunos, nos quais podemos identificar componentes que envolvem a história da matemática ou o uso da “emoção”, da criatividade. Para manter o nome dos alunos participantes em sigilo numeramos as equipes, de 1 a 9, bem como os trechos destacados. Assim, no título de cada quadro temos “Equipe x: trecho y”, em que, como podemos intuir, a primeira parte representa o número da equipe que escreveu aquele texto. Sentimos a necessidade de acrescentar a segunda informação no título, pois em alguns casos, escolhemos para análise mais de uma parte do texto da mesma equipe. Essa numeração do trecho foi feita na ordem em que o texto foi escrito pelos alunos, ou seja, os títulos “Equipe 2: trecho 1” e “Equipe 2: trecho 2”, por exemplo, representam trechos escritos pela equipe 2, em que o trecho 1 aparece antes do que o trecho 2 no texto entregue pelos alunos. Em nossa análise, não será, necessariamente, seguida essa mesma ordem, podendo ser analisado primeiro o trecho 2 e posteriormente o trecho 1.

Estruturamos nossa análise em ordem cronológica, buscando estabelecer uma linha do tempo da vida de Diofanto. Assim, começamos destacando o trecho apresentado no Quadro 5[10], no qual é possível perceber algumas componentes históricas que se misturam à imaginação dos alunos. Uma vez que pouco se sabe sobre Diofanto, essa “mistura” de informações acabou sendo bem comum nos trabalhos. A fim de criar uma história mais completa e que envolvesse o leitor, os alunos “completavam” as lacunas da história utilizando a criatividade.

---

[10] Os trechos destacados neste trabalho são apresentados exatamente como foram entregues pelos alunos. Optamos por não fazer nenhuma alteração na formatação e nenhuma correção nos erros de escrita que porventura tenham sido cometidos.

Quadro 5 - Equipe 9: trecho 1

A noite do dia 02/12/338 d.C, parecia não ter fim, as estrelas calavam a lua, as ruas já estavam vazias quando Gaia deu à luz ao seu quinto filho: Diofanto, o qual ficaria conhecido anos depois como Diofanto de Alexandria. Vindo de uma família pobre, morou por muitos anos na Grécia, em uma casa pequena, feita de tijolos de barro como o telhado, com apenas dois quartos, um para os pais e outro para ele e seus outros quatro irmãos. Diofanto trabalhava como carpinteiro, desde seus 6 anos, em um pequeno empreendimento da família, no qual contribuía para o sustento diário.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Neste trecho os alunos criam uma descrição do exato momento do nascimento de Diofanto, estabelecendo uma data e dando a ideia do horário em que isso teria acontecido, além de inserir elementos dos quais não se tem notícias, como o nome para a mãe dele e a existência de 4 irmãos. A equipe 1 também fala do seu nascimento, como podemos ver no Quadro 6.

Quadro 6 - Equipe 1: trecho 1

Estamos por volta de 200 d.C. na Grécia antiga, mais especificamente em Alexandria, época em que Diofanto nasceu. Desde criança interessava-se por matemática e depois quando mais jovem buscava soluções para problemas de sua época. Teve uma infância alegre e vivei humildemente com seus pais em uma casa simples até ingressar na escola.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Ainda que essa data seja contestada, acredita-se que Diofanto viveu no século III d.C, conforme apresentado pelos alunos. Contudo, embora se tenha notícia de que ele viveu em Alexandria, não se pode assegurar que ele fosse grego (ROQUE, 2012). Não são conhecidos outros detalhes sobre a infância ou sobre onde Diofanto foi criado, mas, como mencionado anteriormente, várias equipes usaram a imaginação para descrever como teria sido esse período de sua vida. Observe o Quadro 7 no qual a equipe 3 “imagina” e descreve como teria sido a infância de Diofanto.

Quadro 7 - Equipe 3: trecho 1

Teve uma bela infância, onde viveu intensos momentos de alegria junto com sua família, sendo uma criança curiosa e apaixonada por enigmas matemáticos, amava as noites pois admirava as estrelas e toda a ciência astrológica.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Algo que me chama a atenção nos trechos destacados até aqui, é quando os alunos escrevem que desde criança Diofanto já se interessava por matemática. Isso aparece também no trabalho de outras equipes e me parece uma concepção cultural de que a pessoa nasce para ser matemático, ou que a pessoa nasce gostando ou não gostando de matemática.

Claro que não posso afirmar, apenas por uma frase, que os alunos possuem essa concepção. Mas penso que, enquanto formadores de professores, precisamos nos atentar em formar profissionais que, olhem para esses alunos que “nasceram para não gostar de matemática” com o mesmo cuidado e atenção, que os que “nasceram para gostar de matemática”.

Outro ponto a destacar é que os 3 trechos já apresentados (e não foram os únicos trabalhos em que essa característica aparece) descrevem que Diofanto cresceu numa família simples, mas teve uma infância muito feliz. Nenhuma das equipes descreveu Diofanto como tendo nascido ou crescido num contexto de fartura ou em altos níveis da sociedade da época.

No trecho do trabalho da equipe 8 (Quadro 8) podemos observar essas mesmas características: Diofanto como vindo de uma família simples e desde muito cedo apaixonado pela matemática. Contudo, ainda que não traga informações “novas”, optamos por incluir este trecho uma vez que sua apresentação ocorreu de maneira completamente distinta das demais equipes. Observe que os alunos criaram um roteiro de teatro fazendo com que o leitor consiga se imaginar assistindo à uma peça teatral.

Miguel (1997) fala que podemos usar a história da matemática para desmistificar a matemática – que muitas vezes é apresentada como uma ciência harmoniosa que está pronta e acabada – e para atingir certos objetivos de ensino, como expor a matemática como uma criação humana. Acredito que nesse caso, quando os alunos buscaram pela história de Diofanto e deram uma “cara” e uma história para esse matemático, é possível que eles tenham enxergado a matemática como uma ciência “humana”. Uma ciência que foi estruturada e desenvolvida a partir do pensamento e do raciocínio humanos.

Novamente, enquanto formadora de professores, penso que essa é uma tarefa importante, no sentido de não disseminar a ideia de que a matemática é uma ciência “divina”, uma ciência pronta e acabada que é acessível apenas a algumas “mentes brilhantes”. Mas, por ser uma ciência feita por homens é acessível a todos, ainda que não seja compreendida por todos da mesma forma.

A importância de possibilitar esse tipo de reflexão e discussão também se mostra quando, olhando para as competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental expressas na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), nos deparamos com a seguinte fala:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 267)

Quadro 8 - Equipe 8: trecho 1

CENA 1 (Interior de uma cozinha de uma casa simples, com pratos na mesa pronto para serem servidos, a mãe se encontra no balcão preparando o alimento) (Entram na cena Pequeno Diofanto e Pai) Mãe: Chegaram bem na hora! O almoço está pronto, podem sentar. (Sentam ao redor da mesa Pai e Pequeno Diofanto enquanto Mãe serve o alimento) Pai: O cheiro está maravilhoso! Estou faminto. Pequeno Diofanto: Mamãe eu vou para a Escola Matemática de Alexandria porque quero ser um matemático! Mãe derrubando o alimento espantada: Que!? Pai: Pare de falar besteiras Diofanto, sua mãe já está velha, quer matar ela do coração!? E que história é essa de ser matemático? Eu e sua mãe já concordamos em lhe mandar para uma Escola de Escultura de Alexandria, assim você pode trabalhar para a elite e orgulhar sua família! Pequeno Diofanto: Eu não quero trabalhar para a elite Pai! Eu quero fazer o que gosto e quero descobrir coisas que ninguém ainda sabe sobre a matemática. Pai: Chega de conversa e já para seu quarto! (Cortina fecha e narrador começa a falar)

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Se os estudantes de Licenciatura em Matemática não forem confrontados com essa perspectiva durante a formação inicial, em que momento eles refletirão sobre isso? Indo um pouco além: com quais concepções sobre a matemática eles entrarão nas salas de aula e como isso irá influenciar suas aulas e a percepção dos seus alunos sobre a matemática?

Outro ponto que podemos destacar no Quadro 8 é um detalhe que parece sutil e pode até passar despercebido, mas chama a atenção para o status social daqueles que estudam matemática. Na história criada pelos alunos, ao dizer que estudaria matemática, Diofanto assustou sua mãe e deixou seu pai extremamente irritado, mostrando que essa não era uma escolha adequada de profissão. O texto transpareceu inclusive que Diofanto envergonharia a família e que, apenas trabalhando para a elite da sociedade, traria orgulho aos pais.

Novamente, trabalhando na formação de professores e inserida num ambiente em que os cursos são voltados para a área de tecnologia e engenharias, vemos que essa crença é bastante enraizada em nossos alunos, de todos os cursos. Mais do que isso, é fácil ver a desvalorização do professor e do matemático, em qualquer esfera da sociedade. Tenho certeza que cada professor que cursou matemática lembra de algumas histórias em que foi “acusado” ou questionado sobre sua “escolha ruim” de profissão. E esse status social se torna mais difícil de ser modificado quando os próprios estudantes do curso de Licenciatura em Matemática apresentam essa concepção.

Voltando para a perspectiva de Miguel (1997), podemos dizer que um outro objetivo de ensino seria que os alunos pudessem perceber a matemática conectada com outras áreas, como a filosofia, com a lógica, com a religião, com a história, etc. Alguns trechos que podem evidenciar essa “abertura” para um olhar além da matemática, são aqueles nos quais os alunos buscaram informações acerca da cidade de Alexandria, descrevendo, em alguns casos, com uma grande riqueza de detalhes, como podemos ver nos trechos das equipes 4 e 6 (Quadro 9 e Quadro 10).

Quadro 9 - Equipe 4: trecho 1

Nosso protagonista, Diofanto, vive neste ambiente, inserido numa cidade metropolitana, convivendo com muitos mercadores de rua, uma orla linda com vista para o mar e a infinidade de barcos que ali atracam. Alexandria era uma cidade muito ruidosa, em função da grande movimentação ali presente. No centro da cidade encontramos casas e tendas com os mais variados produtos: lindos tapetes persas bordados em teares manuais, carnes, peixes, confecções, jarros de cerâmica, tâmaras, damascos e muitas especiarias, entre elas: canela, cravo, pimentas e açafrão.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 10 - Equipe 6: trecho 1

Por sua localização geográfica, Alexandria era cosmopolita e efervescente. Cidade próxima dos portos egípcios, de todo comércio navegável em contato com a Europa ao sul, ao leste a Ásia e ao sul às Arábias. **A Alexandria de Diofanto** **A urbe era organizada com uma grande praça, uma rua de 30 metros de largura e seis quilômetros de comprimentos atravessava a cidade, com ruas paralelas perpendiculares cruzando sempre em ângulos retos. Os bairros eram construídos em quadros e tinham nas ruas valas para escoamento da água. Uma cidade moderna para os padrões da época.**

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

De fato, conforme mencionado nos trechos acima, Alexandria, fundada por Alexandre Magno, em 331 a.C., possuía um dos principais portos do Mediterrâneo e o maior centro de cultura acadêmica do mundo. Templos, palácios e belos monumentos foram construídos ao longo de uma faixa de cerca de 5 km, banhada pelo Mar Mediterrâneo (Guia Geográfico Egito, 20_ _?). No mapa, Figura 1, podemos ver como havia sido organizada a cidade, com ruas paralelas e perpendiculares, como descrito pelos alunos:

Figura 1 - Mapa da Antiga Alexandria (100 a.C. – 100 d.C.)

Fonte – Mapas do Egito Khan el Khalili, 20_ _?

A fundação de Alexandria é cheia de mitos, mas acredita-se que o próprio Alexandre traçou o primeiro esboço da cidade (Guia Geográfico Egito, 20_ _?). Alexandre fundou mais de 70 novas cidades (SUPERINTERESSANTE, 2018), que eram sempre bem situadas, bem pavimentadas e contavam com um bom serviço de abastacimento de água. Elas era autônomas, mas sujeitas à ordem do rei (SÓ HISTÓRIA, 2009?). Como destacado na primeira parte do trecho do Quadro 11, Alexandre, o Grande, foi educado por Aristóteles. Segundo o site da Superinteressante (2018), isso ocorreu entre os 13 e 16 anos de idade, e por isso ele tinha uma grande admiração pela cultura helênica. Isso fez com que ele difundisse a cultura grega pelos lugares que passava, conseguindo assim unificar a cultura das cidades que conquistava, facilitando o contato, o comércio e a difusão de conhecimentos. Graças às suas expedições militares e ao seu interesse por investigações científicas, o mundo antigo conseguiu diversos avanços em áreas como geografia e história natural.

Quadro 11 - Equipe 1: trecho 2

Devido ao seu interesse nos estudos, seus pais, mesmo que humildes, fizeram um esforço e conseguiram que seu filho estudasse em uma escola. Escola esta fundada por Alexandre, o grande, discípulo de Aristóteles, que em todas as cidades que conquistava, montava uma Escola.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

No destaque do Quadro 12, vemos novamente a expressão da criatividade dos alunos. Eles criaram alguns elementos, como Adônis que seria bisneto de Euclides e vizinho de Diofanto, para dar uma face mais "humana" para a história. Além disso, apresentaram uma ilustração representando Diofanto sendo instruído por um dos homens mais influentes da biblioteca.

Quadro 12 - Equipe 2: trecho 1

Quando criança, Diofanto frequentava a biblioteca de Alexandria, acompanhado de um de seus vizinhos mais influentes que se chamava Adônis. Este vizinho era conhecido por ser bisneto de Euclides que foi um professor muito influente em Alexandria, por causa de seu grande conhecimento acerca da Geometria.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Como já mencionado, Alexandre, o Grande, tinha grande admiração pelos gregos. Alexandria era um grande centro da cultura helenística e uma de suas grandes edificações, o

Museu, englobava o jardim botânico, o zoológico, o observatório astronômico e a biblioteca, que abrigava pelo menos 200 mil livros (Terra Educação, 2015).

Além dos elementos fictícios, os alunos destacam a importância de Euclides na história do desenvolvimento matemático, em especial, da geometria. Euclides foi um grande matemático e professor da Escola de Alexandria e exerceu influência sobre a obra de Diofanto. Uma das equipes chegou a descrever como teria sido o pensamento de Diofanto para "criar a álgebra" a partir dos escritos de Euclides (Quadro 13).

Quadro 13 - Equipe 4: trecho 3

"Observando os escritos de Euclides, descobri algo comum na sua obra, que lhe faltava. Tornava-se mais claro, a cada dia, que não haveria qualquer matemático em Alexandria que pudesse compreender no seu todo, a geometria de Euclides, sem auxílio das construções. A ilustração de suas proposições (teoremas) era essencial para a abstração das relações geométricas. Observei, ainda que a maioria das relações de comprimento dos polígonos e das construções tinham uma essência que podia transfigurar-se de maneira completamente simbólica. Estendi a noção pragmática de Tales de uma forma simplificada. Podia-se, a partir de um arithmos (quantidade a ser encontrada) e uma sequência de propriedades e noções comuns manipular as quantidades de forma consistente em uma relação que unia a notação de arithmos (batizei-lhe aritmética) à geométrica e que, provava-se de muito mais simples entendimento. Maravilhei-me ao me ver descobridor de uma graciosa propriedade oculta das quantidades, não explícita na geometria, mas que definitivamente desempenhava um papel importante na prova de outras proposições. Mais ainda, quando aparentava que a aritmética podia ser empregada de forma sólida na geometria. Pensei que talvez, haveria um método de estabelecer uma relação biunívoca entre a aritmética e a geometria, mas não a pude provar. Talvez lhe faltava um postulado de uma essência muito intrínseca e improvável que garantisse a perfeição da geometria Euclidiana."

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Neste trecho podemos perceber alguns dos aspectos, elencados por Miguel (1997), que podem potencializar a aprendizagem da matemática e que puderam ser alcançados por meio do conhecimento e da compreensão históricos. Um deles é a desmistificação da matemática como uma ciência pronta, acabada, perfeita ou independente da ação humana. Ainda, o trecho reflete:

- a compreensão dos alunos sobre a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias. A "reprodução" do pensamento de Diofanto criada pelos alunos, mostra que a motivação do matemático era puramente teórica, uma vez que não havia um problema prático ou uma situação para ser resolvidos.

- a percepção que os matemáticos tem do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo. Os alunos chegam a descrever no trecho esse desenvolvimento, essa "ampliação" da matemática.
- a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

No trecho acima (Quadro 13), bem como nos dois que seguem (Quadros 14 e 15), os alunos falam do *arithmos*, da criação da álgebra, das obras e contribuições de Diofanto para o desenvolvimento da ciência matemática. Neste ponto esperávamos que os alunos tivessem buscado se aprofundar mais, para que servisse de base para a próxima aula que seria aplicada. Os alunos sabiam que o conteúdo a ser estudado na disciplina seria equações diofantinas, então esperávamos que eles trouxessem mais informações sobre esse tema. Contudo, isso não ocorreu, eles acabaram trazendo informações bastante superficiais.

Quadro 14 - Equipe 1: trecho 3

Já na escola, desenvolveu suas habilidades matemáticas e escreveu 3 tratados, mesmo que outros alunos da escola já tivessem feito descobertas importantes, a de Diofanto foi considerada incomparável. Criou uma simbologia algébrica, facilitando a representação de incógnitas, e por tudo isso Diofanto é considerado o "pai da álgebra". Também desenvolveu uma fórmula para encontrar os ternos pitagóricos e posteriormente as Equações Diofantinas.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 15 - Equipe 2: trecho 2

Como consequência, Diofanto acabou se tornando um dos mais importantes estudiosos em relação à Teoria dos números, e tempos depois escreveu a obra "Aritmética", que traz uma coleção de problemas sob forma de exemplos numéricos específicos. Além disso, também escreveu sobre as soluções de uma inequação, chegando às chamadas equações Diofantinas, as quais permitem a duas ou mais variáveis assumirem apenas valores inteiros.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Vamos detalhar um pouco melhor o pensamento algébrico e as contribuições de Diofanto para a matemática. Para isso, utilizaremos como base a apresentação feita por Roque (2012, p. 231 - 237).

Como bem destacado pela equipe 4, no Quadro 13, a principal contribuição de Diofanto para a matemática foi ter introduzido uma forma de representar um valor desconhecido em um problema, o qual chamou de *arithmos*. Sua obra, Aritmética, é composta por uma coleção de problemas que faziam parte da tradição matemática da época. Ao apresentar o método para resolver tais problemas, Diofanto utilizava "abreviações" para representar as quantidades desconhecidas, que hoje usualmente chamamos de "x". "O método de abreviação representava a palavra usada para designar essas quantidades por sua primeira ou última letra de acordo com o alfabeto grego" (ROQUE, 2012, p.232) como abaixo:

> ς (última letra da palavra *arithmos*, a quantidade desconhecida)
> Δ^Y(primeira letra de *dynamis*, o quadrado da quantidade desconhecida)
> K^Y(primeira letra de *kybos*, o cubo)
> $\Delta^Y\Delta$ (o quadrado-quadrado) [quarta potência]
> ΔK^Y (o quadrado-cubo) [quinta potência]
> $K^Y K$ (o cubo-cubo) [sexta potência]

Essa notação auxiliava muito na resolução de problemas na qual se buscava encontrar quantidades desconhecidas, mas funcionava mais como uma abreviação das partes com que se estava trabalhando. Hoje, costumamos chamar a quantidade desconhecida de x, e o quadrado da quantidade desconhecida de x^2, o seu cubo, x^3, e assim por diante. Todas as potências envolviam a quantidade desconhecida, o x. Na notação de Diofanto não funcionava assim. Cada potência tinha um símbolo diferente, pois o símbolo não estava relacionado diretamente com a quantidade desconhecida, era apenas uma abreviação.

Observe o problema 27 do livro I da obra Aritmética e veja um exemplo de como Diofanto resolvia esses problemas:

> Problema I-27
> Encontrar dois números com soma e produto dados.
> *Descrição da solução:* Ele considera que a soma é 20 e o produto, 96. Supondo que a diferença entre os dois números seja 2 *arithmoi*, começamos por dividir a soma desses números (que é 20) em dois (obtendo 10). A partir desse resultado, consideramos um *arithmos* somado a e subtraído de, respectivamente, cada uma das metades. Como a metade da soma é 10, tomando metade subtraída e 1 *arithmos* mais a metade acrescentada de 1 *arithmos* obtemos 20, que é a soma desejada. Para que o produto seja 96, multiplicamos essas mesmas quantidades, obtendo 100 subtraído do quadrado do *arithmos* (um *dynamis*). Chegamos, assim, à conclusão de que o *dynamis* deve ser 4, logo, o valor do *arithmos* é 2. Os valores procurados serão, portanto, 10 mais 2 e 10 menos 2, ou seja, 12 e 8.
>
> *Explicação misturando as abreviações de Diofanto com os símbolos atuais para as operações:* Queremos encontrar dois números com soma 20 e produto 96. Se esses números fossem iguais, cada um deles seria 10. Supomos que a diferença entre eles seja 2ς, ou seja, os dois números procurados são obtidos retirando ς de um desses 10 e adicionando ς ao outro. Como a soma não muda após essas operações, temos 10 $-$

> $\varsigma + 10 + \varsigma = 20$. Mas, sabemos também que o produto desses números é 96, logo, podemos escrever $(10 - \varsigma)(10 + \varsigma) = 96$. Observamos, então, que $10^2 - \Delta^Y = 10^2 - \varsigma^2 = 96$, e concluímos que o valor de ς deve ser 2. Logo, os números procurados $10 - \varsigma$ e $10 + \varsigma$ são, respectivamente, 8 e 12. (ROQUE, 2012, p.232-233)

Diofanto não recorria a construções geométricas para resolver o problema. Seu método baseava-se em operar com as quantidades desconhecidas da mesma forma que com as quantidades conhecidas. Em sua obra ele deixou evidente que

> a natureza das quantidades desconhecidas e as operações que podemos realizar com elas se baseiam nas propriedades dos números. Ou seja, na resolução de um problema as quantidades conhecidas e desconhecidas têm o mesmo estatuto. Somente por essa razão será possível introduzir um símbolo para uma quantidade desconhecida. (ROQUE, 2012, p.233).

Saindo um pouco da história da matemática "oficial" e partindo para o âmbito mais "artístico", tivemos vários trabalhos nos quais os alunos criaram verdadeiros roteiros de filmes. Trazemos no Quadro 16 a história criada pela equipe 5. Ainda que seja um pouco extensa acreditamos que trazê-la por completo apresenta ao leitor uma visão mais completa do raciocínio elaborado pelos alunos.

Quadro 16 - Equipe 5: trecho 1

A história que irei narrar para vocês e de um mito e como todo mito não se sabe ao certo de onde veio e quando nasceu, uns dizem que ele veio nasceu na Grécia outros que ele fosse árabe, alguns historiadores contam que aconteceu no século III a.C. Outros que foi no século III d.C. Isso tudo e mera bobagem porque o que importa e a maneira que surgiu o que muitos o consideram o " Pai da Álgebra". Diofanto era um homem simples, careca, barbudo casado e teve um filho, era um vendedor de túnicas que vivia perto da Ágora a vender suas túnicas. Certo dia, vendendo suas túnicas ele ficou a observar e a escutar dois homens discutindo e tentando achar solução para um problema matemático. Com o passar dos dias esse evento começou a se repetir, os mesmo dois homens começaram a discutir debater tentando achar solução para o problema, e acabavam jogando um para as outras perguntas e perguntas para ver quem era mais sábio. Admirado pela discussão dos dois homens, ele foi para casa, pensando no problema que eles estavam discutindo "Encontre dois números quadrados tais que seu produto crescido de um deles resulta um número quadrado". Isso ficou remoendo a cabeça de Diofanto, passou a noite em claro tentando entender o que eles queriam dizer com aquilo e qual seria a solução. Era tarde da noite já e um vento forte começou a soprar, é uma grande tempestade de areia começou a se formar. Diofanto saiu de sua casa para tentar salvar Octavios, seu camelo que estava amarrado, quando ele fica preso pelos pés pela corda que estava amarrado Octavios, que acaba correndo com tudo para tentar se abrigar e fugir da tempestade de areia. Diofanto foi arrastado pelo seu camelo para fora da cidade, que foi se soltar apenas quando a corda arrebentou. Passado a tempestade, meio zonzo Diofanto acorda perdido em meio ao deserto, com monte de corvos rodeando o céu em cima dele. Todo machucado com suas

vestes rasgadas e cheia de sangue. Ele se levanta e começa a caminhar tentado achar alguém quem pudesse lhe ajudar. Caminhou horas e horas, sem achar nada, tudo que via era o sol e os corvos que rodeavam o céu. Chorando entrando em desespero pensando que iria morrer, ele olha para os corvos e vê dois grupos de corvos um de quadro e outro de três. Achando curioso o comportamento dos corvos, ele ficou a pensar nesses números.

Horas se passaram ele ficou ali sentado no chão pensando nestes dois números, quando de repente começou a se lembrar da discussão dos dois homens na Ágora. “Encontre dois números quadrados tais que seu produto crescido de um deles resulta um número quadrado". Neste instante uma nuvem cobriu ao céu e uma chuva começou a cair, e ao cair da primeira gota, Diofanto percebeu que três e quatro são os dois números que respondia a solução do problema, que a resposta para discussão dos dois senhores era (3/4)^2. Sorrindo com a felicidade de ter achado a solução para o problema, sentindo a chuva cair em seu corpo, com a vista cansada ele vê alguém ao longe andando com seu camelo em meio à chuva, quando ele desmaia cansado vendo o senhor se aproximar dele.

A pessoa estava com uma vestimenta preta, vendo a situação de Diofanto caído desmaiado, o colocou em seu camelo e o tirou da chuva, levando para uma caverna e cuidou dos ferimentos e cuidou dele. Chovia muito, vários relâmpagos cortavam o céu, raios caindo em meio ao deserto e se escutava de longe o som dos trovões. Em meio de um dos trovões Diofanto acorda assustado vendo uma mulher perto de uma fogueira cozinhando o que parecia ser corvos.

Com dificuldades para falar, ele agrade a mulher que responde com serenidade na voz, que ele demorará muito para responder o problema. Espantado de como ela sabia do problema antes mesmo dele perguntar, ela tira sua túnica e ele vê uma armadura reluzente de ouro e prata, com pedras de diamante e rubi, quando ele cai por terra ele se da conta que ele esta diante de nada mais nada menos do que a Deusa Atena, deusa da sabedoria e da guerra.

Percebendo que Diofanto era um bom homem, ela toca na testa dele, mostrando que além daquela solução tinha outra resposta para o problema que era (7/24)^2. Feito isto foi como se a mente de Diofanto tivesse despertado outro sentido, os números começaram a rodear sua cabeça, com símbolos que ele nunca vira antes, mas que ele compreendia muito bem o que significava, quando um raio cai bem na entrada da caverna o cegando.

Esfregando as mãos nos olhos tentando ver se conseguia enxergar algo, com a visão um pouco embasada ele se da conta que ele esta dentro de sua casa, e todo sofrimento e dor que ele passara não passava de um sonho dele. Levantou-se e foi para fora de sua casa ver se Octavios estava ali, e viu que estava tranquilamente dormindo. Votando para dentro tirou um pedaço de papiro e começou a escrever os símbolos que ele teria sonhado e a resposta para o problema dos dois senhores.

No dia seguinte, Diofanto voltou para Ágora para vender suas túnicas, quando se depara com os mesmos senhores debatendo e discutindo sobre problemas matemáticos e quando voltam a tocar no problema que Diofanto achara a resposta ele foi ate os senhores. Pedindo desculpas pela intromissão, por interromper a conversa deles, Diofanto falou saber a resposta para o problema deles. Rindo um dos senhores, zombou falando, que um vendedor não seria capaz de resolver um problema como este, e disse que se conseguisse iria comprar todas as túnicas que ele estava vendendo. Dito isto ele tirou o pedaço de papiro que escrevera a resolução, mas os senhores não entenderam os símbolos que estavam escritos ali. Com toda calma e tranquilidade Diofanto começou a explicar o que ele havia escrito e como era a solução do problema.

Admirado com a inteligência dele o senhor cumpriu com a palavra comprando todas as túnicas e chamou Diofanto para se juntar a eles a conversa, e cada problema que eles traziam para ele, ele conseguia achar uma solução de uma forma clara e simples. E de Diofanto vendedor de túnicas, começou a ficar conhecido como Diofanto de Alexandria.

Onde mais tarde viera casar com a filhar do senhor que comprara todas suas túnicas. E antes de morrer ele escreveu um ultimo enigma e pediu para que colocasse em seu túmulo: ***Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto. E os números podem mostrar quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte foi a sua bela infância. Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu rosto se cobriu de pelos. E a sétima parte de sua existência decorreu com um casamento estéril. Passou mais um quinquénio e ficou feliz com o nascimento de seu querido primogénito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que com muita pena de todos desceu à sepultura quatro anos depois do enterro de seu filho.”***

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Ainda que a história criada seja fictícia eles trazem alguns fatos e algumas informações “verídicas”. Apresentam Diofanto como o pai da Álgebra, buscam explicar seu pensamento algébrico, usando para isso a mitologia, apresentam um exemplo do tipo de problema que está no livro de Diofanto, abordam o contexto do comércio de túnicas, algo tão forte naquela região e na referida época, etc.

A equipe finaliza a história falando sobre a lápide de Diofanto. Quase todas as equipes apresentaram essa curiosidade em alguma parte do seu texto. A ideia é que qualquer pessoa que resolvesse o enigma por meio da expressão

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

chegaria à conclusão que Diofanto faleceu aos 84 anos de idade.

Gostaríamos de destacar que os alunos tiveram um prazo curto para a realização dessa atividade e, ainda assim, na nossa perspectiva, apresentaram textos bastante interessantes. Trouxeram elementos da história de Alexandria, de Alexandre, o Grande, de Diofanto, mesclando com a história de outros matemáticos. Introduziram componentes geográficas, políticas, sociais e arquitetônicas de Alexandria. Demonstraram muita criatividade criando histórias bastante distintas entre si para o nascimento, a criação, o casamento, a família e o filho de Diofanto. Além de trazer algumas de suas contrinuições para a matemática.

Ainda assim, algo que não apareceu com ênfase em nenhuma das atividades entregues foi a questão das equações diofantinas. Como esse conteúdo faz parte da ementa da disciplina, esperávamos que os alunos buscassem mais informações a seu respeito e, com isso, teriam alguma base teórica para a aula seguinte. A falta dessa noção inicial não impossibilitou a realização da segunda atividade, mas fez com que os alunos apresentassem certa dificuldade. No capítulo que segue, apresentamos a segunda atividade bem como sua análise.

3 ANALISANDO E RESOLVENDO EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Uma vez que os alunos haviam construído uma base histórica sobre Diofanto de Alexandria, por meio da atividade apresentada no capítulo anterior, realizamos a primeira aula presencial, voltada agora, para a teoria matemática acerca do conteúdo de equações diofantinas.

Inicialmente, foi feita uma breve apresentação falando sobre Diofanto, localizando sua existência no tempo e no espaço. Destacamos sua importância como "Pai da Aritmética", buscando que os alunos imaginassem como era resolver um problema matemático antes da "existência" do "x".

Hoje, quando enunciamos um problema como: "Encontre dois números tais que a soma é 20 e o produto 96", é natural pensar que para resolvê-lo podemos traduzi-lo como:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$$

E, como vimos no capítulo anterior, buscar essa representação por meio de "variáveis", foi uma das maiores contribuições de Diofanto para a matemática. Contudo, o foco principal deste trabalho recai sobre o conteúdo de equações diofantinas.

Devido à obra *Arithmetica* de Diofanto, "hoje recebem o nome de equações diofantinas todas as equações polinomiais (com qualquer número de incógnitas), com coeficientes inteiros, sempre que se trata de procurar suas possíveis soluções também entre inteiros" (DOMINGUES, 2009, p.147). Neste trabalho, bem como na disciplina de ITN, tratamos apenas das equações diofantinas lineares com duas incógnitas, ou seja, consideramos equações do tipo $ax + by = c$, em que a e b são números inteiros e não simultaneamente nulos.

Assim, após discutir brevemente sobre a história de Diofanto, os alunos reuniram-se em equipes (conforme escolha deles), para a realização da segunda atividade. Neste capítulo, para manter o sigilo, novamente vamos nos referir às equipes utilizando números, desta vez, de 1 a 8. Vale destacar que as equipes não são as mesmas da atividade 1. Nesta aula os alunos reuniram-se por afinidade, sem nenhuma interferência das professoras, e as equipes possuíam de 2 a 6 alunos.

A atividade 2 foi dividida em 4 partes, conforme apresentamos no Quadro 17, entregues uma por vez para as equipes. Assim, os alunos realizaram a "Parte 1" da atividade e, apenas após a sua entrega, tinham acesso à "Parte 2". Da mesma forma, recebiam apenas a "Parte 3" e a "Parte 4" após terem entregue a parte imediatamente anterior.

Quadro 17 – Atividade 2

Atividade 2: Analisando equações diofantinas

PARTE 1

Como vimos na história de Diofanto, seu objetivo era encontrar valores de x, y inteiros que fossem solução de equações do tipo:

$$ax + by = c,$$

onde $a, b, c \in Z$ e a e b não são simultaneamente nulos.

Hoje, diferente de Diofanto, já conhecemos o método para resolver equações desse tipo. Vamos, contudo, tentar construir uma teoria para resolver essas equações, assim como Diofanto teve que fazer, em sua época.

1 – Observe a equação $3x + 7y = 20$. Você consegue encontrar uma solução? Justifique! Existe alguma relação entre os coeficientes 3, 7 e 20?

2 – Nas equações abaixo, discutam se é possível obter uma solução no conjunto dos inteiros. Se existir, explicite-a. Você percebe alguma relação entre os coeficientes?

a) $13x + 4y = 1$

b) $4x + 2y = 7$

c) $10x - 16y = -8$

d) $3x - 2y = 2$

3 – Agora, queremos saber: quando uma equação diofantina tem solução no conjunto dos inteiros? Usando os exemplos acima queremos encontrar alguma "regra" que nos permita analisar qualquer equação diofantina e dizer se ela tem solução ou não. Observe os exemplos já discutidos e junto com sua equipe crie conjecturas. **Dica:** procure possíveis relações entre os coeficientes e utilize conceitos já vistos na disciplina de ITN, como paridade, números primos, mdc, mmc, etc.

Já criaram suas hipóteses? Agora, validem ou refutem essas hipóteses verificando se elas funcionam para os exemplos acima. Se suas conjecturas foram validadas, entregue sua atividade. Se elas foram refutadas, repensem-as e se possível reformule-as antes de entregar a atividade.

PARTE 2

4 – Compare a solução encontrada na questão 2 com pelos menos outras duas equipes. As soluções foram as mesmas? Se não, anote outras soluções válidas.

5 – Discutam com alguma outra equipe sobre as conjecturas que eles criaram na questão 3. Vocês chegaram à mesma conclusão? Se não, qual das conjecturas está correta? Após discutir com a outra equipe, complete a frase:

"Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que a $\neq 0$ ou b $\neq 0$, admite solução no conjunto dos inteiros se

____."

PARTE 3

6 – Nas equações do exercício 2 você já deve ter percebido que, quando uma equação diofantina tem solução, existe mais de um par ordenado (x_0, y_0) que é solução dessa equação. Na verdade, cada uma das equações admite infinitas soluções. No item a), por exemplo, algumas das soluções da equação $13x + 4y = 1$ são:

$$x = 1 \; e \; y = -3$$
$$x = 5 \; e \; y = -16$$
$$x = 9 \; e \; y = -29$$
$$x = 13 \; e \; y = -42$$

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$

d) $3x - 2y = 2$

7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

PARTE 4

8 – Discuta com outra equipe os resultados encontrados na PARTE 3 da atividade e complete a frase:

"Seja (x_0, y_0) uma solução da equação diofantina $ax + by = c$, onde a $\neq 0$ e b $\neq 0$. Então, essa equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é dado por:

____."

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A "Parte 1", apresentada no Quadro 18, tinha como objetivo que os alunos, a partir das discussões de exemplos particulares realizadas com os colegas, criassem hipóteses para a seguinte situação-problema: "quando uma equação diofantina tem solução?". Tendo realizado essa etapa, na "Parte 2", a partir dos mesmos exemplos já trabalhados na "Parte 1", objetivávamos que os alunos conjecturassem que uma equação diofantina, quando tem solução, possui infinitas soluções. E, comparando as suas hipóteses com as das outras equipes, validassem (ou não) a hipótese criada na etapa anterior. Com isso esperávamos que os alunos chegassem à conclusão que uma equação diofantina $ax + by = c$, admite solução se, e somente se, $mdc(a, b)$ divide c (Proposição 1[11]).

Em seguida, na "Parte 3" esperávamos que os alunos, já tendo concluído da "Parte 2" que uma equação diofantina, quando tem solução, tem na verdade infinitas soluções, deduzissem a forma geral do conjunto solução de uma equação diofantina. Na "Parte 4" a ideia era que as equipes comparassem a forma geral deduzida por cada uma, validando-a ou refutando-a. Novamente, a ideia era que os alunos concluíssem o que quando uma equação

[11] Esta proposição será enunciada e demonstrada no tópico 3.1 deste trabalho.

diofantina possui solução, ela possui infinitas soluções (Proposição 2[12]).

Faremos a apresentação da análise do material entregue pelos alunos na mesma dinâmica em que a atividade foi realizada por eles. Apresentaremos o roteiro e a análise da "Parte 1", para, em seguida, apresentar o roteiro e a análise da "Parte 2" e assim sucessivamente.

Antes de analisar o material entregue pelos alunos, apresentaremos as proposições 1 e 2, presentes no referencial teórico de equações diofantinas, de modo que o leitor saiba qual a conclusão que os alunos "deveriam chegar" e comparar com as conjecturas criadas por eles.

3.1 PROPOSIÇÕES

Apresentamos abaixo as proposições 1 e 2 conforme formalizadas por Domingues (2009, p. 148-149).

Proposição 1: Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, admite solução se, e somente se, $d = mdc(a, b)$ divide c.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \text{ x } \mathbb{Z}$ é solução, vale a igualdade:

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Como $d|a$ e $d|b$, então $d|c$, pois, se $d|a$ então $a = dp, p \in \mathbb{Z}$ e se $d|b$ então $b = dq, q \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$c = ax_0 + by_0 = dpx_0 + dqy_0 = d(px_0 + qy_0)$$

e, portanto, $d|c$.

($\Leftarrow$) Como $d = mdc(a, b)$, temos que $d = ax_0 + by_0$, para algum par ordenado $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \text{ x } \mathbb{Z}$ [13]. Mas, da hipótese, $d|c$ de modo que $c = dt$ para algum $t \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(x_0t) + b(y_0t),$$

mostrando que (x_0t, y_0t) é solução da equação procurada.

Proposição 2: Seja (x_0, y_0) uma solução particular da equação diofantina $ax + by = c$, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Então, essa equação admite infinitas soluções, e o conjuntos dessas soluções é dado por:

$$S = \left\{\left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t\right) / \, t \in \mathbb{Z}\right\},$$

em que $d = mdc(a, b)$.

---

[12] Esta proposição será enunciada e demonstrada no tópico 3.1 deste trabalho.

[13] Resultado da Identidade de Bézout (apresentada em Domingues (2009, p. 135-136) na proposição 7).

Demonstração: Seja (x', y') uma solução de $ax + by = c$. Então,

$$ax' + by' = c = ax_0 + by_0,$$

o que é equivalente a

$$a(x' - x_0) = b(y_0 - y').$$

Supondo $a = dp$ e $b = dq$, temos que

$$p(x' - x_0) = q(y_0 - y'),$$

em que $mdc(p, q) = 1$. Como, pela igualdade anterior, $p|q(y_0 - y')$, então $p|(y_0 - y')$ e, portanto, $(y_0 - y') = pt$ para algum $t \in \mathbb{Z}$. Donde,

$$y' = y_0 - pt = y_0 - \frac{a}{d}t.$$

Observe agora que

$$p(x' - x_0) = q(y_0 - y') = qpt$$

de onde obtemos

$$x' = x_0 + qt = x_0 + \frac{b}{d}t.$$

Por outro lado é fácil verificar que, para todo $t \in \mathbb{Z}$, o par

$$\left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t\right)$$

é solução da equação dada, pois

$$a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right) = ax_0 + a\frac{b}{d}t + by_0 - b\frac{a}{d}t = ax_0 + by_0 = c.$$

3.2 ATIVIDADE 2

No tópico anterior foram apresentadas as proposições – bem como suas demonstrações – que dão suporte à resolução de equações diofantinas. Como já mencionado, a ideia era que os alunos realizassem atividades orientadas de modo a elaborar conjecturas que se aproximassem das ideias dadas por essas proposições. Assim, a partir de agora, apresentamos as atividades propostas e suas respectivas análises, que foram divididas em quatro seções – uma para cada parte da atividade proposta.

3.2.1 Atividade 2 – Analisando Equações Diofantinas (Parte 1)

Trataremos agora da análise da primeira parte da atividade 2, que, como já exposto anteriormente, tinha como objetivo que os alunos criassem hipóteses para a situação-problema: “quando uma equação diofantina tem solução?”.

Organizados em equipes, cada aluno teve acesso à “Parte 1” da Atividade 2, conforme o Quadro 18.

Quadro 18 - Atividade 2: Analisando equações diofantinas (Parte 1)

Atividade 2: Analisando equações diofantinas

PARTE 1

Como vimos na história de Diofanto, seu objetivo era encontrar valores de x, y inteiros que fossem solução de equações do tipo:

$$ax + by = c,$$

onde $a, b, c \in Z$ e a e b não são simultaneamente nulos.

Hoje, diferente de Diofanto, já conhecemos o método para resolver equações desse tipo. Vamos, contudo, tentar construir uma teoria para resolver essas equações, assim como Diofanto teve que fazer, em sua época.

1 – Observe a equação $3x + 7y = 20$. Você consegue encontrar uma solução? Justifique! Existe alguma relação entre os coeficientes 3, 7 e 20?

2 – Nas equações abaixo, discutam se é possível obter uma solução no conjunto dos inteiros. Se existir, explicite-a. Você percebe alguma relação entre os coeficientes?

a) $13x + 4y = 1$

b) $4x + 2y = 7$

c) $10x - 16y = -8$

d) $3x - 2y = 2$

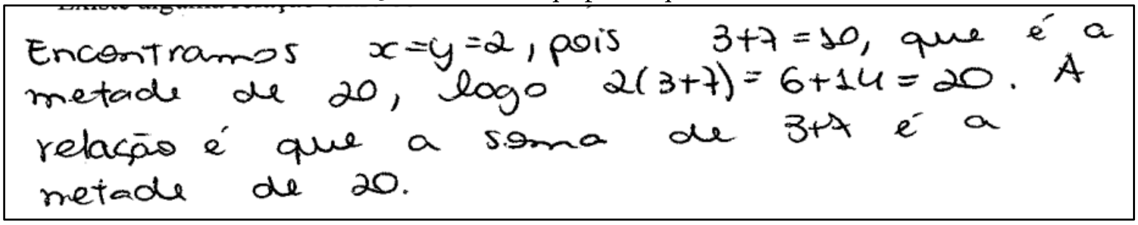
3 – Agora, queremos saber: quando uma equação diofantina tem solução no conjunto dos inteiros? Usando os exemplos acima queremos encontrar alguma “regra” que nos permita analisar qualquer equação diofantina e dizer se ela tem solução ou não. Observe os exemplos já discutidos e junto com sua equipe crie conjecturas. **Dica:** procure possíveis relações entre os coeficientes e utilize conceitos já vistos na disciplina de ITN, como paridade, números primos, mdc, mmc, etc.

Já criaram suas hipóteses? Agora, validem ou refutem essas hipóteses verificando se elas funcionam para os exemplos acima. Se suas conjecturas foram validadas, entregue sua atividade. Se elas foram refutadas, repensem-nas e se possível reformule-as antes de entregar a atividade.

Fonte – Produção da autora, 2018.

Por tentativa e erro, todas as equipes conseguiram encontrar pelo menos uma solução para a equação diofantina da questão 1. Em especial, destacamos que todas as 8 equipes apresentaram como solução $x = y = 2$. Entre as equipes, 3 delas apresentaram um raciocínio semelhante ao apresentado no Quadro 19.

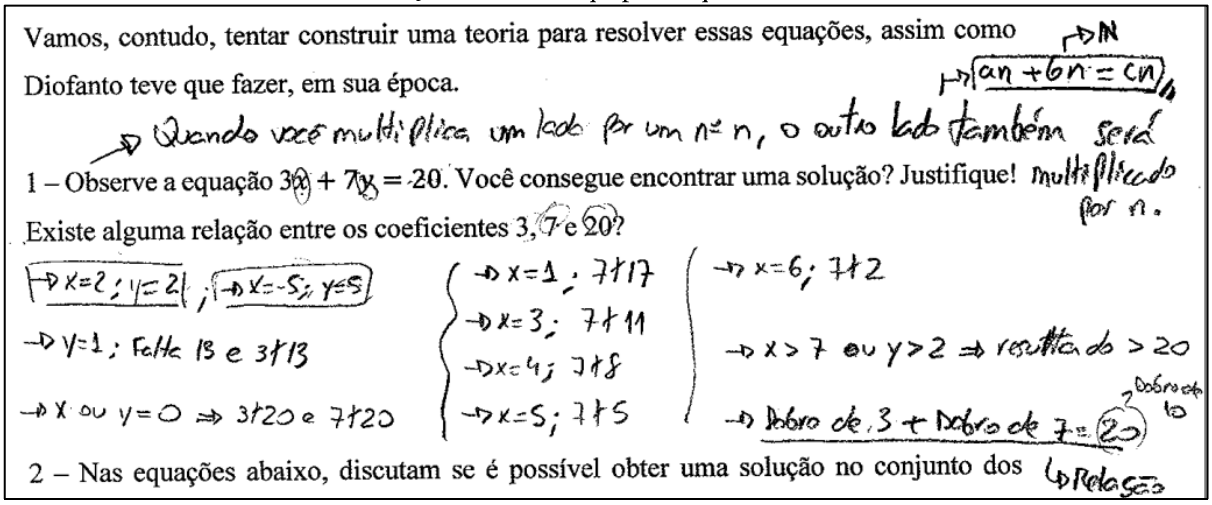
Quadro 19 - Equipe 3: questão 1


Encontramos $x=y=2$, pois $3+7=10$, que é a metade de 20, logo $2(3+7) = 6+14 = 20$. A relação é que a soma de $3+7$ é a metade de 20.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Destacamos outros pontos de vista apresentados pelos alunos. A equipe 4, por exemplo, realizou várias tentativas, como podemos ver no Quadro 20.

Quadro 20 - Equipe 4: questão 1


Vamos, contudo, tentar construir uma teoria para resolver essas equações, assim como Diofanto teve que fazer, em sua época. → N

→ $(an + bn = cn)$

→ Quando você multiplica um lado por um nº n, o outro lado também será multiplicado por n.

1 – Observe a equação $3x + 7y = 20$. Você consegue encontrar uma solução? Justifique! Existe alguma relação entre os coeficientes 3, 7 e 20?

→ $x=2$; $y=2$; → $x=-5$; $y=5$

→ $y=1$: Falta 13 e $3 \nmid 13$

→ x ou $y=0$ ⇒ $3 \nmid 20$ e $7 \nmid 20$

→ $x=1$; $7 \nmid 17$

→ $x=3$; $7 \nmid 11$

→ $x=4$; $7 \nmid 8$

→ $x=5$; $7 \nmid 5$

→ $x=6$; $7 \nmid 2$

→ $x > 7$ ou $y > 2$ ⇒ resultado > 20

→ Dobro de 3 + Dobro de 7 = 20 ← Dobro de 10

→ Relação

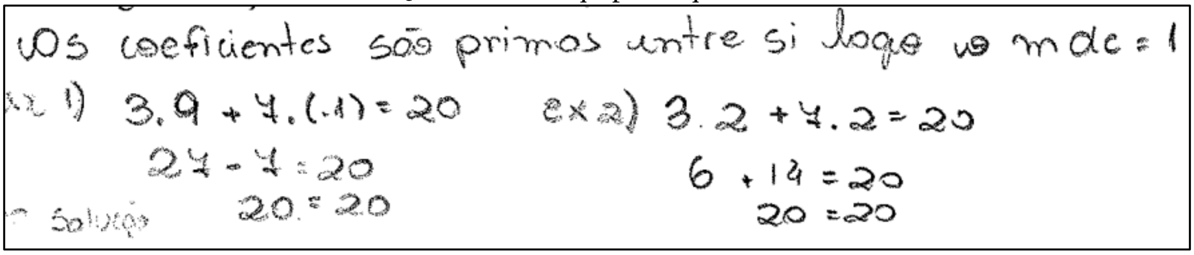
2 – Nas equações abaixo, discutam se é possível obter uma solução no conjunto dos

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Em cada tentativa os alunos atribuíam o valor de uma das variáveis (na maior parte das vezes o “x”, como vemos na coluna central) e verificavam se o resto era divisível pelo outro coeficiente. É interessante observar que os alunos não consideraram soluções negativas para a equação, e até chegaram à conclusão que x não poderia ser maior do que 7 e y não poderia assumir valores maiores do que 2, pois ultrapassaria 20.

A equipe 7 seguiu em outra direção, relacionando os coeficientes (3, 7 e 20) e identificando que eles são primos entre si. Além disso, conseguiram apresentar mais de uma solução para a equação (Quadro 21).

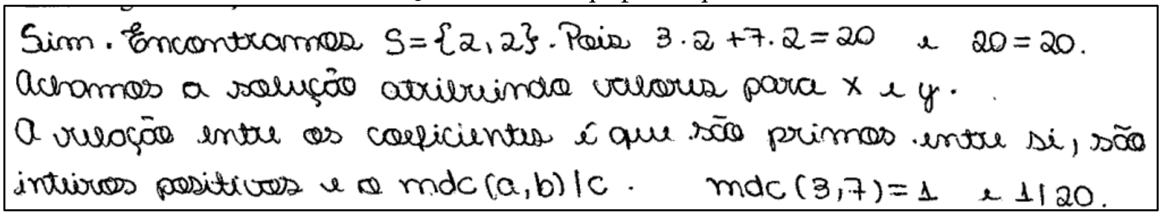
Quadro 21 - Equipe 7: questão 1


Os coeficientes são primos entre si logo o mdc = 1
ex 1) 3.9 + 4.(-1) = 20 ex 2) 3.2 + 4.2 = 20
24 - 4 = 20 6 + 14 = 20
solução 20 = 20 20 = 20

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Para finalizar essa questão, observe a resposta dada pela equipe 1 no Quadro 22.

Quadro 22 - Equipe 1: questão 1


Sim. Encontramos S={2,2}. Pois 3.2+7.2=20 e 20=20.
Achamos a solução atribuindo valores para x e y.
A relação entre os coeficientes é que são primos entre si, são inteiros positivos e o mdc(a,b)|c. mdc(3,7)=1 e 1|20.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Questionei os alunos sobre como eles haviam chego numa relação tão “complexa” entre os coeficientes a partir de apenas um exemplo. Um dos alunos da equipe respondeu que em sua pesquisa sobre a história de Diofanto, realizada na atividade 1, ele tinha lido que essas eram as condições para que uma equação diofantina tivesse solução, por isso foi fácil transferir para esse exemplo em particular.

Por um lado, enquanto professora, fiquei “chateada”, pois aqueles alunos não conseguiriam aproveitar toda a construção da Proposição 1, conforme eu havia planejado, afinal, eles já conheciam a “resposta final”. Por outro lado, fiquei feliz em ver que o aluno havia ido além do que eu tinha proposto na atividade 1, tinha buscado entender e conhecer mais do que eu havia pedido inicialmente. Ao longo da atividade percebi esse aluno auxiliando e explicando aos demais colegas de equipe como a proposição (ainda que não estivesse formalizada em sala) funcionava.

Na questão 2 os alunos deveriam apresentar soluções para cada uma das quatro equações propostas, buscando encontrar uma relação entre os coeficientes. Das equações apresentadas, apenas a letra b) não possuía solução. Todas as equipes concluíram que não era possível apresentar uma solução no conjunto dos números inteiros e, com exceção de uma equipe, todas as demais dissertaram sobre a impossibilidade de somar dois números pares e obter um resultado ímpar. Trazemos uma dessas falas no Quadro 23.

Quadro 23 - Equipe 1: questão 2b

b) $4x + 2y = 7$ → não tem solução no conjunto dos inteiros. mdc(4,2)= e 2∤7. Também percebemos que 4x é par e 2y também é par, pois um número par que multiplica qualquer outro número tem resultado par. E por propriedade, a soma de números pares é sempre par, e na equação temos resultado ímpar.

c) $10x - 16y = -8$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Como a equipe 1 já conhecia a Proposição 1, seus integrantes usavam-na para verificar quando a equação possuía solução ou não. No caso de ter solução, eles apresentavam uma, encontrada por tentativa e erro. Entre as 8 equipes, além da equipe 1, as equipes 2 e 6 apresentaram apenas uma solução encontrada por tentativa e erro, sem discursar muito sobre o raciocínio utilizado ou sobre a relação entre os coeficientes.

A equipe 7, apresentou 2 soluções para cada equação e, além disso, destacou o mdc entre os coeficientes, talvez numa tentativa de encontrar um padrão, ou por terem ouvido algum comentário de outra equipe.

Quadro 24 - Equipe 7: questão 2a

a) $13x + 4y = 1$ mdc = 1

Ex 1) 13.1 + 4.(-3) = 1
13 - 12 = 1
1 = 1

Ex2) 13·5 + 4·(-16) = 1
65 - 64 = 1
1 = 1

* mais de uma solução

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 8 expôs em todos os exemplos uma relação entre os coeficientes, mas não se preocupou em encontrar uma relação que fosse válida para qualquer equação diofantina. Aqui, penso que talvez os alunos não tivessem compreendido que deveriam buscar por uma generalização, algo que pudesse ser aplicado em todos os exemplos. Outra possibilidade é que eles tenham apenas escrito uma relação “qualquer” para completar a tarefa proposta. Observe as relações expressas por eles no Quadro 25.

Quadro 25 - Equipe 8: questão 2

a) $13x + 4y = 1$ $x = 1$ $y = -3$

A relação entre os coeficientes é que o coeficiente a = 13 dividido pelo coeficiente b = 4, da resto do coeficiente c = 1.

b) $4x + 2y = 7$

Não tem solução para x e y porque qualquer número multiplicado por 2 e 4 é par e a soma de dois pares é um número par e a diferença de dois números pares é par também. Logo, o resultado não pode ser ímpar.

c) $10x - 16y = -8$ $x = 4$ $y = 3$

A relação dos coeficientes é que todos são números pares.

d) $3x - 2y = 2$ $x = -2$ $y = -4$

a relação entre os coeficientes é que toda vez que eles forem primos e o resultado par, a equação é válida.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Todas as relações descritas por eles são verdadeiras, mas são válidas apenas para casos particulares. É interessante, contudo, que em cada uma das relações eles explicitam conceitos já vistos na disciplina de ITN como divisibilidade, resto, par, ímpar e números primos.

Para finalizar a análise da questão 2, vamos abordar com mais detalhes as soluções das equipes 3, 4 e 5 que apresentaram um raciocínio um pouco distinto das demais. Começamos com as equipes 3 e 5 que, em alguns itens apresentaram raciocínios semelhantes.

Vemos no Quadro 26 que os alunos da equipe 3, observaram várias relações. Trabalharam com a noção de algoritmo da divisão, assim como já destacado pela equipe 8 no Quadro 25. Chegaram, erroneamente, à conclusão que $4y < 13x$, talvez por não terem considerado os casos em que x assumiria valores negativos, como na solução $x = -3$ e $y = 10$, em que $4y = 40 > -39 = 13x$. Ainda, isolaram $13x$ e encontraram a decomposição do número 13, como já apresentada por eles na primeira linha, concluindo, portanto, que y deveria ser igual a -3.

Quadro 26 - Equipe 3: questão 2a

a) $13x + 4y = 1$ $x = 1$ $y = -3$, pois observa-se que $13 = 4 \cdot 3 + 1$, mas como a diferença é positiva, $4y < 13x$ e como $13x = -4y + 1$, temos $13 + (-12) = 1$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Com um raciocínio semelhante, a equipe 5 decompôs o número 13, como pode ser observado no Quadro 27.

Quadro 27 - Equipe 5: questão 2a

a) $13x + 4y = 1$
13 é (múltiplo de 4)+1, portanto removendo o (múltiplo de 4) com o 4Y nos restaria 1, portanto $x=1$ e $Y=-3$.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Aqui, quando os alunos escrevem "removendo o (múltiplo de 4) com o $4y$", imagino que eles estão tentando expressar que $13 = 4k + 1$ $(13 = 12 + 1)$ e que seria necessário que $4k$ fosse igual a $-4y$ para que restasse apenas 1 unidade em cada lado da igualdade. Como $4k$ é igual a 12, então y deve ser igual a -3, resultando em $x = 1$. Acredito que seja isso que os alunos tenham tentado dizer, ainda que não tenham expressado dessa forma.

No item c) (Quadro 28), a equipe 3 concluiu que os valores de x e y deveriam ser negativos, e acredito que usaram a mesma ideia do item a) (Quadro 26), concluindo, neste caso, que $10x$ deveria ser menor do que $16y$. Novamente, aqui não consideraram e talvez não tenham percebido a existência de infinitas soluções, pois destacaram que as respostas deveriam ser negativas. Observamos ainda que a equipe usou uma estratégia diferente daquela utilizada no item a), na qual haviam decomposto o número 13.

Quadro 28 - Equipe 3: questão 2c

c) $10x - 16y = -8$ $x = -4$ $y = -2$.
Os dois valores são negativos, p/ na diferença chegar em um nº negativo também.
$-40 - (-32) = -40 + 32 = -8$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 5, fez uso de outra estratégia para resolver o item c), como pode ser observado no Quadro 29.

Quadro 29 - Equipe 5: questão 2c

c) $10x - 16y = -8$

10-16=-6, se fizermos esta diferença três vezes obtemos -18, que é -10 e -8, portanto adicionamos mais um 10 para restar -8, logo x=4 e Y=3

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Reescrevendo em linguagem matemática a explicação feita pelos alunos no Quadro 29, teríamos:

$$10 - 16 = -6.$$

Se fizermos essa diferença três vezes obtemos -18:

$$3.10 - 3.16 = 3.(-6)$$

$$3.10 - 3.16 = -18$$

que é -10 e -8:

$$3.10 - 3.16 = -10 - 8$$

portanto, adicionamos mais um 10 para restar -8,

$$3.10 - 3.16 + 10 = -10 - 8 + 10$$

$$4.10 - 3.16 = -8$$

logo, $x = 4$ e $y = 3$.

No item d) ambas equipes utilizaram um raciocínio semelhante ao apresentado pela equipe 5 no item c), elas perceberam que a diferença entre os coeficientes era igual a 1, e bastava multiplicar ambos os lados da igualdade por 2, para encontrar a solução pedida (Quadro 30 e Quadro 31). Ou seja, perceberam que a equação poderia ser escrita como:

$$3.1 - 2.1 = 1$$

$$3.2 - 2.2 = 2$$

donde conclui-se que $x = y = 2$.

Quadro 30 - Equipe 3: questão 2d

d) $3x - 2y = 2$ x=y=2. Pois a diferença 3-2=1, e multiplicando por 2 em ambos dos lados, chegamos a: 3·2-2·2=1·2

6-4=2

2=2

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 31 - Equipe 5: questão 2d

d) $3x - 2y = 2$

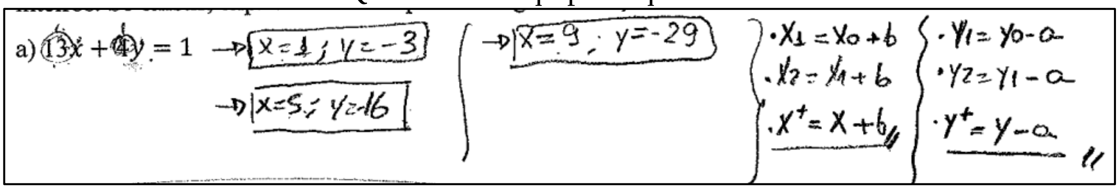
3-2=1, portanto precisamos de dois "3-2" para obtermos 2, logo x=Y=2

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Para finalizar a análise da questão 2, trazemos as soluções apresentadas pela equipe 4. Essa equipe foi além do que havia sido previsto na atividade. Como já destacamos, o objetivo da “Parte 1” era que os alunos criassem hipóteses sobre a existência ou não de soluções para uma equação diofantina. Contudo, a equipe 4 percebeu que existia um comportamento que se repetia nas soluções e começou a esboçar uma forma geral para as soluções de uma equação diofantina (análise essa que seria proposta apenas na “Parte 3” da atividade 2).

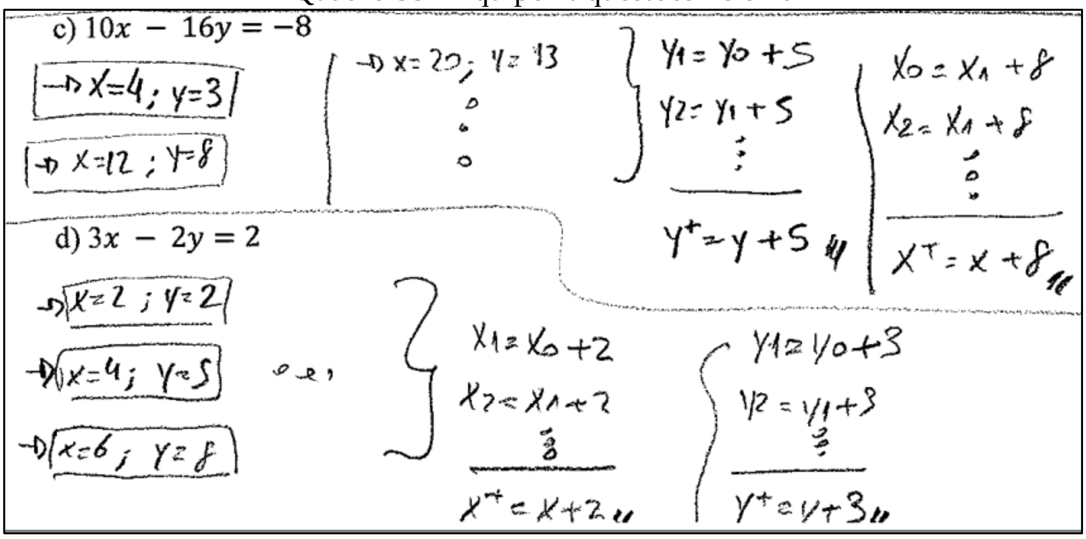
Observe no Quadro 32 e no Quadro 33 que, ainda que com uma notação matematicamente imprecisa, os alunos demonstram ter compreendido que, a partir de uma solução particular, pode-se encontrar infinitas soluções para uma equação diofantina. Além disso, eles percebem que o valor de x está associado com o coeficiente b e o valor de y com o oposto do coeficiente a.

Quadro 32 - Equipe 4: questão 2a



Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 33 - Equipe 4: questões 2c e 2d



Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Finalizando a análise da “Parte 1”, vamos trazer algumas das hipóteses apresentadas pelos alunos para a questão: “quando uma equação diofantina tem solução no conjunto dos inteiros?”. As equipes 2 e 6 concluíram corretamente que no caso dos coeficientes a e b serem pares, o coeficiente c deve obrigatoriamente ser par também, para que haja a possibilidade de a equação ter solução. Observe no Quadro 34 que a equipe 2 escreveu, como eu enunciei, que a soma de dois números pares deve resultar num número par, em linguagem matemática.

Quadro 34 - Equipe 2: questão 3

③ Se a e b são pares, então $a = 2k$ e $b = 2k_1$, $a+b = c$, então c é par, logo $c = 2k_2$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Vale ressaltar que, ainda que todos os coeficientes sejam pares, não há garantia que exista solução para a equação diofantina, pois, por exemplo, na equação $4x + 8y = 2$, todos os coeficientes são pares, mas não existe solução uma vez que $mdc(4,8) = 4$ e $4 \nmid 2$. É correto afirmar que se a e b forem pares, c precisa ser par para que exista a possibilidade de haver solução.

Chegando à uma conclusão similar à equipe 2, mas escrita de outra forma, apresentamos a resposta da equipe 6 no Quadro 35, na qual eles dizem que se c é um coeficiente ímpar, então a ou b deve ser ímpar para que a equação diofantina tenha solução. Observe que essa equipe apresentou sua resposta de uma maneira mais formal, semelhante à forma como é trabalhado o conteúdo ao longo da disciplina de ITN. Os alunos enunciaram a sua proposição, identificaram hipótese e tese, e realizaram uma demonstração por absurdo.

Quadro 35 - Equipe 6: questão 3

Para qualquer nº impar resultado da equação deve-se obter um coeficiente impar.
Hipótese: o resultado é impar
Tese. um dos dois coeficientes deve ser impar.

Demonstrando por absurdo vamos supor que toda os coeficientes são pares:
$2a + 2b = 1$
$2(a+b) \neq 1$
Absurdo, logo deve haver um coeficiente impar. cqd!

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

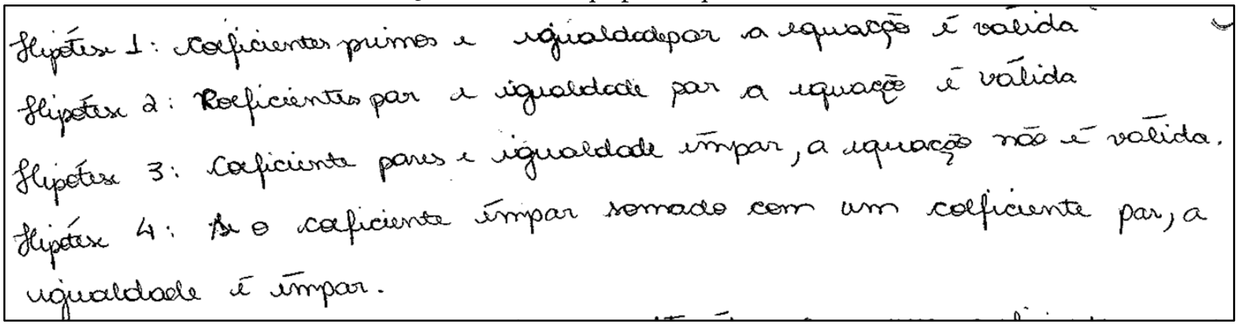
Analisando a hipótese da equipe 6, se c é um coeficiente ímpar ele será da forma $c = 2k + 1$[14], $k \in \mathbb{Z}$, não sendo divisível por um número par. Logo, a e b não podem ser ambos pares, pois nesse caso seu mdc também seria par, e, como c não é divisível por um número par a equação diofantina não teria solução.

No Quadro 36 vemos que a equipe 8 elaborou diversas hipóteses para casos particulares, mas não conseguiu apresentar uma única que respondesse à questão proposta: “quando uma

[14] Em sua demonstração, no lado direito da igualdade os alunos colocaram apenas o número 1 para representar um número ímpar. Não temos como saber se foi um erro na interpretação, uma distração, por não saberem exatamente como demonstrar ou algum outro motivo. Ainda assim, sua hipótese estava correta.

equação diofantina admite solução no conjunto dos números inteiros?”. Além disso, a escrita ficou um pouco confusa, então vamos tentar interpretar o que os alunos quiseram expressar.

Quadro 36 - Equipe 8: questão 3


Hipótese 1: coeficientes primos e igualdadepar a equação é válida
Hipótese 2: coeficientes par e igualdade par a equação é válida
Hipótese 3: coeficientes pares e igualdade ímpar, a equação não é válida.
Hipótese 4: Se o coeficiente ímpar somado com um coeficiente par, a igualdade é ímpar.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Entendemos que quando os alunos escreverem na hipótese 1, “coeficientes primos e igualdade par”, eles querem dizer que os coeficientes a e b são números primos e que o coeficiente c – que se encontra “do outro lado” da igualdade – é um número par. E ainda, quando dizem “a equação é válida”, na verdade querem dizer que a equação possui solução nos números inteiros. Analisando nessa perspectiva, a hipótese 1 é verdadeira, pois, se a e b são primos, então $mdc(a, b) = 1$ e $1|c$. Logo, como vimos na Proposição 1, a equação diofantina terá solução.

A segunda hipótese assume o caso onde todos os coeficientes são pares e, segundo os alunos, nesta configuração uma equação diofantina sempre teria solução. Esta conclusão é incorreta como podemos ver no contraexemplo $8x + 4y = 2$. Pela Proposição 1 temos que $mdc(4{,}8) = 4$ e $4 \nmid 2$. Logo, a equação não possui solução.

A terceira hipótese refere-se ao caso do exemplo b), $4x + 2y = 7$, no qual os alunos deduziram corretamente que não existe solução para esse tipo de equação, pois não há possibilidade de somar dois números pares e obter um ímpar. Ou ainda, pela Proposição 1, $mdc(2{,}4) = 2$ e $2 \nmid 7$.

Por fim, a quarta hipótese apresentada pela equipe afirma que se a for ímpar e b for par (ou vice-versa), c deve ser um número ímpar para que a equação diofantina admita solução. Essa hipótese não é válida, pois, na equação $3x - 2y = 2$, apresentada na letra d), foi possível encontrar solução. Além disso, pela Proposição 1, $mdc(2{,}3) = 1$ e $1 \mid 2$.

Por fim, a equipe 1 foi a única que apresentou corretamente a resposta da questão proposta. Como já mencionado, eles já tinham conhecimento da Proposição 1, então fizeram toda a atividade com essa informação em mente.

Quadro 37 - Equipe 1: questão 3

Hipótese: mdc(a,b)|c

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

3.2.2 Atividade 2 – Analisando Equações Diofantinas (Parte 2)

Conforme cada equipe finalizava e entregava a “Parte 1” da Atividade 2, recebia a “Parte 2”, que consistia das questões expostas no Quadro 38. Lembramos que para essa parte da atividade a ideia era que as equipes percebessem que quando uma equação diofantina possui solução, ela tem infinitas soluções e que comparassem com outras equipes as hipóteses criadas na “Parte 1”, validassem (ou não) suas hipóteses e, por fim, apresentassem suas conclusões.

Quadro 38 - Atividade 2: Analisando equações diofantinas (Parte 2)

Atividade 2: Analisando equações diofantinas

PARTE 2

4 – Compare a solução encontrada na questão 2 com pelos menos outras duas equipes. As soluções foram as mesmas? Se não, anote outras soluções válidas.

5 – Discutam com alguma outra equipe sobre as conjecturas que eles criaram na questão 3. Vocês chegaram à mesma conclusão? Se não, qual das conjecturas está correta? Após discutir com a outra equipe, complete a frase:

“Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que a $\neq 0$ ou b $\neq 0$, admite solução no conjunto dos inteiros se

____.”

Fonte – Produção da autora, 2018.

No item 4 com exceção das equipes 4 e 5, todas as demais apenas apresentaram algumas das soluções encontradas por outras equipes. A equipe 5 falou sobre a forma (o “método”) que outras equipes usaram para encontrar as soluções, mas não explicitou as soluções em si, como vemos no Quadro 39.

Quadro 39 - Equipe 5: questão 4

4 – Compare a solução encontrada na questão 2 com pelos menos outras duas equipes. As soluções foram as mesmas? Se não, anote outras soluções válidas.

Encontrar a resposta através de tentativa e erro;
Através das paridades.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 4 por sua vez, falou que tinha chego aos mesmos resultados das outras equipes, o que faz sentido, uma vez que esse grupo apresentou diversas soluções para uma mesma equação, chegando a esboçar inclusive, a forma geral do conjunto solução de uma equação diofantina.

Uma dificuldade encontrada nessa parte da aplicação foi o ritmo de trabalho de cada equipe. Como nem todos os alunos terminavam a atividade ao mesmo tempo, havia uma dificuldade em comparar os resultados. Ocorreu, por exemplo, que uma equipe não conseguiu entregar a “Parte 2” da atividade, pois como eles trabalharam de forma mais lenta, não conseguiram finalizar em tempo hábil.

Ainda assim, outras equipes conseguiram realizar a atividade como havia sido proposto e puderam comparar suas conjecturas. Na questão 5, das 7 equipes, 4 apresentaram como resposta que o $mdc(a, b)$ deveria dividir c. Aparentemente, ao comparar e discutir suas hipóteses com a hipótese da equipe 1, convenceram-se de que ela era uma generalização plausível. Acredito que ao se depararem com a hipótese da equipe 1, confrontaram-na com os exemplos dados e viram que ela realmente valia – pelo menos para aqueles exemplos.

No Quadro 40 vemos que a equipe 8 apresenta uma conjectura distinta daquelas 4 que já havia apresentado na “Parte 1” da atividade. Novamente, a afirmação é verdadeira pois expressa uma operação realizada em ambos os lados de uma igualdade, mas não responde à questão apresentada na atividade. Acredito que, pelo fato de serem alunos que atuam na primeira fase do curso, eles ainda não tenham desenvolvido uma “maturidade matemática” no sentido de compreender plenamente os conceitos da lógica dedutiva, de hipótese, proposição, generalização etc. Talvez eles acreditassem que estavam efetivamente respondendo à questão proposta, pois não entenderam que precisava ser uma afirmação que fosse válida para todos os casos, assim como já haviam feito na “Parte 1” da atividade, quando apresentaram 4 hipóteses.

Quadro 40 - Equipe 8: questão 5

“Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que a ≠ 0 ou b ≠ 0, admite solução no conjunto dos inteiros se

a e b é dividido pelo mesmo número, a igualdade também é.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 5 apresenta uma conclusão com uma linguagem matemática confusa e até mesmo incoerente, se minha interpretação estiver correta. Eles concluem que o Mínimo Múltiplo Comum (mmc) entre 3 números, deve ser comum entre si (Quadro 41). Mas, o mmc entre os 3 números é um outro número. Não consegui compreender quem deve ser comum ao mmc. Ficou uma frase confusa na qual não é possível saber quem são os elementos que devem ser comuns. Mais uma vez, temos que observar que são alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática, então eles ainda não possuem o domínio da linguagem matemática e muitas vezes não conseguem expressar matematicamente o que querem dizer.

Poderíamos pensar ainda que na hora de escrever os alunos tenham se confundido e, ao invés de escrever mdc, escreveram mmc. Caso isso tenha ocorrido ainda teríamos um problema em interpretar o que eles quiseram dizer com "comuns entre si". Afinal, da forma como escrever não é possível compreender "quem" deveria ser comum a "quem". Então, querendo escrever mdc ou mmc, me parece uma pequena demonstração da falta de fluência dos alunos na linguagem matemática.

Quadro 41 - Equipe 5: questão 5

"Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que a $\neq$ 0 ou b $\neq$ 0, admite solução no conjunto dos inteiros se

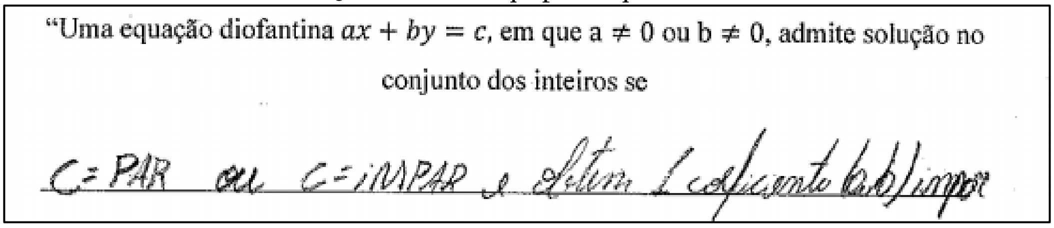
~~[illegible]~~ forem comuns entre si."

MMC(a.x, b.Y, c)

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Talvez outro exemplo dessa falta de "maturidade matemática" esteja na resposta dada pela equipe 6. Reescrevo a fala dos alunos do Quadro 42 numa tentativa de compreender o que quiseram expressar. Entendo que poderíamos traduzir a fala deles como: "Uma equação diofantina admite solução no conjunto dos inteiros se c for par. Ou, no caso em que c é ímpar, se um dos coeficientes, a ou b, for ímpar, a equação diofantina também admitirá solução". Sabemos que, ambas as partes dessa afirmação são falsas. Um contraexemplo da primeira é a equação $5x - 15y = 2$ que, pela Proposição 1 não possui solução, uma vez que $mdc(5,15) = 5$ e $5 \nmid 2$. E para a segunda, a equação $3x + 12y = 7$, onde $mdc(3,12) = 3$ e $3 \nmid 7$, também não possui solução. Destacamos, contudo, que em função dos poucos exemplos de equações diofantinas que os alunos haviam analisado, eles realmente poderiam ter chego na conclusão apresentada, pois todos os casos em que c era um número par, realmente tinham solução e o caso em que c era ímpar, viram que precisava que a ou b fosse ímpar também.

Quadro 42 - Equipe 6: questão 5


“Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que a $\neq 0$ ou b $\neq 0$, admite solução no conjunto dos inteiros se

C = PAR ou C = ÍMPAR e algum (coeficiente (a,b)) ímpar

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Ao finalizar essa parte da atividade os alunos já tinham constatado que nem todas as equações diofantinas possuem solução e, algumas das equipes já haviam discutido e visto que o critério para verificar a existência de soluções, era que o $mdc(a, b)$ dividisse c. Essa “regra” ainda não havia sido formalizada, mas eles perceberam que nos exemplos que haviam sido propostos, ela funcionava. Por meio da “Parte 2” os alunos puderam constatar que as equações diofantinas não possuem solução única, ainda que não soubessem como encontrar essas soluções.

3.2.3 Atividade 2 – Analisando Equações Diofantinas (Parte 3)

Após a entrega da “Parte 2” as equipes seguiam para a próxima sequência. O objetivo da “Parte 3” era que os alunos conseguissem encontrar a forma geral do conjunto solução de uma equação diofantina. Ou seja, eles deveriam encontrar uma “regra” que expressasse todos os pares ordenados que consistiam em solução da equação diofantina dada, e essa “regra” é, na verdade, a Proposição 2.

Observe no Quadro 43 a sequência proposta para a “Parte 3” dessa atividade.

Quadro 43 - Atividade 2: Analisando equações diofantinas (Parte 3)

Atividade 2: Analisando equações diofantinas

<u>PARTE 3</u>

6 – Nas equações do exercício 2 você já deve ter percebido que, quando uma equação diofantina tem solução, existe mais de um par ordenado (x_0, y_0) que é solução dessa equação. Na verdade, cada uma das equações admite infinitas soluções. No item a), por exemplo, algumas das soluções da equação $13x + 4y = 1$ são:

$$x = 1 \; e \; y = -3$$

$$x = 5 \; e \; y = -16$$

$$x = 9 \; e \; y = -29$$

$$x = 13 \; e \; y = -42$$

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?
7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).
c) $10x - 16y = -8$
d) $3x - 2y = 2$
7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

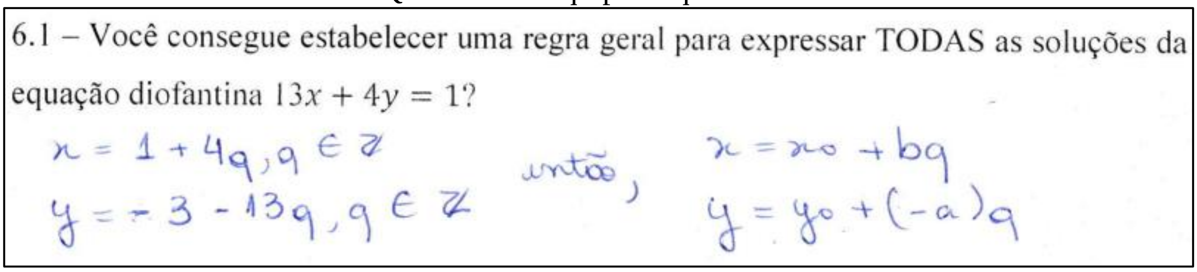
Fonte – Produção da autora, 2018.

No item 6 ordenei convenientemente as soluções, esperando que eles visualisassem um padrão nesse conjunto de pares ordenados. No item 7 eles já conheciam algumas soluções de cada item, por conta da questão 4 da “Parte 2”, restava saber se o raciocínio usado no item 6 os ajudaria a organizar convenientemente as soluções e encontrar o mesmo padrão. Por fim, era esperado que no item 7.1 eles conseguissem deduzir a Proposição 2.

Como comentado anteriormente, nem todas as equipes tinham o mesmo ritmo de trabalho e, ao chegar na “Parte 3” muitos alunos não tiveram tempo hábil para refletir adequadamente sobre essa atividade. Assim sendo, em alguns casos os alunos entregaram rascunhos e rabiscos que demonstram tentativas de apresentar a solução pedida, mas na maioria dos casos, sem sucesso. Vamos apresentar alguns recortes nos quais foi possível compreender a ideia ou o raciocínio utilizado pelos alunos.

Um ponto interessante a ser destacado é que a equipe 8 foi a única que conseguiu utilizar a linguagem matemática de maneira coerente de modo a expressar o conjunto solução da equação do item 6.1, como podemos ver no Quadro 44.

Quadro 44 - Equipe 8: questão 6.1



6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

$x = 1 + 4q, q \in \mathbb{Z}$ então, $x = x_0 + bq$

$y = -3 - 13q, q \in \mathbb{Z}$ $\quad y = y_0 + (-a)q$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Contudo, mesmo tendo generalizado corretamente o conjunto solução do item 6.1, a equipe teve dificuldades em fazer o mesmo com a equação do item 7c, como pode ser observado no Quadro 45.

Quadro 45 - Equipe 8: questão 7c

c) $x = -x_0 - \frac{b}{2} \cdot q$

$y = -y_0 - \frac{a}{2} \cdot q$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Eles conseguiram perceber que era necessário dividir o valor dos coeficientes a e b por 2 (que é o $mdc(10{,}16)$), mas acabaram se confundindo com os sinais da solução particular (x_0, y_0). É uma pena que eles não tenham tido tempo para finalizar o item 7.1, para que pudéssemos verificar como eles iriam proceder.

A equipe 2 chegou perto de estabelecer o conjunto solução no item 6.1 como podemos ver no Quadro 46.

Quadro 46 - Equipe 2: questão 6.1

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

$x = 4q_1 + 1$

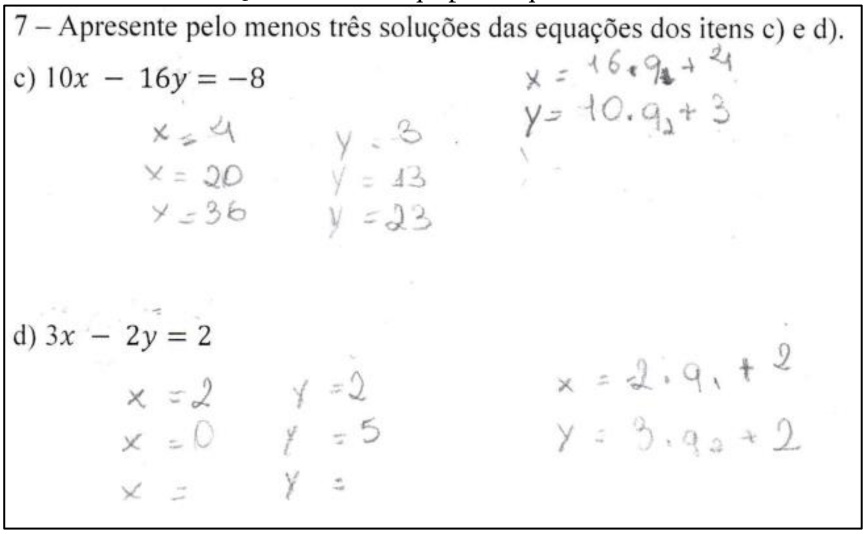
$y = -(13)q_2 - 3 \quad \forall q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Essa equipe teve apenas um problema na interpretação do parâmetro (que chamaram de q). Os integrantes não perceberam que o parâmetro precisa necessariamente ser o mesmo em ambas as igualdades.

Na questão 7 vemos que os alunos utilizaram a mesma ideia aplicada no item anterior, cometendo o mesmo erro com relação ao parâmetro, como vemos no Quadro 47.

Quadro 47 - Equipe 2: questão 7


7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$

x = 4 y = 3

x = 20 y = 13

y = 36 y = 23

x = 16.q₁ + 4

y = 10.q₁ + 3

d) $3x - 2y = 2$

x = 2 y = 2

x = 0 y = 5

x = y =

x = 2.q₁ + 2

y = 3.q₂ + 2

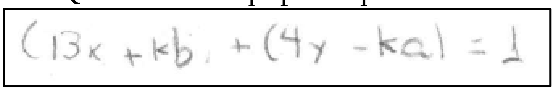
Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Com relação à equação diofantina $10x - 16y = -8$, devido às soluções particulares que haviam destacado, não perceberam que estavam “faltando soluções” no conjunto solução apresentado. Essas “soluções faltantes”, como por exemplo, $x = 12$ e $y = 8$ só são encontradas (na solução geral) quando dividimos os coeficientes a e b por 2, como fez a equipe 8. Ainda assim, é interessante observar que a generalização apresentada pela equipe, condiz com os pares ordenados que eles haviam encontrado como solução para a equação diofantina. Então, nesse caso, é possível que se tivessem sido dadas outras soluções (como em 6.1), os alunos tivessem conseguido deduzir o conjunto solução corretamente.

Já no item d, a equipe teve dificuldades em apresentar mais de uma solução, ainda que já tivessem essa informação da atividade anterior. Talvez pela falta de tempo não perceberam que era a mesma equação já dada ou não conseguiram detalhar as informações. Ainda assim, usaram a mesma estratégia dos itens anteiores e, como neste caso o $mdc(2,3) = 1$, a solução apresentada abrange todas as soluções possíveis (lembrando apenas do erro de interpretação do parâmetro).

Vemos no Quadro 48 que a equipe 3 compreendeu a forma geral do conjunto solução, contudo não soube expressar corretamente em linguagem matemática.

Quadro 48 - Equipe 3: questão 6.1


(13x + kb) + (4y - ka) = 1

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 7 desenvolveu algo semelhante ao que foi apresentado no Quadro 48, contudo não conseguiu unir todas as informações e expressar matematicamente. Observe que na questão 6 eles utilizam o x, mostrando que percebem, por meio das soluções apresentadas no enunciado, a necessidade da existência do parâmetro, a resolução pode ser vista no Quadro 49.

Quadro 49 - Equipe 7: enunciado

$$13.(1+4x) + 4.(-3-13x) = 1$$

$x = 1\, e\, y = -3$

$x = 5\, e\, y = -16$

$x = 9\, e\, y = -29$

$x = 13\, e\, y = -42$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Porém, quando foi pedido para generalizar o conjunto solução, o parâmetro "some". Além disso, eles colocam os coeficientes 13 e 4 multiplicando toda a expressão entre parêntesis (Quadro 50). De fato, qualquer solução particular que for substituída em x_0 e y_0 irá gerar uma igualdade verdadeira. Porém, não era essa a proposta do exercício.

Quadro 50 - Equipe 7: questão 6.1

$$13.(x_0+4) + 4.(y_0-13) = 1$$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Naturalmente, eles utilizaram o mesmo raciocínio, para expressar a regra geral da solução das equações da questão 7, como vemos no Quadro 51.

Quadro 51 - Equipe 7: questão 7.1

7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

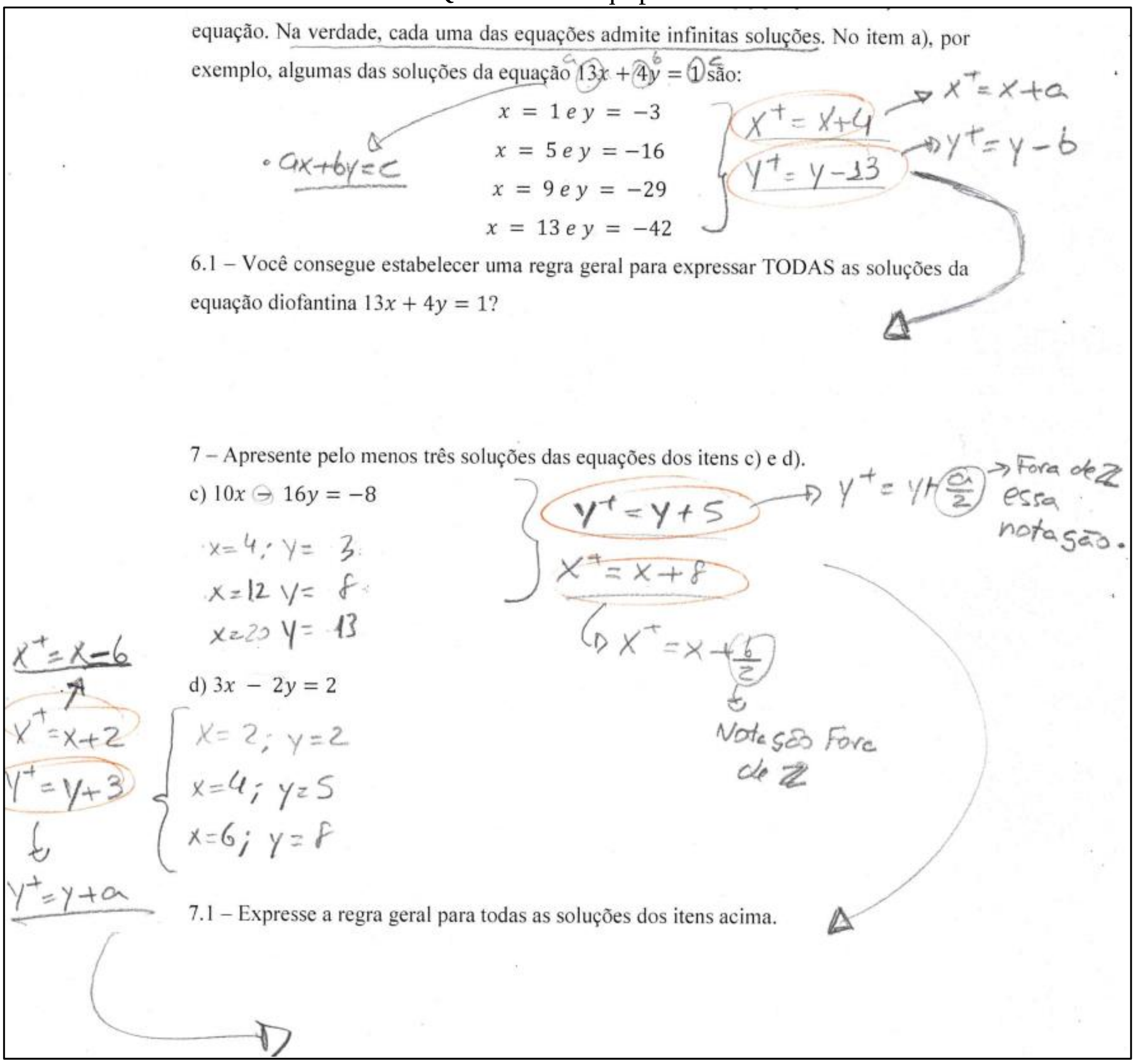
$$10.(x_0+8) - 16.(y_0+5) = -8$$

$$3.(x_0+2) - 2.(y_0+3) = 2.$$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Um raciocínio distinto dos apresentados até aqui, foi desenvolvido pelas equipes 4 e 5. Já destacamos no Quadro 32 que a equipe 4 havia começado a esboçar o conjunto solução para uma equação diofantina. No Quadro 52 vemos que, de maneira geral eles compreendem o comportamento do conjunto solução, contudo, a regra geral apresentada por eles não reflete todas as soluções possíveis em função de um parâmetro. Na notação deles cada solução depende da solução imediatamente "anterior", necessitando que o processo para encontrar as soluções seja realizado de maneira sucessiva.

Quadro 52 - Equipe 4



equação. Na verdade, cada uma das equações admite infinitas soluções. No item a), por exemplo, algumas das soluções da equação $13x + 4y = 1$ são:

$x = 1$ e $y = -3$

$x = 5$ e $y = -16$

$x = 9$ e $y = -29$

$x = 13$ e $y = -42$

$ax + by = c$

$x^+ = x + 4 \rightarrow x^+ = x + a$

$y^+ = y - 13 \rightarrow y^+ = y - b$

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$

$x = 4$; $y = 3$

$x = 12$ $y = 8$

$x = 20$ $y = 13$

$y^+ = y + 5 \rightarrow y^+ = y + \frac{a}{2} \rightarrow$ Fora de $\mathbb{Z}$ essa notação.

$x^+ = x + 8 \rightarrow x^+ = x + \frac{b}{2}$

Notação Fora de $\mathbb{Z}$

d) $3x - 2y = 2$

$x = 2$; $y = 2$

$x = 4$; $y = 5$

$x = 6$; $y = 8$

$x^+ = x - 6$

$x^+ = x + 2$

$y^+ = y + 3$

$y^+ = y + a$

7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Vale destacar que na letra c) os alunos perceberam que era necessário fazer a divisão dos coeficientes por 2, mas interpretaram que essa divisão não seria um número inteiro. É bastante intigrante essa observação feita por eles, uma vez que eles mesmos já haviam dividido o 10 e o 16 por 2, e encontrado valores inteiros, mas ao fazer a divisão de a ou b por 2, por algum motivo eles não conseguiram relacionar que a resposta seria um número inteiro.

Desenvolvendo um raciocínio semelhante ao da equipe 4, temos no Quadro 53 a atividade entregue pela equipe 5.

Quadro 53 - Equipe 5

equação. Na verdade, cada uma das equações admite infinitas soluções. No item a), por exemplo, algumas das soluções da equação $13x + 4y = 1$ são:

$$x = 1\ e\ y = -3$$
$$x = 5\ e\ y = -16$$
$$x = 9\ e\ y = -29$$
$$x = 13\ e\ y = -42$$

$x^+ = x+4 = x+(b)$
$y^+ = y-13 = y+(-a)$

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

$x = 1,\ y = -3$
$x = 5,\ y = -16$
$x = 9,\ y = -29$

$x^+ = x+4 = x+(-b)$
$y^+ = x-13 = y+(-a)$

7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$

$x = -4,\ y = -2$
$x = 4,\ y = 3$
$x = 12,\ y = 8$

$x^+ = x+8 = x+\left(-\frac{b}{2}\right)$
$y^+ = y+5 = y+\left(a/2\right)$

d) $3x - 2y = 2$

$x = 2,\ y = 2$
$x = 4,\ y = 5$
$x = 6,\ y = 8$

$x^+ = x+2 = x-b$
$y^+ = y+3 = y+(-a)$

7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

$x^+ = x+\left(\pm \frac{b}{mdc(a,b)}\right)$
$y^+ = y+\left(\pm \frac{a}{mdc(a,b)}\right)$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

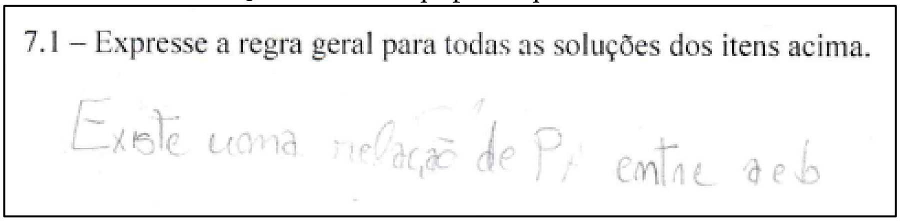
Observe que eles usam a mesma ideia de recorrência, em que cada solução depende da solução imediatamente “anterior”, não conseguindo estabelecer uma relação que dependa de um parâmetro. Essa equipe, contudo, vai adiante, apresentando uma solução em função dos coeficientes a e b e não levando em conta apenas o valor numérico dos exemplos apresentados. Ao fazer uso dessa notação parecem ter compreendido que a “regra geral” seria válida para outras equações diofantinas.

No tópico 7.1 eles destacam que os coeficientes a e b devem ser divididos pelo $mdc(a,b)$, contudo, fica clara a confusão e a dúvida em determinar os sinais dessa parcela.

Nesta atividade ficou evidente a dificuldade dos alunos em expressar matematicamente um comportamento que eles conseguiam compreender, pois percebiam “o que acontecia” de uma solução para a outra, e, além disso eram capazes de explicar verbalmente. Vimos que não estavam habituados a utilizar um parâmetro para descrever um comportamento.

Vale destacar que o conjunto de soluções para x e o conjunto de soluções para y podem ser escritos como progressões aritméticas (PAs) e este é um conteúdo, teoricamente, já visto pelos alunos no Ensino Médio. Portanto, chama a atenção o fato de apenas uma equipe ter mencionado explicitamente essa relação, como vemos no Quadro 54.

Quadro 54 - Equipe 6: questão 7.1


7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

Existe uma relação de PA entre a e b

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

É possível que outras equipes, como a 2 a 8 tenham usado esse conceito, mas não tenham explicitado. Contudo, na atividade das demais equipes fica claro que não houve essa relação.

Finalizamos assim a análise da Parte 3 e, a seguir, finalizamos a análise da atividade 2.

3.2.4 Atividade 2 – Analisando Equações Diofantinas (Parte 4)

Elaboramos a “Parte 4” da atividade 2 conforme o Quadro 55.

Quadro 55 - Atividade 2: Analisando equações diofantinas (Parte 4)

Atividade 2: Analisando equações diofantinas
PARTE 4
8 – Discuta com outra equipe os resultados encontrados na PARTE 3 da atividade e complete a frase:
“Seja (x_0, y_0) uma solução da equação diofantina $ax + by = c$, onde a $\neq 0$ e b $\neq 0$. Então, essa equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é dado por: ____.”

Fonte – Produção da autora, 2018.

Ao organizar o cronograma de uma disciplina precisamos prever quanto tempo é necessário para abordar cada um dos conteúdos que deve ser trabalhado. Assim, naturalmente, para aplicação do projeto que compõe este trabalho tínhamos uma quantidade de tempo limitada. Ocorre que nem sempre quando planejamos uma atividade diferenciada conseguimos mensurar o tempo que os alunos precisarão para concluí-la e neste caso, faltou tempo.

Assim como na “Parte 2” as equipes precisavam discutir entre si os resultados encontrados no intuito de concluirem o que diz a Proposição 1, também a “Parte 4” seguia a mesma estrutura. Após cada equipe tentar determinar o conjunto solução de uma equação diofantina, eles deveriam discutir os resultados para, enfim, concluir a Proposição 2. Em função da falta de tempo durante a aula, nenhuma das equipes realizou essa parte da atividade.

Certamente teria sido uma discussão bastante produtiva em função dos fatores já citados na análise da “Parte 2” dessa atividade, contudo, acreditamos que a não realização dessa parte da atividade não tenha gerado prejuízos para a compreensão do conteúdo e da generalização, uma vez que a Proposição 2 foi discutida, explicada e demonstrada na aula seguinte. Assim eles tiveram a chance de comparar o raciocínio deles, com a fundamentação matemática.

3.3 ATIVIDADE 3

Como já exposto na introdução deste trabalho, no encontro seguinte, após a aplicação da atividade 2, fizemos uma discussão com a turma sobre os resultados que eles tinham apresentado, argumentando sobre o porquê de serem válidos ou não. Em seguida, expusemos as proposições 1 e 2, bem como suas demonstrações, conforme já apresentadas no item 3.1. Por fim, resolvemos algumas equações diofantinas, mostrando como encontrar uma solução particular em casos onde não é tão imediato determinar essa solução por tentativa e erro. Ao final dessa aula, entregamos aos alunos a atividade que segue no Quadro 56 que, diferente das demais, devia ser entregue individualmente.

Quadro 56 - Atividade 3: Resolvendo equações diofantinas

Atividade 3 – Resolvendo Equações Diofantinas

Resolva os exercícios abaixo e entregue**, individualmente**, na aula do dia **29/05 (Horário: 9:20; Sala K201).**

No caso de dúvidas haverá horário de atendimento na segunda-feira (28/05/2018), das 11h às 11h50m, e das 13h30m às 15h (profa. Débora) e das 16h10-17 (profa. Ivanete)

1 – Se existir, determine todas as soluções das equações diofantinas abaixo:

a) $60x + 18y = 67$

b) $6x + 4y = 90$

2 – Uma garota recebeu R$ 50,00 para comprar dois tipos de lanches para um piquenique com suas amigas. Depois de pesquisar, conseguiu o preço de R$ 4,00 por hambúrguer e de

R$ 6,00 por mini-pizza. De quantas maneiras ela pode comprar a sua parte do lanche para o piquenique?

3 – Um grupo de pessoas gastou 1000 dólares num hotel. Sabendo-se que apenas alguns dos homens estavam acompanhados pelas esposas e que cada homem gastou 19 dólares e cada mulher gastou 13 dólares, pede-se para determinar quantas mulheres e quantos homens estavam no hotel.

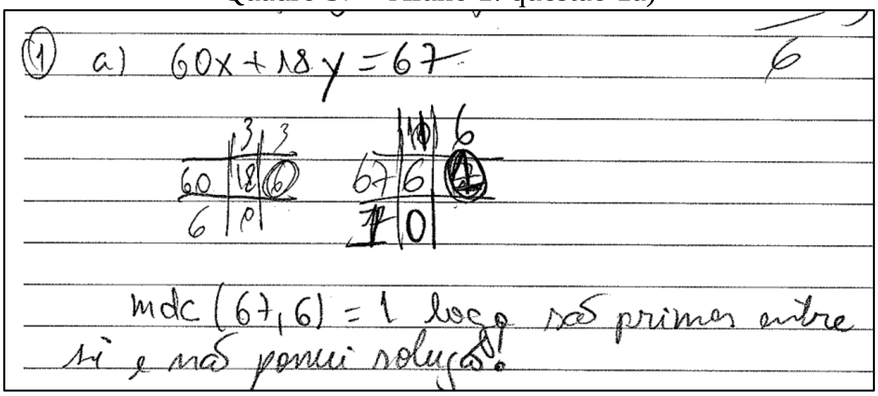
Fonte – Produção da autora

No exercício 1 os alunos precisavam, em primeiro lugar, utilizar a proposição 1 para verificar se as equações tinham solução, chegando à conclusão que apenas o item b) teria solução. Em seguida, utilizavam a proposição 2 para determinar o conjunto solução da equação de b) a partir de uma solução particular (x_0, y_0). Essa solução particular poderia ser encontrada da forma que eles julgassem mais conveniente.

As questões 2 e 3 exigiam primeiramente que os alunos interpretassem o problema e escrevessem uma equação diofantina que o descrevesse. Depois de encontrar o conjunto solução eles precisavam ainda interpretar as condições de existência dessas soluções, pois a quantidade de lanches ou pessoas, por exemplo, não poderiam ser negativas.

Dos 40 alunos matriculados na disciplina, cerca de 30 ainda frequentavam as aulas, e destes, apenas 15 entregaram a tarefa proposta. A questão 1a) apenas 1 dos alunos respondeu incorretamente. Pelo material entregue não é possível compreender exatamente o raciocínio dele. Como vemos no Quadro 57 ele determinou o $mdc(67,6)$ e com isso, concluiu que não haveria solução. Parece que, neste caso, houve um erro bastante grave na compreensão da proposição .

Quadro 57 – Aluno 1: questão 1a)



Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Os demais alunos responderam corretamente a este item, usando, quase em sua totalidade a Proposição 1, com exceção de um aluno que justificou que a soma de dois números pares não poderia resultar num número ímpar. Discussão esta que já havia aparecido durante a atividade 2. Alguns alunos apresentaram ambas justificativas, como vemos no Quadro 58.

Quadro 58 – Aluno 4: questão 1a)

① a) $60x + 18y = 67$ Essa equação não tem uma solução, pois o mdc $(18,60) = 6$ e $6 \nmid 67$. E também porque os coeficientes a e b são pares, não há possibilidade da soma de dois números pares virar um número ímpar.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

No item b) esperava-se que os alunos fizessem a resolução em 3 etapas: utilizar a Proposição 1 para verificar se a equação possuía solução; determinar uma solução particular da forma que julgassem mais conveniente; utilizar a Proposição 2 para expressar o conjunto solução.

O primeiro "passo" foi realizado por quase todos os alunos. Os que não o fizeram iniciaram a resolução apresentando uma solução particular e, imagino que com isso intuíram que não era necessário utilizar a proposição, pois já sabiam da existência de soluções.

O segundo passo era determinar uma solução particular e aqui, apareceram várias respostas e formas de encontrar essas soluções. Alguns alunos utilizaram tentativa e erro, como podemos observar nos Quadros 59 e 60.

Quadro 59 – Aluno 4: questão 1b)

As soluções que eu achei foi por tentativa e erro. Nas quais foram:

$x = 9$ e $y = 9$, onde: $6.9 + 4.9 = 90$

$54 + 36 = 90$ //

$x = 19$ e $y = -6$, onde: $6.19 + 4.(-6) = 90$

$114 - 24 = 90$ //

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 60 – Aluno 6: questão 1b)

1b) $6x + 4y = 90$

$mdc(6,4) = 2$ e $2 \mid 90$.

Esta equação tem solução no conjunto dos números inteiros.

① $6(7) + 4.(12) = 90$, $x_0 = 7$, $y_0 = 12$.

$42 + 48 = 90$

$90 = 90$

$t = 1$

② $6.9 + 4.(9) = 90$

$54 + 36 = 90$

$90 = 90$.

$t = 2$

③ $6.(11) + 4(6) = 90$

$66 + 24 = 90$

$90 = 90$.

$S = \left\{ x = 7 + \frac{4.t}{2}, \ y = 12 - \frac{6t}{2} \right\}$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Outros, pareceram não ter utilizado o artifício da tentativa e erro – tão amplamente usado por eles nas duas primeiras partes da atividade – mas optaram por aplicar o algoritmo da divisão, como vemos nos Quadros 61, 62 e 63.

Quadro 61 – Aluno 2: questão 1b)

b) $6x + 4y = 90$

Como $mdc(6,4) = 2 \mid 90$

existe solução em $\mathbb{Z}$

encontrando a solução

$6 = 4.1 + 2$ e $2 = 6 - 4$

$4 = 2.2$ logo $6.(1) + 4.(-1) = 2$ *

Como $90 = 2.45$

multiplicando (*) por 45 em ambos os lados

$6.(1.45) + 4.(-1.45) = 2.45$

$6.(45) + 4.(-45) = 90$

logo $x_0 = 45$ e $y_0 = -45$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 62 – Aluno 11: questão 1b)

$4 = 6 \cdot 0 + 4$ e $6 = 4 \cdot 1 + 2$

$2 = 6 - 4 \cdot 1$

$2 = 6 \cdot 1 - \underbrace{4} \cdot 1$

$2 = 6 \cdot 1 - (6 \cdot 0 + 4) \cdot 1$

$2 = 6 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 4 \cdot 1$

$2 = 6 \cdot (1 - 0) + 4 \cdot (-1)$

$2 = 6 \cdot (1) + 4 \cdot (-1) \quad \cdot (45)$

$2 \cdot 45 = (6 \cdot (1) + 4 \cdot (-1)) \cdot 45$

$x_0 = 45$ e $y_0 = -45 \qquad 90 = 6 \cdot (45) + 4 \cdot (-45)$

Excistem infinitos possibilidades para x e y, excemplos:

$x = x_0 + (b \cdot t)/mdc(a,b) \qquad y = y_0 + (-a \cdot t)/mdc(a,b)$

$x_2 = 45 + (4 \cdot 2)/2 \qquad y_2 = -45 - 6 \cdot 2/2$

$x_2 = 45 + 4 \qquad y_2 = -45 - 6$

$x_2 = 49 \qquad y_2 = -51$

$x_3 = 45 + (4 \cdot 3)/2 \qquad y_3 = -45 + (-6 \cdot 3)/2$

$x_3 = 45 + 6 \qquad y_3 = -45 - 9$

$x_3 = 51 \qquad y_3 = -54$

$x_4 = 45 + (4 \cdot 4)/2 \qquad y_4 = -45 + (-6 \cdot 4)/2$

$x_4 = 45 + 8 \qquad y_4 = -45 - 12$

$x_4 = 53 \qquad y_4 = -57$

Soluções: $(45, -45), (49, -51), (51, -54), (53, -57)$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 63 – Aluno 12: questão 1b)

b) $6x + 4y = 90$

Esta equação admite solução, pois:

$mdc(6,4) = 2$ e $2 | 90$.

Para encontrar todas as soluções, primeiro vamos encontrar uma solução particular para chegar em uma regra geral.

$6 = 4.1 + 2 \rightarrow 2 = 4 - (2.1)$ | $2 = 4.2 - 6.1$

$4 = 2.1 + 2$ | $2 = 4.1 - (2.1)$ | $2 = 4.2 + 6.(-1)$

$2 = 4.1 - (6-4).1$ | $45.2 = (4.2 + 6.(-1)).45$

$2 = 4.1 - (6.1 - 4.1)$ | $90 = 4.90 + 6.(-45)$

$2 = 4.1 - 6.1 + 4.1$ | $x_0 = -45$ $y_0 = 90$

Portanto, a regra geral é:

$x = -45 + \frac{4}{2} t \rightarrow x = -45 + 2t$ $y = 90 - \frac{6}{2} . t \rightarrow y = 90 - 3t$

Esta equação admite infinitas soluções, pois $t \in \mathbb{Z}$.

Algumas soluções:

* para $t = -59 \rightarrow x = -45 + 2.(-59) = -163$ e $y = 90 - 3.(-59) = 267$
* para $t = -32 \rightarrow x = -45 + 2.(-32) = -109$ e $y = 90 - 3.(-32) = 186$
* para $t = -3 \rightarrow x = 45 + 2.(-3) = -51$ e $y = 90 - 3.(-3) = 99$
* para $t = 2 \rightarrow x = -45 + 2.(2) = -41$ e $y = 90 - 3.(2) = 84$
* para $t = 95 \rightarrow x = -45 + 2.(95) = 145$ e $y = 90 - 3.(95) = -195$
* para $t = 207 \rightarrow x = -45 + 2.(207) = 369$ e $y = 90 - 3.(207) = -531$

$S_1 = \{-163, 267\}$, $S_2 = \{-109, 186\}$, $S_3 = \{-51, 99\}$, $S_4 = \{-41, 84\}$

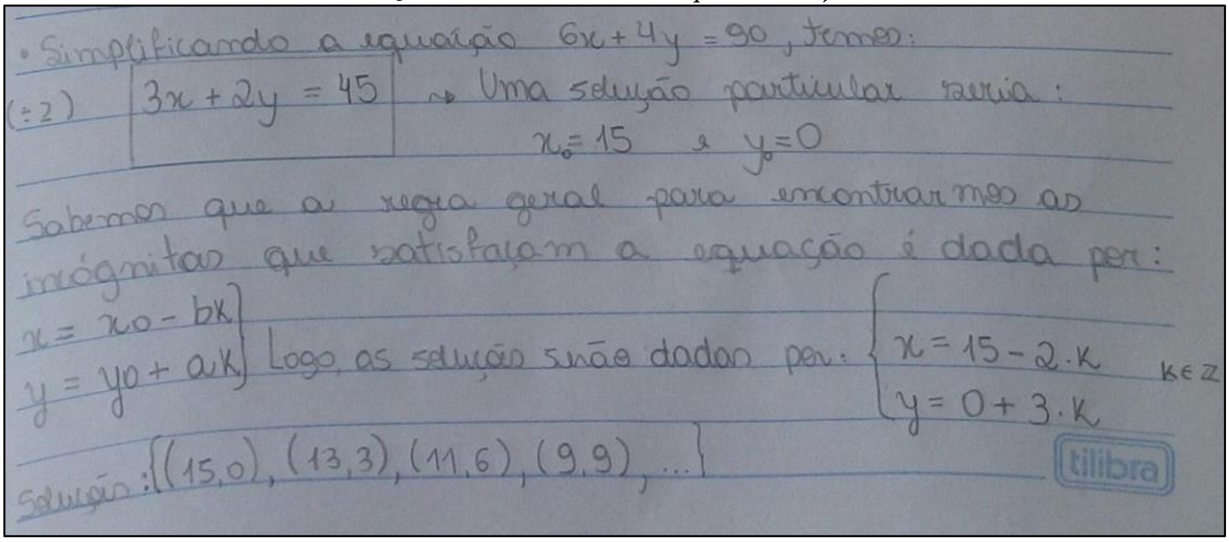
$S_5 = \{145, -195\}$ e $S_6 = \{369, -531\}$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Observe que nos quadros 61, 62 e 63, os alunos utilizaram o algoritmo da divisão para escrever o 90 como uma combinação linear de 6 e 4. Contudo, os “caminhos” escolhidos por eles foram bastante distintos. Enquanto o aluno 2 resolveu a questão em 2 linhas, os demais fizeram várias outras manipulações para determinar a solução particular.

Outro ponto que vale destacar é que o aluno 15 foi o único que realizou a divisão da equação por 2, encontrando assim a solução para a equação diofantina $3x + 2y = 45$ (Quadro 64).

Quadro 64 – Aluno 15: questão 1b)



• Simplificando a equação $6x + 4y = 90$, temos:

$(\div 2)$ $\boxed{3x + 2y = 45}$ → Uma solução particular seria:

$x_0 = 15$ e $y_0 = 0$

Sabemos que a regra geral para encontrarmos as incógnitas que satisfaçam a equação é dada por:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 - bk \\ y = y_0 + ak \end{array}\right\}$$

Logo, as soluções serão dadas por: $\begin{cases} x = 15 - 2 \cdot k \\ y = 0 + 3 \cdot k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

Solução: $\{(15,0), (13,3), (11,6), (9,9), \ldots\}$

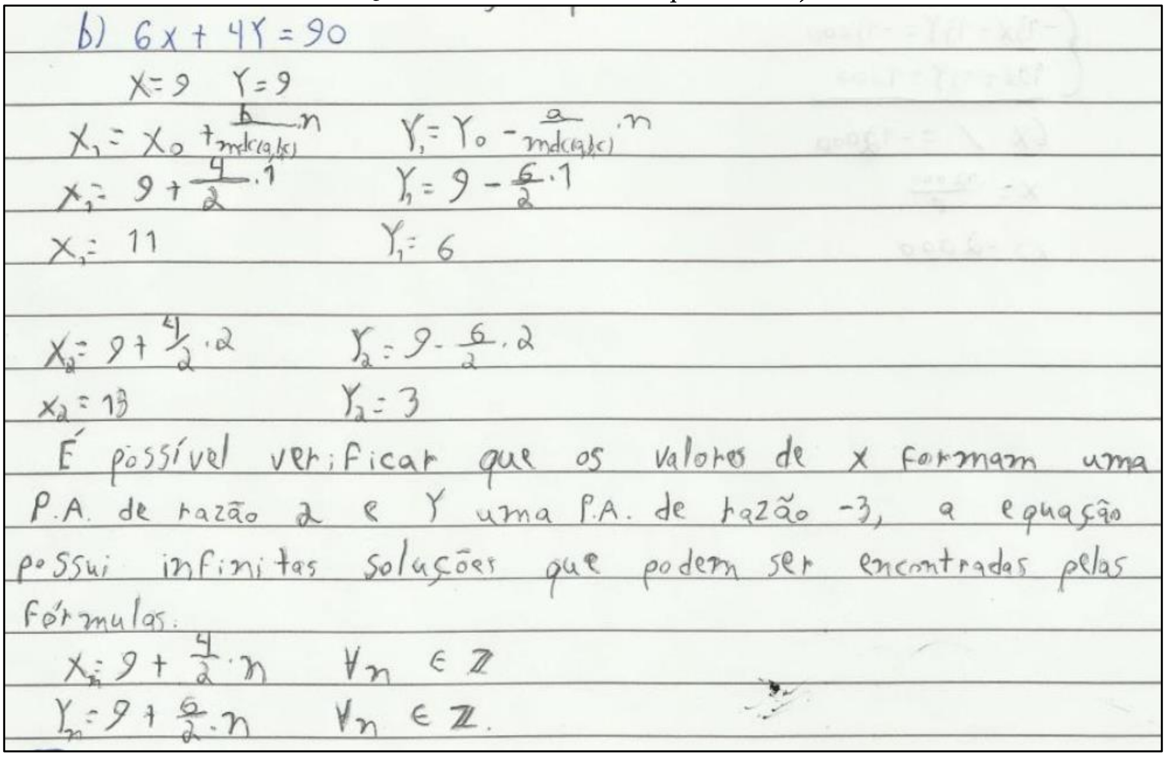
Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Em quase todos os quadros apresentados acima e em outros que foram entregues, não parece suficiente ao aluno apresentar uma única solução. Talvez como uma maneira de fazer a “prova real” ou para mostrar que conseguem encontrar mais de uma solução, eles apresentam várias respostas para uma equação diofantina.

Com relação ao terceiro passo desse item, houve uma taxa de acertos bastante alta. Os erros, quando houveram, se deveram a confusão com sinais ou falhas em cálculos simples. Um ponto que vale destacar é que em muitos casos os alunos apresentaram o conjunto solução como o que vemos no Quadro 60, no qual o aluno não realiza a divisão de 4 por 2 ou 6 por 2. Talvez quisessem de alguma forma deixar “na forma” da solução geral dada pela Proposição 2.

Uma resposta que se destaca nesse terceiro passo é a desenvolvida pelo aluno 13, conforme o Quadro 65. O que chama a atenção não é a resolução em si, pois, assim como a grande maioria, o aluno encontrou uma solução particular, aparentemente por tentativa e erro e então, utilizou a Proposição 2. O que chama a atenção é o comentário feito por ele, destacando que os valores para x e y formam uma Progressão Aritmética (PA). Já pontuamos durante a análise da atividade 2 que apenas uma equipe mencionou a relação de PA com as soluções das equações diofantinas e o aluno 13 não fazia parte da referida equipe. Talvez ele já tivesse notado essa relação durante a atividade 2 e não a tenha explicitado, ou pode ser que no momento da resolução deste exercício ele tenha reconhecido e relacionado com um conteúdo já visto por ele no Ensino Médio.

Quadro 65 – Aluno 13: questão 1b)



b) $6x + 4y = 90$

$x = 9 \quad y = 9$

$x_1 = x_0 + \frac{b}{mdc(a,b)} \cdot n \qquad y_1 = y_0 - \frac{a}{mdc(a,b)} \cdot n$

$x_1 = 9 + \frac{4}{2} \cdot 1 \qquad y_1 = 9 - \frac{6}{2} \cdot 1$

$x_1 = 11 \qquad y_1 = 6$

$x_2 = 9 + \frac{4}{2} \cdot 2 \qquad y_2 = 9 - \frac{6}{2} \cdot 2$

$x_2 = 13 \qquad y_2 = 3$

É possível verificar que os valores de x formam uma P.A. de razão 2 e y uma P.A. de razão -3, a equação possui infinitas soluções que podem ser encontradas pelas fórmulas.

$x_n = 9 + \frac{4}{2} \cdot n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

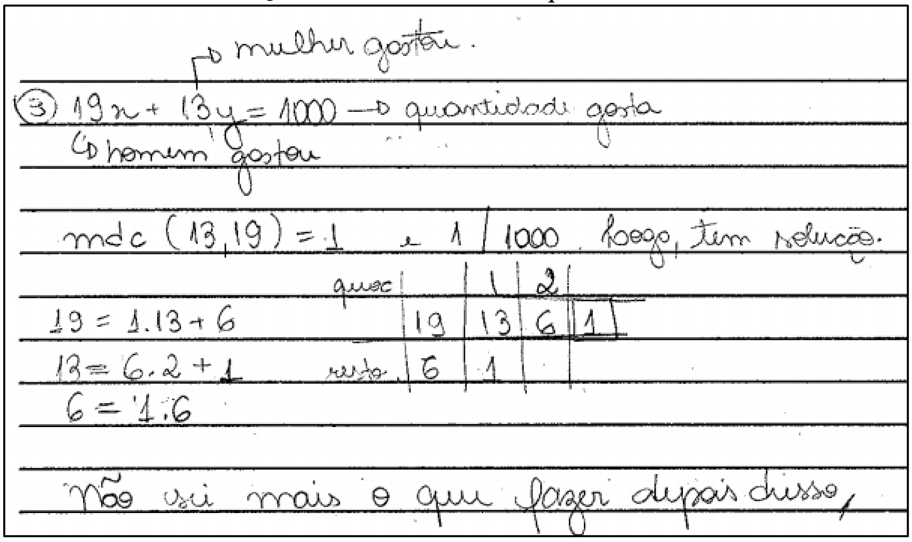
$y_n = 9 + \frac{6}{2} \cdot n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Nas questões 2 e 3 os alunos deveriam interpretar o problema e escrever a equação diofantina que o descrevesse. Em seguida, precisavam resolver a equação diofantina determinando o seu conjunto solução e, por fim, interpretar quais soluções eram válidas considerando o contexto do problema proposto. A principal diferença entre os problemas 2 e 3 era a dificuldade em encontrar a solução particular, pois na questão 2, (x_0, y_0) era facilmente encontrado por tentativa e erro, enquanto na questão 3 era esperado que os alunos precisassem utilizar o algoritmo da divisão.

Em alguns casos os alunos apenas resolveram as equações diofantinas sem verificar se a solução era válida ou não. Em outros, os alunos mostraram grande dificuldade em encontrar a solução particular utilizando o algoritmo da divisão. Neste ponto, faço um destaque para um grupo de alunos que realizou todas as atividades anteriores como equipe, se empenhando e se dedicando nelas. Eram alunos muito interessados, curiosos e que estavam sempre questionando se as hipóteses criadas por eles eram válidas ou não. Ou seja, estavam bem envolvidos nas atividades propostas. Ainda assim, não conseguiram realizar a atividade 3. Percebe-se que não conseguiram compreender como encontrar a solução de uma equação diofantina, ainda que soubessem utilizar as proposições, como exemplificamos no Quadro 66.

Quadro 66 – Aluno 4: questão 3



→ mulher gastou.

(3) $19x + 13y = 1000$ → quantidade gasta

↳ homem gastou

mdc $(13,19) = 1$ e $1 \mid 1000$, logo, tem solução.

quoc		1	2	
	19	13	6	1
resto	6	1		

$19 = 1.13 + 6$

$13 = 6.2 + 1$

$6 = 1.6$

Não sei mais o que fazer depois disso,

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Outro ponto que merece destaque nas resoluções apresentadas é o fato de os alunos não terem a compreensão do significado do parâmetro t. Observe nos quadros 67 e 68 que os alunos compreendiam que, para o problema proposto, só faziam sentido valores de x e y positivos. Assim, substituíram no parâmetro t apenas valores maiores do que 0. O aluno 7 (Quadro 67) teve “sorte”, pois, em função da solução particular escolhida, conseguiu determinar todas as soluções possíveis. O mesmo não ocorreu com o aluno 6 (Quadro 68) que acabou deixando soluções de fora em função desse erro de interpretação do parâmetro.

Quadro 67 – Aluno 7: questão 2

2) $4x + 6y = 50$

$mdc\,(4,6) = 2 \qquad 2 \mid 50$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ xy = 7 \end{array}\right\} \; 4.2 + 6.7 = 50$

$\boxed{x = 2 + \frac{6}{2}t} \qquad \boxed{y = 7 - \frac{4}{2}t}$

$x_1 = 2 + \frac{6}{2}.1 \qquad y_1 = 7 - \frac{4}{2}.1 \qquad S = \{(2,7), (5,5), (8,3), (11,1)\}.$

$\boxed{x_1 = 5} \qquad \boxed{y_1 = 5}$

$x_2 = 2 + \frac{6}{2}.2 \qquad y_2 = 7 - \frac{4}{2}.2$

$\boxed{x_2 = 8} \qquad \boxed{y_2 = 3}$

$x_3 = 2 + \frac{6}{2}.3 \qquad x_3 = 7 - \frac{4}{2}.3$

$\boxed{x_3 = 11} \qquad \boxed{x_3 = 1}$

$x_4 = 2 + \frac{6}{2}.4 \qquad x_4 = 7 - \frac{4}{2}.4$

$x_4 = 14 \qquad \cancel{\boxed{x_4 = -1}}$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 68 – Aluno 6: questão 2

2) 50,00 para comprar hambúrguer (R$ 4,00) e mini-pizza (R$ 6,00).
Soluções: Encontrei 3 soluções possíveis, pois para este caso, tanto x quanto y precisam pertencer aos inteiros positivos e diferentes de zero, $(\exists x,y \in \mathbb{Z}_+^*)$

$4x + 6y = 50$. $d = mdc(a,b) = mdc(4,6) = 2$.
$4.(5) + 6.(5) = 50$ $2|c \rightarrow 2|50$.
$20 + 30 = 50$ há solução possível nos $\mathbb{Z}_+^*$
$50 = 50$ $S = \{5,5\}$.

Logo, temos $x_0 = 5$ e $y_0 = 5$.
$X = x_0 + \frac{bt}{d}$ e $Y = y_0 - \frac{at}{2}$, para $t = 1$:
$x = 5 + \frac{6.1}{2}$ $y = 5 - \frac{4.1}{2}$
$x = 8$ $y = 3$. $S = \{8,3\}$

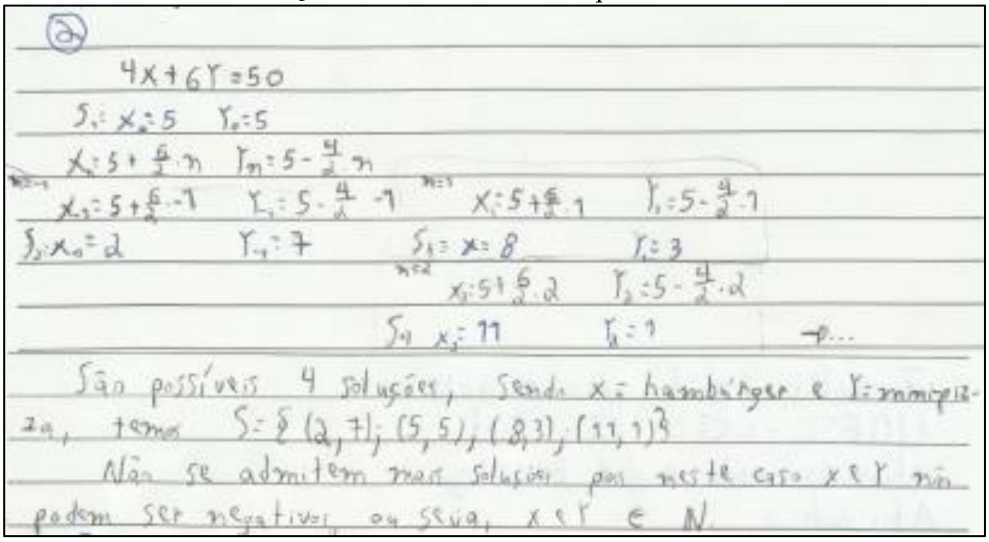
para $t = 2$:
$x = 5 + \frac{6.2}{2}$ $y = 5 - \frac{4.2}{2}$ $S = \{11,1\}$
$x = 11$. $y = 1$.

para $t > 3$, teríamos pizzas "negativas", a equação fecha, mas não se aplicaria a um caso real.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Com relação aos alunos que conseguiram atingir os objetivos dessas questões, resolvendo todos os passos corretamente, destacamos o aluno 13 que mesmo tendo substituído valores para o parâmetro, conseguiu perceber que ele precisava assumir valores negativos para abranger todas as soluções possíveis, como vemos no Quadro 69.

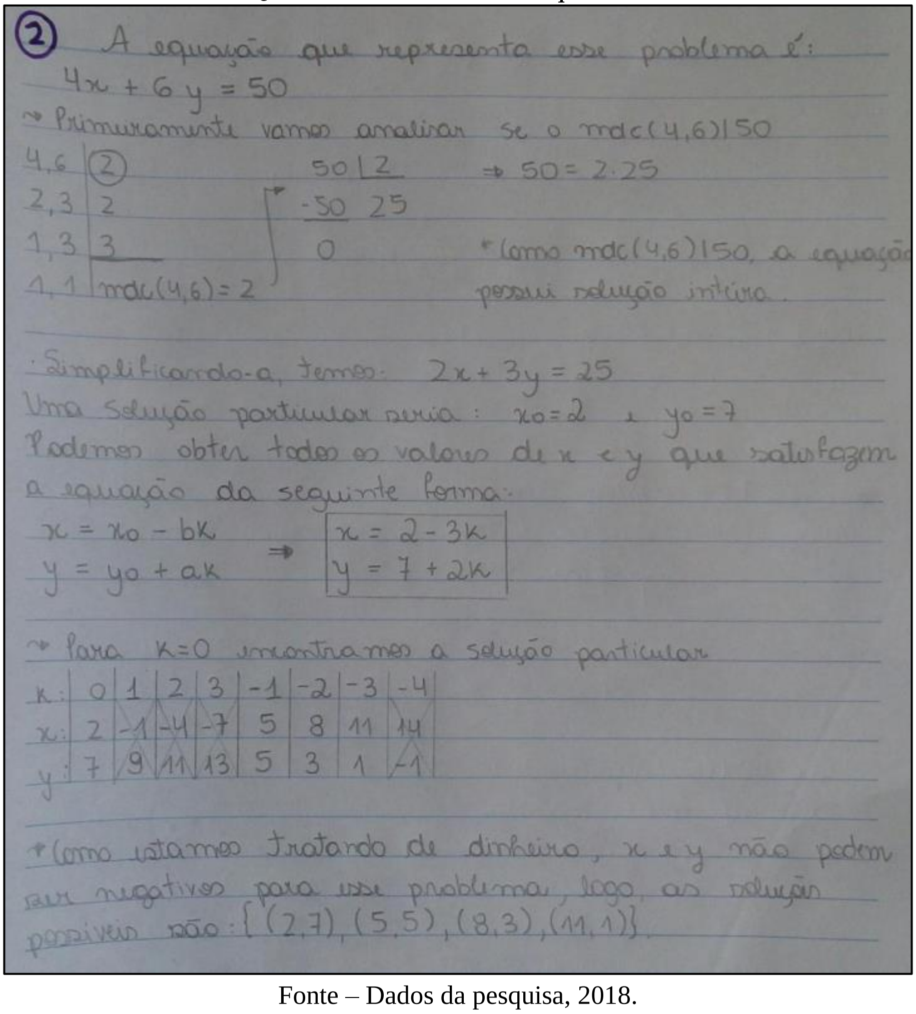
Quadro 69 – Aluno 13: questão 2



Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

O aluno 15 também substitui valores para o parâmetro, apresentando um quadro de tentativas e analisando o que ocorreria conforme fosse atribuindo outros valores para ele.

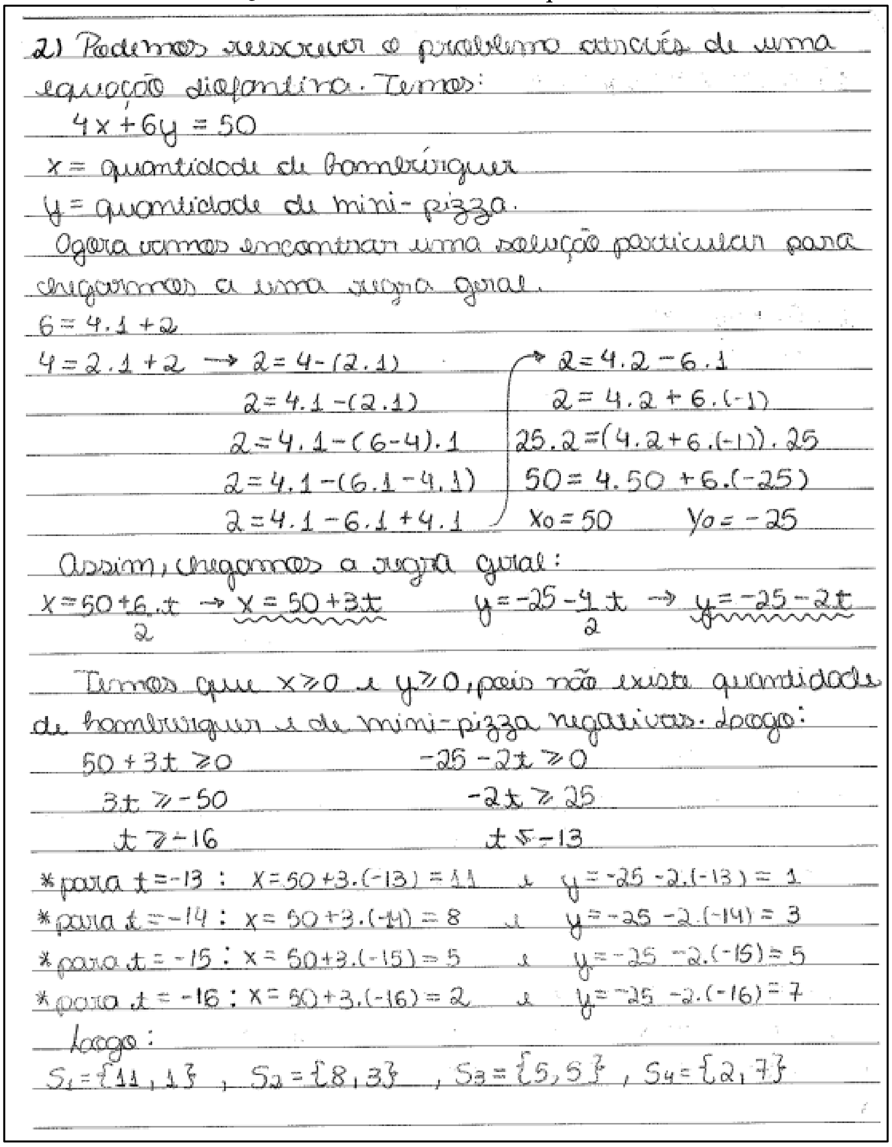
Quadro 70 – Aluno 15: questão 2



Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A resolução integral, ou seja, aquela que garantiria que todos os resultados possíveis fossem abrangidos, era encontrada resolvendo inequações como o aluno 12 desenvolveu (Quadro 71).

Quadro 71 – Aluno 12: questão 2



2) Podemos reescrever o problema através de uma equação diofantina. Temos:

$4x + 6y = 50$

x = quantidade de hambúrguer

y = quantidade de mini-pizza.

Agora vamos encontrar uma solução particular para chegarmos a uma regra geral.

$6 = 4.1 + 2$

$4 = 2.1 + 2 \rightarrow 2 = 4 - (2.1)$

$2 = 4.1 - (2.1)$

$2 = 4.1 - (6-4).1$

$2 = 4.1 - (6.1 - 4.1)$

$2 = 4.1 - 6.1 + 4.1 \rightarrow 2 = 4.2 - 6.1$

$2 = 4.2 + 6.(-1)$

$25.2 = (4.2 + 6.(-1)).25$

$50 = 4.50 + 6.(-25)$

$x_0 = 50 \quad y_0 = -25$

Assim, chegamos a regra geral:

$x = 50 + \frac{6}{2}.t \rightarrow x = 50 + 3t \qquad y = -25 - \frac{4}{2}t \rightarrow y = -25 - 2t$

Temos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$, pois não existe quantidade de hambúrguer e de mini-pizza negativas. Logo:

$50 + 3t \geq 0 \qquad -25 - 2t \geq 0$

$3t \geq -50 \qquad -2t \geq 25$

$t \geq -16 \qquad t \leq -13$

* para $t = -13$: $x = 50 + 3.(-13) = 11$ e $y = -25 - 2.(-13) = 1$
* para $t = -14$: $x = 50 + 3.(-14) = 8$ e $y = -25 - 2.(-14) = 3$
* para $t = -15$: $x = 50 + 3.(-15) = 5$ e $y = -25 - 2.(-15) = 5$
* para $t = -16$: $x = 50 + 3.(-16) = 2$ e $y = -25 - 2.(-16) = 7$

Logo:

$S_1 = \{11, 1\}$, $S_2 = \{8, 3\}$, $S_3 = \{5, 5\}$, $S_4 = \{2, 7\}$

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Como a forma como a solução final era apresentada dependia da solução particular, era necessário que aluno analisasse o valor do parâmetro que garantiria valores de x e y sempre maiores ou iguais a 0. Ou seja, no caso do Quadro 71, a aluno resolveu as inequações $50 + 3t \geq 0$ e $-25 - 2t \geq 0$ e fez a interseção destes conjuntos, encontrando 4 soluções possíveis para o problema inicial apresentado.

Observe que os alunos 6 e 13 encontraram a mesma solução particular e, com isso, o conjunto solução da equação diofantina era dado por $S = \{(5 + 3t, 5 - 2t)/\ t \in \mathbb{Z}\}$. Ainda assim, o aluno 13 encontrou as quatro soluções possíveis para o problema (Quadro 69), enquanto o aluno 6 apresentou apenas 2 (Quadro 68). Não é possível saber como o aluno 13 concluiu que deveria substituir valores negativos para o parâmetro, pois ele não deixa isso claro nos cálculos, mas, de alguma forma, ele conseguiu encontrar todas as soluções. Para que o aluno 6 tivesse chego nas mesmas conclusões, ele poderia resolver inequações como o aluno 12 no Quadro 71.

Para este caso particular, o aluno teria que realizar os cálculos da seguinte forma:

$$x = 5 + 3t$$

$$5 + 3t \geq 0$$

$$3t \geq -5$$

$$t \geq \frac{-5}{3}$$

$t \geq -1$, uma vez que t deve ser um número inteiro.

Ainda, era necessário que,

$$y = 5 - 2t$$

$$5 - 2t \geq 0$$

$$2t \leq 5$$

$$t \leq \frac{5}{2}$$

$t \leq 2$, uma vez que t deve ser um número inteiro.

Por meio desses cálculos o aluno concluiria que t poderia assumir 4 valores, a saber, $-1, 0, 1$ e 2, gerando assim, as mesmas quatro soluções encontradas pelo aluno 13.

Nenhum aluno conseguiu resolver corretamente a questão 3. Alguns não conseguiram encontrar a solução particular; outros se equivocaram na interpretação do parâmetro; houve erros de sinal; e, ainda, erros de interpretação do enunciado. Uma das respostas mais próximas da correta encontra-se no Quadro 72, na qual o único erro do aluno foi interpretar que o número de mulheres era maior do que o de homens, quando na verdade, o problema dizia o contrário.

Quadro 72 – Aluno 10: questão 3

3) x = homens, y = mulheres

$19x + 13y = 1000$

$19 = 13.1 + 6$

$13 = 6.2 + \boxed{1}$

$6 = 1.6$

$1 \mid 1000 = 1000$

$1 = 13 - 2.6$

$6 = 19 - 1.13$

$1 = 13 - 2(19 - 1.13)$

$1 = 13 - 2.19 + 2.13$

$1 = -2.19 + 3.13$

$1000 = -2000.19 + 3000.13$

$x = x_0 + \frac{b}{d}.T$

$\boxed{x = -2000 + 13T}$

$y = y_0 - \frac{a}{d}.T$

$\boxed{y = 3000 - 19T}$

$x > 0$

$-2000 + 13T > 0$

$T > \frac{2000}{13}$

$y > 0$

$3000 - 19T > 0$

$T < \frac{3000}{19}$

$\frac{2000}{13} < T < \frac{3000}{19}$

$153 \leq T \leq 157$

$x = -2000 + 13(153) = -11$

$y = 3000 - 19(153) = 93$

$19.(-11) + 13(93) = 1000$

$x = -2000 + (13)(154) = 2$

$y = 3000 - 19(154) = 74$

$19(2) + 13(74) = 1000$

$x = -2000 + (13)(155) = 15$

$y = 3000 - 19(155) = 55$

$19(15) + 13(55) = 1000$

$x = -2000 + 13(156) = 28$

$y = 3000 - 19(156) = 36$

$19(28) + 13(36) = 1000$

$x = -2000 + 13(157) = 41$

$y = 3000 - 19(157) = 17$

$19(41) + 13(17) = 1000$

No hotel poderiam ter 2 homens e 74 mulheres; 15 homens e 55 mulheres; 28 homens e 36 mulheres; 41 homens e 17 mulheres.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Finalizamos assim a análise das atividades desenvolvidas dentro e fora de sala de aula voltadas para a compreensão da teoria matemática envolvida na resolução de equações diofantinas, bem como estratégias de resolução. No capítulo que segue, buscaremos transpor a sala de aula do Ensino Superior e estabelecer relações com o contexto da Educação Básica.

4 EQUAÇÕES DIOFANTINAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Quando começamos a delinear essa pesquisa, a motivação inicial estava em “atacar” dois discursos que ouvia muito dos alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da UDESC e que pareciam estar relacionados com o desânimo deles na fase inicial do curso. Um desses discursos se referia ao fato de estarem cursando licenciatura e precisarem estudar uma matemática, que, na visão deles era muito “formal”, e não era aquela que precisariam ensinar na escola. Outra queixa dizia respeito ao fato de terem escolhido cursar matemática por gostarem da matemática da escola, mas essa não era a mesma que encontravam no Ensino Superior.

Com esse panorama em mente nos propomos a responder a seguinte questão: de que forma podemos relacionar o conteúdo de equações diofantinas visto na disciplina de Introdução à Teoria dos Números com conteúdos apresentados na sala de aula do Ensino Básico?

Assim, elaboramos a sequência de atividades apresentada nos capítulos anteriores de modo a trabalhar a história da matemática e a criatividade, e “construir” o conhecimento formal acerca do conteúdo de equações diofantinas. Tendo isso como base, partimos para o que esperávamos que fosse o “ponto chave” do trabalho: relacionar a matemática “do Ensino Superior” que é vista pelos alunos como algo “formal demais” e que não precisarão ensinar, com conteúdos familiares a eles e que, enquanto professores, eles muito provavelmente terão que trabalhar com seus alunos.

Porém, como já mencionado na parte inicial desse trabalho, a aplicação desta atividade ocorreu em meio a um contexto “pouco favorável”, durante a greve dos caminhoneiros que ocorreu em 2018. Com isso, a grande maioria dos alunos não estava presente em sala para participar da atividade final. Além disso, mesmo os alunos que compareceram à aula se mostraram dispersos e pouco empenhados na realização da atividade, pois estavam envolvidos em discussões sobre a greve, o cancelamento ou não de aulas, a reposição de conteúdos etc.

Na aplicação da atividade 4 estavam presentes 14 alunos que se organizaram em 4 equipes de trabalho. Para essa atividade escolhemos 3 conteúdos que fazem parte da grade curricular do Ensino Básico e elaboramos alguns questionamentos e reflexões que esperávamos que os alunos fizessem em suas equipes.

Os temas escolhidos para essa atividade foram: Expressões Algébricas, Função afim e Equação Linear. Por que escolhemos esses conteúdos especificamente? Na aula anterior eu havia questionado os alunos sobre quais conteúdos do Ensino Básico eles conseguiam perceber as contribuições de Diofanto. Pedi que eles entregassem por escrito, e apareceram conteúdos como mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum, sistemas lineares, polinômios, função do primeiro grau[15], progressão aritmética, progressão geométrica, entre outros. Dentre os temas apresentados escolhemos os mais frequentes e, também optamos por algum que abrangesse o Ensino Fundamental e outro, o Ensino Médio para a realização da atividade 4.

Quando olhamos para os documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, 2018), a Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina (SANTA CATARINA, 2014) ou a Matriz Curricular de Matemática do município de Joinville (PREFEITURA DE JOINVILLE, 2014) em nenhum momento é feita qualquer referência à Diofanto ou às equações diofantinas. Ou seja, este conteúdo é visto exclusivamente no Ensino Superior e não será tratado da mesma forma no Ensino Básico.

Apontamos acima alguns, mas existem diversos outros conteúdos da Educação Básica que podemos relacionar ou que se assemelham com o estudo feito sobre equações diofantinas e são essas relações, aproximações e distanciamentos que buscamos tratar no capítulo que segue.

Adiante, apresentaremos cada um dos conteúdos escolhidos, nosso objetivo com a atividade e analisaremos as discussões apresentadas pelos alunos.

4.1 ATIVIDADE 4

Após organizarem-se em equipes os alunos receberam o roteiro apresentado no **Erro! Fonte de referência não encontrada.**. Ao final da aula eles deveriam entregar as respostas das discussões realizadas.

Quadro 73 - Atividade 4: Diofanto e os conteúdos da Escola Básica

Atividade 4 – Diofanto e os conteúdos da Escola Básica

<u>Expressões Algébricas</u>

1 – Leia o texto apresentado no livro didático do sétimo ano do Ensino Fundamental (SOUZA; PATARO, 2012) acerca do conteúdo de “Expressões Algébricas”.

2 – Por que precisamos estudar expressões algébricas? Com qual conceito está relacionado?

3 – Houve alguma influência de Diofanto com relação a este conteúdo? Se sim, qual?

4 – Qual a opinião da equipe sobre a forma como o conteúdo foi introduzido? As contextualizações apresentadas têm relação com o conteúdo que segue?

[15] Nos livros didáticos do Ensino Médio é comum o uso do termo “função do primeiro grau”, então quando os alunos se referem à função afim, costumam chamar de função do primeiro grau. Na atividade proposta a eles também utilizamos essa nomenclatura, contudo, ao longo deste trabalho utilizaremos “função afim”.

5 – A definição e a apresentação do conteúdo na página 160 levam a uma compreensão do conceito de expressões algébricas? Justifique.

6 – Com relação aos exercícios propostos, eles estão num nível de dificuldade adequado? Justifique.

7 – Escolha pelo menos dois exercícios e destaque seus pontos positivos e negativos.

8 – Converse com os colegas e apresente alguma sugestão para introduzir o conteúdo ou alguma modificação com relação à lista de exercícios.

Função do primeiro grau

1 – Por que precisamos estudar função do primeiro grau?

2 – Houve alguma influência de Diofanto com relação a este conteúdo? Se sim, qual?

3 – As funções de primeiro grau são equações diofantinas? Justifique!

4 – A função do primeiro grau $y = 7 - 3x$ representa uma equação diofantina. Apresente graficamente algumas de suas soluções.

Equação Linear

1 – Leia o texto apresentado no livro didático do segundo ano do Ensino Médio (PAIVA, 2013) acerca do conteúdo de “Equação Linear”.

2 – Por que precisamos estudar Equação Linear? Com qual conceito está relacionado?

3 – Houve alguma influência de Diofanto com relação a este conteúdo? Se sim, qual?

4 – Qual a opinião da equipe sobre a forma como o conteúdo foi introduzido? As contextualizações apresentadas têm relação com o conteúdo que segue?

5 – A definição e a apresentação do conteúdo nas páginas 110 e 111 levam a uma compreensão do conceito de Equação Linear?

6 – Com relação aos exercícios propostos, eles estão num nível de dificuldade adequado? Justifique.

7 – Analise os exercícios, discuta e apresente pontos positivos e negativos.

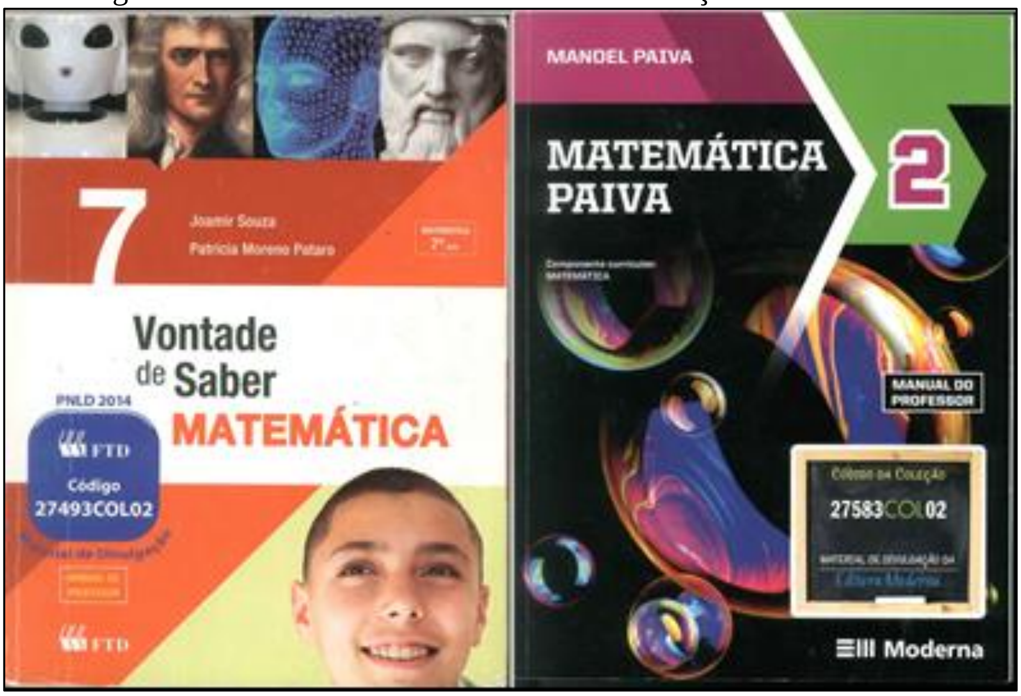
Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A partir dessa atividade objetivávamos que os alunos se colocassem no papel de um professor que precisaria abordar o referido conteúdo. Em dois dos conteúdos, propusemos que fizessem a análise do livro didático e para o conteúdo de Função afim elaboramos alguns questionamentos. A ideia era que eles refletissem e discutissem criticamente sobre o conteúdo e o material disponível, além de pensar sobre a existência, ou não, de alguma relação com Diofanto ou com as equações diofantinas. Esperávamos que, de alguma forma, eles conseguissem relacionar o conteúdo visto por eles no Ensino Superior com uma situação que poderão encontrar em sua prática escolar.

Como pode ser visto no Quadro 73, a questão 1 dos conteúdos de Expressões Algébricas e Equação Linear faz referência à um texto de livros didáticos. Esses textos foram entregues aos alunos juntamente com o roteiro da atividade 4.

Para o conteúdo de Expressões Algébricas foi escolhido o livro “Vontade de Saber Matemática” dos autores Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro (SOUZA e PATARO, 2012) enquanto para falar de Equação Linear optamos pelo Manoel Paiva com o livro “Matemática Paiva” (PAIVA, 2013). A escolha desses livros se deu por serem de fácil acesso à pesquisadora, por serem atuais e, ainda, por estarem em uso em algumas escolas da rede pública de ensino na época.

Figura 2 – Livros didáticos utilizados na realização da Atividade 4



Fontes – SOUZA e PATARO, 2013; PAIVA, 2012.

Partimos agora para a discussão e análise de cada um dos conteúdos propostos na atividade 4.

4.1.1 Atividade 4 – Diofanto e os conteúdos da Escola Básica: Expressões Algébricas

O primeiro tema que abordaremos será Expressões Algébricas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998), deve haver um aprofundamento gradativo no que tange o tratamento algébrico com alunos do sexto ao nono ano do Ensino

Fundamental. No terceiro ciclo, que compreende o sexto e o sétimo anos, é suficiente “que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas” (BRASIL, 1998, p. 68). Espera-se que os alunos sejam capazes de “utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos” (BRASIL, 1998, p. 76).

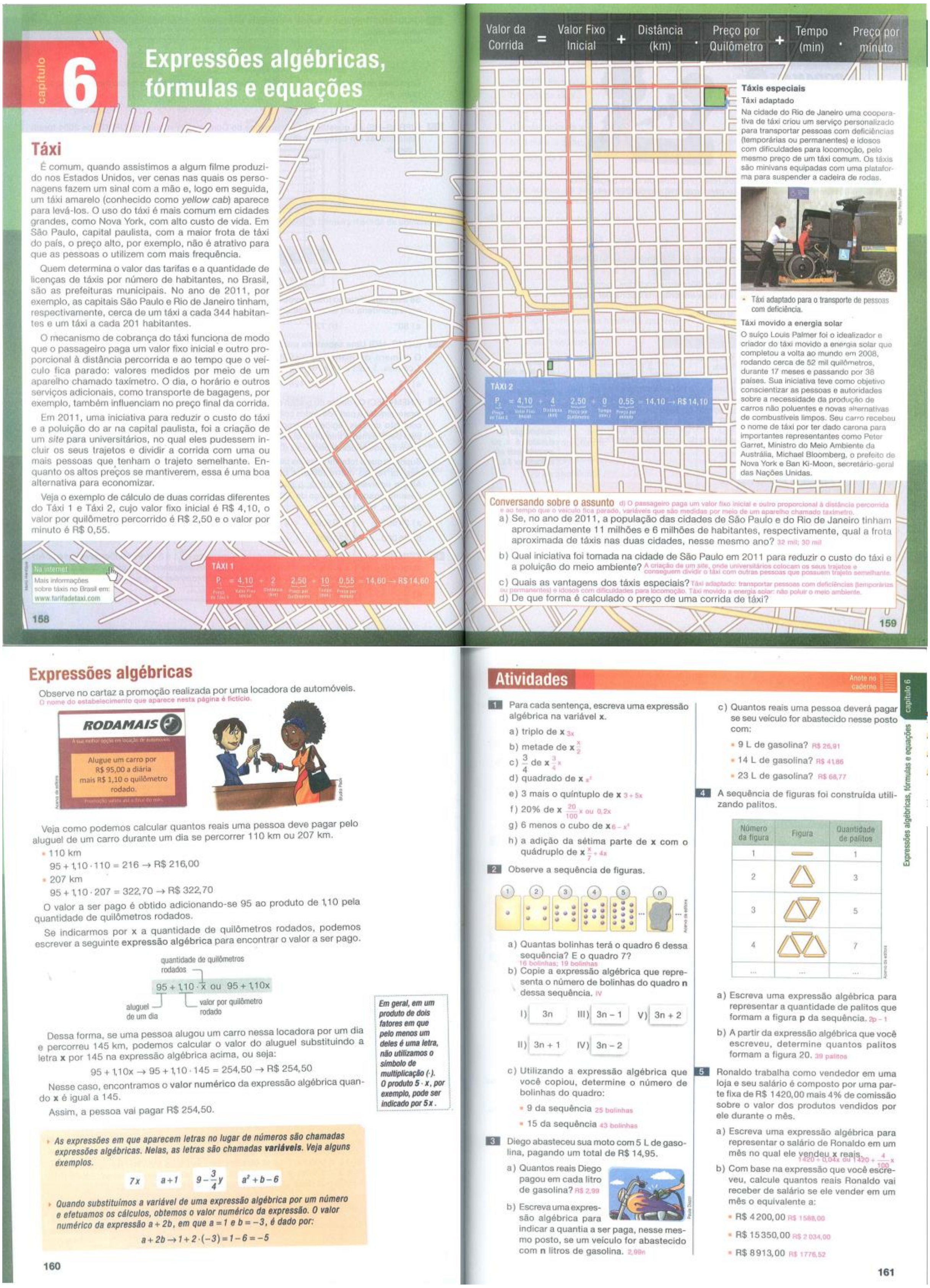
Já no quarto ciclo, que compreende os dois últimos anos do Ensino Fundamental, há um aprofundamento no ensino da Álgebra e espera-se que seu estudo proporcione

> a compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis) e o conhecimento da sintaxe (regras para resolução) de uma equação (BRASIL, 1998, p. 84).

Ainda que tenha um tratamento mais aprofundado, os PCNs enfatizam que o conteúdo não deve ser abordado de maneira puramente mecânica, mas que seja permitido ao aluno dar significado à linguagem e às ideias matemáticas. A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) corrobora as premissas dos PCNs e defende que “as técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos” (BRASIL, 2018, p. 271).

Na atividade 4 optamos por trabalhar as Expressões Algébricas a partir de um livro do sétimo ano do Ensino Fundamental. O material entregue aos alunos para a realização dessa parte da atividade encontra-se na Figura 3.

Figura 3 – Material sobre Expressões Algébricas entregue aos alunos para realização da atividade 4



capítulo 6

Expressões algébricas, fórmulas e equações

Táxi

É comum, quando assistimos a algum filme produzido nos Estados Unidos, ver cenas nas quais os personagens fazem um sinal com a mão e, logo em seguida, um táxi amarelo (conhecido como *yellow cab*) aparece para levá-los. O uso do táxi é mais comum em cidades grandes, como Nova York, com alto custo de vida. Em São Paulo, capital paulista, com a maior frota de táxi do país, o preço alto, por exemplo, não é atrativo para que as pessoas o utilizem com mais frequência.

Quem determina o valor das tarifas e a quantidade de licenças de táxis por número de habitantes, no Brasil, são as prefeituras municipais. No ano de 2011, por exemplo, as capitais São Paulo e Rio de Janeiro tinham, respectivamente, cerca de um táxi a cada 344 habitantes e um táxi a cada 201 habitantes.

O mecanismo de cobrança do táxi funciona de modo que o passageiro paga um valor fixo inicial e outro proporcional à distância percorrida e ao tempo que o veículo fica parado: valores medidos por meio de um aparelho chamado taxímetro. O dia, o horário e outros serviços adicionais, como transporte de bagagens, por exemplo, também influenciam no preço final da corrida.

Em 2011, uma iniciativa para reduzir o custo do táxi e a poluição do ar na capital paulista, foi a criação de um *site* para universitários, no qual eles pudessem incluir os seus trajetos e dividir a corrida com uma ou mais pessoas que tenham o trajeto semelhante. Enquanto os altos preços se mantiverem, essa é uma boa alternativa para economizar.

Veja o exemplo de cálculo de duas corridas diferentes do Táxi 1 e Táxi 2, cujo valor fixo inicial é R$ 4,10, o valor por quilômetro percorrido é R$ 2,50 e o valor por minuto é R$ 0,55.

Na internet
Mais informações sobre táxis no Brasil em: www.tarifadetaxi.com

TÁXI 1

$P_1 = 4{,}10 + 2 \cdot 2{,}50 + 10 \cdot 0{,}55 = 14{,}60 \rightarrow$ R$ 14,60

Valor da Corrida = Valor Fixo Inicial + Distância (km) · Preço por Quilômetro + Tempo (min) · Preço por minuto

TÁXI 2

$P_2 = 4{,}10 + 4 \cdot 2{,}50 + 0 \cdot 0{,}55 = 14{,}10 \rightarrow$ R$ 14,10

Táxis especiais

Táxi adaptado

Na cidade do Rio de Janeiro uma cooperativa de táxi criou um serviço personalizado para transportar pessoas com deficiências (temporárias ou permanentes) e idosos com dificuldades para locomoção, pelo mesmo preço de um táxi comum. Os táxis são minivans equipadas com uma plataforma para suspender a cadeira de rodas.

Táxi adaptado para o transporte de pessoas com deficiência.

Táxi movido a energia solar

O suíço Louis Palmer foi o idealizador e criador do táxi movido a energia solar que completou a volta ao mundo em 2008, rodando cerca de 52 mil quilômetros, durante 17 meses e passando por 38 países. Sua iniciativa teve como objetivo conscientizar as pessoas e autoridades sobre a necessidade da produção de carros não poluentes e novas alternativas de combustíveis limpos. Seu carro recebeu o nome de táxi por ter dado carona para importantes representantes como Peter Garret, Ministro do Meio Ambiente da Austrália, Michael Bloomberg, o prefeito de Nova York e Ban Ki-Moon, secretário-geral das Nações Unidas.

Conversando sobre o assunto d) O passageiro paga um valor fixo inicial e outro proporcional à distância percorrida e ao tempo que o veículo fica parado, variáveis que são medidas por meio de um aparelho chamado taxímetro.

a) Se, no ano de 2011, a população das cidades de São Paulo e do Rio de Janeiro tinham aproximadamente 11 milhões e 6 milhões de habitantes, respectivamente, qual a frota aproximada de táxis nas duas cidades, nesse mesmo ano? 32 mil; 30 mil

b) Qual iniciativa foi tomada na cidade de São Paulo em 2011 para reduzir o custo do táxi e a poluição do meio ambiente? A criação de um *site*, onde universitários colocam os seus trajetos e conseguem dividir o táxi com outras pessoas que possuem trajeto semelhante.

c) Quais as vantagens dos táxis especiais? Táxi adaptado: transportar pessoas com deficiências (temporárias ou permanentes) e idosos com dificuldades para locomoção. Táxi movido a energia solar: não poluir o meio ambiente.

d) De que forma é calculado o preço de uma corrida de táxi?

158 159

Expressões algébricas

Observe no cartaz a promoção realizada por uma locadora de automóveis.
O nome do estabelecimento que aparece nesta página é fictício.

RODAMAIS
Alugue um carro por R$ 95,00 a diária mais R$ 1,10 o quilômetro rodado.

Veja como podemos calcular quantos reais uma pessoa deve pagar pelo aluguel de um carro durante um dia se percorrer 110 km ou 207 km.

- 110 km
  $95 + 1{,}10 \cdot 110 = 216 \rightarrow$ R$ 216,00
- 207 km
  $95 + 1{,}10 \cdot 207 = 322{,}70 \rightarrow$ R$ 322,70

O valor a ser pago é obtido adicionando-se 95 ao produto de 1,10 pela quantidade de quilômetros rodados.

Se indicarmos por **x** a quantidade de quilômetros rodados, podemos escrever a seguinte **expressão algébrica** para encontrar o valor a ser pago.

$$\underbrace{95}_{\text{aluguel de um dia}} + \underbrace{1{,}10}_{\text{valor por quilômetro rodado}} \cdot \overbrace{x}^{\text{quantidade de quilômetros rodados}} \text{ ou } 95 + 1{,}10x$$

Dessa forma, se uma pessoa alugou um carro nessa locadora por um dia e percorreu 145 km, podemos calcular o valor do aluguel substituindo a letra **x** por 145 na expressão algébrica acima, ou seja:

$$95 + 1{,}10x \rightarrow 95 + 1{,}10 \cdot 145 = 254{,}50 \rightarrow \text{R\$ } 254{,}50$$

Nesse caso, encontramos o **valor numérico** da expressão algébrica quando **x** é igual a 145.

Assim, a pessoa vai pagar R$ 254,50.

Em geral, em um produto de dois fatores em que pelo menos um deles é uma letra, não utilizamos o símbolo de multiplicação (·). O produto $5 \cdot x$, por exemplo, pode ser indicado por $5x$.

- *As expressões em que aparecem letras no lugar de números são chamadas expressões algébricas. Nelas, as letras são chamadas* ***variáveis****. Veja alguns exemplos.*

  $7x \quad a+1 \quad 9-\frac{3}{4}y \quad a^2+b-6$

- *Quando substituímos a variável de uma expressão algébrica por um número e efetuamos os cálculos, obtemos o valor numérico da expressão. O valor numérico da expressão $a+2b$, em que $a=1$ e $b=-3$, é dado por:*

  $a+2b \rightarrow 1+2\cdot(-3)=1-6=-5$

160

Atividades

Anote no caderno

1 Para cada sentença, escreva uma expressão algébrica na variável **x**.

a) triplo de **x** $3x$
b) metade de **x** $\frac{x}{2}$
c) $\frac{3}{4}$ de **x** $\frac{3}{4}x$
d) quadrado de **x** x^2
e) 3 mais o quíntuplo de **x** $3+5x$
f) 20% de **x** $\frac{20}{100}x$ ou $0{,}2x$
g) 6 menos o cubo de **x** $6-x^3$
h) a adição da sétima parte de **x** com o quádruplo de **x** $\frac{x}{7}+4x$

2 Observe a sequência de figuras.

a) Quantas bolinhas terá o quadro 6 dessa sequência? E o quadro 7? 16 bolinhas; 19 bolinhas
b) Copie a expressão algébrica que representa o número de bolinhas do quadro **n** dessa sequência. IV

I) $3n$ II) $3n+1$ III) $3n-1$ IV) $3n-2$ V) $3n+2$

c) Utilizando a expressão algébrica que você copiou, determine o número de bolinhas do quadro:

- 9 da sequência 25 bolinhas
- 15 da sequência 43 bolinhas

3 Diego abasteceu sua moto com 5 L de gasolina, pagando um total de R$ 14,95.

a) Quantos reais Diego pagou em cada litro de gasolina? R$ 2,99
b) Escreva uma expressão algébrica para indicar a quantia a ser paga, nesse mesmo posto, se um veículo for abastecido com **n** litros de gasolina. $2{,}99n$
c) Quantos reais uma pessoa deverá pagar se seu veículo for abastecido nesse posto com:

- 9 L de gasolina? R$ 26,91
- 14 L de gasolina? R$ 41,86
- 23 L de gasolina? R$ 68,77

4 A sequência de figuras foi construída utilizando palitos.

Número da figura	Figura	Quantidade de palitos
1		1
2		3
3		5
4		7
...	...	...

a) Escreva uma expressão algébrica para representar a quantidade de palitos que formam a figura **p** da sequência. $2p-1$
b) A partir da expressão algébrica que você escreveu, determine quantos palitos formam a figura 20. 39 palitos

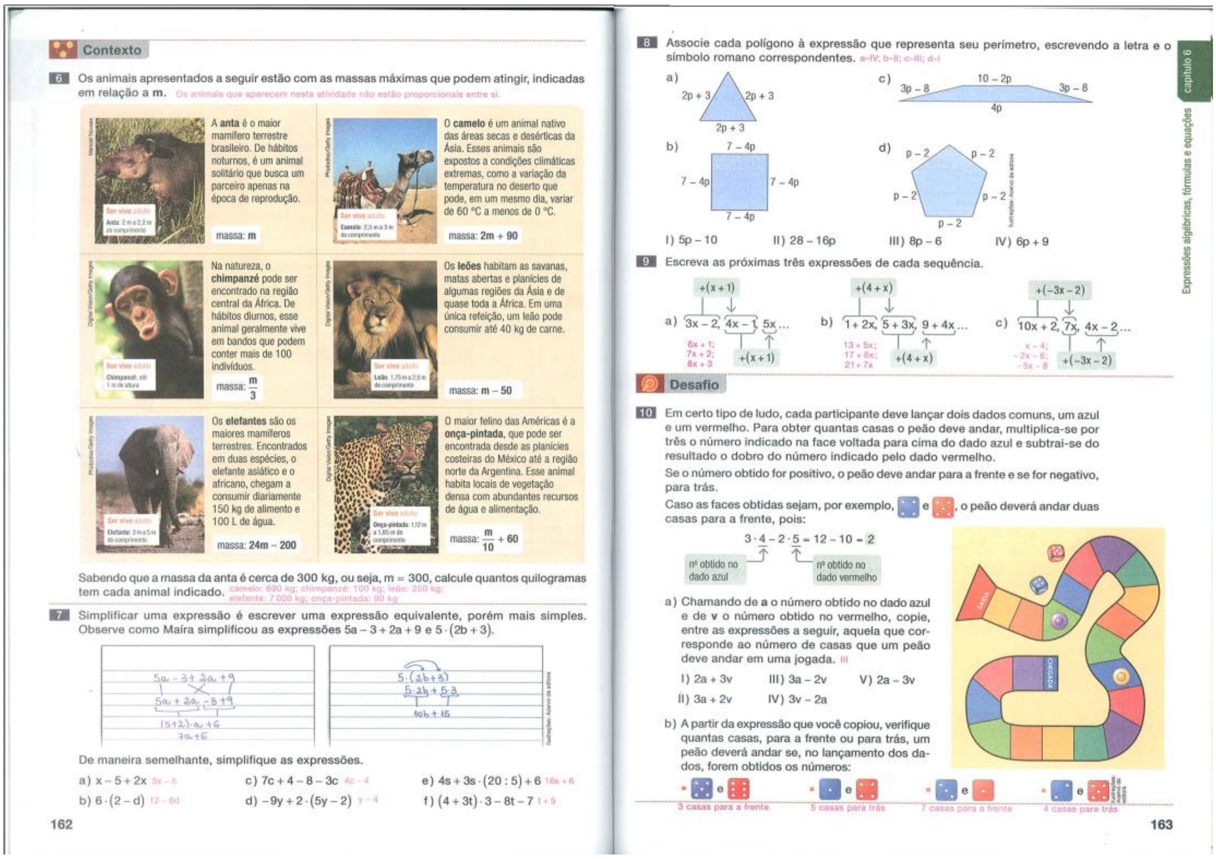
5 Ronaldo trabalha como vendedor em uma loja e seu salário é composto por uma parte fixa de R$ 1420,00 mais 4% de comissão sobre o valor dos produtos vendidos por ele durante o mês.

a) Escreva uma expressão algébrica para representar o salário de Ronaldo em um mês no qual ele vendeu **x** reais. $1420+0{,}04x$ ou $1420+\frac{4}{100}x$
b) Com base na expressão que você escreveu, calcule quantos reais Ronaldo vai receber de salário se ele vender em um mês o equivalente a:

- R$ 4200,00 R$ 1588,00
- R$ 15350,00 R$ 2034,00
- R$ 8913,00 R$ 1776,52

Expressões algébricas, fórmulas e equações

161



Contexto

6 Os animais apresentados a seguir estão com as massas máximas que podem atingir, indicadas em relação a **m**. Os animais que aparecem nesta atividade não estão proporcionais entre si.

A **anta** é o maior mamífero terrestre brasileiro. De hábitos noturnos, é um animal solitário que busca um parceiro apenas na época de reprodução. Ser vivo adulto. Anta: 2 m a 2,2 m de comprimento. massa: m

O **camelo** é um animal nativo das áreas secas e desérticas da Ásia. Esses animais são expostos a condições climáticas extremas, como a variação da temperatura no deserto que pode, em um mesmo dia, variar de 60 °C a menos de 0 °C. Ser vivo adulto. Camelo: 2,5 m a 3 m de comprimento. massa: 2m + 90

Na natureza, o **chimpanzé** pode ser encontrado na região central da África. De hábitos diurnos, esse animal geralmente vive em bandos que podem conter mais de 100 indivíduos. Ser vivo adulto. Chimpanzé: até 1 m de altura. massa: $\frac{m}{3}$

Os **leões** habitam as savanas, matas abertas e planícies de algumas regiões da Ásia e de quase toda a África. Em uma única refeição, um leão pode consumir até 40 kg de carne. Ser vivo adulto. Leão: 1,75 m a 2,5 m de comprimento. massa: m – 50

Os **elefantes** são os maiores mamíferos terrestres. Encontrados em duas espécies, o elefante asiático e o africano, chegam a consumir diariamente 150 kg de alimento e 100 L de água. Ser vivo adulto. Elefante: 3 m a 5 m de comprimento. massa: 24m – 200

O maior felino das Américas é a **onça-pintada**, que pode ser encontrada desde as planícies costeiras do México até a região norte da Argentina. Esse animal habita locais de vegetação densa com abundantes recursos de água e alimentação. Ser vivo adulto. Onça-pintada: 1,12 m a 1,85 m de comprimento. massa: $\frac{m}{10} + 60$

Sabendo que a massa da anta é cerca de 300 kg, ou seja, m = 300, calcule quantos quilogramas tem cada animal indicado. camelo: 690 kg; chimpanzé: 100 kg; leão: 250 kg; elefante: 7 000 kg; onça-pintada: 90 kg

7 Simplificar uma expressão é escrever uma expressão equivalente, porém mais simples. Observe como Maíra simplificou as expressões $5a - 3 + 2a + 9$ e $5 \cdot (2b + 3)$.

$5a - 3 + 2a + 9$
$5a + 2a - 3 + 9$
$(5+2) \cdot a + 6$
$7a + 6$

$5 \cdot (2b + 3)$
$5 \cdot 2b + 5 \cdot 3$
$10b + 15$

De maneira semelhante, simplifique as expressões.

a) $x - 5 + 2x$ $3x - 5$
b) $6 \cdot (2 - d)$ $12 - 6d$
c) $7c + 4 - 8 - 3c$ $4c - 4$
d) $-9y + 2 \cdot (5y - 2)$ $y - 4$
e) $4s + 3s \cdot (20 : 5) + 6$ $16s + 6$
f) $(4 + 3t) \cdot 3 - 8t - 7$ $t + 5$

162

8 Associe cada polígono à expressão que representa seu perímetro, escrevendo a letra e o símbolo romano correspondentes. a-IV; b-II; c-III; d-I

I) $5p - 10$ II) $28 - 16p$ III) $8p - 6$ IV) $6p + 9$

9 Escreva as próximas três expressões de cada sequência.

a) $3x - 2$, $4x - 1$, $5x$... $+(x+1)$ — $6x + 1$; $7x + 2$; $8x + 3$
b) $1 + 2x$, $5 + 3x$, $9 + 4x$... $+(4+x)$ — $13 + 5x$; $17 + 6x$; $21 + 7x$
c) $10x + 2$, $7x$, $4x - 2$... $+(-3x-2)$ — $x - 4$; $-2x - 6$; $-5x - 8$

Desafio

10 Em certo tipo de ludo, cada participante deve lançar dois dados comuns, um azul e um vermelho. Para obter quantas casas o peão deve andar, multiplica-se por três o número indicado na face voltada para cima do dado azul e subtrai-se do resultado o dobro do número indicado pelo dado vermelho.

Se o número obtido for positivo, o peão deve andar para a frente e se for negativo, para trás.

Caso as faces obtidas sejam, por exemplo, e , o peão deverá andar duas casas para a frente, pois:

$3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 12 - 10 = 2$

nº obtido no dado azul — nº obtido no dado vermelho

a) Chamando de **a** o número obtido no dado azul e de **v** o número obtido no vermelho, copie, entre as expressões a seguir, aquela que corresponde ao número de casas que um peão deve andar em uma jogada. III

I) $2a + 3v$ II) $3a + 2v$ III) $3a - 2v$ IV) $3v - 2a$ V) $2a - 3v$

b) A partir da expressão que você copiou, verifique quantas casas, para a frente ou para trás, um peão deverá andar se, no lançamento dos dados, forem obtidos os números:

• e — 3 casas para a frente
• e — 5 casas para trás
• e — 7 casas para a frente
• e — 4 casas para trás

163

Fonte – SOUZA; PATARO, 2013, p. 158-163.

Como fundamentam os PCNs o estudo das expressões algébricas aumenta sua complexidade ao longo dos anos. A compreensão do conceito de variável, incógnita (do “x”), e a capacidade de operar com expressões que envolvam variáveis são a base que deve ser construída no terceiro ciclo para que, no quarto ciclo e no Ensino Médio o aluno seja capaz de representar e resolver problemas mais complexos. Ainda, é essa base algébrica que vai sustentar futuramente o estudo de funções e polinômios, por exemplo.

Observe no Quadro 74 que os alunos destacam essas duas questões: que o uso de variáveis permite escrever matematicamente problemas relacionados à qualquer ciência, além de perceber que o estudo de expressões algébricas será base de conteúdos apresentados em outros níveis de ensino.

Quadro 74 – Equipe 1: questão 2

2. As expressões algébricas são importantes para qualquer ciência que precisa trabalhar com incógnitas e problemas a ser solucionados. Está relacionado com equações do 1º grau, funções do primeiro grau, polinômios, etc.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Assim como a equipe 1, as demais também expressaram a necessidade do estudo de expressões algébricas para representar situações que envolvem variáveis, dando destaque a utilização prática no cotidiano, como vemos no Quadro 75:

Quadro 75 – Equipe 4: questão 2

2- Estudamos Equações algébricas pois a partir de problemas do cotidiano conseguimos transformar esse problema em Equações algébricas para soluciona-los.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Gostaria de dar destaque a dois aspectos na fala dessa equipe. O primeiro é que a resposta dada dá a impressão que só será possível resolver aquele problema do cotidiano se ele for escrito como uma expressão algébrica. Parece estar relacionado com o discurso de que “a matemática está em tudo”, quando na verdade sabemos que, mesmo sem modelar ou escrever matematicamente, podemos resolver diversos problemas do dia a dia. O segundo ponto é que essa equipe escreve “equações algébricas” ao invés de “expressões algébricas”. Aqui, fico em dúvida se o erro foi no conceito em si, ou apenas na escrita.

A segunda parte da pergunta 2 questionava com quais outros conceitos o conteúdo de expressões algébricas está relacionado. Destaco a resposta da equipe 3 no Quadro 76, na qual a equipe menciona a relação com as equações diofantinas.

Quadro 76 – Equipe 3: questão 2

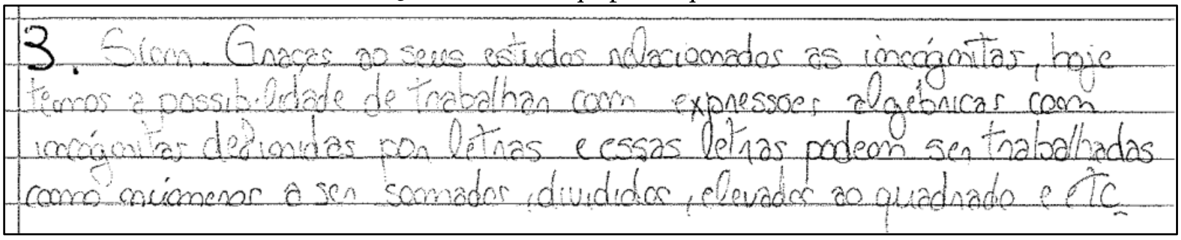
Está relacionado com o conceito de equações do 1° e 2° grau, polinômios e até mesmo para as equações diofantinas.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quando os alunos escrevem “até mesmo para as equações diofantinas” parecem entender que a relação entre esses conteúdos não é uma relação direta. Da mesma forma, expressões algébricas não estão diretamente relacionadas com funções afim, mas constituem uma base para o seu estudo. Assim, foi interessante que eles tenham feito essa menção, sendo o estabelecimento dessa relação, um dos objetivos desse trabalho.

Na questão 3, em almejávamos que os alunos buscassem uma relação entre as expressões algébricas e Diofanto (ou as equações diofantinas), tivemos dois tipos de respostas, escritas de maneiras diferentes pelas equipes. Numa delas os alunos atribuem a Diofanto o mérito pela possibilidade de hoje trabalharmos com o uso de variáveis, como vemos no Quadro 77:

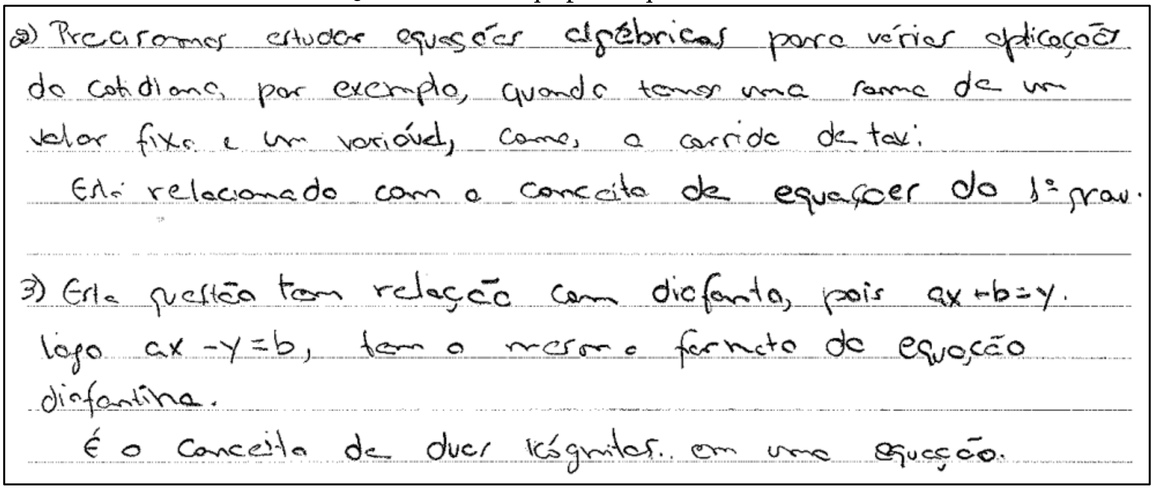
Quadro 77 – Equipe 1: questão 3


3. Sim. Graças ao seus estudos relacionados as incógnitas, hoje temos a possibilidade de trabalhar com expressões algébricas com incógnitas definidas por letras e essas letras podem ser trabalhadas como números a ser somados, divididos, elevados ao quadrado e etc.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Nesta fala fica evidente a percepção dos alunos quanto à importância do trabalho desenvolvido por Diofanto para o “surgimento” da álgebra, aspecto este que foi trabalhado com eles por meio da utilização da história da matemática, conforme abordamos no capítulo 2. Outras duas equipes responderam a essa questão enfatizando as contribuições de Diofanto para a álgebra enquanto uma das equipes estabeleceu uma relação com as equações diofantinas, como observamos no Quadro 78.

Quadro 78 – Equipe 2: questões 2 e 3


2) Precisamos estudar equações algébricas para várias aplicações do cotidiano, por exemplo, quando temos uma soma de um valor fixo e um variável, como, a corrida de taxi.
Está relacionado com o conceito de equações do 1º grau.

3) Esta questão tem relação com diofanto, pois ax+b=y. logo ax-y=b, tem o mesmo formato de equação diofantina.
É o conceito de duas incógnitas em uma equação.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Como no primeiro item da atividade os alunos deveriam ler o texto do livro didático, essa equipe respondeu as demais perguntas “influenciada” pelo texto e não pensando no conteúdo de expressões algébricas de uma maneira mais ampla. Tanto que na questão 2 a equipe exemplifica o uso cotidiano das expressões algébricas como a soma de um valor fixo e um variável – exemplo este apresentado do texto do livro didático ao falar sobre o custo de uma corrida de táxi.

Vemos que é com esse problema em mente que os alunos respondem a questão 3 e concluem que um problema envolvendo expressões algébricas é, na verdade, uma equação diofantina.

De fato, uma equação diofantina é um exemplo de uma equação algébrica, contudo nem todo o conteúdo de expressões algébricas pode ser expresso como uma equação. Além disso, parece ter passado despercebido pelos alunos que uma equação diofantina busca apenas solução no conjunto dos números inteiros. O que não se aplica ao caso do problema do táxi.

As questões de 4 a 8 não estavam relacionadas com o conteúdo de equações diofantinas em si. Era desejado que os alunos analisassem criticamente o material didático disponível, imaginassem sua prática em sala de aula e elaborassem alternativas para o ensino do conteúdo de Expressões Algébricas. Acredito que essa prática é relevante ao longo da formação inicial do licenciando em matemática – bem como de qualquer futuro professor – pois possibilita desenvolver a perpepção e a criticiadade do futuro professor quanto à importância do material didático e sua influência na prática do professor.

Todas as equipes parecem ter aprovado a forma como os autores introduziram o conteúdo. Uma justificativa se encontra no Quadro 79, no qual a equipe aponta que a introdução foi feita de maneira contextualizada, com aumento gradativo no grau de dificuldade e apresentação de vários exemplos, que partem de um problema do cotidiano para a forma algébrica de expressar esse problema.

Quadro 79 – Equipe 2: questões 4 e 5

4) Foi uma introdução bem contextualizada, com uma sequência lógica e gradativa do entendimento da matéria, indo do exemplo para a parte aritmética.
As contextualizações têm relação com o conteúdo, pois segue após a introdução vários exemplos como do aluguel do carro, quando considera diversos valores e quanto pagaria em cada corrida.

5) Sim, pois a exemplificação contínua permite ao aluno estabelecer a relação entre a fórmula genérica e o valor numérico, trabalhando com um valor fixo (b) e o valor (a) vinculado à variável (x).
Explica o passo a passo do desenvolvimento do raciocínio, qualquer a função de 1º grau.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Destaco que uma das equipes conseguiu perceber o conteúdo a partir de uma perpectiva que até então, aparentemente não haviam se dado conta. Eles descrevem que tiveram uma “nova visão” de algo que já estavam habituados. Penso que talvez tenham atribuído significado para algo que para eles era “abstrato”.

Quadro 80 – Equipe 1: questão 4

4. Interessante, pois, nos deu uma nova visão acerca de algo a qual já estávamos habituados. Sim. Com relação às incógnitas

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Observe como os autores definem o que são Expressões Algébricas na Figura 4.

Figura 4 – Definição de Expressões Algébricas apresentada no livro didático

As expressões em que aparecem letras no lugar de números são chamadas expressões algébricas. Nelas, as letras são chamadas ***variáveis****. Veja alguns exemplos.*

$7x$ $a+1$ $9-\frac{3}{4}y$ a^2+b-6

Fonte – SOUZA; PATARO, 2013

Em nenhum momento os autores escrevem a palavra "definição" ou explicitam que vão definir o que é uma expressão algébrica. A definição encontra-se "subentendida" ao longo do texto e é feita de uma maneira mais informal do que aquela que os alunos se deparam no Ensino Superior. Talvez por isso a equipe 3 demonstre tanto incômodo ao dizer que os autores não definem e apenas "jogam a fórmula", como vemos no Quadro 81:

Quadro 81 – Equipe 3: questão 5

5) Não, faltou definição sobre expressões algébricas, foi somente jogado a fórmula para o aluno, sem o mesmo saber de onde vem e como surgiu as expressões algébricas

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Em nenhum momento os autores do livro didático usam igualdades ou qualquer notação que remeta ao conteúdo de funções, ainda assim os alunos enxergam o problema do táxi, do aluguel de carro, entre outros, como funções afim, como vemos no Quadro 79 e no Quadro 82.

Quadro 82 – Equipe 1: questão 5

5. Sim, pois relacionam o problema de uma corrida de táxi com uma função do 1º grau onde a incógnita é a quantidade de km rodados.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

De fato, funções afim são representações matemáticas para os problemas citados, contudo, foi possível perceber que os alunos não diferenciaram "Expressões Algébricas" de "Função Afim". Acredito que não tenham se atentado à definição de Expressões Algébricas, fazendo apenas uma relação direta com um conteúdo já conhecido e que trabalha problemas semelhantes aos apresentados no texto do livro didático fornecido.

Esse “salto” de um conteúdo ao outro é, inclusive, reprovado pelos PCNs.

> Existem também professores que, na tentativa de tornar mais significativa a aprendizagem da Álgebra, simplesmente deslocam para o ensino fundamental conceitos que tradicionalmente eram tratados no ensino médio com uma abordagem excessivamente formal de funções. Convém lembrar que essa abordagem não é adequada a este grau de ensino.
> Para uma tomada de decisões a respeito do ensino da Álgebra, deve-se ter, evidentemente, clareza de seu papel no currículo, além da reflexão de como a criança e o adolescente constroem o conhecimento matemático, principalmente quanto à variedade de representações. Assim, é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica (BRASIL, 1998, p. 116)

Com relação aos exercícios, houve opiniões divergentes. Enquanto a equipe 4 achou que o nível de dificuldade estava adequado e ia progredindo ao longo das questões (Quadro 83), a equipe 3 acredita que o conteúdo foi abordado de maneira muito superficial se comparado ao grau de dificuldade dos exercícios (Quadro 84). Em função disso, destaca a importância da intervenção do professor durante sua resolução.

Quadro 83 – Equipe 4: questão 6

6- O nível de dificuldade está adequado, progredindo a cada questão, mas ainda “tranquilo” para resolver.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 84 – Equipe 3: questão 6

6 O assunto foi abordado de forma muito escasso em comparação com a dificuldade dos exercícios, precisando da intervenção do professor para auxiliar o aluno

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 2 fez uma análise mais minuciosa das questões, concluindo que uma troca na ordem em que elas são apresentadas implicaria num aumento gradativo do grau de dificuldade das questões, o que segundo eles seria a opção “correta” por parte do autor (Quadro 85).

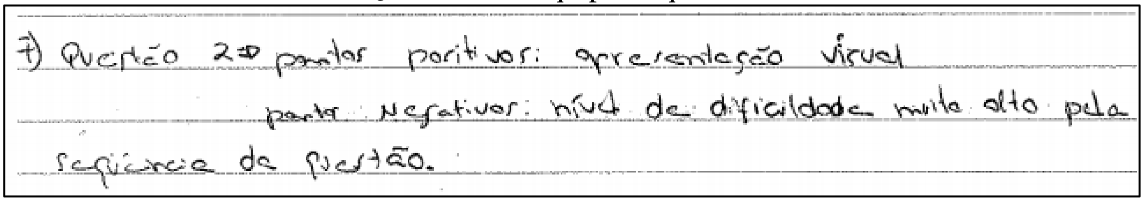
Quadro 85 – Equipe 2: questão 6

6) De forma geral, estão com um nível de dificuldade compatível com o conteúdo apresentado, mas a questão 2b está com um nível de dificuldade maior que a questão 4, a sequência de apresentação não está em uma sequência gradativa de dificuldade.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Ainda que a ordem em que esse exercício aparece não seja a “ideal” eles destacam a apresentação visual como um ponto positivo, que pode facilitar a interpretação da questão (Quadro 86).

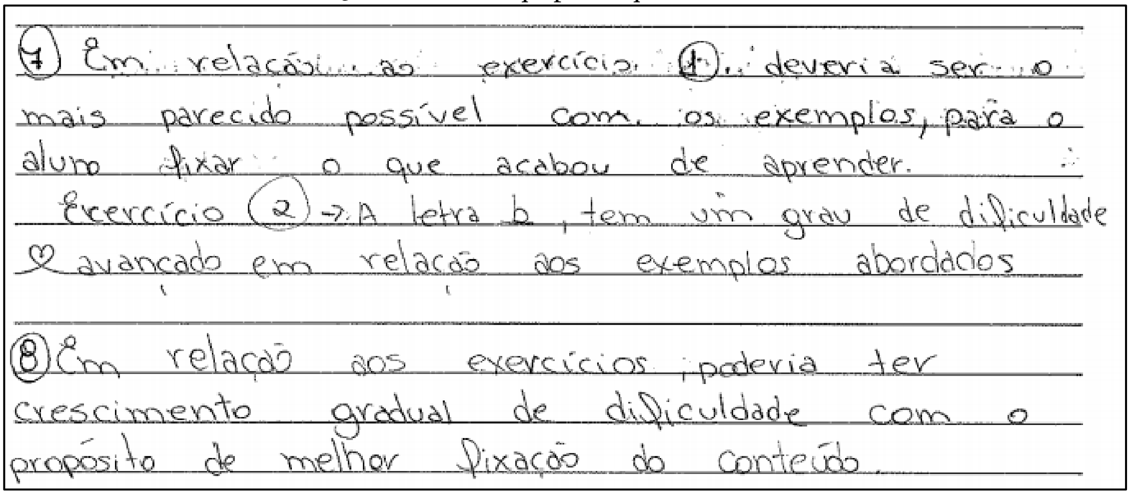
Quadro 86 – Equipe 2: questão 7


7) Questão 2 → pontos positivos: apresentação visual
pontos negativos: nível de dificuldade muito alto pela sequência da questão.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

A equipe 3 também faz um destaque acerca da questão 2 do livro, concordando que o grau de dificuldade está alto se comparado aos exemplos trazidos anteriormente pelos autores (Quadro 87).

Quadro 87 – Equipe 3: questões 7 e 8


7) Em relação aos exercícios 1 deveria ser o mais parecido possível com os exemplos, para o aluno fixar o que acabou de aprender.
Exercício 2 → A letra b, tem um grau de dificuldade avançado em relação aos exemplos abordados
8) Em relação aos exercícios, poderia ter crescimento gradual de dificuldade com o propósito de melhor fixação do conteúdo.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Além disso, vemos no Quadro 87 que a equipe acredita que houve um “salto” muito grande entre os exemplos abordados pelos autores e os exercícios propostos.

Dos últimos quadros (85, 86 e 87), vemos que o grau de dificuldade dos exercícios (ou o aumento desse grau de dificuldade) foi algo que incomodou os alunos. Acredito que eles tenham considerado que o aluno não conseguiria resolver sozinho esses exercícios, necessitando da intervenção e do auxílio do professor. Vejo que esse momento de análise e reflexão foi válido para a formação desses futuros professores, no sentido que eles começam a olhar para a lista de exercícios, por exemplo, e imaginar como ela vai funcionar (ou não) na sala de aula de Educação Básica.

No Quadro 88 vemos indícios dos questionamentos, reflexões e decisões que um professor precisa tomar a cada aula que prepara.

Quadro 88 – Equipe 4: questão 7

7- Questão 3: pontos positivos → o conteúdo sobre carros e gasolina já foi abordado.
pontos negativos → por conta disto, fica repetitivo e se torna mais fácil.
Questão 10: pontos positivos → É interessante apresentar desafios, pois assim a criança se interessará em resolver
pontos negativos → É um desafio bem complexo em relação ao conteúdo para crianças.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Ao buscarem pontos positivos e negativos das questões propostas os alunos elencaram a mesma característica como sendo positiva e negativa. Ao mesmo tempo que consideram interessante que o autor traga um exercício abordando um contexto já exemplificado (no caso, a gasolina) para que haja uma relação com algo que os alunos já viram, eles consideram que isso pode tornar o exercício muito fácil e repetitivo. Já na questão 10, eles consideram uma ferramenta importante a proposição de desafios, por outro lado, defendem que ele é muito complexo se comparado ao conteúdo exposto aos alunos.

Essas análises e questionamentos da atividade 4 devem fazer parte da prática do professor e não existe uma regra para tomar decisões como: esse exercício é adequado? Dependendo da turma, do contexto, da forma como o professor optou por explanar o conteúdo, da disponibilidade de tempo durante a aula ou como tarefa extraclasse etc., um exercício pode ser adequado ou não, e essa decisão quem deve tomar é o professor.

Após a aplicação da atividade 4 percebo que seria muito rico ter mais um encontro com os alunos para discutir as análises, reflexões e opiniões deles com a turma toda. Certamente uma discussão e uma troca de ideias teria acrescentado muito para a formação desses futuros professores. Oferecer um feedback aos alunos abordando os erros apresentados nas respostas deles, sanando as dúvidas, retomando as discussões antes do conteúdo seguinte para evitar que prossigam com o erro, etc. Vemos aqui a importância de que, ao propor qualquer sequência didática ou atividade entregue pelos alunos, é preciso prever também um momento para a discussão dessas atividades.

4.1.2 Atividade 4 – Diofanto e os conteúdos da Escola Básica: Função do primeiro grau

Durante o Ensino Fundamental não se trabalha formalmente com a noção de função afim. Segundo os PCNs (BRASIL, 1998) no terceiro e quarto ciclos deve-se trabalhar com situações-problema que envolvam a variação de grandezas, discutindo a relação entre elas, a fim de desenvolver a noção de função para que então no Ensino Médio os conceitos sejam formalizados.

Já no Ensino Médio

> o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (BRASIL, 2002, p. 121).

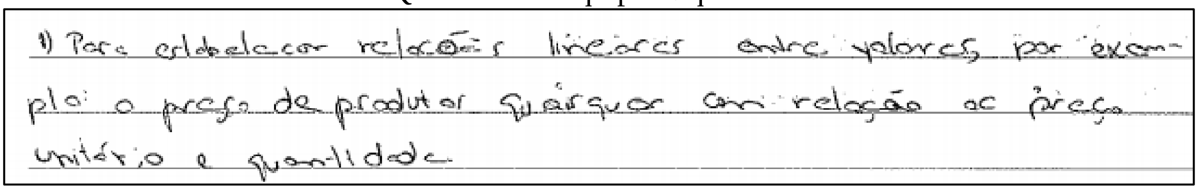
Como já vimos em alguns momentos das análises realizadas anteriormente, os alunos relacionam as equações diofantinas com funções afins. De fato, sua forma é muito semelhante, contudo precisamos destacar que quando trabalhamos com equações diofantinas interessam apenas resultados no conjunto dos números inteiros.

Nesta parte da atividade queríamos "confrontar" os alunos com esses conceitos, almejando que eles conseguissem perceber a diferença entre equações diofantinas e função afim.

Para este tópico e o seguinte tivemos bem menos material para analisar. Como já mencionado haviam poucos alunos e aos poucos eles foram se dispersando da atividade. As respostas estavam mais objetivas e cada vez menos "críticas". É possível notar que os alunos não estavam mais dedicados na realização da atividade. Ainda assim, seguimos com a análise do que foi entregue.

Duas das equipes destacaram a importância do estudo de função afim para estabelecer relações entre variáveis e descrever situações do cotidiano, como vemos no Quadro 89 e no Quadro 90.

Quadro 89 – Equipe 2: questão 1


1) Para estabelecer relações lineares entre valores por exemplo: o preço de produtos qualquer com relação ao preço unitário e quantidade

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 90 – Equipe 4: questão 1

1- Em muitas situações do dia a dia precisamos calcular valores em função de outros.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Quando a pergunta era “As funções do primeiro grau são equações diofantinas?”, três equipes responderam que sim. Uma delas justificou “demonstrando” que equações[16] do primeiro grau e equações diofantinas tem a mesma forma, como vemos no Quadro 91.

Quadro 91 – Equipe 2: questão 3

3) Sim, as funções lineares tem fórmula geral $y = ax + b$, onde $y = f(x)$. Logo ela pode ser reescrita como $y - ax = b$, Comparando os coeficientes das duas equações ordenadamente temos uma equação diofantina $a'x' + b'y' = c'$, onde $a' = -a$, $x' = x$, $b' = 1$ e $y' = y$ e $c' = b$.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Interessante observar a resposta dada pela equipe 3 no Quadro 92.

Quadro 92 – Equipe 3: questão 3

3 Sim, apenas com metodo diferente de resolução

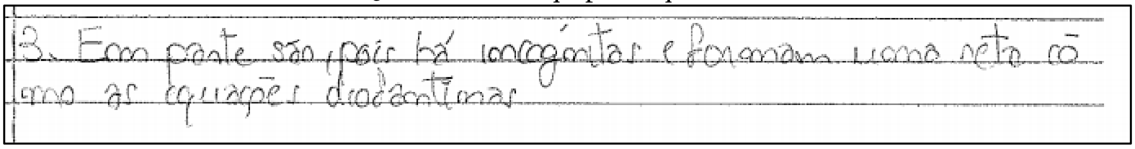
Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Os alunos tiveram bastante dificuldade em resolver as questões da atividade 3 (apresentada no capítulo 3), na qual precisavam estabelecer o conjunto solução de algumas equações diofantinas. Quando encontravam uma solução particular o faziam, em geral, por tentativa e erro. Só quando não conseguiam dessa forma, é que partiam para o algoritmo da divisão, enfrentando dificuldades para aplicá-lo. O que chama a atenção na fala dessa equipe é que, se equações diofantinas e funções do primeiro grau são “a mesma coisa”, porque tanta dificuldade em resolver as equações diofantinas? Não seria mais fácil aplicar as mesmas estratégias usadas quando determinamos pares ordenados de funções do primeiro grau? Aqui, vejo mais uma vez a necessidade de realizar uma aula após a atividade 4, para discutir questões como a expressa acima.

Outra resposta a ser analisada é a que foi dada pela equipe 1 e apresentada no Quadro 93.

[16] Note que eles chamam de equação e não função. Talvez tenha sido um erro ou pode ser que a equipe não tenha o discernimento para diferenciar esses elementos.

Quadro 93 – Equipe 1: questão 3

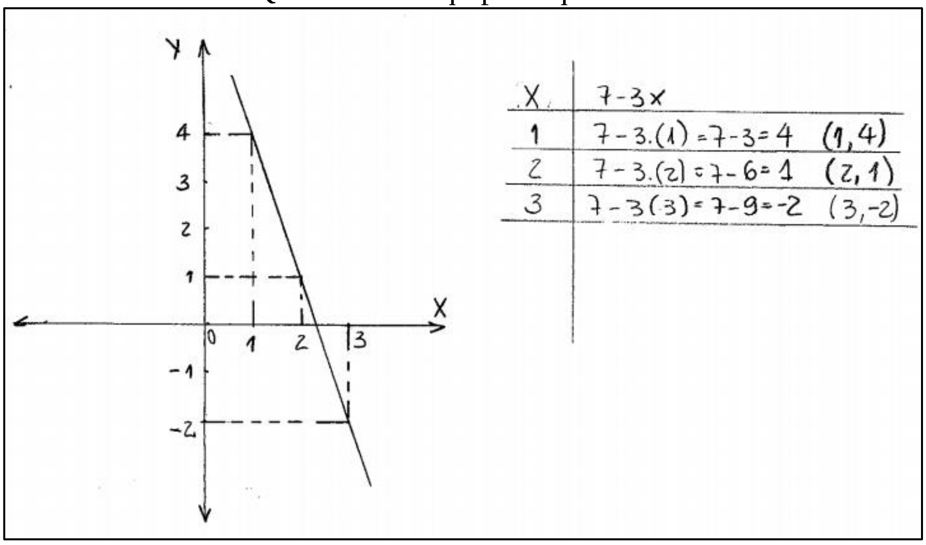

3. Em parte são, pois há incógnitas e formam uma reta como as equações diofantinas

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Essa equipe parece não ter certeza se funções do primeiro grau são equações diofantinas ou não, mas destaca que as funções do primeiro grau formam uma reta, assim como as equações diofantinas. Em nenhum momento durante as atividades realizadas discutimos com os alunos sobre a representação gráfica das soluções de uma equação diofantina. Talvez eles mesmos tenham percebido que é possível traçar uma reta por todos os pontos que são solução de uma equação diofantina. Contudo, essa fala mostra mais uma vez a falta de compreensão dos alunos quanto à especificidade de equações diofantinas fazerem sentido apenas no contexto dos números inteiros.

Podemos ver que essa questão não ficou clara aos alunos, quando na questão 4, todos os que responderam representaram uma reta para apresentar as soluções da equação diofantina dada. O Quadro 94 é um exemplo da resposta dada pelas outras equipes.

Quadro 94 – Equipe 4: questão 4



Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Analisando as respostas dadas nessa parte da atividade avalio que houve alguma falha na construção da definição formal de equações diofantinas. Olhando para as atividades anteriores, a definição formal de equação diofantina foi apresentada em dois momentos: na introdução do primeiro encontro presencial, no qual foi feita uma apresentação de slides falando sobre Diofanto; e na descrição da “Parte 1” da Atividade 2. Ambas situações ocorreram na mesma aula, contudo foram momentos em que a definição apareceu como uma informação secundária, não sendo discutida detalhadamente, ou necessária na resolução de um exercício, ou ainda, definida formalmente no quadro, como os alunos estão habituados.

Ainda assim, em todas as atividades desenvolvidas a principal dificuldade se dava em função de buscar sempre soluções inteiras. Por isso, era esperado que os alunos percebessem essa distinção entre equações diofantinas e função afim. Penso que numa próxima aplicação, essa questão precisaria ser trabalhada com um pouco mais de atenção.

Outra alternativa para sanar essa falha seria realizar mais uma aula debatendo as questões da atividade 4, como já mencionado na discussão de expressões algébricas. Sabemos, contudo, que a ementa é extensa e o tempo disponível acaba não sendo suficiente para abordar tão detalhadamente todos os conteúdos, de modo que é necessário priorizar os tópicos mais importantes da disciplina.

4.1.3 Atividade 4 – Diofanto e os conteúdos da Escola Básica: Equação Linear

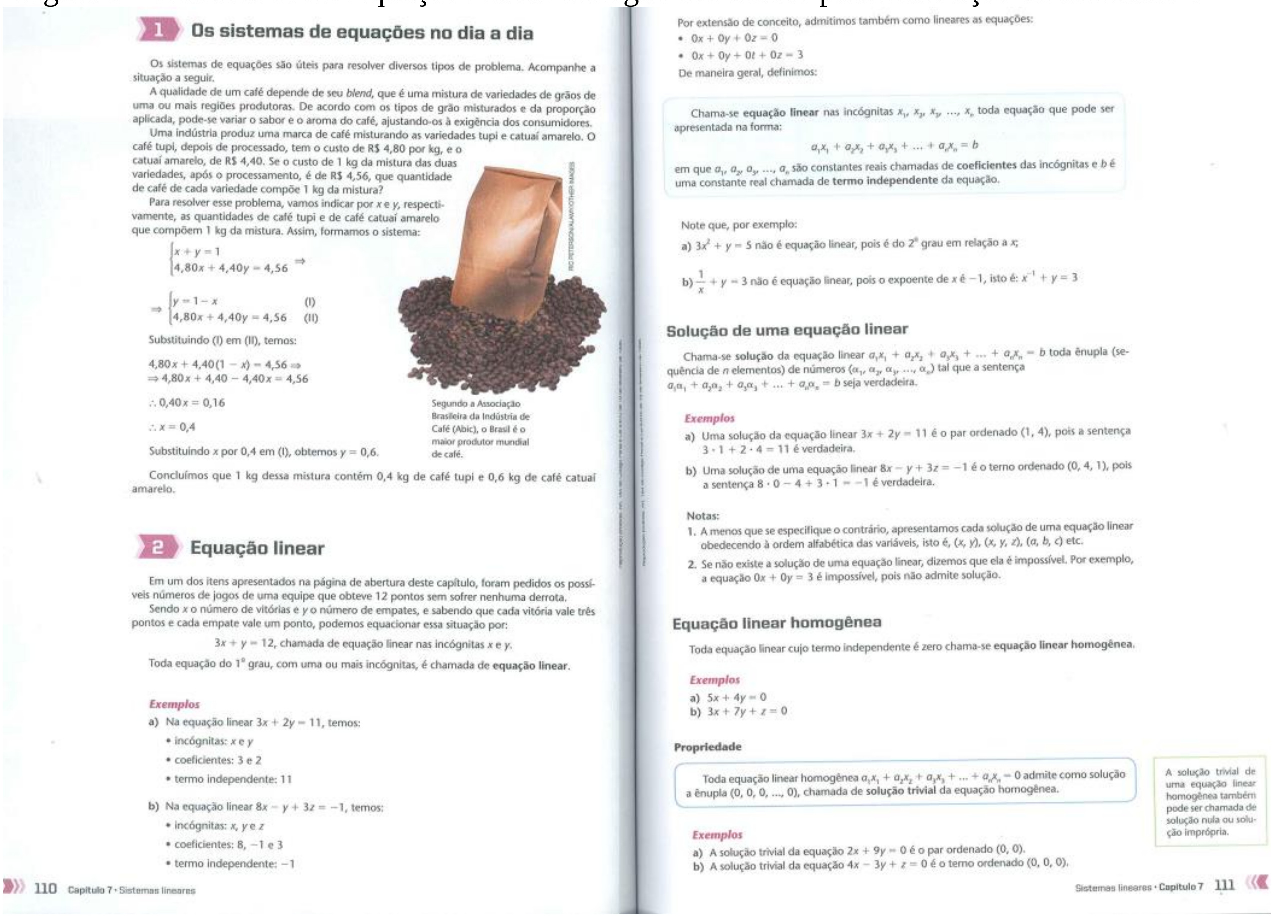
O último tema escolhido para ser abordado nesta atividade foi "Equação Linear". Esse é um tópico breve que vai embasar o estudo de sistemas de equações lineares e, mais adiante, matrizes e determinantes. Esse "acréscimo" no conteúdo é indicado pelo PCN+, quando afirma que durante o Ensino Médio o estudo dos sistemas lineares deve

> receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2012, p. 122)

Além disso, espera-se que o aluno ao resolver uma equação ou um sistema linear, compreenda que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções (BRASIL, 2002).

Na atividade 4 optamos por trabalhar o conteúdo de Equação Linear a partir do livro Matemática Paiva (PAIVA, 2013) do segundo ano do Ensino Médio. O material entregue aos alunos para a realização dessa parte da atividade encontra-se abaixo, na Figura 5:

Figura 5 – Material sobre Equação Linear entregue aos alunos para realização da atividade 4



1 Os sistemas de equações no dia a dia

Os sistemas de equações são úteis para resolver diversos tipos de problema. Acompanhe a situação a seguir.

A qualidade de um café depende de seu *blend*, que é uma mistura de variedades de grãos de uma ou mais regiões produtoras. De acordo com os tipos de grão misturados e da proporção aplicada, pode-se variar o sabor e o aroma do café, ajustando-os à exigência dos consumidores.

Uma indústria produz uma marca de café misturando as variedades tupi e catuaí amarelo. O café tupi, depois de processado, tem o custo de R$ 4,80 por kg, e o catuaí amarelo, de R$ 4,40. Se o custo de 1 kg da mistura das duas variedades, após o processamento, é de R$ 4,56, que quantidade de café de cada variedade compõe 1 kg da mistura?

Para resolver esse problema, vamos indicar por x e y, respectivamente, as quantidades de café tupi e de café catuaí amarelo que compõem 1 kg da mistura. Assim, formamos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 4{,}80x + 4{,}40y = 4{,}56 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x & \text{(I)} \\ 4{,}80x + 4{,}40y = 4{,}56 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$4{,}80x + 4{,}40(1 - x) = 4{,}56 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4{,}80x + 4{,}40 - 4{,}40x = 4{,}56$$

$$\therefore 0{,}40x = 0{,}16$$

$$\therefore x = 0{,}4$$

Substituindo x por 0,4 em (I), obtemos $y = 0{,}6$.

Segundo a Associação Brasileira da Indústria de Café (Abic), o Brasil é o maior produtor mundial de café.

Concluímos que 1 kg dessa mistura contém 0,4 kg de café tupi e 0,6 kg de café catuaí amarelo.

2 Equação linear

Em um dos itens apresentados na página de abertura deste capítulo, foram pedidos os possíveis números de jogos de uma equipe que obteve 12 pontos sem sofrer nenhuma derrota.

Sendo x o número de vitórias e y o número de empates, e sabendo que cada vitória vale três pontos e cada empate vale um ponto, podemos equacionar essa situação por:

$3x + y = 12$, chamada de equação linear nas incógnitas x e y.

Toda equação do 1º grau, com uma ou mais incógnitas, é chamada de **equação linear**.

Exemplos

a) Na equação linear $3x + 2y = 11$, temos:
- incógnitas: x e y
- coeficientes: 3 e 2
- termo independente: 11

b) Na equação linear $8x - y + 3z = -1$, temos:
- incógnitas: x, y e z
- coeficientes: 8, -1 e 3
- termo independente: -1

110 Capítulo 7 • Sistemas lineares

Por extensão de conceito, admitimos também como lineares as equações:
- $0x + 0y + 0z = 0$
- $0x + 0y + 0t + 0z = 3$

De maneira geral, definimos:

Chama-se **equação linear** nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ toda equação que pode ser apresentada na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são constantes reais chamadas de **coeficientes** das incógnitas e b é uma constante real chamada de **termo independente** da equação.

Note que, por exemplo:

a) $3x^2 + y = 5$ não é equação linear, pois é do 2º grau em relação a x;

b) $\frac{1}{x} + y = 3$ não é equação linear, pois o expoente de x é -1, isto é: $x^{-1} + y = 3$

Solução de uma equação linear

Chama-se **solução** da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$ toda ênupla (sequência de n elementos) de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ tal que a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \dots + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Exemplos

a) Uma solução da equação linear $3x + 2y = 11$ é o par ordenado (1, 4), pois a sentença $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$ é verdadeira.

b) Uma solução de uma equação linear $8x - y + 3z = -1$ é o terno ordenado (0, 4, 1), pois a sentença $8 \cdot 0 - 4 + 3 \cdot 1 = -1$ é verdadeira.

Notas:

1. A menos que se especifique o contrário, apresentamos cada solução de uma equação linear obedecendo à ordem alfabética das variáveis, isto é, (x, y), (x, y, z), (a, b, c) etc.
2. Se não existe a solução de uma equação linear, dizemos que ela é impossível. Por exemplo, a equação $0x + 0y = 3$ é impossível, pois não admite solução.

Equação linear homogênea

Toda equação linear cujo termo independente é zero chama-se **equação linear homogênea**.

Exemplos

a) $5x + 4y = 0$
b) $3x + 7y + z = 0$

Propriedade

Toda equação linear homogênea $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0$ admite como solução a ênupla (0, 0, 0, ..., 0), chamada de **solução trivial** da equação homogênea.

A solução trivial de uma equação linear homogênea também pode ser chamada de solução nula ou solução imprópria.

Exemplos

a) A solução trivial da equação $2x + 9y = 0$ é o par ordenado (0, 0).
b) A solução trivial da equação $4x - 3y + z = 0$ é o terno ordenado (0, 0, 0).

Sistemas lineares • Capítulo 7 111

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Uma papelaria vende apenas três tipos de caneta esferográfica, A, B e C, aos preços unitários de R$ 1,00, R$ 2,00 e R$ 3,00, respectivamente. Uma pessoa pretende gastar R$ 15,00 nessa papelaria, comprando apenas canetas esferográficas, pelo menos uma de cada tipo. Quantas são as possibilidades de compra?

Resolução

Indicando por a, b e c as quantidades de canetas adquiridas dos tipos A, B e C, respectivamente, e observando os valores de cada uma delas, temos $a + 2b + 3c = 15$; portanto:

$$a = 15 - 2b - 3c$$

Como a, b e c são números naturais não nulos, deduzimos que:

- para $b = 1$, o maior valor possível de c é 4, pois para c maior que 4 teríamos como valor de a um número negativo, o que não convém;
- para $b = 2$, o maior valor possível de c é 3;
- para $b = 3$, o maior valor possível de c é 2;
- para $b = 4$, o maior valor possível de c é 2;
- para $b = 5$, o único valor possível de c é 1.

Note que o valor 5 é o máximo possível para b, pois, lembrando que a deve ser natural não nulo, se tivéssemos $b > 5$, teríamos $c \leq 0$, o que não convém. Logo, as possibilidades de compra são:

b	c	a
1	1	10
1	2	7
1	3	4
1	4	1
2	1	8
2	2	5
2	3	2
3	1	6
3	2	3
4	1	4
4	2	1
5	1	2

Concluímos, então, que há 12 possibilidades de compra.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Lembre-se: resolva as questões no caderno.

1 Considerando a equação $4x + 3y = 12$:

a) Qual é o valor de y para $x = 3$? 0

b) Qual é o valor de y para $x = -7$? $\frac{40}{3}$

c) Sempre existirá um valor de y para qualquer valor atribuído a x? sim

d) Quantos pares ordenados são soluções da equação $4x + 3y = 12$? infinitos

2 Considerando a equação linear $2x + 3y - z = 7$, faça o que se pede.

a) Classifique, no caderno, em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.

I. O terno ordenado $(6, -2, -1)$ é solução dessa equação. verdadeira

II. O terno ordenado $(1, 1, 2)$ é solução dessa equação. falsa

b) Determine os valores de p e q de modo que os ternos ordenados $(2, 1, p)$ e $(-1, q, 3)$ sejam soluções dessa equação. $p = 0$; $q = 4$

c) Obtenha duas outras soluções dessa equação, diferentes das apresentadas nos itens anteriores. Respostas possíveis: $(5, 0, 3)$; $\left(1, \frac{10}{3}, 5\right)$

3 (Vunesp) Uma pessoa quer trocar duas cédulas de 100 reais por cédulas de 5, 10 e 50 reais, recebendo cédulas de todos esses valores e o maior número possível de cédulas de 50 reais. Nessas condições, qual é o número mínimo de cédulas que ela poderá receber? alternativa b

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

Resolva a questão 1 do *Roteiro de trabalho*.

112 Capítulo 7 · Sistemas lineares

Fonte – PAIVA, 2013, p.110-112.

Para essa parte da atividade propomos praticamente os mesmos questionamentos daqueles que foram realizados quando o tema era “Expressões Algébricas”. Apenas duas das equipes responderam algumas das perguntas feitas, mas apenas uma delas teve tempo de finalizar toda a atividade.

Quando questionados sobre a importância de estudar equações lineares a equipe 2 defendeu sua utilidade prática na resolução de problemas do cotidiano, assim como já havia feito quando o conteúdo era “expressões algébricas” (Quadro 95). Esse é um discurso bastante enraizado nos (futuros) professores e este é mais um ponto a ser discutido no momento de feedback com os alunos. Os alunos poderiam ser questionados sobre a “real” utilidade das equações lineares (ou das expressões algébricas), discutindo quais são os problemas do dia a dia em que esses conteúdos realmente se fazem necessários.

Quadro 95 – Equipe 4: questão 2

> 2- Precisamos estudar Equações Lineares porque está relacionado com problemas do dia a dia.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Enquanto isso, a equipe 2 se restringiu a justificar sua importância para a resolução de questões envolvendo variáveis. Essa equipe também destacou a influência de Diofanto para esse conteúdo ao possibilitar a utilização de uma notação matemática independente de interpretações geométricas (Quadro 96).

Quadro 96 – Equipe 2: questões 2 e 3

> 2) Precisamos estudar equação linear para descobrirmos quantidades vinculadas a uma ou mais variáveis.
> Este conceito está relacionado as equações diofantinas.
>
> 3) Sim, pois Diofanto possibilitou uma notação matemática independente de preceitos geométricos.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Com relação à forma como o autor tratou o conteúdo no livro didático os alunos consideraram que foi feito de forma clara, trazendo exemplos que ajudam na compreensão do conteúdo. Contudo, entenderam que os exercícios tinham um baixo grau de dificuldade, como vemos no Quadro 97.

Quadro 97 – Equipe 4: questões 4 a 7

> 4- O conteúdo foi introduzido de forma clara e direta; com relação ao tema.
> 5- Sim, o uso de exemplos junto com as definições ajudaram a compreender o conteúdo.
> 6- alguns exercícios estão em um nível de dificuldade inferior ao que deveria ser.
> 7- Pontos positivos → apresenta uma questão de vestibular.
> Pontos negativos → algumas questões estão muito fáceis.

Fonte – Dados da pesquisa, 2018.

Infelizmente as condições em que essa atividade ocorreu não possibilitaram que os alunos finalizassem o roteiro proposto. O tópico de Equação Linear como foi tratado no livro era o que mais se assemelhava às equações diofantinas, pois o autor usou exemplos e exercícios que utilizavam apenas respostas inteiras. Além disso, mais uma vez destaco que numa próxima oportunidade traria essas questões para discussão com a sala toda.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acredito que todo pesquisador quando inicia uma pesquisa passa pelo mesmo processo. Inicialmente ele tem um grande problema que quer resolver ou uma grande questão que quer responder. Logo percebe que é amplo demais e precisa trabalhar com algo um pouco mais específico. E daí, vê que ainda está muito amplo e precisa focar em uma parcela ainda menor do problema ou da questão a ser respondida. E esse processo se repete até que ele chegue em algo bem particular que é possível de ser trabalhado, discutido e pesquisado no período de tempo e nas condições que ele tem disponível.

Minha motivação inicial para essa pesquisa era encontrar uma "fórmula mágica" para aplicar com os alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática. Queria que eles mantivessem a mesma motivação e empolgação com o curso que tinham nos primeiros dias de aula. E queria que essa motivação os mantivesse no curso e eles não evadissem já na primeira fase.

Obviamente, essa fórmula mágica não existe. Cada aluno é único, traz consigo uma história de vida e passa por um momento e um processo individual de amadurecimento e de autoconhecimento. Não existe uma maneira de abranger a todos os alunos! Isso é fato. Enquanto formadora de professores uso esse discurso com meus alunos, mas enquanto professora, tenho que confessar que guardo essa utopia de poder transformar o mundo. Não me julgue por isso, concordo com Ubiratan D'Ambrosio quando ele questiona: "Como ser educador sem ter utopia?" (D'AMBROSIO, 2011, p. 87).

Ao iniciar a pesquisa essa motivação deu lugar a uma pergunta, e com ela, a proposição de alguns objetivos. Agora, ao finalizar todo o trabalho retornamos ao seu começo. Nos questionamos se seguimos no caminho que havíamos nos proposto, se alcançamos os objetivos estabelecidos, se conseguimos responder nossa pergunta de pesquisa, pontuamos aspectos positivos, surpresas ao longo do caminho e pontos que podem ser melhorados ou escolhas que poderiam ter sido feitas de maneira diferente.

Começo me questionando se consegui responder minha pergunta de pesquisa que era: **de que forma podemos relacionar o conteúdo de equações diofantinas visto na disciplina de Introdução à Teoria dos Números com conteúdos apresentados na sala de aula do Ensino Básico?**

Durante um bom tempo após a realização da aplicação dos roteiros acreditei que não havia alcançado uma resposta para essa pergunta. Em função do contexto da aplicação da atividade 4, que na minha opinião era a atividade que me daria essa resposta, imaginei que chegaria neste momento da pesquisa e teria que assumir que não havia atingido meus objetivos iniciais. No entanto, agora, após finalizar a análise de todas as atividades e ter uma visão mais ampla de todo o processo consigo elencar alguns tópicos que podem ajudar a responder essa pergunta.

A meu ver a utilização da história da matemática teve um papel fundamental no estabelecimento dessa relação. Em vários momentos ao longo das análises destacamos trechos nos quais os alunos atribuem a Diofanto o "descobrimento" da Álgebra. Eles puderam perceber que foi por meio dos estudos de Diofanto que iniciou-se uma "nova matemática" na qual havia a possibilidade de representar, interpretar, operar e resolver problemas sem a utilização da geometria.

Hoje, grande parte dos conteúdos abordados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio faz uso de variáveis, logo, mesmo não trabalhando com equações diofantinas propriamente ditas na Educação Básica, há relevância do seu estudo em nível superior, tendo em vista a importância de Diofanto para a matemática atual.

Ainda com relação à utilização da história, a cada menção dos alunos quanto à influência de Diofanto para o desenvolvimento da Álgebra, eu lembrava dos argumentos apresentados por MIGUEL(1997) para reforçar as potencialidades pedagógicas da história da matemática. Em especial, o argumento que fala que por meio da história da matemática podemos alcançar objetivos no ensino de matemática.

Os objetivos que observei mais fortemente nos alunos foram: a percepção da matemática como uma criação humana, tanto nas discussões das atividades em grupo quando se perguntavam "como alguém pensou nisso?" como quando, na primeira aula presencial, falamos sobre as contribuições de Diofanto e a dificuldade em resolver problemas sem o uso de variáveis; ainda, ao realizar as pesquisas e a escrita da atividade 1, na qual criaram um "rosto" e uma história para alguém que foi importante para a matemática, puderam perceber a "humanidade" por trás dessa ciência.

Outro objetivo que acredito que alcançamos por meio da história da matemática foi a percepção que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo. Novamente, ao se deparar com a ideia de que não existia a noção de variável, os alunos puderam perceber que a matemática está em constante construção e mudança e que, o que para Diofanto era "inovador", hoje é corriqueiro para nós.

Por fim, outro objetivo alcançado foi que os alunos puderam ter contato com a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. Durante a atividade 2 eles precisaram criar hipóteses. Em seguida, precisavam validar essas hipóteses e, por fim, formalizar e escrever matematicamente essas hipóteses. Foi oportunizado a eles a chance de “criar matemática”, de se colocarem no papel do matemático e “fazer matemática”. Mais uma vez, mostrando que a matemática é uma ciência humana, mutável e com uma estrutura própria.

Voltando à pergunta de pesquisa, percebo que atividade 4, com as devidas adaptações, se mostra como uma ótima maneira de relacionar as equações diofantinas com os conteúdos da Escola Básica. Ela é uma atividade bastante versátil pois poderia ser aplicada usando vários outros conteúdos além daqueles que eu escolhi, como o Mínimo Múltiplo Comum, o Máximo Divisor Comum, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, entre outros.

Vejo que além de trabalhar aspectos práticos da rotina do professor, como a análise crítica do material didático e das listas de exercícios, essa atividade possibilita ao aluno perceber que mesmo sem falar sobre equações diofantinas a base para esse conteúdo está inserida em vários outros temas estudados do Ensino Fundamental e Médio. Ao olhar para conteúdos trabalhados na Educação Básica sob a luz das equações diofantinas, podemos realizar discussões acerca das aproximações e distanciamentos entre eles, as formas de resolução de um e outro, as definições de cada um, as especificidades, etc. Na minha opinião esse tipo de reflexão e discussão tem muito potencial para acrescentar numa formação mais “ampla” desse futuro professor de matemática.

Olhando agora para os nossos objetivos de pesquisa, acredito que em alguns aspectos fomos além do que havíamos proposto inicialmente. Penso que muitas das concepções e práticas que temos como professores são provenientes dos modelos de professores que tivemos ao longo da nossa formação inicial. Assim, o fato de termos utilizado metodologias alternativas ao “quadro e giz” pode favorecer, por parte desses futuros professores de matemática, o uso de outras metodologias de ensino.

Quando optamos por utilizar a história da matemática e incentivar o uso da criatividade na atividade 1, mostramos aos alunos que, além do domínio do conhecimento matemático, existem outras habilidades importantes para um professor de matemática. Ainda, eles próprios enquanto professores, podem desenvolver essas habilidades com seus alunos nas aulas de matemática, uma vez que o papel do professor transcende o ensino da ciência matemática, de cálculos e números.

Ainda, na atividade 2, utilizamos um roteiro no qual os alunos eram os protagonistas e deveriam construir suas teorias. Aqui trabalhamos novamente com a criatividade, além da criação de conjecturas, da validação dessas conjecturas, a prática da escrita matemática formal, as generalizações, etc. Além de desenvolver habilidades matemáticas ao longo desse processo, essa metodologia pode ser aplicada pelos futuros professores, de modo que eles desafiem seus alunos a construir, deduzir, generalizar etc.

Enquanto, por um lado, fomos além do que havíamos proposto, por outro, alguns objetivos que tínhamos traçado inicialmente acabaram ficando em segundo plano e não os pusemos em prática. Um desses objetivos era analisar livros de aritmética para verificar de que forma o conteúdo de equações diofantinas aparece no seu estudo em nível superior. De maneira indireta fizemos essa análise durante a construção dos roteiros para aplicação em sala de aula, mas em nenhum momento ela apareceu formalizada nesta apresentação final da pesquisa. Acredito que isso não tenha influenciado diretamente na nossa pergunta de pesquisa, mas certamente traria um embasamento interessante para explicar a forma como construímos as atividades, além de fornecer materiais para trabalhos futuros.

Também não realizamos análises de livros didáticos do Ensino Básico a fim de verificar se existem e de que forma são propostos exercícios que estejam relacionados ao conteúdo de equações diofantinas. Destacamos ao longo do capítulo 4 alguns temas e conteúdos que poderiam ser relacionados com as equações diofantinas. Também vimos que, nos documentos oficiais, esse tema não está compreendido na Educação Básica. Logo, acreditamos que podemos encontrar exercícios nos livros didáticos que podem ser vistos como uma equação diofantina – como é o caso do exercício resolvido 1 da Figura 5 – mas dificilmente aparecerá uma menção direta à Diofanto ou às equações diofantinas. Certamente, isso é uma inferência, não podemos afirmar com certeza.

Ao longo das análises já destaquei aspectos que me chamaram a atenção durante a aplicação das atividades, mas quero novamente realçar alguns pontos. Um deles diz respeito à dificuldade apresentada pelos alunos em se adaptar ao roteiro e criar hipóteses. A cada passo do roteiro eles pareciam inseguros e pareciam precisar da aprovação de uma das professoras para seguir adiante.

Aparentemente, a criação de hipóteses foi um exercício completamente novo. Analisar os exemplos, buscar por padrões e elaborar uma “regra matemática” (proposição) foram processos bem demorados e complexos. Para elaborar um hipótese o aluno precisa usar a criatividade e estar disposto a errar. São várias tentativas e erros até encontrar o “caminho certo”, mas os alunos demonstraram muita insegurança em criar essas hipóteses, em dar uma resposta “errada”.

Foi interessante observar o quanto o trabalho em equipe é proveitoso e enriquece as discussões. Numa equipe, em geral, os alunos se sentem mais à vontade para expressar suas ideias e opiniões do que se tivessem que fazê-lo em frente à turma toda. Além disso, quando um membro da equipe desanimava ou queria desistir de encontrar uma resposta, os demais apresentavam outras possibilidades e perspectivas, trazendo novamente todos para a discussão. Ainda, sabemos que a linguagem usada entre os colegas muitas vezes é mais acessível e de fácil compreensão do que a do professor, assim, os membros da equipe auxiliavam uns aos outros na explicação dos exemplos ou nas dúvidas.

No capítulo 2 já abordamos vários exemplos das dificuldades dos alunos em se expressar matematicamente. Vale lembrar que são alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática, então a exigência formal é algo ainda novo para eles. A própria estrutura lógica-dedutiva da matemática, sua escrita, seus símbolos e sua formalização exigem uma maturidade matemática que eles não possuem, mas que vai sendo desenvolvida ao longo do curso de graduação.

Penso que um resultado importante dessa pesquisa diz respeito à minha reflexão quanto à minha prática docente, minhas escolhas e decisões ao longo da aplicação da sequência didática e quanto isso contribui para a minha formação profissional. Dessa reflexão percebo alguns pontos que poderia ter sido trabalhados de maneira diferente.

Acredito que teria sido bastante produtivo elencar esses erros e discutí-los com os alunos, explicando o erro e qual seria a forma correta de expressar matematicamente a ideia apresentada. Essa discussão acaba fugindo um pouco do conteúdo específico da disciplina de ITN e por isso, talvez não tenhamos nos atentado à sua necessidade. Contudo, serviu de aprendizado para próximas aplicações, nessa disciplina, ou em outras que vier a ministrar. Acredito que desenvolver a habilidade de se expressar matematicamente é papel de todas as disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática e a discussão de alguns dos equívocos cometidos por eles acrescentaria muito nesse sentido.

Vale destacar que a forma como realizamos a atividade possibilita que o professor tenha acesso com maior facilidade aos erros, equívocos e dificuldades dos alunos. Muitas vezes só é possível perceber essa “falha” na escrita ou na compreensão da linguagem matemática ou de um conceito após a correção da prova. E até lá, já se passaram vários dias e até mesmo conteúdos. Nesse sentido, uma atividade como a atividade 2, possibilita que o professor reconheça, avalie e corrija os erros com maior rapidez e de maneira mais efetiva.

Ainda sobre a atividade 2: foi proposto um roteiro no qual os alunos tinham tempo para pensar nas possibilidades, criar estratégias, discutir. As professoras estavam presentes na sala auxiliando, instigando e orientando as discussões. Na aula seguinte as hipóteses foram discutidas uma a uma, com linguagem natural, sem exigir formalizações. Só depois de todo esse processo partimos para a apresentação das proposições e para o “rigor matemático”.

Ainda assim, com todo esse tempo para “assentar as ideias” houve muita dificuldade com a linguagem matemática. Imaginamos então a dificuldade enfrentada pelos alunos quando o mesmo conteúdo é abordado de maneira tradicional: teorema – demonstração – exercícios – aplicações. Enquanto professores sabemos que a grade curricular é exigente e não há como trabalhar todos os conteúdos oferecendo todo esse tempo aos alunos, mas é necessário refletir sobre o tempo necessário para eles codificarem a linguagem matemática, transcenderem o caso particular para a generalização, desenvolverem uma “maturidade matemática”.

Outro ponto que considero que é passível de melhora na aplicação é a discussão da atividade 4. Essa atividade foi prejudicada em função do contexto da greve e os alunos, em sua maioria nem conseguiram finalizar a atividade, ainda que houvesse tempo hábil para isso. Acredito que a discussão nas equipes foi muito rica, os alunos se expressam com mais facilidade em pequenos grupos e todos os integrantes são instigados a participar da atividade. Portanto, considero que ela foi válida e de extrema relevância. Ainda assim, fica um sentimento de que teria sido bastante interessante e enriquecedor revisar as questões elencadas na atividade 4 e discutí-las com a turma toda a fim de sanar as dúvidas, corrigir interpretações e concepções errôneas e refletir sobre a relação entre os conteúdos da Educação Básica e do Ensino Superior.

Destaco ainda que para uma próxima aplicação avaliaria a possibilidade de trabalhar com o conteúdo de progressão aritmética, talvez na discussão da atividade 4 ou mesmo antes da atividade 2. Os alunos demonstraram muita dificuldade em trabalhar com o parâmetro quando precisavam generalizar o conjunto solução de uma equação diofantina e talvez, relacionando com um tema já conhecido eles conseguissem compreender qual é o “papel” e como funciona do parâmetro.

Como já mencionado, vários pontos da sequência didática podem ser alterados e melhorados de modo a alcançar os objetivos com mais eficácia. Ainda assim, pensando nos meus dois incômodos iniciais, fico satisfeita por acreditar que as atividades desenvolvidas ajudam a amenizá-los. Creio que as discussões da atividade 4, tanto nos grupos como num compartilhamento de ideias com a turma toda, possibilitam que o aluno perceba que muitos dos conteúdos estudados no Ensino Superior não são isolados daqueles que ele ensinará na Escola Básica. Ou seja, o conhecimento poderá ser útil e “aplicável”. Além disso, o conhecimento axiomático e que ele acredita ser “formal demais”, passa a ser visto como algo mais “acessível” na medida em que ele se percebe como “criador” de matemática, como alguém capaz de elaborar conjecturas, validá-las ou refutá-las e, acima de tudo, vê que a matemática é uma ciência humana.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum: Educação é a base.** Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**, 2002. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em 28 jun. 2019.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

DOMINGUES, H.H. **Fundamentos de Aritmética.** Florianópolis: Editora da UFSC, 2009. P. 148 – 149.

GUIA Geográfico Egito. **Alexandria na Antiguidade**, 20_ _?. Disponível em http://www.egito-turismo.com/alexandria/antiguidade.htm. Acesso em: 8 abr. 2019.

KIECKHOEFEL, D. E. N. **Um estudo sobre a etnomatemática: vida e obra de Teresa Vergani.** 2012. Trabalho de Graduação (Licenciatura em Matemática) - Centro de Ciências Tecnológicas – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2012.

MAPAS do Egito Khan el Khalili. **Alexandria,** 20_ _? Disponível em http://www.khanelkhalili.com.br/mapasEgito7.htm. Acesso em 8 abr. 2019.

MIARKA, R. **Etnomatemática: do ôntico ao ontológico.** 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

MIGUEL, A. **As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores.** Zetetiké, v.5, n.8, P. 73 – 106, 1997.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: Propostas e desafios.** 1.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. P. 15 – 68.

PAIVA, M. **Matemática Paiva.** 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013. P. 110-112.

PREFEITURA DE JOINVILLE. **Matriz Curricular de Matemática do município de Joinville**. Joinville, 2014.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTA CATARINA. **Proposta Curricular de Santa Catarina: Formação Integral na Educação Básica**, 2014. Disponível em http://www.sed.sc.gov.br/servicos/professores-e-gestores/16977-nova-proposta-curricular-de-sc-2014. Acesso em 28 jun. 2019.

SÓ HISTÓRIA. **Alexandre, o Grande**, 2009?. Disponível em https://www.sohistoria.com.br/biografias/alexandre/. Acesso em 8 abr. 2019.

SOUZA, J.; PATARO P. M. **Vontade de Saber Matemática: 7º ano.** 2.ed. São Paulo: FTD, 2012. P. 158-163.

SUPERINTERESSANTE. **Quem foi Alexandre, o Grande?,** 2018. Disponível em https://super.abril.com.br/mundo-estranho/quem-foi-alexandre-o-grande/. Acesso em 8 abr. 2019.

TERRA EDUCAÇÃO. **Helenismo,** 2015. Disponível em https://www.estudopratico.com.br/helenismo-historico-e-caracteristicas/. Acesso em 8 abr. 2019.

VERGANI, T. **O zero e os infinitos: uma experiência de antropologia cognitiva e educação matemática intercultural.** Lisboa: Minerva, 1991.

VERGANI, T. **Um horizonte de possíveis: sobre uma educação matemática viva e globalizante.** Lisboa: Universidade Aberta, 1993.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Atividade 1: Revisitando Diofanto

Para esta atividade vocês vão precisar de criatividade, imaginação e pesquisa.

Vocês já pararam para pensar como uma pessoa faz para escrever uma história, uma novela ou um filme de época? Em primeiro lugar ela precisa pesquisar muito a fim de compreender como as pessoas viviam, como eram os estabelecimentos, as casas, as roupas, o comportamento, etc. das pessoas naquela referida época.

Hoje vocês vão escrever uma história de época!

Na verdade, vocês não precisam escrever. Vocês podem apresentar essa história de alguma outra maneira que acharem interessante: pode ser, por exemplo, numa história em quadrinhos, por meio de um vídeo, a filmagem de uma encenação, utilizando infográficos, ou escrevendo uma história. Usem a criatividade!

Imagine que vocês são roteiristas de um filme. Escrevam (ou apresentem de uma outra maneira, como exemplificado acima), com o máximo de detalhes possível, o contexto no qual vivia Diofanto de Alexandria. Pesquisem, imaginem, discutam e descrevam como eram as ruas, a casa onde ele vivia, as vestimentas, com o que trabalhava, como era sua rotina. Descrevam a personalidade dessa personagem, como ele pensava, quais eram suas preocupações.

Utilizem, na medida do possível, referências bibliográficas confiáveis para descrever o que foi pedido acima, mas quando não for possível, usem a criatividade para imaginar a realidade da época e “preencher as lacunas”.

Lembrem-se, vocês são roteiristas! Escrevam de modo a nos envolver e entrar na história. Ah, e não esqueçam de colocar ao final do texto, as referências bibliográficas utilizadas.

APÊNDICE B

Atividade 2: Analisando equações diofantinas

PARTE 1

Como vimos na história de Diofanto, seu objetivo era encontrar valores de x, y inteiros que fossem solução de equações do tipo:

$$ax + by = c,$$

onde $a, b, c \in Z$ e a e b não são simultaneamente nulos.

Hoje, diferente de Diofanto, já conhecemos o método para resolver equações desse tipo. Vamos, contudo, tentar construir uma teoria para resolver essas equações, assim como Diofanto teve que fazer, em sua época.

1 – Observe a equação $3x + 7y = 20$. Você consegue encontrar uma solução? Justifique! Existe alguma relação entre os coeficientes 3, 7 e 20?

2 – Nas equações abaixo, discutam se é possível obter uma solução no conjunto dos inteiros. Se existir, explicite-a. Você percebe alguma relação entre os coeficientes?

a) $13x + 4y = 1$

b) $4x + 2y = 7$

c) $10x - 16y = -8$

d) $3x - 2y = 2$

3 – Agora, queremos saber: quando uma equação diofantina tem solução no conjunto dos inteiros? Usando os exemplos acima queremos encontrar alguma “regra” que nos permita analisar qualquer equação diofantina e dizer se ela tem solução ou não. Observe os exemplos já discutidos e junto com sua equipe crie conjecturas. **Dica:** procure possíveis relações entre os coeficientes e utilize conceitos já vistos na disciplina de ITN, como paridade, números primos, mdc, mmc, etc.

Já criaram suas hipóteses? Agora, validem ou refutem essas hipóteses verificando se elas funcionam para os exemplos acima. Se suas conjecturas foram validadas, entregue sua atividade. Se elas foram refutadas, repensem-as e se possível reformule-as antes de entregar a atividade.

PARTE 2

4 – Compare a solução encontrada na questão 2 com pelos menos outras duas equipes. As soluções foram as mesmas? Se não, anote outras soluções válidas.

5 – Discutam com alguma outra equipe sobre as conjecturas que eles criaram na questão 3. Vocês chegaram à mesma conclusão? Se não, qual das conjecturas está correta? Após discutir com a outra equipe, complete a frase:

"Uma equação diofantina $ax + by = c$, em que a $\neq 0$ ou b $\neq 0$, admite solução no conjunto dos inteiros se

____."

<u>PARTE 3</u>

6 – Nas equações do exercício 2 você já deve ter percebido que, quando uma equação diofantina tem solução, existe mais de um par ordenado (x_0, y_0) que é solução dessa equação. Na verdade, cada uma das equações admite infinitas soluções. No item a), por exemplo, algumas das soluções da equação $13x + 4y = 1$ são:

$$x = 1 \; e \; y = -3$$
$$x = 5 \; e \; y = -16$$
$$x = 9 \; e \; y = -29$$
$$x = 13 \; e \; y = -42$$

6.1 – Você consegue estabelecer uma regra geral para expressar TODAS as soluções da equação diofantina $13x + 4y = 1$?

7 – Apresente pelo menos três soluções das equações dos itens c) e d).

c) $10x - 16y = -8$

d) $3x - 2y = 2$

7.1 – Expresse a regra geral para todas as soluções dos itens acima.

PARTE 4

8 – Discuta com outra equipe os resultados encontrados na PARTE 3 da atividade e complete a frase:

"Seja (x_0, y_0) uma solução da equação diofantina $ax + by = c$, onde a $\neq 0$ e b $\neq 0$. Então, essa equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é dado por:

____."

APÊNDICE C

Atividade 3: Resolvendo equações diofantinas

1 – Se existir, determine todas as soluções das equações diofantinas abaixo:

a) $60x + 18y = 67$

b) $6x + 4y = 90$

2 – Uma garota recebeu R$ 50,00 para comprar dois tipos de lanches para um piquenique com suas amigas. Depois de pesquisar, conseguiu o preço de R$ 4,00 por hambúrguer e de R$ 6,00 por mini-pizza. De quantas maneiras ela pode comprar a sua parte do lanche para o piquenique?

3 – Um grupo de pessoas gastou 1000 dólares num hotel. Sabendo-se que apenas alguns dos homens estavam acompanhados pelas esposas e que cada homem gastou 19 dólares e cada mulher gastou 13 dólares, pede-se para determinar quantas mulheres e quantos homens estavam no hotel.

APÊNDICE D

Atividade 4: Diofanto e os conteúdos da Escola Básica

Expressões Algébricas

1 – Leia o texto apresentado no livro didático do sétimo ano do Ensino Fundamental (SOUZA; PATARO, 2012) acerca do conteúdo de “Expressões Algébricas”.

2 – Por que precisamos estudar expressões algébricas? Com qual conceito está relacionado?

3 – Houve alguma influência de Diofanto com relação a este conteúdo? Se sim, qual?

4 – Qual a opinião da equipe sobre a forma como o conteúdo foi introduzido? As contextualizações apresentadas têm relação com o conteúdo que segue?

5 – A definição e a apresentação do conteúdo na página 160 levam a uma compreensão do conceito de expressões algébricas? Justifique.

6 – Com relação aos exercícios propostos, eles estão num nível de dificuldade adequado? Justifique.

7 – Escolha pelo menos dois exercícios e destaque seus pontos positivos e negativos.

8 – Converse com os colegas e apresente alguma sugestão para introduzir o conteúdo ou alguma modificação com relação à lista de exercícios.

Função do primeiro grau

1 – Por que precisamos estudar função do primeiro grau?

2 – Houve alguma influência de Diofanto com relação a este conteúdo? Se sim, qual?

3 – As funções de primeiro grau são equações diofantinas? Justifique!

4 – A função do primeiro grau $y = 7 - 3x$ representa uma equação diofantina. Apresente graficamente algumas de suas soluções.

Equação Linear

1 – Leia o texto apresentado no livro didático do segundo ano do Ensino Médio (PAIVA, 2013) acerca do conteúdo de “Equação Linear”.

2 – Por que precisamos estudar Equação Linear? Com qual conceito está relacionado?

3 – Houve alguma influência de Diofanto com relação a este conteúdo? Se sim, qual?

4 – Qual a opinião da equipe sobre a forma como o conteúdo foi introduzido? As contextualizações apresentadas têm relação com o conteúdo que segue?

5 – A definição e a apresentação do conteúdo nas páginas 110 e 111 levam a uma compreensão do conceito de Equação Linear?

6 – Com relação aos exercícios propostos, eles estão num nível de dificuldade adequado? Justifique.

7 – Analise os exercícios, discuta e apresente pontos positivos e negativos.

APÊNDICE E

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa, inserida no Trabalho de Pós-Graduação intitulado temporariamente como “Equações Diofantinas: do conhecimento axiomático à sala de aula da escola básica” da acadêmica Débora Eloísa Nass Kieckhoefel, respondendo a atividade que será proposta com o objetivo de abordar o conteúdo de equações diofantinas, presente na disciplina de Introdução à Teoria dos Números, e relacionar este conteúdo com aquele visto no contexto da sala de aula do ensino básico. A sua identidade será preservada, pois cada indivíduo será identificado por um número. Por meio da realização desta pesquisa buscamos dados que possam substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando o desenvolvimento desta pesquisa serão as professoras Dra. Ivanete Zuchi Siple e Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

Você poderá se retirar do estudo a qualquer momento.

Solicitamos a sua autorização para o uso das respostas das atividades realizadas para a produção do trabalho final de pós-graduação, de relatórios, de artigos técnicos e científicos. A sua privacidade será mantida por meio da não identificação do seu nome.

Agradecemos a sua participação e colaboração.
PESSOA PARA CONTATO:
Profa. Dra Ivanete Zuchi Siple
NÚMERO DO TELEFONE: 3481-7836
ENDEREÇO: Centro de Ciências Tecnológicas - CCT / Rua Paulo Malschitzki, 200 - Campus Universitário Prof. Avelino Marcante - Bairro Zona Industrial Norte - Joinville - SC - Brasil - CEP: 89.219-710

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso	Assinatura	Data
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		

16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		
31		
32		
33		