UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

ELVIS MAIKON REGES SOUSA

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO JOGO MATEMÁTICO

MOSSORÓ
2019

ELVIS MAIKON REGES SOUSA

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO JOGO MATEMÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira

MOSSORÓ

2019

S725e Sousa, Elvis Maikon Reges.
Equações diofantinas lineares: uma abordagem para o Ensino Médio utilizando jogo matemático / Elvis Maikon Reges Sousa. - 2019.
80 f. : il.

Orientador: Fabricio de Figueredo Oliveira.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2019.

1. Equações diofantinas lineares. 2. Ensino . 3. Jogo no ensino de Matemática. I. Oliveira, Fabricio de Figueredo, orient. II. Título.

ELVIS MAIKON REGES SOUSA

EQUAÇOES DIOFANTINAS LINEARES: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO UTILIZANDO JOGO MATEMÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Defendida em: 26 / 09 / 2019

BANCA EXAMINADORA

Fabricio de Figueredo Oliveira

Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira – UFERSA

Presidente

Prof. Dr. Antônio Ronaldo Gomes Garcia – UFERSA

Membro Examinador

Vanderley de Oliveira Pereira

Prof. Dr. Wanderley de Oliveira Pereira – UECE

Membro Examinador

À minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me proporcionar a vida e todos os elementos e circunstâncias essenciais para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

À minha família, pelo apoio incondicional nesta etapa da minha vida.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Fabricio de Figueredo Oliveira, pela dedicação, paciência e comprometimento na construção da presente dissertação.

À Prof. Maria Marcleide Maia Chaves, diretora da escola em que trabalho, e ao Prof. José Élber Coelho Santiago, pelo apoio e incentivo para que eu prosseguisse com a minha carreira de educador.

Aos professores e funcionários da UFERSA, associados ao PROFMAT, pela assistência e pelos conhecimentos compartilhados.

Aos colegas da turma PROFMAT 2017 pelo companheirismo demonstrado ao longo desses dois anos de curso.

Aos colegas de curso e companheiros de viagem, Petrick Oliveira, Eclésio Martins, Bruno Reuber e Ravênia Vieira, pelo apoio e experiências vivenciadas.

À Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC) pela concessão do afastamento de minhas atividades profissionais, tão fundamental para a conclusão do curso de mestrado.

A todos os colegas de trabalho que fazem a EEM Francisco Moreira Filho.

A todos os alunos envolvidos na aplicação do meu projeto em sala de aula.

Aos membros da banca Prof. Dr. Antônio Ronaldo Gomes Garcia e Prof. Dr. Wanderley de Oliveira Pereira pelas contribuições oferecidas.

RESUMO

Este trabalho apresenta-se como uma proposta de inserção do conteúdo equações diofantinas lineares no Ensino Médio. Tamanha idealização se justifica pelo fato desse tema modelar diversas situações-problema do cotidiano do aluno, favorecendo o desenvolvimento do seu raciocínio lógico e oferecendo-lhe suporte e motivação para compreender melhor outros assuntos associados, como os sistemas lineares. Observa-se o referido conteúdo, quase que com exclusividade, ser ministrado no Ensino Superior, normalmente na disciplina de Teoria dos Números. Sabe-se, no entanto, que os conceitos que estruturam essa temática pertencem também ao Ensino Fundamental e são, portanto, de total acesso aos alunos do Ensino Médio. O procedimento de aplicação do tema foi planejado de modo a não coincidir com o modelo ao qual o assunto é visto na graduação, o que seria um despropósito. Também foge da maneira com as quais são abordadas as aulas no método tradicional de ensino e que os estudantes envolvidos já estão acostumados. Toda a prática foi desenvolvida a partir de dois momentos com os alunos da Escola de Ensino Médio Francisco Moreira Filho, do município de Tabuleiro do Norte – CE. O primeiro momento, a título de ensaio, reuniu alunos de diversas turmas da escola. O segundo, por sua vez, ocorreu em uma mesma turma de 3ª série. Nessa oportunidade, as atividades transcorreram em dois dias letivos. No primeiro dia, foi entregue aos alunos uma lista de atividades de conhecimentos prévios sobre o conteúdo matemático que seria abordado. Em seguida, passou-se a realização própria do jogo, com a leitura e discussão das regras, a disputa entre duplas e por fim a apuração dos pontos do jogo, elegendo-se a equipe campeã. O segundo dia iniciou-se com uma nova lista, agora abordando assuntos pertinentes ao jogo e ao ensino da Matemática. Por fim, foram trabalhados os tópicos matemáticos relacionados à atividade lúdica, culminando o processo com a apresentação das equações diofantinas lineares e seu método de resolução. Nesta etapa da aula pôde-se verificar nos alunos a compreensão de conceitos como divisibilidade e máximo divisor comum, resultando na aprendizagem da resolução das referidas equações. A análise dessa aula revelou ainda o jogo como importante instrumento de ligação entre o interesse dos alunos e o conhecimento proposto. Desse modo, nota-se a real viabilidade da aplicação do conteúdo equações diofantinas lineares a estudantes do Ensino Médio, tomando-se apenas o cuidado de se evitar o rigor matemático e o excesso de formalismos.

Palavras-chave: Equações diofantinas Lineares. Ensino. Jogo no ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work presents the proposal of inserting the content of linear diophantine equations in high school. Such idealization is justified by the fact that this theme shapes several problematic situations in the student's daily life, favoring the development of their logical reasoning and providing them with support and motivation to better understand other associated issues, such as linear systems. This content is observed, almost exclusively, to be taught in higher education, usually in the discipline of number theory. It is known, however, that the concepts that structure these themes also belong to elementary school and are therefore of full access to high school students. The application procedure of the themes was designed so as not to coincide with the model in which the content is seen in the undergraduate course, which would be disproportionate. It also shuns the way teaching is approached in the traditional method to which the students involved are already accustomed. The whole practice was developed from two moments with high school students Francisco Moreira Filho, in the city of Tabuleiro do Norte - CE. The first moment, as an essay, brought together students from various classes of the school. The second, in turn, occurred in the same class as the 3rd grade. At this time, the activities took place in two days. On the first day, students received a list of prior knowledge activities on the mathematical content that would be addressed. Then, the game itself was held, with the reading and discussion of the rules, the dispute between pairs and finally the scoring of the points of the game, and the winning team was elected. On the second day, a new list, now addressing issues regarding gaming and math education. Finally, the mathematical topics related to the playful were worked, culminating the process with the predefined linear Diophantine equations and their resolution method. At this stage of the class it was possible to verify in the students the comprehension of concepts such as divisibility and common divisor maximum, resulting in learning and solving the referred equations. The analysis of this class also revealed the game as an important instrument of connection between the student's interest and the proposed knowledge. Thus, the real feasibility of applying the content of linear diophantine equations to high school students is noted, taking care to avoid mathematical rigor and excessive formalism.

Keywords: Linear diophantine equations. Teaching. Math teaching game.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diofanto de Alexandria 31
Figura 2 – Fachada da E.E.M. Francisco Moreira Filho 39
Figura 3 – Alunos resolvendo a Atividade de conhecimentos prévios 41
Figura 4 – Ranking de pontos 42
Figura 5 – Aplicação do jogo "Preenchendo Quadradinhos" 44
Figura 6 – Aplicação do jogo "Preenchendo Quadradinhos" 44
Figura 7 – Exposição dos conteúdos relativos ao jogo 46
Figura 8 – Malha quadriculada 68
Figura 9 – Peças do jogo 69
Figura 10 – Exemplo de revestimento 69
Figura 11 – Exemplo de repetição de revestimento 70

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Gosto pela Matemática 52
Gráfico 2 – Facilidades ou dificuldades em aprender Matemática 53
Gráfico 3 – Gosto pelo jogo "Preenchendo Quadradinhos" 54
Gráfico 4 – Opinião do alunos sobre a compreensão das regras do jogo 56
Gráfico 5 – Facilidades ou dificuldades ao jogar 57
Gráfico 6 – Relação entre o jogo e a atividade de conhecimentos prévios 59

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

m.d.c.	Máximo Divisor Comum
PROFMAT	Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional
IDH	Índice de Desenvolvimento Humano
EEEP	Escola Estadual de Educação Profissional
IFCE	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
EEMTI	Escola de Ensino Médio em Tempo Integral
EJA	Educação de Jovens e Adultos
LEI	Laboratório Escolar de Informática
LEC	Laboratório Escolar de Ciências
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
RPM	Revista do Professor de Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11
2 REFERENCIAL TEÓRICO 14
2.1 A importância dos jogos no ensino da matemática 14
2.2 Equações diofantinas no Ensino Médio? 17
3 ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DOS NÚMEROS 20
3.1 Divisibilidade 20
3.2 Máximo divisor comum 23
3.3 Equações diofantinas lineares 30
4 PERCURSO METODOLÓGICO 38
4.1 O ambiente da ação 38
4.2 A prática em sala de aula 40
4.3 Roteiro de aplicação do jogo matemático 47
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS 49
5.1 Análise da atividade de conhecimentos prévios 49
5.2 Análise do questionário 51
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 62
REFERÊNCIAS 64
APÊNDICE A – ATIVIDADE DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS 67
APÊNDICE B – MALHA QUADRICULADA 68
APÊNDICE C – REGRAS DO JOGO “PREENCHENDO QUADRADINHOS” 69
APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO 71
APÊNDICE E – RESPOSTAS DE ALGUNS ALUNOS 73

1 INTRODUÇÃO

A vivência do professor em sala de aula é normalmente marcada por inúmeros percalços referentes às dificuldades dos alunos em assimilar certos conteúdos. Em nossa caminhada de alguns anos na educação básica não foi diferente, principalmente em se tratando da disciplina de Matemática, objeto de aversão para a maioria dos estudantes. Em especial, um assunto se destacou nessa jornada: Sistemas Lineares. Verificamos nas turmas em que o mesmo foi trabalhado, resultados insatisfatórios ao comparar-se a outros tópicos até mesmo dentro do âmbito da própria Álgebra. Sobre este importante campo da Matemática, percebe-se, para os docentes, os obstáculos surgirem a partir das séries finais do Ensino Fundamental, quando verificam as dificuldades dos educandos em resolver equações relativamente simples ou em interpretar e expressar algebricamente situações-problema (RIOS, 2013).

Ao escolher um tema para desenvolver nosso trabalho de conclusão de curso, veio-nos em mente a oportunidade de encarar essa problemática encontrada em sala de aula. Gostaríamos também de promover nos alunos algo que facilitasse e motivasse a aprendizagem do conteúdo em questão, mas de maneira diferenciada, não estritamente associada a números e operações.

Como proposta, ao que acabamos de mencionar, descreveremos no decorrer do texto um método que proporcione a inserção das equações diofantinas lineares no Ensino Médio. Além de ser um conteúdo que muito nos despertou a atenção durante nosso curso de graduação, essa temática revela sua importância, segundo Oliveira (2006), por constituir uma ferramenta que facilita a resolução de situações-problema acessíveis à compreensão do estudante.

Entendemos das ideias elaboradas por esse autor que a resolução de problemas vinculada ao cotidiano dos alunos, facilita a sua compreensão por se tratar de algo do qual eles veem utilidade. Além disso, acrescentamos que o fato das equações diofantinas lineares se definirem através dos números inteiros se apresenta como outro fator positivo, pois são esses números com os quais os educandos estão mais familiarizados.

Abordar esse assunto de maneira diferenciada nos exigiria programar metodologias que fugissem do tradicionalismo ao qual os estudantes estão acostumados. Essa sistemática de ensino não surtiria o efeito desejado: a aprendizagem significativa. Foi, através de inúmeras pesquisas, no decorrer do planejamento desta dissertação, que optamos pelo uso do jogo matemático como uma possível ferramenta para atingir nosso objetivo. Vemos nesse instrumento pedagógico um forte potencial para estimular o interesse dos alunos pelo conteúdo envolvido, facilitando-lhes a aprendizagem dos sistemas lineares e promovendo-lhes ainda o desenvolvimento de seu raciocínio lógico.

Levando-se em consideração o que acaba de ser exposto, iniciamos o primeiro capítulo do presente trabalho a partir de um levantamento bibliográfico. Nele apresentaremos alguns teóricos que consideram a viabilidade do uso dos jogos em sala de aula. Conforme veremos, os jogos funcionam como facilitadores do processo ensino/aprendizagem. Em seguida, destacando as equações diofantinas, explicaremos da possibilidade de sua inserção no currículo do Ensino Médio complementando o conteúdo Sistemas Lineares, normalmente abordado na 2ª série desse nível de escolaridade.

No segundo capítulo faremos um estudo dos tópicos matemáticos que embasarão o desenvolvimento de todo o trabalho. Partiremos do conceito de divisibilidade, englobando os seus principais resultados. Ressaltaremos neste momento uma importante ferramenta para nossos estudos, o Algoritmo da Divisão, proposto por Euclides. Logo após, veremos o conceito de máximo divisor comum, onde anunciaremos e demonstraremos as propriedades que lhe são decorrentes. É a partir daí que obteremos os subsídios para o estudo das equações diofantinas lineares. Ainda nesta seção do capítulo, faremos um breve relato histórico do tema, apresentando Diofanto de Alexandria, com suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. Por fim, exporemos as fórmulas de resolução destas equações, e trabalharemos sua aplicação com alguns exemplos.

Descreveremos, no capítulo seguinte, o processo de aplicação do jogo matemático e da teoria em sala de aula. Iniciaremos mostrando uma simples descrição da escola na qual desenvolvemos essa prática. Abordaremos aspectos históricos e gerais tanto dela quanto do município em que a mesma está localizada, bem como das estruturas físicas que o colégio disponibiliza aos alunos. Depois, detalharemos o andamento da aula, que como veremos, foi realizada em dois momentos distintos, utilizando o jogo “Preenchendo Quadradinhos” e culminando com a exposição dos conceitos matemáticos relativos às equações diofantinas lineares. Finalizaremos o capítulo apresentado o plano de aula que norteou a aplicação do referido jogo.

Mostraremos, no quarto capítulo, a análise de duas atividades realizadas durante os encontros que mencionamos acima. Na primeira delas, discorreremos sobre as respostas dadas pelos alunos a questões conceituais e de cálculos sobre divisibilidade e máximo divisor comum. Na outra atividade, examinaremos o que relataram 19 alunos sobre dez itens envolvendo assuntos pertinentes tanto a realização do jogo, como ao ensino da matemática de um modo geral. Com o intuito de facilitar a visualização do que foi respondido, colhemos todas as respostas e elaboramos representações gráficas de algumas delas, partilhando as informações de modo mais acessível e dinâmico. Selecionamos ainda vários depoimentos dos entrevistados, enfatizando e resumindo o que eles realmente assimilaram do encontro e também como pensamento da turma a respeito do que lhe foi indagado.

Em fim, ao seguir os procedimentos aqui mencionados e levando-se em consideração os depoimentos prestados pelos alunos bem como a própria condução da aula, vislumbramos a possibilidade de as equações diofantinas lineares serem abordadas no Ensino Médio. Enxergamos esse tema como um complemento ao estudo dos Sistemas Lineares, por facilitar na compreensão deste difícil assunto para o público envolvido.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresentamos os fundamentos que embasam nossas pesquisas e desenvolvimentos teóricos e práticos. Incluímos aqui, as principais ideias elaboradas por experientes autores que são referência quando o assunto é jogo pedagógico e equações diofantinas voltadas para o Ensino Médio.

2.1 A importância dos jogos no ensino da matemática

O método tradicional de ensino é ainda o mais difundido atualmente. Nesse modelo de docência, o aluno é considerado um ser vazio de conhecimentos e se porta ante um professor que não o desafia, se restringindo apenas ao que lhe transmite. A esse respeito,

> No ensino tradicional da matemática, é possível observar que o processo de ensino apenas o professor transmite e os alunos recebem e realizam de forma repetitiva e mecanizada os exercícios, acarretando, por parte do aluno, memorizações de como estes exercícios foram desenvolvidos (cabendo ao aluno a responsabilidade em aprender) e que após repetir inúmeras vezes consegue memorizar e dar resultados, mas não funciona com todos, pois as características individuais são determinadas por fatores externos ao indivíduo (VITAL, 2011).

Vale acrescentar também que segundo o autor, no método tradicional, é a repetição sistemática dos exercícios de fixação que garantem a aprendizagem. Em sua maioria, o que é pior, estes exercícios nenhuma relação tem como o cotidiano do aluno. Além disso, fatores como o esforço próprio e a disciplina do discente são os preponderantes para a aquisição do conhecimento. O questionamento, a troca de informações, a interação com os colegas são, por outro lado, interpretadas como conversas paralelas e, portanto desrespeitosas. O que vemos, no entanto, é o estabelecimento de uma nova geração de estudantes cada dia mais dinâmica e conectada, requisitando, assim, meios mais lúdicos de aprendizado.

Com efeito, torna-se necessária a busca por estratégias que sejam, realmente, eficazes. Uma delas é a utilização de jogos matemáticos. Entretanto, apenas levar para a sala de aula um passatempo qualquer, destituído de significado, pode resultar em efeito oposto ao esperado, promovendo, no mínimo, uma perda no tempo pedagógico do aluno. Percebemos, de fato, que o conceito de jogo como viés educativo não está perfeitamente compreendido por todos. É o que afirmam Fiorentini e Miorim (1990, p.01):

> O professor nem sempre tem clareza das razões fundamentais pelas quais os materiais ou jogos são importantes para o ensino-aprendizagem da matemática e, normalmente, não questiona se estes realmente são necessários, e em que momentos devem ser usados. Geralmente costuma-se justificar a importância desses elementos apenas pelo seu caráter “motivador” ou pelo fato de se ter “ouvido falar” que o ensino da matemática tem de partir do concreto ou, ainda, porque através deles as aulas ficam mais alegres e os alunos passam a gostar da matemática [...].

De fato, a definição de jogo é bem ampla, tendo em vista suas variadas acepções. Em seu trabalho “A utilização do jogo como recurso de motivação e aprendizagem” Pereira (2013, p.15) explica que “utilizamos a palavra Jogo como um estímulo ao crescimento, como um recurso em direção ao desenvolvimento cognitivo e aos desafios do viver e não como uma competição entre pessoas ou grupos que implica uma vitória ou derrota”. A autora ainda menciona a confusão normalmente feita ao tentar diferenciar o jogo e a brincadeira. Ela justifica esse impasse explicando que ambas são ações lúdicas, apesar de brincar ser uma atividade espontânea e o jogo ser caracterizado pelo cumprimento de regras.

Wagner Marcelo Pommer, por sua vez, afirma que “a palavra jogo é utilizada na literatura para definir diferentes atividades e contextos com diversos objetivos, tendo basicamente finalidade de distrair ou ensinar, propiciando progresso cultural e criando condições para um melhor conhecimento da vida” (POMMER, 2008, p.42).

As experiências relatadas sobre a aplicação adequada de jogos em sala de aula evidenciam resultados otimistas, pois

> Os jogos e as brincadeiras são atividades lúdicas que estão presentes em toda atividade humana. Por meio dessas atividades, o indivíduo se socializa, elabora conceitos, formula ideias, estabelece relações lógicas e integra percepções. Essas atividades fazem parte da construção do sujeito (KIYA, 2014, p.10).

De modo semelhante, “os jogos quando bem aplicados, oportunizam a construção de conhecimentos necessários à vida dos alunos, pois exigem a busca de estratégias, o raciocínio lógico, a tomada de decisões e a criatividade” (DESSBESEL, 2013, p.04). Essa boa aplicação a qual a autora se refere está fundamentada em um planejamento bem estruturado e pode ser desenvolvido conforme os seguintes passos:

> 1 - A escolha do jogo que é apropriado para aquele conteúdo;
> 2 - Apresentação do jogo aos alunos;
> 3 - Apresentar as regras e o objetivo do jogo;
> 4 - A organização da sala de aula;
> 5 - O tempo de jogar (tempo de aprendizagem e tempo de aula);
> 6 - Exploração do jogo (conversar com os alunos sobre o jogo, e pedir a eles que produzam um registro expondo suas dúvidas, suas opiniões e manifestando sua aprendizagem com o jogo).

> 7 - Problematizar o jogo, ou seja, enquanto os alunos jogam o professor pode pedir para explicar uma jogada, ou porque tomaram uma decisão e não a outra, e até mesmo perguntar se não há uma jogada que dificulte a próxima ação. Vale a pena também o professor se colocar como jogador em algumas ocasiões para se interagir mais dentro do grupo, observar como os alunos pensam, discutir as jogadas com eles dentro do grupo.
> 8 - O professor deve fazer intervenções para relacionar o jogo com o conteúdo estudado;
> 9 - Avaliação da aula (O que vocês aprenderam na aula? O jogo facilitou no entendimento do conteúdo? Como? O que vocês mudariam na aula de hoje? O que não mudariam? O que você espera da próxima aula?) (SMOLE, DINIZ e MILANI, 2007, apud SILVA, 2015, p. 23).

Conforme o esquema elaborado por Smole, Diniz e Milani (2007), além do planejamento, outro critério fundamental para o sucesso de um jogo pedagógico está na intervenção por parte do professor. Este deve atuar como facilitador no processo de construção do conhecimento. Devemos lembrar que o jogo está normalmente vinculado a um conteúdo a ser abordado. O professor pode aplicá-lo ao iniciar o conteúdo como forma de despertar o interesse do aluno ou mesmo ao final, levando o aprendiz a correlacioná-lo com o que foi apresentado nas aulas.

Para que um desses métodos seja utilizado produtivamente

> Cabe ao professor organizar a aprendizagem, disponibilizando as condições adequadas para que o trabalho transcorra de forma satisfatória, propondo atividades que tornem o jogo um recurso valioso para o ensino da matemática, fazendo com que os alunos percebam a importância da interação com os materiais didáticos, com o professor e com os colegas, oportunizando assim momentos de efetiva aprendizagem (SELVA, 2009, p.06).

A intervenção equilibrada por parte do professor se mostra fundamental para que a aprendizagem aconteça, possibilitando ao jogo cumprir seu objetivo como ferramenta pedagógica. Nesse contexto, a autora cita as atividades propostas como valiosos recursos para o ensino da matemática. Essas atividades segundo Grando (2000) podem ser formalizadas na resolução de problemas, pois o jogo proporciona o desenvolvimento de estratégias para solução dos mesmos, além de possibilitar ao aluno vivenciar a estrutura matemática subjacente ao jogo, quando ele elabora estratégias e testa-as a fim de vencer o jogo. A resolução de problemas ainda sob essa perspectiva fornecerá ao professor mais instrumentos que favoreçam avaliar o rendimento dos alunos.

Se por outro lado essa mediação não ocorre, é possível que os alunos não percebam a relação do jogo com o conteúdo proposto, e o pior: corre o risco ainda de eles jogarem sem saber o porquê do jogo, vendo-o sob o ponto de vista de simples divertimento. Vale ainda considerar “que esses recursos não garantem que o aluno possa apreender os saberes necessários à sua formação plena. Com isso, é indiscutivelmente necessária a intervenção do docente no processo de construção do conhecimento” (PEREIRA, 2013, p.36).

2.2 Equações diofantinas no Ensino Médio?

Equações diofantinas lineares, normalmente, constitui um dos tópicos da disciplina de Teoria dos Números nos cursos de graduação em Matemática. É um conteúdo praticamente exclusivo do Ensino Superior, visto que em nossas pesquisas nos principais livros de Matemática do Ensino Médio, não identificamos nenhuma formalização do assunto. Um dos objetivos deste trabalho, portanto, é mostrar a possibilidade da inserção do tema em questão nesse nível de escolaridade visando a motivação dos alunos bem como a melhoria na aprendizagem do conteúdo de Sistemas Lineares.

É bem perceptível que o estudo desse tema está em perfeito acordo com o que é proposto atualmente pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), pois a mesma afirma que

> É possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade (BRASIL, 2018, p.529).

Entendemos, assim, que na modelagem de situações-problema através das equações diofantinas lineares ocorre a utilização dessa ferramenta como forma de representar fenômenos conhecidos pelo aluno, lhe favorecendo a compreensão dos mesmos.

Ainda na análise desse importante documento, verificamos que a resolução de equações desse tipo está prevista na Competência Específica 3, a qual resumimos aqui como o uso de estratégia e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos. Isto se confirma na habilidade EM13MAT301 para essa competência quando lemos: “resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2017, p.536). Logo, não nos restam mais dúvidas do quanto a temática que abordamos caminha em perfeita sintonia ao que regulamenta esse novo modelo para a educação brasileira.

Como veremos mais adiante, equação diofantina linear é toda equação da forma $ax + by = c$, em que a, b e c são números inteiros e cujas soluções são os pares (x, y) também inteiros. Por se tratar de uma equação linear podemos perceber sua associação com a introdução do capítulo de sistemas lineares abordados, em sua maioria, nos livros de 2ª série do Ensino Médio. Um exemplo pode ser visto no seguinte problema extraído de Iezzi *et al* (2016, p. 99): “Cíntia tem de pagar uma compra no valor de R$ 35,00 e só dispõe de moedas de R$ 1,00 e de notas de R$ 5,00. De quantos modos distintos poderá fazer o pagamento?”.

Trata-se, como podemos perceber, de uma situação que pode ser resolvida através de uma equação diofantina linear, pois a resposta que a satisfaz é dada por números inteiros. Em parte qualquer da explanação do livro, entretanto, se faz menção deste conceito ou de sua possibilidade de aplicação. “Na escola básica, alguns temas de teoria elementar dos números, por uma falta de compreensão mais ampla, vão sendo esvaziados nos currículos, por não ter uma aplicação imediata” (RESENDE, 2007, p.73). Essa afirmativa, no entanto, não se aplica às equações diofantinas devido as suas amplas possibilidades de contextualização.

A inclusão desta temática no currículo do Ensino Médio é relevante

> Pelo fato de sua resolução envolver conhecimentos usuais do programa oficial de Ensino Básico, como o conceito de múltiplo, divisor e o máximo divisor comum entre dois números inteiros. Ainda, a busca das soluções inteiras de situações-problema contextualizadas que representam equações diofantinas lineares possibilita uma oportunidade de exploração de um tópico da Matemática Discreta (POMMER, 2008, p.33).

Ainda de acordo com o autor, nesse nível de escolaridade, predomina a Matemática do contínuo. Particularmente, vemos uma maior dificuldade nos alunos em assimilar este campo do conhecimento. Isto se evidencia, por exemplo, nas aulas em que ministramos sobre intervalos reais, onde percebemos certa resistência por parte dos estudantes em reconhecer números que não sejam inteiros pertencentes àqueles conjuntos.

Tal colocação corrobora com a inserção da Matemática Discreta em sala de aula por apresentar um dimensionamento mais tangível ao educando. É o que afirma novamente Pommer (2008, p.34):

> Assim, acredito que a proposição de atividades envolvendo equações diofantinas lineares possibilita aos alunos a percepção e distinção da variável quando assume um valor discreto na busca de soluções inteiras. [...] destaco a possibilidade de desenvolvimento de situações-problema envolvendo o uso de múltiplos, divisores e o máximo divisor de dois números inteiros, permitindo que se formulem questões de fácil compreensão aos estudantes do Ensino Básico e passíveis de desenvolver habilidades tais como observar, conjecturar e generalizar.

Outra característica notável com relação ao livro didático do Ensino Médio citado anteriormente, bem como os demais pesquisados, é que estimulam a prática de resolução desse tipo de questão através do método de tentativa e erro. Outros métodos de resolução, contudo, não foram mencionados.

Em sua igual pesquisa com duas coleções dedicadas ao Ensino Médio, Oliveira (2006) explica que a resolução dos problemas que elas apresentavam se resumiam no emprego de tabelas. Nelas, os valores de x eram colocados de forma crescente para em seguida se obter valores naturais para y. Em outros casos, era utilizado o método da tentava e erro, como já mencionamos em nossa pesquisa.

Ainda em sua dissertação de mestrado, Oliveira (2006) discorre sobre a importância de assuntos da Teoria Elementar dos Números para a construção do raciocínio matemático. Citando Ferrari (2002), ele acrescenta:

> Há duas razões para trabalhar com esses assuntos, primeira razão: o trabalho com Teoria Elementar dos Números não requer amplo conhecimento teórico, pois o assunto depende de ideias e métodos normalmente aprendidos no Ensino Básico. Além disso, a quantidade relativamente pequena de pré-requisitos conceituais em Teoria dos Números fornece boas oportunidades para realmente entender os significados envolvidos por meio de vários processos tais como: indução, dedução, tentativa e erro, verificação numérica de resultados, entre outros. (OLIVEIRA, 2006, p. 19)

Enfim, diante do que foi exposto, percebemos a real possibilidade de inclusão das equações diofantinas lineares de forma proveitosa para os alunos do Ensino Médio. No processo de construção deste trabalho, por exemplo, fizemos essa inserção através de um jogo pedagógico onde, em seguida, exploramos os seus conceitos matemáticos pertinentes. De modo também semelhante poderíamos abordar a resolução de problemas contextualizados, em que é possível envolver os alunos com o campo dos números inteiros, aos quais eles estão mais familiarizados. De qualquer modo, ambos, jogos ou problemas, são ferramentas, que segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) podem oferecer ao educando os meios de resolução das questões práticas do cotidiano, propiciando-lhe o desenvolvimento de seu raciocínio lógico.

3 ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DOS NÚMEROS

Desenvolveremos neste capítulo os pré-requisitos para o bom andamento de todo o trabalho. Nesse processo, utilizamos as ideias de Alencar Filho (1981), Hefez (2013), Muniz Neto (2013) e Santos (2018).

Supondo o leitor com a posse de conhecimentos prévios sobre o conjunto dos números inteiros, abordaremos conceitos como divisibilidade e também suas propriedades. Daremos continuidade com a demonstração do importante Algoritmo da Divisão bem como dos principais resultados que envolvem o máximo divisor comum entre dois inteiros. Por fim, trataremos da equação diofantina linear, definindo-a, apresentando suas fórmulas de resolução e desenvolvendo alguns exemplos.

3.1 Divisibilidade

Divisibilidade é um conceito bastante útil em todos os níveis de conhecimento. Iniciemos nossa discussão apresentando a sua definição.

Definição 3.1.1 Sejam a e b dois números inteiros, com $a \neq 0$. Dizemos que a divide b e indicamos por $a|b$, se existir um inteiro k tal que $b = ak$. Por outro lado, se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.

Ainda sobre a definição, se a divide b, também dizemos que a é um divisor de b, que a é um fator de b, que b é divisível por a ou que b é um múltiplo de a.

Vejamos a seguir dois exemplos que decorrem do emprego imediato da Definição 3.1.1.

Exemplo 3.1.1 Dados os inteiros 4 e -12, temos que $4|-12$ pois $-12 = 4 \cdot (-3)$. No entanto, $-12 \nmid 4$, pois não existe um inteiro k tal que $4 = -12k$.

Exemplo 3.1.2 Considerando o inteiro a não nulo, temos que $a|0$, $1|a$ e $a|a$ pois existem os respectivos inteiros 0, a e 1, tais que $0 = a \cdot 0$, $a = 1 \cdot a$ e $a = a \cdot 1$.

A divisibilidade no conjunto dos números inteiros possui as seguintes propriedades:

Proposição 3.1.1 Sejam os inteiros a, b e c. Se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração: Com efeito, se $a|b$ e $b|c$ então existem os inteiros k e q tais que $b = ak$ e $c = bq$. Substituindo o valor de b em $c = bq$ obtemos $c = a(kq)$ e, portanto, concluímos que $a|c$. ■

Exemplo 3.1.3 Como $7|21$ e $21|42$, então $7|42$.

Proposição 3.1.2 Dados os inteiros a, b e c, se $a|b$ e $c|d$, então $ac|bd$.

Demonstração: O fato de $a|b$ e $c|d$ implica em $b = ak$ e $d = cq$, com k e q inteiros. Multiplicando-se, ordenadamente, estas igualdades, temos que $bd = (ac)(kq)$. Logo, $ac|bd$. ■

Exemplo 3.1.4 Como $3|15$ e $4|20$, então $12|300$.

A proposição a seguir nos informa que se dado inteiro é divisor de outros dois inteiros, então continua sendo divisor de qualquer combinação linear formada por esses dois outros inteiros. Ela será de grande utilidade para desenvolvimentos futuros.

Proposição 3.1.3 Sejam os inteiros a, b e c. Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$, para todos os inteiros x e y.

Demonstração: De fato, se $a|b$ e $a|c$, então existem os inteiros k e q tais que $b = ak$ e $c = aq$. Assim, $bx + cy = akx + aqy = a(kx + qy)$. Portanto, $a|(bx + cy)$. ■

Exemplo 3.1.5 Como $3|6$ e $3|9$, então $3|(5 \cdot 6 + 7 \cdot 9)$, isto é, $3|93$.

Proposição 3.1.4 Dados os inteiros a e b, com $b \neq 0$ temos que se $a|b$ então $|a| \leq |b|$.

Demonstração: Com efeito, se $a|b$, existe um inteiro k tal que $b = ak$. Em termos de módulo, temos que $|b| = |a||k|$. Como $b \neq 0$, temos que $k \neq 0$, e portanto, $1 \leq |k|$. Multiplicando esta desigualdade por $|a|$, obtemos $|a| \leq |a||k|$. Logo $|a| \leq |a||k| = |b|$. ■

Encerraremos esta seção, destacando o Algoritmo da Divisão, importante teorema atribuído a Euclides e que servirá de apoio aos tópicos seguintes. Para demonstrá-lo, recorreremos ao chamado Axioma de Eudoxius que passamos a enunciar agora:

Axioma 3.1.1 (Axioma de Eudoxius) Dados a e b, inteiros com $b \neq 0$ então a é um múltiplo de b ou está compreendido entre dois múltiplos consecutivos de b. Em símbolos, existe um inteiro q, tal que, para, $b > 0$,

$$bq \leq a < b(q+1)$$

e para $b < 0$,

$$bq \leq a < b(q-1).$$

Teorema 3.1.1 (Algoritmo da Divisão) Sejam a e b dois inteiros com $b > 0$. Existem e são únicos os inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \qquad \text{com } 0 \leq r < b.$$

Demonstração: De acordo com o Axioma de Eudoxius, para $b > 0$, temos que

$$bq \leq a < b(q+1), \text{ ou seja, } bq \leq a < bq + b.$$

Subtraindo, membro a membro, bq na desigualdade acima, obtemos

$$0 \leq a - bq < b.$$

Com efeito, tomando $r = a - bq$, garantimos a existência de q e r.

Provemos, agora, a unicidade de q e r. Suponhamos que na divisão de a por b, exista outro quociente q' e outro resto r' tais que

$$a = bq' + r', \qquad \text{com } 0 \leq r' < b.$$

Mas, do fato de também $a = bq + r$, segue que

$bq + r = bq' + r'$, o que equivale a $bq - bq' = r' - r$, ou seja, $b(q - q') = r' - r$ e isto implica que $b|r' - r$.

Por outro lado, como $r' < b$ e $r < b$ temos $|r' - r| < b$ e como $b|r' - r$, concluímos que $r' - r = 0$, isto é $r = r'$. Deste resultado, obtemos $bq = bq'$ e como $b \neq 0$, concluímos que $q = q'$. ■

Observe que no teorema acima, consideramos apenas os valores positivos de b. No entanto, o mesmo é válido também para os casos em que b é negativo. Vejamos o Corolário a seguir:

Corolário 3.1.1 Sejam a e b dois inteiros com $b \neq 0$. Existem e são únicos os inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração: De fato, para $b > 0$, segue do Teorema 3.1.1. Agora, supondo $b < 0$, temos que $|b| > 0$, e portanto, existem e são únicos os inteiros q' e r que satisfazem as condições:

$$a = |b|q' + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Como $|b| = -b$, então

$$a = b(-q') + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|.$$

Portanto, existem e são únicos os inteiros $q = -q'$ e r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$. ∎

3.2 Máximo divisor comum

Nesta seção abordaremos outro assunto de muita relevância para o desenvolvimento das equações diofantinas lineares. Desde o Ensino Fundamental, o máximo divisor comum entre dois inteiros positivos é abordado, juntamente com, o mínimo múltiplo comum. O calculo do m.d.c. como encontramos nos principais livros utilizados pelas escolas é feito através da decomposição dos números envolvidos em fatores primos. Neste momento, além de diversas propriedades, trataremos de outro modelo, não mais utilizado nesse nível de escolaridade, mas de fácil compreensão: o método das divisões sucessivas, proposto por Euclides de Alexandria. Iniciemos nossos apontamentos com a definição de máximo divisor comum.

Definição 3.2.1 Dados a e b inteiros, não simultaneamente nulos, chama-se máximo divisor comum (m.d.c.) de a e b, o inteiro positivo d que possui as seguintes propriedades:

(i) $d|a$ e $d|b$;

(ii) se $c|a$ e $c|b$ então $c|d$.

Em outras palavras, dizemos que o m.d.c. entre dois inteiros a e b é o maior inteiro d que divide a e que divide b. A seguir, apresentamos um exemplo ilustrando o cálculo do m.d.c. entre dois números inteiros relativamente pequenos.

Exemplo 3.2.1 Consideremos os inteiros 32 e 40. Ambos têm como divisores positivos comuns 1, 2, 4 e 8, sendo que 8 é o maior deles. Assim, o $\mathrm{m.d.c.}(32, 40) = 8$.

Observemos que o método de resolução para este exemplo é bastante simples. Para números maiores, entretanto, torna-se inviável esse procedimento. Adiante, veremos como resolver casos assim.

O teorema que apresentaremos a seguir será de grande utilidade para a sequência de nossos trabalhos.

Teorema 3.2.1 (Teorema de Bézout) Se $d = \mathrm{m.d.c.}(a, b)$, então existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$.

Demonstração: Consideremos o conjunto B cujos elementos são todas as combinações lineares $ax + by$ em que x e y são números inteiros. Desse conjunto, tomemos o menor elemento inteiro positivo $c = ax_0 + by_0$, com x_0 e y_0 também inteiros. Provemos que $c|a$ e $c|b$. Suponhamos, inicialmente que $c \nmid a$. Neste caso, pelo Teorema 3.1.1, existem inteiros q e r tais que $a = cq + r$ com $0 < r < c$. Logo,

$$r = a - cq = a - (ax_0 + by_0)q = (1 - qx_0)a + (-qy_0)b.$$

Uma vez que $(1 - qx_0)$ e $(-qy_0)$ são inteiros, segue-se que $r \in B$, o que é uma contradição, pois $0 < r < c$ e c é o menor elemento positivo de B. Portanto $c|a$. De modo análogo, provamos que $c|b$.

Como d é um divisor comum de a e b, existem q_1 e q_2 inteiros, de modo que $a = dq_1$ e $b = dq_2$ e, assim,

$$c = ax_0 + by_0 = dq_1x_0 + dq_2y_0 = d(q_1x_0 + q_2y_0)$$

o que implica $d|c$. Mas, pela Proposição 3.1.4, temos que $d \leq c$ e como d é o máximo divisor comum, então $c|d$ e novamente pela Proposição 3.1.4, temos que $c \leq d$. Portanto, concluímos que $d = c = ax_0 + by_0$. ■

Com o resultado que acabamos de demonstrar, concluímos que o máximo divisor comum entre dois inteiros pode ser expresso como uma combinação linear entre ambos. Vejamos o próximo exemplo:

Exemplo 3.2.2 Dados os inteiros 12 e 16, temos que $\mathrm{m.d.c.}(12, 16) = 4 = 12(-1) + 16 \cdot 1$ e isto nos indica a representação do inteiro 4 como combinação linear de 12 e 16, com coeficientes -1 e 1, respectivamente.

Observe que neste exemplo encontrar os inteiros 1 e – 1 representou uma simples tarefa. Mas, e se estivéssemos a fim de expressar o m.d.c. (186, 318), por exemplo, como combinação linear entre 186 e 318? Demandaria uma quantidade enorme de tentativas, não? Para facilitar o cálculo de situações como esta, estudaremos mais adiante, no Teorema 3.2.4, uma maneira prática de obter tais combinações lineares.

Acompanhemos mais uma propriedade a respeito do máximo divisor comum entre dois números inteiros.

Proposição 3.2.1 Para todo inteiro positivo n, $\mathrm{m.d.c.}(\mathrm{na}, \mathrm{nb}) = \mathrm{n} \cdot \mathrm{m.d.c.}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$.

Demonstração: Pelo Teorema de Bézout, temos que $\mathrm{m.d.c.}(\mathrm{na}, \mathrm{nb}) = \mathrm{nax}_0 + \mathrm{nby}_0 = \mathrm{n}(\mathrm{ax}_0 + \mathrm{by}_0) = \mathrm{n} \cdot \mathrm{m.d.c.}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, com x_0 e y_0 inteiros. ■

Exemplo 3.2.3 Notemos que $\mathrm{m.d.c.}(30, 35) = 5 \cdot \mathrm{m.d.c.}(6, 7) = 5 \cdot 1 = 5$.

Estudaremos a partir de agora proposições relativas a um dos subconjuntos mais importantes e intrigantes dos números inteiros. Trata-se do conjunto dos números primos. Entretanto, não nos aprofundaremos no assunto. Abordaremos apenas definições e propriedades necessárias para o bom andamento do trabalho. Comecemos com as definições de número primo e números primos entre si.

Definição 3.2.2 Um inteiro positivo $\mathrm{n} > 1$ é chamado número primo ou apenas primo se 1 e n são os seus únicos divisores positivos. Um número $\mathrm{n} > 1$ que não é primo é dito composto.

Definição 3.2.3 Dados dois inteiros a e b, não simultaneamente nulos, diz-se que a e b são primos entre si se o $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = 1$.

Exemplo 3.2.4 Os inteiros 16 e -25 são primos entre si, pois $\mathrm{m.d.c.}(16, -25) = 1$.

Teorema 3.2.2 Dois inteiros a e b, não simultaneamente nulos, são primos entre si se, e somente se, existem inteiros x e y tais que $ax + by = 1$.

Demonstração: Por definição, se a e b são primos entre si então $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = 1$. Segue do Teorema de Bézout que $ax + by = 1$, com x e y inteiros.

Reciprocamente, sejam x e y inteiros tais que $ax + by = 1$ e seja $d = \mathrm{m.d.c.}(a, b)$. Temos daí que $d|a$ e $d|b$, e pela Proposição 3.1.3, segue que $d|(ax + by)$. Logo, $d|1$, e, portanto, $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = 1$, mostrando que a e b são primos entre si. ∎

Corolário 3.2.1 Se $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = d$, então $\mathrm{m.d.c.}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Demonstração: Como $d|a$ e $d|b$, temos que $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$ são números inteiros. Se $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = d$, então existem inteiros x e y tais que $ax + by = d$. Dividindo ambos os membros desta igualdade por d, obtemos:

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = 1.$$

Logo, pelo Teorema 3.2.2, concluímos que os inteiros $\frac{a}{d}$ e $\frac{b}{d}$, são primos entre si, isto é, $\mathrm{m.d.c.}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$. ∎

Exemplo 3.2.5 Como $\mathrm{m.d.c.}(-45, 36) = 9$, então $\mathrm{m.d.c.}\left(\frac{-45}{9}, \frac{36}{9}\right) = \mathrm{m.d.c.}(-5, 4) = 1$.

Corolário 3.2.2 Sejam a, b e c inteiros não nulos. Temos que

(i) se $a|b$ e se $\mathrm{m.d.c.}(b, c) = 1$, então $\mathrm{m.d.c.}(a, c) = 1$.

(ii) se $a|c$, $b|c$ e se $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = 1$, então $ab|c$.

Demonstração:

(i) Se $a|b$ e se $\text{m.d.c.}(b, c) = 1$, então $b = ak$ e $bx + cy = 1$, para k, x e y inteiros. Substituindo o valor de b na última equação, temos que $a(kx) + cy = 1$ e, portanto, $\text{m.d.c.}(a, c) = 1$.

(ii) Pelo fato de $a|c$ e $b|c$, temos que $c = ak$ e $c = bq$, em que k e q são números inteiros. Por hipótese sabemos que $\text{m.d.c.}(a, b) = 1$, logo $ax + by = 1$, com x e y também inteiros. Multiplicando esta equação por c, obtemos $acx + bcy = c$, e assim, $a(bq)x + b(ak)y = c$, o que é equivalente a $ab(qx + ky) = c$. Portanto, $ab|c$. ■

Exemplo 3.2.6 Considere os inteiros 2, 3 e 12. Como $2|12$, $3|12$ e $\text{m.d.c.}(2, 3) = 1$ então concluímos que $2 \cdot 3|12$.

Corolário 3.2.3 Dados os inteiros a, b e c, então $\text{m.d.c.}(a, bc) = 1$ se, e somente se, $\text{m.d.c.}(a, b) = 1 = \text{m.d.c.}(a, c)$.

Demonstração: Dado que $\text{m.d.c.}(a, bc) = 1$, segue-se que $ax + bcy = 1$, com $x, y \in \mathbb{Z}$. Dessa equação, concluímos que

$$ax + b(cy) = 1 \Rightarrow \text{m.d.c.}(a, b) = 1$$

e

$$ax + c(by) = 1 \Rightarrow \text{m.d.c.}(a, c) = 1.$$

Reciprocamente, se temos que $\text{m.d.c.}(a, b) = 1$ e se $\text{m.d.c.}(a, c) = 1$, então para x, y, t e z inteiros, remos que

$$ax + by = 1$$

e

$$az + ct = 1.$$

Multiplicando, membro a membro, essas duas equações, chegamos em $1 = (ax + by)(at + cz) = ax \cdot at + ax \cdot cz + by \cdot at + by \cdot cz = a(xat + xcz + byt) + bc(yz) = ar + bcs$, ou seja, com os inteiros r e s, temos que $ar + bcs = 1$ e, portanto, $\text{m.d.c.}(a, bc) = 1$. ■

Exemplo 3.2.7 Observemos que $\text{m.d.c.}(15, 2 \cdot 7) = 1$, o mesmo ocorrendo com $\text{m.d.c.}(15, 2) = 1$ e com $\text{m.d.c.}(15, 7) = 1$.

O próximo Teorema se trata de útil ferramenta para a seção adiante quando aprenderemos a obter as raízes de uma equação diofantina linear.

Teorema 3.2.3 Se $a|bc$ e se $m.d.c.(a,b) = 1$, então $a|c$.

Demonstração: Se $a|bc$, então $bc = ak$, com $k \in \mathbb{Z}$ e se $m.d.c.(a,b) = 1$, então pelo Teorema de Bézout, $ax + by = 1$, com x e y inteiros. Multiplicando esta última igualdade por c, temos que

$$acx + bcy = c \Rightarrow acx + aky = c \Rightarrow a(cx + ky) = c.$$

Portanto, concluímos que $a|c$. ∎

Exemplo 3.2.8 Sejam os inteiros 6, 11 e 12. Como $6|11 \cdot 12$ e $m.d.c.(6,11) = 1$ segue que $6|12$, o que é verdadeiro.

A propriedade abaixo nos oferecerá um novo método para se obter o máximo divisor comum entre dois números inteiros.

Lema 3.2.1 Se a e b são inteiros e $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$, então $m.d.c.(a,b) = m.d.c.(b,r)$.

Demonstração: Se o $m.d.c.(a,b) = d$, então $d|a$ e $d|b$, o que implica, pela Proposição 3.1.3, que $d|(a - bq)$, ou seja, $d|r$. Logo, d é um divisor comum de b e r. Por outro lado, se c é um divisor comum qualquer de b e r, então $c|(bq + r)$ ou $c|a$, isto é, c é um divisor comum de a e b, o que implica $c \leq d$. Assim, $m.d.c.(b,r) = d$. ∎

Vejamos, na situação seguinte, uma aplicação desse Lema.

Exemplo 3.2.9 Na divisão entre os inteiros 48 e 20, temos que $48 = 20 \cdot 2 + 8$ e, portanto, $m.d.c.(48,20) = m.d.c.(20,8) = 4$.

De posse do Lema acima apresentado e também do Algoritmo da Divisão visto no Teorema 3.2.1, podemos agora enunciar e demonstrar o Algoritmo de Euclides. Veremos o quanto essa ferramenta facilita o cálculo do m.d.c. entre dois inteiros positivos relativamente grandes.

Teorema 3.2.4 (Algoritmo de Euclides) Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$, inteiros positivos, com $a \geq b$ e $b \neq 0$. Aplicando-se o algoritmo da divisão sucessivamente para se obter

$$r_j = q_{j+1}r_{j+1} + r_{j+2}, \qquad 0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$$

para $j = 0,1,2,\dots,n-1$ e $r_{n+1} = 0$, então $\mathrm{m.d.c.}(a,b) = r_n$, o último resto não-nulo.

Demonstração: Aplicando-se o Teorema 3.1.1, inicialmente com $r_0 = a$ e $r_1 = b$, teremos

$r_0 = q_1r_1 + r_2,\ 0 < r_2 < r_1$

$r_1 = q_2r_2 + r_3,\ 0 < r_3 < r_2$

$r_2 = q_3r_3 + r_4,\ 0 < r_4 < r_3$

$\vdots$

$r_{n-2} = q_{n-1}r_{n-1} + r_n,\ 0 < r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = q_nr_n + 0.$

Perceba que a cada passo o resto é sempre menor do que no anterior. Logo, após certo número finito de aplicações do Algoritmo da Divisão, obteremos resto nulo.

Supondo, pelo esquema apresentado, que r_{n+1} seja o primeiro resto nulo, segue do Lema 3.2.1 que

$$\mathrm{m.d.c.}(a,b) = \mathrm{m.d.c.}(r_0,r_1) = \mathrm{m.d.c.}(r_1,r_2) \dots = \mathrm{m.d.c.}(r_{n-1},r_n).$$

Mas, como vimos na última etapa do processo, $r_n|r_{n-1}$, ou seja, $\mathrm{m.d.c.}(r_{n-1},r_n) = r_n$. Portanto, $\mathrm{m.d.c.}(a,b) = r_n$. ■

O Algoritmo de Euclides é também denominado processo das divisões sucessivas e representa um modo prático para se obter o Máximo Divisor Comum entre dois inteiros positivos. Como facilitador desse cálculo é comum a utilização do dispositivo a seguir:

	q_1	q_2	q_3		q_{n-1}	q_n
a	b	r_2	r_3	$\cdots$	r_{n-1}	r_n
r_2	r_3	r_4	r_5		0	

A fim de determinar o m.d.c. entre dois inteiros positivos, segundo Edgard de Alencar Filho, esse processo funciona do seguinte modo: “divide-se o maior pelo menor, este pelo primeiro resto obtido, o segundo resto pelo primeiro, e assim sucessivamente até se encontrar um resto nulo. O último resto não nulo é o máximo divisor comum procurado" (ALENCAR FILHO, 1981, p.103).

O próximo exemplo ilustra o emprego do dispositivo acima.

Exemplo 3.2.10 Vamos determinar o $\mathrm{m.d.c.}(186, 318)$ pelo algoritmo de Euclides e expressá-lo como uma combinação linear entre 186 e 318.

Empregando o processo das divisões sucessivas, obtemos

	1	1	2	2	4
318	186	132	54	24	6
132	54	24	6	0	

De acordo com o dispositivo acima, temos que o último resto não nulo vale 6, portanto o $\mathrm{m.d.c.}(186, 318) = 6$. Além disso, todos os restos encontrados podem ser escritos da seguinte forma

$6 = 54 - 24 \cdot 2,$

$24 = 132 - 54 \cdot 2,$

$54 = 186 - 132 \cdot 1,$

$132 = 318 - 186 \cdot 1.$

Para expressarmos 6 como uma combinação linear entre 186 e 318, devemos eliminar os restos 24, 54 e 132 das igualdades anteriores e operarmos como a seguir:

$$6 = 54 - 24 \cdot 2 = 54 - (132 - 54 \cdot 2) \cdot 2 = 54 \cdot 5 - 132 \cdot 2 =$$
$$= (186 - 132 \cdot 1) \cdot 5 - 132 \cdot 2 = 186 \cdot 5 - 132 \cdot 7 =$$
$$= 186 \cdot 5 - (318 - 186 \cdot 1) \cdot 7 = 186 \cdot 12 + 318 \cdot (-7).$$

Assim, temos que $6 = 186 \cdot 12 + 318 \cdot (-7)$, onde $x_0 = 12$ e $y_0 = -7$.

3.3 Equações diofantinas lineares

Antes de partirmos para os conceitos matemáticos referentes às equações diofantinas lineares, abriremos um breve parêntese nesta seção para abordar o aspecto histórico que envolve o tema.

Até o momento empregamos diversas vezes o termo diofantinas sem, contudo, esclarecer o seu significado. Esse adjetivo se refere a Diofanto de Alexandria, autor das equações diofantinas lineares.

Figura 1 – Diofanto de Alexandria

Fonte: Disponível em: <http://redeabe.org.br/historia_estatistica/projeto/interna/40>. Acesso em: 21 ago. 2019.

Os acontecimentos que envolvem a vida deste matemático, contudo, são pouco conhecidos. Acredita-se que ele nasceu no Egito, por volta do século II da nossa era. Segundo Eves (2008) há evidências de que possa ter sido contemporâneo de Herão. A idade com a qual Diofanto morreu também é misteriosa, mas algo que pode revelá-la encontra-se na Antologia Grega através do seguinte problema:

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso, cobriu - lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida. (BOYER, 2008, p.121).

A resolução deste enigma indica que Diofanto viveu 84 anos.

Deixando a alegoria de lado, é certo que o autor das equações diofantinas lineares contribuiu bastante para a Álgebra e em particular para a Teoria dos Números. De seus importantes legados, destaca-se a resolução exata de equações determinadas e indeterminadas. Para Diofanto, só interessavam dessas equações as soluções racionais positivas que passaram a se denominar problemas diofantinos. Vale salientar que para Miles e Coelho (2006) citado por Rafael (2014), as equações abordadas neste trabalho, isto é, as que se referem às soluções estritamente inteiras, deveriam homenagear não Diofanto mas Fermat, pois foi o primeiro a abordar este tipo de solução.

Entre as obras de Diofanto estão “Aritmética”, “Sobre Números Poligonais”, da qual restou apenas um fragmento e “Porismas”, que infelizmente se perdeu. O tratado “Aritmética” era composto por treze livros, dos quais apenas seis “sobreviveram” aos ataques à Alexandria. Nesses volumes remanescentes se encontram 130 problemas resolvidos envolvendo equações de primeiro, segundo e até terceiro graus. É ainda nessa grande obra do matemático que aparecem os primeiros símbolos para designar as incógnitas e suas potências.

Passemos, então, para a definição de equação diofantina linear.

Definição 3.3.1 Uma Equação da forma $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$, onde a, b e c são números inteiros, com $\mathrm{ab} \neq 0$, é denominada equação diofantina linear. Suas soluções são os pares de inteiros x_0, y_0 que satisfazem a igualdade $\mathrm{ax}_0 + \mathrm{by}_0 = \mathrm{c}$.

Observemos que a definição acima considera as equações em apenas duas variáveis inteiras. No entanto, podem-se ter equações diofantinas lineares em n variáveis inteiras, sob a forma $\mathrm{a}_1\,\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_2\,\mathrm{x}_2 + \mathrm{a}_3\,\mathrm{x}_3 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n}\,\mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{k}$. Pela natureza de nosso trabalho estamos considerando apenas as equações da Definição 3.3.1.

Atentemos, agora, ao próximo exemplo:

Exemplo 3.3.1 Para a equação diofantina linear $2\mathrm{x} + 4\mathrm{y} = 8$, temos que o par de inteiros 2 e 1 é solução, pois $2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 8$.

Ocorre, porém, que nem sempre uma equação diofantina linear possui solução. O exemplo a seguir ilustra essa situação. Vejamos:

Exemplo 3.3.2 A equação diofantina linear $2\mathrm{x} + 4\mathrm{y} = 9$, não tem solução. Perceba que $2\mathrm{x} + 4\mathrm{y}$ é sempre um inteiro par, enquanto o inteiro 9 é ímpar. Observe ainda que $\mathrm{m.d.c.}(2,4) = 2$ e 2 não divide 9.

Pelo exemplo acima, sugere-se que se $\mathrm{d} = \mathrm{m.d.c.}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ não divide c, então a equação diofantina linear $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$ não possui solução. Também podemos supor o contrário: se $\mathrm{d} = \mathrm{m.d.c.}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ divide c, então a equação diofantina linear $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$ possui solução. É exatamente isso o que nos dirá a próxima proposição.

Proposição 3.3.1 A equação diofantina linear $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$, com $\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c} \in \mathbb{Z}$, admite solução se, e somente se, $\mathrm{m.d.c.}(\mathrm{a},\mathrm{b})|\mathrm{c}$.

Demonstração: Suponhamos que o par de inteiros x_0, y_0 seja solução da equação $ax + by = c$, isto é, $ax_0 + by_0 = c$. Uma vez que $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = d$, existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$. Logo,

$$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0).$$

Por ser $rx_0 + sy_0$ um inteiro, concluímos que $d|c$, ou seja, $\mathrm{m.d.c.}(a, b)|c$.

Reciprocamente, suponhamos que $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = d$ divide c $(d|c)$, ou seja, existe um inteiro t, tal que $c = dt$. Como $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = d$, temos que $d = ax_0 + by_0$, onde x_0 e y_0 são inteiros quaisquer. Resulta daí que,

$$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(x_0t) + b(y_0t)$$

e portanto, x_0t, y_0t é solução da equação $ax + by = c$. ■

As soluções de uma equação diofantina linear podem ser determinadas a partir de uma solução particular (x_0, y_0). É o que veremos na proposição a seguir.

Proposição 3.3.2 Se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, com $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = d$, então as soluções inteiras x, y desta equação são dadas por

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t, \qquad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Consideremos x_1, y_1 outra solução inteira da equação $ax + by = c$. Então,

$$ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1$$

ou seja,

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1).$$

Como $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = d$, então existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, com $\mathrm{m.d.c.}(r, s) = 1$. Logo,

$$dr(x_1 - x_0) = ds(y_0 - y_1)$$

o que é equivalente a

$$r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_1).$$

Da igualdade acima, segue que $s|r(x_1 - x_0)$, mas como m.d.c.(r, s) = 1, temos, pelo Teorema 3.2.3, que $s|(x_1 - x_0)$. Assim, existe um inteiro t, tal que $x_1 - x_0 = st$, donde concluímos que

$$x_1 = x_0 + st = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t.$$

De modo análogo, encontramos

$$y_1 = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$$

■

Exemplo 3.3.3 Vamos resolver a equação diofantina linear $160x + 132y = 240$.

Precisamos, inicialmente, determinar o $\mathrm{m.d.c.}(160, 132)$. Pelo algoritmo de Euclides, segue que

$160 = 132 \cdot 1 + 28,$

$132 = 28 \cdot 4 + 20,$

$28 = 20 \cdot 1 + 8,$

$20 = 8 \cdot 2 + 4,$

$8 = 4 \cdot 2.$

Logo, o $\mathrm{m.d.c.}(160, 132) = 4$ e como 4 divide 240, concluímos que a equação dada tem solução.

Devemos agora expressar o inteiro 4 como combinação linear de 160 e 132. Procedendo como no Exemplo 3.2.10, obtemos

$4 = 20 - 8 \cdot 2 = 20 - (28 - 20 \cdot 1) \cdot 2 = 20 \cdot 3 + 28 \cdot (-1) =$

$= (132 - 28 \cdot 4) \cdot 3 + 28 \cdot (-1) = 132 \cdot 3 + 28 \cdot (-5) =$

$= 132 \cdot 3 + (160 - 132 \cdot 1) \cdot (-5) = 160 \cdot (-5) + 132 \cdot 8,$

isto é:

$$4 = 160 \cdot (-5) + 132 \cdot 8.$$

Multiplicando ambos os membros desta primeira igualdade por 60, encontramos:

$$240 = 160 \cdot (-300) + 132 \cdot 480$$

Disto, concluímos que o par de inteiros $x_0 = -300$ e $y_0 = 480$ é uma solução particular da equação proposta, e segundo a Proposição 3.3.2, todas as demais soluções são dadas por:

$x = -300 + \left(\frac{160}{4}\right)t$ ou $x = -300 + 40t$ e

$y = 480 - \left(\frac{132}{4}\right)t$ ou $y = 480 - 33t$, onde $t \in \mathbb{Z}$.

Corolário 3.3.1 Se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, onde $\mathrm{m.d.c.}(a, b) = 1$, então as soluções inteiras x, y desta equação são dadas por

$$x = x_0 + bt, \qquad y = y_0 - at, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Considerando x, y uma solução de $ax + by = c$, temos que

$$ax_0 + by_0 = c = ax + by.$$

Segue daí, que

$$a(x - x_0) = b(y - y_0).$$

Mas $\text{m.d.c.}(a, b) = 1$, logo, $b|(x - x_0)$ e, portanto, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x - x_0 = bt$$

isto é,

$$x = x_0 + bt.$$

De modo análogo, obtemos

$$y = y_0 - at.$$

■

No exemplo a seguir, abordaremos uma questão extraída do Exame Nacional de Qualificação aplicado em 2018 pelo PROFMAT. Nela, utilizaremos o Corolário 3.3.1 e verificaremos que o mesmo facilita a sua resolução.

Exemplo 3.3.4 Considere a equação diofantina linear $5x + 3y = 2018$.

(a) Escreva a solução geral em $\mathbb{Z}$.

(b) Quantas soluções existem em $\mathbb{N} \cup \{0\}$?

Solução:

(a) O $\text{m.d.c.}(5, 3) = 1$ implica que a equação dada apresenta soluções. Além disso, podemos aplicar o Corolário 3.3.1.

Ao determinar uma solução particular percebemos, por simples inspeção, que os inteiros $x_0 = 400$ e $y_0 = 6$ satisfazem essa condição. Portanto, a solução geral para esta equação é dada por $x = 400 + 3t$ e $y = 6 - 5t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

(b) Neste caso, estamos procurando apenas as soluções não negativas. Assim, devemos ter

$$400 + 3t \geq 0 \Rightarrow t \geq -\frac{400}{3}$$

e

$$6 - 5t \geq 0 \Longrightarrow t \leq \frac{6}{5}.$$

Mas como $t \in \mathbb{Z}$, essas mesmas relações devem ser escritas como $t \geq -133$ e $t \leq 1$, donde concluímos que $-133 \leq t \leq 1$. Logo, existem para a equação proposta 135 soluções em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Como próximo exemplo retomaremos aquele apresentado no Capítulo 2 e extraído de Iezzi et al (2016, p. 99). Faremos a sua resolução utilizando a teoria abordada nesta seção.

Exemplo 3.3.5 Cíntia tem de pagar uma compra no valor de R$ 35,00 e só dispõe de moedas de R$ 1,00 e de notas de R$ 5,00. De quantos modos distintos poderá fazer o pagamento?

Solução: A análise deste problema nos leva a equação diofantina linear $x + 5y = 35$. Percebemos, imediatamente, a existência de solução, pois o $\mathrm{m.d.c.}(1,5) = 1$, e neste caso, podemos aplicar o Corolário 3.3.1.

É fácil ver também que os inteiros $x_0 = 5$ e $y_0 = 6$ constituem uma solução particular da equação. Logo, todas as soluções são dadas por $x = 5 + 5t$ e $y = 6 - t$. Neste caso, novamente, como estamos interessados nos valores inteiros não negativos de t, disso resulta que $-1 \leq t \leq 6$. Portanto, Cíntia poderá fazer o pagamento de 8 modos distintos.

O último exemplo deste capítulo que apresentaremos foi extraído de um artigo publicado na RPM (Revista do Professor de Matemática) 19 e proposto por Gilda La Rocque e João Bosco Pitombeira.

Exemplo 3.3.6 Quantas quadras de basquete e quantas de vôlei são necessárias para que 80 alunos joguem simultaneamente? E se forem 77 alunos?

Solução: Consideremos o primeiro caso abordado neste problema, referente aos 80 alunos.

Sabemos que jogos de basquete e vôlei são disputados respectivamente por 10 e 12 jogadores. Assim, obtemos a equação diofantina linear $10x + 12y = 80$, e que possui solução, pois $\mathrm{m.d.c.}(10, 12) = 2$ e $2|80$. Simplificando-a, teremos a equação equivalente $5x + 6y = 40$. Por simples checagem, encontramos a solução particular $x_0 = 2$ e $y_0 = 5$. As demais soluções são dadas por $x = 2 + 6t$ e $y = 5 - 5t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Como devemos ter para x e y valores não negativos, concluímos que $-\frac{1}{3} \leq t \leq 1$. Logo para t inteiro temos duas possibilidades e, portanto, o problema apresenta duas soluções:

(i) Para $t = 0$, o que indica serem necessárias 2 quadras de basquete e 5 quadras de vôlei;

(ii) Para $t = 1$, o que indica serem necessárias 8 quadras de basquete.

No segundo caso, referente aos 77 alunos, obtemos a equação diofantina linear $10x + 12y = 77$. Como $m.d.c.(10, 12) = 2$ e 2 não divide 77, segue que esta equação não possui solução. Portanto, não é possível que 77 alunos joguem simultaneamente em quadras de basquete e de vôlei.

4 PERCURSO METODOLÓGICO

Reservamos o capítulo atual para descrever todo o processo de aplicação do jogo elaborado e dos desdobramentos das ações que envolvem o mesmo. Iniciaremos apresentando o ambiente escolar onde desenvolvemos o referido trabalho. Faremos um breve levantamento sobre o município onde a escola está localizada além das suas estruturas físicas e do perfil dos alunos que ela comporta. Em seguida, discorreremos sobre a atividade prática em si, realizada em dois momentos distintos, caracterizando os fatos principais transcorridos e que oferecerão o suporte para a análise da nossa proposta de trabalho. Por fim, indicaremos um roteiro de como aplicar, em sala de aula, o jogo proposto.

4.1 O ambiente da ação

A Escola de Ensino Médio Francisco Moreira Filho, está localizada na Rua Manoel Franklin, 5.033, no centro da cidade de Tabuleiro do Norte-CE. Este município encontra-se distante 211 km da capital cearense, Fortaleza, e situa-se a leste do estado, na região do Vale do Jaguaribe, fazendo divisa com o estado do Rio Grande do Norte. Conta com uma área superficial de aproximadamente 861,8 km^2 e de acordo com o senso de 2010, sua população é estimada em 29.210 habitantes. Em termos de IDH (Índice de Desenvolvimento Humana), Tabuleiro do Norte ocupa a nona posição do Estado, com valor de 0,698. Atualmente, o município dispõe de outras três instituições de Ensino Médio: a EEEP Avelino Magalhaes, o Instituto Federal de Ciência e Tecnologia (IFCE) e a EEMTI Antônio Vidal Malveira, situada no distrito de Olho D’água da Bica.

A escola Francisco Moreira Filho foi fundada em 05 de Maio de 1981, sendo a primeira a oferecer o Ensino Médio em Tabuleiro do Norte. Neste ano de 2019, ela atende a 668 alunos distribuídos nos três turnos: 270 alunos pela manhã, 170 à tarde e 228 alunos à noite. É também a única escola do município a disponibilizar este nível de educação no turno noturno, favorecendo assim aos que estão inseridos no mercado de trabalho e pretendem concluir seus estudos. Ao todo, ela funciona com 18 turmas, sendo cinco turmas de 1ª Série, quatro de 2ª Série e seis turmas de 3ª Série, além de três turmas de EJA (Educação de Jovens e Adultos).

Figura 2 – Fachada da E.E.M. Francisco Moreira Filho

Fonte: Elaborada por Ancelmo Neto da Silva

Em sua estrutura física, o Chicão, como é carinhosamente apelidado, possui os seguintes ambientes: oito salas de aula climatizadas, proporcionando maior conforto a alunos e professores; um laboratório escolar de informática (LEI), onde infelizmente os computadores se encontram sucateados, devido ao longo tempo sem manutenção; um laboratório escolar de ciências (LEC), também bastante comprometido quanto aos recursos materiais; uma sala de Professores, local de realização dos planejamentos e reuniões no decorrer do ano letivo; uma sala de secretaria; uma sala de coordenação; uma sala de diretoria; uma sala de multimeios, contendo amplo acervo de material para pesquisa e uma quadra de esportes coberta, onde acontece parte das aulas de educação física, atividades de recreação e de desenvolvimento de projetos da escola.

A escolha desta instituição de ensino para aplicação do nosso projeto educacional se justifica por dois motivos principais. O primeiro deles é o fato de ser a escola na qual lecionamos há mais de quatro anos. Isso nos confere mais segurança no sentido de realizar algo transformador ao mesmo tempo em que cumprimos nossas obrigações como funcionário público. O segundo motivo, não menos importante, gira em torno da plateia que pretendemos atingir através desse trabalho.

Como mencionamos antes, o município de Tabuleiro do Norte conta com quatro estabelecimentos de ensino para o nível médio. Um deles, a EEMTI Antônio Vidal Malveira, está situado em um distrito, distante 25 quilômetros do centro da cidade, onde se localizam as outras três. Dessas, a EEEP Avelino Magalhães e o Instituto Federal de Ciência e Tecnologia recebem seus alunos através de processo seletivo. Isto significa que os discentes oriundos do Ensino Fundamental que ingressam nessas escolas são aqueles, supostamente, com nível maior de conhecimentos. Além disso, vêm atraídos pela invejável estrutura física que tais estabelecimentos possuem. Os demais alunos, sem maiores expectativas, acabam como muitos deles afirmam, “sem outra escolha” e adentram o modesto ambiente da Escola Francisco Moreira Filho. São alunos, em sua maioria, indisciplinados, com maior deficiência de aprendizagem e em alguns casos, revoltados por não estarem em uma das outras duas escolas. Isto se reflete nos resultados insatisfatórios apresentados ao longo dos últimos anos. Os índices de evasão e reprovação apenas aumentam, bem como os resultados fracassados nas provas externas como SPAECE e SAEB.

São por esses motivos que a tarefa educacional torna-se um processo desafiador, bem como a realização deste nosso projeto. Contudo, promover o engajamento do aluno, sua participação na aquisição do saber é uma conquista imensurável para qualquer educador. Tudo isso requer uma atenção especial, um tratamento inovador e total dedicação visando realmente o aprendizado e o bem estar dos nossos alunos.

4.2 A prática em sala de aula

Nesta seção discorreremos sobre algo que fundamenta nosso trabalho: a aplicação de um jogo matemático. Procuramos, sempre, evitar formalizações com as quais os alunos já estavam acostumados nas aulas convencionais. Todo o processo foi desenvolvido em dois momentos, de acordo com o próprio planejamento das atividades e sua adequação com as necessidades que poderiam aparecer.

- **Primeiro Momento: 13/ 06/ 2019**

Na manhã deste dia, ao ministrar nossas aulas a uma turma de 3ª série, convidamos os alunos a participarem de um projeto que desenvolvíamos como parte de nosso trabalho de conclusão de mestrado. Os alunos se empolgaram com esta informação e pelo menos oito se comprometeram em participar de tal atividade no contra turno.

Ao chegar a tarde apenas três alunos compareceram, o que nos levou a mudar de estratégia e convidar outros daquele turno. Ao todo, havia 14 alunos, de todas as três séries, quando iniciamos nossa apresentação. Informamos a eles a importância daquele momento, bem como da atividade diferenciada da qual eles seriam protagonistas. Feitos os devidos apontamentos, entregamos a cada aluno, uma atividade de sondagem, contendo apenas quatro questões (ver Apêndice A). O objetivo é reconhecer neles o nível de conhecimento matemático adquirido até então. Foi um momento mais tenso. Primeiro, os alunos percebiam naquilo algo totalmente comum ao que viam em sala de aula. Depois, promoveu-lhes certo constrangimento em virtude daquelas questões não lhes serem tão familiares. Já prevendo aquele desconforto, orientamos a todos a não se preocuparem com o questionário e resolvessem apenas o que lhes fosse possível. Comentamos que era normal o esquecimento de algo que porventura não havíamos estudado recentemente. Essa atitude, a nosso ver, os tranquilizou e proporcionou-nos uma melhor condução no decorrer da aula.

Figura 3 – Alunos resolvendo a Atividade de conhecimentos prévios

Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, partimos para o jogo, propriamente dito. Convidamos os discentes a espontaneamente se dividirem em duplas e lhes entregamos a folha contendo as regras do jogo (ver Apêndice C). Passamos a ler em conjunto a todas elas e em dados momentos utilizamos do quadro branco para sanar as dúvidas que apareciam. Vários questionamentos surgiram, mostrando um real interesse por parte deles. Comentamos também a respeito dos critérios da pontuação final, afirmando que dentre as sete duplas, ganharia a que somasse mais pontos.

Entregues a malha quadriculada (ver Apêndice B) e as canetas hidrográficas, iniciamos a 1ª etapa, escrevendo no quadro branco o tipo de retângulo que eles deveriam revestir. Cinco minutos foi o tempo combinado para a realização da tarefa. Percebemos, entretanto a insuficiência do mesmo, pois os alunos demonstraram dificuldades para compreender as regras. Esse primeiro momento destacou-se, portanto, pela baixa produtividade. Na segunda etapa eles deveriam preencher retângulos do tipo 4x5, porém, agora com 10 minutos de duração. Dessa vez, foi notória a evolução dos alunos. Eles pouco nos requisitaram ajuda. Por fim, na última etapa, já mais familiarizados como o jogo, mostramos no quadro, o retângulo do tipo 5x5 para o revestimento em três minutos, conforme também havíamos combinado. Nesse momento, surgiram algumas dúvidas quanto ao preenchimento dos retângulos, pois segundo eles algo estava errado. Mesmo assim, chegaram a preencher equivocadamente várias figuras sem detectarem a problemática.

Finalizamos o encontro que já durava mais de uma hora e meia, com a apuração dos pontos de cada equipe. Como eram apenas sete duplas, fizemos toda a contagem no quadro. Foi um momento conturbado, uma vez que aquilo exigia tempo e paciência. Além disso, os alunos estavam realmente interessados na vitória. Após elegermos a dupla vencedora, parabenizamos e agradecemos a todos pela participação e informamos que posteriormente lhes encaminharíamos um questionário a respeito do jogo para eles responderem.

Figura 4 – Ranking de pontos

Fonte: Elaborada pelo autor

Na semana seguinte, chamamos alguns dos alunos e aplicamos o questionário (ver Apêndice D). Percebemos certa relutância por parte de alguns, outros sequer o preencheram alegando falta de tempo. Claro que nesse momento, nos interessava a opinião pessoal de cada aluno, portanto não tínhamos o objetivo de reuni-los todos em um mesmo ambiente. Alguns inclusive, responderam a esta atividade durante o horário letivo, em nossas próprias aulas de matemática.

- **Segundo Momento: 24/ 06/ 2019 e 25/ 06/ 2019**

A princípio, este segundo momento não havia sido anteriormente planejado, visto que, em nossa opinião, o encontro do dia 13 de junho do mesmo mês já seria suficiente. Entretanto, percebemos que faltava algo. O próprio desenvolvimento do jogo naquele dia não havia nos agradado tanto. Após uma semana de reflexões, decidimos refazer o jogo e até mesmo complementá-lo em alguns aspectos.

Entramos em sala às 07 horas do dia 24 de junho, substituindo as duas aulas de outro colega, e isso gerou certo espanto na turma da 3ª série A. Alguns alunos pensaram que havíamos errado de sala, mas a maioria por se tratar do professor de Matemática, ficou desapontada. Findo esse momento de apreensão, explicamos o motivo de nossa presença ali, mostrando se tratar de algo relativo à dissertação de mestrado. Esclarecemos a todos como funcionava esse curso de pós-graduação e explicamos-lhes a diferença entre os dois tipos de mestrado: o acadêmico e o profissional. Sobre este último, comentamos também sua importância diante do cenário educacional com suas possíveis e reais contribuições.

Em seguida, após todas as considerações iniciais, assim como no encontro passado com os outros alunos, entregamos à turma a Atividade de conhecimentos prévios (ver Apêndice A). Novamente aquilo gerou grande desconforto neles. Muitos alegaram desconhecer aquele conteúdo ou não se lembrarem mais dele. Mediamos o conflito e esclarecemos que tal atitude de esquecimento era normal e que aquela tarefa não serviria para enaltecer ou desqualificar ninguém. O objetivo central seria perceber que nível de conhecimentos matemáticos os alunos traziam até então. Recolhemos essas folhas e passamos para uma nova fase da oficina.

Nessa ocasião, pedimos aos alunos que se dividissem em duplas para darem início ao jogo. Era esse o momento que eles mais aguardavam, pois aqueles alunos normalmente adoravam as disputas entre si. Entregamos às equipes as folhas contendo as regras (Ver Apêndice C), e fizemos em conjunto e detalhadamente a leitura das mesmas. Dessa vez, buscamos uma orientação diferente da anterior, introduzindo informalmente, o conceito de par ordenado como resultado para uma solução do jogo. Felizmente, tal ideia foi facilmente compreendida, e isto resultou, ao final, numa apuração dos pontos mais rápida. Uma regra fundamental que também enfatizamos nesse momento foi a questão da repetição de preenchimentos. Percebemos que no encontro com a outra turma fomos displicentes a este respeito.

Após a entrega das malhas quadriculadas (ver Apêndice B) e das canetas hidrográficas, explicamos aos alunos que na primeira etapa eles deveriam preencher retângulos do tipo 3x4. Para isso, eles teriam 10 minutos, tempo maior que da outra vez, pois consideramos como produtivo tal aumento. Nessa rodada do jogo, percebemos, em geral, certa dificuldade, e por isso direcionamos maior atenção às duplas que nos solicitavam ajuda. Para a segunda etapa, o tempo combinado foi de 15 minutos e eles deveriam revestir retângulos do tipo 4x5. Mais familiarizados com a brincadeira percebemos neles maior desenvoltura, tanto que em poucas vezes fomos requisitados para tirar-lhes as dúvidas. Na rodada final, cada dupla recebeu novamente uma malha quadriculada e agora o objetivo era preencher retângulos do tipo 5x5. Começada a nova disputa, logo as inquietações surgiram. Mais uma vez, os alunos percebiam que algo estava errado, mas mesmo assim continuavam revestindo incorretamente os retângulos. Para nossa surpresa, uma das duplas detectou o problema a tempo, sem fazer marcações na folha. As duas alunas dessa equipe perceberam a questão da paridade como obstáculo para realização da tarefa. Passados os 10 minutos referentes a essa etapa, recolhemos as folhas em meio às dúvidas dos alunos diante daquele impasse.

Figura 5 – Aplicação do jogo "Preenchendo Quadradinhos"

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6 – Aplicação do jogo "Preenchendo Quadradinhos"

Fonte: Elaborada pelo autor

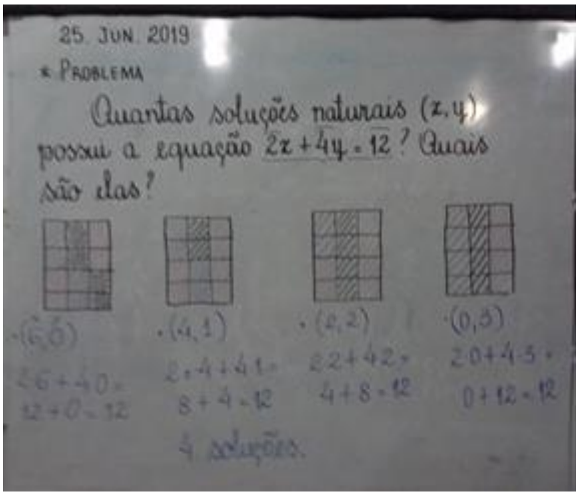
O final da aula se aproximava quando iniciamos a apuração dos pontos. Dessa vez, redistribuímos a equipes oponentes todas as folhas que havíamos recolhido. Assim, eles fariam a apuração entre si. Seria também uma oportunidade para testar a seriedade de cada um deles. Esse processo, contudo, não foi tão simples, pois vários alunos demonstraram dificuldades ao atribuir as pontuações e isso exigiu em dados momentos a nossa intervenção. Logo após, montamos um ranking no quadro com a somatória de todos os pontos e a dupla campeã foi conhecida. Encerramos esse encontro, agradecendo a atenção e a participação da turma e informando que no dia seguinte voltaríamos a abordar conceitos relativos ao jogo.

Voltamos à mesma turma como combinado, no dia 25 de junho, terça-feira, também às 7 horas. Infelizmente, naquela oportunidade, havia menos alunos que no encontro anterior. É costume na última semana letiva de bimestre, um baixo índice de frequência. De qualquer modo, iniciamos nossos trabalhos cumprimentando os que estavam presentes e discorrendo sobre o que realizaríamos naquele dia. De imediato, um aluno perguntou se continuariam disputando o jogo, ao que lhe respondemos que possivelmente, no final da aula. Eles ainda se mostravam intrigados com o fato do último retângulo não ter admitido solução.

Começamos, efetivamente, apresentando à turma, um questionário sobre o jogo e pedimos que eles desenvolvessem as respostas de forma sincera, preenchendo o que fosse possível. Deixamo-los bem a vontade quanto a isso. Dentre as questões, focamos bastante, na que solicitava deles fazer alguma relação entre a atividade de conhecimentos prévios e o jogo em si. Após recolher todos os questionários afirmamos que faríamos algumas observações no quadro branco. Isso frustrou, a meu ver, as intenções de parte da turma. De fato, escrevemos o problema: “Quantas soluções naturais (x, y) possui a equação $2x + 4y = 20$? Quais são elas?” Os alunos mais atentos perceberam que se tratava da última questão da atividade da aula passada. Como ninguém havia respondido satisfatoriamente ao item, começamos a explicar o que realmente ele significava. Após a compreensão da turma, justificamos que o problema estava intimamente ligado ao jogo, pois cada retângulo revestido representava uma solução para aquela equação. Isso gerou boa expectativa neles, pois passaram a entender o jogo não mais como uma ingênua brincadeira.

Passamos, em seguida, a abordar os conceitos de divisores de um número inteiro, bem como o de máximo divisor comum. Percebemos que, para eles, tais definições estavam totalmente adormecidas. De fato, poucos desenvolveram respostas plausíveis às perguntas. Quando, porém, desenvolvemos no quadro o cálculo do m.d.c.(10, 15) todos perceberam se tratar de algo extremamente simples e compreensível. Após esses tópicos, definimos as equações diofantinas lineares, e afirmamos que somente parte delas possuía solução, informando a condição para que isso ocorresse. Foi à oportunidade, para explicar o problema do último retângulo, associando de vez as equações ao jogo. Finalizando a exposição, mostramos a eles as fórmulas para se obter as possíveis soluções, bem como um exemplo de sua aplicação.

Figura 7 – Exposição dos conteúdos relativos ao jogo



Fonte: Elaborada pelo autor

O encontro somente foi encerrado após a reaplicação do jogo. Pedimos aos alunos que novamente se dividissem em duplas e entregamos a eles as canetas e uma malha quadriculada. O objetivo de então não seria a disputa, mas inferir se os apontamentos feitos durante aquele dia interferiria em um novo revestimento de retângulos. Para tanto, orientamos a eles que revestissem retângulos 4x6, determinando antes, a quantidade total possível de revestimentos. Isso se resumiria em resolver a equação $2x + 4y = 24$. Auxiliando os alunos, descobrimos que esse valor seria 7. Utilizando um raciocínio relativo à análise combinatória um dos alunos, chegou a esse valor antecipadamente. Ele relatou que o retângulo poderia ser preenchido através de composições onde as peças de 4 quadradinhos variariam em quantidades de 0 a 6.

Infelizmente, a aula chegava ao fim e pela limitação do tempo somente alguns alunos completaram a tarefa. No entanto, percebemos que neste segundo momento o preenchimento dos retângulos transcorreu de forma mais leve, sem questionamentos por parte da turma. Notamos também que todos ficaram satisfeitos com o enfoque diferenciado pelo qual se poderia abordar um conteúdo matemático.

4.3 Roteiro de aplicação do jogo matemático

I. Dados de identificação
Escola: E.E.M. Francisco Moreira Filho Professor: Elvis Maikon Reges Sousa Disciplina: Matemática Carga horária: 2 h/a Série: 3ª série do Ensino Médio Turma: A Data: 24 jun. 2019
II. Título da atividade
Preenchendo quadradinhos.
III. Objetivos
Objetivo geral: Introduzir o assunto equações diofantinas lineares de maneira dinâmica e divertida. **Objetivos específicos**: Associar as soluções do jogo ao conceito de divisibilidade. Identificar quando uma etapa do jogo possui ou não solução. Calcular o número de soluções de cada etapa do jogo.
IV. Conteúdo
Equações diofantinas lineares.
V. Metodologia
Inicialmente, dividimos a turma em duplas, entregando-lhes uma folha contendo as regras do jogo (Apêndice C). Passamos a discuti-las e, nesse momento, introduzimos o conceito de par ordenado, para identificar cada solução do jogo e também facilitar a apuração dos pontos ao final. Em seguida, entregamos a cada dupla uma malha quadriculada e para iniciar a 1ª etapa representamos no quadro branco um retângulo 3x4 (3 quadradinhos como comprimento e 4 quadradinhos como altura) que os alunos deverão reproduzir na malha. Esse retângulo deverá ser preenchido somente com peças de 2 ou 4 quadradinhos, com

cores diferentes. Os alunos disporão de 10 minutos para concluir esta etapa. Após esse tempo, recolhemos essas malhas e daremos início a 2ª etapa, estabelecendo um procedimento análogo ao da primeira. Nesse momento, porém, desenhamos no quadro um retângulo 4x6 como modelo para eles preencherem com as mesmas peças da 1ª etapa, mas agora dispondo de 15 minutos. Finalizada esta rodada, após o recolhimento de todas as malhas quadriculadas, continuaremos o processo com a terceira e última etapa, onde as duplas deverão revestir retângulos 5x5, em 5 minutos. Concluídas as três etapas do jogo, iniciaremos a apuração dos pontos. Redistribuímos aleatoriamente todas essas malhas quadriculadas e assim as duplas realizarão o julgamento entre si. De acordo com as regras, cada revestimento correto soma 2 pontos e cada incorreto, incompleto ou repetido vale – 1 ponto. Encerramos a aula elegendo a dupla campeã e discutindo as particularidades do jogo.
VI. Recursos didáticos
Malhas quadriculadas, canetas hidrográficas, folha com as regras do jogo, quadro branco, pincéis para quadro branco.
VII. Avaliação
A avaliação se realizará ao final da aula com apuração dos pontos e com a discussão dos resultados.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nas páginas que seguem nos proporemos a discutir as ações realizadas em sala de aula conforme descrevemos no capítulo anterior. Será a possibilidade de analisarmos que parcela daquilo que planejáramos realmente se concretizou. Entretanto, a fim de não nos alongarmos, destacaremos aqui apenas as atividades desenvolvidas na turma da 3ª série A, não mais nos reportando aquela aplicação inicial, a qual julgamos um tanto precoce e pouco organizada. Consideramos, portanto, de total suficiência para nossas pretensões pedagógicas os apontamentos que ora iniciamos.

5.1 Análise da atividade de conhecimentos prévios

A atividade de conhecimentos prévios foi desenvolvida logo no início do primeiro dia do encontro. Era composta por quatro questões cujo objetivo seria identificar nos 28 alunos presentes o nível de conhecimento sobre o assunto abordado que eles traziam até então. Infelizmente, apenas 16 alunos devolveram a folha com pelo menos um item resolvido.

Primeira questão O que você entende por divisores de um número inteiro?

Na primeira questão buscamos sondar nos alunos o que eles compreendiam por divisores de um número inteiro. Não esperávamos respostas formalmente bem construídas, em virtude de conhecermos de perto a turma, mas sim que eles demonstrassem uma simples noção do que era solicitado. Verificamos, contudo, de modo geral, uma enorme insuficiência de conhecimentos, não só nesta, mas nas demais questões. Para esse item, apresentamos a resposta de dois alunos:

Aluno 1: “Determinados números que divide exatamente um outro número”.

Aluno 2: “São números que podem ser divididos por números exatos.”

Verificamos que nesta questão apenas o aluno 1 deu uma resposta satisfatória. O aluno 2, por sua vez, demonstra ter noção do significado de divisor, mas não conseguiu expressá-lo formalmente. Percebemos ainda, em outros alunos, repostas semelhantes a esta última e também aquelas que fugiam do que era pedido.

Segunda questão Defina, com suas palavras, o m.d.c. (máximo divisor comum) de dois números inteiros.

Assim como na primeira questão, procuramos aqui identificar se os alunos conseguiam expressar, com suas palavras, a definição de m.d.c. entre dois números inteiros. Dessa vez, dos 28 alunos, 19 preferiram não responder. Entre aqueles que expressaram seu ponto de vista, selecionamos as seguintes respostas:

Aluno 4: "O máximo divisor comum entre dois ou mais números inteiros é o maior número inteiro que é fator de tais números".

Aluno 16: "É quando se procura um número que divide os dois números inteiros".

Entendemos que o aluno 4 foi bem feliz e conciso em sua resposta, complementando inclusive o questionamento ao empregar os termos "dois ou mais números inteiros" e "fator", este último pouco comum na linguagem dos demais. Já o aluno 16, compreendeu parcialmente o sentido do que lhe era pedido. Ele não citou que o número que divide os dois inteiros deveria ser o maior possível.

Terceira questão Determine: a) m.d.c. (20, 28); b) m.d.c. (21, 25)

Nesta questão, pedíamos que os alunos calculassem o máximo divisor comum entre dois números inteiros. Percebemos durante a aplicação do questionário certo desconforto da turma ao se deparar com um item desse tipo. Alguns alunos informaram que sabiam determinar o m.m.c. entre dois inteiros, mas não o m.d.c. Alegavam eles que há muito tempo não lidavam com tal assunto. Escolhemos a resposta mais significativa de um dos alunos (ver Apêndice E). Nela verificamos que ele procedeu com a decomposição dos números dados em fatores primos, mas não soube empregá-la no cálculo do m.d.c. Outro colega ofereceu um desenvolvimento semelhante e os demais fugiram totalmente do que foi solicitado, muitos inclusive, deixando em branco o espaço próprio para a resposta.

Quarta questão Quantas soluções naturais (x, y) possui a equação $2x + 4y = 20$? Quais são elas?

Na última questão da atividade de conhecimentos prévios pretendíamos que os alunos resolvessem uma equação linear nas variáveis x e y, apresentando-lhe as possíveis soluções naturais. Este foi certamente o item mais complicado para todos. Pelas poucas respostas dadas, percebemos uma incompreensão geral ao que era solicitado, inclusive e principalmente o significado das soluções (x, y). Em algumas delas houve a troca da solução da equação pelos seus coeficientes a, b e c, como podemos ver na resposta a seguir:

Aluno 8: “As soluções são 2, 4 e 20”.

5.2 Análise do questionário

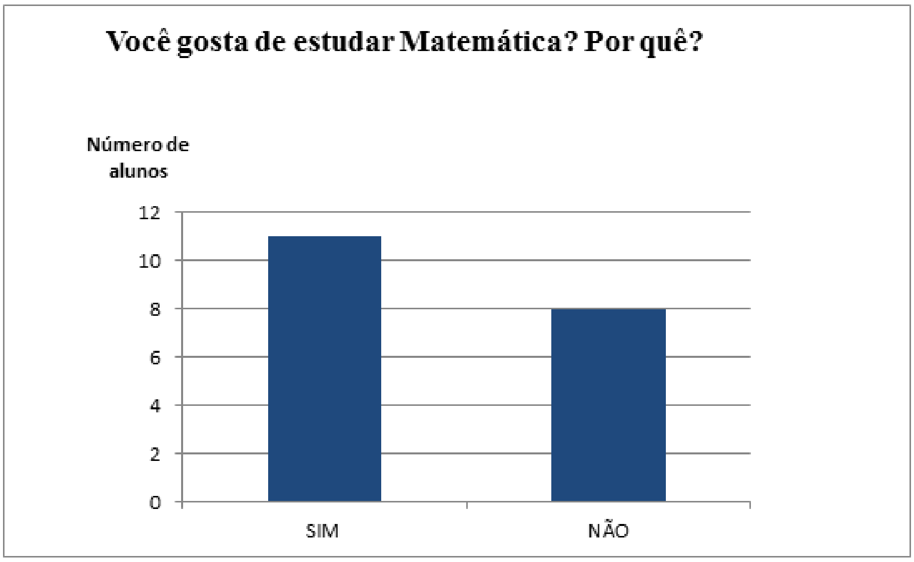
Nesta etapa da análise dos resultados levaremos em consideração as respostas dadas pelos alunos ao questionário aplicado no segundo dia de atividades de nosso trabalho. Nessa ocasião, estiveram presentes em sala 19 alunos que responderam as dez questões propostas, antes de expormos os conceitos matemáticos relativos às equações diofantinas lineares. Ao elaborarmos o questionário tínhamos em mente não apenas colher os relatos dos alunos a respeito de como se processou o jogo, suas facilidades ou dificuldades, mas também reconhecer suas opiniões a respeito do estudo e do ensino da matemática.

Novamente, reproduziremos aqui as respostas de alguns estudantes a todas as questões e apresentaremos graficamente os resultados de algumas delas que favoreceram nosso levantamento analítico.

Primeira questão Você gosta de estudar Matemática? Por quê?

A resposta dada a essa indagação, não podemos negar, nos surpreendeu positivamente. O convívio com todos, durante o semestre letivo, dava-nos mostra de que obteríamos um resultado contrário. Sabemos, entretanto, que o gostar ou não de Matemática, leva em consideração uma série de fatores, como a sua aplicabilidade no dia a dia ou a forma como ela é e foi abordada em sala de aula durante toda uma vida escolar. Mas de forma gratificante, expressamos no seguinte gráfico os dados obtidos:

Gráfico 1 – Gosto pela Matemática



Fonte: Elaborado pelo autor

Vejamos agora, a resposta de dois alunos a respeito desse questionamento:

Aluno 18: “Sim, é algo necessário no cotidiano e, além disso, sempre tem algo novo a se aprender”.

Aluno 5: “Não, porque eu não compreendo”.

Identificamos na resposta do aluno 18, assim como na de outros colegas que responderam sim, a importância do emprego da matemática no dia a dia. Além disso, ele se mostra receptivo ao que essa disciplina tem a oferecer. Por outro lado, respostas como a do aluno 5 servem de alerta para o modo de como a Matemática é ensinada: a instrução é oferecida de forma consistente apenas aos alunos que demonstram maiores conhecimentos ou interesses. Jovens como este se apresentam desmotivados em sala de aula por se sentirem menosprezados.

Segunda questão Durante toda sua vida escolar (Ensino Fundamental e agora Ensino Médio) como se processou o ensino da Matemática? As aulas seguiam o modelo tradicional de ensino ou houve inovações?

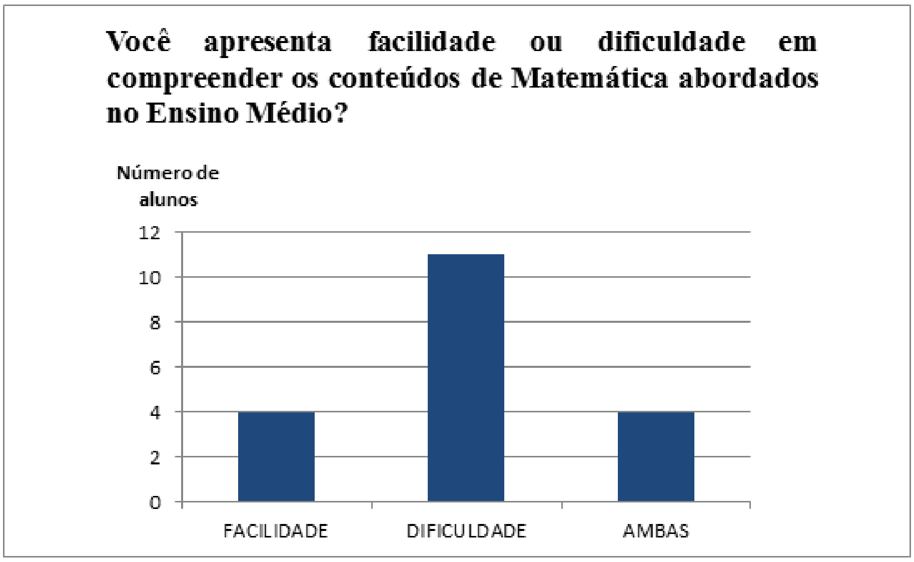
Buscamos na segunda pergunta do questionário, conhecer o modo de como a matemática foi ministrada desde o ensino fundamental até o presente. Pelas respostas colhidas, esta indagação não foi bem compreendida. Alguns interpretaram as inovações, como conteúdos novos do Ensino Médio e não como estratégias de ensino. Dos discentes que compreenderam o teor da pergunta, houve praticamente unanimidade, informando o método tradicional como modelo de ensino. È o que vemos na resposta a seguir:

Aluno 5: "Seguem o modelo tradicional".

Terceira questão Você apresenta facilidade ou dificuldade em compreender os conteúdos de Matemática abordados no Ensino Médio?

Esse questionamento pareceu-nos de óbvia resposta. Não é de hoje que a matemática é o terror da maioria dos alunos. A resposta apontada no gráfico a seguir, revela que mais da metade da turma realmente tem dificuldades em assimilar os conteúdos da disciplina neste nível de escolaridade.

Gráfico 2 – Facilidades ou dificuldades em aprender Matemática



Fonte: Elaborado pelo autor

Imaginamos que os motivos para justificar essa problemática são muitos, entretanto, de acordo com os relatos da turma, eles foram pouco relacionados. Alguns apontam que a dificuldade de aprendizagem depende do conteúdo abordado, outros, porém mencionam a falta de atenção nas explicações. A esse respeito, vejamos a resposta seguinte:

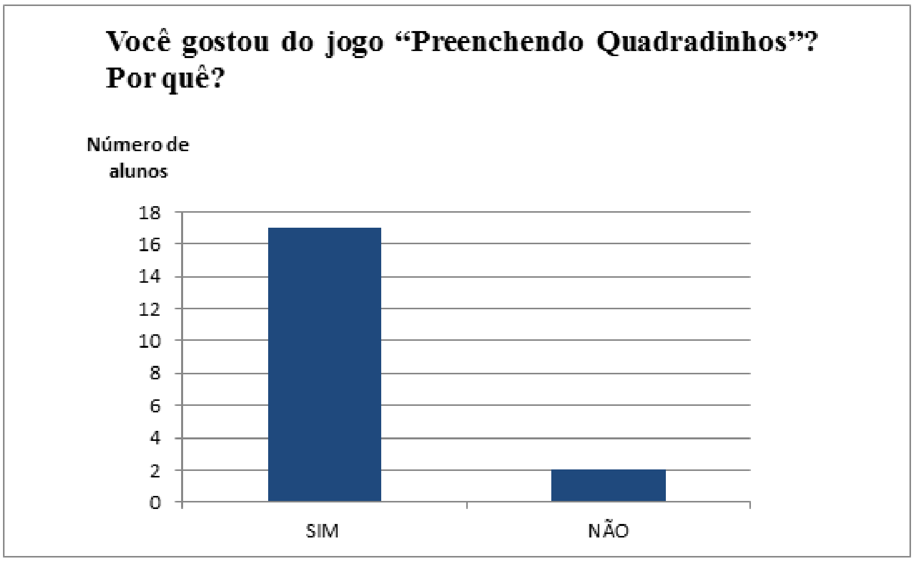
Aluno 10: "Não tenho dificuldade, é só eu prestar atenção".

Algo que deve ser ressaltado nesta colocação é que o interesse do aluno, muitas vezes é desviado. Isto se deve a motivos diversos, e está na prática docente reverter essa situação, através de aulas diferenciadas, que alimentem a curiosidade do aprendiz.

Quarta questão Você gostou do jogo “Preenchendo Quadradinhos”? Por quê?

Propomos este item no intuito de saber se os alunos gostaram ou não do jogo. Este é, portanto, um ponto crucial do trabalho, pois significa um dos indícios de que estaríamos num bom caminho. O resultado, conforme apresentamos no gráfico abaixo, foi bastante satisfatório, pois reforçou essa certeza. Ele nos mostra que aproximadamente 90% da turma aprovou a atividade lúdica.

Gráfico 3 – Gosto pelo jogo "Preenchendo Quadradinhos"



Fonte: Elaborado pelo autor

Selecionamos, a seguir, as respostas de quatro alunos com suas respectivas justificativas.

Aluno 1: “Gostei. É bem interessante o jogo, trabalha a lógica e atenção e ao mesmo tempo competitivo que torna o jogo mais divertido ainda”.

Aluno 6: “Sim porque foi uma aula diferente e também bota os alunos para usar a cabeça um pouco.”

Aluno 11: “Sim, pois ajudou a raciocinar e é bastante interessante”.

Aluno 15: “Não, porque não entendi”.

Os relatos dos três alunos 1, 6 e 11 denotam que eles gostaram do jogo pois o mesmo era interessante, divertido e estimulava o raciocínio lógico. Isto nos leva a compreender que mesmo nas aulas que exigem mais operações numéricas ou algébricas, se o raciocínio lógico é incentivado, ou se é justificado o motivo de realização de certos cálculos, muitas vezes omitidos, tais atitudes podem propiciar o interesse do aluno. Empregar uma fórmula, por exemplo, sem saber como ela foi obtida, convenhamos, não é nada estimulante.

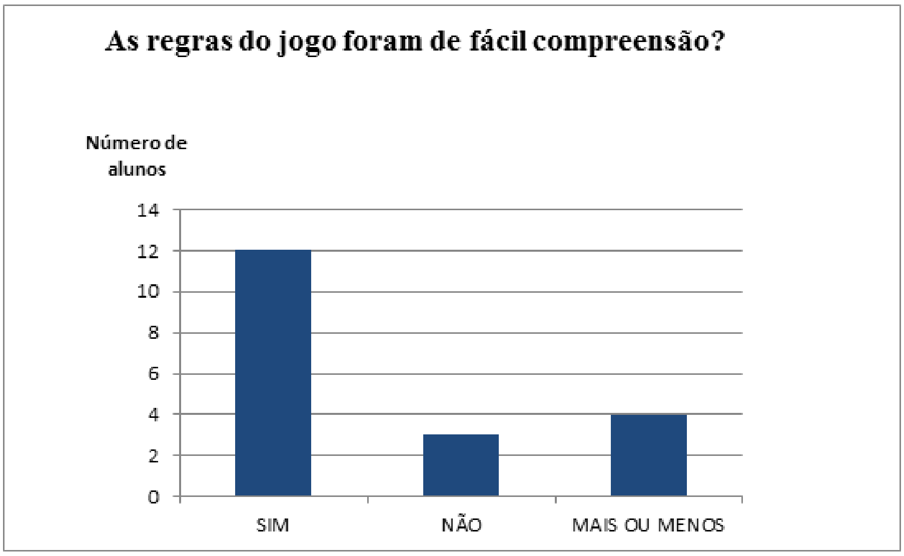
A justificativa do aluno 15 é bastante precisa, e nos faz relacioná-la a do aluno 5, quando perguntado se gostava de matemática. Neste momento, nem o jogo em si, é autônomo, isto é, somente ele não basta para motivar o educando e garantir uma aprendizagem satisfatória. Esse aluno não gostou do jogo porque provavelmente não compreendeu as suas regras. Podemos deduzir que durante a explicação das mesmas, a informação não abrangeu a todos. Houve, assim, uma falha no processo comunicativo e que merece ser sanado em futuras aplicações do jogo.

Quinta questão As regras do jogo foram de fácil compreensão?

Essa questão está intimamente ligada a anterior. Pelos dados coletados, percebemos que três alunos alegaram não compreender as regras do jogo. Destes, estão incluídos os dois que informaram não gostar do mesmo. O terceiro aluno não justificou o motivo pelo qual as regras não foram de fácil compreensão para ele. Quatro alunos, por sua vez, informaram ter delas apenas um entendimento parcial, enquanto que a maioria alegou não ter maiores dificuldades quanto a isto.

Observemos o gráfico seguinte em que essas informações são transmitidas de forma mais prática.

Gráfico 4 – Opinião do alunos sobre a compreensão das regras do jogo



Fonte: Elaborado pelo autor

Das respostas declaradas, escolhemos duas que exprimem o posicionamento desses estudantes quanto ao que compreenderam sobre as regras do jogo:

Aluno 1: “Sim, deu para compreender fácil com a explicação do professor”.

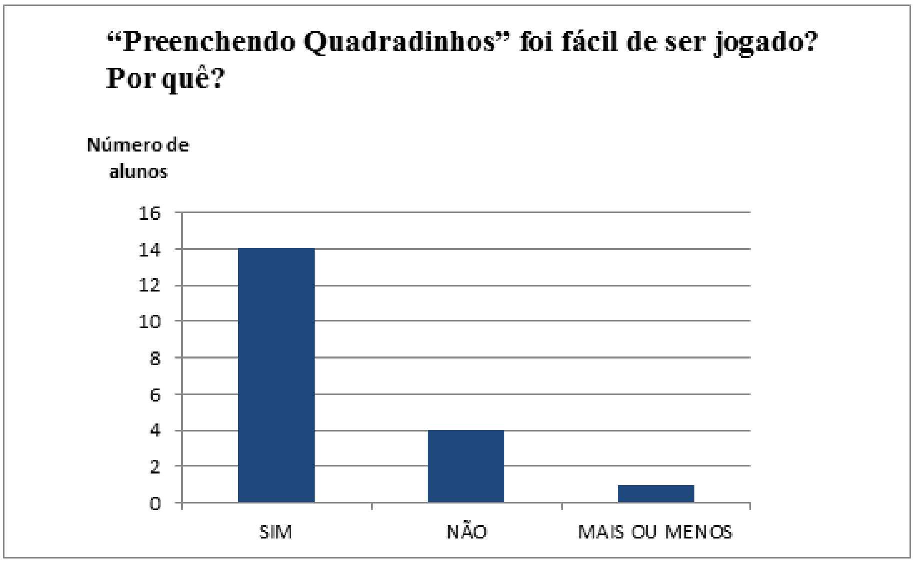
Aluno 7: “Mais ou menos. No começo eu não tinha entendido mas com o rolar do jogo foi ficando fácil e divertido”.

Evidenciando a resposta do aluno 7, percebemos que o próprio desenvolvimento do jogo em si contribuiu para ele se apropriar dos princípios da brincadeira. Foi realmente o que observamos durante a aplicação em sala, onde na primeira etapa da dinâmica, os questionamentos foram sucessivos, o mesmo não ocorrendo nas etapas finais.

Sexta questão “Preenchendo Quadradinhos” foi fácil de ser jogado? Por quê?

A resposta dada a este questionamento revelou, como poderemos visualizar no gráfico adiante que 14 alunos, isto é, aproximadamente 74% dos entrevistados afirmou ter sido “Preenchendo Quadradinhos” fácil de ser jogado. Esse resultado nos foi satisfatório e animador, pois de certo modo vem confirmar o bom direcionamento que nossos esforços estão tomando.

Gráfico 5 – Facilidades ou dificuldades ao jogar



Fonte: Elaborado pelo autor

A fim de elucidar o que motivou tais informações, selecionamos as seguintes respostas de dois participantes:

Aluno 19: "Sim, pois tinha regras fáceis de compreensão".

Aluno 15: "Não, porque não prestei atenção na explicação do jogo".

Entendemos que para ser considerado fácil, o jogo deve primeiramente possuir regras compreensíveis. Foi exatamente isto o que alegou o aluno 19 e alguns outros mais. Precisa também despertar o interesse do jogador. Conforme justifica o aluno 15, esse critério não foi totalmente eficaz, uma vez que se ele não se atentou para as explicações do jogo, o mesmo pode não ter-lhe sido atraente. Mantendo a mesma linha de raciocínio, precisa ainda a disputa ter um objetivo final que possa sempre ser alcançado. Jogos complexos, por exemplo, tendem a transmitir no aluno a sensação de não poderem ser solucionáveis, desmotivando-o e não lhe garantindo um aprendizado conveniente.

Sétima questão Que sugestões ou críticas você apresentaria a este jogo?

Propomos esta pergunta com o intuito de colher as percepções dos alunos em relação ao jogo que nós, enquanto elaboradores, poderíamos não ter observado. Nada melhor do que eles mesmos, que vivenciaram a atividade, para nos auxiliarem quanto a isso. As respostas obtidas poderão nos oferecer subsídios para o aperfeiçoamento do jogo bem como a criação e desenvolvimento de outros mais.

Infelizmente, a maioria dos alunos afirmou não ter criticas ou sugestões. Dos que se dispuseram a comentar, destacamos os seguintes:

Aluno 09: “Sugiro aumentar a pontuação, para ficar mais competitivo”.

Aluno 11: “Poderia ter mais tempo”

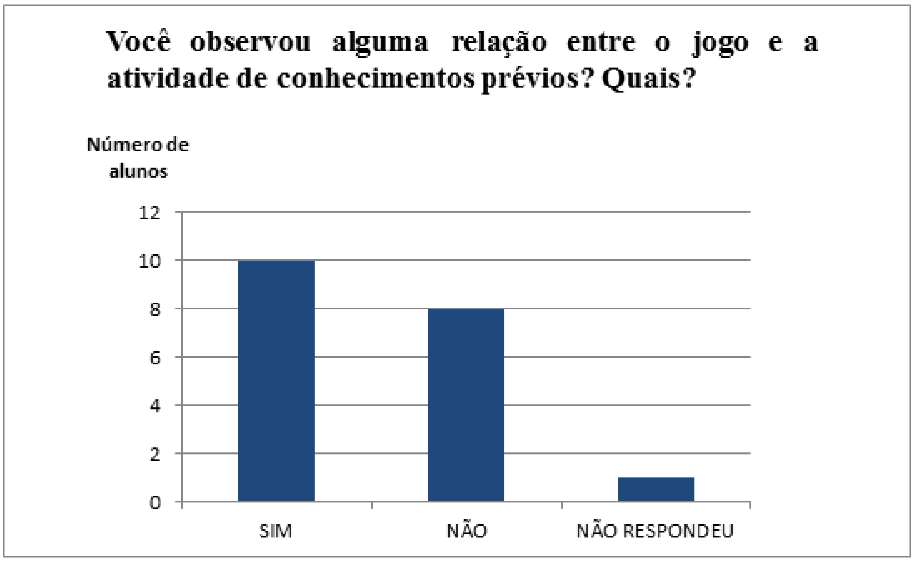
A questão do tempo, relatado pelo entrevistado acima, foi algo que nos preocupou desde a primeira aplicação do jogo. Para tanto, neste segundo momento, fizemos uma adaptação, prolongando o tempo de disputa em cada etapa. Ainda assim, reconhecemos que o mesmo foi insuficiente para alguns. Na verdade, percebemos que ao preencher os quadradinhos, os alunos queriam completar todas as possibilidades, sendo prazerosa esta atividade para eles.

Oitava questão Você observou alguma relação entre o jogo e a atividade de conhecimentos prévios? Quais?

Como já mencionamos anteriormente, o jogo bem como a atividade de conhecimentos prévios foram aplicados no primeiro dia dos nossos trabalhos na turma da 3ª série A. Essa questão, um tanto quanto audaciosa de nossa parte, proposta no dia seguinte, foi justamente para verificar o que os alunos reconheceram de matemática na dinâmica, relacionando-a com os conceitos de divisibilidade, m.d.c. e equações.

Pelos dados expostos no seguinte gráfico, obtidos das respostas colhidas, supomos que os alunos julgaram perceber alguma relação entre ambas.

Gráfico 6 – Relação entre o jogo e a atividade de conhecimentos prévios



Fonte: Elaborado pelo autor

A análise detalhada de todas as respostas nos sugere que as mesmas não estão baseadas em argumentos convincentes. Dos que responderam sim, a grande maioria não justificou ou não lembra a qual conteúdo matemático o jogo estava estruturado. Excetuando estes, selecionamos os relatos de dois alunos que demonstraram alguma coerência com o que lhes era indagado:

Aluno 1: "Sim os quadradinhos o total deles".

Aluno 5: "Acho que sim, o m.m.c., entre outros".

Nas palavras do aluno 1, presumimos que ele se referia ao total de quadradinhos como um valor que obrigatoriamente deveria ser decomponível entre as peças que constituíam o jogo. Já o aluno 5, citou o m.m.c., onde acreditamos mais uma vez que ele se referia ao m.d.c., também imaginando o conceito de divisibilidade.

Nona questão Que conteúdos matemáticos você acredita possam ser abordados com o jogo "Preenchendo Quadradinhos"?

As respostas dadas a este item serviram, não somente como no anterior, em relacionar o jogo com a matemática, mas também em dimensionar nos estudantes o que eles entendiam como conteúdos matemáticos. Saberíamos, então a que tópicos desta disciplina, eles estariam, pelo menos, familiarizados. Vejamos o que alguns deles relataram:

Aluno 1: “Formas geométricas, equação”.

Aluno 2: “Dividir números e cores no quadrado”.

Aluno 9: “Geometria, operações básicas”.

Aluno 18: “Raciocínio lógico”.

Identificamos nestes apontamentos, e nos demais também, que todos demonstraram possuir noções relativas entre o jogo e suas possibilidades de aplicação de conteúdos em sala de aula. Na verdade, estão envolvidas no mesmo, a geometria com as formas geométricas, as operações básicas como divisão e também, conforme indica o aluno 18, o raciocínio lógico se estendendo, em consequência, para os princípios de contagem.

Décima questão O que você pensa a respeito do uso de jogos para a melhor compreensão de um conteúdo matemático?

Elaboramos esta pergunta, diferentemente das demais, com certa expectativa em relação ao que a turma opinaria. Compreendendo a carência dos alunos por aulas diferenciadas, vimos as repostas a este item, como um apelo deles para continuação das inovações nos métodos de ensino, não só de Matemática, mas de todas as disciplinas. Divulgamos abaixo três colocações, resumindo de certo modo, a opinião da turma.

Aluno 1: “É bom o jogo porque fica uma aula diferente e a gente aprende e se diverte”.

Aluno 3: “Acho que com o jogo ajuda a gente a compreender mais os cálculos”.

Aluno 18: “Uma forma mais dinâmica, e sai da mesmice de sempre”.

O aluno 1, conforme o exposto, relaciona o aprendizado à diversão e compreendemos esse ponto de vista, não como uma diversão a título de passatempo, mas algo que seguindo o mesmo pensamento do aluno 18, promove a fuga da mesmice das aulas tradicionais. O aluno 3, por sua vez, cita o jogo como uma ferramenta que favorece nele um melhor entendimento dos cálculos. Foi exatamente isto o que observamos no segundo momento com a turma em que expusemos no quadro os conceitos matemáticos contidos no jogo. A resolução da quarta questão da atividade de conhecimentos prévios, só passou a fazer realmente sentido quando mostramos que a busca dos pares ordenados que solucionassem a equação $2x + 4y = 12$ poderia ser feita a partir da composição das peças que revestiam o retângulo 3x4.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme percebemos, novas perspectivas são elaboradas para mudar o panorama tradicionalista que perdura até então no ensino da Matemática. Foi particularmente este modelo de docência um dos maiores causadores da aversão que grande parte dos alunos apresenta a respeito desta disciplina. E não é para menos. A repetição mecânica de exercícios é desestimulante para eles principalmente por que não veem nisso nada correlacionado com o seu cotidiano. Não percebem, portanto, a aplicabilidade deste saber para fins úteis.

A proposta de ensinar equações diofantinas lineares no Ensino Médio e de maneira diferenciada baseou o desenvolvimento deste trabalho. E nesse processo, o jogo pedagógico se mostrou bastante eficiente na busca desse objetivo. Conforme identificamos, a atividade lúdica proporciona um envolvimento muito mais amplo da turma, pois os alunos se veem como parte integrante de um todo na busca de um objetivo palpável, neste caso, vencer a disputa. Este propósito, sem dúvida, foi desencadeador para estimular a vontade dos alunos, contudo, entendemos que os ganhos obtidos não se limitam a apenas isto. Há, certamente, a apropriação de elementos cognitivos, imperceptíveis para a maioria deles, como o desenvolvimento do pensar matemático e do raciocínio lógico.

Ao buscarmos introduzir no Ensino Médio o conteúdo proposto, pensamos no cuidado de não formalizá-lo demais, transformando aquele ambiente em um apêndice de uma turma de Ensino Superior. Estaria, assim, fora dos nossos propósitos preestabelecidos. Contudo, sabíamos perfeitamente da viabilidade de tal metodologia, pois os requisitos para o seu desenvolvimento vinham de conceitos supostamente aprendidos no Ensino Fundamental e, portanto, estariam ao alcance de todos.

Para a análise dos dados obtidos, os questionários desenvolvidos se mostraram preponderantes. Percebemos através deles o perfil de cada participante da atividade se vendo como alguém valorizado, cuja opinião é significativa para o processo de ensino. A primeira atividade denunciou resultados preocupantes sobre o nível de conhecimentos adquiridos até o momento. Isso, por diversos aspectos, já nos era esperado. O questionário pós-jogo, esse sim, desempenhou maior ferramenta para as nossas observações.

Por meio das questões propostas no segundo dia de atividades, verificamos diversos aspectos relativos à dinâmica apresentada e à própria docência em Matemática. Percebemos que os alunos, em sua maioria, não detestam a disciplina por si mesma, mas pela forma como ela é ensinada, pouco lhes despertando a atenção. Julgamos ser esse um dos principais motivos que levou grande parte da turma a alegar dificuldades em assimilá-la. Nesse sentido, o jogo representa uma ponte interligando o interesse dos estudantes e o conhecimento proposto. Pelas informações coletadas, entendemos que o jogo se desenvolveu de forma tranquila, pois a turma, em seu maior percentual, respondeu gostar do material, demonstrando habilidade em manuseá-lo e compreender suas regras.

A exposição dos conteúdos matemáticos referentes às equações diofantinas lineares também propiciou-nos ricos elementos de análise. Entendemos que o ato de abordar as equações e suas soluções relacionando-as ao jogo favoreceu a compreensão do assunto de um modo geral. Como exemplo, percebemos que os alunos assimilaram, em sua maioria, conceitos como divisibilidade, e o porquê de algumas equações não apresentarem solução, utilizando-se apenas dessa associação. O próprio transcorrer da aula, centrada em definições e fórmulas, se processou atraindo a atenção da turma, uma vez que a dinâmica proporcionou um incremento no entusiasmo da mesma.

Finalizamos nossas considerações, incentivando aqueles que buscam inovar em suas metodologias de ensino, a aceitar o desafio de inserir em sua vivência didática, o projeto aqui exposto. Sabemos das dificuldades em se planejar as aulas, pois diversas variáveis interferem no processo, desconsiderando ainda o extenso conteúdo programático a ser ministrado em um período letivo relativamente curto. As transformações no ensino requerem a audácia da mudança, e nossa proposta, passiva de alterações ou adaptações, acreditamos representar uma decente iniciativa.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Teoria Elementar dos Números**. São Paulo: Nobel, 1981.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias; v.2, Brasília: MEC/SEB, 2006. 135 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. acesso em: 04 ago. 2019.

DESSBESEL, R. S. **Ensino de matemática através de jogos**: uma maneira prazerosa de ensinar e aprender. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/925/392>. Acesso em: 24 jul. 2019.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 3. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2008.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM – SP, n. 7, julho-agosto 1990. Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/jogos/Fiorentini_Miorin.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2019.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Campinas, SP. Faculdade de Educação, UNICAMP, 2000. Disponível em: <https://pedagogiaaopedaletra.com/wp-content/uploads/2012/10/O-CONHECIMENTO-MATEM%C3%81TICO-E-O-USO-DE.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2019.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações: ensino médio, volume 2. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KIYA, M. C. S. **O uso de Jogos e de atividades lúdicas como recurso pedagógico facilitador da aprendizagem.** 2014. Caderno Pedagógico. Ortigueira, Paraná. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_uepg_ped_pdp_marcia_cristina_da_silveira_kiya.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2019.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar**: Teoria dos Números, Volume 5. 2. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2013.

OLIVEIRA, S. B. **As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2006. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11059/1/dissertacao_silvio_barbosa_oliveira.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2019.

PEREIRA, A. L. L. **A Utilização do Jogo como recurso de motivação e aprendizagem.** Universidade do Porto. Faculdade de Letras. Portugal, 2013. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71590/2/28409.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2019.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares:** Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11292/1/Wagner%20Marcelo%20Pommer.pdf>. Acesso em: 25 mai. 2019.

RAFAEL, P. S. **Uma proposta de ensino de equações diofantinas lineares no Ensino Básico utilizando a metodologia de resolução de problemas.** Monografia (Licenciatura em Matemática). IFSP. São Paulo, 2014. Disponível em: <https://ifspmatematica.files.wordpress.com/2015/07/tcc-rafael-prado.pdf>. Acesso em: 16 abr. 2019.

RESENDE, M. R. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontificia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: <https://tede.pucsp.br/bitstream/handle/11207/1/Marilene%20Ribeiro%20Resende.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2019.

RIOS, D. G. **Equações Diofantinas Lineares na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=30765>. Acesso em: 16 abr. 2019.

ROCQUE, G. D.; PITOMBEIRA, J. B. **Uma equação diofantina e suas resoluções**. In. Revista do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, n. 19, p. 39-47, 1991. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/19/9.htm>. Acesso em: 17 mai. 2019.

SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria dos Números.** Rio de Janeiro, IMPA: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. (Coleção Matemática Universitária).

SELVA, K. R. **O jogo matemático como recurso para a construção do conhecimento**. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_4.pdf. Acesso em 24 jul. 2019.

SILVA, C. A. **A torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal Rural do Semiárido, Mossoró, 2015. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=289>. Acesso em: 23 jul. 2019.

VITAL, M. J. **Ensino tradicional da matemática x resolução de problemas**. Disponível em: <https://www.recantodasletras.com.br/artigos-de-educacao/3183824>. Acesso em: 21 jul. 2019.

APÊNDICE A – ATIVIDADE DE CONHECIMENTOS PRÉVIOS

01. O que você entende por divisores de um número inteiro?

____

____

02. Defina, com suas palavras, o m.d.c. (máximo divisor comum) de dois números inteiros.

____

____

03. Determine:

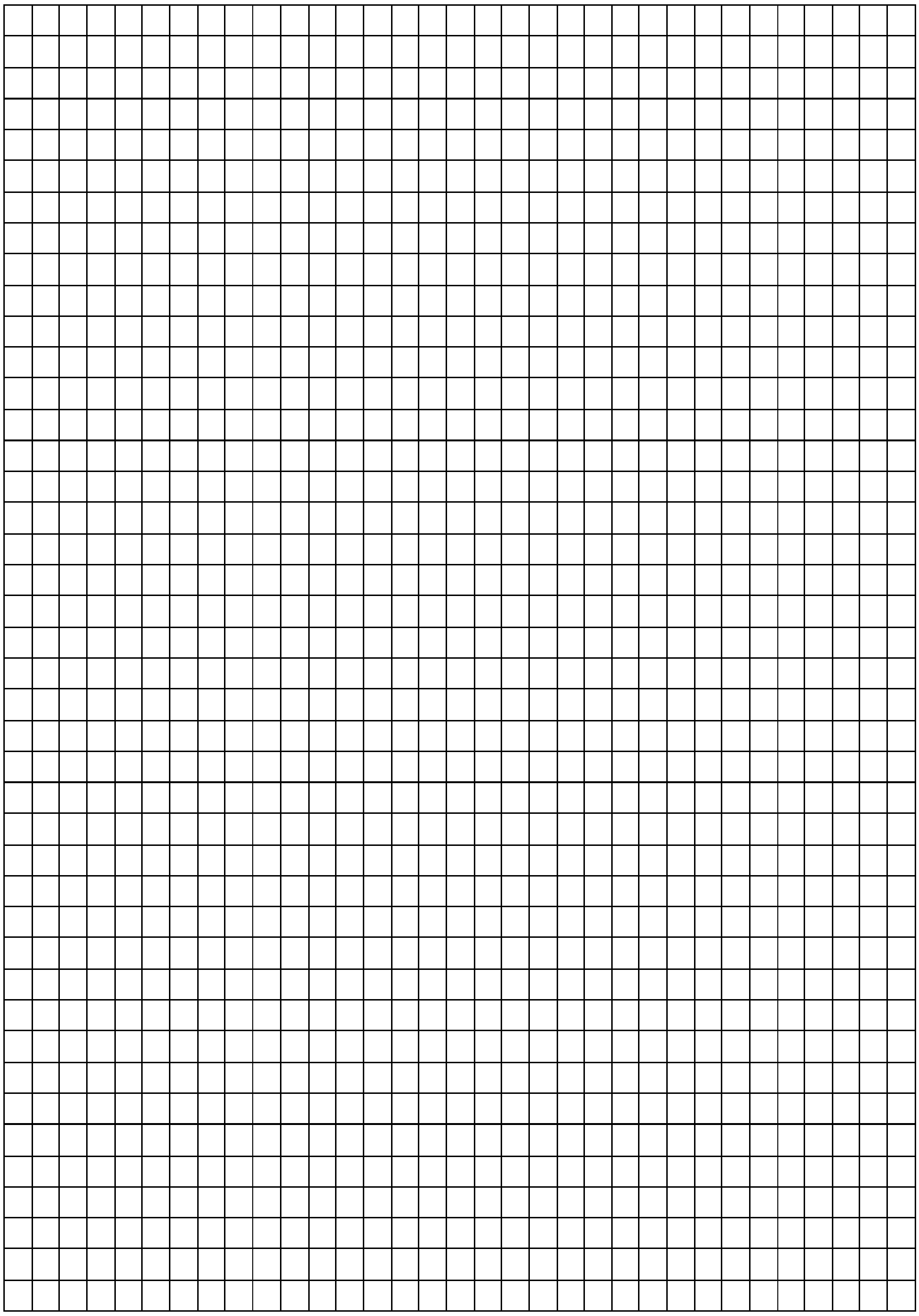
a) m.d.c.(20, 28)

b) m.d.c.(21, 25)

04. Quantas soluções naturais (x, y) possui a equação $2x + 4y = 20$? Quais são elas?

APÊNDICE B – MALHA QUADRICULADA

Figura 8 – Malha quadriculada



Fonte: Disponível em: <http://maniadecalcular.blogspot.com/2017/06/malha-quadriculada.html>. Acesso em: 07 jun. 2019.

Resultados: ____

Pontuação: ____

APÊNDICE C – REGRAS DO JOGO "PREENCHENDO QUADRADINHOS"

Material Necessário:

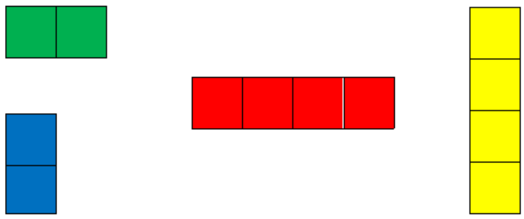
Malha quadriculada

Canetas hidrográficas

Procedimentos:

- O jogo será disputado entre duplas, em três etapas;
- Para cada etapa, as duplas receberão uma malha quadriculada;
- Nesta malha, elas revestirão retângulos indicados pelo professor, pintando peças formadas por 2 ou 4 quadradinhos em posições conforme o modelo abaixo;

Figura 9 – Peças do jogo

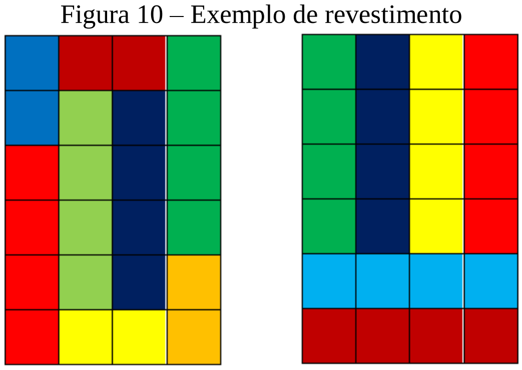


Fonte: Elaborada pelo autor

- Em um mesmo retângulo, as peças devem ser pintadas com cores diferentes;

  Exemplo de revestimentos do retângulo 4x6:

Figura 10 – Exemplo de revestimento

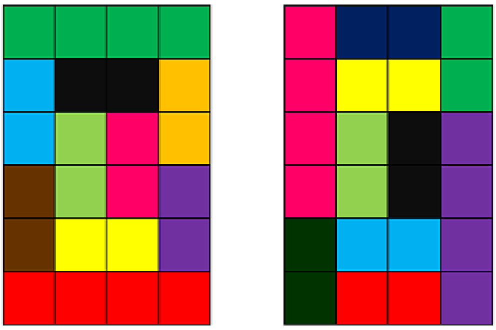


Fonte: Elaborada pelo autor

- Será considerada repetição, retângulos revestidos com a mesma quantidade de peças de 2 ou 4 quadradinhos, mesmo com cores diferentes ou posições diferentes;

Exemplo de repetição:

Figura 11 – Exemplo de repetição de revestimento



Fonte: Elaborada pelo autor

Em ambos, foram utilizadas 8 peças de 2 quadradinhos e 2 peças de 4 quadradinhos;

- O objetivo do jogo é revestir a maior quantidade de retângulos, sem haver repetições;
- De acordo com os retângulos divulgados pelo professor no decorrer do jogo, a 1ª etapa durará 10 minutos, a 2ª etapa durará 15 minutos e a 3ª etapa, 10 minutos;

Apuração dos pontos:

- Após as três etapas, as malhas quadriculadas serão recolhidas, e redistribuídas a duplas oponentes que realizarão a contagem dos pontos;
- Cada revestimento correto vale 2 pontos e cada revestimento incorreto, incompleto ou repetido vale –1 ponto;
- Ganha o jogo, a dupla que somar mais pontos;
- Em caso de empate, soma-se 1 ponto à dupla que tecnicamente melhor revestiu os retângulos, considerando-se o melhor preenchimento das cores.

APÊNDICE D – QUESTIONÁRIO

01. Você gosta de estudar Matemática? Por quê?

02. Durante toda sua vida escolar (Ensino Fundamental e agora Ensino Médio) como se processou o ensino da Matemática? As aulas seguiam o modelo tradicional de ensino ou houve inovações?

03. Você apresenta facilidade ou dificuldade em compreender os conteúdos de Matemática abordados no Ensino Médio?

04. Você gostou do jogo “Preenchendo Quadradinhos”? Por quê?

05. As regras do jogo foram de fácil compreensão?

06. “Preenchendo Quadradinhos” foi fácil de ser jogado? Por quê?

07. Que sugestões ou críticas você apresentaria a este jogo?

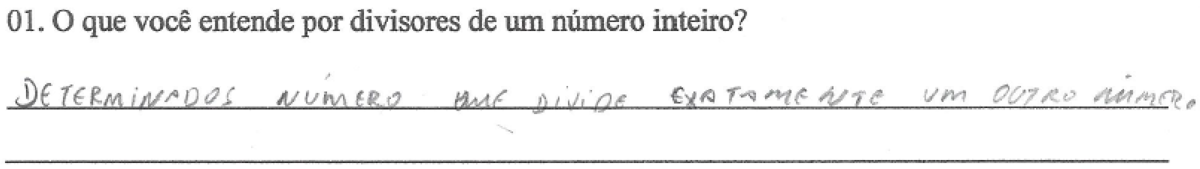
08. Você observou alguma relação entre o jogo e a atividade de conhecimentos prévios? Quais?

09. Que conteúdos matemáticos você acredita possam ser abordados com o jogo "Preenchendo Quadradinhos"?

10. O que você pensa a respeito do uso de jogos para a melhor compreensão de um conteúdo matemático?

APÊNDICE E – RESPOSTAS DE ALGUNS ALUNOS

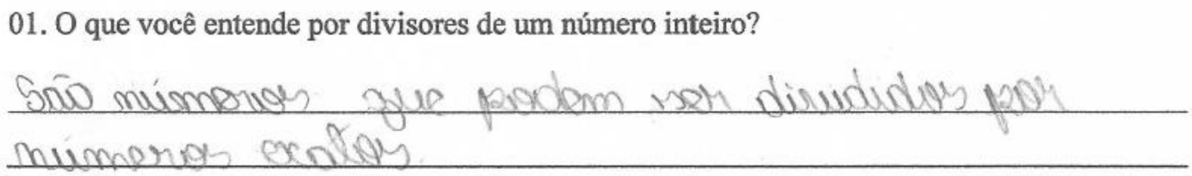
Aluno 1: “Determinados números que divide exatamente um outro número”.



01. O que você entende por divisores de um número inteiro?

DETERMINADOS NUMERO QUE DIVIDE EXATAMENTE UM OUTRO NÚMERO.

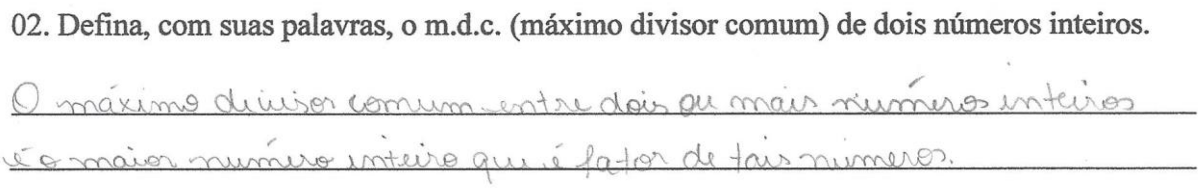
Aluno 2: “São números que podem ser divididos por números exatos.”



01. O que você entende por divisores de um número inteiro?

São números que podem ser divididos por números exatos.

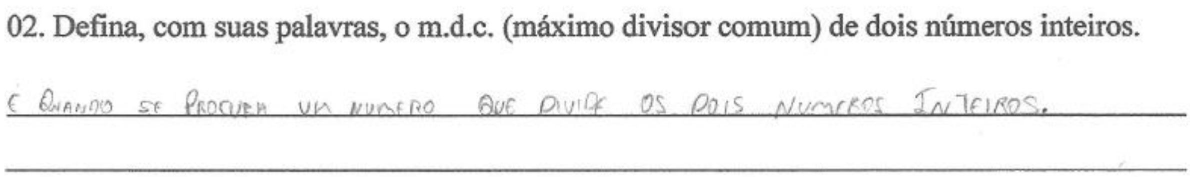
Aluno 4: “O máximo divisor comum entre dois ou mais números inteiros é o maior número inteiro que é fator de tais números”.



02. Defina, com suas palavras, o m.d.c. (máximo divisor comum) de dois números inteiros.

O máximo divisor comum entre dois ou mais números inteiros é o maior número inteiro que é fator de tais números.

Aluno 16: “É quando se procura um número que divide os dois números inteiros”.



02. Defina, com suas palavras, o m.d.c. (máximo divisor comum) de dois números inteiros.

É QUANDO SE PROCURA UM NUMERO QUE DIVIDE OS DOIS NUMEROS INTEIROS.

03. Determine:

a) m.d.c.(20, 28)

20 | 2
10 | 2
5 | 5
1

28 | 2
14 | 2
7 | 7
1

$20 = 2^2 \cdot 5$
$28 = 2^2 \cdot 7$

b) m.d.c.(21, 25)

21 | 3
7 | 7
1

25 | 5
5 | 5
1

$21 = 3 \cdot 7$
$25 = 5^5$

Aluno 8: "As soluções são 2, 4 e 20."

04. Quantas soluções naturais (x, y) possui a equação 2x + 4y = 20? Quais são elas?

os soluções são 2, 4 e 20.

Aluno 18: "Sim, é algo necessário no cotidiano e, além disso, sempre tem algo novo a se aprender."

01. Você gosta de estudar Matemática? Por quê?

SIM, É ALGO NECESSARIO NO COTIDIANO, E ALÉM DISSO SEM-PRE TEM ALGO NOVO A SI APRENDER.

Aluno 5: "Não, porque eu não compreendo".

01. Você gosta de estudar Matemática? Por quê?

não, porque eu não compreendo

Aluno 5: “Seguem o modelo tradicional”.

02. Durante toda sua vida escolar (Ensino Fundamental e agora Ensino Médio) como se processou o ensino da Matemática? As aulas seguiam o modelo tradicional de ensino ou houve inovações?

seguem o modelo tradicional

Aluno 10: “Não tenho dificuldade, é só eu prestar atenção”.

03. Você apresenta facilidade ou dificuldade em compreender os conteúdos de Matemática abordados no Ensino Médio?

Não tenho dificuldade é só eu prestar atenção

Aluno 1: “Gostei. É bem interessante o jogo, trabalha a lógica e atenção e ao mesmo tempo competitivo que torna o jogo mais divertido ainda”.

04. Você gostou do jogo “Preenchendo Quadradinhos”? Por quê?

Gostei. e bem interessante o jogo trabalha a logica e a atenção e ao mesmo tempo competitivo que torna o jogo mais divertido aida

Aluno 6: “Sim porque foi um aula diferente e também bota os alunos para usar a cabeça um pouco.”

04. Você gostou do jogo "Preenchendo Quadradinhos"? Por quê?

Sim, porque foi uma aula diferente e tambem bota os alunos pra usar a cabeça um pouco.

Aluno 11: "Sim, pois ajudou a raciocinar e é bastante interessante".

04. Você gostou do jogo "Preenchendo Quadradinhos"? Por quê?

Sim, pois ajudou a raciocinar e é bastante interessante

Aluno 15: "Não, porque não entendi".

04. Você gostou do jogo "Preenchendo Quadradinhos"? Por quê?

Não, Parque Não Entender.

Aluno 1: "Sim, deu para compreender fácil com a explicação do professor".

05. As regras do jogo foram de fácil compreensão?

sim, deu pra compreender facil com a explicação do professor

Aluno 7: "Mais ou menos. No começo eu não tinha entendido mas com o rolar do jogo foi ficando fácil e divertido".

05. As regras do jogo foram de fácil compreensão?

Mas eu mesmo no inicio eu não tinha entendido mais com o Rolar do jogo foi ficando facil e divertido

Aluno 19: “Sim, pois tinha regras fáceis de compreensão”.

06. “Preenchendo Quadradinhos” foi fácil de ser jogado? Por quê?

Sim, pois tinha regras fáceis de compreensão

Aluno 15: “Não, porque não prestei atenção na explicação do jogo”.

06. “Preenchendo Quadradinhos” foi fácil de ser jogado? Por quê?

Não, Porque Não Prestei Atenção Na Explicação do Jogo.

Aluno 09: “Sugiro aumentar a pontuação, para ficar mais competitivo”.

07. Que sugestões ou críticas você apresentaria a este jogo?

SUGIRO AUMENTAR A PONTUAÇÃO, PARA FICAR MAIS COMPETITIVO.

Aluno 11: “Poderia ter mais tempo”

07. Que sugestões ou críticas você apresentaria a este jogo?

poderia ter mais tempo

Aluno 1: “Sim os quadradinhos o total deles”.

08. Você observou alguma relação entre o jogo e a atividade de conhecimentos prévios? Quais?

Sim os quadradinhos o total deles

Aluno 5: “Acho que sim, o m.m.c., entre outros”.

08. Você observou alguma relação entre o jogo e a atividade de conhecimentos prévios? Quais?

Acho que sim, o m.m.c e entre outros

Aluno 1: “Formas geométricas, equação”.

09. Que conteúdos matemáticos você acredita possam ser abordados com o jogo “Preenchendo Quadradinhos”?

formas geometricas, equação.

Aluno 2: “Dividir números e cores no quadrado”.

09. Que conteúdos matemáticos você acredita possam ser abordados com o jogo "Preenchendo Quadradinhos"?

Dividir números e casas no quadrado

Aluno 9: "Geometria, operações básicas".

09. Que conteúdos matemáticos você acredita possam ser abordados com o jogo "Preenchendo Quadradinhos"?

GEOMETRIA, OPERAÇÕES BÁSICAS

Aluno 18: "Raciocínio lógico".

09. Que conteúdos matemáticos você acredita possam ser abordados com o jogo "Preenchendo Quadradinhos"?

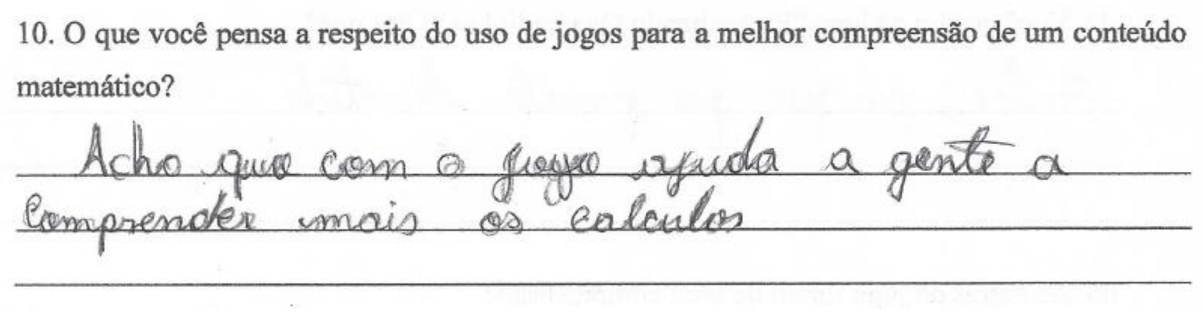
RACIOCINIO LÓGICO

Aluno 1: "É bom o jogo porque fica uma aula diferente e a gente aprende e se diverte".

10. O que você pensa a respeito do uso de jogos para a melhor compreensão de um conteúdo matemático?

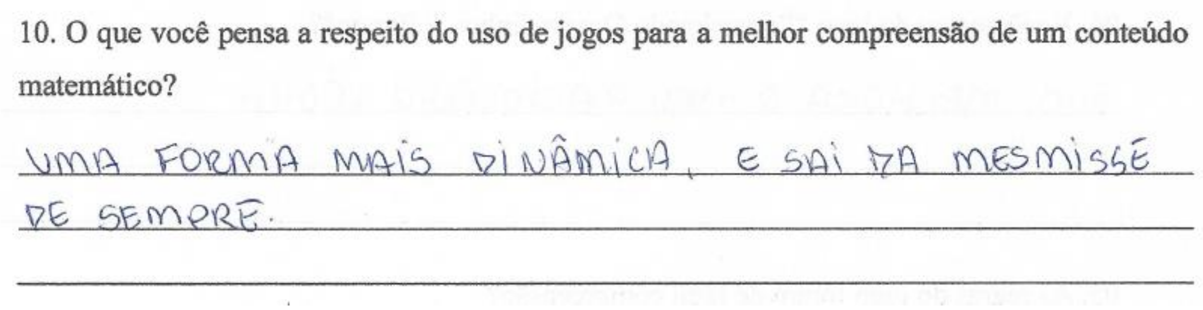
E Bom o jogo porque fica uma aula diferente e a gente aprende e se diverti

Aluno 3: "Acho que com o jogo ajuda a gente a compreender mais os cálculos".


10. O que você pensa a respeito do uso de jogos para a melhor compreensão de um conteúdo matemático?

Acho que com o jogo ajuda a gente a Compreender mais os calculos

Aluno 18: “Uma forma mais dinâmica, e sai da mesmice de sempre”.


10. O que você pensa a respeito do uso de jogos para a melhor compreensão de um conteúdo matemático?

UMA FORMA MAIS DINÂMICA, E SAI DA MESMISSÉ DE SEMPRE.