Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Métodos Algébricos e Geométricos Para Determinação das Raízes das Equações Polinomiais de Graus Dois, Três e Quatro.

Francisco Aldrin Armstrong Rufino

Junho/2013
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Métodos Algébricos e Geométricos Para Determinação das Raízes das Equações Polinomiais de Graus Dois, Três e Quatro †

por

Francisco Aldrin Armstrong Rufino

sob orientação do

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto

sob coorientação do

Prof. Me. Gilmar Otávio Correia

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Junho/2013
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da CAPES.

R719m Rufino, Francisco Aldrin Armstrong.
Métodos algébricos e geométricos para determinação das raízes das equações polinominais de graus dois, três e quatro/Francisco Aldrin Armstrong Rufino.- João Pessoa, 2013.
84f. : il.
Orientador: Carlos Bocker Neto
Coorientador: Gilmar Ótávio Correia
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN
1. Equações algébricas. 2. *Métodos de resolução*. 3.Resolução por radicais.

UFPB/BC CDU: 512(043)

Métodos Algébricos e Geométricos Para Determinação das Raízes das Equações Polinomiais de Graus Dois, Três e Quatro

por

Francisco Aldrin Armstrong Rufino

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada por:

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB (Orientador)

Gilmar Otávio Correia

Prof. Me. Gilmar Otávio Correia - UFPB (Coorientador)

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva - UFPB

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Junho/2013

Agradecimentos

A Deus, por me amparar nos momentos difíceis, dar-me força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

A minha esposa Ieda Rufino e minha maravilhosa filha Vitório Rufino, as quais amo muito, pelo carinho, pelo incentivo que me deram desde o primeiro dia, pela paciência que revelaram ter, principalmente nos momentos mais difíceis desses dois anos.

Ao meu pai, irmãos e familiares, pelo estímulo, pela paciência e apoio incondicional em todos os momentos.

Ao amigo, compadre e conterrâneo Professor Marco Aurélio pela sua amizade e, claro, pela correção ortográfica.

Aos Professores Carlos Bocker Neto e Gilmar Otávio Correia (Orientador e Co-orientador, respectivamente) pela disponibilidade, colaboração, conhecimentos transmitidos e capacidade de estímulo ao longo de todo o trabalho.

Ao Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT/CCEN-UFPB, Professor João Marcos Bezerra do Ó e à Professora Flávia Jerônimo Barbosa, por ter acreditado num sonho que agora é de todos, que, com dedicação, presteza e competência conduziu esse mestrado durante os últimos dois anos.

Aos professores do PROFMAT/CCEN-UFPB, que desempenharam com dedicação as aulas ministradas.

A todos os colegas do PROFMAT/CCEN-UFPB, em especial a Ambrósio Elias, Antonio Geraldo, Aurílio Guedes, Fenando Viana, Herbert Souza e Sívio Orleans, pela acolhida durante os dois anos de estudos em João Pessoa.

À Professora Lenina Lopes, pela amizade e disponibilidade que sempre demonstrou, pelas ajudas na leitura do nosso trabalho, pelas boas sugestões e conselhos que me deu durante o traslado Santa Cruz/Natal, e pelo rigor científico que lhe é característico e que em muito veio enriquecer o nosso trabalho.

Aos meus amigos de trabalho Rosângela Araújo, Enne karol, Juan Carlos, Sílvia Regina e Glauco pelo incentivo e apoio.

Aos meus amigos do IFRN e PROFMAT/CCEN-UFPB-UFRN-UFERSA, Andreilson Oliveira, Sandro Godeiro, Thiago Valentim, Emanuel Lourença, Leonardo Andrade, Fellipe Arrais e Luciano Nóbrega, pelo companheirismo, amizade, estudos e muitas viagens durante os dois últimos anos.

À Professora Valeska Domingues pela correção do abstract deste trabalho.

Ao professor Carlos Alexandre Gomes pelas aulas ministradas, pela disponibilidade, colaboração, pelas sugestões de livros que foram fundamentais para o trabalho.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha avó-mãe Maria Batista Rufino "in memoriam" um exemplo de honestidade, caráter, decência, dignidade e simplicidade, a qual sempre me mostrou o caminho da educação e da verdade.

Resumo

Nessa dissertação, objetiva-se buscar alternativas didáticas que possibilitem ao professor e ao aluno de matemática, o aprendizado de outros métodos de resolver e demonstrar a validade das resoluções de problemas geométricos, aritméticos ou algébricos que possam ser interpretados ou reduzidos a uma equação polinomial de grau maior ou igual a dois. Procede-se a uma abordagem desses métodos dentro de perspectivas de ordem geométrica, algébrica e aritmética para as resoluções das equações do segundo grau e nas equações de grau maior que dois, abordaremos resolução por radicais. Assim, em quatro capítulos, nos dois primeiros, discorre-se acerca da história das equações polinomias, retratando-se a resolução de equações algébricas de segundo, terceiro e quarto graus. No terceiro, demonstra-se um caso específico de equações de quinto e sétimo grau por uma dedução na fórmula de Cardano proposta por SARAIVA (vide[25]), e, no quarto capítulo, são apresentados alguns problemas que envolvem as equações polinomiais de grau maior ou igual a dois presentes no ensino básico.

Palavras-chave: Equações algébricas, métodos de resolução, resolução por radicais, discriminante.

Abstract

This dissertation seeks to provide Mathematics teachers and students with educational alternatives which enable them to learn other methods for solving and demonstrating the validity of resolutions of geometric, arithmetic or algebraic problems which may be interpreted or reduced to a polynomial equation of degree greater than or equal to two. In the resolution of quadratic equations, this paper develops an approach to the aforementioned methods in geometric, algebraic and arithmetic perspectives. For equations of degree greater than two, it discusses resolutions using radicals. This paper is organized in four chapters. Both first and second chapters address the history of polynomial equations, showing resolutions for algebraic equations of second, third and fourth degrees. The third chapter brings a specific case of equations of fifth and seventh degrees and the employment of a deduction of Cardano formula as proposed by SARAIVA (see [25]). Finally, the fourth chapter presents some problems seen by students in Brazilian Middle School involving polynomial equations of degree greater than or equal to two.

Keywords: algebraic equations, resolution methods, resolution with radicals, discriminant.

Sumário

Introdução

O objetivo dessa dissertação é buscar alternativas didáticas que possibilitem ao professor e ao aluno o aprendizado de outros métodos de resolver e demonstrar a validade das resoluções de problemas geométricos, aritméticos ou algébricos que possam ser interpretados ou reduzidos a uma equação polinomial de grau maior ou igual a dois.

Sendo assim, abordaremos esses métodos nas perspectivas de ordem geométrica, algébrica e aritmética para as resoluções das equações do segundo grau e as equações de grau maior que dois, abordaremos resolução por radicais.

Assim, este trabalho estrutura-se em quatro capítulos, retratando, nos dois primeiros, os aspectos históricos da resolução de equações algébricas de segundo, terceiro e quarto graus. No terceiro capítulo, demonstramos um caso específico de equações de quinto e sétimo graus por uma dedução na fórmula de Cardano proposta por SARAIVA (vide[25]) e, por fim, no quarto capítulo, apresentamos alguns problemas que envolvam as equações polinomiais de grau maior ou igual a dois, presentes no ensino básico.

No primeiro capítulo deste trabalho, apresentamos as civilizações antigas que contribuíram significativamente de forma direta para o aperfeiçoamento da escrita e resolução das equações polinomiais do segundo grau. Destacamos o método de mudança de incógnita dos antigos babilônios; passamos pelos gregos (com Euclides e Pitágoras) que aperfeiçoaram o conhecimento babilônio, demonstrando algumas regras e conseguindo, por meio de construções geométricas um caráter mais estruturado às resoluções, através da discussão da sua validade. Abordamos ainda os árabes (e o método de complemento de quadrados de Al-Khowârizmî), os hindus e a resolução algébrica por radicais, até os europeus, dos quais destacamos o método de François Viète, responsável por introduzir a notação algébrica simbólica.

Convém destacar também os métodos de resolução de equações polinomial do segundo grau que serão desenvolvidos neste trabalho: o método do completamento de quadrados, que combina argumentos algébricos e geométricos, permitindo, inclusive, a dedução da conhecida Fórmula de Bhaskara. Além do método de resolução por soma e produto das raízes, que possui uma essência aritmética, mas tem uma abrangência limitada (apenas raízes inteiras), porém apresentaremos um artifício que permite ampliá-lo para raízes racionais.

No segundo capítulo, veremos os aspectos históricos e métodos algébricos das equações polinomiais do terceiro e quarto graus, a forma de artifícios de cálculo para resolver essas equações, bem como a discussão do discriminante da equação de terceiro grau com coeficientes reais. Além de exemplos resolvidos e comentados dessas equações.

Ainda, no terceiro capítulo fazemos referência ao artigo "A fórmula de Cardano além das cúbicas"de SARAIVA (vide[25]), onde o mesmo demonstra e generaliza a equação $x^5 - px^3 - qx - r = 0$ e nos deixa como desafio estudar e generalizar a equação $x^7 + px^5 - qx^3 + rx - s = 0$, seguindo o mesmo processo feito para encontrar a fórmula das equações do terceiro e quinto graus.

Por fim, no quarto capítulo, o leitor poderá verificar aplicações e resolução comentada das equações algébricas por meio de problemas presentes no ensino básico, contribuindo, de maneira significativa no desenvolvimento do ensino aprendizado na resolução de problemas.

Capítulo 1

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO SEGUNDO GRAU

Os primeiros indícios históricos sobre o surgimento de equações polinomiais do segundo grau são encontrados em antigos documentos, reveladores das necessidades e preocupações de povos como: egípcios, babilônios, chineses, gregos, hindus, árabes e europeus, em resolver uma situação problema do cotidiano, que recaiam em expressões atualmente denominamos de equações matemáticas.

Assim, para fazermos uma abordagem das múltiplas representações das resoluções de equações polinomiais do segundo grau, vamos fazer uma viagem no tempo descrevendo um histórico do processo de desenvolvimento da resolução da equação polinomial do segundo grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Nesse histórico mostraremos outras maneiras de abordá-la e apresentaremos demonstrações e métodos de resoluções distintas do uso da sua fórmula, conhecida, nos nossos dias, como fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1.1 Os Babilônios e a Álgebra Geométrica

Sabemos que, ao longo do tempo, várias foram as contribuições dos matemáticos para o estudo da equação polinomial do segundo grau. A contribuição dos babilônios foi escrever, em tabletes de argila, métodos para resolver problemas envolvendo área e as dimensões de quadrados e retângulos, que recaíam na resolução geral para as equações quadráticas. Em EVES (vide[8]), "perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônia já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrados."

Tábua babilônica 13901 (1800 a.C.) encontra-se no Museu Britânico. Nesta tábua encontram-se 24 problemas que envolvem equações do segundo grau.

Fonte: http://mathis.com.nu/mysite/Babilonia/BM13901.htm

Vejamos um problema babilônio dessa época.

"*Determine o lado de um quadrado se a diferença entre a área desse quadrado e seu lado é o número* (sexagesimal[1]) $14;30$". EVES (vide[8]).

A resolução desse problema é equivalente a resolver a equação $x^2 - x = 870$, pois, $14;30 = 14.60^1 + 30.60^0 = 840 + 30 = 870$.

A seguir a resolução do problema é descrita pelos babilônios como se segue:

"Tome a metade de 1 (coeficiente de x), que é $0;30$, e multiplique por $0;30$ por $0;30$, o que dá $0;15$; some $0;15$ a $14;30$ obtendo $14,30;15$. Este último é o quadrado de $29;30$. A seguir some $0;30$ a $29;30$, o resultado da 30, que é o lado do quadrado". EVES (vide[8]).

[1] O sistema sexagesimal é um sistema de numeração de base 60, criado pela antiga civilização Suméria.

Demonstraremos, a seguir, que a resolução babilônica desse problema equivale exatamente a resolver a equação polinomial do segundo grau do tipo padrão:

$$x^2 - sx = p$$

ou

$$x^2 = sx + p,$$

que nada mas é que determinar dois números x_1 e x_2, conhecendo sua soma s e seu produto $-p$. O enunciado desse problema atualmente corresponde ao sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 x_2 = -p \end{cases}$$

Para resolver o sistema, escrevemos x_1 e x_2 na forma:

$$x_1 = \frac{s}{2} + d$$

e

$$x_2 = \frac{s}{2} - d.$$

Substituindo, em $x_1 x_2 = -p$, obtemos:

$$x_1 x_2 = \left(\frac{s}{2} + d\right) . \left(\frac{s}{2} - d\right) = \frac{s^2}{4} - d^2 = -p$$

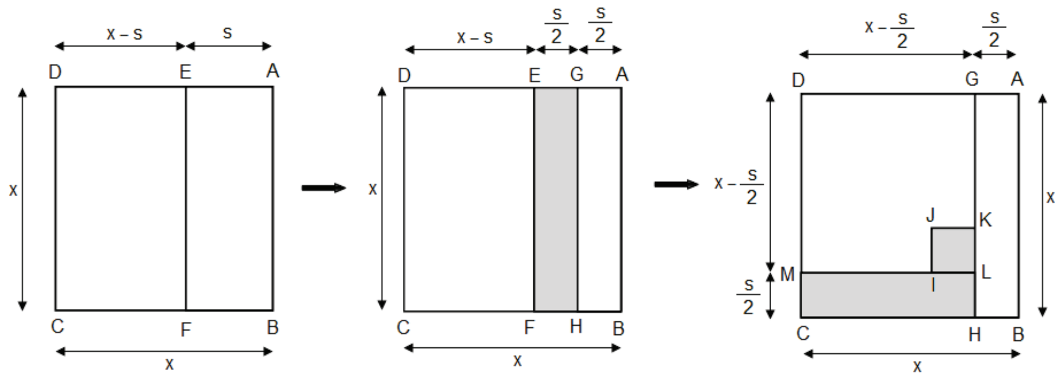
onde $d^2 = \frac{s^2}{4} + p = \frac{s^2+4p}{4}$. Daqui, se deduz $d = \sqrt{\frac{s^2+4p}{4}}$ (Os números negativos não eram ainda conhecidos). Logo, x_1 e x_2 acabam sendo expresso como:

$$x_1 = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2+4p}{4}} = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2+4p}}{2} = \frac{s + \sqrt{s^2+4p}}{2}$$

ou

$$x_2 = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2+4p}{4}} = \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2+4p}}{2} = \frac{s - \sqrt{s^2+4p}}{2}.$$

A seguir representaremos a argumentação da resolução geométrica do problema proposto, que poderá ter estado na base da descoberta desse algoritmo.



Podemos, assim, concluir que a área do quadrado $DGLM$ de lado $\left(x - \frac{s}{2}\right)$ é igual à área da figura $DGKJIM$ mais a área do quadrado $IJKL$, ou seja, $p + \left(\frac{s}{2}\right)^2$.

Daí, onde se deduz que

$$\left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = p + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x - \frac{s}{2} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p} \Leftrightarrow x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p}.$$

De acordo com ROSA (vide[24]), o problema encontrado na tablete de YBC 6967, escrito no dialeto *Akkadian* por volta do ano de 1500 a.C., pode ser considerado um dos primeiros procedimentos nos quais os babilônios aplicaram métodos geométricos para resolver situações envolvendo equações quadráticas.

Vejamos o problema:

"*O comprimento de um retângulo excede a sua largura em sete unidades. A área de retângulo é de 60 unidades quadradas. Determine o comprimento e a largura do retângulo*". ROSA (vide[24]).

Vejamos a resolução baseada na ideia dos babilônios:

"Tome a metade de 7 (coeficiente de x), que é $3,5$, e multiplique por $3,5$ por $3,5$, o que dá $12,25$; some isto a 60 (termo independente), o que dá $72,25$. Isto é o quadrado de $8,5$. Agora subtraia de $8,5$ a metade de 7, o resultado é 5, que é o lado do quadrado.

Agora, considerando o lado do quadrado de x, esse problema babilônico se traduz, hoje, utilizando a linguagem simbólica atual da álgebra, na equação polinomial do segundo grau $x(x+7) = 60 \Rightarrow\ x^2+7x = 60$, que é uma equação do tipo $x^2+sx = p$.

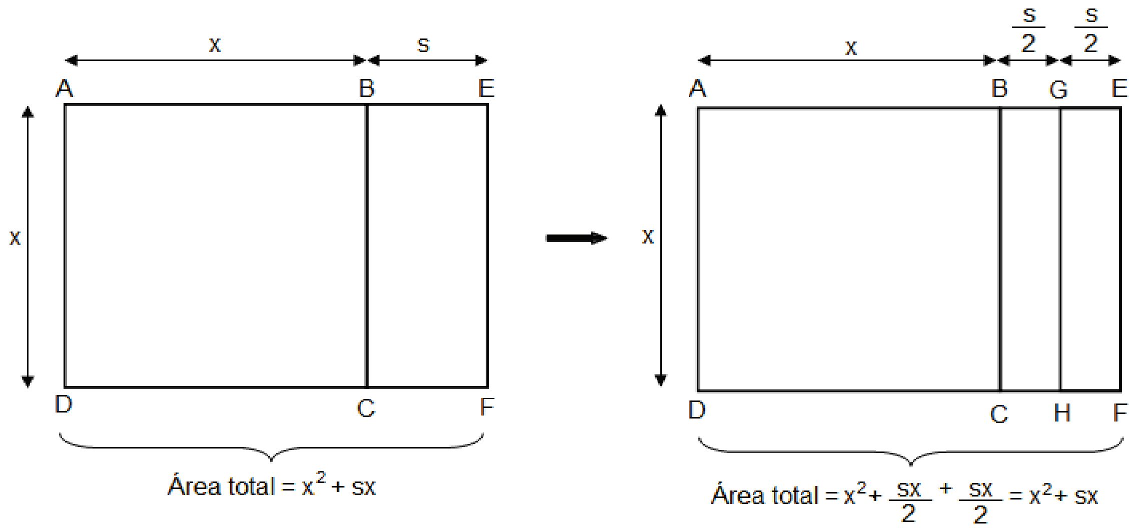
Assim, o algoritmo usado foi o seguinte:

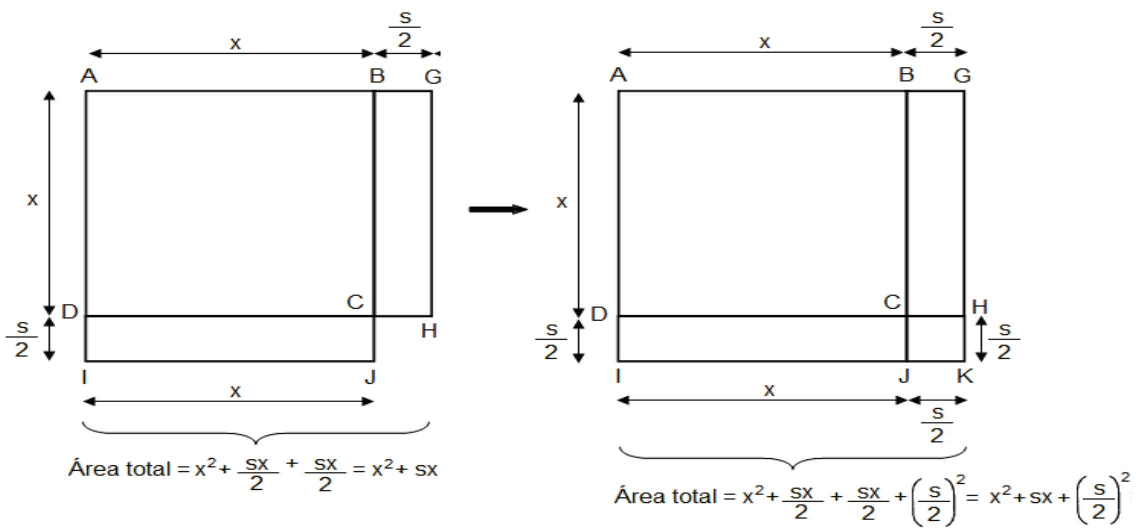
$$x = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 60} - \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{49}{4} + 60} - \frac{7}{2} = \sqrt{\frac{49+240}{4}} - \frac{7}{2} = \frac{17}{2} - \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

que corresponde a uma solução algébrica da equação do tipo $x^2+sx=p$, de fórmula:

$$x = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p}.$$

Finalmente, a demonstração geométrica dos babilônios da equação polinomial do segundo grau, tipo $x^2+sx=p$. Vejamos:





Da demonstração geométrica apresentado pelos babilônios da equação do tipo $x^2+sx=p$, deduz-se que a área do quadrado $AGKI$ de lado $\left(x+\frac{s}{2}\right)$ é igual a p

mais a área do quadrado $CHKJ$, ou seja, $p + \left(\frac{s}{2}\right)^2$. Daí, concluímos

$$\left(x + \frac{s}{2}\right)^2 = p + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x + \frac{s}{2} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p} \Leftrightarrow x = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p}.$$

Outro texto babilônico: "*Adicionei sete vezes o lado de meu quadrado a onze vezes a superfície:* $\frac{25}{4}$"Em PITOMBEIRA (vide[23]).

Em uma linguagem algébrica atual, representaremos esse problema como:

$$11x^2 + 7x = 6,25.$$

A seguir resolveremos esse problema baseado no procedimento indicado pelos babilônios, segundo PITOMBEIRA (vide[23]).

Multiplicamos, primeiro, ambos os membros da equação por 11 (coeficiente de x^2) para obter $(11x)^2 + 7(11x) = 68,75$, que, fazendo-se $y = 11x$, adquire a equação polinomial do segundo grau na forma $y^2 + 7y = 68,75$ equivalente à equação polinomial do segundo grau do tipo padrão $y^2 + sy = p$, a qual é resolvida através da fórmula

$$y = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p}.$$

Logo, concluímos que $x = \frac{y}{11}$.

"Este é, seguramente, um dos primeiros casos registrado de uma mudança de variáveis!"PITOMBEIRA (vide[23]).

Demonstração

Considere a equação polinomial do segundo grau $ax^2 + sx = p$. Multiplicamos todos os termos da equação pelo coeficiente a $(a \neq 0)$, para obter:

$$(ax)^2 + s(ax) = ap.$$

Substituindo $y = ax$, transforma-a em:

$$y^2 + sy = ap.$$

Essa equação corresponde ao sistema equivalente:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -s \\ y_1 y_2 = -ap \end{cases}$$

Para resolver o sistema, escrevemos y_1 e y_2 na forma:

$$y_1 = -\frac{s}{2} + d$$

e

$$y_2 = -\frac{s}{2} - d.$$

Substituindo, em $y_1y_2 = -ap$, obtemos:

$$y_1y_2 = \left(-\frac{s}{2} + d\right) . \left(-\frac{s}{2} - d\right) = \frac{s^2}{4} - d^2 = -ap$$

onde

$$d^2 = \frac{s^2}{4} + ap = \frac{s^2 + 4ap}{4}.$$

Daqui, se deduz

$$d = \sqrt{\frac{s^2 + 4ap}{4}}.$$

Logo, y_1 e y_2 acabam sendo expressos como:

$$y_1 = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 + 4ap}{4}} = -\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 + 4ap}}{2} = \frac{-s + \sqrt{s^2 + 4ap}}{2}$$

ou

$$y_2 = -\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2 + 4ap}{4}} = -\frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 + 4ap}}{2} = \frac{-s - \sqrt{s^2 + 4ap}}{2}.$$

Finalmente, $x = \frac{y}{a}$, isto é,

$$x_1 = \frac{\left(\frac{-s+\sqrt{s^2+4ap}}{2}\right)}{a} = \frac{-s + \sqrt{s^2 + 4ap}}{2a}$$

ou

$$x_2 = \frac{\left(\frac{-s-\sqrt{s^2+4ap}}{2}\right)}{a} = \frac{-s - \sqrt{s^2 + 4ap}}{2a}.$$

Com os exemplos anteriores apresentados, confirma-se que a habilidade algébrica dos babilônios lhes permitia resolver toda e qualquer equação polinomial do segundo grau.

Sabemos que na atualidade, qualquer equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$) pode ser reduzida, por uma transformação semelhante, a um dos tipos padrões dos babilônios: $x^2 + sx = p$, $x^2 = sx + p$ ou $x^2 + p = sx$, em que s (soma das raízes) e p (produtos das raízes).

Assim, essa prática matemática babilônica contribuiu significativamente para o desenvolvimento de uma resolução geral das equações polinomiais do segundo grau por meio do método que, nos dias atuais, chamamos de completamento de quadrados.

1.2 Os Gregos e a Matemática Demonstrativa

Os gregos assimilaram e aperfeiçoaram o conhecimento egípcio e babilônio, demonstrando algumas regras e conseguindo, por meio de construções geométricas, um caráter mais estruturado às resoluções, através da discussão da sua validade. Com esse processo de assimilação, eles foram os primeiros europeus a se interessarem pelas técnicas e reconheceram a utilidade da geometria dos povos do Oriente Médio.

A civilização grega crescia e se desenvolvia em diversas áreas da compreensão e valorização humana, como a filosofia, a história, a democracia, a matemática entre outras. Entre os matemáticos gregos da época podemos destacar Euclides, Pitágoras, Thales de Milleto, Diophanto de Alexandria, entre outros.

Em GARBI (vide[12]) chama a atenção para o fato de que, "quando Pitágoras demonstrou que em um triângulo retângulo vale a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

produziu-se, pela primeira vez na Europa, uma equação polinomial do segundo grau, com um atraso de pelo menos 1.200 anos em relação ao que já havia acontecido na Babilônia."

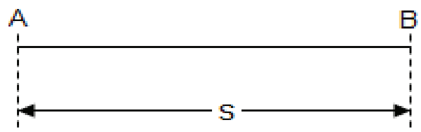
Em GARBI (vide[11]) salienta o fato de que, "a partir daí, os pitagóricos descobriram formas criativas de se resolver essas equações, por meio de construções geométricas, problemas que hoje chamamos de algébricos."

Em EVES (vide[8]) as Proposições 28 e 29 do Livro IV dos Elementos de Euclides[2] fornecem soluções geométricas das equações polinomiais do segundo grau de formas $x^2 - sx + p^2 = 0$ e $x^2 - sx - p^2 = 0$, respectivamente.

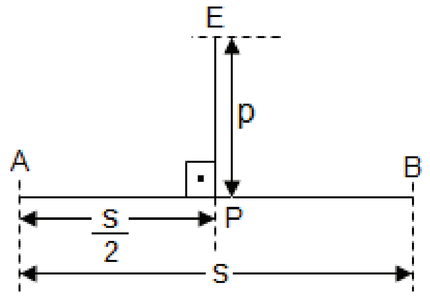
Embora existindo diferentes tipos de construções para distintas equações, a construção para o caso particular $x^2 - sx + p^2 = 0$, com s e p representando medidas de segmentos de reta, sendo $p \leq \frac{s}{2}$, obedecendo ao seguinte procedimento que veremos passo a passo:

1^o Passo: Traçamos um segmento $AB = s$,

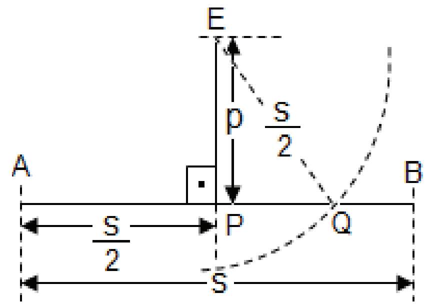
[2] Foi escrito aproximadamente 300 a.C. e é constituído de 13 livros, nos quais Euclides reuniu todo o conhecimento matemático até a sua época.



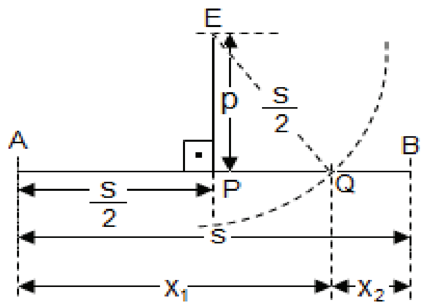
2^o Passo: por P ponto médio de AB, levantamos o segmento perpendicular PE de medida p (raiz quadrada de p^2),



3^o Passo: e, com centro em E e raio AP, traçamos um arco de circunferência que intercepta AB no ponto Q.



4^o Passo: Daí, a raiz desejada será dada pelo valor do segmento AQ.



Logo, a raiz positiva encontrada pelos gregos por meio desse processo geométrico seria $x_1 = AQ$ e hoje, sabemos que, o segmento QB fornece o valor da outra raiz, ou seja, $x_2 = QB$.

Faremos, a seguir, uma demonstração, curta e adaptada à linguagem atual.

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo EPQ, temos:

$$\overline{EQ}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{PQ}^2 \Rightarrow \left(\frac{s}{2}\right)^2 = p^2 + \overline{PQ}^2 \Rightarrow$$

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2 \Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2}.$$

Assim,

$$\overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ} \Rightarrow \overline{AQ} = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2}.$$

Uma raiz, ou seja, $x_1 = \overline{AQ} = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2}$.

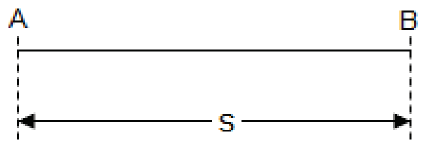
A outra raiz, temos:

$$\overline{QB} = \overline{PB} - \overline{PQ} \Rightarrow \overline{QB} = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2}.$$

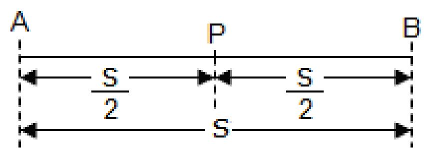
A segunda raiz, ou seja, $x_2 = \overline{QB} = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p^2}$.

Por outro lado, as raízes da equação polinomial do segundo grau da forma $x^2 - sx - p^2 = 0$ demonstrada pelos pitagóricos, obedeciam ao seguinte procedimento que veremos, também, passo a passo:

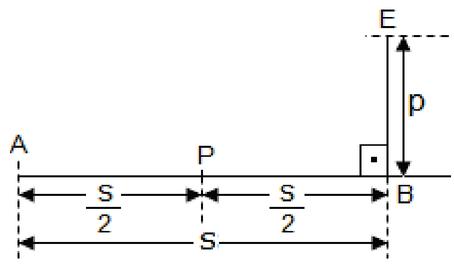
1^o Passo: Traçamos um segmento $AB = s$,



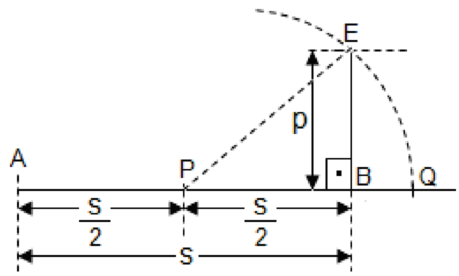
2^o Passo: Seja P o ponto médio de AB,



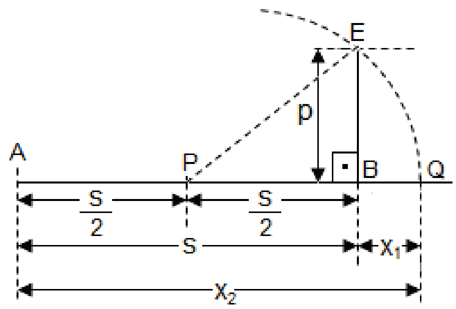
3^o Passo: por B, levantamos o segmento perpendicular BE de medida p (raiz quadrada de p^2),



4^o Passo: prolongando AB e, com centro em P e raio PE, traçamos um arco de circunferência que intercepta o prolongamento AB no ponto Q.



5^o Passo: Daí, a raiz desejada será dada pelo valor do segmento AQ.



Logo, as raízes encontradas pelos gregos por meio desse processo geométrico seria $x_1 = BQ$ e $x_2 = AQ$.

A seguir, apresentaremos uma demonstração adaptada à linguagem atual.

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo EPB, temos:

$$\overline{PE}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BE}^2 \Rightarrow \overline{PE}^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2 \Rightarrow$$

$$\overline{PE} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2}.$$

Pela construção $\overline{PQ} = \overline{PE} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2}$.

Assim,

$$\overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BQ} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2} = \frac{s}{2} + \overline{BQ} \Rightarrow$$

$$\overline{BQ} = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2} - \frac{s}{2}.$$

Uma raiz, ou seja, $x_1 = \overline{BQ} = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2}$.

A outra raiz, temos:

$$\overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ} \Rightarrow \overline{AQ} = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p^2}.$$

A segunda raiz, ou seja, $x_2 = \overline{AQ} = \frac{s}{2} + \sqrt{(\frac{s}{2})^2 + p^2}$.

Agora vamos exemplificar usando um método de Euclides através de um problema que utiliza uma linguagem próxima da forma como as equações polinomiais do segundo grau eram apresentadas na sua época. A geometria era a ferramenta de formulação dos problemas e, consequentemente, a incógnita, ou seja, o número que se desejava descobrir era sempre um segmento que seria obtido através da régua e do compasso.

Vejamos o problema:

"*Deseja-se achar dois lados de um retângulo cujo perímetro mede* $80cm$ *e cuja área vale* $256cm^2$".

Inicialmente, vale destacar que esse problema pode ser convertido para outro formato. Em linguagem algébrica atual, os lados desse retângulo que queremos achar são chamados de x_1 e x_2. Logo, podemos escrever duas equações com duas variáveis.

Essa equação corresponde ao sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 40 \\ x_1 x_2 = 256 \end{cases}$$

Neste instante, podemos fazer outra formulação para o mesmo problema: achar dois números cuja soma s e produto p^2 são conhecidos.

Usando o enfoque atual, tentamos resolver esse sistema pelo método da substituição. Obtemos uma equação do segundo grau.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 40 \\ x_1 x_2 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 40 - x_2 \\ x_1 x_2 = 256 \end{cases}$$

$$(40 - x_2)x_2 = 256 \Rightarrow x_2^2 - 40x + 256 = 0.$$

Assim, necessitamos resolver uma equação do segundo grau. Transformamos desse modo a forma de apresentação de um problema da linguagem tipicamente grega para a linguagem dita moderna.

A solução que propomos a seguir está presente na sua obra-prima "Os Elementos". A solução é adequada para o que hoje chamamos de equações polinomiais do segundo grau que possuam o seguinte formato: $x^2+p^2 = sx$, onde s e p^2 representam números comensuráveis (inteiros e fracionários positivos). Vale ressaltar que na sua época, a Geometria era a única forma de se fazer matemática.

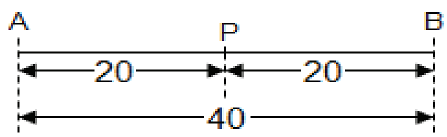
A Álgebra nem sonhava em aparecer. Assim, s significava um comprimento de um segmento e p^2 a área de um quadrado de lado p. Consequentemente, apenas os números positivos eram admitidos.

Vejamos, passo a passo, a resolução da equação:

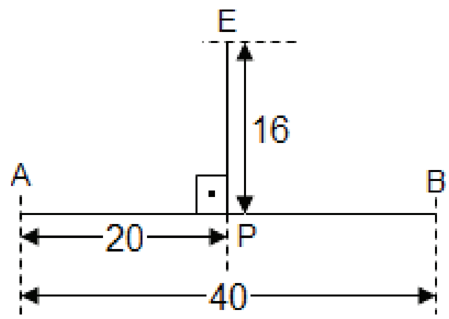
$$x_1^2 - 40x_1 + 256 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 40x_1 + 16^2 = 0$$

.

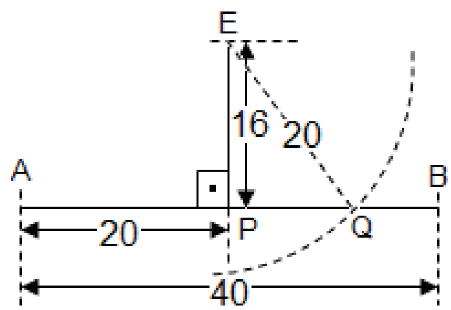
1^o Passo: Traçamos um segmento AB de comprimento 40 e o ponto médio P.



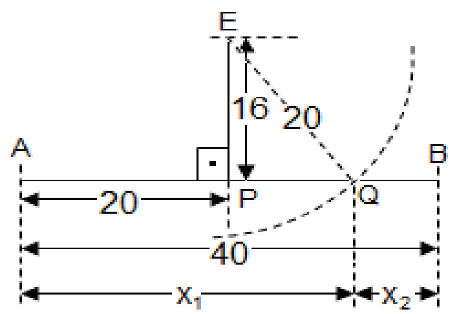
2^o Passo: por P ponto médio de AB, levantamos o segmento perpendicular PE de medida 16 (raiz quadrada de 256),



3^o Passo: e, com centro em E e raio AP, traçamos um arco de circunferência que intercepta AB no ponto Q.



4^o Passo: Daí, a raiz desejada será dada pelo valor do segmento AQ.



Logo, as raízes encontradas pelos gregos por meio desse processo geométrico seria $x_1 = AQ$ e $x_2 = QB$.

Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo EPQ, temos:

$$\overline{EQ}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{PQ}^2 \Rightarrow 20^2 = 16^2 + \overline{PQ}^2$$

$$\overline{PQ}^2 = 400 - 256 \Rightarrow \overline{PQ}^2 = 144 \Rightarrow \sqrt{144} = 12.$$

Assim, $\overline{AQ} = \overline{AP} + \overline{PQ} \Rightarrow x_1 = 20 + 12 \therefore x_1 = 32.$

A outra raiz, temos: $\overline{QB} = \overline{PB} - \overline{PQ} \Rightarrow x_2 = 20 - 12 \therefore x_2 = 8.$

Assim, retornando ao sistema do problema motivador $\overline{AQ} = x_1 = 32$ e $\overline{QB} = x_2 = 8$. Se substituirmos esses valores na equação: $x^2 + p^2 = sx$, teremos a equação satisfeita em cada caso.

Nesse caso de equação polinomial do segundo grau, as raízes, se existirem, sempre serão positivas, uma vez que sempre serão as partes do segmento AB.

Concluímos que, com algumas adaptações e colocação de um par de eixos cartesianos, podemos ampliá-lo de forma tal que se resolve qualquer tipo de equação polinomial do segundo grau de forma $ax^2 + bx + c = 0$.

1.3 Os Árabes e o Método de Completamento de Quadrados

Já mostramos como os babilônios e gregos resolviam equações polinomial do segundo grau. Agora veremos a contribuição dos árabes na resolução dessas equações. Para isso vamos conhecer um pouco da civilização e sua trajetória matemática.

No início do século VI, os árabes viviam em tribos que vagavam pelo interior desértico em busca dos oásis, principalmente na Região Sudeste, onde surgiram as cidades de Meca e Medina. Em meados do século VII, eles passaram a ser governados pelos califas, que liberaram o movimento expansionista. Graças à expansão árabe, o mundo ocidental entrou em contato com a cultura de diversos povos orientais que constituíram o império. A partir desse contato, o povo árabe contribuiu significativamente no campo da matemática. EVES (vide[8]).

Durante o califado de Al-Mâmûm, que governou de 809 a 833, esse povo árabes se entregaram totalmente a sua paixão pela tradução. Conta-se que o califa teve um sonho em que apareceu o imortal Aristóteles (384-322 a.C.) e, em consequência, decidiu mandar fazer versões árabes de todas as obras gregas em que conseguissem por as mãos, entre elas uma versão completa de "Os elementos", de Euclides. Al-Mâmûm inaugurou em Bagdá um centro científico denominado "Casa da Sabedoria", comparável ao antigo Museu de Alexandria.

Entre os brilhantes matemáticos que ali trabalharam, podemos destacar o matemático e astrônomo Mohammed Ibn Mûsâ Al-Khowârizmî[3], que, entre outras obras, escreveu o seu livro mais importante, *Al-jabr wa'l muqabalah*, no qual Al-Khowârizmî apresentou um brilhante método para justificar geometricamente[4] a resolução de seis tipos de equações polinomiais em que apenas eram considerados coeficientes e soluções positivas (os números negativos ainda não existiam). Al-Khowârizmî dividiu esses seis tipos de equações polinomiais em simples e combinadas, veja Quadros 1 e 2 a seguir.

[3]Matemático árabe que viveu de 780 a 850 d.C. A palavra algarismo vem de seu nome. Seu livro de álgebra teve papel importante na difusão das ideias matemáticas árabes na Europa. A palavra álgebra vem do título de seu livro.

[4]Denominado atualmente método de completamento de quadrados.

Quadro 1: Conjunto de Equações Simples.

Equações Polinomiais Simples		
1º tipo	Quadrados iguais a raízes:	$ax^2 = bx$
2º tipo	Quadrados iguais a números;	$ax^2 = c$
3º tipo	Raízes iguais a números.	$ax = b$

Quadro 2: Conjunto de Equações Combinadas.

Equações polinomiais combinadas		
4º tipo	Raízes e quadrados iguais a números;	$x^2 + sx = p$
5º tipo	Quadrados e números iguais a raízes;	$x^2 + p = sx$
6º tipo	Raízes e números iguais a quadrados.	$sx + p = x^2$

Neste trabalho vamos demonstrar três desses tipos de equações polinomiais combinadas, $x^2 + sx = p$, $x^2 + p = sx$ e $sx + p = x^2$.

1.3.1 Equações polinomiais combinadas do tipo $x^2 + sx = p$

O problema a seguir mostra, nas palavras de Al-Khowârizmî, como ele determinava a raiz positiva de equação $x^2 + 10x = 39$. (PITOMBEIRA) (vide[23]).

Nesta resolução a seguir, a primeira coluna do Quadro 3 mostra a solução de Al-Khowârizmî, a segunda o mesmo procedimento com valores numéricos e a terceira fornece uma primeira generalização para $x^2 + sx = p$.

Quadro 3: Resoluções: retórica, aritmética e algébrica.

Linguagem retórica	$x^2+10x=39$	$x^2+sx=p$
Reparta ao meio o número de raízes, o que no presente exemplo é cinco.	$\frac{1}{2}\cdot(10)=5$	$\frac{s}{2}$
Este você multiplique por ele mesmo; o produto e vinte e cinco.	$5\cdot5=25$	$\left(\frac{s}{2}\right)^2$
Some isto a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro.	$25+39=64$	$\left(\frac{s}{2}\right)^2+p$
Agora tome a raiz disto, que é oito.	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+p}$
E subtraia metade do número de raízes, que é cinco; o resto é três.	$8-\frac{10}{2}=3$	$\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+p}-\frac{s}{2}=x$
Essa é a raiz do quadrado que você procura; o quadrado mesmo é nove.	-----	$x=\frac{-s+\sqrt{s^2+4p}}{2}$

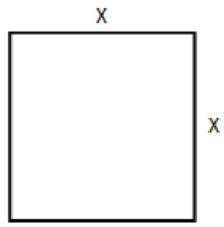
Al-Khowârizmî não fazia uso de notações simbólicas em seu trabalho, suas equações polinomiais são escritas sem emprego de símbolos, e sua álgebra proveio da álgebra dos hindus e gregos.

Para exemplificar, passo a passo, o seu primeiro método geométrico (veja Quadro 3), buscaremos a solução da equação polinomial do segundo grau do tipo $x^2+sx=p$, ou seja, $x^2+10x=39$.

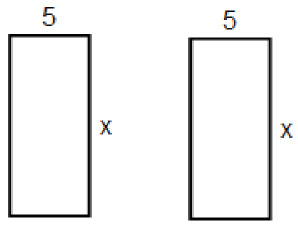
Vejamos:

1^o Passo: Primeiramente, a equação é escrita na forma $x^2+5x+5x=39$;

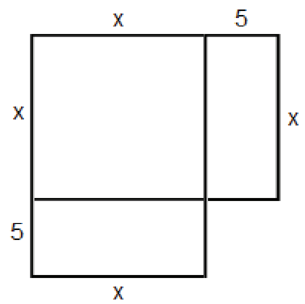
2^o Passo: Em seguida, ele desenhou um quadrado cuja área representa o termo x^2;



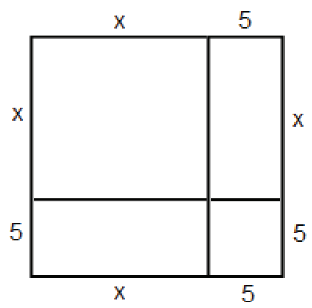
3^o Passo: O termo $10x = (5x + 5x)$ é interpretado como a área de dois retângulos de lados 5 e x;



4^o Passo: Al-Khowârizmî aplicou cada um desses dois retângulos sobre os lados do quadrado de área x^2;



A área da figura formada é igual a $x^2 + 5x + 5x = x^2 + 10x$ que totaliza 39, ou seja, $x^2 + 10x = 39$. Em seguida, completando então essa soma de áreas com a área de um quadrado de lado 5, portanto de área 25, obtém-se a área de um quadrado de lado $(x + 5)$, medindo então $39 + 25 = 64$ de área.



Então, $(x+5)^2 = 64$ de onde, então, al-Khowârizmî deduz que:

$$x + 5 = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow x = 8 - 5 \therefore x = 3.$$

Ao resolvermos equações polinomiais do segundo grau, podemos, no entanto, usar o método geométrico de Al-Khowârizmî como um guia no completamento dos quadrados e, ao final, "esquecê-lo", deduzindo também eventuais soluções negativas da equação.

Observamos facilmente que o método aplicativo desenvolvido por Al-Khowârizmî, é exatamente usar a fórmula bem conhecida:

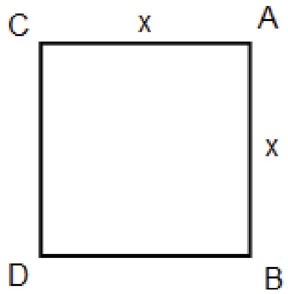
$$x = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + p} - \frac{s}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{s^2}{4} + p} - \frac{s}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{s^2+4p}{4}} - \frac{s}{2} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2+4p}}{2} \Rightarrow x = \frac{-s + \sqrt{s^2+4p}}{2}.$$

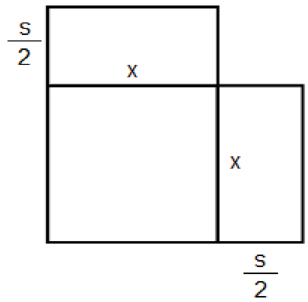
Embora os árabes tratassem a álgebra numericamente, como os hindus, e geometricamente como os gregos, as primeiras demonstrações geométricas têm pouco em comum com a matemática grega clássica. BOYER (vide[7]).

Vamos demonstrar a seguir, o primeiro método geométrico da resolução da equação polinomial do segundo grau do tipo $x^2 + sx = p$ proposta por Al-Khowârizmî.

Construímos um quadrado $ABCD$ de lado $AB = x$.



e, sobre os lados AB e AC do quadrado, constroem-se dois retângulos de lados x e $\frac{s}{2}$.



Construímos, no canto, um quadrado de lado igual a $\frac{s}{2}$, e assim, completamos a Figura 1.

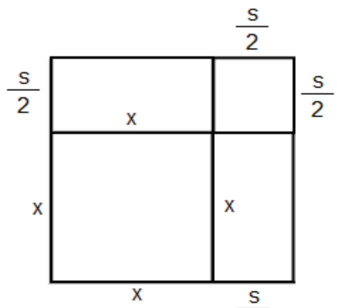


Figura 1

Portanto, a área do quadrado (Figura 1) é dada por:

$$x^2 + 2\left(x.\frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = x^2 + sx + \frac{s^2}{4}.$$

Somando $\frac{s^2}{4}$ a ambos os membros da equação $x^2 + sx = p$, vem:

$$x^2 + sx + \frac{s^2}{4} = p + \frac{s^2}{4}$$

donde

$$\left(x + \frac{s}{2}\right)^2 = p + \frac{s^2}{4}$$

e

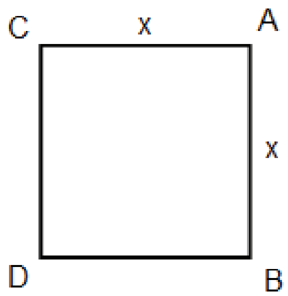
$$x + \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{s^2}{4} + p}$$

e consequentemente

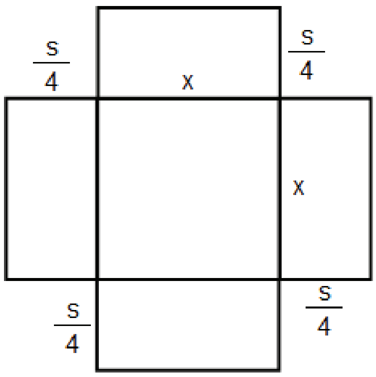
$$x = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2+4p}{4}} \Rightarrow x = -\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2+4p}}{2} \Rightarrow x = \frac{-s+\sqrt{s^2+4p}}{2}.$$

Agora, vejamos a demonstração geométrica generalizada da resolução da equação polinomial do segundo grau da forma $x^2 + sx = p$ por Al-Khowârizmî.

Construímos um quadrado $ABCD$ de lado $AB = x$



e, sobre os lados do quadrado, constroem-se quatro retângulos de lados x e $\frac{s}{4}$.



Construímos em cada um dos quatro cantos um quadrado de lado igual a $\frac{s}{4}$, e assim, completamos a (Figura 2) a seguir:

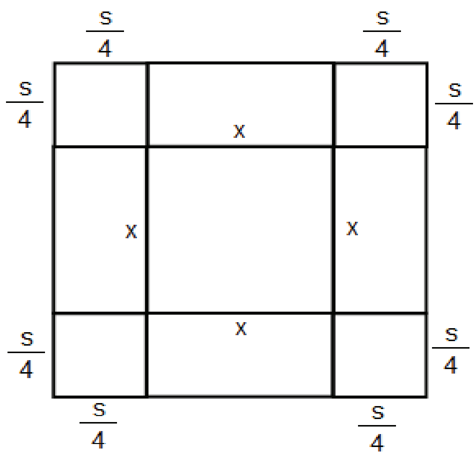


Figura 2

Então, a área do quadrado (Figura 2) é

$$x^2 + 4\left(x.\frac{s}{4}\right) + 4\left(\frac{s}{4}\right)^2 = x^2 + sx + \frac{s^2}{4}.$$

Somando $\frac{s^2}{4}$ a ambos os membros da equação $x^2 + sx = p$, vem

$$x^2 + sx + \frac{s^2}{4} = p + \frac{s^2}{4}$$

donde

$$\left(x + \frac{s}{2}\right)^2 = p + \frac{s^2}{4}$$

e,

$$x + \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{s^2}{4} + p} \Rightarrow x = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 + 4p}{4}} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 + 4p}{2}} \Rightarrow x = \frac{-s + \sqrt{s^2 + 4p}}{2}.$$

1.3.2 Equações polinomiais combinadas do tipo $x^2 + p = sx$

Vejamos outro problema:

"*Um quadrado e vinte e um em número é igual a dez das suas raízes*". ANDRADE (vide[2]).

Nessa resolução, a primeira coluna do Quadro (4) mostra a solução de Al-Khowârizmî, a segunda o mesmo procedimento com valores numéricos e a terceira fornece uma primeira generalização para $x^2 + p = sx$.

Quadro 4: Resoluções: retórica, aritmética e algébrica.

Linguagem retórica	$x^2+21=10x$	$x^2+p=sx$
Tome metade das raízes, isto é cinco.	$\frac{1}{2}\cdot(10)=5$	$\frac{s}{2}$
Este você multiplique por ele mesmo; o produto e vinte e cinco.	$5\cdot 5=25$	$\left(\frac{s}{2}\right)^2$
Retira-lhe os vinte e um que é o que nós dissemos que está junto do quadrado, restará quatro.	$25-21=4$	$\left(\frac{s}{2}\right)^2-p$
Agora tome a raiz disto, que é dois.	$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}$
Retira (esse número) à metade das raízes que são cinco. Restam três.	$5-2=3$	$\frac{s}{2}-\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2-p}=x$
Essa é a raiz do quadrado que você procura; o quadrado mesmo é nove.	-----	$x=\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}$

A equação tem duas soluções positivas. Para obter a outra solução, basta alterar a última operação (que foi indicada no algoritmo) para uma adição. O valor da segunda solução é

$$x = \frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} = 5 + \sqrt{25-21} = 5 + \sqrt{4} = 5 + 2 = 7,$$

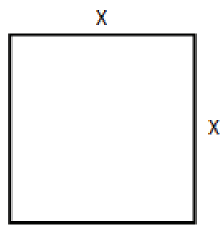
que, generalizando, corresponde a

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

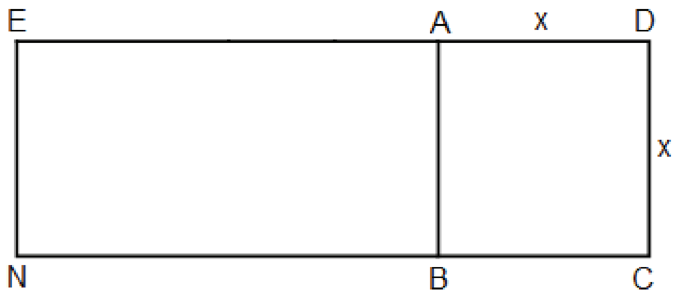
Vamos exemplificar o método geométrico, veja Quadro 4. Buscando a solução da equação polinomial do segundo grau do tipo $x^2 + p = sx$, ou seja, $x^2 + 21 = 10x$.

Vejamos:

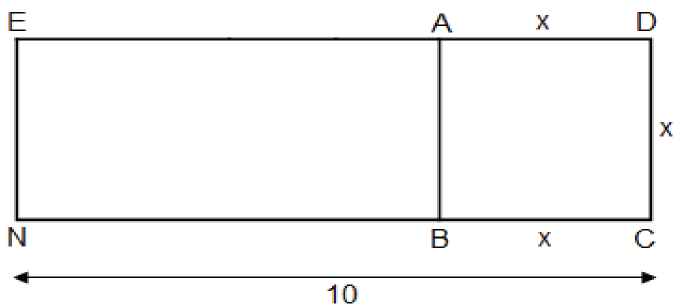
Primeiramente, vamos desenhar um quadrado cuja área representa o termo x^2.



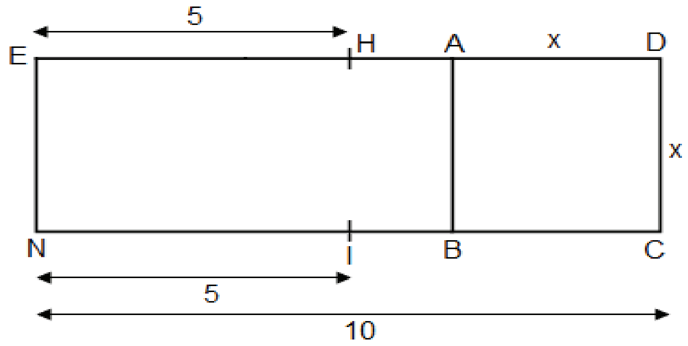
Em seguida, e sobre um dos lados do quadrado constrói um retângulo $ABNE$ de área igual a 21.



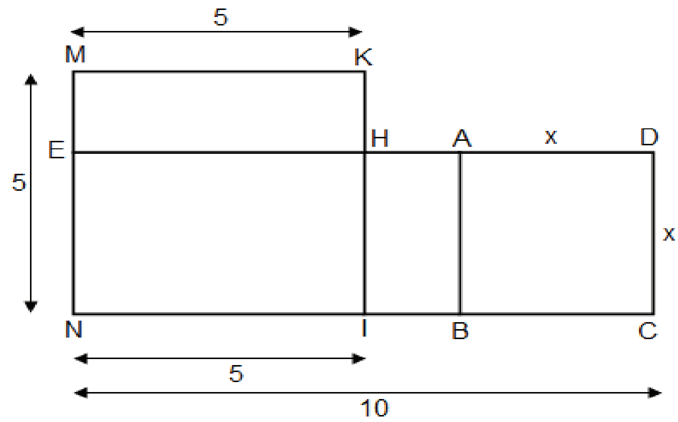
Pelo enunciado do problema $x^2 + 21 = 10x$, concluí-se que o comprimento desse retângulo $ABNE$ tomado com o lado do quadrado $ABCD$ vale 10.



Seja H o ponto médio de ED e I o ponto médio de NC.



Construiu um quadrado $IKMN$ sobre esse lado IH (o lado desse quadrado corresponde à metade do número das raízes que vale 5).



Por fim, vamos construir, no canto superior direito do quadrado $IKMN$, um quadrado sobre o lado KH, obtendo assim a Figura 3:

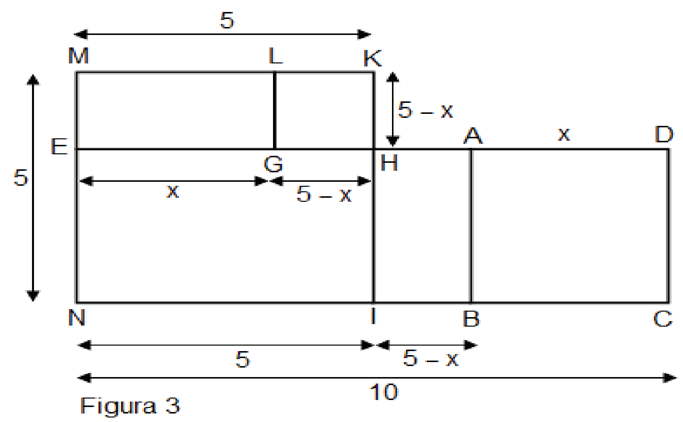


Figura 3

Pela Figura 3, temos que a área do quadrado $ABCD$ é x^2 e a área do retângulo $ABNE$ é 21.

Temos que a área do retângulo $CDEN$ vale $10x$, isto implica que o segmento NC mede 10.

Como I é o ponto médio de NC e $IKMN$ é um quadrado de lado 5, então a área de $IKMN$ é 25.

Pela construção $MK = KI$ e $KL = KH$, concluiu-se que $ML = HI$. Além disso, como $LG = KH = HA$, e que as áreas dos retângulos $EGLM$ e $ABIH$ são iguais.

Logo:

A área do quadrado $GHKL$ = área do quadrado $IKMN$ − (a área do retângulo $EHIN$ + a área do retângulo $EGLM$).

Como a área do retângulo $EGLM$ é igual à área do retângulo $ABIH$, temos que:

A área do quadrado $GHKL$ = área do quadrado $IKMN$ − (a área do retângulo $EHIN$ + a área do retângulo $ABIH$).

Como a (área do retângulo $EHIN$ + a área do retângulo $ABIH$) é igual á área do retângulo $ABNE$.

Temos: A área do quadrado $GHKL = 25 - 21 = 4$.

Daí se conclui que $HG = 2$. Como $HG = HA$ vem que:

$x = AD = HD - HA = 5 - 2 = 3$, ficando assim resolvido o problema.

1.3.3 Equações polinomiais combinadas do tipo $sx + p = x^2$

Para as equações polinomiais deste tipo, propomos a seguinte situação problema: "*Três raízes e quatro números são iguais a um quadrado*". ANDRADE (vide[2]).

Na resolução abaixo, a primeira coluna da Quadro (5) mostra a solução em uma linguagem retórica, a segunda o mesmo procedimento com valores numéricos e a terceira fornece uma primeira generalização para $sx + p = x^2$.

Quadro 5: Resoluções: retórica, aritmética e algébrica.

Linguagem retórica	$3x+4=x^2$	$sx+p=x^2$
Tome metade das raízes, isto é $\frac{3}{2}$.	$\frac{1}{2}\cdot(3)=\frac{3}{2}$	$\frac{s}{2}$
Este você multiplique por ele mesmo; o produto é $\frac{9}{4}$.	$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$	$\left(\frac{s}{2}\right)^2$
Some isto a quatro; a soma é $\frac{25}{4}$.	$\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}$	$\left(\frac{s}{2}\right)^2+p$
Agora tome a raiz disto, que é $\frac{5}{2}$.	$\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+p}$
E some a metade do número de raízes, que é $\frac{3}{2}$; o resulta em quatro.	$\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}=4$	$\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+p}=x$
Isto é a raiz do quadrado que você procura e o quadrado é dezesseis.	-----	$x=\frac{s+\sqrt{s^2+4p}}{2}$

Resolver esse problema é equivalente a resolver a equação polinomial do segundo grau $3x+4=x^2$, que é do tipo padrão $sx+p=x^2$.

O algoritmo apresentado no Quadro (5) foi:

$$x=\frac{3}{2}+\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+4}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4,$$

que corresponde a generalização

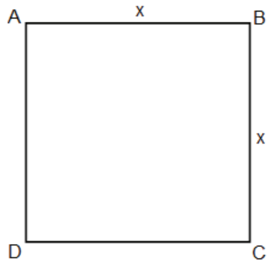
$$x=\frac{s}{2}+\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2+p}=\frac{s+\sqrt{s^2+4p}}{2}.$$

Vamos exemplificar o método geométrico de Al-Khowârizmî (veja Quadro (5)).

Buscando a solução da equação polinomial do segundo grau do tipo padrão $sx + p = x^2$, ou seja, $3x + 4 = x^2$.

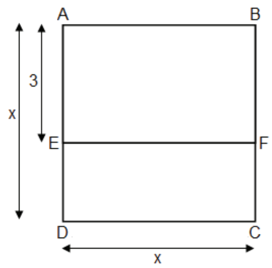
Vejamos:

Primeiramente Al-Khowârizmî, representa um quadrado cuja área é x^2;

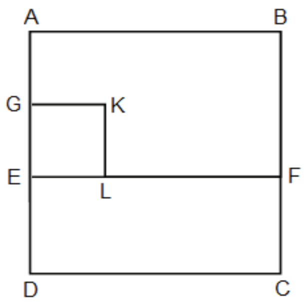


Em seguida, divide esse quadrado em duas partes, marcando o segmento EF paralelo a AB e tal que AE seja igual a 3 (que é o número de raízes).

Sendo assim, temos que a área do retângulo $ABFE$ vale $3x$ e pelos dados do problema conclui-se que a área do retângulo $CDEF$ vale 4.



Em seguida, Al-Khowârizmî divide o segmento AE ao meio no ponto G e desenha um quadrado sobre o lado GE (GE representa metade do número das raízes).



Para obter a figura abaixo, Al-Khowârizmî construiu um outro quadrado $DGMO$, sobre o lado GD.

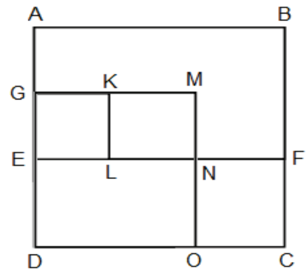


Figura 3

Veremos a seguir uma demonstração simplificada usando a linguagem e símbolos atuais:

Pela construção da Figura 3, temos que a área do quadrado $ABCD$ é x^2 e a área do retângulo $ABFE$ é $3x$ e, consequentemente a área do retângulo $CDEN$ vale 4.

Temos também que o segmento AE mede 3.

Como $ABCD$ é um quadrado, vem que $AD = DC$. Como a $DGMO$ também é um quadrado, vem que $GD = DO$. Daí se conclui que $OC = AG$ (uma vez que G é o ponto médio do segmento AE) e $GE = KL$ (porque ambos são lados do quadrado $EGKL$).

Daí se tira que $OC = KL$.

Como $DGMO$ é um quadrado, vem que $GM = MO$. Como $EGKL$ também é um quadrado vem que $GK = GE$, que por sua vez é igual a MN, daí se tira que $KM = NO$.

Como as áreas de $KLNM$ e $CFNO$ são iguais, então:

A área do quadrado $DGMO$ = área do quadrado $EGKL+$ (área do retângulo $DENO+$ área do quadrado $KLNM$).

A área do quadrado $DGMO$ = área do quadrado $EGKL+$ (área do retângulo $DENO$ + área do quadrado $CFNO$).

A área do quadrado $DGMO$ = área do quadrado $EGKL+$ área do retângulo $CDEF$.

A área do quadrado $DGMO = \frac{9}{4} + 4$.

A área do quadrado $DGMO = \frac{25}{4}$.

Daí podemos concluir que

$$GD = \frac{5}{2}.$$

Então $x = AD = AG + GD = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Fica assim, resolvido o problema.

1.4 Os Hindus e a Fórmula de Bhaskara

A Índia produziu muitos matemáticos na segunda metade da Idade Média, entre eles destacamos Aryabhata, Bhamagupta, Sridhara, Bhaskara e Madhava, mas, neste trabalho, descreveremos apenas a obra de Bhaskara, considerado o mais importante matemático hindu do século XII. EVES (vide[8]).

Bhaskara, indiano que viveu de 1114 a 1185, é conhecido no Brasil por ter criado a fórmula matemática aplicada na resolução da equação polinomial do segundo grau e por haver imortalizado em uma de suas obras o nome de sua filha Lilaváti, em homenagem à qual compilou a obra de seus predecessores problemas de álgebra e Geometria. Um fato curioso é que a fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele, mas pelo matemático hindu Sridhara (870-930), pelo menos um século antes da publicação de Bhaskara, fato esse reconhecido pelo próprio Bhaskara. GARBI (vide[12]).

A fórmula geral para a resolução da equação polinomial do segundo grau é bastante conhecida e utilizada por todos nós. Essa fundamentou a ideia de reduzir o grau da equação do segundo grau para uma equivalente do primeiro grau, utilizando para tanto a extração de raízes quadradas. Para isso os hindus utilizaram o método de completamento de quadrados para chegar à Fórmula de Bhaskara.

Finalmente, apresentaremos a demonstração da fórmula geral que pode resolver qualquer tipo de equação polinomial do segundo grau.

Se tivermos uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$, podemos associá-la a um trinômio quadrado perfeito. Para isso, devemos dividir todos os termos da equação pelo coeficiente a ($a \neq 0$):

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

Isolamos no segundo membro da equação o termo independente.

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}.$$

Aos dois membros da equação acrescentamos um número que transforma o primeiro membro em um trinômio quadrado perfeito.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

O primeiro membro da equação é um trinômio quadrado perfeito. Assim:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, a resolução da equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ nos reais depende do sinal de $b^2 - 4ac$, denominado, por isso, de discriminante da equação polinomial do segundo grau. E recebe como símbolo a letra grega delta Δ e uma denominação especial uma vez que ajuda a analisar a natureza númerica das raízes. Se $b^2 - 4ac \geqslant 0$, vem:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Daí,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Substituindo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos enfim a fórmula geral das resoluções genéricas de uma equação polinomial do segundo grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

1.5 Os Métodos Algébricos a partir da Idade Média

1.5.1 Método Algébrico de François Viète

François Viète (Fontenay, na França, 1540 - Paris, 1603) não era matemático por vocação. Na sua juventude, ele estudou e exerceu Direito na sua terra natal, atividade que abandonou para tornar-se membro do Parlamento da Bretanha e mais tarde Membro do Conselho do Rei.

Porém dedicava o seu tempo de lazer aos estudos da matemática, no qual fez contribuições significativas à Aritmética, à Álgebra, à Trigonometria e à Geometria. Mas, sem dúvida, foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois, aqui, Viète foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada chegando muito próximo das ideias da álgebra moderna, além de contribuir para a teoria das equações polinomiais.

Nessas contribuições Viète sugeriu um método de resolução da equação polinomial do segundo grau, em que estabeleceu uma relações entre coeficientes e raízes de uma equação.

Em AMARAL (vide[1]), temos uma demonstração da equação polinomial do segundo grau, conforme o método de Viète, que consistia em uma mudança de incógnita considerando duas novas incógnitas: u e v.

Demonstração

Consideremos a equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Fazemos a substituição de $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares. Na equação temos:

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0,$$

ou seja,

$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u + v) + c = 0.$$

E reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita v, obtemos:

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Viète então escolhe:

$$u = -\frac{b}{2a}$$

para anular o coeficiente de v e transformar assim a equação dada numa equação polinomial incompleta do segundo grau. Veja:

$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$av^2 + a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Rightarrow$$

$$av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4a^2v^2}{4a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = 0 \Rightarrow$$

$$4a^2v^2 - b^2 + 4ac = 0 \Rightarrow$$

$$4a^2v^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Se $b^2 - 4ac \geqslant 0$ então:

$$v = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow v = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

E então:

$$x = u + v = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou seja

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

nossa velha conhecida fórmula de Bhaskara.

A título de exemplificar o método de Viéte, vamos resolver a equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Fazemos a substituição de $x = u + v$, na equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ temos:

$$(u + v)^2 - 5(u + v) + 6 = 0$$

ou seja

$$(u^2 + 2uv + v^2) - 5(u + v) + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$u^2 + 2uv + v^2 - 5u - 5v + 6 = 0.$$

E reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita v, obtemos

$$v^2 + (2u - 5)v + u^2 - 5u + 6 = 0.$$

Escolhendo $u = \frac{5}{2}$ para anular o coeficiente de v, temos:

$$v^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5.\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$v^2 + \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$v^2 + \frac{25 - 50 + 24}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$v^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \therefore v = \pm\frac{1}{2}.$$

Daí,

$$x = u + v = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

ou seja,

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

ou

$$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Logo, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 2 ou 3.

1.5.2 Método Algébrico de Leonhard Euler

Do século XV ao XVIII, muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representar a resolução da equação polinomial do segundo grau. Entre eles destacamos o matemático suíço, Leonhard Euler (1707-1783), inovador em várias subáreas da matemática, em especial na Teoria dos Números. Euler passou a utilizar métodos algébricos para resolver problemas da Teoria dos Números, o que lhe permitiu resolver equação polinomial do segundo grau usando o método de substituição de incógnita.

Para resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$), Euler propôs, assim como Viète, o método de substituição de incógnita. ASSIS (vide[4]).

Vejamos sua demonstração.

Demonstração

Fazendo $x = u + v$ e, portanto, $x^2 = (u + v)x$, obtemos um sistema de equações:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ x = (u + v) \\ x^2 = (u + v)x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ x - (u + v) = 0 \\ x^2 - (u + v)x = 0 \end{cases}.$$

Vamos multiplicar todas as equações do sistema por x, então:

$$\begin{cases} ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\ x^2 - (u + v)x = 0 \\ x^3 - (u + v)x^2 = 0 \end{cases}.$$

Logo, temos um sistema linear homogêneo nas incógnitas x, x^2 e x^3.

Como Euler tinha conhecimento a teoria dos determinantes e sabia que, um sistema homogêneo é sempre possível, pois admite pelo menor a solução $(0,0,0)$, denominada solução trivial ou nula. Outra solução diferente da trivial ocorre quando o determinante de seus coeficientes Δ é igual à zero.

Desse modo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & -(u+v) \\ 1 & -(u+v) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante, obteve:

$$-a(u+v)^2 - b(u+v) - c = 0 \Rightarrow$$

$$-a(u^2+2uv+v^2) - bu - bv - c = 0 \Rightarrow$$

$$-au^2 - 2auv - av^2 - bu - bv - c = 0 \Rightarrow$$

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0.$$

Vamos reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita v, obtemos:

$$av^2 + (2au+b)v + (au^2+bu+c) = 0. \tag{1.1}$$

Para anular o coeficiente de v e transformar assim a equação (1.1) numa equação polinomial incompleta do segundo grau. Escolhemos $u = -\frac{b}{2a}$, vem:

$$av^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$av^2 + a.\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Rightarrow$$

$$av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4a^2v^2}{4a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = 0 \Rightarrow$$

$$4a^2v^2 - b^2 + 4ac = 0 \Rightarrow$$

$$4a^2v^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Se $b^2 - 4ac \geqslant 0$ então:

$$v = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow v = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

E então, substituindo os valores de u e v em $x = u + v$, vem:

$$x = u + v = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A fórmula para resolução das equações do segundo, conhecida como fórmula de Bhaskara.

1.5.3 Método de Completamento de Quadrados

O método de completamento de quadrados é uma ferramenta poderosa que resolve, a princípio, qualquer equação polinomial do segundo grau, baseado nas identidades $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Para resolver uma equação polinomial do segundo grau, empregando esse método, procura-se reduzi-la a um quadrado de um binômio igual a uma constante, ou seja, $(Ax + B)^2 = C$.

Logo, completar o quadrado é escrever uma expressão algébrica do tipo $x^2 + 2bx$ sob a forma $x^2 + 2bx = (x + b)^2 - b^2$.

Porém, nem sempre o fator 2 aparece explicitamente na expressão algébrica. Então, devemos fazê-lo aparecer, vejamos como:

$$x^2 + bx = x^2 + 2.\frac{b}{2}x.$$

Portanto $x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$.

Vejamos nos exemplos a seguir, utilizando o método de completamento de quadrado:

a) $x^2 + 10x = x^2 + 2.5x = (x + 5)^2 - 5^2 = (x + 5)^2 - 25$;

b) $x^2 + 3x = x^2 + 2.\frac{3}{2}x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$;

c) $3x^2 + 4x = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}.2x\right) = 3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = 3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right]$;

d) $x^2 - 4x - 1 = x^2 - 2.2x - 1 = (x - 2)^2 - 2^2 - 1 = (x - 2)^2 - 4 - 1 = (x - 2)^2 - 5$;

e) $2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) - 3 = 2\left(x^2 + \frac{5}{4}.2x\right) - 3 \Rightarrow$

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] - 3 = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{50}{16} - 3 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{50}{16} - \frac{48}{16} = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{98}{16} = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}.$$

Após resolver esses cincos itens, podemos concluir que o número que devemos adicionar é $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ para transformar cada expressão algébrica em uma equação do tipo $(Ax + B)^2 = C$.

Agora, vamos generalizar para uma equação polinomial do segundo grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

Vamos utilizar o método de completamento de quadrados para reduzi-la a uma equação do tipo $(Ax + B)^2 = C$.

Vejamos a seguir a demonstração.

Demonstração

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}.x\right) + c = a\left(x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x\right) + c \Rightarrow$$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] + c \Rightarrow$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Portanto, escrevemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ como:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Rightarrow$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Chegamos a uma equação do tipo $(Ax + B)^2 = C$, equivalente a uma equação polinomial do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Logo:

Se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ (negativo), a equação polinomial do segundo grau não tem raízes reais. Mais, se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ (nulo), a equação polinomial do segundo grau tem duas raízes reais e iguais, ou seja,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}.$$

Enfim, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ (positivo) a equação polinomial do segundo grau tem duas raízes reais e diferentes, ou seja:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logo:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

as raízes da equação do segundo grau.

1.5.4 Método Algébrico de Resolução por Soma e Produto das Raízes

No momento de escolher quais equações polinomiais do segundo grau serão trabalhadas com seus alunos, percebemos que os professores demonstram uma tendência por aquelas que contenham raízes inteiras. Isso é compreensível, já que existe uma barreira cognitiva no aprendizado dos números fracionários e irracionais. Porém, esse uso se torna excessivo por parte do professor, produzindo uma limitação na visão do aluno. Um exemplo claro dessa limitação ocorre quando observamos a reação frequente de um professor e consequentemente do aluno ao se deparar com um discriminante que não seja um quadrado perfeito.

Em função desse vício de utilização de soluções inteiras das equações, o método a ser apresentado a seguir possui a característica de resolvê-las rapidamente, de maneira simples e prática.

O método da soma e produto é um caminho aritmético, mas estruturado com formato algébrico, em cuja solução é construída a partir da procura das possíveis combinações, que se encaixam nos valores da soma e produto das raízes.

Consideremos uma equação polinomial do segundo grau com coeficientes inteiros, $ax^2+bx+c=0$, com discriminante maior que zero e tal que $\frac{b}{a}$ ou $\frac{c}{a}$ (ou ambos) não seja um inteiro. Assim, a partir da fórmula geral $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, serão deduzidas as relações de soma e produto e em seguida serão apresentados exemplos.

Vejamos o método:

Sendo $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ a fórmula geral, podemos determinar a soma e produto das raízes da seguinte maneira:

Se denotarmos a soma das raízes $x_1 + x_2$ por S e o produto das raízes x_1x_2 por P, então poderemos provar que:

$$S = -\frac{b}{a}$$

e

$$P = \frac{c}{a}.$$

Como

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

podemos escrever a soma S:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Logo:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

O mesmo procedimento para o produto P das raízes:

$$P = x_1.x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Desenvolvendo o produto da soma pela diferença de dois termos:

$$P = x_1.x_2 = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Após concluir que a soma das raízes pode ser obtida por $-\frac{b}{a}$ e o produto por $\frac{c}{a}$, é perceptível que se as raízes da equação polinomial do segundo grau forem inteiras, teremos obrigatoriamente os coeficientes b e c múltiplos do coeficiente a. A recíproca, porém, não é verdadeira, ou seja, se b e c são múltiplos de a, não podemos garantir que as raízes são inteiras.

Portanto, mesmo que tenhamos os coeficientes b e c múltiplos de a, teremos uma pequeníssima probabilidade de existirem raízes inteiras caso b e c sejam escolhidos aleatoriamente.

Porém se quisermos estender esse método para raízes racionais, o artifício a seguir permitirá tal ampliação.

Já vimos anteriormente que resolver equações usando soma e produto tem se tornado muito útil hoje em dia, devido à constante utilização por parte dos professores de equações polinomiais do segundo grau, que possuem raízes inteiras nas atividades desenvolvidas em sala de aula.

No entanto, ao nos depararmos com equações que contém soluções fracionárias normalmente tendemos a não utilizar a soma e produto como alternativa de resolução. Veremos agora que, mesmo para equações fracionárias, com um pouco de manipulação, esse método pode continuar a ter bastante utilidade.

Imagine que você se depare com a seguinte equação:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

Afirmamos aqui que essa equação fica mais fácil de ser resolvida por soma e produto se multiplicarmos o coeficiente de x^2 (no caso $a = 2$) pelo termo independente (no caso $c = -5$). Ao fazermos isso, criamos a equação:

$$y^2 - 3y - 10 = 0.$$

Suas raízes tem como soma 3 e produto -10, ou seja, elas valem 5 e -2.

Podemos verificar que 5 e -2 não são as raízes da equação proposta inicialmente, mas elas são dadas por $\frac{5}{2}$ e $-\frac{2}{2} = -1$.

Vamos **demonstrar** nossa afirmação: A equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem soluções determinadas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Enquanto que a equação obtida quando tornamos o coeficiente de x^2 (no caso a) unitário e geramos um novo termo independente dado pelo produto do coeficiente a por c. Assim, a nova equação de variável independente y será:

$$y^2 + by + ac = 0$$

Suas soluções são determinadas por:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.1}.$$

Fica perceptível que as duas soluções diferem apenas no seu denominador (a primeira com fator a e a segunda sem o fator a). Portanto, se acharmos as soluções da segunda e dividirmos por a (coeficiente de x^2) achamos as soluções da primeira

$$x = \frac{y}{a}.$$

Concluindo, sempre que nos depararmos com equações quadráticas cujas soluções sejam fracionárias, podemos tentar encontrá-las com mais facilidade se multiplicar o coeficiente de x^2 pelo termo independente gerando o novo coeficiente $c' = ac$. Achamos as soluções desta nova equação e dividirmos essas soluções pelo coeficiente de x^2.

Vejamos outra **demonstração** usando a mudança de variável, apresentada pelos babilônios que justifica o método mostrado.

Consideremos a equação polinomial $ax^2 + bx + c = 0$, com o coeficiente de x^2 além de diferente de zero não é 1 (um) e discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Multiplicamos todos os termos da equação pelo coeficiente a, vem:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0.$$

Onde podemos escrever:

$$(ax)^2 + b(ax) + ac = 0.$$

Façamos $ax = y$. Então podemos escrever: $y^2 + by + ac = 0$ (temos uma nova equação polinomial do segundo grau de coeficiente de y^2 igual a um, com a qual poderíamos resolver pelo método de soma e produto).

Assim, resolvendo a equação polinomial do segundo grau $y^2 + by + ac = 0$ (note que ambas as equações têm o mesmo discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Temos suas soluções determinadas por:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

Daí, para resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$ basta:

$$x = \frac{y}{a} = \frac{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2}}{a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Capítulo 2

ASPECTO HISTÓRICO E ALGÉBRICO DAS RESOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DO TERCEIRO E QUARTO GRAUS

2.1 Aspecto Histórico das Equações do Terceiro e Quarto Graus

Foi no século XVI, que, provavelmente, ocorreu o feito matemático mais extraordinário, à descoberta, por matemáticos italianos, da resolução algébrica de equações polinomiais do terceiro e quarto graus. EVES (vide[8]). Esse feito matemático foi publicado no ano de 1545 em um grande tratado em latim de álgebra intitulado Ars Magna, do italiano Girolamo Cardano (1501-1576).

Lendo os livros de GARBI (vide[12]), EVES (vide[8]) e BOYER (vide[7]) fiquei entusiasmado com toda a história por trás da publicação da Ars Magna e a resolução das equações polinomiais do terceiro grau. Vejamos a seguir, resumidamente, como os fatos aconteceram: O italiano Scipione del Ferro (1465-1526), professor de matemática da Universidade de Bolonha, provavelmente, por volta de 1510, foi o primeiro matemático a desenvolver uma fórmula geral para resolver equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$. Porém, nunca publicou sua descoberta, mas antes de morrer, revelou a resolução, que mantivera em segredo, a seu discípulo Antonio

Maria Fior (Séc.XV-Séc.XVI).

Após a morte de Scipione del Ferro, Antonio Fior, usando o conhecimento do mestre, teve a infeliz ideia de desafiar o também matemático italiano Nicoló Fontana (cerca 1499-1557), mais conhecido como Tartaglia (gago, em italiano).

O desafio consistia em lista de problemas trocada entre os competidores. Tais desafios entre sábios eram muito comuns naquela época. Tartaglia era um eminente professor em Veneza e já havia derrotado outros desafiantes. Tartaglia, então, após aceitar o desafio desconfiou que deveria existir uma resolução para equação do terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0,$$

uma vez que a lista proposta por seu rival, Fior, só possuía problemas deste tipo. Nesse momento, Tartaglia mobilizou todo o entusiasmo e empenho e além de resolver os problemas propostos por Fior, também descobriu a fórmula geral para as do tipo

$$x^3 + px^2 + q = 0.$$

E assim, vence a disputa com facilidade, pois os problemas que seu oponente deveria resolver estavam além da sua capacidade.

Mais tarde, Girolamo Cardano, um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartagia a chave da solução da cúbica. Em 1545, porém, quando apareceu em Neremberg a *Ars Magna* de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia de cúbica. EVES (vide[8]).

Capa do Livro *Ars Magna* (1545)

Fonte: http://wwwrevistadomomento.blogspot.com.br/2011/08/girolamo-cardano-matematica-beatriz.html

Pouco depois da resolução da equação cúbica, encontrou-se também a solução da equação quártica geral.

Em 1540, o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs um problema a Cardano que recaía numa equação quártica $13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$. Embora não conseguisse resolver essa equação, seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1560) teve êxito nessa tarefa, e Cardano teve o prazer de publicar também essa solução em sua *Ars Magna*. EVES (vide[8]).

Logo após o matemático italiano Cardano apresentar, em seu livro Ars Magna, a fórmula resolutiva da equação do 3º grau, que fornecia raízes reais mediante expressões onde apareciam raízes quadradas de números negativos que foi considerandos na época números "*sem significado*", "*impossíveis*"ou "*fictícios*". A partir daí, os matemáticos passaram a estudar e trabalhar com raízes quadradas de números negativos.

Note que resolvendo a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$, usando-se a fórmula de Cardano, temos:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}}$$

Para a época chegamos à um empasse que não podia ser ignorada. A extração de raízes quadradas de números negativos.

Assim, faremos a seguir um pequeno resumo da evolução dos números complexos, para que o leitor tenha uma visão geral da história do assunto.

✓O matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1573) engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, em 1572 observou que era possível escrever $\sqrt{-4} = \sqrt{4.(-1)} = 2\sqrt{-1}$;

✓Ainda neste mesmo período o matemática francês Albert Girard (1590-1633) em 1629, passa a escreve as raízes quadradas de números negativos na forma $a + b\sqrt{-1}$. Assim, $2 + \sqrt{-4} = 2 + 2\sqrt{-1}$;

✓O matemática francês René Descartes (1596-1650) em 1637, chama a de "*parte real*"e b de "parte imaginária";

✓O matemático suiço Leonhard Euler usa a letra i para representar $\sqrt{-1}$. Assim, uma expressão do tipo $2 + \sqrt{-4}$ passou a ser escrita como $2 + 2i$.

✓O matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855) publicou um trabalho dando uma interpretação geométrica para esses números da forma $a + bi$, aos quais denominou números complexos.

2.2 A Álgebra da Equação do Terceiro Grau

Consideremos a equação polinomial do terceiro grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

em que a, b e c são constante reais com $a \neq 0$. Inicialmente, vamos dividir a equação pelo coeficiente a, para obter a equação

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0.$$

Assim, só iremos considerar equações em que o coeficiente de x^3 seja igual a 1. Então, dada à equação polinomial $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, façamos a mudança de incógnita $x = y - \frac{a}{3}$, para eliminarmos o termo x^2, isto é:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 - ay^2 + \frac{a^2y}{3} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^2}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0. \tag{2.1}$$

Fazendo

$$b - \frac{a^2}{3} = p$$

e

$$\frac{2a^2}{27} - \frac{ab}{3} + c = q$$

e substituindo na equação (2.1), temos:

$$y^3 + py + q = 0. \tag{2.2}$$

Para resolver a equação (2.2), escrevemos

$$y = u + v. \tag{2.3}$$

Elevando ao cubo a equação (2.3), obtemos

$$y^3 = (u + v)^3 \Rightarrow$$

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) \Rightarrow$$
$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uvy \Rightarrow$$
$$y^3 - 3uvy - (u^3 + v^3) = 0. \qquad (2.4)$$

Comparando (2.4) com (2.2), temos:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = \frac{-p}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}.$$

Assim, u^3 e v^3 são as raízes de uma equação do segundo grau, da qual conhecemos a soma e o produto das raízes, ou seja:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0, \qquad (2.5)$$

chamada *equação quadrática resolvente* da equação (2.2)

Utilizando a fórmula de Bhaskara para resolver a equação do segundo grau, obtemos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Logo,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Substituindo os valores de u e v em (2.3) temos:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (2.6)$$

Assim, $y = u + v$, dada pela fórmula (2.6), é uma raiz da equação (2.2), onde $uv = -\frac{p}{3}$.

Temos então a chamada fórmula de Cardano para a resolução das equações polinomiais do terceiro grau.

Na fórmula de Cardano (2.6) o radicando

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

é chamado discriminante de (2.2). Como no caso da equação polinomial do segundo grau, podemos fazer uma discussão completa sobre as raízes da equação polinomial do terceiro grau (2.2), se p e q são números reais.

Discussão da Equação polinomial do terceiro grau

1^o caso: **D > 0.**

Nota: *Sabemos que se z é uma das raízes cúbicas complexas de $\gamma \in \mathbb{C}$, então as três raízes cúbicas de γ são $z, wz, \overline{w}z$, em que $w = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{3}$ é uma raiz cúbica da unidade.*

Nas fórmulas de Cardano u^3 e v^3 são reais. Denotamos por u_1 e v_1 suas raízes cúbicas reais, os três valores de u e v são:

$$u_1; wu_1; \overline{w}u_1; v_1; wv_1; \overline{w}v_1$$

onde w e $\overline{w}$ são as raízes cúbicas da unidade. Temos que:

$$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

ou

$$\overline{w} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Para que uv seja real, as possibilidades para u e v são as seguintes:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{u}=\mathrm{u}_1 & ; & \mathrm{v}=\mathrm{v}_1 \\ \mathrm{u}=\mathrm{wu}_1 & ; & \mathrm{v}=\overline{w}v_1 \\ \mathrm{u}=\overline{w}u_1 & ; & \mathrm{v}=\mathrm{wv}_1 \end{array}$$

Portanto as três raízes da equação (2.2) são dadas por:

$$y_1 = u_1 + v_1 \Rightarrow \; y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

$$y_2 = wu_1 + \overline{w}v_1 \Rightarrow \; y_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \overline{w}\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

$$y_3 = \overline{w}u_1 + wv_1 \Rightarrow\ y_3 = \overline{w}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Concluímos que:

Se $D > 0$ a equação (2.2) tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

<u>2^o caso:</u> **$\mathbf{D = 0}$.**

Então, $u_1 = v_1$ e as raízes são:

$$y_1 = u_1 + v_1 \Rightarrow\ y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}};$$

$$y_2 = y_3 = (w+\overline{w})u_1 = -u_1 \Rightarrow\ y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Concluímos que:

Se $D = 0$ a equação (2.2) possui três raízes reais, sendo uma repetida.

<u>3^o caso:</u> **$\mathbf{D < 0}$.**

Neste caso, u^3 e v^3 nas fórmulas são imaginárias conjugadas.

Façamos:

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-D} = \rho\left(cos\theta \pm isen\theta\right).$$

Da igualdade tiramos

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \\ cos\theta = -\frac{q}{2\rho} \end{cases}.$$

Daí, os três valores de u e v são:

$$u = \begin{cases} \rho^{\frac{1}{3}}\left(cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + isen\left(\frac{\theta}{3}\right)\right); \\ \rho^{\frac{1}{3}}\left(cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right)\right); \\ \rho^{\frac{1}{3}}\left(cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\right). \end{cases}$$

e

$$v = \begin{cases} \rho^{\frac{1}{3}}\left(cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - isen\left(\frac{\theta}{3}\right)\right); \\ \rho^{\frac{1}{3}}\left(cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\theta-2\pi}{3}\right)\right); \\ \rho^{\frac{1}{3}}\left(cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) - isen\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)\right). \end{cases}.$$

Como $uv = -\frac{p}{3}$ é real, temos:

$$y_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3}\right);$$

$$y_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$y_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Esta é a chamada solução trigonométrica da equação polinomial do terceiro grau.

Concluímos que:

Se $D < 0$ então as três raízes da equação (2.2) são reais e distintas.

Vejamos a seguir alguns exemplos de equações do terceiro grau.

Exemplo 1: Resolva a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$:

Resolução:

Como $p = -6$, $q = -9$ e

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} \Rightarrow$$

$$D = \frac{81}{4} - \frac{216}{27} = \frac{81}{4} - 8 = \frac{49}{4}$$

como $D > 0$ a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Assim:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{-9}{2}\right) + \sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

e

$$v_1 = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{-9}{2}\right) - \sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

São as raízes cúbicas e, portanto temos:

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2 + 1 = 3.$$

$$x_2 = wu_1 + \overline{w}v_1 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).2 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).1 \Rightarrow$$

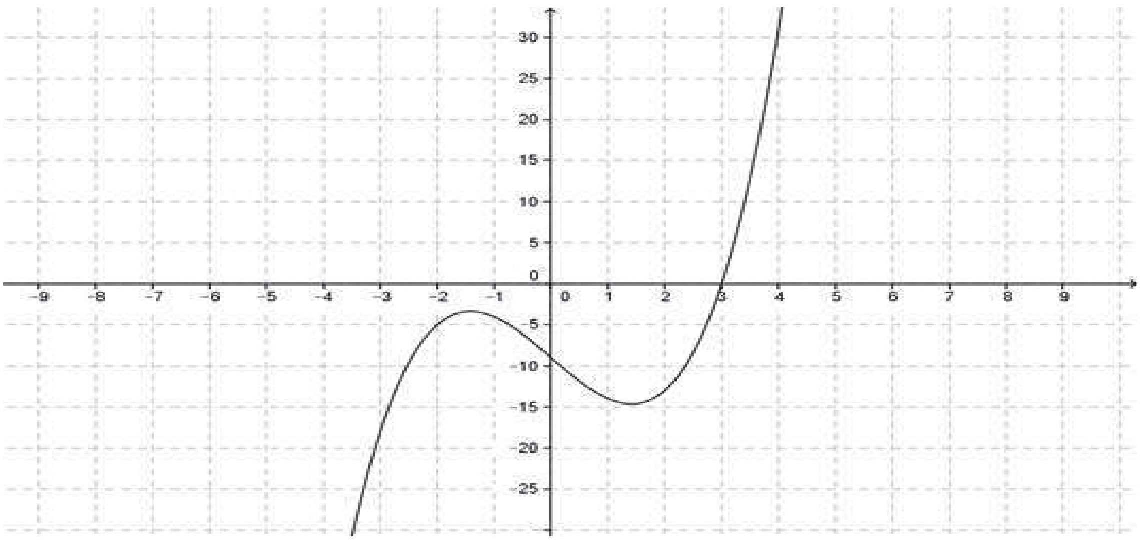
$$x_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-2+2i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_3 = \overline{w}u_1 + wv_1 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).1 \Rightarrow$$

$$x_3 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-2-2i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ são: $x_1 = 3, x_2 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ e $x_3 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.

A seguir o gráfico da curva $y = x^3 - 6x - 9$.



Exemplo 2: Resolva a equação $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$:

Resolução:

Inicialmente devemos expressar esta equação na forma $y^3 + py + q = 0$.

Para tanto, fazemos $x = y - \frac{1}{3}$.

Apos a substituição, obtemos $27y^3 - 225y - 250 = 0$, ou, equivalentemente, $y^3 - \frac{25y}{3} - \frac{250}{27} = 0$.

Aqui vem $p = -\frac{25}{3}$ e $q = -\frac{250}{27}$.

Logo temos que:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{\left(\frac{-250}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{-25}{3}\right)^3}{27} \Rightarrow$$

$$D = \frac{62500}{729} . \frac{1}{4} - \frac{15625}{27} . \frac{1}{27} \Rightarrow$$

$$D = \frac{15625}{729} - \frac{15625}{729} = 0.$$

Como $D = 0$ a equação possui três raízes reais, sendo uma com multiplicidade dois.

Assim:

$$u_1 = v_1 = \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{-\left(\frac{\frac{-250}{27}}{2}\right) + \sqrt{0}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27} + 0} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}.$$

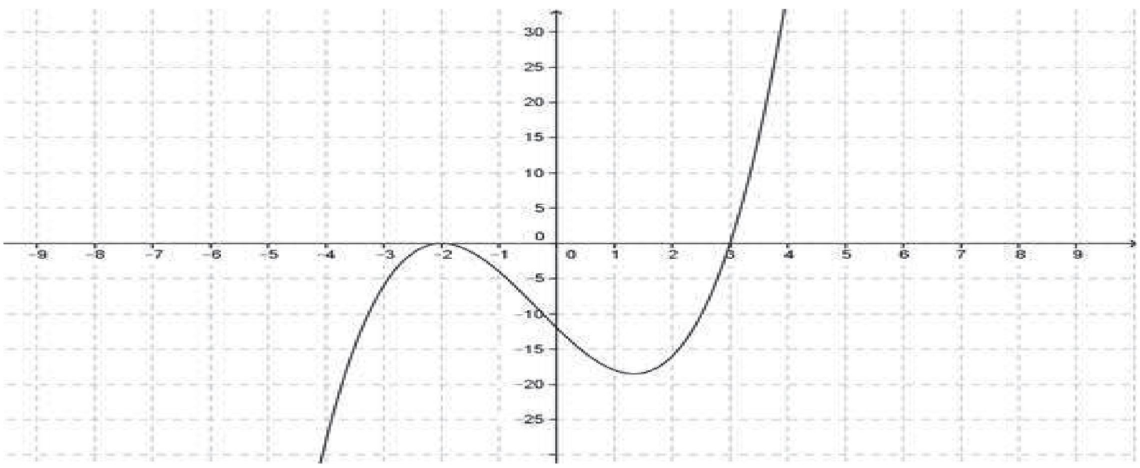
São as raízes cúbicas e, portanto temos:

$$x_1 = u_1 + v_1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5+5-1}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$x_2 = x_3 = -u_1 - \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{-5-1}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Portanto, as raízes da equação $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ são: $x_1 = 3$ e $x_2 = x_3 = -2$.

O gráfico da curva $y = x^3 + x^2 - 8x - 12$ é o que se vê a seguir.



Exemplo 3: Resolva a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$:

Resolução:
Agora temos $p = -6$ e $q = -4$.
Logo temos que:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27} \Rightarrow$$

$$D = \frac{16}{4} - \frac{216}{27} = 4 - 8 = -4$$

como $D < 0$ a equação possui as três raízes reais e distintas.
Assim,

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{(-6)^3}{27}} = \sqrt{\frac{216}{27}} = \sqrt{8}$$

e

$$cos\theta = -\frac{q}{2\rho} = -\left(\frac{-4}{2\sqrt{8}}\right) = \frac{4}{4\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{16} = \frac{8\sqrt{2}}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \theta = 45^o.$$

Logo:

$$x_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = 2\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{45^o}{3}\right) \Rightarrow$$

$$x_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{2.2 + 2\sqrt{12}}{4} = \frac{4 + 4\sqrt{3}}{4} = 1 + \sqrt{3}.$$

$$x_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3} + 120^o\right) = 2\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{45^o}{3} + 120^o\right) \Rightarrow$$

$$x_2 = 2\sqrt{2}cos(15^o + 120^o) = 2\sqrt{2}cos(135^o) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{4} = -2.$$

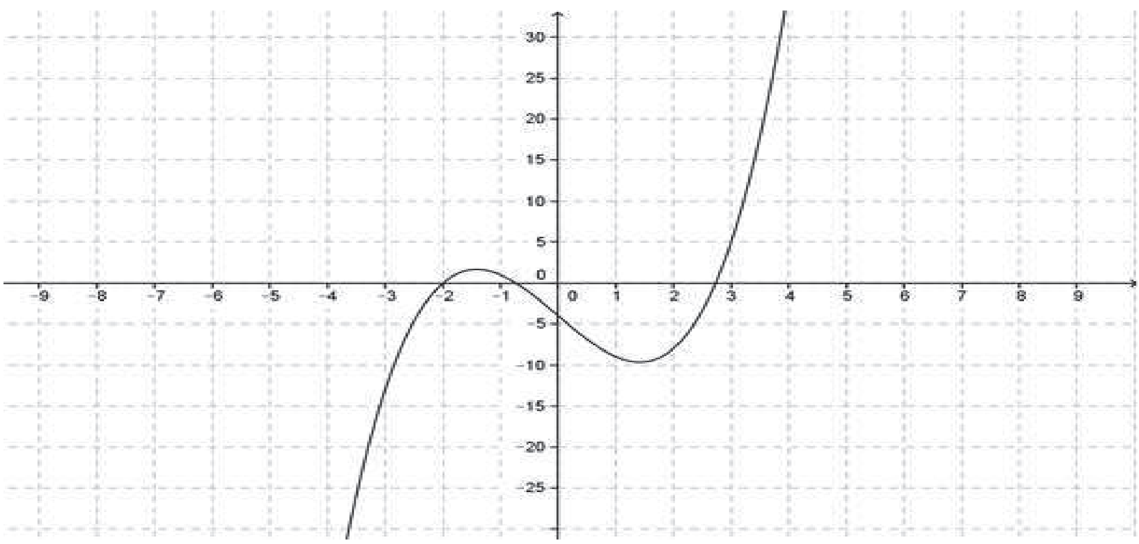
$$x_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3} + 240^o\right) = 2\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{45^o}{3} + 240^o\right) \Rightarrow$$

$$x_3 = 2\sqrt{2}cos(15^o + 240^o) = 2\sqrt{2}cos(255^o) \Rightarrow$$

$$x_3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{2.2 - 2\sqrt{12}}{4} = \frac{4-4\sqrt{3}}{4} = 1-\sqrt{3}.$$

Portanto, as raízes da equação $x^3 - 6x - 4 = 0$ são: $x_1 = 1+\sqrt{3}$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 1-\sqrt{3}$.

A seguir o gráfico da curva $y = x^3 - 6x - 4$.



2.3 A Álgebra da Equação do Quarto Grau

Consideremos a equação polinomial do quarto grau

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

em que a, b, c, d e e são constante reais com $a \neq 0$. Agora vamos dividir a equação pelo coeficiente a, para obter a equação

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0.$$

Então, dada à equação polinomial

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2.7}$$

façamos a mudança de incógnita $x = y - \frac{a}{4}$, para eliminarmos o termo x^3, isto é:

$$\left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d = 0.$$

Desenvolvendo:

$$\left[y^2 - \frac{2ay}{4} + \left(\frac{a}{4}\right)^2\right]^2 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)\left[y^2 - \frac{2ay}{4} + \left(\frac{a}{4}\right)^2\right] + b\left[y^2 - \frac{2ay}{4} + \left(\frac{a}{4}\right)^2\right] +$$

$$c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d = 0 \Rightarrow$$

$$y^4 + \left(b - \frac{3a^2}{8}\right)y^2 + \left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)y + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right) = 0. \tag{2.8}$$

Fazendo

$$p = \left(b - \frac{3a^2}{8}\right),$$

$$q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$$

e

$$r = \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right)$$

e substituindo na equação (2.8), temos

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{2.9}$$

em que p, q e r são constantes reais. Para resolver a equação (2.9), vamos reagrupar os termos de modo a fazer com que nos dois membros da igualdade sejam quadrados perfeitos. Tem-se:

$$y^4 + (p+\alpha)y^2 + (r+\beta) = \alpha y^2 - qy + \beta. \tag{2.10}$$

Para que os dois membros da equação (2.10) sejam quadrados perfeitos, é preciso que os dois discriminantes, ao mesmo tempo, sejam iguais a zero, ou seja,

$$\begin{cases} (p+\alpha)^2 - 4(r+\beta) = 0 \\ e \\ q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha} \end{cases}$$

$$(p+\alpha)^2 - 4\left(r + \frac{q^2}{4\alpha}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + p^2\alpha - 4r\alpha - q^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0,$$

assim temos uma equação de terceiro grau em α.

Como as equações de terceiro grau podem ser resolvidas usando a fórmula de Cardano, determina-se α, em seguida β e extraem-se as raízes quadradas da equação (2.10), ou seja:

$$\sqrt{y^4 + (p+\alpha)y^2 + (r+\beta)} = \pm\sqrt{\alpha y^2 - qy + \beta},$$

e obtem-se os quatro valores possíveis de y.

Portanto, para determinar as raízes da equação (2.7), soma-se y a $-\frac{a}{4}$ e obtém-se as quatro raízes da equação geral de quarto grau.

Vejamos a seguir alguns exemplos de equações do terceiro grau.

Exemplo 1: Resolva a equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$:

Resolução:

Para resolver a equação $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ vamos aplicar o método de Ferrari, ou seja, encontrar α e β tais que:

$$x^4 - (15 - \alpha)x^2 + (24 + \beta) = \alpha x^2 + 10x + \beta,$$

contanto que ambos os membros da igualdade sejam quadrados perfeitos. Seque que

$$(15 - \alpha)^2 - 4(24 + \beta) = 0$$

e

$$(10)^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow 100 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{25}{\alpha},$$

o que leva à equação:

$$\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0. \tag{2.11}$$

A equação (2.11) sendo do terceiro grau, e usando a fórmula de Cardano, chega-se as seguintes raízes: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$ e $\alpha_3 = 25$.

Para $\alpha = 1$, temos $\beta = 25$.

Logo substituindo $\alpha = 1$ e $\beta = 25$ em:

$$x^4 - (15 - 1)x^2 + (24 + 25) = x^2 + 10x + 25,$$

ou

$$x^4 - 14x^2 + 49 = x^2 + 10x + 25 \Rightarrow (x^2 - 7)^2 = (x + 5)^2.$$

Assim,

$$(x^2 - 7) = (x + 5) \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

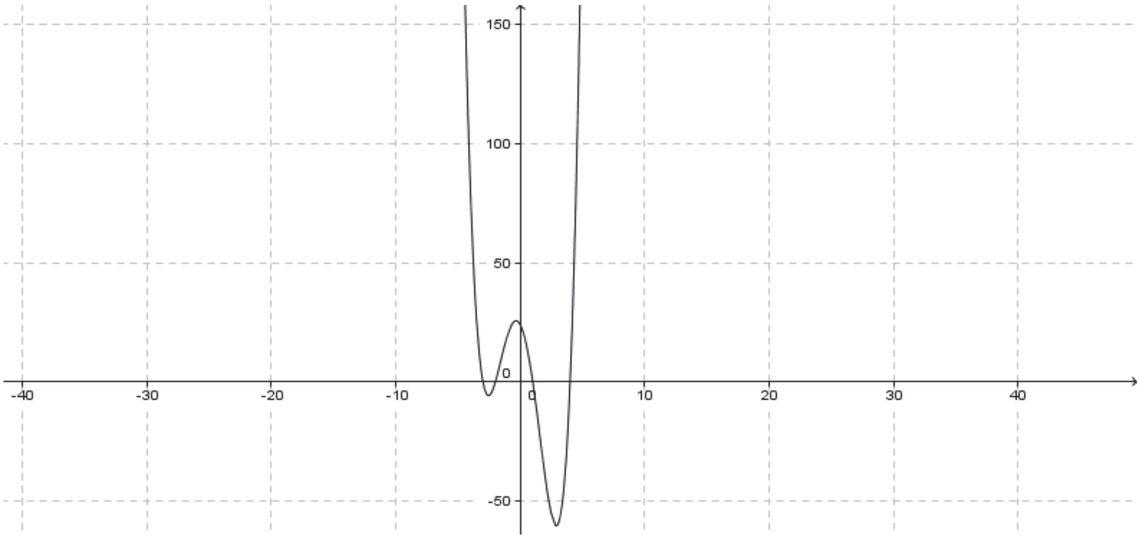
ou

$$(x^2 - 7) = -(x + 5) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

Portanto, a solução da equação é

$$S = \{-3, -2, 1, 4\}$$

. A seguir o gráfico da curva $y = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$.



Exemplo 2: Resolva a equação

$$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0. \tag{2.12}$$

Resolução:

Façamos a mudança de incógnita $x = y + \frac{1}{2}$, para eliminarmos o termo x^3, isto é:

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^4 - 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^3 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

Desenvolvendo:

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \left[\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(y + \frac{1}{2}\right) + 1\right] + 2y + 1 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right)\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) + 2y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$y^4 - \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{15}{16} = 0. \tag{2.13}$$

Para resolver a equação (2.13) vamos aplicar o método de Ferrari, ou seja, encontrar α e β tais que:

$$y^4 - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)y^2 - \frac{15}{16} + \beta = \alpha y^2 - 2y + \beta, \tag{2.14}$$

contanto que ambos os membros da igualdade sejam quadrados perfeitos.

Seque que

$$\left[-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\right]^2-4\left(-\frac{15}{16}+\beta\right)=0\Rightarrow\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2+\frac{15}{4}-4\beta=0$$

e

$$4-4\alpha\beta=0\Rightarrow\beta=\frac{1}{\alpha},$$

o que leva à equação:

$$\alpha^3-\alpha^2+4\alpha-4=0 \tag{2.15}$$

A equação (2.15) sendo do terceiro grau, e usando a fórmula de Cardano, chega-se as seguintes raízes: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-2$ e $\alpha_3=2$.

Para $\alpha=1$, temos $\beta=1$.

Logo substituindo $\alpha=1$ e $\beta=1$ na equação (2.14), temos:

$$y^4-\left(\frac{1}{2}-1\right)y^2-\frac{15}{16}+1=y^2-2y+1\Rightarrow$$

$$y^4+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=y^2-2y+1,$$

ou

$$\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=(y-1)^2.$$

Assim,

$$\left(y^2+\frac{1}{4}\right)=(y-1)\Rightarrow y^2-y+\frac{5}{4}=0\Rightarrow\begin{cases} y_1=\frac{1}{2}+i\\ y_2=\frac{1}{2}-i\end{cases}$$

ou

$$\left(y^2+\frac{1}{4}\right)=-(y-1)\Rightarrow y^2+y-\frac{3}{4}=0\Rightarrow\begin{cases} y_3=-\frac{3}{2}\\ y_4=\frac{1}{2}\end{cases},$$

as raízes da equação (2.13).

Portanto, para determinar as raízes da equação (2.12), substituímos os valores de y na equação $x=y+\frac{1}{2}$, então:

$$x_1=\frac{1}{2}+i+\frac{1}{2}=1+i$$

ou

$$x_2=\frac{1}{2}-i+\frac{1}{2}=1-i$$

ou

$$x_3 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

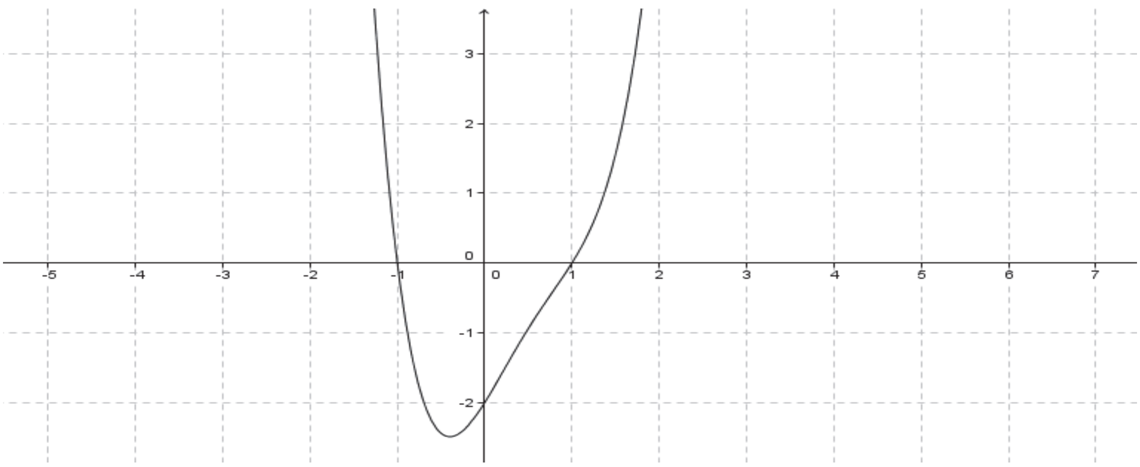
ou

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Portanto, a solução da equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ é

$$S = \{-1, 1 - i, 1 + i, 1\}.$$

A seguir o gráfico da curva $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2$.



Capítulo 3

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO QUINTO E SÉTIMO GRAUS POR UMA DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE CARDANO

Com a descoberta do método de resolução das equações do quarto grau através de radicais por Ludovico Ferrari, o desafio dos matemáticos, nesse campo, passou a ser as equações do quinto grau. Porém, em quase três séculos que se seguiram, muitas foram às tentativas, sem sucesso, de resolver a equação geral do quinto grau.

Segundo EVES (vide[8]) o médico italiano Paolo Ruffini, após algumas tentativas em 1803, 1805 e 1813 procurou provar, embora sempre de maneira insuficiente, que as raízes das equações gerais de grau cinco, ou maior, não podem ser expressas por meio de radicais em termos dos coeficientes respectivos, um fato verdadeiro, como se sabe hoje.

Entretanto, por volta de 1825, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829), publicou uma prova satisfatória desse fato. E, poucos anos depois, Evariste Galois (1811-1832) provou definitivamente a impossibilidade para as equações de grau maior ou igual a cinco serem resolvidas através de radicais.

Nesse capítulo, vamos nos basear na demonstração, dada pelo professor SARAIVA (vide[25]) de uma equação do quinto grau em que uma de suas raízes pode ser expressa através de radicais semelhantes à fórmula de Cardano.

Generalização

Já vimos que, podemos representar a equação geral do terceiro grau na forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

com $a \neq 0$ através de uma mudança incógnita a equação fica na forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Calculando o cubo de um binômio $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$, e colocando em evidência $3uv$, temos:

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3$$

ou melhor

$$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v). \tag{3.1}$$

Consideremos a equação do quinto grau

$$x^5 - px^3 - qx - r = 0$$

Sendo x uma raiz dessa equação e supondo que essa raiz seja escrita na forma $x = u + v$. Tome o desenvolvimento do binômio $(u+v)^5$, temos:

$$(u+v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$$

e colocando os termos semelhantes em evidência, obtemos:

$$(u+v)^5 = 5uv(u^3+v^3) + 10u^2v^2(u+v) + u^5 + v^5. \tag{3.2}$$

Mas, substituindo (3.1) em (3.2),ou seja,

$$(u+v)^5 = 5uv[(u+v)^3 - 3uv(u+v)] + 10u^2v^2(u+v) + u^5 + v^5 \quad \Rightarrow$$

$$(u+v)^5 = 5uv(u+v)^3 - 15u^2v^2(u+v) + 10u^2v^2(u+v) + u^5 + v^5,$$

isto é,

$$(u+v)^5 = 5uv(u+v)^3 - 5u^2v^2(u+v) + u^5 + v^5,$$

ou melhor,

$$(u+v)^5 - 5uv(u+v)^3 + 5u^2v^2(u+v) - (u^5+v^5) = 0. \tag{3.3}$$

Fazendo $p = 5uv$, $-q = 5u^2v^2$ e $r = u^5 + v^5$, vamos estabelecer que

$$p^2 = (5uv)^2 \Rightarrow \; p^2 = 25u^2v^2 \Rightarrow \frac{p^2}{5} = 5u^2v^2 \Rightarrow \; -q = \frac{p^2}{5}$$

como $x = u + v$, podemos reescrever a equação (3.3) na forma:

$$x^5 - px^3 + \frac{p^2}{5}x - r = 0$$

Para resolvermos essa equação, basta verificarmos os coeficientes dela, pois se

$$\begin{cases} p = 5uv \\ r = (u^5 + v^5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^5v^5 = (\frac{p}{5})^5 \\ r = (u^5 + v^5) \end{cases}.$$

Daí, o que encontramos é o mesmo que na resolução da cúbica; um sistema em que possuímos a soma e o produto de dois números. Onde u^5 e v^5 são raízes da equação do segundo grau $w^2 - rw + (\frac{p}{5})^5 = 0$ cujas raízes são:

$$w = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p}{5}\right)^5}$$

ou seja,

$$w_1 = u^5 = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p}{5}\right)^5} \quad \Rightarrow$$

$$u = \sqrt[5]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p}{5}\right)^5}}$$

e

$$w_1 = v^5 = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p}{5}\right)^5} \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt[5]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p}{5}\right)^5}}$$

de onde concluímos que a raiz $x = u + v$ é dada pela fórmula:

$$x = \sqrt[5]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(\frac{p}{5}\right)^5}}.$$

Veja que foi aplicado o mesmo processo para a resolução das equações do terceiro e quinto grau. Com isso, passamos a resolver algumas equações incompletas de grau três e cinco. Assim, SARAIVA (vide[25]) nos deixa como desafio estudar e generalizar a equação do sétimo grau

$$x^7 + px^5 - qx^3 + rx - s = 0,$$

seguindo o mesmo processo feito para encontrar a fórmula das equações do terceiro e quinto graus.

Generalização

Sejam a equação

$$x^7 + px^5 - qx^3 + rx - s = 0$$

e supondo uma raiz escrita na forma $x = u+v$. Tome o desenvolvimento do binômio $(u+v)^7$,temos:

$$(u+v)^7 = u^7 + 7u^6v + 21u^5v^2 + 35u^4v^3 + 35u^3v^4 + 21u^2v^5 + 7uv^6 + v^7$$

e colocando os termos semelhantes em evidência, obtemos:

$$(u+v)^7 = 7uv(u^5+v^5) + 21u^2v^2(u^3+v^3) + 35u^3v^3(u+v) + u^7 + v^7. \qquad (3.4)$$

Agora, vamos substituir as seguintes igualdades

$$u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v)$$

e

$$u^5 + v^5 = (u+v)^5 - 5uv(u+v)^3 + 5u^2v^2(u+v)$$

em (3.4), ou seja,

$$(u+v)^7 = 7uv(u+v)^5 - 14u^2v^2(u+v)^3 + 7u^3v^3(u+v) + u^7 + v^7$$

ou melhor,

$$(u+v)^7 - 7uv(u+v)^5 + 14u^2v^2(u+v)^3 - 7u^3v^3(u+v) - (u^7+v^7) = 0.$$

Fazendo $p = -7uv$, $-q = 14u^2v^2$, $r = -7u^3v^3$ e $s = u^7 + v^7$, vamos estabelecer que

$$p^2 = (-7uv)^2 \Rightarrow\ p^2 = 49u^2v^2 \Rightarrow \frac{2p^2}{7} = 14u^2v^2 \Rightarrow\ -q = \frac{2p^2}{7}$$

e mais,

$$p^3 = (-7uv)^3 \Rightarrow p^3 = -343u^3v^3 \Rightarrow \frac{p^3}{49} = -7u^3v^3 \Rightarrow r = \frac{p^3}{49}$$

e como $x = u + v$, então podemos resolver as equações do sétimo grau do tipo

$$x^7 + px^5 + \frac{2}{7}p^2x^3 + \frac{p^3}{49}x - s = 0. \tag{3.5}$$

Para resolvermos essa equação, basta verificarmos os coeficientes dela, pois se

$$\begin{cases} p = -7uv \\ u^7 + v^7 = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^7v^7 = \left(-\frac{p}{7}\right)^7 \\ u^7 + v^7 = s \end{cases}.$$

Daí, o que encontramos é o mesmo que na resolução da cúbica e da quíntica; um sistema em que conhecemos a soma e o produto de dois números. Onde u^7 e v^7 são raízes da equação do segundo grau

$$w^2 - sw + \left(\frac{-p}{7}\right)^7 = 0$$

cujas raízes são:

$$w_1 = u^7 = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \left(\frac{p}{7}\right)^7} \quad \Rightarrow$$

$$u = \sqrt[7]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \left(\frac{p}{7}\right)^7}}$$

e

$$w_2 = v^7 = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \left(\frac{p}{7}\right)^7} \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt[7]{\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \left(\frac{p}{7}\right)^7}}$$

de onde concluímos que a raiz $x = u + v$ é dada pela fórmula:

$$x = \sqrt[7]{\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \left(\frac{p}{7}\right)^7}} + \sqrt[7]{\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \left(\frac{p}{7}\right)^7}}.$$

Observamos que as equações do quinto e sétimo graus estudadas nesse capítulo são definidas pela relação recursiva, onde cada identidade é obtida substituindo as anteriores.

Capítulo 4

APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS NO ENSINO BÁSICO

Nesse capítulo, apresentamos alguns problemas que envolvem as equações polinomiais presentes no ensino básico. Há questões que são resolvidas com a finalidade de que o leitor aprenda ou aprimore mais os métodos de resolução das equações polinomiais do segundo, terceiro e quarto graus.

Sugerimos que o leitor analise cuidadosamente cada questão resolvida, pois a abordagem proposta e de aplicação dos métodos estudados, tais como: dos babilônios, o completamento de quadrados de Al-Khowârizmî, a fórmula de Bhaskara, a fórmula de Cardano e outros métodos estudados neste trabalho.

A seguir apresentamos e resolvemos questões de caráter abstrato ou situação problema sobre o assunto em estudo.

Questão 1) Resolva a equação $x^2-5x-6=0$, utilizando a fórmula de Bhaskara.

Resolução:

Nessa equação, temos $a=1$, $b=-5$ e $c=-6$. Resolvendo a equação:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.(-6) = 25 + 24 = 49.$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2.1} = \frac{5 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$$
$$x_1 = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

ou

$$x_2 = \frac{5-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Portanto, o conjunto solução da equação proposta é $S = \{-1, 6\}$.

Questão 2) Resolva a equação

$$3x^2 - 9x + 6 = 0. \tag{4.1}$$

Resolução:

Multiplique todos os termos da equação (4.1) por 3, para obter:

$$(3x)^2 - 9(3x) + 18 = 0.$$

Substituindo $y = 3x$, a transforma em:

$$y^2 - 9y + 18 = 0.$$

Na equação $y^2 - 9y + 18 = 0$, temos: $a = 1$, $b = -9$ e $c = 18$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4.1.18 = 81 - 72 = 9.$$

Logo,

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{9 \pm 3}{2} \Leftrightarrow$$
$$y_1 = \frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

ou

$$y_2 = \frac{9-3}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Finalmente, como $x = \frac{y}{3}$, isto é

$$x_1 = \frac{y_1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

ou

$$x_2 = \frac{y_2}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Logo, o conjunto solução da equação proposta é $S = \{1, 2\}$.

Questão 3) Resolva a equação $x^2 + 7x - 30 = 0$ pelo método de completar quadrados.

Resolução:

Logo a equação $x^2 + 7x - 30 = 0$ pode ser escrita como $x^2 + 7x = 30$.

Assim, completando quadrado no primeiro membro. Temos:

$$x^2 + 2.\frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 30 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = 30 + \frac{49}{4} = \frac{120 + 49}{4} = \frac{149}{4} \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{7}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{149}{4}} \Rightarrow$$

$$x + \frac{7}{2} = \pm\frac{13}{2} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{7}{2} \pm \frac{13}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -\frac{7}{2} + \frac{13}{2} = \frac{-7 + 13}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

ou

$$x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{13}{2} = \frac{-7 - 13}{2} = \frac{-20}{2} = -10.$$

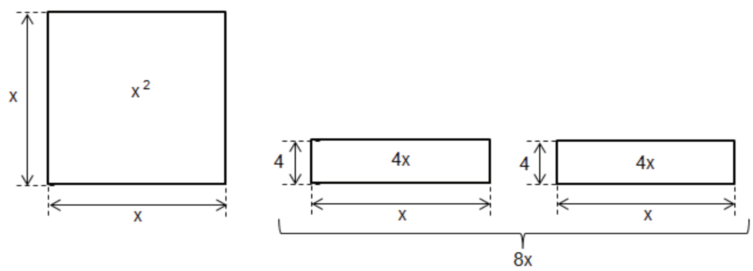
Portanto, o conjunto solução da equação proposta é $S = \{-10, 3\}$.

Questão 4) Resolva a equação $x^2 + 8x - 33 = 0$ por meio do método de Al-Khowârizmî de completar quadrados.

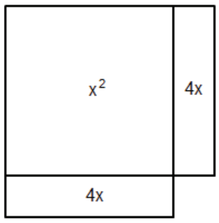
Resolução:

A equação $x^2 + 8x - 33 = 0$ é escrita na forma $x^2 + 4x + 4x = 33$.

Em seguida, representamos geometricamente cada termo do primeiro membro:

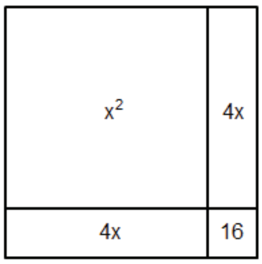


Agora, aplicamos cada um desses dois retângulos sobre os lados do quadrado de área x^2:



A área da figura formada é igual a $x^2 + 4x + 4x = x^2 + 8x$ que totaliza 33, ou seja, $x^2 + 8x = 33$.

Em seguida, completando então essa soma de áreas com a área de um quadrado de lado 4, portanto de área 16, obtém-se a área de um quadrado de lado $(x + 4)$, medindo então $33 + 16 = 49$ de área.



Então, $(x + 4)^2 = 49$, temos:

$$(x + 4)^2 = 49 \Rightarrow$$

$$x + 4 = \pm\sqrt{49} \Rightarrow$$

$$x + 4 = \pm 7.$$

Logo,

$$x + 4 = 7 \Rightarrow x = 7 - 4 = 3 \therefore x_1 = 3.$$

$$x + 4 = -7 \Rightarrow x = -7 - 4 = -11 \therefore x_2 = -11.$$

Portanto, o conjunto solução da equação proposta é $S = \{-11, 3\}$.

Questão 5) Aplique a fórmula de Cardano para resolver a equação

$$x^3 + 6x - 20 = 0. \tag{4.2}$$

Resolução:

Nota: *Se o número complexo α é uma raiz de uma função polinomial P, então $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$.*

Como $p = 6$ e $q = -20$ e

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-20)^2}{4} + \frac{(6)^3}{27} \Rightarrow$$
$$D = \frac{400}{4} + \frac{216}{27} = 100 + 8 = 108.$$

Logo a fórmula de Cardano nos dá a raiz:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \Rightarrow$$
$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-20)}{2} + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{-\frac{(-20)}{2} - \sqrt{108}} \Rightarrow$$
$$x = \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}.$$

Como $D > 0$ a equação $x^3+6x-20 = 0$ possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Mas, testando os divisores de 20, vemos que 2 é raiz. Como não há outra raiz real, concluímos que

$$\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} = 2.$$

É fácil verificar que, de fato, 2 é raiz. Podemos elimina-lá, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

2	1	0	6	-20
	1	2	10	0

Logo a equação (4.2) pode ser escrita como:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 10) = 0.$$

Resolvendo a equação $x^2 + 2x + 10 = 0$, obtemos as duas raízes complexas que faltavam:

$$x_2 = -1 + 3i$$

ou

$$x_3 = -1 - 3i.$$

Portanto, o conjunto solução da equação proposta é $S = \{-1 + 3i, -1 - 3i, 2\}$

Questão 6) Mostre que o número

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

é inteiro.

Resolução:

Fazendo:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

e elevando ao cubo em ambos os lados, obtemos:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3 \Rightarrow$$

$$x^3 = \left(2+\sqrt{5}\right) + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2 + \left(2-\sqrt{5}\right).$$

Simplificando, encontramos:

$$x^3 = 4 + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$$

$$x^3 = 4 + 3\left(\sqrt[3]{4-5}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) \Rightarrow$$

$$x^3 = 4 + 3(-1)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right).$$

Mas a expressão $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$ é igual ao próprio x. Assim, podemos escrever:

$$x^3 = 4 - 3x$$

ou seja

$$x^3 + 3x - 4 = 0. \tag{4.3}$$

Logo, o número dado satisfaz a equação (4.3). Como o enunciado afirma que o número é inteiro, devemos esperar que a equação (4.3) possua raízes inteiras. É fácil verificar que, de fato, 1 é raiz. Podemos elimina-lá, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Logo a equação (4.3) pode ser escrita como:

$$(x - 1)(x^2 + x + 4) = 0.$$

Resolvendo o fator de segundo grau $x^2 + x + 4 = 0$. Temos $a = 1$, $b = 1$ e $c = 4$.

Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4.1.4$$

$$\Delta = 1 - 16$$

$$\Delta = -15.$$

Daí, como $\Delta = -15 < 0$, a equação $x^2 + x + 4 = 0$ não tem raízes reais.

Portanto, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$.

Questão 7) Resolva a equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$ sabendo que uma de suas raízes é $1 + i$.

Nota: *Se o complexo $a + bi$ é uma raiz complexa não-real de uma equação algébrica com coeficientes reais, então seu complexo conjugado $a - bi$ também o é, com a mesma multiplicidade.*

Resolução:

Como a equação tem coeficientes reais, juntamente com $1 + i$ aparece também a raiz $1 - i$. Podemos eliminar cada uma delas, utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

1+i	1	-2	1	2	-2
1-i	1	-1+i	-1	1-i	0
	1	0	-1	0	

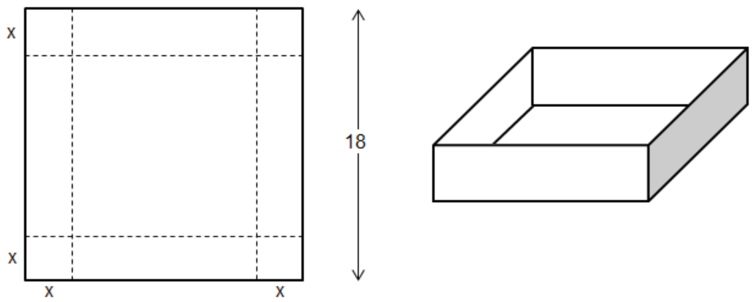
Uma vez eliminadas as duas raízes complexas, ficamos com a equação

$$x^2 - 1 = 0$$

que possui raízes 1 e -1.

Logo, as raízes da equação são $1+i$, $1-i$, 1 e -1.

Questão 8) Cortando-se quadrados de lado $4cm$ nos cantos de uma folha quadrada de papelão de $18cm$ de lado e dobrando conforme a figura, formamos uma caixa sem tampa cujo volume é igual $400cm^3$. Existe algum outro valor do lado do quadrado a ser recortado em cada canto para o qual o volume da caixa resultante também seja igual a $400cm^3$?



Resolução:

As dimensões da caixa formada quando se recorta um quadrado de lado x dão dadas por $18-2x$, $18-2x$ e x.

Logo, o volume da caixa é $(18-2x)(18-2x)x = x(18-2x)^2$, e a condição estabelecida pela questão é expressa pela equação

$$x(18-2x)^2 = 400$$

ou, equivalentemente,

$$4x^3 - 72x^2 + 324x - 400 = 0$$

ou, ainda

$$x^3 - 18x^2 + 81x - 100 = 0. \tag{4.4}$$

Como sabemos, cortando quadrados de lado 4 obtemos uma caixa de volume 400. Portanto, sabemos que 4 é uma raiz da equação (4.4).

Então, vamos eliminar a raiz conhecida, utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini para dividir $x^3 - 18x^2 + 81x - 100$ por $x - 4$,temos:

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & -18 & 81 & -100 \\ \hline & 1 & -14 & 25 & 0 \end{array}$$

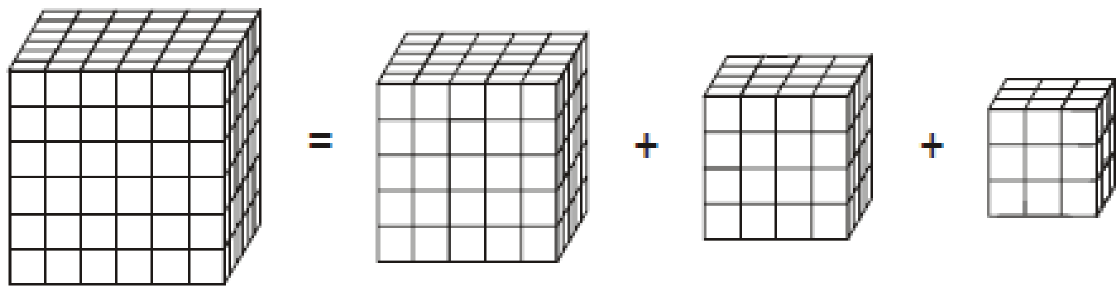
Uma vez eliminada a raiz, ficamos com a equação

$$x^2 - 14x + 25 = 0,$$

que possui raízes $7 \pm 2\sqrt{6}$.

Como o lado x do quadrado a ser recortado deve satisfazer $0 < x < 9$, concluímos que apenas a rais $7 - 2\sqrt{6}$, que fornece uma dimensão aproximada de $2,1cm$ para o lado do quadrado a ser recortado, atendendo as condições da questão.

Questão 9) (UFRN) O volume do cubo de arestas 6 é igual à soma dos volumes dos cubos de arestas 5, 4 e 3, conforme ilustração abaixo.



a) Comprove essa afirmação, explicando os cálculos.

b) Determine as raízes inteiras positivas da equação polinomial $n^3 = (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3$, para justificar que o único cubo de aresta inteira n que tem volume igual à soma dos volumes dos cubos de arestas $n-1$, $n-2$ e $n-3$ é o cubo de aresta 6.

Resolução:

a) Os volumes dos cubos de arestas 6, 5, 4 e 3 são, respectivamente, 6^3, 5^3, 4^3 e 3^3.

Assim, temos: $6^3 = 216$ e $5^3 + 4^3 + 3^3 = 125 + 64 + 27 = 216$.
Daí, $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$.
b)

$$n^3 = (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3 \Rightarrow$$

$$n^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 - 6n^2 + 12n - 8 + n^3 - 9n^2 + 27n - 27 \Rightarrow$$

$$n^3 = 3n^3 - 18n^2 + 42n - 36 \Rightarrow$$

$$2n^3 - 18n^2 + 42n - 36 = 0 \therefore$$

$$n^3 - 9n^2 + 21n - 18 = 0.$$

Como sabemos que 6 é raiz de $P(n) = 0$, em que $P(n) = n^3 - 9n^2 + 21n - 18$, usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini para encontramos as outra raízes (arestas dos prováveis cubos), temos:

6	1	-9	21	-18
	1	-3	3	0

Logo, $P(n) = (n-6)(n^2 - 3n + 3)$.
Assim, $(n-6)(n^2 - 3n + 3) = 0$.
As outras raízes são obtidas resolvendo a equação $n^2 - 3n + 3 = 0$.
Temos: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 3$.
Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.1.3$$

$$\Delta = 9 - 12$$

$$\Delta = -3.$$

Temos,

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$

$$n = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-3}}{2.1} \Rightarrow$$

$$n = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Então, as raízes da equação $n^2 - 3n + 3 = 0$. são:

$$n_1 = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$$

ou

$$n_2 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Daí, as raízes de $P(n) = 0$ são:

$n = 6$ ou $n_1 = \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ ou $n_2 = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

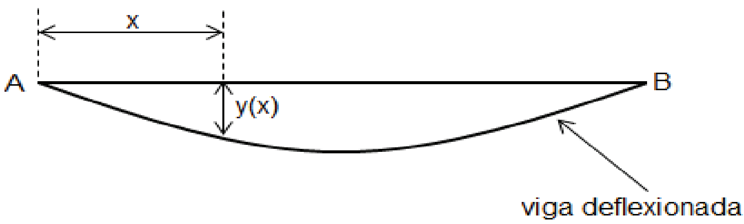
Portanto, $n = 6$ é o único valor inteiro que satisfaz:

$$n^3 = (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3.$$

Questão 10) (UnB - DF) Uma viga metálica de seção transversal variável está presa nas suas extremidades, A e B, e sofre uma deflexão (medida em metros) na vertical, em relação ao segmento horizontal AB, dada por:

$$y(x) = \frac{x^3 - 26x^2 + 160x}{3600},$$

em um ponto de AB que dista x metros de A, conforme ilustra a figura abaixo.



Com base nessas afirmações, classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

a) A distância entre os pontos A e B e igual a $10m$.

b) No ponto C do segmento AB, distante $4m$ de B, a deflexão da viga é menor que $10cm$.

c) Sabendo-se que a maior deflexão da viga é igual a $\frac{2}{25}m$ e que uma das raízes do polinômio $\frac{x^3-26x^2+160x}{3600} - \frac{2}{25}$ é igual a 18, conclui-se que a maior deflexão ocorre em um ponto D que dista mais $5m$ do ponto A.

Resolução:

a) Verdadeira (V).

De fato, a distância entre A e B é dada pelo menor valor positivo de x em que $y(x) = 0$. Calculando as raízes de $y(x) = \frac{x^3-26x^2+160x}{3600}$, temos:

$$y(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 26x^2 + 160x}{3600} = 0 \Rightarrow$$
$$x^3 - 26x^2 + 160x = 0 \Rightarrow$$
$$x(x^2 - 26x + 160) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 = 0$$

ou

$$x^2 - 26x + 160 = 0.$$

Resolvendo a equação $x^2 - 26x + 160 = 0$.

Temos que suas raízes tem como soma 26 e produto 160, ou seja, elas valem $x_2 = 10$ e $x_3 = 16$.

Logo, $AB = 10m$.

b) Verdadeira (V), pois, $CB = 4m \Rightarrow AB = 10 - 4 = 6m$.

Assim, a reflexão é:

$$y(6) = \frac{6^3 - 26.6^2 + 160.6}{3600} = \frac{216 - 936 + 960}{3600} = \frac{240}{3600} \approx 0,067m.$$

Portanto, $y(6) \approx 6,7cm$.

c) Falsa (F), pois, sendo:

$$P(x) = \frac{x^3 - 26x^2 + 160x}{3600} - \frac{2}{25},$$

ou seja,

$$P(x) = \frac{x^3 - 26x^2 + 160x - 228}{3600},$$

temos que uma das raízes de

$$P(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 26x^2 + 160x - 228}{3600} = 0 \Rightarrow$$
$$x^3 - 26x^2 + 160x - 228 = 0$$

é 18.

Usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini para encontramos as outra raízes, temos:

18	1	-26	160	228
	1	-8	16	0

Logo, $P(x) = (x - 18)(x^2 - 8x + 16)$.

Assim, $(x - 18)(x^2 - 8x + 16) = 0$.

As outras raízes são obtidas resolvendo a equação $x^2 - 8x + 16 = 0$.

Onde suas raízes tem como soma 8 e produto 16, ou seja, elas valem $x_2 = x_3 = 4$.

Como $AB = 10m$ e a reflexão máxima ocorre quando $P(x) = 0$, concluímos que ela ocorrerá a $4m$ do ponto A.

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, João Tomas, *Método de Viète para Resolução de Equações do* 2^o *grau. In.* **Revista do Professor de Matemática**, n^o 13 (1988), p. 18-20.

[2] ANDRADE, Bernardino Carneiro de, *A Evolução Histórica de Resolução das Equações do* 2^o *Grau.* **Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações**, Portugal. Universidade do Porto, (2000). Disponível em: `http://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/9895/3/3026_TM_01_P.pdf`. Acesso em: 10 de fevereiro 2013.

[3] ASSIS, Carlos Alberto M. de, *Como Euler resolveu a equação do segundo grau. In.* **Revista do Professor de Matemática**, n^o 64 (2007), p. 43-44.

[4] ASSIS, Carlos Alberto M. de, *Estudando uma Equação de grau 7.* Blog Fatos Matemáticos, (2011). Disponível em: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/. Acesso em: 15 fevereiro 2013.

[5] BASTOS, Gervásio Gurgel, *Resolução de Equações Algébricas por Radicais.* **Mini-Curso de Nível Elementar.**, Fortaleza. UFC, (1980).

[6] BIANCHINI, Edwaldo, *Matemática.* 6. ed. São Paulo: Moderna,(2006).

[7] BOYER, Carl Benjamin, Uta C. Merzbach, *História da Matemática.* Trad. Helena de Castro. São Paulo: BLUCHER,(2012).

[8] EVES, Howard, *Introdução à História da Matemática.* Trad. Helena Castro. São Paulo: BLUCHER,(2012).

[9] FILHO, Daniel Cordeiro de Morais, *Manual de Redação Matemática: com um dicionário etimológico explicativo de palavras usadas na matemática e um capítulo especial sobre como se escreve uma dissertação*. Campina Grande, PB: UFCG,(2010).

[10] FRASSON, Miguel V. S., *Como obter raízes por soma e produto quando **a** não é 1*. *In.* **Revista do Professor de Matemática**, *nº* 70 (2009), p. 26-27.

[11] GARBI, Gilberto Geraldo, *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física,(2010).

[12] GARBI, Gilberto Geraldo, *O Romance das Equações Algébricas*. São Paulo: MAKRON BOOKS,(1997).

[13] GUELLI, Oscar, *Contando a História da Matemática: Equação: O idioma da álgebra*. 11. ed. São Paulo: ÁTICA,(2008).

[14] GUTIERRE, Liliane dos Santos, *História da Matemática: Atividades para a sala de aula*. Natal, RN: EDUFRN,(2011).

[15] LIMA, Elon Lages, et. al. *Temas e Problemas Elementares*. 12. ed. Rio de Janeiro: SBM,(2006).

[16] LIMA, Elon Lages, et. al. *Temas e Problemas*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM,(2003).

[17] LIMA, Elon Lages, et. al. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM,(2006).

[18] LIMA, Elon Lages, *Matemática e Ensino*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM,(2007).

[19] LIMA, Elon Lages, *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM,(2006).

[20] LIMA, Elon Lages, et. al. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM,(2006).

[21] LIMA, Alexandre, *Generalização do Método de Cardano-Tartáglia*. Blog Fatos Matemáticos, (2011). Disponível em: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/. Acesso em: 15 fevereiro 2013.

[22] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática.* 1. ed. São Paulo: Moderna,(2009).

[23] PITOMBEIRA, João Bosco, *REVISITANDO UMA VELHA CONHECIDA*. *In.* **Conferência da II Bienal da SBM**, UFBA, (2004).

[24] ROSA, Milton, *Uma solução geométrica babilônio*. *In.* **Revista do Professor de Matemática**, n^o 67 (2008), p. 9-11.

[25] SARAIVA, José Cloves Verde, *A Fórmula de Cardano Além das Cúbicas*. *In.* **Revista Eureka**, n^o 15 (2002), p. 24-26.