Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

Diretrizes para a construção de um mapa conceitual: Uma abordagem através da geometria plana

Osvaldo de Oliveira Vieira

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. André Krindges**

Cuiabá - MT

Agosto de 2019

Diretrizes para a construção de um mapa conceitual: Uma abordagem atravéz da geometria plana

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Osvaldo de Oliveira Vieira e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 1 de agosto de 2019.

Prof. Dr. André Krindges
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. André Krindges
Prof. Dr. Marcos José Gonçalves
Prof. Drª. Liliana Karla Jorge de Moura

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

V658d Vieira, Osvaldo de Oliveira.
Diretrizes para a construção de um mapa conceitual: : Uma abordagem através da geometria plana / Osvaldo de Oliveira Vieira. -- 2019
xii, 80 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. André Krindges.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Mapa Conceitual. 2. LaTeX. 3. Produto para o Ensino. 4. Geometria Plana. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060900 - Cuiabá/MT
Fone: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Diretrizes para a construção de um mapa conceitual: uma abordagem através da geometria plana"

Autor: Osvaldo de Oliveira Vieira

defendida e aprovada em 01/08/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor André Krindges
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Marcos José Gonçalves
Instituição: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

Examinadora Externa Doutora Liliana Karla Jorge de Moura
Instituição: IFMT - campus Cáceres

Cuiabá, 01/08/2019.

Dedico o êxito desta conquista primeiramente a Deus e em seguida aos meus pais, Manoel e Maria

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e pelo discernimento em momentos de angústia na espera do resultado do ENQ.

A minha família, em especial, ao meu pai Manoel, minha mãe Maria Aparecida, minhas irmãs Flávia e Vandinelma, que me incentivaram e foram portos seguros nos momentos difíceis.

A minha madrinha Maria, pelas orações e palavras nos momentos difícies.

A minha namorada Mariana por estar me apoiar em todos os momentos.

Aos meus amigos, Claudeir, Ricardo, Olikver e Cristiane, pelas conversas descontraídas nas longas viagens a Cuiabá.

A melhor turma de estudantes do PROFMAT, a quem hoje chamo de amigos, em especial ao guerreiro Claudeir, pelos dias de estudos e viagens intermináveis e Adriana, Jaqueline Mariano, Juliano, Valcir, Luiz, Jaqueline Soares, Ondrias, Cláudio, Paula, Priscila, Vinícius, Zeila e Silvana, por compartilharem os bons momentos que passamos juntos durante estes anos de estudo.

Aos professores do programa PROFMAT, pelas lições que levarei para o resto da vida.

Ao meu orientador, o professor Dr. André Krindges pela análise cuidadosa e criteriosa deste trabalho, cujas orientações foram de grande relevância para a conclusão do mesmo.

A SBM e UFMT pela organização desse curso de mestrado.

O meu muito obrigado a todos que contribuíram e contribuem na minha formação, pois sem vocês não seria possível a realização deste sonho.

"As leis da natureza são apenas os pensamentos matemáticos de Deus."

Euclides de Alexandria.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar as diretrizes para a construção de mapa conceitual que possa ser utilizado como recurso pedagógico com abordagem através do ensino de geometria euclidiana plana, utilizando o LaTeX como ferramenta de programação, trazendo uma linguagem completa dos comandos e esclarecimentos dos pacotes e bibliotecas utilizados baseando-se na metodologia descrita por Marriott e Torres (2003) e Moreira (2012). O Conteúdo escolhido foi o de geometria plana. No inicio do trabalho descrevemos, de forma sucinta, o surgimento e desenvolvimento da geometria no decorrer da história. Posteriormente, descrevemos sobre o uso do LaTeX como plataforma e os pacotes que foram essenciais na construção de uma linguagem de programação para a confecção do mapa conceitual. Para a construção do mapa utilizamos os conteúdos de geometria plana, com enfoque em seus axiomas, definições e postulados do livro Dolce e Pompeo (2005). Com isso, espera se que esse material fomente a criação de novas ideias para outros produtos baseando-se no uso desta linguagem de programação para auxiliar a obtenção de um ensino-aprendizagem mais construtivo, dinâmico e significativo, tanto para os professores como para os alunos.

Palavras chave: Mapa Conceitual, LaTeX, Produto para o Ensino, Geometria Plana.

Abstract

This paper aims to present the guidelines for a conceptual map's construction, which can be used as a pefagogical resource, with a approach through the teaching of a flat Euclidean Geometry, using LaTeX as a programming tool, bringing a complete language of commands and clarifications of the pachages and libraries used, based on the methodology described by Marriott e Torres (2003) e Moreira (2012).The chosen content was the one of flat geometry. In the beginning of the work we briefly describe the emergence and development of geometry throughout history. Later, we describe the use of LaTeX as a platform and and the packages that were essential in the construction of a programming language for the construction of the conceptual map. For the construction of the map he used the contents of flat geometry, focusing on his axioms, definitions and postulates of the book Dolce e Pompeo (2005). Therefore, it is expected that this material will foster the creation of new ideas for other products based on the use of this programming language to help obtain a more constructive teaching-learning, dynamic and meaningful teaching-learning for both teachers and students.

Keywords: Conceptual Map, LaTeX, Product for Teaching, Flat Geometry.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Segundo Carraher et al. (1988), no que tange ao aprendizado, a Matemática enfrenta resistência no ambiente escolar, mesmo nos cálculos vivenciados pelos sujeitos cotidianamente, isso porque é perceptível que o indivíduo sabe lidar com os mesmos, no entanto na hora de problematizar e escrever na linguagem matemática não conseguem desenvolver o raciocínio a contento. Neste contexto, destacamos em particular, o ensino de Geometria, que, em sala, às vezes, é trabalhado de forma que engloba um amontoado de fórmulas devido a utilização massiva de outros conceitos como de aritmética e álgebra, o que dificulta a visualização da relação entre a teoria aplicada em sala e a prática vivenciada pelos alunos, é salutar ressaltar ainda despreparo de alguns professores para lidar com a Geometria, como afirma Bardini et al. (2015).

> Em minha trajetória como professor de Ensino Infantil e Fundamental I nas redes municipais de ensino, atuando há sete anos em sala de aula, observei que a Geometria ainda é um conteúdo desvalorizado pelos docentes. Nos momentos de planejamento das aulas, dos quais eu participei, sempre houve maior atenção para alguns conteúdos, como as operações matemáticas e as medidas e a ideia de que a Geometria deveria ser deixada para o último bimestre do ano, realidade esta que sempre me incomodou, pois o último bimestre é um período mais acarretado de tarefas, o que leva muitas vezes ao não cumprimento de todos os conteúdos planejados e isso faz com que a Geometria fique esquecida, ou seja, não há tempo para estudá-la. (Bardini et al., 2015)

Sobre o aspecto do currículo, Tenório (2016) nos relata que o ensino da geometria sofreu algumas mudanças no Brasil principalmente devido ao movimento da Matemática Moderna. Tenório (2016) e Bardini et al. (2015) afirmam que o conteúdos de Geometria já não é mais esse amontoados de conteúdos e fórmulas no final do livro, embora ainda não atende o propósito da BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

> Os parâmetros Curriculares Nacionais defendem o estudo da Geometria, e justifica que o conhecimento geométrico, amplia a visão de mundo, e faz com que compreendamos o que está ao nosso redor. Percebemos também que o desenvolvimento do ensino da matemática no Brasil passou por constantes variações causadas pelas mudanças sócio-político-econômicas ocorridas no país. Essas mudanças influenciaram no ensino da Geometria e ocasionou quase que o abandono do ensino da mesma, como também, o formalismo trazido pelo movimento da Matemática Moderna, a abordagem do assunto praticamente nos finais dos livros... Notamos que houve uma mudança na distribuição dos assuntos de geometria nos livros, e que os mesmos apresentam algumas atividades e momentos que levaram o aluno ao diálogo, a investigar e levantar questionamentos, mas que mesmo assim, os livros tem muito que melhorar quanto a propor situações relevantes aos alunos. (Tenório, 2016).

Logo, faz se necessário apresentarmos estratégias, como, por exemplo, mapas conceituais, que possam auxiliar os alunos a compreender melhor a realidade presente em seu dia a dia e relacionar com os conteúdos estudados, ou seja;

> Os mapas são úteis na organização da aprendizagem e na demonstração do conteúdo e na forma apropriada em relação a um tópico ou a um conteúdo. Eles possibilitam, portanto, a percepção de como uma determinada informação é incorporada e passa a integrar a organização geral dos conhecimentos. (Souza et al., 2010)

Com base no exposto, apresentaremos as diretrizes para a construção de um mapa conceitual, baseando-se na metodologia descrita por Marriott e Torres (2003) e Moreira (2012), com o intuito de facilitar a compreensão e a assimilação dos conceitos existentes por trás de uma fórmula (teorema) de Geometria.

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar as diretrizes para a construção de mapa conceitual que possa ser utilizado como recurso pedagógico com abordagem através do ensino de geometria euclidiana plana.

Para tanto, esse trabalho foi dividido em três capítulos, sendo que no primeiro trazemos um breve histórico da Geometria perpassando desde o período neolítico até os elementos de Euclides, com enfoques de alguns autores importantes da história da Geometria, a título de exemplo, Pitágoras. Também contamos um pouco da história dos autores do livro Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana, o qual nos serviu de base para mostrar os caminhos para construção do mapa conceitual proposto por Osvaldo Dulce e Jose Nicolau Pompeo. Posteriormente apresentamos um relato sobre a coletânea Fundamentos de Matemática Elementar, mais especificamente sobre o livro Dolce e Pompeo (2005), comparando edições anteriores com a que será usada no produto desta dissertação.

No segundo capítulo apresentamos todos os axiomas postulados, definições e teoremas que estão no livro Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana de Dolce e Pompeo (2005), que são de suma importância para a assimilação da Geometria Plana.

No terceiro capítulo tratamos do processo para a construção do mapa conceitual, desde a escolha dos pacotes a serem usados no LaTeX até o código fonte. Inicialmente descrevemos sobre a escolha do programa LaTeX e do pacote TIKZ, entre outros pacotes abordados como o babel, inputenc, xfrac, amsmath, pdflscape, geometry e verbatim, assim com as bibliotecas shapes, arrows e positioning que foram importantes para a construção do mapa conceitual.

Descrevemos o processo para a criação de nós e das setas que os interligam. Discorremos também sobre o processo de programação que liga um nó a outro, e, por fim, apresentamos o código fonte da construção do mapa conceitual da Geometria Plana.

Nas considerações finais do trabalho elencamos os desafios e possibilidades futuras para esta proposta.

Capítulo 1

Um breve histórico

Apresentamos aqui alguns acontecimentos marcantes da Geometria, numa breve história sobre a coletânea Fundamentos de Matemática Elementar e os objetivos da pesquisa.

1.1 Uma breve história da geometria euclidiana plana

Ao logo da história a Geometria foi muito importante na construção do pensamento matemático, sendo no início confundida com a própria matemática, de acordo com Eves (1997) e Boyer (1974), as primeiras considerações feitas a respeito da Geometria surgiram das observações dos homens, que usaram sua capacidade de comparar e observar formas e tamanhos. A noção de distância foi um dos primeiros conceitos compreendidos, pois sua compreensão facilitava a defesa e possibilidade de ataque, seja para a caça ou no convívio social, o homem neolítico pode ter tido pouca necessidade de medir terras, porém suas figuras e desenhos sugerem noções espaciais que abriram um caminho para a Geometria.

Com o passar dos anos, a necessidade do homem em delimitar terras teve forte influência na origem da Geometria, caracterizada principalmente pelo traçado de desenho de formas e, foi nessa época, que se desenvolveu a noção de figuras geométricas como os retângulos, os quadrados e os triângulos. Eves (1997) e Roque (2012) afirmam que não há dados que comprovem quanto tempo a Geometria demorou para sair do *status* de geometria subconsciente para uma ciência, mas grandes historiadores afirmam que o começo da Geometria como ciência ocorreu às margens do rio Nilo, no Egito.

Segundo Eves (1997), o historiador grego Heródoto relata que a Geometria ganha sua importância devido às necessidades de distribuir as terras que eram cedidas aos senhores às margens do rio Nilo e, que eram os mensuradores ?esticadores de cordas", assim chamados devido aos instrumentos de medida e cordas entrelaçadas que usavam para marcar ângulos para determinar as áreas de lotes de terrenos, dividindo-os em retângulos e triângulos que definiam quanto de terra caberia a cada agricultor e assim definiam quanto de impostos seriam cobrados. Diante disso, a Geometria ganhou importância, pois quando o rio Nilo transbordava, os agricultores tinham que ir até o rei fazer um relato para que este mandasse os mensuradores redefinir a área que estava fértil para assim calcular quanto de impostos deveriam pagar aos governantes.

> Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impunha-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesótris e lhe notificar o ocorrido. Ele então mandava seus homens observarem e medirem quanto a terra se tornava menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente, ao tributo total. (Eves, 1997)

Eves (1997) afirma que Pitágoras teria nascido na ilha de Samos (atual costa da Turquia) por volta de 570 a.C. Como seus pais tinham dotes foi instruído por Talles de Mileto e este indicou que ele fosse para o Egito estudar nas escolas iniciáticas. E foi nessa escola que Pitágoras aprendeu sobre Geometria e Astronomia. Após algum tempo ele se mudou para Babilônia, onde estudou com sacerdotes e magos, vindo assim a se tornar um sacerdote, e com isso teve acesso aos hieróglifos antigos e, com estes estudos, Pitágoras formou sua própria compreensão de mundo. Ele permaneceu neste local até aproximadamente cinquenta anos de idade.

Posteriormente Pitágoras retorna para sua cidade natal na ilha de Samos, e foi perseguido pelo tirano Policrates que governava a cidade na época. Devido a isso ele resolveu se mudar para e pequena cidade de Crotona (atual sul da Itália), onde estabeleceu e exerceu grande influência, fundando ali sua escola (mosteiro), que mais tarde foi conhecida como escola pitagórica.

Pitágoras teria sido o primeiro a usar o termo ?matemática", porém em sentido um pouco diferente do sentido usado hoje. Em sua rotina diária, ele vivia sobre um código, que era fazer diário, ou seja, rever o que fez durante o dia, para ver se cometeu algum erro que o afastasse do seu ideal de vida, isto é, erros sobre sua maneira de viver, pensar e, consequentemente, de refletir sobre as formas geométricas e aritméticas e, assim, estas poderiam ser corrigidas no dia seguinte, pois tinha como concepção de que se passar muito tempo poderia se afastar do seu ideal e, assim, não teria como retornar mais, como assevera Eves (1997).

> ... Pitágoras, envolto numa névoa tal de misticismo por seus seguidores que pouco se sabe sobre ele com alguma certeza... a filosofia pitagórica baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros. Isso levava a uma exaltação e ao estudo das propriedades dos números e da aritmética, junto com a geometria, a música e a astronomia. (Eves, 1997).

Alguns gregos como Pitágoras e Euclides desenvolveram trabalhos significativos, dos quais se destaca a obra *Os Elementos* de Euclides, datado do século IV a.C., que servem de referência para os estudos de Geometria até os dias atuais.

Sobre Euclides de Alexandria, segundo Boyer (1974) sabe-se muito pouco da vida particular dele. Ele estudou na escola platônica com Platão em Atenas, após a morte de Alexandre, o grande, que levou a disputas de seus generais pelo império grego. Com a tomada de Ptolomeu I, da parte Egípcia criou a escola de Alexandria e convidou alguns mestres para desenvolver seus trabalhos, Euclides foi um deles e lá escreveu algumas obras de relevância para o conhecimento científico, a considerada mais importante são os Elementos.

> A morte de Alexandre, o grande, levou as disputas entre os generais do exército grego; mas em 306 a.C. o controle da parte egípcia do império estava nas mãos de Ptolomeu I, esse governante pode voltar à atenção para esforços construtivos. Entre seus primeiros atos está a criação em Alexandria de uma escola ou instituto conhecido como Museu, insuperável em seu tempo. Como professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha entre eles Euclides, o autor do texto de matemática mais bem-sucedido de todos os tempos *os elementos* (Stoichia)... (Boyer, 1974)

Segundo Roque (2012), a coleção de livros Elementos de Euclides sintetiza o conhecimento básico de matemática da época, com a utilização apenas de régua e compasso ele demonstrou os teoremas de Geometria Plana, há relatos que a utilização destes dois instrumentos foi para valorizar a Matemática teórica da Filosofia de Platão, pois temos que a régua representa a reta e o compasso o círculo com perfeição.

> O fato de nos Elementos de Euclides as construções serem realizadas por meio da régua e do compasso deu origem à crença de que essa seria uma restrição da Geometria imposta pelos cânones da época. Como já dito, para explicar o motivo dessa restrição é comum apelar para a Filosofia platônica. Por valorizar a Matemática teórica, Platão teria desprezo pelas construções mecânicas, realizadas com ferramentas de verdade. A régua e o compasso, apesar de serem instrumentos de construção, podem ser representados, respectivamente, pela linha reta e pelo círculo, figuras geométricas com alto grau de perfeição. (Roque, 2012)

Os elementos são formas que nos mostram a Matemática mais organizada e com um grau de abstração que até então era pouco utilizado, pois era visto de uma forma mais prática. Assim, Euclides usou o método lógico dedutivo para demonstrar os teoremas conhecidos. Há relatos de que surgiram outros trabalhos sobre os elementos antes de Euclides, acredita-se que alguns o tenha influenciado.

1.2 Uma breve história sobre a coletânea Fundamentos de Matemática Elementar

Escolhemos a coletânea de Osvaldo Dolce e Jose Nicolau Pompeo, pois ela traz uma organização aceita pela maioria dos professores por apresentar certo rigor matemático e possuir uma linguagem acessível aos estudantes.

1.2.1 Dos Autores

Conforme apresenta a Plataforma Lattes Jose Nicolau Pompeo possui graduação em Física pela Universidade de São Paulo (1974), mestrado em Economia Aplicada à Administração pela Fundação Getúlio Vargas - SP (1984) e doutorado em Ciências Sociais pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2003). Atualmente é professor doutor assistente da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, professor de finanças da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - PECE, economista coordenador do Instituto Econômico dos Metalúrgicos de Campinas e Região, diretor e proprietário da Jose Nicolau Pompeo - JNP treinamento empresarial S/C LTDA e professor convidado da Universidade de Paris I, Panthéon-Sorbonne. Tem experiência na área de administração, com ênfase em Matemática Financeira Aplicada, atuando principalmente nos seguintes temas: economia brasileira, cenários econômicos, cálculo financeiro, economia financeira e finanças pessoais.

O fato de haver parcas referências sobre o autor Osvaldo Dolce nos levou a entrar em contato, através de *e-mail*, com a editora que publica as obras do renomado autor, a qual propiciou a comunicação direta com Osvaldo Dolce que, gentilmente, disponibilizou suas informações biográficas, as quais constam nos anexos deste trabalho.

Em consulta com o autor Osvaldo Dulce fui informado que o mesmo é natural de Corumbataí-SP e cursou em Araçatuba-SP dois cursos: o Curso Científico (Ensino Médio), no período matutino e o Curso Normal (Ensino Médio - Magistério) no período noturno. No primeiro obteve conhecimento para o ingresso na Escola Politécnica da USP e no segundo se formou Professor Primário (Professor do Ensino Fundamental 1ª. à 4ª. séries).

Com os conhecimentos da Politécnica e o título Normalista ele ingressou, por concurso de provas e títulos, no magistério secundário (Ensino Médio) e se tornou professor efetivo de Matemática na rede pública do estado de São Paulo onde lecionou por 12(doze) anos.

Enquanto cursava a Escola Politécnica, onde se formou Engenheiro Civil, transformou-se em professor de Matemática, especialmente de Geometria nos cursos preparatórios para vestibulares do Grêmio Politécnico, do curso Universitário e do curso Anglo-Latino (Anglo-Vestibulares).

Transformou-se em autor graças às oportunidades de mercado e à extensa e incansável repetição de conteúdos à exaustão, anotando dúvidas, sugestões e indicações de alunos, o que levou a desenvolver uma didática especial no assunto, didática esta que foi colocada nos primeiros livros e que se universalizou através das críticas e sugestões dos usuários das obras. Dolce foi professor de três cursos que preparavam alunos para os vestibulares de Engenharia: Anglo (62-79), Universitário (64) e do Grêmio Politécnico(60-63).

O mesmo informa ainda que estudou muito o conteúdo em antigos livros italianos e franceses. Depois, na década de 70, quando a influência americana do norte se estabeleceu e as dissertações foram substituídas pelos testes objetivos ele estudou alguns livros americanos, ingleses e russos. O autor afirma que sempre foi muito exigido pelos seus alunos nos conteúdos que envolvem raciocínio. Nas palavras de Osvaldo Dolce: ?Eu os preparava para exames como IME, ITA, EPUSP, etc. Deste modo me tornei radical: se o professor não souber um assunto, não dá para ele ensiná-lo."

Por fim o autor afirma que a melhor maneira de se aprender Geometria é preparar muito bem a aula, saber se colocar na classe, ser humilde em relação às dúvidas, voltar a estudar para melhorar na repetição. Como exemplo, cita que no ano de 64 ele repetia a mesma aula 22 vezes. Paralelamente lecionava na rede pública estadual nas séries de 5ª à 8ª, nas quais fazia suas interessantes experiências. Trabalhou na rede pública de 61 a 72.

1.2.2 Da coletânea

Devido ao movimento da Matemática Moderna sobre o qual Pinto (2005) observa que imputa na proliferação dos livros didáticos e na nova forma de se apresentar os conteúdos é que surge em 1977 a coletânea Fundamentos de Matemática Elementar e, por ela ser adotada até os dias atuais com grande aceitação no ambiente acadêmico, tal fato se deve à linguagem simplificada e bem estruturada é que escolhemos como nosso objeto de estudo, com enfoque no livro 9 (nove) intitulado Geometria Plana, o qual já se encontra na nona edição, porém para este trabalho utilizaremos a oitava edição, pois em análise verificamos que não houve mudanças da oitava para nona quanto à abordagem e demonstrações e, ainda, devido ao acesso do livro da oitava edição ser maior.

Tabela 1.1: A evolução da coletanea através das novas edições

Sequência da 2ª edição(1980)	**Sequência 8ª edição(2005)**
NOÇÕES E PROPOSIÇÕES PRIMITI-VAS	NOÇÕES E PROPOSIÇÕES PRIMITIVAS
SEGMENTO DE RETA	SEGMENTO DE RETA
ÂNGULO	ÂNGULO
TRIÂNGULOS	TRIÂNGULOS
PARALELISMO	PARALELISMO
PERPENDICULARIDADE	PERPENDICULARIDADE
POLÍGONOS	QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS
QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS	PONTOS NOTÁVEIS DO TRIANGULO
PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO	POLÍGONOS
CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO	CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO
ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA	ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA
LUGARES GEOMÉTRICOS	....
TEOREMA DE TALES	TEOREMA DE TALES
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E POTÊNCIA DE PONTO	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E POTÊNCIA DE PONTO
TRIÂNGULOS RETÂNGULOS	TRIÂNGULOS RETÂNGULOS
TRIÂNGULOS QUAISQUER	TRIÂNGULOS QUAISQUER
POLÍGONOS REGULARES	POLÍGONOS REGULARES
COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA	COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA
EQUIVALÊNCIA PLANA	EQUIVALÊNCIA PLANA
ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS	ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

Em uma análise comparativa entre a 2ª e a 8ª edição 1980 e 2005, respectivamente, notamos que houve algumas mudanças que serão apresentadas. Vale ressaltar que da segunda para a sexta edição não houve muitas mudanças, a organização dos conteúdos continua a mesma, até na numeração das páginas e nos exercícios de fixação não há alterações, apenas nos exercícios dos testes de vestibulares, pois na 2ª edição temos testes até do ano de 1977 e na 6ª edição vem teste de vestibular até o ano de 1985. Na oitava edição houve pequenas mudanças nos testes de vestibulares (inclusão de questões do ENEM) e nos exercícios de fixação que vieram mais contextualizados. Na sequência dos conteúdos verificamos a inclusão de polígonos depois de quadriláteros notáveis e pontos notáveis do triângulo e a exclusão do conteúdo lugares geométricos, conforme é mostrado na tabela.

1.3 Procedimentos metodológicos

A finalidade deste trabalho é apresentar as diretrizes para a construção de mapa conceitual que possa ser utilizado como recurso pedagógico com abordagem através do ensino de geometria euclidiana plana. Para tanto usaremos a definição de Moreira (2006) que define mapa conceitual como uma estrutura gráfica que indica as relações entre conceitos com objetivos de ajudar a organizar ideias, conceitos e informações e, em nosso caso, a geometria euclidiana plana, de modo esquematizado.

> De uma maneira ampla, mapas conceituais são apenas diagramas que indicam relações entre conceitos. Mais especificamente, podem ser interpretados como diagramas hierárquicos que procuram refletir a organização conceitual de um corpo de conhecimento ou de parte dele. (Moreira, 2006)

Segundo Marriott e Torres (2003) a ideia de mapa conceitual como um método de organização de conteúdo surgiu na década de 1970, nos Estados Unidos, através do professor e educador Joseph Novak e sua equipe.

> O mapeamento conceitual é uma técnica poderosa de ensino e aprendizagem. Sua criação, em 1972, por Joseph Novak e sua equipe em Ithaca, EUA, teve como intenção mapear a construção do conhecimento de alunos sendo acompanhados em um trabalho de pesquisa que se desenvolveu ao longo de 12 anos. [...] Assim, chegou-se à conclusão que o conteúdo das fitas de entrevistas deveria ser transcrito seguindo uma estrutura hierárquica de conceitos e relacionamentos entre esses conceitos, formando proposições. (Marriott e Torres, 2003)

Segundo Moreira (2012), mapa conceitual é um instrumento de ensino que pode ser usado com vários propósitos, o autor ressalta ainda a importância de quem fez o mapa explicar o significado das relações entre os conceitos.

> Não há regras gerais fixas para o traçado de mapas de conceitos. O importante é que o mapa seja um instrumento capaz de evidenciar significados atribuídos a conceitos e relações entre conceitos no contexto de um corpo de conhecimentos, de uma disciplina, de uma matéria de ensino. Por exemplo, se o indivíduo que faz um mapa, seja ele, digamos, professor ou aluno, une dois conceitos através de uma linha, ele deve ser capaz de explicar o significado da relação que vê entre estes conceitos. (Moreira, 2012)

Como procedimento metodológico de construção utilizaremos a metodologia descrita por Moreira (2012) e Marriott e Torres (2003), pois estes autores utilizam diretrizes de construção de mapas Conceituais Semelhantes, apropriando-se de linguagem clara e objetiva, o que facilita a abordagem para o conteúdo de Geometria, vejamos;

> 1. Primeiramente, identifique o conceito principal do problema, questão ou assunto que deseja mapear. Guiado por esse conceito principal, identifique 10 a 20 conceitos que são pertinentes à questão e os listem. Algumas pessoas preferem escrever cada conceito em um cartão ou pedaço de papel para facilitar a sua reorganização. Os conceitos devem ser de preferência apenas uma palavra, no máximo duas ou três.(Marriott e Torres, 2003)

Para isso, mapearemos as demonstrações da geometria Euclidiana plana do livro de Dolce e Pompeo (2005), destacando todos os axiomas, teoremas e postulados. Salientamos ao leitor que os conceitos aqui chamados de nós, que de acordo com Tantau (2019) é um sistema posicional, que pode ter a forma de uma figura geométrica que consta o texto do conceito, não usamos apenas uma palavra para identificar os nós, mas sim toda a descrição sobre um assunto.

> 2. Ordene os conceitos, colocando o(s) mais geral(is), mais inclusivo(s), no topo do mapa e, gradualmente, vá agregando os demais até completar o diagrama de acordo com o princípio da diferenciação progressiva. Algumas vezes é difícil identificar os conceitos mais gerais, mais inclusivos; nesse caso é útil analisar o contexto no qual os conceitos estão sendo considerados ou ter uma ideia da situação em que tais conceitos devem ser ordenados. (Moreira, 2012)

Organizamos os conceitos de acordo com a sequência do livro Dolce e Pompeo (2005), que traz os axiomas e postulados para depois apresentar os teoremas daquele capítulo, há colunas com mais de um capítulo para melhor visualização.

> 3. Conecte os conceitos com linhas e insira nessas linhas uma ou mais palavras de ligação que explicitem a relação entre os conceitos. Os conceitos e as palavras de ligação devem sugerir uma proposição que expresse o significado da relação. (Moreira, 2012)

Neste trabalho as ligações dos conceitos que dão sustentabilidade aos teoremas foram feitas em cores distintas, principalmente as que se cruzam para facilitar que o leitor se guie pelas setas e possa identificar quais são os conceitos e o que eles representam, não foram usadas palavras de ligação entre os nós.

> 4. Trabalhe na estrutura e hierarquia do mapa, se necessário incluindo, excluindo ou renomeando alguns conceitos. Esse exercício pode requerer várias tentativas e o produto final poderá sempre ser melhorado à medida que surgem novas ideias e novos conhecimentos são adquiridos. Contudo, ele reflete o pensamento e conhecimento do aluno na data em que foi criado. (Marriott e Torres, 2003)

Durante o processo de criação do mapa conceitual acrescentamos dois conceitos que não fazem parte da geometria plana, mas são essenciais para as demonstrações de alguns teoremas, cujas figuras são incomensuráveis, no mais seguimos a hierarquização do livro Dolce e Pompeo (2005).

> 5. Não se preocupe com a simetria. Entretanto, procure ramificar os galhos sempre que possível, evitando que o galho tenha mais de três níveis hierárquicos sem ramificações. (Marriott e Torres, 2003)

Na construção do mapa da geometria plana, tentamos colocar as setas de ramificações de modo que o leitor possa identificar facilmente os locais de saída e destino, separando as mesmas com cores distintas.

> 6. O fluxo normal para a leitura de um mapa é do centro para as extremidades e de cima para baixo. Quando a leitura for diferente (de baixo para cima) ou no caso de ligações cruzadas, faça uso de setas para indicar o fluxo correto (de baixo para cima ou da direita para a esquerda ou vice-versa - ou ambos). (Marriott e Torres, 2003)

A leitura será direcionada com flechas indicando as direções, ou seja, os teoremas recebem de outros teoremas, axiomas e definições as setas que dão sustentabilidades às duas demonstrações.

> 7. Quando considerar o trabalho pronto, faça a leitura do mapa observando se as ligações entre os conceitos fazem sentido e se as proposições são verdadeiras, tome o cuidado em terminar a leitura de um galho e suas ramificações antes de passar para o galho seguinte. Se possível, procure estabelecer ligações cruzadas, isto é, ligar conceitos entre galhos e hierarquias diferentes, demonstrando sua criatividade e conhecimento. (Marriott e Torres, 2003)

Não somente na conclusão do mapa, mas a todo o momento realizamos leituras do mapa para que, quando terminado, o leitor não se confunda, principalmente quando as setas se cruzam. Assim é importante que após a conclusão verifiquemos se realmente o mapa está transmitindo a mensagem que se deseja desde o começo do processo de construção do mesmo. Como notamos no exemplo dado abaixo:

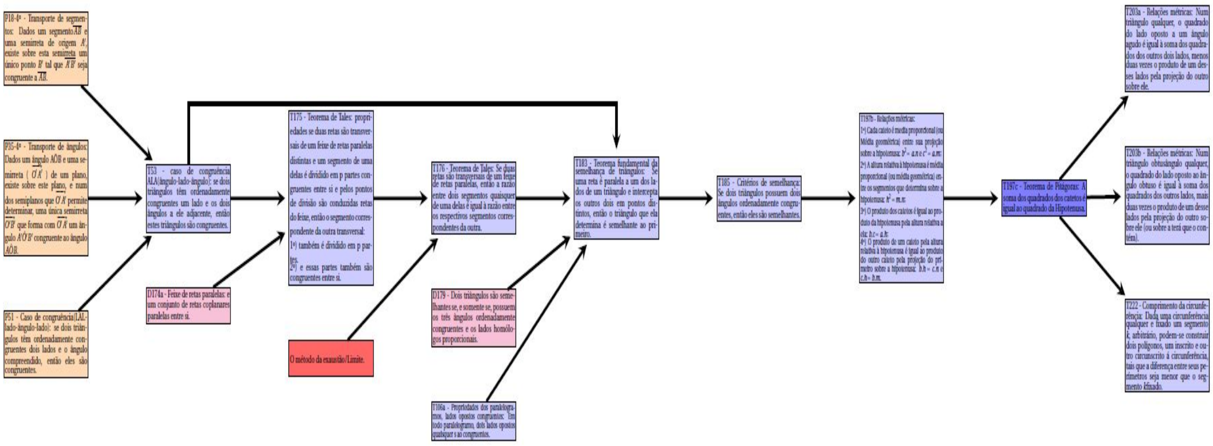

Figura 1.1: Mapa Conceitual: Demonstração do teorema de Pitágoras.

1.4 Problematização e objetivo

Durante as aulas do Mestrado percebi que as minhas abordagens de conteúdos ao ministrar aulas no dia a dia escolar não eram tão efetivas, pois não enfocava de maneira correta o uso dos teoremas (fórmulas). Após estudar no programa de Mestrado PROFMAT, no qual demonstramos os teoremas exaustivamente é que pude perceber quais os axiomas, lemas e teoremas que davam sustentabilidade às demonstrações. E foi a partir disso que comecei a pesquisar a possibilidade de criar algo que pudesse facilitar a compreensão dos alunos, ou seja, elaborar diretrizes para a criação de recursos pedagógicos e assim fiz um recorte através da construção de um mapa conceitual para a aplicação em geometria euclidiana plana.

No que tange à efetividade na abordagem do conteúdo, Lorenzato (2008) afirma que precisamos conhecer o contexto histórico que está por trás de uma fórmula para uma melhor assimilação da mesma, Lorenzato (2008) ainda nos relata que durante a revisão de uma fórmula em uma 5ª série (6º ano) os alunos perceberam que por trás daquela fórmula precisaria de muitas outras operações matemáticas e conhecimentos geométricos para desenvolvê-la.

> Na revisão de assuntos numa 5ª série, quando à classe foi perguntada o que era preciso lembrar para calcular a área do triângulo, após trocas de opiniões, os alunos concordaram que a fórmula $\frac{b.h}{2}$ “esconde” muita coisa. Por exemplo: ? tem que saber tabuada, incluindo a de multiplicar e dividir; tem que lembrar que é uma medida deitada e outra medida em pé e ainda ver a unidade de medida antes de dar a resposta.” (Lorenzato, 2008)

O ensino da Geometria tem dado um enfoque na algebrizacão, que ensina aos alunos a desenvolver os cálculos em cima de fórmulas e que de acordo com **?** é necessário que retomemos o ensino desta parte importante da Matemática, pois sem o conhecimento geométrico não se consegue pensar geometricamente e, assim, tem uma visão incompleta da matemática como um todo.

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudá-la as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.(Barbosa, 2003)

Com base no exposto, temos como objetivo apresentar as diretrizes para a construção de mapa conceitual que possa ser utilizado como recurso pedagógico com abordagem através do ensino de geometria euclidiana plana, para que o aluno, além de praticar as demonstrações tenha acesso à parte visual dos axiomas e teoremas que sustentam as demonstrações.

Capítulo 2

Os postulados(axiomas), definições e teoremas utilizados para essa construção

Neste capítulo apresentamos os postulados, definições e teoremas utilizados na construção do mapa conceitual presentes na coletânea Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana de Osvaldo Dolce e Jose Nicolau Pompeo.

Para as demonstrações dos teoremas, como referido na problematização, seguimos a 8ª edição da mencionada obra. Os teoremas estão definidos pela letra T, os postulados (axiomas) estão definidos pela letra P e as definições estão definidas pela letra D, todas em letras maiúsculas, conforme numeração que recebem no livro.

2.1 Postulados, Definição e Teoremas

Demonstramos a relação dos teoremas que são utilizados e os axiomas, definições e outros teoremas que sustentam suas demonstrações. Eles estão organizados por capítulos de acordo com a ordem que aparecem no livro da 8ª edição de 2005.

As proposições ou teoremas (propriedades, afirmações) geométricas só são aceitas mediante demonstrações. As proposições primitivas ou definições e postulados ou axiomas são aceitos sem demonstrações.

2.1.1 Noções e proposições primitivas

P4 - Postulado da existência:

a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

b) Num plano há infinitos pontos.

T5 - Posições de dois pontos e de ponto e reta: Dados dois pontos A e B, de duas uma, ou A e B são coincidentes(é o mesmo ponto, um só ponto, com dois nomes) ou A e B são distintos.

Dados um ponto P e uma reta r, de duas uma, ou o ponto pertence a reta r(a reta r passa por P) ou o ponto P não está na reta r(a reta r não passa por P).

O que e necessário para a demonstração: P4

P7 - Postulado da determinação:

a) Da reta Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só) reta que passa por eles.

b) Do plano Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

P8 - Postulado da inclusão: Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

2.1.2 Segmento de reta

D12 - Segmento de reta: Dados dois pontos distintos, reunião do conjunto desses dois pontos com conjunto dos pontos estão entre eles um segmento de reta.

T15 - Segmentos consecutivos: Dois segmentos de retas são consecutivos se, e somente se, uma extremidade de um deles é também extremidade do outro.

O que e necessário para a demonstração: T5, P7 e D12.

T16 - Segmentos colineares: Dois segmentos de reta são colineares se, e somente se, estão numa mesma reta.

O que e necessário para a demonstração: P7 e D12.

T17 - Segmentos Adjacentes: Dois segmentos consecutivos e colineares são adjacentes se, e somente se, possuem em comum apenas um extremidade.

O que e necessário para a demonstração: T15 e T16

P18-4º - Transporte de segmentos: Dados um segmento$\overline{AB}$ e uma semirreta de origem A', existe sobre esta semirreta um único ponto B' tal que $\overline{A'B'}$ seja congruente a

$\overline{AB}$.

D21 - Ponto médio de um segmento: Um ponto M é ponto médio do segmento AB se, e somente se, M está entre A e B e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

2.1.3 Ângulos

T25 - Região Convexa: Um conjunto de pontos Σ é convexo se, e somente se, dois pontos distintos quaisquer A e B de Σ são extremidades de um segmento $\overline{AB}$ contido em Σ, ou se Σ é unitário, ou se Σ é vazio.

O que e necessário para a demonstração: P8 e D12.

P35-4º - Transporte de ângulos: Dados um ângulo AÔB e uma semirreta ($\overrightarrow{O'A'}$) de um plano, existe sobre este plano, e num dos semiplanos que $\overrightarrow{O'A'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O}'B'$ congruente ao ângulo $A\hat{O}B$.

D38 - Bissetriz de um ângulo: Uma semirreta OC interna a um ângulo AÔB e bissetriz do ângulo AÔB se, e somente se, AÔC$\equiv$ BÔC.

D39 - Ângulo suplementar adjacente: Dado o ângulo AÔB, a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ oposta à semi-reta $\overrightarrow{AO}$ e a semi-reta $\overrightarrow{OB}$ determinam um ângulo BÔC que se chama ângulo suplementar adjacente ou suplemento adjacente de AÔB. Dois ângulos são suplementares se, e somente se, a soma de suas medidas é $180\,^{\circ}$.

T36 - Teorema do ângulo oposto pelo vértice: Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são congruentes.

Observação: A numeração deste teorema não está na sequência do livros pois se trata de um teorema que está na lista de exercícios da pagina 29.

O que e necessário para a demonstração: D39.

2.1.4 Triângulos

D49 - Congruência de triângulos: Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível estabelecer correspondência entre seus vértices de modo que:

1º) Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do outro;

2º) Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.

P51 - Caso de congruência(LAL-lado-ângulo-lado): se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

T52 - Teorema do triangulo isósceles: Se um triangulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes.

O que e necessário para a demonstração: P51.

T53 - caso de congruência ALA(ângulo-lado-ângulo): se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacente, então estes triângulos são congruentes.

O que e necessário para a demonstração: P51, P18 e P35.

T54 - Teorema do triangulo isósceles reciproca: Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles.

O que e necessário para a demonstração: T53

T55 - caso de congruência LLL(lado-lado-lado): se dois triângulos tem ordenadamente congruentes os três lados, então esse triângulos são congruentes.

O que e necessário para a demonstração: P18, P35, T52 e P51.

T56 - Existência do ponto médio: O ponto que divide o segmento de reta exatamente no meio em dois segmentos congruentes.

O que e necessário para a demonstração: P18, P35, T52 e P51.

T57 - Existência da Bissetriz: Lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes e, por consequência, divide em dois ângulos congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P51, P18 e T53

T60 - Teorema do ângulo externo: Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulos internos não adjacentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T56, P51 e P18.

T61 - caso de congruência LAAo (lado-ângulo-ângulo oposto): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, uma Ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P51, P18 e T60.

T62 - caso de congruência de triângulos retângulos: Se dois triângulos tem ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P18, P51, T52 e T61.

T63 - desigualdade nos triângulos, ao maior lado opõe-se o maior ângulo: Se dois lados de um triangulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T52 e T60.

T64 - desigualdade nos triângulos, ao maior ângulo opõe-se o maior lado: Se dois ângulos de um triangulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T63 e T52.

T65 - Desigualdade triangular: Em todo triangulo, cada lado e menor que a soma dos outros dois.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P18, T52 e T64.

2.1.5 Paralelismo

D67 - Retas paralelas: Duas retas paralelas (símbolo //) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares e não têm nenhum ponto comum.

D69a - Ângulos alternos: os pares de ângulos alternos são congruentes.

D69b - Ângulos colaterais: os pares de ângulos colaterais são suplementares ou seja a soma do par de ângulo colateral e 180°.

T70 - existência da paralela: Se duas retas coplanares distintas e um reta transversal determinam ângulos alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas são paralelas.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T60.

T73 - Reciproca da existência da paralela: Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal entre os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T70 e P72.

T75 - Teorema do ângulo externo: Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P72 e T73.

T76 - Soma dos ângulos de um triângulo: A soma dos ângulos de qualquer triangulo é igual a dois ângulos retos.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T75

T77-1ª - Ângulos de lados paralelos: Dois Ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes ou suplementares.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D69b

T77-2ª - Ângulos de um triângulo equilátero: Num triângulo equilátero cada ângulo mede $60°$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T52

2.1.6 Perpendicularidade

P72 - Unicidade da paralela: Por um ponto passa uma *única* reta paralela a um reta dada.

D78 - Retas perpendiculares: Duas retas são *perpendiculares* (símbolo: $\perp$) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.

D79 - Retas oblíquas: Se duas retas são concorrentes e não são perpendiculares, diz-se que estas retas são *oblíquas*.

T89 1º) - O segmento perpendicular é menor que qualquer dos oblíquos.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T64 e P51.

D91 - Distância entre duas paralelas: A distância entre duas retas paralelas é a distância entre um ponto qualquer de uma delas e a outra.

T92 - Se duas retas distintas são paralelas, os pontos de umas delas estão a igual distancia (são equidistantes) da outra.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T61 e D91.

T93 - Todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P51

T94 - Todo ponto da bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T61

T200 - A mediana relativa a hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade a hipotenusa.

Observação: A numeração deste teorema não está na sequência do livros pois se trata de um teorema que está na lista de exercícios da página 93.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P18, P51, T70 e D69.

2.1.7 Quadriláteros notáveis

D95 - Quadrilátero: Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero que tem 2 diagonais e a soma dos ângulos internos e externos é igual a 360°.

D97 - Trapézio: Um quadrilátero plano convexo é um *trapézio* se, e somente se, possui dois lados paralelos. ABCD é trapézio $\Longleftrightarrow \overline{AB} \; // \; \overline{CD}$ ou $\overline{AD} \; // \; \overline{BC}$.

D98 - Paralelogramo: Um quadrilátero plano convexo é um *Paralelogramo* se, e somente se, possui os lados opostos paralelos. ABCD é Paralelogramo $\Longleftrightarrow \overline{AB} \; // \; \overline{CD}$ e $\overline{AD} \; // \; \overline{BC}$.

D99 - Retângulo: Um quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes. ABCD é retângulo $\Longleftrightarrow \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$.

D100 - Losango: Um quadrilátero plano convexo e um losango se, e somente se, possus os quatro lados congruentes. ABCD é losango $\Longleftrightarrow \overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$.

T102 - Propriedade de um trapézio qualquer: em qualquer trapézio ABCD (notação cíclica) de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ temos: $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D97 e D69.

T103 - Propriedades de uma trapézio isósceles: Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D778, T62 e D39.

T104 - Propriedades de uma trapézio isósceles diagonais congruentes: As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P51, D97 e T103.

T105a - Propriedades dos paralelogramos, ângulos opostos congruentes: Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D98 e D69.

T105b - Todo quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D95 e T77-1ª.

T106a - Propriedades dos paralelogramos, lados opostos congruentes: Em todo paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D98, T105a e T61.

T106b - Propriedades dos paralelogramos, lados opostos congruentes reciproca: todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T55 e D98.

T107a - Propriedades dos paralelogramos, diagonais dividem - se ao meio: Em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D98, T70 e T53.

T107b - Reciproca, propriedades dos paralelogramos, diagonais dividem - se ao meio: Todo quadrilátero convexo em que as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios é paralelogramo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T36 e P51.

T108a - Propriedades dos paralelogramos, dois lados paralelos e congruentes: Todo quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T70, P51 e T106b.

T109a - Propriedades do retângulo, diagonais congruentes: Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D99 e P51.

T109b - Propriedades do retângulo, diagonais congruentes: todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D99, D98, T55 e D69.

T110a - Propriedades do losango-diagonais perpendiculares: Todo losango tem diagonais perpendiculares.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D100, T107a e T55.

T110b - Propriedades do losango-diagonais perpendiculares: Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T107a, P51 e D100.

T113a - Base média do triângulo: Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:

1º) ele e paralelo ao terceiro lado;

2º) ele e metade do terceiro lado.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D67, T70, T36 , T53, D98 e D49.

T113b - Reciproca base média do triângulo: Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado, então está extremidade é ponto médio do terceiro lado.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D21, T113a e P72.

T114a - Base média do trapézio: Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:

1º) ele é paralelo às bases;

2º) ele é igual à semissoma das bases.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T36, T53 e T113a

T114b - Reciproca Base média do trapézio: Se um segmento paralelo ás bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado, então está extremidade é ponto médio deste lado.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T114a, P72.

2.1.8 Pontos notáveis do triângulo

T115 - Baricentro - Medianas: As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T113a, T108a e T107a.

T117 - Incentro - Bissetrizes internas: As três bissetrizes internas de um triangulo interceptam-se num mesmo ponto eu está a igual distância dos lados do triângulo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T57

T119 - Circuncentro - Mediatrizes: As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P51

T121 - Ortocentro - Alturas: As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D98, D21 e T119.

2.1.9 Polígonos

PIF - O método da indução finita.

observação: conceito acrescentado devido a necessidade do uso em algumas demonstrações de teoremas.

T134 - O número de diagonais d de um polígono de n lados (n $\geq$ 3) é dado por: d=$\frac{n(n-3)}{2}$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: PIF(Principio da Indução Finita)

T135 - Soma do ângulos internos de um polígono convexo: A soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados (n $\geq$ 3) é dada por: $S_i = (n-2).180°$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: PIF(Principio da Indução Finita) e T76.

T137 - Soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo: A soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados (n $\geq$ 3) é dada por: : $S_e = 360°$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D39 e T135.

2.1.10 Circunferência e Círculo

Definição de seno de um angulo: Seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

Definição de cosseno de um angulo: cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

T147a - Se uma reta s, secante a uma circunferência λ(O, r), não passa pelo centro O, intercepta λ nos pontos distintos A e B, e se M é o ponto médio da corda $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{OM}$ é perpendicular à secante s (ou corda $\overline{AB}$).

O que e necessário para a demonstração do teorema: T55.

T147b - Se uma reta s, secante a uma circunferência λ(O, r), não passa pelo centro O, intercepta λ nos pontos A e B, então a perpendicular a s conduzida pelo centro passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T62.

T149a - Propriedade da tangente: Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade da circunferência e tangente a circunferência.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T89.

T149b - Propriedade da tangente: Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto da tangencia.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D148 e P51.

T154 - Se de um ponto P conduzimos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a uma circunferência, com A e B na circunferência, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T62 e T149b

T156a - Se um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T154

T156b - Se num quadrilátero convexo a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois, então o quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T156a e T65.

2.1.11 Ângulos na Circunferência

T167 - Medida do ângulo inscrito: Um ângulo inscrito é a metade do ângulo central correspondente ou medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T52 e T75.

T169a - Propriedade do quadrilátero inscritível: Se um quadrilátero convexo é inscritível numa circunferência, então os ângulos opostos são suplementares.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T167.

T169b - Propriedade do quadrilátero inscritível: Se um quadrilátero convexo possui os ângulos opostos suplementares, então ele é inscritível.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T169a e T75.

T171 - Medida do ângulo de segmento: Um ângulo de segmento é metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo de segmento é metade da medida do arco correspondente.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T52 e T149b.

T172 - Arco capaz - segmento (circular) capaz: consideremos uma circunferência λ de centro O e um ângulo de medida α. Seja AÔB um ângulo central de medida $\beta = 2\alpha$. Os vértices dos ângulos inscritos (ou semi-inscritos) relativos a λ que têm os lados passando por A e B e têm medidas α num arco $\widehat{APB}$. Este arco e chamado arco capaz de α.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T167 e T171.

2.1.12 Teorema de Talles

D174a - Feixe de retas paralelas: é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.

T175 - Teorema de Tales: propriedades se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente da outra transversal:

1º) também é dividido em p partes;

2º) e essas partes também são congruentes entre si.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D174a e T53.

T176 - Teorema de Tales: Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T175, limite/método da exaustão.

T177 - Teorema da bissetriz interna: Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos(aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T70,T54, T176 e D38.

T178 - Teorema da bissetriz externa: se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos(subtrativos) proporcionas aos lados adjacentes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T54, T176 e T70.

2.1.13 Semelhança de Triângulos e Potência do Ponto

D179 - Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

T183 - Teorema fundamental da semelhança de triângulos: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D179, T176 e T106a.

T185 - Critérios de semelhança: Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T183 e T53.

T187 - Critérios de semelhança: Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: P51 e T183.

T188 - Critérios de semelhança: Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T55 e T183.

T192a - Potência do ponto: Se duas cordas de uma mesma circunferência se interceptam, então o produto das medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes da outra.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T36, T172, T185 e T183.

T192b - Potência do ponto: Se por um ponto P exterior a uma circunferência conduzimos dois segmentos secantes ($\overline{PA}$ e $\overline{PC}$), então o produto da medida do primeiro ($\overline{PA}$) pela de sua parte exterior ($\overline{PB}$) é igual ao produto da medida do segmento ($\overline{PC}$) pela de sua parte exterior ($\overline{PD}$).

O que e necessário para a demonstração do teorema: T36, T172, T185 e T183.

2.1.14 Triângulos Retângulos

T197b - Relações métricas:

1º) Cada cateto é media proporcional (ou Média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa: $b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$;

2º) A altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa: $h^2 = m.n$;

3º) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela: $b.c = a.h$;

4º) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa: $b.h = c.n$ e $c.h = b.m$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T185.

T197c - Teorema de Pitágoras: A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da Hipotenusa.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T197b.

T197d - Recíproca do Teorema de Pitágoras: Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T55.

2.1.15 Triângulos Quaisquer

T202 - Teorema dos senos: Os lados de um triângulo são proporcionais aos *senos* dos ângulos oposto e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo, $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T172, T167 e definição de seno(ds).

T203a - Relações métricas: Num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T197c.

T203b - Relações métricas: Num triângulo obtusângulo qualquer, o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros lados, mais duas vezes o produto de um desse lados pela projeção do outro sobre ele (ou sobre a terá que o contém).

O que e necessário para a demonstração do teorema: T197c.

T204 - Teorema dos cossenos: Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T203a, T203b e definição de cosseno (cs).

T208 - Relação de Stewart: Dado um triângulo ABC e sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ vale e a relação: a^2y + b^2x - $z^2c = cxy$.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T203a e T203b.

2.1.16 Polígonos Regulares

T213 - Polígono regular é inscritível: Todo polígono regular é inscritível numa circunferência ou dado um polígono regular, existe uma única circunferência que passa pelos seus vértices.

O que e necessário para a demonstração do teorema: p51.

T214 - Polígono regular é inscritível: Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência ou dado um polígono regular, existe um única circunferência inscrita no polígono.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T213.

2.1.17 Comprimento da Circunferência

T221 - Comprimento da circunferência: Dada uma circunferência qualquer, o perímetro de qualquer polígono convexo nela inscrito é menor que o perímetro de qualquer polígono a ela inscrito.

O que e necessário para a demonstração do teorema: limite/método da exaustão e T185.

T222 - Comprimento da circunferência: Dada uma circunferência qualquer e fixado um segmento k, arbitrário, podem-se construir dois polígonos, um inscrito e outro circunscrito á circunferência, tais que a diferença entre seus perímetros seja menor que o segmento k fixado.

O que e necessário para a demonstração do teorema: limite/método da exaustão, T185 e T197c.

T225 - Comprimento da circunferência: A razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro é um número constante representado por π.

O que e necessário para a demonstração do teorema: limite/método da exaustão.

T227 - Comprimento de um arco de circunferência: O comprimento de um arco de circunferência (l) é proporcional a sua medida (α).

O que e necessário para a demonstração do teorema: T225 e T171.

2.1.18 Equivalência Plana

D230 - Soma de Polígonos: Soma de dois polígonos quaisquer, A e B, é definida como sendo a soma dos polígonos contíguos A' e B' em que A' é congruente a A e B' e congruente a B

T234 - Redução de polígonos por equivalência: Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes:

O que e necessário para a demonstração do teorema: D230.

T236 - Redução de polígonos por equivalência: Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e a altura metade da altura do triângulo.

O que e necessário para a demonstração do teorema: D230 e P51.

2.1.19 Áreas de Superfícies Planas

T242a - Razão entre retângulos: A razão entre dois retângulos de bases congruentes (ou alturas congruentes) é igual à razão entre suas alturas (ou bases).

O que e necessário para a demonstração do teorema: T234 e limite/método da exaustão

T242b - Razão entre retângulos: A razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas:

O que e necessário para a demonstração do teorema: T242a.

T243 - Área do retângulo: Dado um retângulo R(b,h) e fixado o quadrado Q(1,1) como unitário temos: Área do retângulo e igual medida da base vezes a altura.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T242b.

T244 - Área do quadrado: Dado um quadrado de lado a, $Q(a, a)$ temos Área do quadrado e igual a lado ao quadrado, pois todo quadrado e um retângulo particular.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T243.

T245 - Área do paralelogramo: Dado um paralelogramo $P(b, h)$, ele e equivalente a um retângulo cuja base mede b e a altura mede h. Logo área do paralelogramo e igual a medida da base vezes a medida da altura.

O que e necessário para a demonstração do teorema:T243.

T246 - Área do Triângulo: Dado um triângulo $T(b, h)$, ele é equivalente a um paralelogramo cuja base mede b e a altura mede $\frac{h}{2}$. Logo área do triângulo e igual a medida da base vezes medida da altura dividido por 2.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T236 e T245.

T247 - Área do trapézio: Dado um trapézio $T_{ra}(b_1, b_2, h)$ ele é a soma de dois triângulos $T_1(b_1, h)$e $T_2(b_2, h)$. Assim área do trapézio e igual a soma das medidas das bases multiplicado pela altura dividido por dois.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T246.

T248 - Área do losango: Dado o losango $L(d_1,d_2)$, conduzimos as diagonais e, pelos vértices, as paralelas às diagonais. Logo a área do losango e igual ao produto das diagonais dividido por 2.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T246 e T110a.

T249 - Área de um polígono regular: seja um polígono regular de n lados de medidas iguais a l e de apótema de medida m. Assim sua área e igual ao semiperímetro vezes o apótema.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T246.

T257 - Área do círculo: A área do círculo é o produto de seu semiperímetro pelo raio.

O que e necessário para a demonstração do teorema: T225.

T258 - Área do setor circular: A área do setor é proporcional ao comprimento do arco (ou à medida do ângulo central).

O que e necessário para a demonstração do teorema: T257.

T261 - Área da coroa circular: e a diferença entre as áreas do círculo maior pelo círculo menor:

O que e necessário para a demonstração do teorema: T257.

Capítulo 3

A construção do mapa conceitual

Neste capítulo apresentamos a construção do mapa conceitual, desde a escolha dos programas principais e auxiliares até a linguagem de programação para a construção do mesmo.

O manual do Tikz, bem como dos outros pacotes utilizados foram retirados do site **Ctan.org** que é uma rede agregadora de informações do TEX, criada por Rainer Schoepf e Joachim Schrod da Alemanha, Sebastian Rahtz do Reino Unido e George Greenwade dos EUA no ano de 1992. Segundo Rahtz et al. (1992) em uma conferência sobre o TEX o site foi criado a partir da observação da necessidade de se criar um local para discutir e agregar as informações desenvolvidas pelos colaboradores de vários locais do mundo.

3.1 O LaTeX

Um arquivo em LaTeX constitui basicamente de duas partes: o preâmbulo que é a parte em que são definidas as configurações gerais como os pacotes, classes e etc. e o corpo que é o local que consta o texto a ser impresso, geralmente fica compreendido entre o *begin*{*document*} e *end*{*document*}.

Usamos o LaTeX por se tratar de um programa que as informações são de fácil acesso e por se tratar de um compilador de texto que apresenta uma formatação um tanto mais adequada ao mapa conceitual da Geometria plana.

Apresentamos os pacotes e bibliotecas usados para construção do mapa conceitual da geometria plana, bem como o processo da construção.

3.1.1 \documentclass{article}

E a primeira coisa a ser definida no documento LaTeX e a *documentclass* (classe do documento) que pode ser do tipo artigo, relatório, carta, livro ou *slides* e as opções a serem aplicadas nele como tipo de letra que será utilizado para a exibição do texto e etc. Neste trabalho usamos apenas para definir o tipo de arquivo a ser gerado que é article(artigo).

3.1.2 \usepackage{tikz}

O TikZ é um pacote de macros (cadeias de comandos) que permite aos autores usá-lo na plataforma LaTeX em documentos, que apresentam a necessidade de esboçar retas, curvas, construir diagramas e desenhar gráficos no plano ou tridimensional etc.

Depois de analisar alguns pacotes para a construção do diagrama encontramos o Tikz que traz um ambiente mais agradável, pois é usado na plataforma LaTeX e para este trabalho o usamos do pacote TikZ que trabalha com posição absoluta e permite a visualização do posicionamento dos nós num plano de coordenadas cartesianas, o que facilita os direcionamento da setas.

3.1.3 \usepackage[portuges,brazil]{babel}

Segundo Bezos (2019) o pacote *babel* está relacionado com o idiomas que se quer usar, permite que o compilador traduza expressões para o idioma escolhido. Permite escolher mais de um idioma a ser utilizado, sendo que o último é considerado o principal idioma.

O encode utilizado neste trabalho é o *portuges* para o português de Portugal e o *brazil* para o português do Brasil.

3.1.4 \usepackage[utf8]{inputenc}

De acordo com Jeffrey e Mittelbach (2018), o pacote *inputenc* especifica um código de entrada como ASCII, UTF8, ISO Latin-1, ISO Latin-2, ou algum outro definido pelo usuário.

Neste trabalho usamos o encode UTF8, que nos traz as últimas atualizações com o uso de caracteres como acentos e cedilhas que são inseridos pelo próprio teclado sem precisar usar comandos, o que significa digitar diretamente os caracteres de acentuação.

3.1.5 \usepackage{xfrac, amsmath, pdflscape, geometry}

xfrac: Fornece ao usuário um pacote de frações usando o encode *frac*.

Usado para escrever os números e as fórmulas em forma de fração, assim obtemos frações do tipo $\frac{numerador}{denominador}$.

amsmath: pacote para escrever equações ou símbolos especiais.

Usado para escrever as fórmulas matemáticas e os símbolos especiais como pi π, grau $^{\circ}$, lâmbda λ, entre outros.

pdflscape: a página com este atributo será exibida na orientação de paisagem, conforme os visualizadores de PDF.

Geralmente o *layout* de orientação das páginas vem no formato de retrato, então este pacote foi utilizado para que o produto fosse visualizado na orientação de paisagem, logo após os coóigos de criação dos nós, o corpo do texto fica entre *begin*{*landscape*} e *end*{*landscape*}.

geometry: segundo Umeki (2018) no manual *The geometry package* este pacote fornece uma interface de usuário fácil e flexível para personalizar o layout da página.

```
\geometry{a2paper, left=0.5cm, right=0.5cm, top=0.5cm, bottom=0.5cm}
```

Este pacote *geometry* foi utilizado para definir as margens e o tamanho do papel utilizado no produto, pois implementa mecanismos de auto centralização e balanceamento automático para que os usuários tenham apenas que fornecer a menor descrição possível para o *layout* da página.

3.1.6 \usetikzlibrary{shapes, arrows, positioning}

O comando *usetikzlibrary* serve para carregar outras bibliotecas depois que o TikZ for carregado, as bibliotecas aparecem entre chave e separadas por vírgulas na versão do TeXstudio.

shapes: De acordo com o manual PGF de Tantau (2019) essa biblioteca define diferentes formas para os nós que podem ser desde objetos geométricos básicos, como elipses, polígonos ou outras formas.

Atraves do uso da biblioteca *shapes* foi possível confeccionar os retângulos que aparecem nos teoremas, postulados e definições com comandos mais simples.

arrows: Esta biblioteca define os vários tipos de flechas(setas) a serem usadas.

A biblioteca *arrow* foi usada para interligar os nós a outros nós e assim interligar a cada teorema o que é necessário para a sua demonstração.

positioning: Segundo o Manual PGF de Tantau (2019) esta biblioteca define a coordenada do posicionamento do nó. Mostra o local em que o mesmo fica centralizado nessa coordenada.

Como o pacote Tikz está fundamentado em um sistema de coordenadas a biblioteca *positioning*, nos permite posicionar os nós que contém os textos dos axiomas, postulados e teoremas de uma forma em que as ligações não fiquem confusas.

3.1.7 \begin{document} e \end{document}

Aqui apresentamos as linhas de comandos que fazem parte do corpo do trabalho na construção do mapa conceitual da geometria plana que estão situadas entre

```
\begin{document}
conteúdo...
\end{document}
```

Quando abrimos o documento com o *begin*{*document*} garantimos que a página esteja vazia com o comando *pagestyle*{*empty*} para que possa receber todos os dados da programação.

3.1.8 \tikzstyle

Tikzstyle é um comando do Tikz que define o estilo de cada objeto a ser construído.

O comando tikzstyle foi usado para definir o nome do nó, a aparência da figura geométrica que o nó receberá, a cor de preenchimento da figura, a largura e altura que o texto usará dentro da figura escolhida e justificar o texto dentro da figura.

Para este trabalho definimos que para teorema a cor seria azul claro então foi colocado 30% da cor azul, para postulado ou axioma 30% da cor laranja e 30% da cor rosa para definições. Exemplo abaixo do código da programação na criação do nó teorema:

```
\tikzstyle{teo} = [rectangle, draw, fill=blue!30 , text width=6cm, text
justified,minimum height=8pt]
```

Aqui o comando *tikzstyle* foi usado para definir o que seria usado para se desenhar as setas de ligação, bem como o formato da ponta da seta, a espessura e o recuo que as setas devem ter em relação ao nó de chegada. Segue o exemplo do código da programação da seta usada:

```
\tikzstyle{seta}=[->,>= stealth,very thick, shorten >=0.05cm]
```

3.1.9 \begin{tikzpicture} e \end{tikzpicture}

Consiste no ambiente de imagem do Tikz que nos permite programar as imagens diretamente no LaTeX.

O comando tikzpicture foi usado para definir o ambiente do corpo do trabalho para que facilitasse a programação e, com isso, diminua os códigos de comando.

Definimos aqui a escala que o diagrama teria, bem como a confirmação que os nós criados no comando tikzstyle, o que obedece à biblioteca *shape*.

Entre o *begin*{*tikzpicture*} *e end*{*tikzpicture*} fica todo o texto do trabalho como a criação dos nós e também a programação das setas que interligam cada um dos nós.

O corpo do trabalho é composto basicamente de posicionamento dos nós criados e das configurações das setas de ligação.

O primeiro nó está posicionado no ponto cardeal (0,0) e assim os outros nós são posicionados em relação ao nó anterior o que obedece às regras *below* (abaixo) do nó anterior ou *right* (direito) do nó, é possível especificar a distância que se deseja colocar entre os nós.

Os nós são compostos pelos comandos que ficam entre colchetes e constam as especificações, isto é, se é um teorema, axioma ou definição, se está abaixo ou a direita do nó anterior, entre parênteses consta o código que este nó irá receber e entre chaves o texto base dos teoremas, axioma ou definições. Segue abaixo a linha de comando para criação de um nó do tipo teorema:

```
\node[teo,below=3cm  of t93 ](t94){T94 - Todo ponto da bissetriz de um
```

```
ângulo é equidistante dos lados do ângulo.};
```

Já as configurações das setas foram feitas da seguinte forma: usamos o comando draw (desenhar), colocamos entre colchetes os comandos a ser desenhados no caso, a seta já foi pré-definida e a cor que a seta deve ser e ligamos os códigos dos nós por dois traços quando a seta é direta e com barra vertical e traço quando queremos que faça curvas de 90°, quando as estas estão passando por cima de outros nós direcionamos usando os pontos cardeais. Segue o exemplo das setas de ligação dos nós usadas em um dos comandos:

```
\draw[color=yellow,seta] (t156a)--(t156b);
\draw[color=yellow,seta] (t65)--(55,-84)--(95,-84)|-(t156b);
```

3.2 Linguagem de programação para a construção do mapa conceitual

A seguir apresentamos as linhas de comando necessárias para a construção do nosso produto.

```
\documentclass{article}
\usepackage{tikz}
\usepackage[brazil,portuges]{babel}
\usepackage{graphicx}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage{fourier}
\usepackage{xfrac,amsmath,pdflscape,geometry}
\usetikzlibrary{shapes,arrows,positioning}
\geometry{a2paper, left=0.5cm, right=0.5cm, top=0.5cm, bottom=0.5cm}
\begin{document}
\pagestyle{empty}
\tikzstyle{teo} = [rectangle, draw, fill=blue!40 , text width=8.5cm, text
```

```
justified, minimum height=12pt]
\tikzstyle{post} = [rectangle, draw, fill=orange!40, text width= 8.5cm, text
justified, minimum height=12pt]
\tikzstyle{def} = [rectangle, draw, fill=magenta!40, text width= 8.5cm, text
justified, minimum height=12pt]
\tikzstyle{caixa} = [rectangle, draw, text width= 2cm,text height=2cm, text
justified, minimum height=12pt]
\tikzstyle{defi} = [rectangle, draw,fill= red , text width= 8.5cm,text
height=2cm, text justified, minimum height=12pt]
\tikzstyle{leg} = [rectangle, draw, text width= 9cm, text justified, minimum
height=12pt]
\tikzstyle{obs} = [rectangle, draw, text width= 20.6cm, text justified,
minimum height=12pt]
\tikzstyle{capitulo} = [rectangle, draw, fill=green, text width=6cm, text
justified, rounded corners, minimum height=12pt]

\begin{landscape}
\begin{tikzpicture}[scale=0.3, every node/.style={transform shape}]

\node(int) at (95,-3)[]{\Huge{Mapa conceitual do livro: Fundamentos da
Matemática Elementar Geometria Plana}};

% Aqui estão os Capítulos 1, 2 e 3

\node[capitulo](c1) at (3,-7) {\begin{center}\Huge{Capítulo 01
Capítulo 02
Capítulo 03}
\end{center} };

\node(p4) [post, below=4cm of c1] {\LARGE{ P4 - Postulado da existência:

a) Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
```

```
b) Num plano há infinitos pontos.}};

\node[teo, below=3cm of p4](t5a){\LARGE{ T5a - Posições de dois pontos:
Dados dois pontos $A$ e $B$, de duas uma, ou $A$ e $B$ são coincidentes(
é o mesmo ponto, um só ponto, com dois nomes) ou $A$ e $B$ são distintos.}};

\node[teo, below=3 cm of t5a](t5b){\LARGE{ T5b - Posições de ponto e reta:
Dados um ponto $P$ e uma reta $r$, de duas uma, ou o ponto pertence a reta
$r$( a reta $r$ passa por $P$) ou o ponto $P$ não está na reta $r$( a reta
 $r$ não passa por $P$).}};

\node[post, below=3cm of t5b](p7){\LARGE{P7 - Postulado da determinação:

a) Da reta: Dois pontos distintos determinam uma única (uma, e uma só)
 reta que passa por eles.

b) Do plano: Três pontos não colineares determinam um único plano
que passa por eles.} };

\node[post, below=3cm of p7](p8){\LARGE{P8 - Postulado da inclusão Se
uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida
 nesse mesmo plano.}};

\node[def, below=3cm of p8](d12){D12 - Segmento de reta: Dados dois
pontos distintos, reunião do conjunto desses dois pontos com conjunto
dos pontos estão entre eles um segmento de reta.};

\node[teo, below=3 cm of d12](t15){\LARGE{ T15 - Segmentos consecu-
tivos: Dois segmentos de retas são consecutivos se, e somente se,
uma extremidade de um deles é também extremidade do outro.}};
```

```
\node[teo, below=3 cm of t15](t16){\LARGE{ T16 - Segmentos colineares:
Dois segmentos de reta são colineares se, e somente se, estão numa mesma
reta.}};

\node[teo, below=3 cm of t16](t17){\LARGE{ T17 - Segmentos
Adjacentes: Dois segmentos consecutivos e colineares são adjacentes se, e
somente se, possuem em comum apenas um extremidade.}};

\node[post,below=3cm of t17](p18){\LARGE{P18-4º - Transporte de
segmentos: Dados um segmento$\overline{AB}$ e uma semirreta de origem $A'$,
existe sobre esta semirreta um único ponto $B'$ tal que $\overline{A'B'}$
 seja congruente a $\overline{AB}$.}};

\node[def,below=3cm of p18](d21){\LARGE{D21 - Ponto médio de um
segmento: Um ponto M é ponto médio do segmento AB se, e somente se, M está
entre A e B e $\overline{AM}$ $\equiv$ $\overline{MB}$.}};

\node[teo, below=3 cm of d21](t25){\LARGE{ T25 - Região Convexa: Um
conjunto de pontos $\Sigma$ é convexo se, e somente se, dois pontos
 distintos quaisquer $A$ e $B$ de $\Sigma$ são extremidades de um segmento
$\overline{AB}$ contido em $\Sigma$, ou se $\Sigma$ é unitario, ou se
 $\Sigma$ é vazio.}};

\node[post,below=3cm of t25](p35){\LARGE{P35-4º - Transporte de ângulos:
Dados um ângulo AÔB e uma semirreta ( $\overrightarrow{O'A'}$ ) de um
plano, existe sobre este plano, e num dos semiplanos que $\overrightarrow
{O'A'}$ permite determinar, uma única semirreta $\overrightarrow{O'B'}$ que
forma com $\overrightarrow{O'A'}$ um ângulo $A'\hat{O'}B'$ congruente ao
ângulo $A\hat{O}B$.}};

\node[def,below=3cm of p35](d38){\LARGE{D38 - Bissetriz de um ângulo:
Uma semirreta OC interna a um ângulo AÔB e bissetriz do ângulo AÔB se, e
```

```
somente se, AÔC$\equiv$ BÔC.}};

\node[def,below=3cm of d38](d39){\LARGE{D39 - Ângulo suplementar
adjacente: Dado o ângulo AÔB, a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ oposta à
semi-reta $\overrightarrow {AO}$ e a semi-reta $\overrightarrow {OB}$
determinam um ângulo BÔC que se chama ângulo suplementar adjacente ou
suplemento adjacente de AÔB. Dois ângulos são suplementares se, e somente
se, a soma de suas medidas é 180$\,^{\circ}$.}};


\node[teo,below=3cm of d39](t36){\LARGE{T36 - Teorema do ângulo oposto
pelo vértice: Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles são
congruentes.}};

% Aqui está o capítulo 4

\node[capitulo, right= 20 cm of c1](c2) {\begin{center}\Huge{Capítulo 04}
\end{center}};
\node[def,below= 4cm of c2](d49){\LARGE{D49 - Congruência de triângulos: Um
triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se, é possível
estabelecer correspondência entre seus vértices de modo que:

1º) Seus lados são ordenadamente congruentes aos lados do
outro;

2º) Seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do
outro.}};

\node[post, below=3cm of d49](p51){\LARGE{P51 - Caso de congruên-
cia(LAL-lado-ângulo-lado): se dois triângulos têm ordenadamente
congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruen-
tes.}};
```

```
\node[teo,below=3cm  of p51](t52){\LARGE{T52 - Teorema do triangulo
isósceles: Se um triangulo é isósceles, os ângulos da base são
congruentes.}};

\node[teo,below=3cm  of t52 ](t53){ \LARGE{T53 - caso de congruência
ALA(ângulo-lado-ângulo): se dois triângulos têm ordenadamente congruentes
um lado e os dois ângulos a ele adjacente, então estes triângulos são
 congruentes. } };

\node[teo,below=3cm  of t53 ](t54){\LARGE{ T54 - Teorema do triangulo
isósceles reciproca: Se um triangulo possui dois ângulos congruentes, então
esse triângulo é isósceles. }};

\node[teo,below=3cm  of t54](t55){ \LARGE{T55 - caso de congruência
LLL(lado-lado-lado): se dois triângulos tem ordenadamente congruentes os
três lados, então esse triângulos são congruentes. } };

\node[teo,below=3cm  of t55](t56){\LARGE{ T56 - Existência do ponto
médio: O ponto que divide o segmento de reta exatamente no meio em dois
segmentos congruentes. } };

\node[teo,below=3cm  of t56](t57){\LARGE{ T57 - Existência da Bissetriz:
Lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes e,
por consequência, divide em dois ângulos congruentes.} };

\node[teo,below=3cm  of t57](t60){\LARGE{ T60 - Teorema do ângulo
externo: Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos
ângulos internos não adjacentes.} };

\node[teo,below=3cm  of t60](t61){ \LARGE{T61 - caso de congruência
LAAo (lado-ângulo-ângulo oposto): Se dois triângulos têm ordenadamente
```

```
congruentes um lado, uma Ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado,
então esses triângulos são congruentes. } };

\node[teo,below=3cm  of t61](t62){\LARGE{ T62 - caso de congruência de
triângulos retângulos: Se dois triângulos tem ordenadamente congruentes um
cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes. } };

\node[teo,below=3cm  of t62](t63){ \LARGE{T63 - desigualdade nos
triângulos, ao maior lado opõe-se o maior ângulo: Se dois lados de um
triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são
congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado. } };

\node[teo,below=3cm  of t63 ](t64){\LARGE{ T64 - desigualdade nos
triângulos, ao maior ângulo opõe-se o maior lado: Se dois ângulos de um
triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são
congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado. } };

\node[teo,below=3cm  of t64 ](t65){\LARGE{T65 - Desigualdade
triangular: Em todo triangulo, cada lado e menor que a soma dos outros
dois.  } };

% Aqui estão os Capítulos 5 e 6

\node[capitulo,right=15cm  of c2](c3) {\begin{center}\Huge{Capítulo 05
Capítulo 06 }
\end{center} };

\node[def,below= 4cm of c3](d67){\LARGE{ D67 - Retas paralelas: Duas
retas paralelas (símbolo //) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou
são coplanares e não têm nenhum ponto comum. }};

\node[def,below=3cm of d67](d69){\LARGE{D69 - Ângulos colaterais : os
```

```
pares de ângulos colaterais são suplementares ou seja a soma do par de
ângulo colateral e 180$\,^{\circ}$}};

\node[post,below=3cm of d69 ](p72){\LARGE{P72 - Unicidade da paralela:
Por um ponto passa uma \textit{única} reta paralela a um reta dada.}};

\node[teo,below=3cm  of p72](t70){\LARGE{ T70 - existência da paralela:
Se duas retas coplanares distintas e um reta transversal determinam ângulos
alternos (ou ângulos correspondentes) congruentes, então essas duas retas
são paralelas.}};

\node[teo,below=3cm  of t70](t73){\LARGE{ T73 - Reciproca da existência
da paralela: Se duas retas paralelas distintas interceptam uma transversal
entre os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.}};

\node[teo,below=3cm  of t73](t75){ \LARGE{T75 - Teorema do ângulo
externo: Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois
ângulos internos não adjacentes a ele. }};

\node[teo,below=3cm  of t75 ](t76){\LARGE{ T76 - soma dos ângulos de
um triângulo: A soma dos ângulos de qualquer triangulo é igual a dois
ângulos retos.} };

\node[teo,below=3cm of t76](t77a){\LARGE{T77-1ª - Ângulos de lados
paralelos: Dois Ângulos de lados respectivamente paralelos são congruentes
ou suplementares.}};

\node[teo,below=3cm  of t77a](t77){\LARGE{ T77-2ª - ângulos de um
triângulo equilátero: Num triângulo equilátero cada ângulo mede 60$
\,^{\circ}$.};

\node[def,below= 3cm  of t77](d78){\LARGE{ D78 - Retas perpendiculares:
```

```
Duas retas são \textit{perpendiculares} (símbolo: $\perp$) se, e somente se,
são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes.}};


\node[teo,below=3cm  of d78 ](t89){\LARGE{ T89 1º) - O segmento
perpendicular é menor que qualquer dos oblíquos.  }};

\node[def,below=3cm of t89](d91){\LARGE{D91 - Distância entre duas
paralelas: A distância entre dus retas paralelas é a distância entre um
ponto qualquer de uma delas e a outra}};

\node[teo,below=3cm  of d91](t92){\LARGE{ T92 - Se duas retas distintas
são paralelas, os pontos de umas delas estão a igual distancia (são
equidistantes) da outra. } };

\node[teo,below=3cm  of t92 ](t93){\LARGE{ T93 - Todo ponto da
mediatriz de um segmento é equidistante das extremidades do segmento.}  };


\node[teo,below=3cm  of t93 ](t94){\LARGE{T94 - Todo ponto da bissetriz
de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.} };

\node[teo,below=3cm  of t94 ](t200){\LARGE{T200 - A mediana relativa a
hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade a hipotenusa. }};

% Aqui esta o Capítulos 7
\node[capitulo,right=22cm  of c3](c4) {\begin{center}\Huge{Capítulo 07}

\end{center}};

\node[def,below=4 cm of c4](d95){\Large{ D95 - Quadrilátero: Sejam A, B,
C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não
```

```
colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$,
$\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a
reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero que tem 2 diagonais e a
soma dos ângulos internos e externos e igual a 360$\,^{\circ}$}};

\node[def,below=2.5cm  of d95 ](d97){\Large{D97 - Trapézio: Um
quadrilátero plano convexo é um \textit{trapézio} se, e somente se, possui
dois lados paralelos. ABCD é trapézio $\Longleftrightarrow$ $\overline{AB}$
// $\overline{CD}$ ou $\overline{AD}$ // $\overline{BC}$.}};

\node[def,below=2.5cm of d97](d98){\Large{D98 - Paralelogramo: Um
quadrilátero plano convexo é um \textit{Paralelogramo} se, e somente se,
possui os lados opostos paralelos. ABCD é Paralelogramo
$\Longleftrightarrow$ $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$
// $\overline{BC}$.}};

\node[def,below=2.5cm  of d98 ](d99){\Large{D99 - Retângulo: Um
quadrilátero plano convexo é um retângulo se, e somente se, possui os quatro
ângulos congruentes. ABCD é retângulo $\Longleftrightarrow$  \^A $\equiv$
\^B $\equiv$ \^C $\equiv$ \^D.}};



\node[def,below=2.5cm  of d99 ](d100){\Large{D100 - Losango: Um
quadrilátero plano convexo e um losango se, e somente se, possuis os quatro
lados congruentes. ABCD é losango $\Longleftrightarrow$  $\overline{AB}$
$\equiv$ $\overline{BC}$ $\equiv$ $\overline{CD}$ $\equiv$ $\overline{DA}$.}};

\node[teo,below=2.5cm of d100](t102){\Large{T102 - Propriedade de um
trapézio qualquer: em qualquer trapézio ABCD (notação cíclica) de bases
$\overline{AB}$  e $\overline{CD}$ temos: \^A + \^B + \^C + \^D
=180$\,^{\circ}$ .}};
```

```
\node[teo,below=2.5cm of t102](t103){\Large{T103 - Propriedades de
uma trapézio isósceles: Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são
congruentes.}};

\node[teo,below=2.5cm of t103](t104){\Large{T104 - Propriedades de
uma trapézio isósceles diagonais congruentes: As diagonais de um trapézio
isósceles são congruentes.} };

\node[teo,below=2.5cm of t104](t105a){\Large{T105a - Propriedades dos
paralelogramos, ângulos opostos congruentes: Em todo paralelogramo dois
ângulos opostos quaisquer são congruentes.}};

\node[teo,below=2.5cm of t105a](t105b){\Large{T105b - Todo
quadrilátero convexo que tem ângulos opostos congruentes é paralelogramo.}};

\node[teo,below=2.5cm of t105b](t106a){\Large{T106a - Propriedades
dos paralelogramos, lados opostos congruentes: Em todo paralelogramo, dois
lados opostos quaisquer são congruentes.}};

\node[teo,below=2.5cm of t106a](t106b){\Large{T106b - Propriedades dos
paralelogramos, lados opostos congruentes reciproca: todo quadrilátero
convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo.}};

\node[teo,below=2.5cm of t106b](t107a){\Large{T107a - Propriedades dos
paralelogramos, diagonais dividem - se ao meio: Em todo paralelogramo, as
diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.}};

\node[teo,below=2.5cm of t107a](t107b){\Large{T107b - Reciproca, propriedades
dos paralelogramos, diagonais dividem - se ao meio: Todo quadrilátero convexo
em que as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios é
paralelogramo.}};
```

```
\node[teo,below=2.5cm of t107b](t108a){\Large{T108a - Propriedades dos
paralelogramos, dois lados paralelos e congruentes: Todo quadrilátero convexo
que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.} };

\node[teo,below=2.5cm of t108a](t109a){\Large{T109a - Propriedades do
retângulo, diagonais congruentes: Em todo retângulo as diagonais são
congruentes.}};

\node[teo,below=2.5cm of t109a](t109b){\Large{T109b - Propriedades do
retângulo, diagonais congruentes: todo paralelogramo que tem diagonais
congruentes é um retângulo.}};

\node[teo,below=2.5cm of t109b](t110a){\Large{T110a - Propriedades do
losango-diagonais perpendiculares: Todo losango tem diagonais
perpendiculares. }};

\node[teo,below=2.5cm of t110a](t110b){\Large{T110b - Propriedades do
losango-diagonais perpendiculares: Todo paralelogramo que tem diagonais
perpendiculares é um losango.}};

\node[teo,below=2.5cm of t110b](t113a){\Large{T113a - Base média do
triângulo: Se um segmento tem extremidades nos pontos médios de dois lados
de um triângulo, então:

1º) ele e paralelo ao terceiro lado;

2º) ele e metade do terceiro lado. }};

\node[teo,below=2.5cm of t113a](t113b){\Large{T113b - Reciproca base média do
triângulo: Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extre-
midade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no terceiro lado,
então está extremidade é ponto médio do terceiro lado. }};
```

```
\node[teo,below=2.5cm of t113b](t114a){\Large{T114a - Base média do trapézio:
Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de
um trapézio, então:

1º) ele é paralelo às bases;

2º) ele é igual à semissoma das bases.}};

\node[teo,below=2.5cm of t114a](t114b){\Large{T114b - Reciproca Base média do
trapézio: Se um segmento paralelo ás bases de um trapézio tem uma extremidade
no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado,
então está extremidade é ponto médio deste lado.}};

% Aqui esta o Capítulo 8, 9 e 10

\node[capitulo,right=18cm  of c4](c5) {\begin{center}\Huge{Capítulo 08

Capítulo 09

Capítulo 10}

\end{center} };

\node[teo,below=4cm of c5](t115){\LARGE{T115 - Baricentro - Medianas: As três
medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada
mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da
outra.}};

\node[teo,below=3cm of t115](t117){\LARGE{T117 - Incentro - Bissetrizes
internas: As três bissetrizes internas de um triangulo interceptam-se num
mesmo ponto eu está a igual distância dos lados do triângulo. }};
```

```
\node[teo,below=3cm of t117](t119){ \LARGE{T119 - Circuncentro - Mediatrizes:
As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que
está a igual distância dos vértices do triângulo.} };

\node[teo,below=3cm of t119](t121){\LARGE{T121 - Ortocentro - Alturas: As
três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo
ponto.} };

\node[defi,below=3cm of t121](pif){\LARGE{Princípio  da indução finita.}};

\node[teo,below=3cm of pif](t134){ \LARGE{T134 - O número de diagonais d de
um polígono de n lados (n $\geq {3}$) é dado por: d=$\frac{n(n-3)}{2}$.}};

\node[teo,below=3cm of t134](t135){\LARGE{T135 - Soma do ângulos internos de
um polígono convexo: A soma $S_{i}$ dos ângulos internos de um polígono
convexo de n lados (n $\geq$ 3) é dada por: $ S_{i} = (n - 2).180
\,^{\circ}$.}};

\node[teo,below=3cm of t135](t137){\LARGE{T137 - Soma $S_{e}$ dos ângulos
externos de um polígono convexo: A soma $S_{e}$ dos ângulos externos de um
poligono convexo de n lados (n $\geq$ 3) é dada por: : $S_{e} = 360
\,^{\circ}$.}};

\node[teo,below=3cm of t137](t147a){\LARGE{T147a - Se uma reta s, secante a
uma circunferência $\lambda$(O, r), não passa pelo centro O, intercepta
$\lambda$ nos pontos distintos A e B, e se M é o ponto médio da corda
$\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{OM}$ é perpendicular à
secante s (ou corda $\overline{AB}$ ).} };

\node[teo,below=3cm of t147a](t147b){\LARGE{T147b - Se uma reta s, secante a
uma circunferência $\lambda$(O, r), não passa pelo centro O, intercepta
```

```
$\lambda$ nos pontos A e B, então a perpendicular a s conduzida pelo centro
passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$.} };

\node[teo,below=3cm of t147b](t149a){\LARGE{T149a - Propriedade da tangente:
Toda reta perpendicular a um raio na sua extremidade da circunferência e
tangente a circunferência.} };

\node[teo,below=3cm of t149a](t149b){\LARGE{T149b - Propriedade da tangente:
Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto da
tangencia.} };

\node[teo,below=3cm of t149b](t154){\LARGE{T154 - Se de um ponto P conduzimos
os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a uma
circunferência, com A e B na circunferência, então $\overline{PA}$ $\equiv$
$\overline{PB}$.} };

\node[teo,below=3cm of t154](t156a){\LARGE{T156a - Se um quadrilátero convexo
é circunscrito a uma circunferência, a soma de dois lados opostos é igual à
soma dos outros dois.}};

\node[teo,below=3cm of t156a](t156b){\LARGE{T156b - Se num quadrilátero
convexo a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois, então o
quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.}};

\node[capitulo,right=13cm  of c5](c6) {\begin{center}\Huge{Capítulo 11

Capítulo 12}

\end{center}};

\node[teo,below= 4cm of c6](t167){\LARGE{T167 - Medida do ângulo inscrito: Um
ângulo inscrito é a metade do ângulo central correspondente ou medida de um
```

```
ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.}};


\node[teo,below=3cm of t167](t169a){\LARGE{T169a - Propriedade do
quadrilátero inscritível: Se um quadrilátero convexo é inscritível numa
circunferência, então os ângulos opostos são suplementares.} };

\node[teo,below=3cm of t169a](t169b){\LARGE{T169b - Propriedade do
quadrilátero inscritível: Se um quadrilátero convexo possui os ângulos
opostos suplementares, então ele é inscritível.}};

\node[teo,below=3cm of t169b](t171){\LARGE{ T171 - Medida do ângulo de
segmento: Um ângulo de segmento é metade do ângulo central correspondente ou
a medida de um ângulo de segmento é metade da medida do arco correspondente.}
};

\node[teo,below=3cm of t171](t172){\LARGE{T172 - Arco capaz - segmento
(circular) capaz: consideremos uma circunferência $\lambda$ de centro O e um
ângulo de medida $\alpha$. Seja AÔB um ângulo central de medida $\beta$ =
2$\alpha$. Os vértices dos ângulos inscritos (ou semi-inscritos) relativos a
$\lambda$ que têm os lados passando por A e B e têm medidas $\alpha$ num arco
$\widehat{APB}$. Este arco e chamado arco capaz de $\alpha$. }};

\node[def,below=3cm of t172](d174a){\LARGE{D174a - Feixe de retas paralelas:
é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.}};

\node[teo,below=3cm of d174a](t175){\LARGE{T175 - Teorema de Tales:
propriedades se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas
distintas e um segmento de uma delas é dividido em p partes congruentes entre
si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento
correspondente da outra transversal:
```

```
1º) também é dividido em p partes.

2º) e essas partes também são congruentes entre si. }};

\node[teo,below=3cm of t175](t176){\LARGE{T176 - Teorema de Tales: Se duas
retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre
dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos
segmentos correspondentes da outra. }};

\node[teo,below=3cm of t176](t177){\LARGE{T177 - Teorema da bissetriz
interna: Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em
segmentos(aditivos) proporcionais aos lados adjacentes. }};

\node[teo,below=3cm of t177](t178){\LARGE{T178 - Teorema da bissetriz
externa: se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a
reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente
em segmentos(subtrativos) proporcionas aos lados adjacentes.}};

\node[defi,below=6.5cm of t178](lim){\LARGE{O método da exaustão/Limite.}};

% Aqui estão os Capítulos 13 e 14

\node[capitulo,right=15cm  of c6](c7) {\begin{center}\Huge{Capítulo 13

Capítulo 14}
\end{center}};

\node[def,below= 4cm of c7](d179){\LARGE{D179 - Dois triângulos são
semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente
congruentes e os lados homólogos proporcionais.}};

\node[teo,below=3cm of d179](t183){\LARGE{T183 - Teorema fundamental da
```

```
semelhança de triângulos: Se uma reta é paralela a um dos lados de um
triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo
que ela determina é semelhante ao primeiro.}};

\node[teo,below=3cm of t183](t185){\LARGE{T185 - Critérios de semelhança: Se
dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles
são semelhantes.}};

\node[teo,below=3cm of t185](t187){\LARGE{T187 - Critérios de semelhança: Se
dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de outro triângulo
e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são
semelhantes.}};

\node[teo,below=3cm of t187](t188){\LARGE{T188 - Critérios de semelhança: Se
dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são
semelhantes.}};

\node[teo,below=3cm of t188](t192a){\LARGE{T192a - Potência do ponto: Se duas
cordas de uma mesma circunferência se interceptam, então o produto das
medidas das duas partes de uma é igual ao produto das medidas das duas partes
da outra.}};

\node[teo,below=3cm of t192a](t192b){\LARGE{T192b - Potência do ponto: Se por
um ponto P exterior a uma circunferência conduzimos dois segmentos secantes
($\overline{PA}$ e $\overline{PC}$), então o produto da medida do primeiro
($\overline{PA}$) pela de sua parte exterior ($\overline{PB}$) é igual ao
produto da medida do segmento ($\overline{PC}$) pela de sua parte exterior
($\overline{PD}$).}};


\node[teo,below=3cm of t192b](t197b){\Large{T197b - Relações métricas:
```

```
1º) Cada cateto é media proporcional (ou Média geométrica) entre sua projeção
sobre a hipotenusa: $b^2=a.n$ e $c^2= a.m$;

2º) A altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica)
entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa: $h^2=m.n$;

3º) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura
relativa a ela: $b.c=a.h$;

4º) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao
produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa: $b.h=
c.n$ e $c.h = b.m$.}};


\node[teo,below=3cm of t197b](t197c){\LARGE{T197c - Teorema de Pitágoras: A
soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da Hipotenusa.}};

\node[teo,below=3cm of t197c](t197d){\LARGE{T197d - Recíproca do Teorema de
Pitágoras: Se num triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos
quadrados dos outros dois, então o triângulo é retângulo.}};

\node[def,below=2cm of t197d](ds){\LARGE{definição de seno de um angulo: Seno
de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e
a medida da hipotenusa}};

\node[def,below=2cm of ds](dc){\LARGE{definição de cosseno de um angulo:
cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a
esse ângulo e a medida da hipotenusa}};

% Aqui estão os Capítulos 15, 16 e 17

\node[capitulo,right=13cm  of c7](c8) {\begin{center}\Huge{Capítulo 15
```

```
Capítulo 16

Capítulo 17}
\end{center}};

\node[teo,below=4cm of c8](t202){\LARGE{T202 - Teorema dos senos: Os lados de
um triângulo são proporcionais aos \textit{senos} dos ângulos oposto e a
constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao
triângulo, $\frac{a}{sen A}$ = $\frac{b}{sen B}$ = $\frac{c}{sen C}$ = $2R$
.}};
\node[teo,below=3cm of t202](t203a){\LARGE{T203a - Relações métricas: Num
triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à
soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto de um
desses lados pela projeção do outro sobre ele.}};

\node[teo,below=3cm of t203a](t203b){\LARGE{T203b - Relações métricas: Num
triângulo obtusângulo qualquer, o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso é
igual à soma dos quadrados dos outros lados, mais duas vezes o produto de um
desse lados pela projeção do outro sobre ele (ou sobre a terá que o
contém).}};

\node[teo,below=3cm of t203b](t204){\LARGE{T204 - Teorema dos cossenos: Em
qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos
outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno
do ângulo por eles formados.}};

\node[teo,below=3cm of t204](t208){\LARGE{T208 - Relação de Stewart: Dado um
triângulo ABC e sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ vale e a relação:
${a^2}y$ + ${b^2}x$  - ${z^2}c$  = ${cxy}$.}};

\node[teo,below=3cm of t208](t213){\LARGE{T213 - Polígono regular é
```

```
inscritível: Todo polígono regular é inscritível numa circunferência ou dado
um polígono regular, existe uma única circunferência que passa pelos seus
vértices.}};

\node[teo,below=3cm of t213](t214){\LARGE{T214 - Polígono regular é
inscritível: Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência ou
dado um polígono regular, existe um única circunferência inscrita no
polígono.}};


\node[teo,below=3cm of t214](t221){\LARGE{T221 - Comprimento da
circunferência: Dada uma circunferência qualquer, o perímetro de qualquer
polígono convexo nela inscrito é menor que o perímetro de qualquer polígono a
ela inscrito.}};

\node[teo,below=3cm of t221](t222){\LARGE{T222 - Comprimento da
circunferência: Dada uma circunferência qualquer e fixado um segmento
\textit{k}, arbitrário, podem-se construir dois polígonos, um inscrito e
outro circunscrito á circunferência, tais que a diferença entre seus
perímetros seja menor que o segmento \textit{k}fixado.}};

\node[teo,below=3cm of t222](t225){\LARGE{T225 - Comprimento da
circunferência: A razão entre o perímetro do círculo e seu diâmetro é um
número constante representado por $\pi$.}};

\node[teo,below=3cm of t225](t227){\LARGE{T227 - Comprimento de um arco de
circunferência: O comprimento de um arco de circunferência (\textit{l}) é
proporcional a sua medida ($\alpha$).}};

% Aqui estão os Capítulos 18 e 19

\node[capitulo,right=13cm  of c8](c9) {\begin{center}\Huge{Capítulo 18
```

```
Capítulo 19 }
\end{center}};

\node[def,below=4cm of c9](d230){\LARGE{D230 - Soma de Polígonos: Soma de
dois polígonos quaisquer, A e B, é definida como sendo a soma dos polígonos
contiguos ${A'}$ e ${B'}$ em que ${A'}$ é congruente a A e ${B'}$ e
congruente a B}};

\node[teo,below=3cm of d230](t234){\LARGE{T234 - Redução de polígonos por
equivalência: Dois paralelogramos de bases e alturas respectivamente
congruentes são equivalentes.}};

\node[teo,below=3cm of t234](t236){\LARGE{T236 - Redução de polígonos por
equivalência: Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base
congruente à do triângulo e a altura metade da altura do triângulo.}};

\node[teo,below=3cm of t236](t242a){\LARGE{T242a - Razão entre retângulos: A
razão entre dois retângulos de bases congruentes (ou alturas congruentes) é
igual à razão entre suas alturas (ou bases).}};

\node[teo,below=3cm of t242a](t242b){\LARGE{T242b - Razão entre retângulos: A
razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as
bases pela razão entre as alturas.}};

\node[teo,below=3cm of t242b](t243){\LARGE{T243 - Área do retângulo: Dado um
retângulo R(\textit{b},\textit{h}) e fixado o quadrado Q(1,1) como unitário
temos: Área do retângulo e igual medida da base vezes a altura.}};

\node[teo,below=3cm of t243](t244){\LARGE{T244 - Área do quadrado: Dado um
quadrado de lado \textit{a}, \textit{Q(a, a)} temos Área do quadrado e igual
a lado ao quadrado, pois todo quadrado e um retângulo particular.}};
```

```
\node[teo,below=3cm of t244](t245){\LARGE{T245 - Área do paralelogramo: Dado
um paralelogramo $P(b,h)$, ele e equivalente a um retângulo cuja base mede
\textit{b} e a altura mede \textit{h}. Logo área do paralelogramo e igual a
medida da base vezes a medida da  altura.}};

\node[teo,below=3cm of t245](t246){\LARGE{T246 - Área do Triângulo: Dado um
triângulo \textit{T(b, h)}, ele é equivalente a um paralelogramo cuja base
mede \textit{b} e a altura mede \textit{$\frac{h}{2}$}. Logo área do
triângulo e igual a medida da base vezes medida da altura dividido por 2.}};

\node[teo,below=3cm of t246](t247){\LARGE{T247 - Área do trapézio: Dado um
trapézio \textit{ $T_{ra}$($b_{1}$, $b_{2}$, h)} ele é a soma de dois
triângulos \textit{ $T_{1}$($b_{1}$, h)}e \textit{ $T_{2}$( $b_{2}$, h)}.
Assim área do trapézio e igual a soma das medidas das bases multiplicado pela
altura dividido por dois.}};

\node[teo,below=3cm of t247](t248){\LARGE{T248 - Área do losango: Dado o
losango \textit{ L($d_{1}$,$d_{2}$)}, conduzimos as diagonais e, pelos
vértices, as paralelas às diagonais. Logo a área do losango e igual ao
produto das diagonais dividido por 2.}};

\node[teo,below=3cm of t248](t249){\LARGE{T249 - Área de um polígono regular:
seja um polígono regular de \textit{n} lados de medidas iguais a \textit{l} e
de apótema de medida \textit{m}. Assim sua área e igual ao semiperímetro
vezes o apótema.}};

\node[teo,below=3cm of t249](t257){\LARGE{T257 - Área do círculo: A área do
círculo é o produto de seu semiperímetro pelo raio.}};

\node[teo,below=3cm of t257](t258){\LARGE{T258 - Área do setor circular: A
área do setor é proporcional ao comprimento do arco (ou à medida do ângulo
```

```
central).}};

\node[teo,below=3cm of t258](t261){\LARGE{T261 - Área da coroa circular: e a
diferença entre as áreas do círculo maior pelo círculo
menor.}};



% criação das setas que interligam os nós


\tikzstyle{seta}=[->,>= stealth,very thick, shorten >=0.05cm]


% setas de ligação entre os nós

\draw[seta] (p4)--(t5a);

\draw[seta] (p4)-|(9.5,-22)|-(t5b);

\draw[seta,color=blue] (p7)-|(9,-35)|-(t15);
\draw[seta,color=blue] (d12)--(t15);
\draw[seta,color=blue] (t5b)--(9.5,-28)|-(t15);

\draw[seta] (p7)--(10.5,-33.4)|-(t16);
\draw[seta] (d12)--(10,-46)|-(t16);

\draw[seta,color= orange] (t16)--(t17);
\draw[seta,color= orange] (t15)--(9,-51)|-(t17);

\draw[seta,color= red] (d12)-|(11,-51)|-(t25);
\draw[seta,color= red] (p8)-|(11.5,-51)|-(t25);
```

```
\draw[seta,color=red] (d39)--(t36);

\draw[seta,color=green] (p51)--(t52);

\draw[color=blue,seta] (p51)--(23,-27.5)|-(t53);
\draw[color=blue,seta] (p18)--(12,-67)|-(t53);
\draw[color=blue,seta] (p35)--(12.5,-88.3)|-(t53);

\draw[color=cyan,seta] (t53)--(t54);

\draw[color=magenta,seta] (p51)--(22.5,-27.1)|-(t55);
\draw[color=magenta,seta] (p18)--(13,-65.5)|-(t55);
\draw[color=magenta,seta] (p35)-|(13.5,-80.3)|-(t55);

\draw[color=yellow,seta] (p51)--(21,-26.8)|-(t56);
\draw[color=yellow,seta] (p18)--(14,-66)|-(t56);
\draw[color=yellow,seta] (p35)--(14.5,-89.5)|-(t56);

\draw[color=gray,seta] (p51)--(20.5,-26.5)|-(t57);
\draw[color=gray,seta] (p18)--(t57);
\draw[color=gray,seta] (t53)--(34.5,-39.5)|-(t57);

\draw[color=brown,seta] (p51)--(20,-26.2)|-(t60);
\draw[color=brown,seta] (p18)--(t60);
\draw[color=brown,seta] (t56)--(22,-56)|-(t60);

\draw[color=lime,seta] (p51)--(19.5,-25.9)|-(t61);
\draw[color=lime,seta] (p18)--(t61);
\draw[color=lime,seta] (t60)--(t61);

\draw[color=olive,seta] (p51)--(19,-25.6)|-(t62);
```

```
\draw[color=olive,seta] (p18)--(t62);
\draw[color=olive,seta] (t61)--(t62);
\draw[color=olive,seta] (t52)--(18.5,-33)|-(t62);

\draw[color= orange,seta] (t52)--(17.5,-32)|-(t63);
\draw[color= orange,seta] (t60)--(18,-68.5)|-(t63);

\draw[seta] (t52)--(17,-31.5)|-(t64);
\draw[seta] (t63)--(t64);

\draw[color=pink,seta] (t52)--(16.5,-31)|-(t65);
\draw[color=pink,seta] (t64)--(t65);
\draw[color=pink,seta] (p18)--(16,-68.4)|-(t65);

\draw[color=purple,seta] (t60)--(35,-66)|-(t70);

\draw[color=teal,seta] (t70)--(t73);
\draw[color=teal,seta] (p72)--(44,-25.5)|-(t73);

\draw[color=violet,seta] (p72)--(43.5,-25.2)|-(t75);
\draw[color=violet,seta] (t73)--(t75);


\draw[color=darkgray,seta] (t75)--(t76);

\draw[seta] (d69)--(43,-20.5)|-(t77a);

\draw[color=lightgray,seta] (t52)--(42.5,-31)|-(t77);


\draw[color=yellow!30!black,seta] (p51)--(36.4,-27)|-(t89);
\draw[color=yellow!30!black,seta] (t64)--(36.5,-94)|-(t89);
```

```
\draw[ color=red!40!magenta,seta] (t61)--(t92);
\draw[color=red!40!magenta,seta] (d91)--(t92);

\draw[color=violet!20!yellow,seta] (p51)--(37,-27)|-(t93);

\draw[color=orange!30!green,seta] (t61)--(38,-78)|-(t94);

\draw[color=green!40!black,seta] (p18)--(9,-73)--(9,-97)--(t200);
\draw[color=green!40!black,seta] (p51)--(39.5,-23.2)|-(t200);
\draw[color=green!40!black,seta] (t70)--(41,-33)|-(t200);
\draw[color=green!40!black,seta] (d69)-|(40.3,-50)|-(t200);

\draw[color=red!70!magenta,seta] (d97)--(72,-22)|-(t102);
\draw[color=red!70!magenta,seta] (d69)--(56.5,-22)|-(t102);

\draw[color=violet!45!yellow,seta] (d78)-|(56,-48)|-(t103);
\draw[color=violet!45!yellow,seta] (d39)--(20.5,-105)--(57,-105)|-(t103);
\draw[color=violet!45!yellow,seta] (t62)--(56.5,-80)|-(t103);

\draw[color=orange!50!green,seta] (t103)--(t104);
\draw[color=orange!50!green,seta] (p51)--(57.5,-29)|-(t104);
\draw[color=orange!50!green,seta] (d97)--(71.5,-21.6)|-(t104);

\draw[color=violet,seta] (d69)--(58,-21.5)|-(t105a);
\draw[color=violet,seta] (d98)--(71,-25.5)|-(t105a);

\draw[seta,color=blue] (d95)-|(70.5,-35)|-(t105b);
\draw[seta,color=blue] (t77a)--(t105b);

\draw[color=red!20!yellow,seta] (d98)--(69.5,-25)|-(t106a);
\draw[color=red!20!yellow,seta] (t105a)--(70,-55)|-(t106a);
```

```
\draw[color=red!20!yellow,seta] (t61)--(57.8,-74.5)|-(t106a);

\draw[color=violet!60!yellow,seta] (t55)--(44,-49)|-(t106b);
\draw[color=violet!60!yellow,seta] (d98)--(69,-24.5)|-(t106b);

\draw[color=orange!70!green,seta] (d98)--(68.5,-24)|-(t107a);
\draw[color=orange!70!green,seta] (t70)--(59,-31)|-(t107a);
\draw[color=orange!70!green,seta] (t53)--(58.5,-42)|-(t107a);

\draw[color=green!80!black,seta] (t36)--(17,-111)--(58,-111)|-(t107b);
\draw[color=green!80!black,seta] (p51)--(59.5,-28.7)|-(t107b);

\draw[seta] (t70)--(60,-33)|-(t108a);
\draw[seta] (p51)--(60.5,-28.3)|-(t108a);
\draw[seta] (t106b)--(71,-69)|-(t108a);

\draw[color=violet!80!yellow,seta] (d99)--(68,-30)|-(t109a);
\draw[color=violet!80!yellow,seta] (p51)--(61,-28)|-(t109a);

\draw[color=orange!30!blue,seta] (d99)--(67.5,-29.5)|-(t109b);
\draw[color=orange!30!blue,seta] (d98)--(67,-23.5)|-(t109b);
\draw[color=orange!30!blue,seta] (t55)--(38.5,-50.5)--(38.5,-90)-
-(t109b);
\draw[color=orange!30!blue,seta] (d69)--(61.5,-21)|-(t109b);

\draw[color=green!60!blue,seta] (d100)-|(66.5,-39)|-(t110a);
\draw[color=green!60!blue,seta] (t107a)--(70,-74)|-(t110a);
\draw[color=green!60!blue,seta] (t55)--(42,-49.5)--(42,-95)--(t110a);

\draw[color=red!80!yellow,seta] (d100)--(66,-37)|-(t110b);
\draw[color=red!80!yellow,seta] (t107a)--(69,-75)|-(t110b);
\draw[color=red!80!yellow,seta] (p51)--(62,-27.6)|-(t110b);
```

```
\draw[color=gray,seta] (d67)-|(64,-39)|-(t113a);
\draw[color=gray,seta] (t70)--(63,-32.1)|-(t113a);
\draw[color=gray,seta] (t36)--(17,-112)--(58.6,-112)|-(t113a);
\draw[color=gray,seta] (t53)--(62.5,-33)|-(t113a);
\draw[color=gray,seta] (d98)--(65.5,-23)|-(t113a);
\draw[color=gray,seta] (d49)--(63.5,-18)|-(t113a);

\draw[color=orange!70!blue,seta] (d21)--(10,-78)|-(t113b);
\draw[color=orange!70!blue,seta] (t113a)--(t113b);
\draw[color=orange!70!blue,seta] (p72)--(64.5,-27)|-(t113b);

\draw[color=green!20! magenta,seta] (t53)--(23,-40)|-(t114a);
\draw[color=green!20! magenta,seta] (t36)--(t114a);
\draw[color=green!20! magenta,seta] (t113a)--(67,-111)|-(t114a);

\draw[color=red!50!teal,seta] (t114a)--(t114b);
\draw[color=red!50!teal,seta] (p72)-|(65,-60)|-(t114b);

\draw[color=violet!60!orange,seta] (t108a)-|(85.5,-30)|-(t115);
\draw[color=violet!60!orange,seta] (t107a)-|(84.5,-40)|-(t115);
\draw[color=violet!60!orange,seta] (t113a)-|(86.5,-42.5)|-(t115);

\draw[seta] (t57)--(34.4,-60)--(34.4,-110)--(87.5,-110)|-(t117);

\draw[color=green!60! magenta,seta] (p51)--(39,-17.5)--(96,-17.5)|
-(t119);

\draw[color=red!60!teal, seta] (d98)--(t121);
\draw[color=red!60!teal, seta] (d21)--(10.5,-76)--(10.5,-116)--
(88.5,-116)|-(t121);
\draw[color=red!60!teal, seta] (t119)--(t121);
```

```
\draw[seta] (pif)--(t134);

\draw[color=yellow,seta] (pif)-|(96,-42)|-(t135);
\draw[color=yellow,seta] (t76)--(94,-52)|-(t135);

\draw[seta] (d39)--(9,-105.8)--(9,-130)--(89.5,-130)|-(t137);
\draw[seta] (t135)--(t137);

\draw[color=green!40!yellow,seta] (t55)--(35.5,-50.5)--(35.5,-130.5)--
(90.5,-130.5)|-(t147a);

\draw[color=lightgray,seta] (t62)--(43,-82)--(43,-131)--(91.5,-131)|
-(t147b);

\draw[color=olive,seta] (t89)--(43.5,-73)--(43.5,-131.5)--
(92.5,-131.5)|-(t149a);

\draw[color=green,seta] (t62)--(22,-82)--(22,-132)--(93.5,-132)|-(t154);
\draw[color=green,seta] (t149b)--(t154);

\draw[color=blue,seta] (t154)--(t156a);

\draw[color=yellow,seta] (t156a)--(t156b);
\draw[color=yellow,seta] (t65)--(t156b);

\draw[color=cyan,seta] (t52)--(38.1,-29)--(38.1,-10.5)--(112.6,-10.5)
--(t167);
\draw[color=cyan,seta] (t75)-|(55.5,-29.2)--(55.5,-11)--(112.6,-11)
--(t167);

\draw[color=magenta,seta] (t167)--(t169a);
```

```
\draw[color=yellow,seta] (t169a)--(t169b);
\draw[color=yellow,seta] (t75)--(41.7,-41)--(41.7,-10.1)--(110,-10.1)
|-(t169b);

\draw[color=darkgray,seta] (t149b)-|(109,-39.9)|-(t171);
\draw[color=darkgray,seta] (t52)--(16,-30)--(16,-9.6)--(111,-9.6)
|-(t171);

\draw[color=gray,seta] (t171)--(t172);
\draw[color=gray,seta] (t167)-|(115,-18)|-(t172);

\draw[color=lightgray,seta] (d174a)-|(115,-51)|-(t175);
\draw[color=lightgray,seta] (t53)--(15.4,-40)--(15.4,-133)--(112,-133)
|-(t175);

\draw[color=brown,seta] (t175)--(t176);
\draw[color=brown,seta] (lim)-|(115,-69)|-(t176);

\draw[color=orange,seta] (t70)--(59.5,-24)--(59.5,-11.6)--(109.5,-11.6)
|-(t177);
\draw[color=orange,seta] (d38)--(13,-99)--(13,-134)--(113.5,-134)|
-(t177);
\draw[color=orange,seta] (t54)--(37.7,-40)--(37.7,-133.5)--(110.7,-133.5)
|-(t177);
\draw[color=orange,seta] (t176)--(t177);

\draw[color=cyan!70!red,seta] (t70)--(42.4,-25)--(42.4,-9.2)--(112.7,-9.2)
|-(t178);
\draw[color=cyan!70!red,seta] (t54)--(23.5,-47)--(23.4,-134.5)--
(114.5,-134.5)|-(t178);
\draw[color=cyan!70!red,seta] (t176)--(114.2,-68)|-(t178);
```

```
\draw[color= black!60,seta] (t176)--(128,-67)|-(t183);
\draw[color= black!60,seta] (t106a)--(97,-66)--(97,-106)--(128.5,-106)
|-(t183);
\draw[color= black!60,seta] (d179)--(t183);

\draw[color=red,seta] (t183)--(t185);
\draw[color=red,seta] (t53)--(21.5,-38.2)--(21.5,-135)--(129,-135)
|-(t185);

\draw[color=purple,seta] (p51)--(36,-17)--(130,-17)|-(t187);
\draw[color=purple,seta] (t183)--(130.5,-22)|-(t187);

\draw[color=teal,seta] (t55)--(15,-46.2)--(15,-135.5)--(130.5,-135.5)
|-(t188);
\draw[color=teal,seta] (t183)--(131,-23)|-(t188);

\draw[color=violet,seta] (t183)--(131.5,-24)|-(t192a);
\draw[color=violet,seta] (t185)--(132,-28)|-(t192a);
\draw[color=violet,seta] (t172)--(t192a);
\draw[color=violet,seta] (t36)--(6,-136)--(132.5,-136)|-(t192a);

\draw[color=darkgray,seta] (t183)--(133,-24.5)|-(t192b);
\draw[color=darkgray,seta] (t185)--(133.5,-28.5)|-(t192b);
\draw[color=darkgray,seta] (t172)--(t192b);
\draw[color=darkgray,seta] (t36)--(5.5,-136.5)--(133.8,-136.5)|-(t192b);

\draw[color=yellow,seta] (t185)--(134.5,-29)|-(t197b);

\draw[color=red!40!magenta,seta] (t197b)--(t197c);

\draw[color=violet!40!yellow,seta] (t55)--(39,-45.8)--(39,-137)--
```

```
(134.4,-137)|-(t197d);

\draw[color=orange!30!green,seta] (t172)--(127.5,-35)--(127.5,-11.3)--
(145,-11.3)--(t202);
\draw[color=orange!30!green,seta] (t167)--(127.5,-10.8)--(145.5,-10.8)--
(t202);
\draw[color=orange!30!green,seta] (ds)-|(149,-15)|-(t202);

\draw[color=black,seta] (t197c)--(149.5,-72.5)|-(t203a);

\draw[color=red!70!magenta,seta] (t197c)-|(150,-45)|-(t203b);

\draw[color=violet!40!yellow,seta] (dc)-|(150.5,-45)|-(t204);
\draw[color=violet!40!yellow,seta] (t203a)--(151,-24)|-(t204);
\draw[color=violet!40!yellow,seta ] (t203b)--(t204);

\draw[color=green!60!black,seta] (t203a)--(156,-25)|-(t208);
\draw[color=green!60!black,seta] (t203b)--(156.5,-32)|-(t208);

\draw[color=orange!70!blue,seta] (p51)--(39,-17.9)--(135,-17.9)--
(155.5,-17)|-(t213);

\draw[color=red!20!yellow,seta] (t213)--(t214);

\draw[color=violet,seta] (t185)--(155,-25.5)|-(t221);
\draw[color=violet,seta] (lim)--(154.5,-94)|-(t221);

\draw[color=gray,seta] (t185)--(154,-24)|-(t222);
\draw[color=gray,seta] (lim)--(152,-85.6)|-(t222);
\draw[color=gray,seta] (t197c)--(t222);

\draw[seta] (lim)--(153.5,-85.7)|-(t225);
```

```
\draw[color=violet!60!yellow,seta] (t225)--(t227);
\draw[color=violet!60!yellow,seta] (t171)--(111.3,-35)--(111.3,-96)-|
(t227);

\draw[color=orange!70!green,seta] (d230)--(t234);

\draw[color=black!40!green,seta] (d230)-|(175,-19)|-(t236);
\draw[color=black!40!green,seta] (p51)--(35.9,-27)--(35.9,-110.3)--
(168.6,-110.3)|-(t236);

\draw[color=red!40!yellow,seta] (t242a)--(t242b);

\draw[color=violet!80!yellow,seta] (t242b)-|(174,-40)|-(t243);

\draw[color=orange!30!blue,seta] (t243)--(t244);

\draw[color=green!40!blue,seta] (t243)--(173,-46)|-(t245);

\draw[color=red!80!yellow,seta] (t236)--(172,-32)|-(t246);
\draw[color=red!80!yellow,seta] (t245)--(t246);

\draw[seta] (t246)--(t247);

\draw[color=violet!60!black,seta] (t246)--(175,-70)|-(t248);
\draw[color=violet!60!black,seta] (t110a)--(102,-96.5)--(173,-96.5)|-
(t248);

\draw[seta,color=violet] (t246)--(172,-70)|-(t249);

\draw[seta,color=blue] (t225)--(t257);
```

```
\draw[seta] (t257)--(t258);

\draw[seta] (t257)-|(175,-94)|-(t261);




% Criação de uma legenda das cores utilizadas

\draw (160,-113)rectangle(186,-137);
\node (caixa0) at (165,-115){\LARGE{Legendas das cores utilizadas:}};
\node[caixa, fill=magenta!50, below=1.5cm of caixa0](caixa1){};
\node[caixa, fill=orange!50, below=1.5cm of caixa1](caixa2){};
\node[caixa, fill=blue!50, below=1.5cm of caixa2](caixa3){};
\node[caixa, fill=red, below=1.5cm of caixa3](caixa6){};
\node[leg,right=5cm of caixa1](leg1){\LARGE{A cor rosa claro coresponde
as definições}};
\node[leg,right=5cm of caixa2](leg2){\LARGE{A cor laranja claro coresponde
aos axiomas/postulados}};
\node[leg,right=5cm of caixa3](leg3){\LARGE{A cor azul claro coresponde
aos teoremas}};
\node[leg,right=5cm of caixa6](leg6){\LARGE{A cor vermelha corresponde as
definições que não fazem parte do livro, mas acrescentadas devido a
necessidade das mesmas em algumas demonstrações.} };
\draw[color=magenta!45, ->,>= stealth,very thick, shorten >=0.05cm]
(caixa1)--(leg1);
\draw[color=orange!45, ->,>= stealth,very thick, shorten >=0.05cm]
(caixa2)--(leg2);
\draw[color=blue!45, ->,>= stealth,very thick, shorten >=0.05cm]
(caixa3)--(leg3);
\draw[color=red, ->,>= stealth,very thick, shorten >=0.05cm] (caixa6)--
```

```
(leg6);

\node[obs](caixa4) at (174.3,-133){\LARGE{Mapa Conceitual do livro
Fundamentos de Matematica Elementar: Geometria Plana 2005. Osvaldo Dolce e
José Nicolau Pompeo.

Osvaldo de Oliveira Vieira

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: Prof. Dr. André Krindges.}};

\end{tikzpicture}

\end{landscape}

\end{document}
```

Ao seguirmos esses procedimentos podemos recriar o ambiente de programação e evoluir o mapa conceitual da geometria plana ou ainda recriar outro mapa para outra área do conhecimento.

Considerações finais

No decorrer de nosso dia a dia em sala de aula sempre buscamos maneiras que facilitem para que os alunos compreendam os conteúdos, assim necessitamos e buscamos novas ideias, materiais e produtos que possam nos auxiliar nesse processo de ensino e, foi com perspectiva, que desenvolvemos essa dissertação. Nela apresentamos uma diretriz para construção de um mapa conceitual através do uso do LaTeX, que traz uma linguagem completa dos comandos de programação e um esclarecimento dos pacotes e bibliotecas utilizados.

Desta feita, ao replicar os comandos descritos, os professores terão em mãos o produto final, o mapa conceitual que, nesse caso, é sobre Geometria Plana, porém a ideia de programação pode ser replicada para outros conteúdos e em diversas áreas, o que possibilita que este trabalho seja uma boa alternativa para explorar novos recursos de ensino, não somente de Matemática, mas em outras áreas de conhecimento e, dessa forma, tornar as aulas mais atraentes e estimular o processo de ensino e aprendizagem.

Assim, apresentamos ao leitor as diretrizes do processo de construção de um mapa conceitual tomando como base a geometria euclidiana plana e o programa LaTeX.

Salientamos que para a aquisição do produto em questão, representado em anexo, faz se necessário copilar o documento de acordo com a descrição em 3.2 no programa LaTeX. Assim, orientamos aos leitores que desejam replicar esse trabalho em sala que se apropriem principalmente da linguagem de programação e, posteriormente, do produto, do mapa conceitual em si, pois isso facilitará uma melhor fixação dos conceitos, além de possibilitar melhorias ou readaptações para a realidade.

Ressaltamos que o produto ainda possui algumas limitações, pois o mapa conceitual é estático, assim cabe ao leitor ficar atento às direções das setas, isto é, observar atentamente os pontos de saída e chegada das mesmas e ter em mente que ali só estão os axiomas, as definições e os teoremas que dão sustentabilidade às demonstrações de outros teoremas, porém não diz quando usá-los. Assim, cabe ao leitor utilizar o conhecimento prévio das demonstrações dos teoremas para compreendê-los. Recomendamos que os professores desenvolvam atividades lúdicas com os alunos com o objetivo de descobrir, através dos caminhos elencados pelas setas, o que é necessário para a demonstração de um teorema em específico.

Na execução desse trabalho percebemos que durante a busca pela organização das ideias para a construção das demonstrações dos teoremas, foi possível aprimorar entendimento dos caminhos percorridos para conseguir realizar as demonstrações e ainda visualizar a existência de uma sequência lógica em que a Geometria Plana foi organizada. Desta feita, o presente estudo nos permitiu a visualização dos melhores caminhos que possibilitam um excelente entendimento por parte do leitor, ao ler uma demonstração de Geometria. Diante disso, foi possível perceber que a construção de produtos educacionais facilita aos alunos a distinguirem os conteúdos de uma maneira diferente, isso porque durante a criação do mapa conceitual é possível aprofundar nos conteúdos acadêmicos revisando-os e relembrando passagens e formas de abordagem até então esquecidas através dos anos de rotinas de sala de aula.

Por fim, salientamos que diante de diversos recursos tecnológicos que estão presentes no cotidiano acreditamos que o leitor possa melhorar este trabalho construindo novas versões para criar outros mapas e não se limitando apenas para uma aula de um professor em particular, mas como material de suporte como painel ou mesmo como decoração de uma sala de aula. Deixamos como desafio a criação de um programa que ao clicar no teorema mostre apenas as setas que o interligam e damos como sugestão compilá-lo em HTML para seu alcance ser ainda mais plural.

Referências Bibliográficas

Barbosa, P. M. (2003). O estudo da geometria. *IBC: Rio de Janeiro.*

Bardini, L. C. et al. (2015). Geometria no 5º ano: uma análise dos livros didáticos.

Bezos, J. (2019). Babel: Original author johannes l. braams current maintainer.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. Ed. Edgard Blücher; Edusp, São Paulo.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., e Schliemann, A. D. (1988). *Na vida dez, na escola zero*. cortez São Paulo.

Dolce, O. e Pompeo, J. N. (2005). *Fundamentos de matemática elementar: Geometria plana*, volume 9. Atual.

Eves, H. W. (1997). *Introdução à história da matemática*. Unicamp.

Jeffrey, A. e Mittelbach, F. (2018). inputenc. sty, agosto 2018.

Lorenzato, S. (2008). Para aprender matemática. rev. *Campinas, SP: Autores Associados.*

Marriott, R. d. C. V. e Torres, P. L. (2003). Mapas conceituais uma ferramenta para a construção de uma cartografia do conhecimento. *TORRES, Patrícia.*

Moreira, M. A. (2006). Mapas conceituais e diagramas v. *Porto Alegre: Ed. do Autor.*

Moreira, M. A. (2012). Mapas conceituais e aprendizagem significativa1 (concept maps and meaningful learning). *Aprendizagem significativa, organizadores prévios, mapas conceituais, digramas V e Unidades de ensino potencialmente significativas.*

Pinto, N. B. (2005). Marcas históricas da matemática moderna no brasil.

Rahtz, S., Schoepf, R., Schrod, J., e Greenwade, G. (1992). https://www.ctan.org/pkg/pgf. :Acesso 23 de fevereiro de 2019 Ã¡s 15:25.

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Zahar.

Souza, N. A. d., Boruchovitch, E., et al. (2010). Mapa conceitual: seu potencial como instrumento avaliativo. *Pro-Posições.*

Tantau, T. (2019). The tikz and pgf packages. manual for version 3.1. 1a. *Computer software manual]. Retrieved from https://www. ctan. org/pkg/pgf*, página 1282.

Tenório, R. C. (2016). Um estudo crítico do conteúdo de geometria nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental.

Umeki, H. (2018). The geometry package. *URL http://www. ctan. org/tex-archive/help/Catalogue/entries/geometry. html. Probablement installé dans votre système sous le nom manual. pdf dans un sous-répertoire geometry.*

Apêndice: Material adicional

.

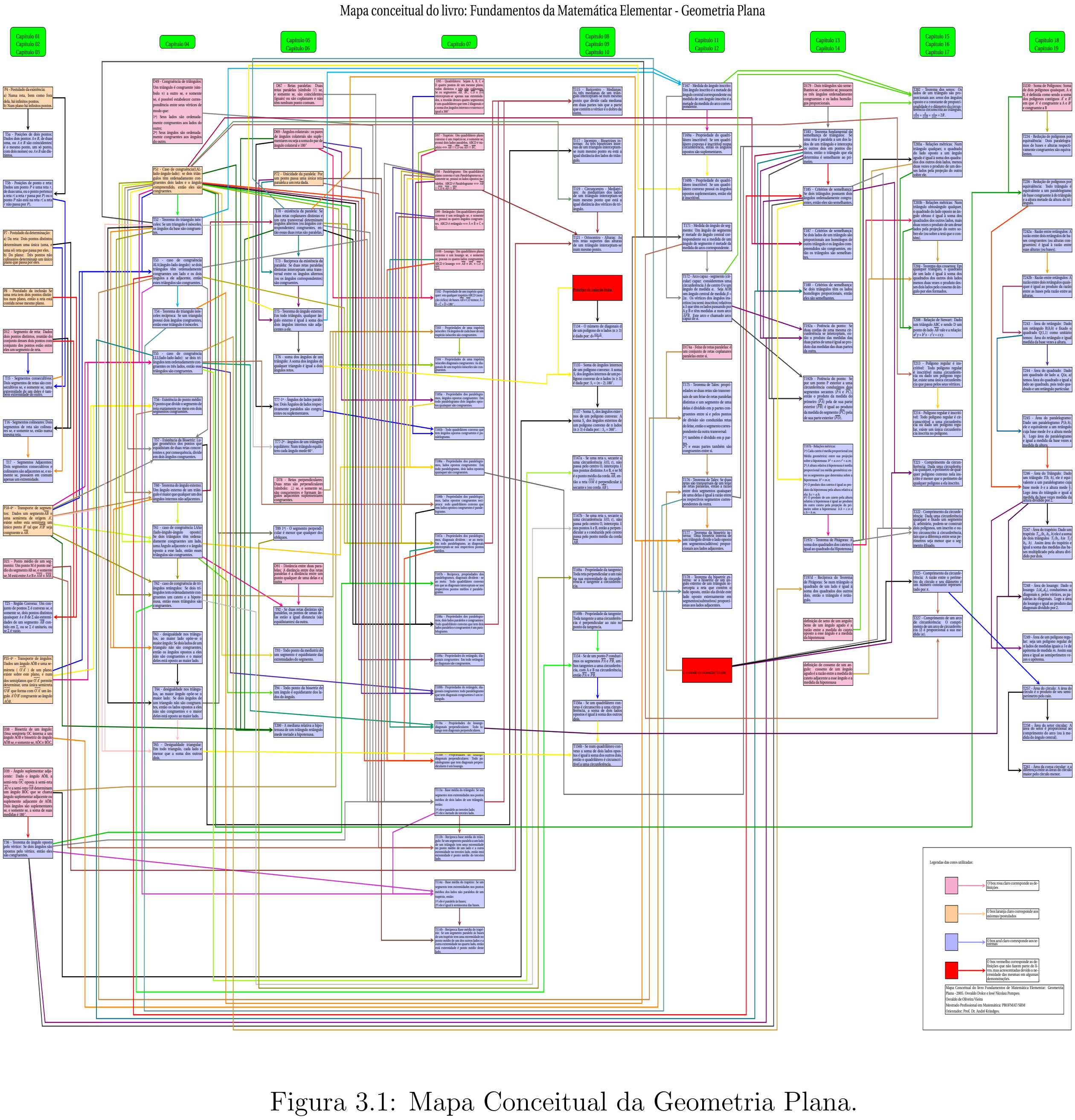

Figura 3.1: Mapa Conceitual da Geometria Plana.

Anexos

.

Mini currículo do autor

<u>OSVALDO DOLCE</u>

Natural de **Corumbataí-SP**, onde se formou no *Curso Primário*,(Ensino Fundamental 1ª à 4ª.séries). Em **Rio Claro-SP**, concluiu o *Curso Ginasial* (Ensino Fundamental 5ª. à 8ª. séries).

Cursou em **Araçatuba-SP**, duas escolas, o *Curso Científico* (Ensino Médio) no período da manhã e o *Curso Normal* (Ensino Médio, Magistério) no período da noite. No primeiro obteve conhecimento para o ingresso na **Escola Politécnica da USP** e no segundo se formou **Professor Primário** (Professor do Ensino Fundamental 1ª. à 4ª. séries).

Com os conhecimentos da **Politécnica** e o título **Normalista**, ingressou, por concurso de provas e títulos, no *magistério secundário* (Ensino Médio) e se tornou **Professor Efetivo de Matemática na Rede Pública do Estado de São Paulo** onde lecionou por 12 anos.

Enquanto cursava a **Escola Politécnica**, onde se formou **Engenheiro Civil**, transformou-se em **Professor de Matemática**, especialmente de **Geometria** nos Cursos Preparatórios para **Vestibulares** do Grêmio Politécnico, do Curso Universitário e do **Curso Anglo-Latino** (Anglo-Vestibulares).

Após intensa e exaustiva atividade em sala de aula, por extensão, se habilitou a escrever **livros didáticos de Matemática** para o Ensino Fundamental, Ensino Médio e Cursos Básicos de Faculdades.

E deu certo!!!!

Figura 3.2: Mini currículo do autor Osvaldo Dolce.

Resumo de histórico

Em atenção ao seu esforço vou resumir como me tornei autor de livros didáticos de Matemática, especificamente de Geometria Elementar.
Não vou entrar na seara do conteúdo e sua distribuição. Ultimamente isto tem obedecido a regras e parâmetros geralmente oficiais e, ou a Editora, ou o Mercado dificilmente aceitam inovações. Não vou criticar pontualmente esses programas. Posso lhe dizer que quando essa interferência era menor fomos os primeiros a colocar na 5ª e 6ª séries um pouco do conteúdo de Geometria, que até então se concentrava todo ou quase todo na 7ª e 8ª séries.

Transformei-me em autor graças às oportunidades de mercado e à extensa e incansável repetição de conteúdos, à exaustão, anotando dúvidas, sugestões e indicações de alunos, o que me levou a desenvolver uma didática especial no assunto, didática esta que pode ser colocada nos primeiros livros e que se foram universalizando com as criticas e sugestões dos usuários das obras. Fui professor de três cursos que preparavam alunos para os vestibulares de Engenharia: Anglo (62-79), Universitário (64) e do Grêmio Politécnico(60-63). Estudei muito conteúdo em livros italianos e franceses antigos. Depois, na década de 70, quando a influência americana do norte se estabeleceu e as dissertações foram substituídas pelos testes objetivos (não é a toa que surgiu em 64 ou 65 um curso com esse nome...) andei estudando alguns livros americanos, ingleses e russos. Era muito exigido pelos meus alunos em conteúdo e raciocínio. Eu os preparava para exames como IME, ITA, EPUSP, etc. Deste modo me tornei radical: se o professor não souber um assunto, não dá para ele ensiná-lo. A melhor maneira de se aprender Geometria é preparar muito bem a aula, colocar na classe, ser humilde em relação às dúvidas, voltar a estudar para melhorar na repetição. Pasme !, no ano de 64 eu repetia a mesma aula 22 vezes! Paralelamente lecionava na rede pública estadual nas série de 5ª à 8ª onde fazia minhas interessantes experiências. Trabalhei na rede pública de 61 a 72.

Acho que já escrevi demais.