Antônio Carlos de Queiroz Silveira

A História da Matemática como Elemento Motivador no Ensino de Matemática

Mossoró-RN, Brasil

06/07/2013

Antônio Carlos de Queiroz Silveira

A História da Matemática como Elemento Motivador no Ensino de Matemática

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido-UFERSA, Campus Mossoró, para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Elmer Rolando Llanos Villarreal

Co-orientador:
Antonio Ronaldo Gomes Garcia

Mossoró-RN, Brasil

06/07/2013

Dissertação de Projeto Final de Mestrado sob o título *"A História da Matemática como Elemento Motivador no Ensino de Matemática", defendida por Antônio Carlos de Queiroz Silveira e aprovada em 06/07/2013, em Mossoró, Estado do Rio Grande do Norte, pela banca examinadora constituída pelos professores:*

Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos
Villarreal - UFERSA
Orientador

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes
Garcia - UFERSA
Co-Orientador

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA
Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da
Cunha - UFSJ
Universidade Federal de São João del-Rei

Resumo

A História da Matemática é vista por muitos pesquisadores, escritores e professores de Matemática como uma forma de aproximar alunos às aulas de Matemática. Uma vez que os adolescentes adoram contar ou ouvir boas histórias, imaginar seus heróis, analisar cada momento, fazer indagações e viajar para um mundo encantado. Tudo isso, encontramos no mundo da Matemática. Acreditamos na História da Matemática e desenvolvemos um trabalho baseado em propostas de aulas que façam uma correlação conteúdo-matemáticos. Com isso evitamos escutar, em sala de aula, o aluno perguntar: De onde veio isso? Para que serve isso? Quem criou essa Matemática? Conhecer a história da disciplina que está sendo estudada resolve essa importante questão, além de ser uma forma de ilustrar as aulas e motivar os alunos. O seguinte trabalho disserta sobre a utilização da História da Matemática como elemento motivador no ensino desta disciplina, pois sua utilização favorece a obtenção de resultados mais significativos no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Fazemos um levantamento geral sobre A História da Matemática e possíveis estudos relacionando conteúdos a personagens históricos da Matemática. Apontamos pontos fundamentais em uma aula, através da explicação de um conteúdo de Matemática. Mostrando-os a aplicabilidade ou a necessidade de existência dos conteúdos. Por fim descrevemos sobre um projeto chamado de Matemáticos na cidade de Quixadá, no Ceará.

Palavras Chave: História da Matemática; Ferramenta Didática; Ensino-Aprendizagem; Aluno-Conteúdo-Professor.

Abstract

The history of mathematics is seen by many researchers, writers and Mathematics teachers as a way of bringing students to classes Mathematics. Once teens love to tell or listen to good stories, imagine their heroes, analyze every moment, make inquiries and travel to a enchanted world. All that we find in the world of mathematics. We believe in History of Mathematics and develop a work based on proposed classes forming a correlation-mathematical content. With this we avoid listening in room classroom, students ask: Where did this come from? What is this? Who created this Mathematics? Knowing the history of the discipline being studied solves this important issue, besides being a way to illustrate the lessons and motivate students. The following dissertation work on the use of history of mathematics as an motivator in teaching this subject, because its use promotes the achievement of results most significant in the teaching-learning of mathematical content. we a general survey of the history of mathematics and possible studies linking contents to historical personages of Mathematics. We point out key points in a class, through the explanation of a mathematics content. Showing the applicability or the necessity of the existence of the content. Finally we describe a project on Mathematicians called the city of Quixadá, Ceará.

Keywords: History of Mathematics; Didactic Tool; Teaching and Learning;
Teacher-Student-Content.

Dedicatória

“ Dedico este trabalho a todos aqueles que estiveram ao meu lado, em algum momento da minha vida, de maneira direta ou indireta. Em especial aos meus colegas de turma 2011 do PROFMAT, polo de Mossoró. E de uma forma bem especial, aos meus pais e a minha esposa.”

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo. Aos meus pais, Antônio dos Santos Silveira e Francisca de Queiroz Silveira, que dedicaram suas vidas a minha formação e a de meus irmãos. A minha irmã, Silvanira de Queiroz Silveira, que sempre me deu palavras de incentivos para que eu conseguisse realizar este sonho. E em especial a minha esposa Aline Moreira de Lima Silveira, personagem fundamental na minha história, que sempre me deu força, aguentando minha ansiedade, inquietação e ausência. A todos os professores, da minha educação básica, que de alguma forma contribuíram para minha formação. A todos os professores do curso de Matemática da FECLESC-UECE. De uma forma especial aos professores: Grangeiro e Edisom Eugênio. A todos os colegas e professores da turma PROFMAT - 2011 da UFERSA-RN, que contribuíram bastante para minha continuidade no curso. Destacando os Adrianos, como peças fundamentais. Agradeço ao meu Orientador Elmer Rollando Llanos Villarreal, que contribuiu nesta etapa final e ao meu Co-orientador e Coordenador Antonio Ronaldo Gomes Garcia, pelas suas palavras desafiadoras e seus incentivos. De uma forma geral agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente para minha formação acadêmica e cidadã.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O processo de ensino e aprendizagem de Matemática nas escolas públicas do Brasil vem apresentando resultados inadequados em relação aos objetivos desejados, sendo tal realidade percebida nos resultados de avaliações externas como OBMEP, OBM, PISA, Prova Brasil e IDEB. Além de ser apontada por muitos alunos a pior, entre todas as matérias do currículo normal e por especialistas, a que apresenta os piores índices. Vários aspectos são apontados como os responsáveis por esta realidade. Sendo destacado por LIMA ([12], pág.05)

> (1º) A Matemática, por ser exata, requer atenção, cuidado e ordem. (2º) O conhecimento matemático é cumulativo; cada passo precisa dos anteriores. (3º) Raramente a Matemática ser bem ensinada.

O Ensino de Matemática nas escolas públicas apresenta grande índice de rejeição dos alunos, que não aguentam ficar tanto tempo vendo uma lousa cheia de números e regras. Visto, por eles, sem necessidade e como uma disciplina que só existe para tirarem notas baixas. Apostamos que A História da Matemática é o ponto inicial para mudarmos tal situação. Por favorecer um ensino partindo da origem, mostrando-lhes a construção dos números, fazendo-os perceber que todos podem aprender, deixando-os viver a verdadeira Matemática.

A História da Matemática acreditamos ser uma ferramenta adequada para reduzir, se não acabar, essa falta de atenção, cuidado e ordem dos alunos. Mostrando-lhes a necessidade de compreender bem um determinado conteúdo para servir de base para outros. Como cita Grimberg em CARVALHO ([4], pág.214)

> A História da Matemática permite ao aluno entender que as noções ensinadas foram concebidas ao longo de um processo lento e que, para entendê-las, é preciso também vários esforços da sua parte.

D'AMBROSIO diz: ([8], pág.30),

> conhecer, historicamente, pontos altos da Matemática de ontem poderá, na melhor das hipóteses,e de fato faz isso, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da Matemática de hoje.

Este trabalho tem por objetivo mostrar que a utilização da História da Matemática favorece a obtenção de resultados mais significativos no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Matemática e, por conseguinte, contribuir com a construção de um material de apoio pedagógico a professores. Para tal fim, citamos pontos que acreditamos ser de grande importância em uma aula de Matemática, apresentamos ilustrações de alunos, em momentos de construção de sua aprendizagem e descrevemos um projeto baseado na utilização da História da Matemática como elemento motivador no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Desenvolvido na Escola Estadual de Educação Profissional Maria Calvancante Costa, em Quixadá-CE. Com foco no uso da História da Matemática como um elemento motivador ao estudo dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio e destinado a alunos e professores do ensino médio das escolas públicas. Estruturado, basicamente, em três capítulos e construído de acordo com pesquisas bibliográficas e vivências do autor. Com base nos livros História da Matemática de Carl B. Boyer; A Rainha das Ciências: Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática de Gilberto G. Garbi e Coleção Elementos da Matemática de Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro.

No Capítulo 1, damos uma visão geral de professores, alunos e especialistas sobre o ensino de Matemática nas escolas públicas e sobre a utilização da História da Matemática como uma forma de melhorarmos a realidade da Matemática nas escolas. Finalizamos-los com uma Secção 1.2, baseada na nossa experiência, onde apresentamos possíveis relações entre conteúdos de Matemática e matemáticos relacionado ao conteúdo que será trabalhado em determinada aula.

No Capítulo 2, que acreditamos ser o início da construção de um material de apoio, citamos as etapas que cremos não poder faltar em uma aula de Matemática, a partir de uma aula sobre Conjuntos e sugerimos dois momentos para a utilização da História da Matemática. Finalizamos o Capítulo com a Secção 2.3 apresentando uma etapa para trabalhar em uma aula de Matemática que completa as citadas na Secção 2.1.

Já no Capítulo 3, trazemos a descrição de um projeto desenvolvido em Quixadá-CE na Escola Estadual de Educação Profissional Maria Cavalcante Costa (EEEPMCC), junto com o professor Francisco Rutemberg, sobre a utilização da História da Matemática. Chamado de "Matemáticos: Personagens e Contribuições" em homenagem ao dia nacional da Matemática e apresentado no Ciclo de Formações do 1º Aprender no dia 16 de Agosto de 2012, na cidade de Quixadá-CE, organizado pela Coordenadoria Regional de Educação do Estado do Ceará (CREDE 12), como uma proposta inovadora para o ensino de Matemática.

Finalmente, no Capítulo 4, fazemos uma análise geral sobre o trabalho, motivo da escolha do tema, dificuldades, resultados esperados, projetando possíveis desdobramentos do trabalho e confiantes que é possível fazer diferente de nossos “mestres” e precisamos fazer. Pois não podemos ficar vendo nossos alunos com medo da Matemática, pedindo para a aula terminar, preocupados apenas com uma nota que na maioria das vezes não significa aprendizagem e alguns professores, por falta de uma formação adequada ou material de credibilidade, que colaboram para tal situação.

1 A História da Matemática no Ensino Médio

Damos aqui uma visão geral de professores, alunos e pesquisadores sobre o ensino de Matemática nas escolas públicas e a utilização da História da Matemática como uma ferramenta didática. Além de sugerirmos nomes de matemáticos que podem servir como motivação no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Matemática.

1.1 A História da Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem

A dificuldade com o ensino e aprendizagem dos conteúdos de Matemática é notada em todos os níveis escolares. Pois a Matemática é tida por muitos alunos e alguns professores como uma disciplina difícil, que só os "inteligentes" aprendem. Como visto em CEARÁ ([6], pág.7)

> Ao longo de nossa vida escolar, foi-nos incutida a ideia de que a matemática era uma ciência difícil, fundada numa lógica formal e estruturada a partir de uma linguagem científica, com procedimentos universais exatos.

Alunos argumentam a falta de sentido e a inutilidade dos conteúdos e os professores alegam o baixo nível e a falta de interesse por parte dos alunos. Sendo ainda apontado por alguns especialistas o despreparo de muitos professores. Como observa LIMA ([13], pág.156),

> [...] quando o jovem entra na faculdade, não teve uma boa formação na escola, logo não conhece bem a Matemática que vai ensinar [...] No final de tudo, recebe seu diploma sem ter domínio das coisas que vai ensinar a seus alunos, como decimais infinitas, as proposições básicas da Geometria no Espaço, Divisibilidade, Análise Combinatória, etc.

E por falta de conhecimento sobre os conteúdos de Matemática, que vai ensinar, acaba transformando a Matemática em apresentação de fórmulas sem sentidos, isto é, acaba matando a beleza da Matemática e a curiosidade das crianças.

A História da Matemática surge como uma ferramenta capaz de amenizar as principais dificuldades com relação ao ensino dos conteúdos de Matemática, uma vez que pode apresentar o sentido e mostrar a necessidade esperada pelos alunos e incrementando uma formação necessária aos professores, contribuindo para uma visão mais ampla de possíveis dificuldades dos alunos, a partir do conhecimento da origem, da construção e do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos. Segundo BRASIL ([2], pág.86),

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos.
>
> A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático.

também observado por Grimberg em CARVALHO ([4], pág.207),

> a História da Matemática aparece como um elemento chave da educação Matemática, pois ela põe em jogo o conteúdo cultural e a arte de pensar que a Matemática veicula.

É importante salientar que a História da Matemática ajudará o aluno a perceber que a Matemática não é uma ciência isolada dos demais saberes, a reviver descobertas e a aumentar sua compreensão, ao invés de uma simples memorização de definições e demonstrações. Levando-o a correlacionar fatos matemáticos a de outras áreas do conhecimento, como também despertando sua curiosidade para futuras pesquisas.

Contudo, é necessário ter consciência de algumas dificuldades encontradas no que se refere à utilização da História da Matemática, como a falta de orientações sobre em que momento utilizá-la, pois a grande maioria dos livros didáticos não se atenta para tal fato.

Situação citada por Grimberg em CARVALHO ([4], pág.208),

> Atualmente, os manuais trazem poucos documentos. E se os programas fazem uma bela declaração de intenções, não indicam o conteúdo que pode implicar tal introdução no ensino médio.

E, além dos conhecimentos históricos serem bastante extensos, a maioria dos livros didáticos não mostrarem a origem de determinados conteúdos e quando mostram utilizam palavras que os alunos não conhecem, isso acaba impedindo o professor de utilizar a História da Matemática de forma a contribuir significativamente no processo de ensino-aprendizagem da mesma. Sendo que elaborar uma aula a este respeito, exige bastante de todos envolvidos e só se pode realizar através de muitas contribuições, experências, tempo para planejamentos e horários de estudos a alunos e professores. De acordo com Grimberg em CARVALHO ([4], pág.208), "Elaborar uma metodologia a este respeito representa um trabalho longo e só se pode realizar através de experiências".

As experiências e vivências, apontam que a abordagem do ensino da Matemática em sala de aula, com uso de apresentações da História da Matemática pode-se garantir o ensino-aprendizagem de um conteúdo matemático. Pois apresenta aos alunos, o surgimento e o desenvolvimento da disciplina como uma necessidade da humanidade; instiga-os a adquirir mais informações sobre a mesma e propícia uma qualificação aos professores. Influenciando diretamente a relação entre alunos, professores e os conteúdos estudados. Por conseguinte, melhorando significativamente o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

1.2 Conteúdos e Personagens

Ouvir ou contar histórias é sem dúvida bem atraente e desde criança gostamos de ouvir, imaginando cada momento, se colocando no lugar dos personagens, estando atento a cada parte da história, argumentando as ações dos personagens e imaginando o futuro. Como observado por MACHADO ([14], pág.14),

> Os alunos adoram uma história bem contada, uma narrativa fabulosa, um enredo sedutor. Mas em todas as faixas etárias, gostamos de nos encantar, de soltar a imaginação, de nos maravilhar.

Dificilmente se encontra uma pessoa que não goste de uma boa história e a Matemática é repletas de boas histórias com seus heróis ou vilões, personagens que nasceram, viveram, morreram e agora fazem parte de documentos repassados por várias gerações e em muitos dos casos com distorções, que podem acarretar em deficiências no processo de ensino-aprendizagem de determinados conteúdos de Matemática.

É difícil alguém ligado a educação que não conheça ou não tenha ouvido falar do famoso Teorema de Pitágoras para triângulos retângulos, que os alunos se apegam ao fato de que: "O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados de seus catetos". Popularmente apresentado por $a^2 = b^2 + c^2$, onde a, b e c são lados do triângulo. Mas como foi observado isso, por que HIPOTENUSA e CATETOS, que significa essa relação na prática? Perguntas e indagações como estas ou outras podem ser compreendidas com a História da Matemática, uma vez que, crianças e adolescentes, em geral adoram História. Não podendo ser diferente com a História da Matemática como observou GARBBI ([11], pág.$VIII$).

> Desta experência ficou-me uma certeza: a de que os jovens gostam de História da Matemática, empolgam-se com episódios envolvendo seus gênios e têm dificuldades de encontrar publicações locais não muito especializadas sobre o tema.

A Matemática é repleta de conteúdos que muitas vezes se tornam cansativos para os alunos, principalmente quando o professor se torna o dono da verdade. Fato que é possível ser modificado se os alunos viverem um pouco a construção dos conteúdos e os professores aprenderem a "contar história", isto é, viver cada momento de sua aula levando os alunos para uma viagem ao fantástico mundo da Matemática,(Ver Figura 1.1), onde cada conteúdo de Matemática deve ser primeiramente justificado aos alunos, que são o público e o personagem para cada episódio(aula) que vai se iniciar.

Na Figura 1.1 vemos os alunos do 1º ano do curso de Agroindústria da EEEPMCC, em aula de construção dos números, procurando objetos, na escola, que tenham forma de Circunferência, para medir, a partir de unidades de medidas, diversas, construídas por eles, o Comprimento e o Diâmetro das circunferências e verificar o valor da razão entre elas.

Figura 1.1: Razão entre Comprimento e Diâmetro

Para isso propomos a relação direta entre alguns conteúdos e personagens (matemáticos), que consideramos uma forma de motivar e mostrar aos alunos que as fórmulas ou métodos utilizados por eles hoje são resultados de vários anos de estudos.

Começamos com as turmas de 1º anos, onde temos os conteúdos Conjuntos e Sistema de Numeração, para o qual não podem faltar Cantor e seus Infinitos, Dedekind e sua organização dos Números Reais, Boole e sua importantíssima Álgebra dos Conjuntos e Al-Khwarizmi com o sistema numérico e o estudo de equações. O estudo das funções, talvez o ponto central da Matemática, é presença garantida nos 1º anos com a Simbologia Algébrica de Viète e do mestre Euler. Além da Geometria Plana presente na maioria dos livros didáticos, aparece com Arquimedes com o cálculo da área do círculo e do valor aproximado de π, Euclides e seu famoso livro Os Elementos e os famosos Tales de Mileto com a semelhança de triângulos, os ângulos opostos pelo vértice e o Teorema de Tales (Ver Figura 1.2) e Pitágoras, meu herói de adolescência, com as relações métricas em um triângulo retângulo, (Ver Figura 1.3) e a introdução a Teória dos Números, mínimo múltiplo comum (MMC), máximo divisor comum (MDC) e Divisibilidade.

Na Figura 1.2 vemos os alunos do 1º ano do curso de Comércio da EEEPMCC, em aula sobre o Teorema de Tales, comentando sobre retas paralelas e retas transversais, explicando a ideia do Teorema de Tales e o utilizando para determinar o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Figura 1.2: Soma dos Ângulos Internos de Um Triângulo

Na Figura 1.3 temos um aluno do 1º ano do curso de Informática da EEEPMCC, em aula sobre o Teorema de Pitágoras, explicando que o Teorema de Pitágoras significa que: “A Área do Quadrado, projetada pelo maior lado do triângulo, é igual à soma dos quadrados, projetada pelos lados menores do triângulo”.

Figura 1.3: Teorema de Pitágoras

O 2º ano é centrado, na maioria dos livros didáticos, na Geometria Espacial, que é apresentada com Euclides e seus Postulados, em Os Elementos, Cavalieri e o cálculo de áreas e volumes (Ver Figura 1.4) e os famosos Euler e Platão com a relação $V - A + F = 2$. (Ver Figura 1.5) e os Sólidos Geométricos. Outro ponto fundamental é o princípio da contagem, na qual destacamos Fermat, Blaise Pascal e Cardano com destaques na Análise Combinatória e na Probabilidade.

Na Figura 1.4 temos um aluno do 2º ano do curso de Informática da EEEPMCC comentando sobre volume de Poliedros, explicando o Princípio de Cavalieri e o utilizando para mostrar como calcular o volume da Pirâmide.

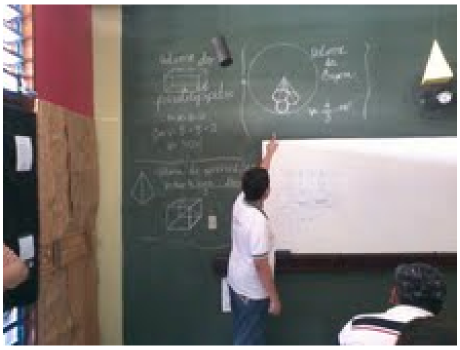

Figura 1.4: Princípio de Cavalieri

Na sala da turma de Comércio, (Ver Figuras 1.5 e 1.6), 2º ano, ornamentada com poliedros e aluno comentando sobre estes: ideia e seus elementos: Arestas, Vértices e Faces e verificando a relação entre os elementos para alguns Poliedros.

Figura 1.5: Relação de Euler

Figura 1.6: Os Poliedros

Já o 3º ano tem como pontos principais a Geometria Analítica, onde se destacam René Descartes e Fermat com estudos mostrando a Álgebra como suporte para a Geometria, “associar equações indeterminadas a linhas geométricas”, que é a essência da Geometria Analítica.

Alunos do 3º ano do curso de Comércio da EEEPMCC explicando a ideia da origem da Geometria Analítica e fazendo representações de expressões algébricas no plano cartesiano (Ver Figura 1.7).

Figura 1.7: Representações Cartesianas

E as Equações Polinomiais, onde se destacam Rafael Bombelli e Euler com os Números Complexos, Gauss com o Teorema Fundamental da Álgebra, que diz: “toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz”. Além da célebre disputa entre Cardano e Nicolò Fontana (Tartaglia) pela autoria da resolução da Equação Polinomial do 3º grau (Ver Figura 1.8), que ficou conhecida como “Fórmula de Cardano”, sendo que foi deduzida, primeiramente, por Tartaglia.

Alunos do 3º ano do curso de Informática da EEEPMCC comentando sobre Polinômios, a Equação Polinomial do 3º grau e fazendo uma encenação da disputa épica entre Cardano e Tartaglia pela autória do método de resolução da Equação Polinômial do 3º grau (Ver Figura 1.8).

Figura 1.8: Equações Polinomiais

A História da Matemática é simplesmente emocionante e impressionante, uma vez que fatos imaginados de uma forma, tomam sentidos opostos, e supostos "heróis" de nossa adolescência, viram simples "aproveitadores", e grandes mentes, tornam-se vítimas do destino, por falta de consideração ou tempo disponível de nossos "heróis". Sendo as histórias apaixonantes e intrigantes, e que podem fazer parte, de forma complementar, do plano anual de trabalho do professor de Matemática de qualquer instituição educativa de ensino, como um elemento motivador ao processo de ensino-aprendizagem.

2 A História da Matemática nos Conteúdos do Ensino Médio

Neste capítulo, que acreditamos ser o início para a construção de um belíssimo material de apoio didático, citamos as etapas que cremos não poder faltar em uma aula de Matemática, e sugerimos dois momentos para a utilização da História da Matemática como elemento motivador ao ensino desta ciência. A fim de obter resultados bem positivos para o ensino-aprendizagem dos seus conteúdos, contribuindo para instigar a curiosidade de nossos alunos e satisfazer perguntas que surgem durante as aulas de Matemática. “De onde veio isso? Para que serve isso? Quem criou essa Matemática?”. Às vezes com tom pejorativo.

2.1 Pontos Fundamentais

Alunos desinteressados, sem perspectivas com o ensino de Matemática, que sussuram “De onde veio isso? Para que serve isso? Quem criou essa Matemática?”. Que veem a Matemática como algo sem necessidade, que só existe para tirarem notas baixas. Essas Situações são características de alunos de escolas pública em aulas de Matemática.

Acreditamos que tal realidade pode ser modificada com um ensino voltado para a explicação de detalhes, apresentação de curiosidades, partindo da origem. Isto é, para cada conteúdo trabalhado/estudado deve ser apresentado: Justificativas, Ideias/Conceitos, Curiosidades/Demonstrações, Noções Primitivas e Definições. Tornando aulas mecânicas em momentos de construção do conhecimento para alunos e professores.

Vamos tomar como exemplo uma aula sobre Conjuntos Numéricos.

Conjuntos

Justificativa:

O estudo de conceitos/ideias relacionados a Conjuntos no ensino médio é bem aceitável pois a Matemática atual é centrada na linguagem dos conjuntos. E o programa de Matemática para o ensino médio é focado nas funções reais e nas formas geométricas. As quais necessitam de pilares levantados das ideias abstratas do mundo dos conjuntos e apresentados de forma concreta ao mundo real. Sendo aconselhável o ensino de Conjuntos para alunos que estão iniciando o ensino médio e buscando fundamentações para estudos posteriores. Além de suas noções, e linguagens serem consideradas bem básicas, podendo este ser um bom motivo para estimular os alunos em um estudo crescente e prazeroso.

Noções Primitivas:

Nas diversas áreas do conhecimento tomamos algo como aceitável sem uma definição formal, de modo que a experiência cotidiana e exemplos ilustrativos sejam suficientes para repassar suas principais características e estas sejam compreendidos. A isto chamamos de noção primitiva ou axiomas, e servem de base para que conceitos posteriores sejam construídos. Por exemplo: não temos definição para "reta" , porém temos para segmento de reta.

Para o estudo relacionado a Conjunto tomamos como algo não definido a própria a ideia de conjunto, que intuitivamente é tido como um agrupamento ou uma coleção de objetos que gozem de certa propriedade, que não aceitamos como definição pelo fato constrangedor de ser preciso imaginar coleções com nenhum objeto ou agrupamento com um só objeto. Popularmente utilizamos letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C, D, etc.) para representar conjuntos, e os objetos que compõem os conjuntos dizemos que são os seus elementos. Sendo possível imaginarmos conjuntos com uma quantidade de elementos determinados (conjuntos finitos), com uma quantidade de elementos indeterminado (conjuntos infinitos) com um só elemento (conjunto unitário) e sem elementos (conjunto vazio). Além de imaginar se um determinado elemento a é elemento de um de conjunto A. Tal situação é chamada de relação de Pertinência e usamos os símbolos $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence), para dizer se o elemento a é um elemento do conjunto A ou a não é um elemento do conjunto A.

Definição 2.1. CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS ($\mathbb{N}$) É o conjunto formado pelos primeiros números percebidos pelo Homem. Vindos de forma natural da necessidade humana de contar (contagem) objetos ou seres do mundo ao seu redor, como animais, frutas ou pessoas.

Sendo utilizados também para representar uma certa ordem (ordinais), ou seja, para colocar objetos em certa ordem (uma fila). $\mathbb{N}$=$\{0,1,2,3,4,5,6...\}$

Propriedade 2.1. Quaisquer que seja a e b números naturais ($\mathbb{N}$), temos:

1. Comutatividade em relação à Adição: $a+b=b+a$
2. Associatividade em relação à Adição: $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. Existência do Elemento Neutro em relação à Adição: $a+0=a$
4. Comutatividade em relação à Multiplicação: $a.b=b.a$
5. Associatividade em relação à Multiplicação: $(a.b).c=a.(b.c)$
6. Existência do Elemento Neutro em relação à Multiplicação: $a.1=a$
7. Distributividade da Multiplicação em relação à Adição: $a.(b+c)=a.b+a.c$

Os alunos poderiam perguntar: Se com os números naturais o homem podia contar e organizar objetos então para que outros números?

Temos que para todos $a,b\in\mathbb{N}$, $a+b\in\mathbb{N}$ e $a.b\in\mathbb{N}$. Isto é a adição e a multiplicação entre dois números naturais é um numero natural. Também podemos dizer que as operações da adição e da multiplicação são fechadas para o conjunto dos números naturais. Porém nem sempre $a-b\in\mathbb{N}$, assim também como nem sempre $\frac{a}{b}\in\mathbb{N}$. Logo, os naturais não eram suficiente para satisfazer as necessidades do homem.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS ($\mathbb{Z}$)

Durante muito tempo a expressão $a-b$ com $b>a$ não era aceita pois nesse caso $a-b\notin\mathbb{N}$. Visão que começou a ser mudada devido a influências vindas, principalmente, dos mercados orientais que já trabalhavam comercial e algebricamente com noções de saldo credor (positivo) e saldo devedor (negativo) e ao novo sistema econômico surgido na Europa, no $século V d.C.$, chamado de Sistema Feudal, que apresentava duas classes em situações bem divergentes. A dos senhores feudais, donos das terras, acumulavam riquezas (positivo) e os servos, pessoas que trabalhavam nas terras em troca de alimentação e proteção, que acumulavam dívidas (negativo). Com isso foi se tornando mais aceitável os números negativos, sendo introduzido mundo afora após o Renascimento, em meados do $século XV$. Dando origem a um conjunto formado por números positivos $\{1,2,3,4,5,...\}$, números negativos $\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,...\}$ e o zero $\{0\}$. Sendo representado por $\mathbb{Z}$ em referência a letra Z da palavra ZAHL (número, em alemão) e organizados da seguinte forma:

$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
Na formação de $\mathbb{Z}$ percebemos o conjunto $\mathbb{Z}^*$, que é o conjunto definido por $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}$ - $\{0\}$, isto é, $\mathbb{Z}$ sem o zero $\{0\}$.

Propriedade 2.2. Quaisquer que seja a e b números inteiros ($\mathbb{Z}$), temos:

1. Comutatividade em relação à Adição: $a+b=b+a$
2. Associatividade em relação à Adição: $(a+b)+c=a+(b+c)$
3. Existência do Elemento Neutro em relação à Adição: $a+0=a$
4. Existência do inverso aditivo (simétrico ou oposto): $a+(-a)=0$
5. Comutatividade em relação à Multiplicação: $a.b=b.a$
6. Associatividade em relação à Multiplicação: $(a.b).c=a.(b.c)$
7. Existência do Elemento Neutro em relação à Multiplicação: $a.1=a$
8. Distributividade da Multiplicação em relação à Adição: $a.(b+c)=a.b+a.c$

Agora temos que para $a,b \in \mathbb{Z}$, $a+b \in \mathbb{Z}$, $a-b \in \mathbb{Z}$ e $a.b \in \mathbb{Z}$. Isto é, as operações de adição, subtração e multiplicação estão bem definidas em $\mathbb{Z}$. Em outras palavras essas operações estão fechadas para os números inteiros. Porém o resultado da divisão (quociente) de dois números inteiros nem sempre é um número inteiro. Daí a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos para um conjuntos fechado para a divisão ou quociente.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS ($\mathbb{Q}$)

Os números naturais eram suficientes para contar objetos ou colocá-los em certa ordem, sendo, por muito tempo, considerados suficientes para o homem daquela época, antes de Cristo. Mas com o decorrer do tempo houve a necessidade de medir grandezas (comprimentos, massas, área, volumes, tempo, etc.). Medir uma grandeza significa compará-la com outra de mesma espécie, denominada unidade de medida (padrão). Então dada uma certa unidade de medida de comprimento por exemplo o Palmo, podemos comparar a altura de uma pessoa com o palmo e encontrar pessoas medindo 7 ou 8 palmos (que são números inteiros). Mas também podemos encontrar pessoas medindo $6,5$ palmos (seis palmos e meio) que representamos por $\frac{13}{2}$ palmos (número não inteiro). Então tais números existiam e eram necessários para fazer comparações entre grandezas.

Com a utilização dos números fracionários podemos dividir a unidade em uma quantidade conveniente de partes de tamanhos iguais, até que algumas dessas partes caibam um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. Digamos por exemplo que temos que dividir 5 bananas para 4 crianças, isto é $\frac{5}{4} = 1,25$ banana para cada criança. Temos que 1 banana foi dividida em 100 partes e cada criança recebeu 25 partes de 100, então podemos dizer que cada criança recebeu 1 banana $+ \ 0,25$ de banana $= 1,25$ banana.

Os números fracionários positivos foram percebidos e utilizados bem antes dos números negativos, porém só organizados posterior a aceitação dos números inteiros negativos. Tal aceitação deu origem a um novo conjunto numérico, o dos números racionais ($\mathbb{Q}$) como definido abaixo:

Definição 2.2. Os números racionais é constituido pelos números inteiros e os fracionários positivos e negativos, tendo $\mathbb{Q}$, que lembra a letra Q (relativo a quociente) como símbolo representativo e indicativo que todos seus integrantes podem ser escritos na forma fracionária. Isto é:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Propriedade 2.3. Quaisquer que seja a e b números racionais ($\mathbb{Q}$), temos:

1. Comutatividade em relação à Adição: $a+b = b+a$
2. Associatividade em relação à Adição: $(a+b)+c = a+(b+c)$
3. Existência do Elemento Neutro em relação à Adição: $a+0 = a$
4. Existência do inverso aditivo (simétrico ou oposto): $a+(-a) = 0$
5. Comutatividade em relação à Multiplicação: $a.b = b \cdot a$
6. Associatividade em relação à Multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
7. Existência do Elemento Neutro em relação à Multiplicação: $a \cdot 1 = a$
8. Existência do inverso multiplicativo: $a \cdot a^{-1} = 1$ ou $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, para $a \neq 0$
9. Distributividade da Multiplicação em relação à Adição: $a.(b+c) = a.b + a.c$

Agora temos que para $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b}$ + $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b}$ - $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Isto é, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão estão bem definidas em $\mathbb{Q}$. Em outras palavras essas operações estão fechadas para os números racionais. Mas será que esses números são suficientes para suprir as necessidades do homem?

Curiosidades/Demonstrações

Nos problemas a seguir trataremos de perguntas frequentes e curiosidades com relação às operações da Matemática.

Problema 2.1. Qual o valor de $x \cdot 0$?

Demonstração. Como $x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x \cdot (1+0) = x \cdot 1 = x$. Já que $x + x \cdot 0 = x$, temos que $x \cdot 0$ é o elemento neutro da adição, ou seja, $x \cdot 0 = 0$. □

Problema 2.2. Por que menos com menos é mais, isto é, $(-1) \cdot (-1) = 1$?

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $-(-x) = x$.

Temos que $x + (-x) = 0$, isto é, $-x$ é o inverso aditivo (simétrico) de x.
E como $x + (-x) = -x + x$, então x é o inverso aditivo de $(-x)$, logo $x = -(-x)$.

Agora com base na propriedade distributiva da Multiplicação em relação à Adição. Mostraremos que $(-1) \cdot x = -x$.

Com efeito,

$x + (-1) \cdot x = x \cdot 1 + (-1) \cdot x = x \cdot [1 + (-1)] = x \cdot 0 = 0$, logo $(-1) \cdot x$ é o simétrico de x, isto é $(-1) \cdot x = -x$.

Em particular para $x = (-1)$, teremos: $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$. Daí resulta, em geral, que $(-x) \cdot (-y) = xy$.

Pois $(-x) \cdot (-y) = (-1) \cdot x \cdot (-1) \cdot y = (-1) \cdot (-1) \cdot x \cdot y = 1 \cdot xy = xy$.

Como complemento mostraremos que $(-x) \cdot (y) = -(xy)$.

Temos que

$(-1) \cdot x = -x \Rightarrow (-1) \cdot xy = -xy \Rightarrow [(-1) \cdot x] \cdot y = -xy \Rightarrow (-x) \cdot y = -xy$. □

Problema 2.3. O que é π?

Primeiramente é uma letra do alfabeto grego e bastante utilizado em Matemática para representar uma constante. Desde há muito tempo (cerca de 4000 anos) notou que o total de vezes que o diâmetro cabe na circunferência é sempre o mesmo, seja qual for o tamanho da circunferência. Isto é, se uma circunferência tem comprimento C e diâmetro D, enquanto outra tem C' e diâmetro D', então $\frac{C}{D}=\frac{C'}{D'}$. Razão constante que apresenta valor aproximado a 3,141592. Os Babilônios já tinham observados que o valor de π se situa entre $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$, isto é, $\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$. Em frações decimais, temos $3,125 < \pi < 3,142$.

Na proposição abaixo, mostramos que além dos números racionais ($\mathbb{Q}$), existem números que pertencem a um conjunto não vazio denominado números irracionais.

Proposição 2.1. A soma $r+\sqrt{2}$, com $r \in \mathbb{Q}$ são números que não pertencem a ($\mathbb{Q}$).

Demonstração. Como $\sqrt{2}$ é irracional, (Ver pág 32), o caso de $r=0$ é imediato. Vamos analisar para $r \neq 0$.
Suponhamos que seja racional, então existe $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, com $(a,b)=1$.
Teremos $r+\sqrt{2}= \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - r \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a-br}{b} \Rightarrow 2 = \left(\frac{a-br}{b}\right)^2 \Rightarrow 2b^2 = (a-br)^2$, temos que $(a-br)^2$ é par, logo $(a-br)$ é par. Fazendo $(a-br)=2k$, com $k \in \mathbb{Z}$, Teremos: $2b^2 = (2k)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{(2k)^2}{2}$, com isso temos que b^2 é par, logo b é par e a também é. Pois $(a-br)$ é par. Uma contradição. Pois por suposição a e b são primos entre si. Logo $r+\sqrt{2}$ é irracional para todo $r \in \mathbb{Q}$. $\square$

2.2 Quando Usar?

Apesar das várias indicações, em documentos oficiais, para se utilizar a História da Matemática como elemento motivador no ensino de Matemática. Não indicam o momento que podem ser feita tal aplicação, deixando a cargo do professor, de acordo com sua experiência, fazer testes ou adaptações de outros trabalhos. Como observa Grimberg em CARVALHO ([4], pág.208),

> Atualmente, os manuais trazem poucos documentos. E se os programas fazem uma bela declaração de intenções, não indicam o conteúdo que pode implicar tal introdução no ensino médio.

Apresentamos modelo que aparentemente é idêntico aos já utilizados com a introdução da História da Matemática (vida e contribuições de matemáticos), que por experiências própria ou de outros professores formulamos dois momentos para tal utilização.

Um momento sugerido é como forma de introdução ao conteúdo que será estudado, com a indicação, do professor, de matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento dos conteúdos citados ou que serão citados. Orientando pesquisas e posteriormente apresentações, individual ou em grupo, dos tópicos pesquisados que serviram de conhecimentos básico para um aprofundamento posterior.

Suponhamos que o conteúdo trabalhado seja o **Teorema de Tales**, então o professor poderá indicar pesquisas sobre a vida de **Tales de Mileto** e também de **Eudoxio de Cnidos**, envolvendo retas, razão e proporção. Não sendo descartados uma pesquisa ou comentários de tópicos que levem os alunos a fazer parte da construção da Matemática, isto é, ser responsável por sua aprendizagem. Por exemplo, no estudo dos **Conjuntos Numéricos** pode ser feita uma pesquisa sobre **Georg Cantor** . Orientados para a construção dos números, unidades de medidas e mensurabilidade. levando, os alunos, a perceber números ao seu redor inclusive os Irracionais. (Ver Figura 2.1 e 2.2).

Alunos de 1º ano dos cursos de Agroindústria, Comércio e Informática da EEEPMCC, em aula sobre construção dos números. Primeiramente tiveram informações históricas sobre como medir, a necessidade de uma unidades de medida e dos números. Seguindo para a aula prática de construção de unidade de medidas, localização de objetos que tenham formas geométricas, medições e localização de números Racionias e Irracionais na escola.

Figura 2.1: Unidades de Medidas e Medições

Figura 2.2: Unidades de Medidas e Medições

> Os números irracionais devem ser entendidos como uma necessidade matemática que resolve a relação de medidas entre dois segmentos incomensuráveis, sendo apropriado tomar o caso dos segmentos lado e diagonal de um quadrado como ponto de partida. BRASIL ([2], pág.71).

Já a segunda opção, proposta esta que apresentaremos mais detalhada no Capítulo 3, por representar um projeto já desenvolvido, tem a História da Matemática como um momento de apresentar os conteúdos que serão estudados durante o período letivo a cada turma/série. Por exemplo: Digamos 4 turmas de 1º anos, então poderá ser escolhidos os conteúdos: **Conjuntos**, **Teorema de Pitágoras**, **Teorema de Tales** e **Funções** e separados entre as salas, onde cada turma irá pesquisar sobre Matemáticos relacionados a cada conteúdo. Nesse caso **Cantor**, **Pitágoras**, **Tales** e **Viète** poderiam ser os matemáticos indicados. Sendo necessário acompanhamento, da situação real de como estar à pesquisa, e um momento para apresentação dos grupos. Que poderá ser um dia dedicado a Matemática.(Ver Figuras 2.3 e 2.4)

Na Figura 2.3 vemos um aluno apresentando os elementos que compõem um triângulo retângulo, citando relações envolvendo lados, explicando o significado do Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$, e fazendo comentários a respeito da Escola Pitagórica.

Figura 2.3: Relações Métricas em Um Triângulo Retângulo

Na Figura 2.4 temos alunos do 1º ano do curso de Comércio comentando sobre retas paralelas e retas transversais, explicando o Teorema de Tales, sua aplicabilidade e mostrando que a soma dos ângulos internos de um Triângulo é igual a 180º graus.

Figura 2.4: Teorema de Tales

Concluída esta etapa o professor poderá seguir normalmente o plano de conteúdo anual com a certeza que seus alunos terão pelo menos noções iniciais sobre o conteúdo a ser trabalhado. Não deixando de retratar, quando necessário, tópicos focados por eles durante o estudo sobre CONTEÚDOS-MATEMÁTICOS.

2.3 Uma Proposta de Aula

As etapas que citamos na secção 2.1, Justificativa da necessidade de estudar determinado conteúdo, Definições, Ideias/Conceitos, Noções Primitivas, e Curiosidades/Demonstrações. Vamos completar com a introdução da biografia de Matemáticos que contribuíram a um certo conteúdo que será trabalhado. Nesse caso a aula terá as informações necessárias aos alunos e ainda dará condições para indagações.

Sendo o conteúdo já comentado na secção 2.1, Conjuntos, vamos trabalhar com: **George Cantor** e seus Infinitos; **Richard Dedekind** e a Organização dos Números Reais e **George Boole** e sua Álgebra dos Conjuntos.

Precursores e Contribuições/Curiosidades

George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918) nasceu em São Petersburgo, Rússia, em uma família profundamente religiosa, se mudou para Frankfur, na Alemanha, aos 11 anos, onde estudou e passou quase toda a vida. Diplomado em Matemática, Física e Filosofia pela Universidade de Berlim. Depois de realizar pesquisas na Teoria dos Números e nas séries Trigonométricas, voltou suas atenções para um caminho vago e misterioso, com conceitos curiosos, que chamamos INFINITO.

Os Infinitos de Cantor

Desde o tempo de Zenão, de Eleia (cerca de 450 a.C), os matemáticos haviam percebido que a ideia do infinito é bastante sutil e perigosa, já que por meio dela, pode-se facilmente produzir paradoxos de difícil explicação. Talvez esse tenha sido o principal motivo para o interesse de Cantor, que centrou suas atenções nos tamanhos dos conjuntos infinitos.

No início do $século XVII$, Galileu percebeu que é possível fazer uma correspondência entre os números naturais e um dos seus subconjuntos, fato que lhe chamou atenção. Pois como para cada elemento da sequência dos naturais faz-se corresponder com o seu quadrado da seguinte forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\cdots$	$n-1$	n
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	$\cdots$	$(n-1)^2$	n^2

Vemos que cada número da linha superior apresenta um e somente um correspondente na linha inferior e reciprocamente. Porém, todos os números da linha inferior se encontram na linha superior, ou seja como bem observou Galileu, no conjunto infinito dos naturais a parte é igual ao todo. Batendo de frente com Euclides, com relação a conjuntos finitos, que dizia que a parte é sempre menor que o todo. Foi esse caminho que estimulou, a Cantor, as ideias revolucionárias que lhe ocorreram antes dos 30 anos.

Richard Dedekind (1831-1916) nasceu em Brunswick, na Alemanha, filho de professor de Direito, foi admitido, em 1850, na Universidade de Götting, como estudante de Física e Matemática, e ali foi um dos mais talentosos alunos de Gauss, sob cuja orientação doutorou-se. A maioria dos trabalhos de Dedekind procurou fornecer uma compreensão rigorosa para a natureza dos números reais, uma vez que constatou que lógica da teoria dos números reais, com exceção aos números inteiros e racionais, era frágil se não inexistente. Pois até questões corriqueiras, por exemplo a validade de operações como $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$, jamais haviam sido tratadas de maneira logicamente rigorosa. Assunto que se encontrava praticamente no mesmo estágio deixado pelos gregos na Antiguidade Clássica. Sendo na Grécia que Dedekind encontrou fundamentações para organizar um embasamento lógico para a Teoria dos Números Reais.

A Natureza dos Números Reais

Dedekind percebeu que os gregos faziam relações entre números, incluive irracionais do tipo $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ entre outros, e segmentos de retas de tal maneira que cada número já conhecido fossem relacionado a um e apenas um ponto sobre a reta. Mas como na sua época já eram conhecido outro tipo de irracionais, além dos descobertos na Antiguidade e precisando de uma base para sua análise dos números Dedekind postulou o chamado hoje Axioma de Dedekind-Cantor que diz: “todos os tipos de números reais podem ser postos em correspondência biunívoca com todos os pontos de uma reta”.

Dedekind precisava definir os números irracionais a partir dos racionais se isso fosse possível, toda a Teoria dos Números Reais repousaria apenas sobre os números Naturais, cuja conceituação é intuitiva. Acarretando que os números reais gozariam das operações da Aritmética. Ele alcançou seu objetivo por meio de um conceito que veio a ser chamado de Corte de Dedekind, que passamos a descrever de forma resumida.

Supondo que seja dado um método de separar todos os números racionais em duas classes, A e B, de tal modo que cada elemento a da classe A seja menor que qualquer elemento b da classe B. Qualquer classificação deste tipo é denominada de corte no conjunto dos números racionais. Para um corte existem apenas três possibilidades, sendo que uma e somente uma deve ser válida:

1. Existe um maior elemento a^*em A. Este é, por exemplo, o caso em que A é o conjunto de todos os números racionais ≤ 1 e B de todos os números racionais > 1.

2. Existe um menor elemento b^*em B. Este é, por exemplo, o caso em que A é o conjunto de todos os números racionais < 1 e B de todos os números racionais $\geq$1.

3. Não existe nem um maior elemento em A nem um menor elemento em B. Este é, por exemplo, o caso em que A é o conjunto de todos os números racionais negativos, 0, e todos os números racionais positivos com quadrado menor do que 2 e B de todos os números racionais com quadrado maior do que 2. A e B juntos incluem todos os números racionais, pois não existe qualquer número racional cujo quadrado seja igual a 2.

O caso em que A possui um maior elemento a^* e B um menor elemento b^* é impossível, porque senão o número racional $(a^* + b^*)/2$ que se situa a meio caminho entre a^* e b^*, seria maior do que o maior elemento de A e menor do que o menor elemento de B, e portanto não poderia pertencer a nenhuma das duas classes.

No terceiro caso, em que não há nem um maior número racional em A nem um menor número racional em B, o corte, define ou simplesmente é um número irracional. Com isso Dedekind postulou que os cortes dos tipos 1 e 2 definem números racionais, enquanto os do tipo 3 definem números irracionais.

Exemplo 2.1. A é o conjunto de todos os números racionais negativos, 0, e todos os números racionais positivos com quadrado menor do que 2 e B de todos os números racionais com quadrado maior do que 2. A e B juntos incluem todos os números racionais, pois não existe qualquer número racional cujo quadrado seja igual a 2.

É fácil mostrar que, dado um racional qualquer r_0 em A, cujo quadrado seja menor do que 2, é sempre possível encontrar outro racional $r_1 > r_0$ cujo quadrado seja também menor do que 2, ou seja não existe um racional máximo em A. Por um raciocínio análogo, não existe em B um racional mínimo. Logo tal corte é do tipo 3 e define um irracional, a que chamamos de $\sqrt{2}$.

Se o corte fosse feito sobre o número $\frac{2}{3}$ determinaríamos que tal número devesse ser colocado em uma das duas classes e, assim, ou A teria um elemento máximo ou B um elemento mínimo, e o corte seria dos tipos 1 ou 2 e ficaria definido um número racional.

A partir do trabalho de Dedekind podemos dizer que um Número Real corresponde a um corte feito no Conjunto dos Números Racionais, de acordo com algum critério. E com esta definição ele mostrou sem dificuldades que todas as operações aritméticas com os números reais, sejam eles racionais ou irracionais, processam-se de acordo com as mesmas regras válidas os racionais.

George Boole $(1815-1864)$ nasceu em Lincoln, Inglaterra, filho de um pequeno lojista que mal ganhava para o sustento da família, cedo percebeu que suas melhores chances de livrar-se da pobreza estavam ligadas aos estudos. Autodidata fundou sua própria escola aos 20 anos e tendo que aprender alguma Matemática para ensinar a seus alunos, estudando por si mesmo, notou que era dotado de grande talento para as Ciências Exatas, incluindo a Matemática onde percebeu que as propriedades relacionadas aos números, propriedades da aritmética, podia se expandir aos conjuntos. Boolle mostrou que se pode construir uma Álgebra dos Conjuntos e trabalhar com ela por meio de símbolos e regras analogamente ao que se havia feito até então com os números. Partindo das ideias de Boole podem ser construídos vários tipos de álgebras, chamada de Álgebra de Boole, as quais se mostraram a partir da metade do $século XX$ indispensáveis ao desenvolvimento dos computadores eletrônicos digitais, compostos, essencialmente, de circuitos lógicos em certos dispositivos, a qualquer instante, encontram-se apenas em um ou outro de dois estados possíveis (ligado ou desligado).

Acreditamos ser de grande contribuição, para o processo de ensino e aprendizagem, que os professores comentem sobre a definição, a linguagem e a simbologia relacionada a Álgebra Booleana, além de demonstrações de propriedades e/ou teoremas.

Álgebra Booleana

Na Álgebra de Boole existem apenas três operadores E, OU e NÃO (AND, OR, NOT). Estas três funções são as únicas operações necessárias para efetuar comparações ou as quatro operações aritméticas base

AND

A função AND pode ser definida em linguagem natural como 1 se todas as entradas forem 1 e 0 se apenas uma das entradas for 0.

OR

A função OR também pode ser definida em linguagem natural ela é 0 se todas as entradas forem 0 e 1 se existir uma entrada em 1.

NOT

A função NOT é implementada na conhecida porta inversora. Temos acima algumas das principais portas lógicas existente, não são as únicas mas as outras portas existentes são combinações destas portas básicas, e todos os circuitos digitais podem ser montados somente com estas portas.

3 Vivência do Autor

Sentindo a necessidade de mudança na visão de alguns alunos com relação a Matemática, em janeiro de 2012, junto com o professor Francisco Rutemberg da Silva Rodrigues, durante a semana pedagógica da Escola Estadual de Educação Profissional Maria Cavalcante Costa (EEEPMCC), em Quixadá - Ceará apresentamos uma proposta de uma atividade diferenciada a ser desenvolvida e apresentada no período Fevereiro-Março em homenagem ao dia da Matemática, que devido aos homenageados recebeu o nome de Matemáticos. Sendo desenvolvido e elaborado com o intuito de aproximar os alunos da EEEPMCC a essa disciplina através da análise da vida de grandes personagens da mesma.

O projeto foi desenvolvido da seguinte forma: durante a semana pedagógica, Janeiro de 2012, decidimos que cada turma, da EEEPMCC, faria uma pesquisa sobre a vida de um matemático que estivesse relacionado aos conteúdos de Matemática da turma. Analisamos a matriz curricular de cada série/turma e como na escola são doze turmas, selecionamos doze matemáticos e organizamos um cronograma de construção/desenvolvimento do projeto. Com os seguintes pontos: apresentação da ideia do projeto aos professores da escola; reserva de horários para estudos dos alunos; verificação de professores que poderiam ajudar com a ornamentação das salas ou na orientação de pesquisas, e estimativas para os momentos de apresentação aos professores de Matemática da escola e para a apresentação a comunidade escolar, realizada nas salas de aulas, as quais foram ornamentadas de acordo com a época do matemático estudado.

A ideia do projeto foi apresentada aos alunos como uma forma diferenciada de avaliação, sendo aceita pela grande maioria, e logo em seguida receberam a indicação do matemático a ser estudados, o período de construção, a data de apresentação e os critérios de avaliação no desenvolvimento dos trabalhos. Durante os meses de fevereiro e março de 2012 os alunos se reuniram para definir a atuação de cada integrante da turma e organizar à apresentação, que aconteceu em dois momentos, nos dias 12 e 13 de março, para os professores de Matemática, Carlos e Rutemberg , professores convidados e integrantes do núcleo gestor da EEEPMCC, e no dia 22 de março para toda a comunidade escolar.

Nas secções seguintes, 3.1 e 3.2, apresentamos fotos que contam um pouco sobre dois momentos bem importantes na construção e\ou desenvolvimento de qualquer projeto aplicado em sala de aula. O primeiro é o momento de estudo, construção do projeto, reunião entre os alunos da turma e professores para analisar a real situação do trabalho e o segundo é o momento de apresentação a comunidade escolar.

3.1 Construção/Desenvolvimento do Projeto Matemáticos

Aqui fazemos apresentações de fotos que ilustram um dos momentos mais importante na realização de um projeto, que é o momento de construção/desenvolvimento. Composto por estudos orientados, incentivos e verificação da real situação do trabalho. Durante o período de fevereiro a março cada turma reunia-se, em horários de estudos ou aulas cedidas por professores, para ensaiar o momento de apresentação à comunidade escolar. Sendo em muitos momentos acompanhado de perto por professores de Matemática ou pelo professor diretor de turma.

A turma de 2º ano do curso de Informática ficou com o matemático Cavalieri e em momentos de horários de estudos ou aulas cedidas pelos professores organizavam as equipes, faziam pesquisas, pensavam na forma de apresentação de seus estudos e organizavam momentos de ensaios. Centraram seus estudos na biografia e no Princípio de Cavalieri, e no volume de Poliedros (Ver Figura 3.1).

Figura 3.1: Princípio de Cavalieri

Na Figura 3.2, temos a turma de 3º ano do curso de Enfermagem que ficou com o matemático Paolo Ruffini e durante encontros decidiram focalizar na bibliografia de Ruffini e nas operações com Polinômios. Dentre as operações, dá-se maior ênfase a divisão com Polinômio.

Na Figura 3.3, vemos alunos da turma de 3º ano de Comércio expondo, para professores, como seria feito o estudo relacionado à René Descartes e aos tópicos: Plano Cartesiano e Associação de Equações algébrica a uma curva. Além da apresentação para a comunidade escolar.

Figura 3.2: Biografia de Ruffini

Figura 3.3: René Descartes

A turma do 2º ano de Comércio abordou assuntos relativos aos Poliedros e a biografia do matemático Euler. Reunindo-se durante horários de estudos decidiram focar na relação entre Arestas, Vértices e Faces de um poliedro e na análise de textos relacionados à biografia de Euler. (Ver Figura 3.4.)

Figura 3.4: Biografia de Euler

3.2 Apresentação do Projeto Matemáticos a Comunidade Escolar

No dia 22 de março de 2012, aconteceu a apresentação do projeto Matemáticos a comunidade escolar, durante dois turnos: das 8h20min às 11h30min e das 13h20min às 16h30min, sendo que 6 turmas apresentaram seus trabalhos pela parte da manhã e visitaram as outras salas pela tarde e de forma oposta as outras 6 salas. Os trabalhos foram avaliados por professores e convidados que atribuíram notas de 6,0 a 10,0 para todos os quesitos julgados, sendo obtida uma média geral que representou uma das notas referente ao 1º bimestre.

O projeto veio aproximar alunos de uma matéria que é tida, por alunos e alguns professores, como difícil, complicada, através do conhecimento biográfico dos matemáticos. Esclarecendo ideias matemáticas que estão sendo construídas pelos alunos, tornando a aprendizagem significativa, colocando-os em contato com um processo do qual fazem parte o formular e testar hipóteses, o raciocínio indutivo, a analogia, a intuição e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo. Analisados nos conteúdos-matemáticos:

Ilustração dos 12 Matemáticos utilizados no projeto Matemáticos: Cantor; Pitágoras; Tales; Bhaskara; Gauss; Cavalieri; Euler; Laplace; Ruffini; Cardano; Descartes e Galois, que foram utilizados como forma de motivação ao estudo dos conteúdos de Matemática do ensino médio estão na Figura 3.5.

Figura 3.5: Os 12 Matemáticos

1º ANO DE ENFERMAGEM - Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor Conjuntos e Funções

Alunos fazendo comentários sobre a biografia de Cantor, apresentando detalhes e curiosidade sobre alguns números, explicando um pouco sobre a “construção dos números” e apresentando uma encenação da “descoberta de Cantor sobre conjuntos infinitos” na Figura 3.6.

Figura 3.6: Os Infinitos de Cantor

1º ANO DE INFORMÁTICA - Pitágoras de Samos

Relações métricas em um triângulo retângulo

Alunos transformaram a sala na “Escola Pitagórica”, Figuras 3.7 e 3.8, comentando sobre a biografia de Pitágoras, características da Escola Pitagórica, explicando as relações métricas em um triângulo retângulo, deduzindo o Teorema de Pitágoras, explicando o seu significado e apresentando curiosidade sobre alguns números.

Figura 3.7: Teorema de Pitágoras

Figura 3.8: Escola Pitagórica

1º ANO DE COMÉRCIO - Tales de Mileto

Retas Paralelas e Transversas: Teorema de Tales

Alunos comentando sobre a Cidade de Mileto, a biografia de Tales e explicando a ideia de retas paralelas e retas transversais, o Teorema de Tales e demonstrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180º graus. (Ver Figura 3.9)

Figura 3.9: Teorema de Tales: Retas e Ângulos

1º ANO DE AGROINDÚSTRIA - Bhaskara Acharya

Sistema de Numeração e Equações

A turma do 1º ano de Agroindústria resolveu falar da civilização indiana, ornamentando a sala e os alunos se caracterizando de acordo com o período de Bhaskara, Figura 3.10. Comentaram sobre o sistema de numeração decimal, resolução de equações do 1º grau e a famosa "fórmula de Baskara", na verdade o método de resolução de equações do 2º grau.

Figura 3.10: A Civilização Indiana

2º ANO DE ENFERMAGEM - Johann Carl Friedrich Gauss

Contagem e Probabilidade

Na Figura 3.11, temos a turma de 2º ano do curso de Enfermagem que decidiu apresentar a vida de Gauss e suas contribuições, a partir da transformação da sala de aula em um museu. Sendo destacado, por guias, "estátuas humanas" e narrações que caracterizavam momentos de paixões, estudos e contribuições.

Figura 3.11: O Museu de Gauss

Figura 3.12: Imagem de Gauss

2º ANO DE INFORMÁTICA - Bonaventura Cavalieri

Figuras Espaciais: Áreas e Volumes

Alunos expondo características sobre a vida de Cavalieri, Figura 3.13: Situação familiar, momentos de estudos e seus correspondentes (matemáticos com quem trocava informações).

Figura 3.13: Biografia de Cavalieri

Na Figura 3.14, vemos alunos comentando sobre Poliedros: Arestas, Vértices e Faces, explicando o princípio de Cavalieri, demonstrando a fórmula para calcular o volume da Pirâmide e calculando o volume de alguns dos Poliedros.

Figura 3.14: Princípio de Cavalieri/Volume de Poliedros

2º ANO DE COMÉRCIO - Leonhard Paul Euler

Figuras Espaciais: Relações entre elementos de um Poliedro

Turma caracterizada de acordo com o período de Euler, comentando sobre a sua biografia e bibliografia, Figura 3.15, e aluno Comentando os elementos de um Poliedro e verificando a relação entre Arestas, Vértices e Faces para Poliedros, Figura 3.16.

Figura 3.15: Biografia de Euler

Figura 3.16: Relação de Euler

2º ANO DE AGROINDÚSTRIA - Pierre Simon, Marquis de Laplace

Matrizes , Determinantes e Contagem

Na Figura 3.17, temos alunos do 2º ano do curso de Agroindústria da EEEPMCC falando sobre as áreas de estudos de Laplace, comentando sobre métodos de contagens e explicando a teoria analítica das probabilidades.

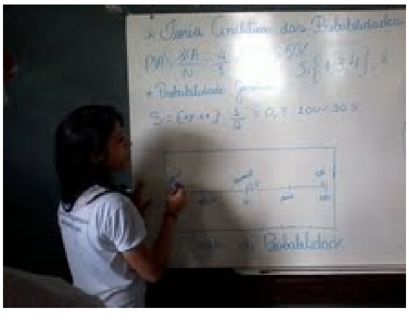

Figura 3.17: Probabilidade

3º ANO DE ENFERMAGEM - Paolo Ruffini

Polinômios

A turma organizou uma biblioteca, Figura 3.18, sobre Paolo Ruffini, apresentada na forma de monólogo. Expondo suas realizações, obras, situações social e cultural e biografia. Além de alunos, Figura 3.19, explicando algoritmos para realizar operações com Polinômios. Com ênfase na divisão.

Figura 3.18: A Biblioteca de Ruffini

Figura 3.19: Divisão de Polinômios

3º ANO DE INFORMÁTICA - Girolamo Cardano

Polinômios

Na Figura 3.20, temos os alunos fazendo uma encenação da disputa épica entre Cardano e Tartaglia pela autoria do método de resolução de uma equação do 3º grau. Contando detalhes dos duelos entre Fiore e Tartaglia; Ferrari e Tartaglia e sobre a morte de Cardano.

Figura 3.20: Cardano X Tartaglia

Aluno representando Cardano, Figura 3.21, falando de suas características, das Equações do 3º grau e explicando como determinar sua solução.

Figura 3.21: Solução da Equação

3º ANO DE COMÉRCIO - René Descartes

Geometria Analítica

Entrada da sala ilustrada com frase característica de René Descartes, Figura 3.22, alunos comentado sobre as áreas de atuação de Descartes, seus envolvimento com outros matemáticos e utilizando a Geometria para representar formas algébrica: “ideia da Geometria Analítica”. (Ver Figura 3.23).

Figura 3.22: Frase de Descartes

Figura 3.23: Representações Cartesianas

3º ANO DE AGROINDÚSTRIA - Évariste Galois

Contagem e Probabilidade

Aluno representava Galois, Figura 3.24 em momentos de estudos, enquanto outros alunos comentavam sobre sua curta vida. Detalhando sobre o amor proibido, que levou o jovem gênio, a um duelo com “armas de fogo”.

Figura 3.24: Estudos de Galois

Na Figura 3.25, temos um aluno fazendo demonstrações sobre tópicos relacionados à Teoria dos Números e a Contagem e citações das diversas áreas de estudos e pesquisas que atraíram Galois.

Figura 3.25: Áreas de Estudos de Galois

Além de contribuir para a formação cognitiva, cultural e pessoal dos alunos, e divulgar importantes personagens da nossa história. O trabalho pôde favorecer a comunidade escolar um momento de grande aprendizagem e contribuir para que os alunos obtivessem um crescimento científico e pessoal; além da compreensão do desenvolvimento da Matemática como peça fundamental na evolução humana; do progresso nos trabalhos realizados em equipes e uma maior participação nas aulas, atividades e trabalhos propostos na disciplina de Matemática.

4 *Considerações Finais e Perspectivas de Outros Trabalhos*

Sendo professor de Matemática e mais do que isso, um curioso dos assuntos relacionados à Educação e a Matemática sabemos que somos frutos, alunos vindos da educação pública, de professores de Matemática que nos fizeram barbaridades, que simplesmente diziam: "Resolvam! É só seguir o exemplo! x é igual a 1!", que nos fizeram pensar que a Matemática era fórmulas sem fundamentos. Contudo, continuamos admiradores da Matemática, mesmo sem ter tido o prazer de durante a nossa infância viajar pelo seu maravilhoso mundo. Ainda assim, procuramos, e temos que fazer diferentes de nossos "Mestres" e convidar nossos alunos a esse mundo de gênios, os verdadeiros heróis da humanidade.

Pensando nessa mudança, necessária, é que utilizamos e propomos a utilização da História da Matemática como elemento motivador para o ensino e aprendizagem dos conteúdos de Matemática, pois com isso construiremos uma relação Aluno-Matemática prazerosa e divertida, acabando com a ideia que as coisas da Matemática não tem explicação e com o fato de pensamos que ela é "SEMPRE EXATA" e o pensamento de vê como complicado, situações bem simples. Como determinar as raízes da equação do 2º grau, calcular o valor numérico de uma expressão com números na forma de fração ordinária ou decimal, entre outras, ao invés de perceber as fórmulas ou métodos de resoluções como o resultado de estudo de várias gerações. Utilizamos somente a etapa final de um processo, a qual representa a mais simples, entretanto temos que acreditar que é possível ensinar nossos alunos a partir da origem, mesmo que pareça a forma mais complicada. Porém com sentido e uma construção lógica.

Somos bem realistas quanto ao trabalho que é a organização e a realização de uma aula desse tipo. Pois é bem complicado devido a vários fatores, dos quais destacamos: a falta de motivação de professores e de horários de estudos à alunos e professores, conflitos que existem em muitas escolas com relação ao cumprimento, na integra, do currículo, a falta de material adequado e a grande carga horária dos professores. Porém por vivência própria, sabemos que é possível uma aula diferente das rotineiras e que faz muita diferença nas ações dos alunos, os quais contribuem com argumentações, sugestões e mais atenção.

Momentos como, das aulas de construção de unidades de medidas e de localização de números, do Projeto Matemáticos mostra-nos que A História da Matemática utilizada como elemento motivador ao ensino de Matemática favorece a obtenção de resultados mais significativos no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Matemática. Sendo, o uso da História da disciplina, um elemento motivador ao estudo de qualquer outra disciplina, acarretando resultados bem positivos. Como aconteceu na EEEPMCC que o Projeto Matemático serviu para o surgimento dos “Químicos”.

Sabemos que este trabalho é apenas um pequeno fragmento do que o título representa, além de grandes personagens da Matemática não citados, que esperamos com ajuda de todos, construir um material com Justificativas, Conceitos, Propriedades, Demonstrações, Curiosidades, Noções Primitivas, Matemáticos e Vivências de professores, alunos ou pesquisadores com relação a todos os conteúdos de Matemática do Ensino Médio. A fim de construir um belo material didático para professores, alunos e curiosos de assuntos ligados aos conteúdos de Matemática do Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. *História da Matemática.*; revista por Uta C. Merzbach; Tradução: Elza F. Gomide.-2.ed.-São Paulo: Blücher,1996.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio,V.2.* -Brasília: Ministério da Educação,2006.

[3] CARVALHO, Dione Lucchesi de. *Metodologia do Ensino da Matemática.-4.ed.* - São Paulo: Cortez,2011.

[4] CARVALHO, Luiz Mariano;FOSSA, John A.;GIRALDO,Victor;MOURA,Carlos A. de. e NORONHA,Helena. *História e Tecnologia no Ensino de Matemática,V.2* -Rio de Janeiro:EDITORA Ciência Moderna LTDA.,2008.

[5] CEARÁ. Secretaria da Educação. Metodologias de Apoio: *Matrizes Curriculares para o Ensino Médio.* - Fortaleza: SEDUC,2009.-(Coleção Escola Aprendente,V.1).

[6] CEARÁ. Secretaria da Educação. Programa de Capacitação Profissional: *Didática Aplicada À Matemática.* CespeUnb,2010.

[7] COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. *O Que é Matemática?:uma abordagem elementar de métodos e conceitos.*Tradução:Adalberto da Silva Brito.-Rio de Janeiro:Editora Ciência Moderna Ltda.,2000.

[8] D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: da teoria à prática.* - Campinas,SP: Papirus,1996.-(Coleção perspectivas em educação matemática).

[9] EVES, Howard. *Introdução À História da Matemática.*; Tradução:Hygino H. Domingues.-Campinas,SP:Editora da UNICAMP,2004.

[10] FLEMMING, Diva Marília. *Tendências em Educação Matemática. -2.ed.*- Palhoça: Unisulvirtual,2005.

[11] GARBBI, Gilberto G. *A Rainha das Ciências: Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática.-5.ed rev. e ampl.*-São Paulo-SP:Editora Livraria da Física, 2010.

[12] LIMA, Elon L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.-5.ed.*-Rio de Janeiro-RJ:Sociedade Brasileira de Matemática,2006.-(Coleção do professor de Matemática).

[13] LIMA, Elon L. *Matemática e Ensino.-3.ed.*-Rio de Janeiro:Sociedade Brasileira de Matemática,2007.-(Coleção do professor de Matemática).

[14] MACHADO, Nilson José. *Matemática e Educação:Alegorias, Tecnologias, Jogo, Poesia.-6.ed.* - São Paulo: Cortez,2011.-(Coleção questões da nossa época; V.43).

[15] MIGUEL, Antonio e MIORM, Maria Ângela. *História na Educação Matemática: propostas e desafios.-1.ed.,2.reimp.*-Belo Horizonte: Autêntica,2008.-(Coleção Tendências em Educação Matemática,10).

[16] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de; PINHEIRO, Márcio Rodrigo da Rocha. *Coleção Elementos da Matemática, 1. -3.ed.* - Fortaleza: Editora Vestseller, 2010.

[17] PITOMBEIRA, João Bosco; ROQUE, Tatiana Marins. *Tópicos de História da Matemática.*- Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática,2012.-(Coleção Profmat).

[18] ROSA NETO, Ernesto. *Didática da Matemática.-9.ed.*-São Paulo,SP:Editora Ática,1996.

[19] SÁNCHEZ HUETE, Juan Carlos e FÉRNANDEZ BRAVO, José A. *O Ensino da Matemática: Fundamentos Teóricos e Bases Psicopedagógicas;* Tradução Ernani Rosa. -Porto Alegre: Artmed,2006.