



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

WESLEY LIBERATO FREIRE

**FI, ϕ , O NÚMERO DE OURO NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA:
UMA PROPOSTA DE AULA**

FORTALEZA-CEARÁ

2019

WESLEY LIBERATO FREIRE

**FI, ϕ , O NÚMERO DE OURO NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA:
UMA PROPOSTA DE AULA**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Ceará, como requisito à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino
Leandro

FORTALEZA – CEARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Freire, Wesley Liberato.

FI, ϕ , O NÚMERO DE OURO NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA: UMA PROPOSTA DE AULA [recurso eletrônico] / Wesley Liberato Freire. - 2019.

1 CD-ROM: il.; 4 $\frac{3}{4}$ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 67 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.

Área de concentração: Geometria.

Orientação: Prof. Ph.D. Claudemir Silvino Leandro.

1. Número de Ouro. 2. Ensino. 3. Geometria Plana. 4. Razão Áurea. I. Título.

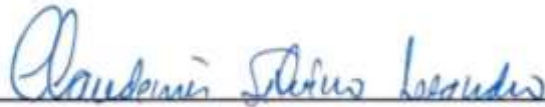
WESLEY LIBERATO FREIRE

FI, ϕ , O NÚMERO DE OURO NA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA:
UMA PROPOSTA DE AULA

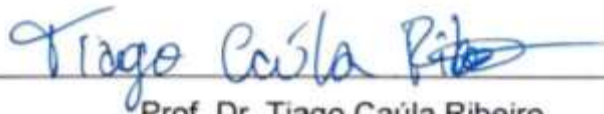
Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Ceará, como requisito à obtenção do título de mestre em Matemática.

Aprovado em:

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Claudemir Silvano Leandro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. Valberto Rômulo Feitosa Pereira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE

Dedicado à Aryanna, que é a
companheira de todas as horas e à Olivia,
que já é amada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, Aquele que é.

Agradeço à minha esposa, que tanto me ensinou e apoiou.

Agradeço à minha mãe, que sempre torceu pela minha vitória, mesmo sem saber exatamente o que eu estava fazendo.

Agradeço aos bons companheiros de UECE, que tanto me ajudaram, suportaram e me fizeram rir, sem me deixar desistir no meio do árduo caminho.

Agradeço às panacas que corrigiram meu trabalho com tanta boa vontade, sem sequer eu pedir.

Ao meu orientador e aos demais professores que me mostraram como estudar pode exigir um grande esforço, mas aprender é uma dádiva incalculável.

Agradeço novamente a Deus, que é o Princípio e o Fim.

“La matematica è l'alfabeto nel quale Dio
ha scritto l'universo”

(Galileo Galilei)

RESUMO

Ensinar matemática é um desafio que exige do professor uma constante busca por estratégias, contextos e ideias práticas para o ensino-aprendizagem. Nas aulas de Geometria Euclidiana Plana, em específico, as habilidades mais necessárias envolvem visualizar, desenhar, além do argumento lógico e da aplicabilidade. O Número de Ouro pode ser, então, inserido nesse contexto como uma ferramenta que traz ao professor a oportunidade de instigar seu estudante a entender como a matemática pode estar no seu cotidiano. O Número de Ouro surge não somente em meios geométricos, mas também na natureza, na música e até mesmo nas artes. Apesar de seu nome ser F_i , ϕ , o Número de Ouro também é conhecido como Razão Áurea, sendo até chamado de Divina Proporção. Este estudo analisa as possibilidades didáticas da inserção do número de ouro nas aulas de Geometria Euclidiana Plana no Ensino Médio. Dessa forma, esta é uma pesquisa qualitativa baseada em artigos e periódicos acadêmicos, além de livros e trabalhos de outros pesquisadores afins. Assim, esse trabalho descreve o quanto a inserção do tema Número de Ouro contribui para a metodologia de ensino de Geometria Euclidiana Plana no Nível Médio.

Palavras-chave: Número de Ouro. Ensino. Geometria Plana. Razão Áurea.

ABSTRACT

Teaching mathematics is a challenge that demands from the teacher a constant search for strategies, contexts and practical ideas for the teaching-learning process. In the classes of Euclidean plane geometry, in particular, the skills more needed involve viewing, drawing beyond the logical argument and applicability. The Golden Number can then be inserted in this context as a tool that gives the teacher the opportunity to stimulate his/her student to understand how mathematics may be in his/her daily life. The Golden Number appears not only in geometric means, but also in nature, music, and even in the arts. In spite of its name be F_i , ϕ , the Golden Number is also known as the Golden Ratio being so called Divine Proportion. This study analyzes the didactic possibilities of insertion of the Golden Number in the classes of Euclidean plane geometry in High School. Thus, this is a qualitative research based on articles and academic journals besides books and works of other researchers alike. Thus, this work describes how the insertion of the topic Golden Number contributes to the teaching methodology of Euclidean plane geometry in high school.

Keywords: Gold Number. Teaching. Plane Geometry. Golden Ratio.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.2.1	Segmento em Extrema e Média Razão.....	21
Figura 2.2.2	O Problema dos Coelhos.....	24
Figura 3.1.1	Triângulo Áureo.....	30
Figura 3.1.2	Triângulos Semelhantes.....	31
Figura 3.1.3	O Retângulo.....	32
Figura 3.1.4	O Retângulo de Ouro.....	33
Figura 3.1.5	O Pentágono Regular.....	34
Figura 3.1.6	O Decágono Regular.....	35
Figura 3.1.7	O Vôo do Falcão.....	36
Figura 3.1.8	Espiral Logarítmica.....	37
Figura 3.1.9	Formação da Espiral.....	38
Figura 3.1.10	O Triângulo e a Espiral.....	38
Figura 3.1.11	O Retângulo e a Espiral.....	38
Figura 3.2.1	Construção do Segmento de Ouro.....	41
Figura 3.2.2	Construção do Triângulo.....	42
Figura 3.2.3	Construção do Retângulo.....	44
Figura 3.2.4	Construção do Pentágono Etapa 1, 2 e 3.....	44
Figura 3.2.5	Construção do Pentágono Etapa 4 e 5.....	45
Figura 3.2.6	Construção do Pentágono Etapa 6 e 7.....	45
Figura 3.4.1	Óptica dos Raios de Luz.....	54
Figura 3.4.2	Árvore Genealógica de um Zangão.....	55
Figura 3.4.3	Filotaxia.....	56
Figura 3.4.4	Abacaxis e suas espirais.....	57
Figura 3.4.5	Flósculos nos girassóis.....	58
Figura 3.4.6	Pétalas de rosas.....	58
Figura 3.4.7	Artes espirais.....	59
Figura 3.4.8	A Última Ceia.....	60
Figura 3.4.9	Poliedros de Platão.....	60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	O NÚMERO DE OURO.....	17
2.1	UMA BREVE HISTÓRIA DO NÚMERO DE OURO.....	18
2.2	A FORMA ALGÉBRICA DO NÚMERO DE OURO.....	21
3	AS RELAÇÕES MATEMÁTICAS DO NÚMERO DE OURO.....	28
3.1	A PROPORÇÃO ÁUREA.....	29
3.1.1	O Triângulo de Ouro.....	29
3.1.2	O Retângulo de Ouro.....	32
3.1.3	O Pentágono Regular.....	34
3.1.3	O Decágono Regular.....	35
3.1.5	A Espiral Logarítmica.....	36
3.2	CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DO NÚMERO DE OURO.....	40
3.2.1	O Segmento De Reta.....	40
3.2.2	O Triângulo.....	42
3.2.3	O Retângulo.....	43
3.2.4	O Pentágono.....	44
4	UMA PROPOSTA DE AULA COM O NÚMERO DE OURO.....	47
4.1	METODOLOGIA.....	48
4.1.1	Razão.....	49
4.1.2	Proporção.....	48
4.1.3	O Segmento de Ouro.....	50
4.1.4	Semelhança de Triângulos.....	51
4.1.5	O Triângulo de Ouro.....	51
4.1.6	O Retângulo de Ouro.....	52
4.1.7	O Pentágono Regular.....	53
4.1.8	A Sequencia de Fibonacci.....	53
4.1.9	O Número de Ouro.....	54
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	62
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	64
	APÊNDICE.....	65

1 INTRODUÇÃO

Ensinar matemática é um desafio. Exige do professor uma habilidade capaz de envolver não apenas o conhecimento teórico dessa disciplina, mas também uma habilidade fundamental, que é contextualizar de forma simples, ou até mesmo curiosa, o que o aluno pode aprender. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (BRASIL, 1999, p. 6)

Infelizmente, poucos professores de matemática costumam adotar métodos práticos ou contextualizados em suas aulas. Seja no ambiente universitário ou no corrido Ensino Médio, a pressa em ministrar todo o conteúdo programado, muitas vezes, impede que estratégias que enriqueçam uma aula possam ser aplicadas. As aulas de Geometria Euclidiana Plana podem se tornar um verdadeiro sonífero quando não elaboradas de uma maneira que motive os estudantes.

Uma estratégia muito comum e que traz contextualização, prática e motivação aos alunos, e também aos professores, é a inserção de temas curiosos e interessantes nas aulas. Um exemplo bastante frequente é quando se aborda o famoso número Pi (π). Esse número é bem conhecido pelos estudantes do Ensino Médio e é igual a 3,1415926535... com infinitos números depois da vírgula e que não repetem um padrão, pois se trata de um número irracional, ou seja, não pode ser escrito na forma de uma razão entre dois números inteiros.

O que poucos estudantes sabem é que esse número é tão especial e onipresente que surpreende-nos ao ser revelado como uma simples razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro. Medir o comprimento e o diâmetro de um objeto circular, como um disco ou um bambolê, por exemplo, pode tornar a aula bem mais dinâmica e atrativa ao invés de ser um

ordinário momento para fazer repetitivos exercícios de divisão. Além disso, nesse contexto, existe a possibilidade de mostrar a matemática de forma prática no cotidiano do aluno.

Outro número, não tão famoso quanto o Pi, mas tão fantástico quanto ele, é o Fi (ϕ). Esse número irracional conhecido como O Número de Ouro é aproximadamente 1,6180339887... que é o valor da proporção de uma linha cortada, nas palavras de Euclides “razão extrema e média” (LIVIO, 2011, p.13).

Esse número tão extraordinário nos permite, por exemplo, comparar um quadro de Dalí, uma concha espiral de um molusco, as pétalas de uma rosa e até o padrão de procriação de coelhos! Sobre esse fascinante número, Livio (2011, p. 13) ressalta:

É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Seção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de “Proporção Divina”.

De acordo com as nomenclaturas citadas anteriormente, percebemos que o Número de Ouro surgiu na antiguidade como uma proporção geométrica e que se tornou tão admirável que recebeu diversos títulos, elevando-o até a uma categoria divina.

Esse número também foi tema de pesquisas de estudantes, como Santos (2013), que apresentou o número em sua dissertação intitulada “Explorando a Matemática do Número ϕ , o Número de Ouro”, dando um especial enfoque em defini-lo não apenas como um número irracional, mas também como um inteiro quadrático do anel $\mathcal{O}(5)$.

Semelhantemente, Azevedo (2013), em sua dissertação “O Número de Ouro e Construções Geométricas”, estudou esse número com o intuito de mostrar as construções geométricas que exploram a razão áurea nas figuras planas.

Por fim, Carvalho (2013) objetivou, em sua dissertação intitulada “Como trazer o número áureo pra dentro da sala de aula”, não só a definição desse número e sua presença na geometria, mas também sua história e origem. Em comum, além de explorar o número Fi como objeto principal, os estudos anteriores têm o foco de

inserir o tema como estratégia para o professor aproximar a matemática ao cotidiano de seus estudantes.

Desta forma, este trabalho tem como objeto central de estudo esse fascinante número que nitidamente traz curiosidade às aulas de Matemática devido à forte influência da geometria, das artes, da história e até da biologia, permitindo uma fácil contextualização que, como já vimos, é de substancial importância para o processo de ensino e aprendizagem. Mediante esse objeto, temos como pergunta diretriz: em que medida a inserção da temática Número de Ouro contribui para a metodologia de ensino de Geometria Euclidiana Plana no Ensino Médio?

O mundo tem se tornado uma sociedade da informação global, portanto, a educação também vai se integrando com essa crescente globalização, desenvolvendo as competências comunicativas, a resolução de problemas, as tomadas de decisões, o trabalho cooperativo, além de aperfeiçoar saberes e princípios. No Brasil, a Educação Básica termina com o denominado Ensino Médio.

Um dos objetivos do Ensino Médio é preparar o estudante para se integrar a essa nova sociedade, adaptando o conhecimento de forma prática e contextualizada. Mesmo com a recente reforma do Ensino Médio moldada pelo governo Temer em 2018, os PCN+, (BRASIL, 2018, p. 8) um conjunto de orientações extras aos PCN, declaram que ela (a reforma) buscou responder a uma autêntica carência de renovação da educação brasileira:

[...] tanto para impulsionar uma democratização social e cultural mais efetiva pela ampliação da parcela da juventude brasileira que completa a educação básica, como para responder a desafios impostos por processos globais, que têm excluído da vida econômica os trabalhadores não-qualificados, por conta da formação exigida de todos os partícipes do sistema de produção e de serviços.

É visível a intenção dos PCN em mostrar que a educação é mais bem sucedida quando aliada de um conteúdo estruturado, prático, contextual, atual e que motive o estudante com o objetivo de desenvolver as capacidades futuramente “exigidas em sua vida social e profissional”.

Dessa forma, em busca de introduzir um tema que gera entusiasmo e motivação nas aulas de Geometria Euclidiana Plana, o tema Número de Ouro pode se mostrar fascinante e ao mesmo tempo desafiador no sentido de buscar entender como a matemática está inserida em nosso cotidiano. Pelo que vimos anteriormente,

os PCN destacam esse esforço de quem ministra a aula em prol da aprendizagem de seu estudante.

O tema aqui proposto, que está pautado no estudo do Número de Ouro na Geometria Plana, foi iniciado durante o curso de graduação, quando o pesquisador realizou um trabalho de conclusão de curso sobre esse objeto. Entretanto, numa perspectiva futura, o intuito desse assunto seria elaborar um material didático que pudesse dirigir o professor de matemática que desejasse adotar o Número de Ouro em uma de suas aulas de Geometria Plana. Daí a escolha desse tema.

Entendemos que o Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica (LDB/96) e que o processo de ensino-aprendizagem exige metodologias, enfoques, estratégias e procedimentos educacionais. No contexto do ensino de Matemática no Ensino Médio, os PCN (BRASIL, 1999, p. 40) deixam claro que:

[...] pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional.

Como citado, é fundamental o amoldamento do processo de ensino para que os alunos, mesmo com motivações diferentes, desenvolvam condições que os insiram nesse mundo em transição. Esse esforço contribuirá para que sejam aprimoradas as capacidades que serão exigidas deles.

Ainda no contexto da Matemática, um dos grandes desafios dos professores é o ensino de Geometria em sala de aula. Os PCN salientam que o ensino adequado dessa disciplina desenvolve “as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas” (Brasil, 1999, p. 44). Lá também vemos a importância dessas habilidades:

Essas competências são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. De fato, perceber as relações entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos que lhes deram origem, conceber novas formas planas ou espaciais e suas propriedades a partir dessas representações

são essenciais para a leitura do mundo através dos olhos das outras ciências [...].

De fato, a Geometria Euclidiana Plana exige do aprendiz uma atenção a todas essas competências. Além do raciocínio comum à matemática, essa disciplina requer atenção nas relações entre desenhos e construções de modelos matemáticos. Para que de fato as competências citadas anteriormente sejam assimiladas, é imprescindível o uso de estratégias de ensino, como a contextualização do conteúdo, ou até mesmo o uso prático daquilo que se ensina em sala de aula no cotidiano do estudante.

Uma aula dessa disciplina pode ser bastante enriquecida quando, por exemplo, ao apresentarmos a razão entre dois segmentos previamente selecionados, dizemos ao aluno que o número resultante pode aparecer de diversas formas na natureza e até mesmo nas obras de arte. Esse Número, conhecido como o Número de Ouro, é chamado Φ ou Phi (ϕ) e foi definido por Euclides como a razão extrema e média de um segmento. Livio (2011, p. 16) fala que, no início do século XX, o matemático americano Mark Barr nomeou esse número de Φ em homenagem a Fídias, o notável escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C. O motivo da homenagem se deu pelo fato de que alguns historiadores da arte defendiam que Fídias fazia uso constante e minucioso da Razão Áurea em suas esculturas.

O Número de Ouro, Razão Áurea ou Proporção Divina têm fascinado mentes matemáticas como de Pitágoras, Euclides, Leonardo de Pisa, Johannes Kepler desde tempos antigos e até de figuras científicas da atualidade, como Roger Penrose. Além do mais, esse fascínio não se restringe apenas aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido sobre o tema (Livio, 2011 p. 16).

Esse trabalho adotou como metodologia a pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico e se baseou essencialmente em livros, artigos, periódicos e dissertações, bem como estudos acadêmicos realizados na área matemática, de modo que esse material inicialmente pesquisado foi analisado e em seguida selecionado. Segundo Gil (2010, p.50):

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há

pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. Parte dos estudos exploratórios podem ser definidos como pesquisas bibliográficas, assim como certo número de pesquisas desenvolvidas a partir da técnica de análise de conteúdo.

Como a pesquisa envolve essencialmente a temática geométrica, ao apresentarmos as construções das medidas na razão áurea, fizemos uso da ferramenta Geogebra aliada com as demonstrações algébricas formais. Assim, mostraremos matematicamente, de modo comparativo e de tamanho, a sua mais pura essência. Consequente, desenvolvemos esse trabalho em três etapas.

Na primeira etapa, pesquisamos inicialmente artigos que envolvem o tema de modo prático, com o intuito de reunir elementos que pudessem enriquecer a construção do trabalho. A pesquisa se voltou para as publicações dissertativas de universidades que, apesar da temática ser na área de geometria, tragam elementos de caráter teórico e de ensino e aprendizagem de matemática, já que o objetivo é, também, acrescentar uma nova perspectiva no ensino, ao inserir o Número de Ouro nas aulas.

A segunda etapa foi a avaliação de tais obras, analisando quais de fato se encaixam na proposta deste trabalho, observando também a confiabilidade desses materiais, comparando-os entre si e com autores renomados.

Na terceira etapa, selecionamos todo o material avaliado de maneira que o trabalho pudesse ser formatado e iniciamos o processo de estudos necessários para a sua construção. Ao mesmo tempo em que ocorreu essa formatação, a inserção da parte geométrica foi toda feita pelo programa computacional Geogebra, de modo a ilustrar com exatidão as propriedades exigidas nas demonstrações.

2 O NÚMERO DE OURO

"Quando não podemos expressar algo em números, nosso conhecimento é de um tipo escasso e insatisfatório."

(William Thomson)

Os números e a matemática têm a surpreendente inclinação a colaborar para a compreensão de coisas que são, ou pelo menos aparentam ser, muito distantes da ciência. Além das particularidades, fórmulas e regras matemáticas (muitas das quais, às vezes, terminamos esquecendo), existem certos números especiais que são tão presentes no cotidiano que sempre fascinam e surpreendem. Livio (2011, p. 12) fala sobre um desses interessantes números:

[...] o número Pi (π), que é a razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro. O valor de Pi, 3,14159 ... tem fascinado muitas gerações de matemáticos. Embora tenha sido originalmente definido na geometria, o Pi aparece muito frequente e inesperadamente no cálculo de probabilidades.

Entre os estudantes do Ensino Médio, o Pi talvez seja aquele mais conhecido. Por ser facilmente definido e compreendido, ou por simplesmente fazer parte de várias das fórmulas presentes no conteúdo de nível básico, muitos estudantes já ouviram falar dele.

Outro número, apesar de não tão conhecido quanto o Pi, é o Número de Ouro, o Fi, cujo símbolo é a letra grega Phi (ϕ). Ao pensarmos nos seguintes exemplos: "o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro O Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos" (LIVIO, 2011, p.13), apesar de serem exemplos distintos e aparentemente sem nenhuma conexão, todos eles têm em comum o Número de Ouro.

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA DO NÚMERO DE OURO

“[...] conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Seção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de “Proporção Divina”.”

(Mario Livio)

A Proporção Divina. Quando Euclides de Alexandria definiu o que ele chamou de razão extrema e média, ele não tinha em mente tal nomenclatura. Pacioli, o ilustre matemático italiano, acreditava piamente nesse número como uma manifestação do próprio Deus. Bertato (2008, p.18) escreve em seu trabalho:

Pacioli acreditava que a razão áurea era uma manifestação do próprio Deus. Afirma que dentre as semelhanças que encontrou, bastam quatro para justificar esta afirmação:

- 1 - Esta proporção (razão) é uma e nada mais que uma. Segundo toda escola teológica e filosófica, esta unidade é o próprio epíteto de Deus.
- 2 - Correspondência com a Santíssima Trindade. Como in divinis há uma mesma substancia entre três pessoas, isto é, Pai, Filho e Espírito Santo, da mesma forma uma mesma proporção (razão) deste tipo pode sempre ser encontrada entre três termos.
- 3 - Como Deus não pode ser definido e nem compreendido por palavras, também este tipo de proporção não pode ser determinado por número inteligível, nem ser representado por número racional.
- 4 - Assim como Deus não pode mudar, e é tudo em tudo e está em todas as partes, esta proporção também é invariável em toda quantidade.

Comumente, quando falamos em razão ou proporção, nos referimos à “relação comparativa entre partes de coisas com respeito a tamanho ou quantidade, ou quando queremos descrever uma relação harmoniosa entre diferentes partes.” (LIVIO, 2011, p. 13). Matematicamente falando, a razão entre grandezas

comensuráveis, por exemplo entre segmentos de retas, nos leva a um coeficiente de proporcionalidade.

Dessa forma, o Número de Ouro é o número que representa a Razão Áurea, a Proporção Divina. Euclides de Alexandria estabeleceu uma proporção procedente da trivial partição de um segmento de reta, o qual ele denominou de sua *razão extrema e média*. De acordo com Livio (2011, p.14), nas palavras de Euclides: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.”

Quem poderia imaginar que essa divisão de linha aparentemente tão inocente, que Euclides definiu com objetivos puramente geométricos, poderia ter conseqüências em temas que vão do arranjo de folhas em botânica à estrutura de galáxias que contêm bilhões de estrelas, ou da matemática às artes? (Livio, 2011, p. 14)

Certamente esse número é fascinante e é bastante compreensível a visão divina dada a ele. Como veremos posteriormente, o valor aproximado do Número de Ouro “é o número que nunca termina e nunca se repete 1,6180339887 ...”. (LIVIO, 2011, p.14). O matemático grego Hipasos de Metaponto descobriu isso no século V a.C. Ele percebeu que esse número nem era inteiro nem a razão entre dois números inteiros, ou seja, um número racional. Dessa forma, a razão entre as medidas dos segmentos definida por Euclides anteriormente não pode ser escrita como uma fração. Dois segmentos com essa propriedade são denominados incomensuráveis.

Livio (2011, p. 16) diz que o filósofo e historiador Jâmblico descreveu em 300 d.C. a reação a essa descoberta:

Eles diziam que o primeiro [humano] a revelar a natureza da comensurabilidade e da incomensurabilidade para aqueles que não eram dignos de compartilhar a teoria era tão odiado que não só foi banido da associação e do modo de vida [pitagórico], como também teve seu túmulo construído, como se o antigo colega tivesse sido apartado da vida entre o gênero humano.

Quanto a simbologia de Φ , a literatura matemática relacionou inicialmente o número com a letra grega tau (τ), que significa corte. Contudo, no começo do século XX, o matemático americano Mark Barr o nomeou de Φ (ϕ), em homenagem a “Fídias, o grande escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C. As maiores realizações de Fídias foram o “Partenon de Atenas” e o “Zeus” no templo de

Olímpia.” (LIVIO, 2011, p.16). Barr tomou essa decisão baseado em alguns historiadores da arte que asseguravam que “Fídias fazia uso freqüente e metucioso da Razão Áurea nas suas esculturas.” (LIVIO, 2011, p.16).

Diante de toda essa atenção dada ao Número de Ouro, a pergunta a ser feita é: por que toda essa fascinação? O que há de tão divino? “A atratividade do “Número Áureo” origina-se, antes de mais nada, do fato de que ele tem um jeito quase sobrenatural de surgir onde menos se espera.” (LIVIO, 2011, p.18). Pegue por exemplo uma maçã, que é comumente (e erroneamente) relacionada ao fruto proibido na descrição bíblica, e corte-a ao meio em sua circunferência. Suas sementes estão dispostas em um padrão de uma estrela de cinco pontas, um pentagrama (quase) regular. Cada um dos cinco triângulos das pontas e seu centro pentagonal têm a propriedade áurea em suas medidas, como veremos mais adiante.

Pegue agora uma rosa, por exemplo. Na tradição budista, num de seus sermões, Buda não falou uma só palavra, apenas segurava uma flor diante de sua platéia. Agora, observando a rosa quanto a sua aparência e simetria, suas pétalas se sobrepõem às suas antecessoras. Esse padrão obedece uma das propriedades da Razão Áurea.

No reino animal, as conchas espirais dos moluscos, como o náutilo por exemplo, é um dos símbolos hindus relacionados ao criacionismo. Essas conchas também têm inspirado obras arquitetônicas como no Museu Guggenheim de Nova York e seu padrão de crescimento obedece orientações áureas.

Saindo da natureza e observando as artes, por exemplo, na pintura Sacramento da Última Ceia de Salvador Dalí, medidas da pintura (aproximadamente 270 cm x 167 cm) estão na Razão Áurea entre si. Além disso, uma parte de um dodecaedro (sólido regular de 12 faces pentagonais) forma o fundo da imagem, como se encobrisse a tela.

Os exemplos acima relacionados, propositalmente, com o divino nos trazem a certeza que o Número de Ouro é de fato deslumbrante, arrebatador e nos deixa ansiosos por conhecê-lo mais profundamente.

2.2 A FORMA ALGÉBRICA DO NÚMERO DE OURO

“A média áurea é algo absurdo, não é um irracional comum. Se você o inverte (isso é divertido!), você a obtém de novo, reduzida de um. Mas se pela unidade for somado, acredite, isso dá seu quadrado.”

(Paul S. Bruckman)

A primeira definição que vimos dada por Euclides de Alexandria é que, se o segmento está na razão extrema e média, então a linha toda está para o maior segmento, assim como o maior segmento está para o menor. As primeiras formas algébricas do Número de Ouro que iremos apresentar serão determinadas a partir dessa definição.

Figura 2.2.1 – Segmento em extrema e média razão



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 01, se a linha toda é AB e C o divide na razão extrema e média, então, de acordo com a definição dada anteriormente:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

Tomando $AC = x$ e $BC = 1$, temos

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, assim:

$$x^2 = x + 1$$

Essa equação implica que:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Essa equação do segundo grau tem como raízes:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Note que:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots = \phi$$

A raiz é exatamente o Número de Ouro! A outra raiz é

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,6180339887 \dots$$

Note que x_2 é o inverso oposto de ϕ , ou seja, $x_2 = -\frac{1}{\phi}$

Assim, a equação anterior pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi^2 = \phi + 1$$

Observe que $\phi^2 = \phi + 1 = 2,6180339887 \dots$ e que $\frac{1}{\phi} = \phi + 1 = 0,6180339887 \dots$, ou seja, o quadrado de ϕ e seu inverso têm todos os algarismos depois da vírgula exatamente iguais, tornando sua diferença igual a 2.

Demonstração: $\phi^2 - \phi^{-1} = \phi + 1 - (\phi - 1) = 2$

Observe que esse número é irracional, como dito anteriormente. De fato, se ϕ fosse um número racional, ou seja, se pudesse ser escrito como uma razão de dois inteiros, então, para algum Q racional, teríamos:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = Q \Leftrightarrow 1 + \sqrt{5} = 2Q \Leftrightarrow \sqrt{5} = 2Q - 1$$

Como o conjunto dos números racionais é fechado para adição e para multiplicação, então, $2Q - 1$ é um número racional e, portanto, a última igualdade é um absurdo, pois $\sqrt{5}$ é um número irracional.

Demonstração: Se $\sqrt{5}$ for racional poderia ser escrito como uma razão entre dois inteiros, primos entre si, com denominador não nulo. Suponha a e b inteiros, $b \nmid a$ e $b \neq 0$. Se $\sqrt{5} = a/b$ então, $5 = a^2/b^2$. Logo $a^2 = 5b^2$. Como $b \nmid a$ então a^2 é múltiplo de 5 e portanto a é múltiplo de 5. Seja $a = 5k$ para algum k inteiro. Dessa forma, $(5k)^2 = 5b^2$. Daí $b^2 = 5k^2$. Logo b^2 é múltiplo de 5 e portanto b é múltiplo de 5. Chegamos a um absurdo pois a e b são múltiplos de 5 e portanto não primos entre si, contrariando a hipótese inicial. Logo, não existem a e b inteiros que satisfaçam a igualdade $\sqrt{5} = a/b$ portanto $\sqrt{5}$ é um número irracional.

Logo, concluímos que ϕ é irracional.

Uma outra forma de representar o ϕ é por sucessivas raízes. Observe:

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$\phi = \sqrt{1 + \phi}$$

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}$$

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}}$$

Note que substituindo o valor de ϕ sucessivamente gera uma infinidade de raízes internas, assim:

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Uma outra forma de representar o Número de Ouro é através de sucessivas frações. Note que:

$$\phi^2 = \phi + 1$$

Dividindo ambos os membros por ϕ , temos:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}}$$

Substituindo o valor de ϕ sucessivamente, obtemos o seguinte resultado:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}$$

Além da definição dada por Euclides, há outras formas de obtermos o valor de ϕ . Uma forma bastante encantadora e intrigante é observarmos a sequência de Fibonacci, que se tornou bastante conhecida graças ao seguinte problema proposto no capítulo XII do *Liber Abaci* (Livro do Ábaco), escrito por Leonardo Fibonacci: “Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por

todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?”

Figura 2.2.2 – O Problema dos Coelhos



Fonte: Livio, 2011, p.116

Como o padrão de procriação de um casal de coelhos pode ter algum tipo de consequência matemática e, o mais importante, como isso poderia estar relacionado com o Número de Ouro? Bom, a solução do problema anterior é de fácil solução.

Começando por um par, em um mês eles dão à luz um novo par. No segundo mês, o primeiro par dá à luz um novo par e o segundo par se torna adulto. Temos, então, dois pares adultos e um par filhote no segundo mês, num total de três casais. Observe a Figura 2.2.2 e considere os coelhos maiores como os casais adultos e os menores como os casais filhotes. No terceiro mês o dois pares adultos dão à luz dois pares de filhotes e o terceiro par fica adulto, totalizando cinco pares.

Após o quarto mês, três casais adultos geram três pares de filhotes e os dois pares filhotes de tornam adultos. Assim, teremos cinco casais adultos e três casais de filhotes, totalizando oito casais. No quinto mês, teremos cinco pares de filhotes gerados pelos cinco pares adultos mais três pares que ficaram adultos, totalizando treze pares.

Observando esse padrão e contabilizando apenas os pares de casais adultos, teremos uma sequência numérica: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... É fácil ver que a sequência de pares de filhotes seria: 0, 1, 1, 2, 3, 5, ..., ou seja, a mesma sequência

de pares adultos, diferenciando apenas o primeiro mês. O total de pares seria: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., que é a mesma sequência de pares adultos, omitindo o primeiro mês.

A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois termos anteriores, foi chamada, então, de sequência de Fibonacci.

Apesar de se mostrar uma propriedade matemática impressionante, como o problema dos coelhos se relaciona com o ϕ ? Observemos, então, as razões entre os termos da sequência Fibonacci:

$$\begin{aligned} 1/1 &= 1,000000 \\ 2/1 &= 2,000000 \\ 3/2 &= 1,500000 \\ 5/3 &= 1,666666 \\ 8/5 &= 1,600000 \\ 13/8 &= 1,625000 \\ 21/13 &= 1,615385 \\ 34/21 &= 1,619048 \\ 55/34 &= 1,617647 \\ 89/55 &= 1,618182 \\ 144/89 &= 1,617978 \\ 233/144 &= 1,618056 \\ 377/233 &= 1,618026 \\ 610/377 &= 1,618037 \\ 987/610 &= 1,618033 \end{aligned}$$

A última razão é claramente uma aproximação de seis casas decimais de ϕ , o Número de Ouro! Isso pode ser formalizado através da seguinte propriedade:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right) = \phi$$

Considerando F_n o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci, n um número natural, então $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, ... dessa forma:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$$

Usando a fórmula de Binet (falaremos posteriormente sobre essa fórmula) para demonstrar que esse limite é verdadeiro. Por Binet temos:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right]$$

Assim:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n \right]} = \frac{\Phi^{n+1} - (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\Phi^{n+1}}\right)}{\Phi^n - (-1)^n \left(\frac{1}{\Phi^n}\right)} = \frac{\Phi + \left(\frac{1}{\Phi^{2n+1}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\Phi^{2n}}\right)}$$

Dessa forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\Phi + \frac{1}{\Phi^{2n+1}}}{1 - \frac{1}{\Phi^{2n}}} \right) = \Phi$$

Portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_{n+1}}{F_n} \right) = \Phi$$

Tão fantástica quanto essa relação é a propriedade que escreve qualquer número da sequência de Fibonacci. Nas palavras de Livio (2011, p. 128):

Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillippe Marie Binet (1786-1856) redescobriu uma fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo mais prolífico matemático da história, Leonard Euler (1707-1783), e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754). A fórmula permite que se encontre o valor de qualquer número de Fibonacci, F_n , se seu lugar na sequência, n , for conhecido. A fórmula de Binet se apóia inteiramente na Razão Áurea

A fórmula de Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

De fato, tomando $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ como raízes de $x^2 - x - 1 = 0$, elas devem satisfazer as relações $\alpha^2 = \alpha + 1$ e $\beta^2 = \beta + 1$. Multiplicando a primeira dessas relações por α^n , e a segunda por β^n , teremos: $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ e $\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$. Subtraindo a segunda da primeira e dividindo ambas por $\alpha - \beta$, obtemos: $\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$. Fazendo $H_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, então, a equação anterior seria do tipo $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 1$. Note que $H_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$, $H_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$ e que $H_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha - \beta} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - 1 + \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = 2$. Note que $H_1 =$

$1, H_2 = 1, H_3 = 2, \dots$ formam os termos da sequência de Fibonacci, com $H_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}; n \geq 1$.

Note que, como falamos anteriormente, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e $-\frac{1}{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, portanto, a fórmula poderia ser escrita assim:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right]$$

A sequência de Fibonacci proporciona muitas relações com exemplos do cotidiano. Além do padrão de reprodução dos coelhos, podemos ver esse padrão na formação dos galhos de certas plantas, na forma das sementes de girassol, no crescimento de conchas de moluscos e até no voo de algumas aves de rapina.

Alguns artistas também utilizaram esse mesmo padrão em suas obras, como é o caso de Salvador Dali e de Leonardo da Vinci. Não convém a este trabalho detalhar cada um dos exemplos anteriores, mas vemos claramente o quanto a sequência Fibonacci é importante na relação do Número de Ouro com a natureza. Isso, talvez, explique seu lado “divino”.

3 AS RELAÇÕES MATEMÁTICAS DO NÚMERO DE OURO

“Vejo uma certa ordem no universo, e a matemática é uma maneira de fazê-la visível.”

(May Sarton)

Um trabalho adequado de Geometria gera competências essenciais para o aprendizado do estudante. As habilidades de visualização, de desenhar, de gerar argumentos lógicos e de encontrar soluções para problemas dão ao aluno a possibilidade de usar as formas e as propriedades geométricas na representação e visualização em seu cotidiano.

Essas capacidades são significativas para o entendimento e para o desenvolvimento da concepção de espaço e elaboração de modelos para interpretar questões da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Certamente, perceber as correspondências entre as representações planas nos desenhos, mapas e na tela do computador com os objetos originais, aceitar novas formas planas ou espaciais e suas características a partir dessas representações são fundamentais para a leitura do mundo.

Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (Brasil, 2018, p.123)

Os PCN+ claramente enfatizam a importância das competências geradas a partir dos estudos de geometria contextualizados com outras disciplinas. A proposta deste trabalho é a de justamente mostrar uma forma prática de apresentar os conteúdos de geometria. Para tanto, inicialmente apresentaremos as propriedades, definições e teoremas em que o Número de Ouro estará intrinsecamente inserido no conteúdo de Geometria, especificamente a Euclidiana Plana.

3.1 A PROPORÇÃO ÁUREA

“Eu deveria tentar tratar o vício e a loucura humanos geometricamente ... as paixões causadas por ódio, raiva, inveja, e assim por diante, consideradas em si, seguem a necessidade e a eficácia da natureza ... Tratarei, portanto, a natureza e força da emoção exatamente da mesma maneira, como se eu estivesse preocupado com linhas, planos e sólidos.”

(Baruch Spinoza)

Proporção é a relação entre as partes de um todo que causa um sentimento agradável de equilíbrio, de harmonia. Essa é, provavelmente, a melhor descrição para a proporção áurea. Chamada de “razão extrema e média”, já definida anteriormente, tem como constante de proporcionalidade o Número de Ouro. Essa proporção, ou razão áurea, será exposta agora nas figuras geométricas planas que fazem parte do conteúdo do Ensino Médio. Como já a definimos anteriormente, no segmento de reta, faremos agora nos polígonos.

3.1.1 O TRIÂNGULO DE OURO

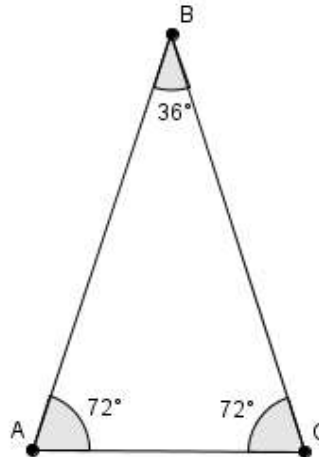
A definição mais comum de um triângulo é dada por Dolce e Pompeu (1993, p.36), que dizem:

Dados três pontos A, B e C não colineares, a reunião dos segmentos AB, AC e BC chama-se triângulo ABC [...] Um triângulo com dois lados congruentes é isósceles; o outro lado é chamado base e o ângulo oposto à base é o ângulo do vértice.

Queremos demonstrar o seguinte teorema: “Em um triângulo isósceles com ângulo do vértice de 36° , a bissetriz interna de um dos ângulos da base divide o lado oposto em média e extrema razão”

Construímos, então, um triângulo isósceles no qual o ângulo do vértice mede exatamente 36° . Desse modo, é simples calcular os ângulos da base, pois de acordo com Dolce e Pompeu (1993, p.40): “Se um triângulo é isósceles, os ângulos da base são congruentes.” e ainda por Dolce e Pompeu (1993, p.66), “A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° ”. Veja a Figura 3.1.1.

Figura 3.1.1 - Triângulo Áureo



Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, se o ângulo do vértice mede 36° , os ângulos da base medem 72° cada um ($36^\circ + 72^\circ + 72^\circ = 180^\circ$).

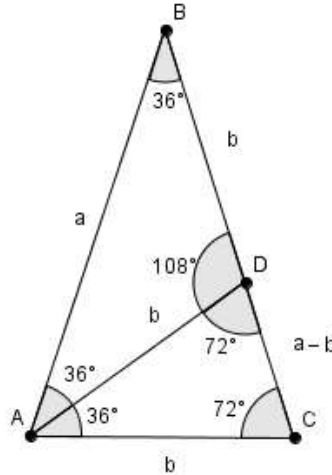
Precisaremos agora da definição de bissetriz interna: bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes e, por consequência, divide um ângulo em dois ângulos congruentes” (DULCE E POMPEO, 1993, p. 25). Com essas informações podemos iniciar a demonstração.

Seja BAC o triângulo isósceles tal que $AB \equiv BC$ (congruentes) e cujos ângulos internos são $A = 36^\circ$, $B = C = 72^\circ$. AD é a bissetriz interna tal que D pertence ao lado BC. A bissetriz divide o ângulo do vértice A em dois ângulos de 36° .

Pela Figura 3.1.2 é possível ver um novo triângulo ACD tal que o ângulo do vértice $\hat{C}AD$ mede 36° e o ângulo do vértice $\hat{A}CD$ mede 72° . Pelo teorema anterior, o ângulo do vértice $\hat{A}DC$ também deve medir 72° . Dessa forma, o triângulo ACD também é isósceles e semelhante ao triângulo BAC. Decorre disso que ADB é isósceles de base AB.

Afirmamos que dessa forma o lado BC do triângulo BAC está dividido por D em extrema e média razão. De fato, seja $AB = BC = a$, $AC = b$. Desse modo, $AD = BD = b$, $CD = a - b$ (Figura 3.1.2).

Figura 3.1.2 – Triângulos semelhantes



Fonte: Elaborado pelo autor

Assim:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AD}{CD}$$

Substituindo pelas medidas anteriormente definidas:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b}$$

Como o produto do meio é igual ao produto dos extremos:

$$a^2 - ab = b^2 \Leftrightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

Dividindo todos os termos por b^2 , temos:

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{ab}{b^2} - \frac{b^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Fazendo $\frac{a}{b} = x$, temos que:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Essa expressão tem como raiz positiva $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, como já calculamos anteriormente, é aproximadamente 1,6180339887 ... Dessa forma:

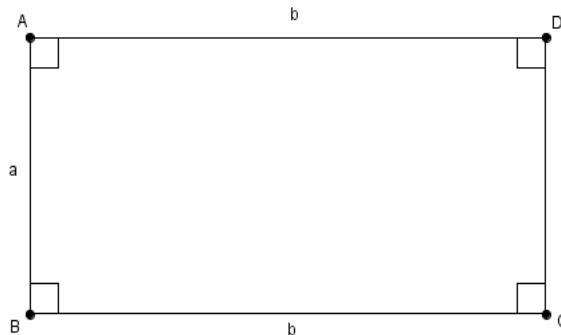
$$\frac{a}{b} = \phi$$

Assim, demonstramos que, de fato, a bissetriz interna de um dos ângulos da base do triângulo construído anteriormente divide o lado oposto em extrema e média razão. Desse modo, nomearemos esse triângulo como “triângulo de ouro”.

3.1.2 O RETÂNGULO DE OURO

O Número de Ouro também pode estar presente em um retângulo. Nesse caso, definiremos o mesmo como “retângulo de ouro”. Antes, definiremos o que é um quadrilátero e um retângulo. De acordo com Dolce e Pompeo, os quadriláteros têm a seguinte definição: “Sejam A, B, C e D quatro pontos do mesmo plano, todos distintos e três deles não colineares. Se os segmentos AB, BC, CD e DA interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero” (1993, p.99). Quanto aos retângulos: “Um quadrilátero plano convexo é retângulo se e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.” (1993, p.101).

Figura 3.1.3 – O Retângulo



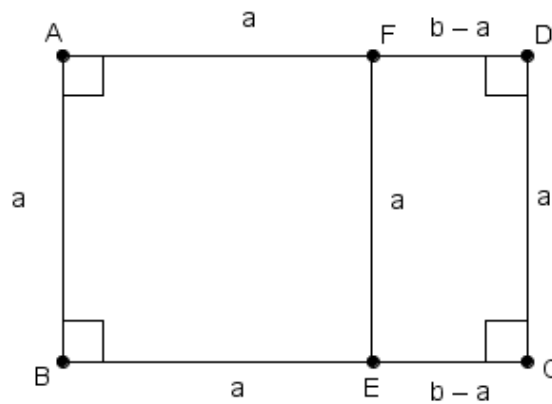
Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, compreendemos que, impostas as definições anteriores, o retângulo deve possuir lados opostos congruentes e paralelos (observe a Figura 3.1.3). Assim, definimos o retângulo de ouro como o retângulo cuja razão entre seus lados maior e menor é extrema e média.

Consideremos o problema de construir um retângulo (Figura 3.1.4) $ABCD$ tal que retirando-lhe o quadrado $ABEF$ reste o retângulo $ECDF$, semelhante ao primeiro. Precisamos lembrar que figuras semelhantes são aquelas que possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Mostraremos que, nesse caso, a razão do comprimento do retângulo $ABCD$ para o comprimento do retângulo $ECDF$ é ϕ .

Sejam $AB \equiv CD = a$ e $BC \equiv DA = b$ tal que $a < b$, e além disso, E e F , são pontos sobre os lados BC e DA , respectivamente, de forma que $BE \equiv AF = a$ e, portanto, $EC \equiv FD = b - a$. Como esses pontos distam igualmente de A e de B , então o segmento EF é claramente paralelo ao segmento AB . Logo, EF é perpendicular aos lados BC e DA . Dessa forma, o quadrilátero $ABEF$ é um quadrado, pois: “Um quadrilátero plano convexo é um quadrado se e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatro lados congruentes” (DOLCE E POMPEO, 1993, p.101).

Figura 3.1.4 – O Retângulo de ouro



Fonte: Elaborado pelo autor

Vamos observar agora que o retângulo $ABCD$ foi dividido no quadrado $ABEF$ e em outro retângulo menor, $CDFE$ semelhante a $ABCD$. Fazendo a razão de semelhança entre o retângulo menor e o maior, de forma que o lado maior de $CDFE$ esteja para o lado maior de $ABCD$, assim como o lado menor de $CDFE$ esteja para o lado menor de $ABCD$, então:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b - a}$$

Como o produto do meio é igual ao produto dos extremos, então:

$$a^2 = b^2 - ba$$

Dividindo todos os termos por a^2 , temos: $\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{ba}{a^2} \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a}$

Fazendo $\frac{b}{a} = x$, e manipulando algebricamente a expressão, temos: $x^2 - x - 1 = 0$. Essa expressão já foi resolvida anteriormente, portanto $x = \phi$, o que nos mostra que a razão entre os lados desse retângulo é extrema e média. Portanto, esse é o Retângulo de Ouro.

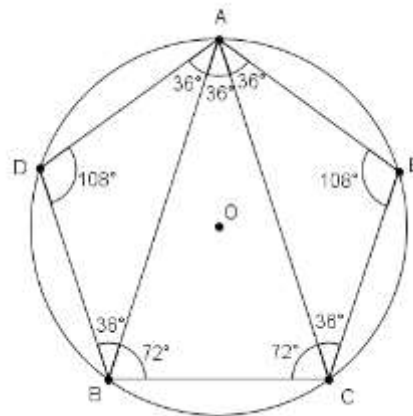
3.1.3 O PENTÁGONO REGULAR

O Pentágono é um polígono que possui cinco lados. Os polígonos são definidos por Dulce e Pompeo (1993, p.132) do seguinte modo:

Dada uma sequência de pontos de um plano (A_1, A_2, \dots, A_n) com $n > 3$, todos distintos, onde três pontos consecutivos não são colineares, considerando consecutivos A_{n-1}, A_n, A_1 assim como A_n, A_1, A_2 , chama-se polígono à reunião dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

Por outro lado, um polígono é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes. Assim, o pentágono regular seria a reunião de cinco vértices sob as condições da definição de polígonos regulares.

Figura 3.1.5 – O Pentágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

Anteriormente nós mostramos que o Número de Ouro pode aparecer em triângulos e em quadriláteros. No caso dos pentágonos regulares, o que nos surpreende é o fato que em todos eles o Φ se faz presente. Se construirmos as diagonais a partir de um ponto, imediatamente formamos um triângulo interno ao pentágono (Figura 3.1.5). Afirmamos, de imediato, que esse triângulo é o anteriormente definido “triângulo de ouro”.

De fato, a soma dos ângulos internos de um pentágono é igual a 540° . Como se trata de um polígono regular, seus ângulos internos são congruentes, portanto, cada um deles mede 108° .

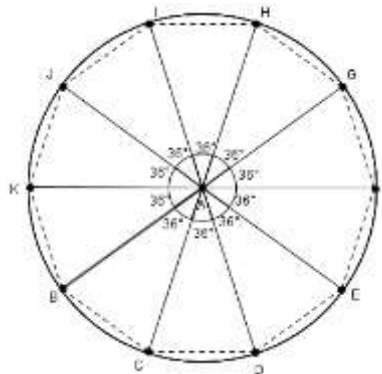
As diagonais traçadas a partir do vértice A , como na Figura 3.3.1, trissectam o vértice de modo que cada ângulo medirá 36° . Como as diagonais são idênticas, o triângulo ABC é isósceles de base BC . Logo, os ângulos da base são iguais e congruentes, portanto, medem 72° cada um.

Assim, concluímos que, de fato, o triângulo ABC é o triângulo de ouro, anteriormente definido, e, portanto, o número de ouro se faz naturalmente presente em todos os pentágonos regulares. Dessa forma, vale o seguinte teorema: “Em todo pentágono regular, seu lado e sua diagonal estão em extrema e média razão.”

3.1.4 O DECÁGONO REGULAR

Outro poliedro que apresenta de forma clara a presença do Número de Ouro é o decágono regular. Por ser um polígono cujos lados são todos congruentes e todos os seus ângulos internos também são congruentes, é fácil ver que ao traçarmos todas as diagonais que passam pelo centro (observe a Figura), dividimos esse polígono em triângulos isósceles cujo ângulo do vértice mede 36° .

Figura 3.1.6 – O Decágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

Como já mostrado anteriormente, um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice mede 36° tem como razão entre seu lado e sua base o Número de Ouro. Dessa forma, podemos afirmar que em todo decágono regular, a razão entre a metade de sua diagonal que passa pelo centro e seu lado é o Número de Ouro.

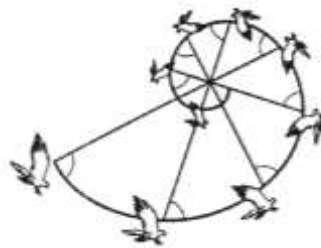
3.1.5 A ESPIRAL LOGARÍTMICA

Jaques Bernoulli veio de uma família que gerou treze matemáticos. Sua associação com a Razão Áurea se deu com seu tratado intitulado '*spira mirabilis*', ou a Espiral Maravilhosa, sobre um tipo particular de forma espiral. O tratado explica uma característica essencial específica da espiral logarítmica – ela não modifica seu formato conforme seu tamanho aumenta. Livio (2011, p.137) fala mais sobre essa forma:

Esta característica é conhecida como auto-similaridade. Fascinado com essa propriedade, Jacques escreveu que a espiral logarítmica "pode ser usada como um símbolo tanto de vigor e constância na adversidade quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser."

Mais uma vez vemos a maravilhosa sensação que uma propriedade matemática causa ao nos depararmos com algo que parecia envolver apenas a natureza. Essa espiral tem o mesmo padrão de crescimento das conchas do Náutilo. Conforme o molusco cresce, sua "casa" se mantém idêntica toda sua vida, mesmo aumentando de tamanho.

Figura 3.1.7 – O Vôo do falcão



Fonte: Livio, 2011, p.141

Fora do plano, essa propriedade também vale para o padrão espiral do crescimento dos chifres de carneiros e das presas dos elefantes. Livio (2011, p.141) fala também sobre essa particularidade da espiral relativa ao voo de uma certa ave de rapina: "Os falcões usam essa propriedade quando atacam suas presas [...] Mas eles poderiam voar ainda mais depressa se o fizessem em linha reta em vez de seguir uma trajetória espiral até suas vítimas." (Figura 3.1.6).

No caso da Geometria Euclidiana Plana, a espiral logarítmica se mostra diretamente ligada a Razão Áurea ao construirmos sucessivos "triângulos de ouro" e "retângulos de ouro" cada vez menores dentro deles mesmos.

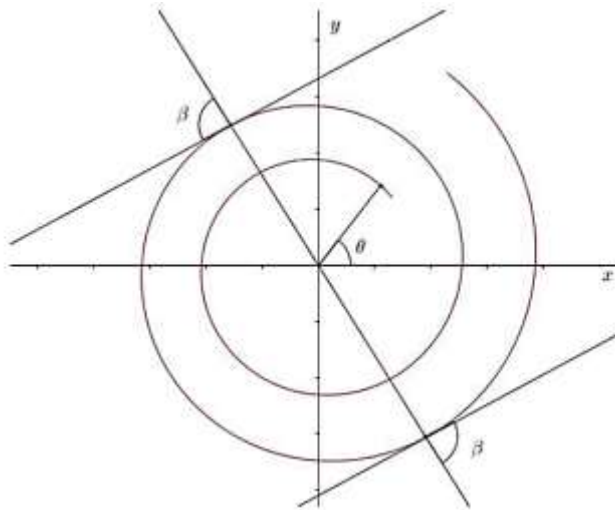
Uma espiral no plano é a uma curva descrita por um ponto P que descreve dois movimentos em relação a um ponto fixo Q , isto é, P gira ao redor de Q ao mesmo tempo que se aproxima (ou se afasta) do mesmo.

A espiral logarítmica é a curva (Figura 3.1.7) cuja equação polar é

$$r = ae^{b\theta}$$

onde r é a distância do ponto P até a origem O , também chamada de raio ($\vec{r} = \overrightarrow{OP}$); θ é o ângulo que \overrightarrow{OP} faz com o eixo x ; a e b são constantes arbitrárias.

Figura 3.1.8 – Espiral Logarítmica



Fonte: Santos, 2013, p.26

Uma propriedade muito importante dessa espiral é citada por Santos (2013, p.26)

[...] qualquer reta que passe pela origem formará com as retas tangentes a ela nos pontos de interseção, um ângulo de medida constante. A partir desta propriedade, podemos construir uma espiral logarítmica tomando várias retas concorrentes em um único ponto (origem), escolhe-se um raio inicial e, em sua extremidade, traça-se o segmento perpendicular até que este atinja a próxima reta, em seguida, partindo do ponto de interseção traça-se o novo segmento também perpendicular até que este atinja a próxima reta e repete-se o procedimento indefinidamente.

Com essa propriedade, vemos pela Figura 3.1.8 que, quando o número de retas tende ao infinito, a sequência desses segmentos perpendiculares tenderá à espiral logarítmica.

No caso dos triângulos de ouro, já mostramos anteriormente que, ao bissectarmos um dos ângulos da base, formaremos um novo e menor triângulo de ouro semelhante ao primeiro. Fazendo isso sucessivamente, gerará uma série de “triângulos rodopiantes”.

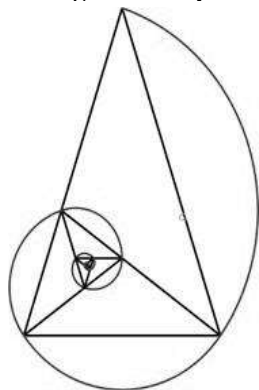
Figura 3.1.9 – Formação da Espiral



Fonte: Santos, 2013, p.27

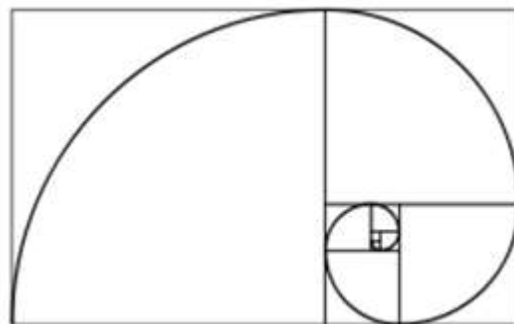
Ligando os vértices dos triângulos de ouro com um arco de circunferência de raio igual à base do triângulo (limitado pelos lados do triângulo obtusângulo interno ao triângulo de ouro), obteremos uma espiral logarítmica. (Figura 3.1.9). O fato que comprova isso é que cada arco da espiral está oposto ao ângulo de 108° já mostrado anteriormente. Como os arcos diminuem (pois são limitados pelos lados de triângulos cada vez mais internos), mas o ângulo é sempre o mesmo, temos por definição a espiral logarítmica.

Figura 3.1.10 – O Triângulo e a Espiral



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3.1.11 – O Retângulo e a Espiral



Fonte: Elaborado pelo autor

No caso do retângulo de ouro, ao retirarmos o quadrado, resta um novo retângulo de ouro, o qual, ao retirarmos um novo quadrado sucessivamente, gerará uma espécie de “retângulos rodopiantes”. Em cada quadrado traçamos um quarto de circunferência de raio igual à medida do lado do quadrado e o centro é um dos

vértices do quadrado correspondente. Dessa forma, obteremos a espiral logarítmica que se enrola para o interior do retângulo (Figura 3.1.10). Semelhantemente ao caso do triângulo, o que comprova essa afirmativa são os arcos que formam essa espiral estarem opostos ao ângulo de 90° do quadrado. Como os arcos diminuem (pois são limitados pelos quadrados cada vez mais internos), mas o ângulo é sempre o mesmo, temos por definição a espiral logarítmica.

Em ambos os casos, o pólo em que a espiral se enrola para dentro da figura foi esmeradamente chamado de “o olho de Deus”.

3.2 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS DO NÚMERO DE OURO

“A Geometria existe por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.”

(Johannes Kepler)

O Número de Ouro está tão presente na Geometria Euclidiana Plana de modo que naturalmente podemos fazer construções de suas medidas com o uso da régua e do compasso. Faremos pois essas construções no segmento de reta, para o triângulo, para o retângulo e para o pentágono.

3.2.1 O SEGMENTO DE RETA

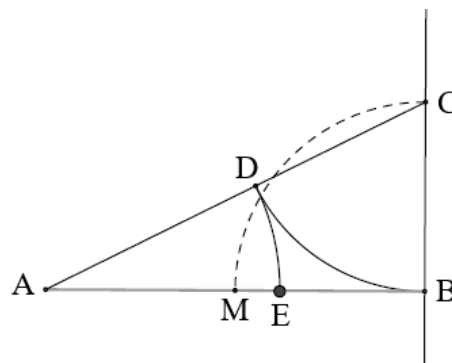
O objetivo dessa construção é determinar com régua e compasso um ponto E pertencente a um segmento AB qualquer, tal que E divida o segmento AB em média e extrema razão.

Etapas da construção:

- 1) Determinar o ponto médio M do segmento AB . Para tanto, basta abrir o compasso em A , passando do “possível centro” do segmento e marcando dois arcos, um acima e um abaixo do segmento. O mesmo é feito a partir do ponto B , com a mesma abertura do compasso. Os arcos irão se encontrar fora do segmento em dois pontos. Traçando a reta que liga esses pontos, teremos uma interseção com o segmento AB . Esse ponto de interseção é o ponto médio M .
- 2) Determinar uma reta perpendicular ao segmento AB que passe pelo ponto B . Para tanto, prolongaremos o segmento AB ao lado de B . Com o compasso centrado em B e com o seu raio menor que o segmento AB , marcaremos dois pontos no segmento AB . Em seguida, com o compasso em cada um desses pontos, marcaremos dois arcos acima de B , de modo que esses arcos se intersectam em um ponto. Ligando esse ponto ao ponto B , teremos uma reta perpendicular a AB passando pelo ponto B .

- 3) Marcar um ponto C sobre a reta anterior, tal que $MB = BC$. Basta abrir o compasso com raio igual a MB e em seguida marcar o ponto C na reta perpendicular a AB com o compasso centrado em B .
- 4) Traçar o segmento AC . Para tanto, basta usar a régua ligando os ponto A e C .
- 5) Marcar o ponto D . Com o compasso centrado em C e raio BC , marcaremos o ponto D no segmento AC .
- 6) Marcar o ponto E sobre o segmento AB , tal que $AD = AE$. Para tal, fixaremos o compasso em A com raio igual a AD e marcaremos o ponto E no segmento AB .

Figura 3.2.1 – Construção do segmento de ouro



Fonte: Elaborado pelo autor

Pela Figura 3.2.1 podemos notar que o segmento AB foi seccionado pelo ponto E , mas é necessário que provemos algebricamente que essa é de fato a secção áurea. De fato, ABC é um triângulo retângulo em B , portanto, pelo Teorema de Pitágoras:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Fazendo $AB = x$, então $BC = CD = \frac{x}{2}$. Sem perda de generalidade, tomaremos o segmento AE , unitário. Assim $AC = AD + CD = AE + BC = 1 + \frac{x}{2}$.

Assim:

$$x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{x^2}{4} = 1 + x + \frac{x^2}{4}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

A última equação tem como solução positiva $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que já demonstramos ser o Número de Ouro. Portanto, provamos que, de fato, o segmento está dividido na razão áurea.

3.2.2 O TRIÂNGULO

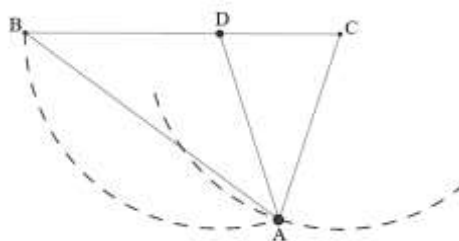
O objetivo dessa construção é, com régua e compasso, construir um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice tenha 36° e isso leve a um novo triângulo isósceles semelhante ao maior e cujos lados congruentes sejam iguais à base do primeiro.

Etapas da construção:

- 1) Determinar um ponto D , tal que o segmento BC esteja na razão áurea;
- 2) Construir uma circunferência com centro em D e raio BD ;
- 3) Construir uma circunferência com centro em C e raio BD ;
- 4) Denominar uma das interseções dessas circunferências de A ;
- 5) Construir o triângulo ABC .

Observando a Figura 3.2.2, vemos que o triângulo ABC foi construído sob o segmento anteriormente definido como áureo. Nos resta demonstrar que de fato a razão entre a base e um de seus lados também estão na razão áurea, que o triângulo BAC é isósceles de base AC , que o segmento AD é uma bissetriz interna e que o ângulo B mede 36° .

Figura 3.2.2 – Construção do triângulo



Fonte: Elaborado pelo autor

De fato, pela construção, temos que $BD = AD = AC$. Logo, CAD é um triângulo isósceles e AC e BC também estão na razão extrema e média. Mostraremos agora que BAC e ACD são semelhantes, portanto, ambos isósceles. Ora, sabemos que:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD}$$

Logo,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}$$

Como temos dois lados dos dois triângulos BAC e ADC proporcionais e o ângulo $\hat{A}CB \equiv \hat{D}CA$, então, pelo critério de semelhança de triângulos, Lado-Ângulo-Lado, concluímos que BAC e ADC são triângulos semelhantes. Como ADC é isósceles, então, BAC também é isósceles.

Mostraremos agora que AD é uma bissetriz interna de $B\hat{A}C$. De fato, $B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C$. Como demonstramos anteriormente, $A\hat{B}C \equiv B\hat{A}D \equiv C\hat{A}D$. Assim, AD divide $B\hat{A}C$ ao meio, portanto, é uma bissetriz.

Agora mostraremos que $A\hat{B}C = 36^\circ$. De fato, temos que $A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 180^\circ$. Fazendo $A\hat{B}C \equiv D\hat{A}B \equiv C\hat{A}D = x$, e como $B\hat{A}C = A\hat{C}B = B\hat{A}D + C\hat{A}D = 2x$, então, $x + 2x + 2x = 180^\circ$. Logo, $5x = 180^\circ$ e, portanto, $x = 36^\circ$. Assim, $A\hat{B}C = 36^\circ$.

Com essas demonstrações, temos, de fato, que o triângulo construído é o triângulo de ouro.

3.2.3 O RETÂNGULO

O objetivo dessa construção é criar um retângulo tal que seu lado maior e seu lado menor estejam em extrema e média razão.

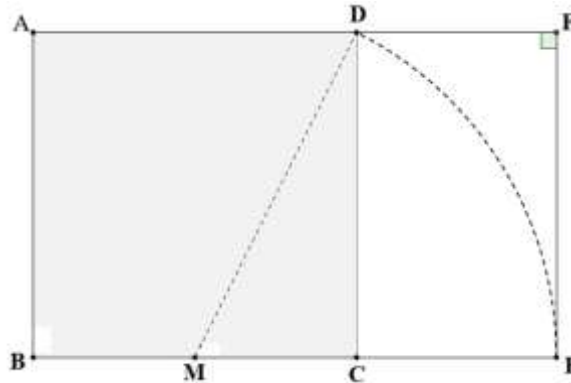
Etapas da construção:

- 1) Dado o segmento AB , construir um quadrado $ABCD$. Traçaremos, em A , uma reta perpendicular ao segmento AB . Depois, com o compasso em A e com raio AB , marcaremos o ponto D na reta perpendicular. Com o compasso ainda de mesma abertura centrado em B e D , faremos dois arcos que se intersectam em um ponto C , o mais distante de A . $ABCD$ é um quadrado.
- 2) Determinar o ponto médio M do segmento BC .
- 3) Marcar o ponto E sobre a semirreta BC , tal que $MD = ME$.
- 4) Marcar o ponto F , pé da perpendicular a AD pelo ponto E .

O retângulo $ABEF$ (Figura 3.2.3) é um retângulo de ouro. De fato, como $ABCD$ é um quadrado e M é ponto médio em BC , então, MCD é um triângulo retângulo. Assim, para $AB = x$, temos pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{5x^2}{4} = MD^2$$

Figura 3.2.3 – Construção do retângulo

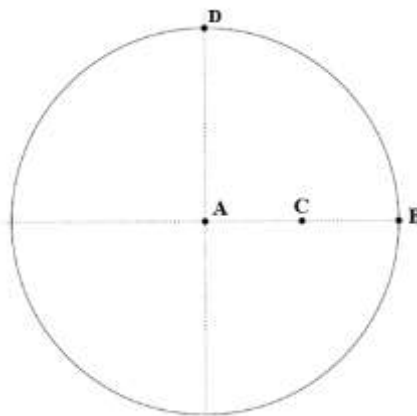


Fonte: Elaborado pelo autor

Temos, então, que $MD = \frac{x\sqrt{5}}{2}$. Como $MD = ME$, então, $BE = BM + ME$, então, $BE = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x(1+\sqrt{5})}{2}$. Fazendo $\frac{BE}{AB} = \frac{x(1+\sqrt{5})}{2x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$. Portanto, os segmentos estão em extrema e média razão.

3.2.4 O PENTÁGONO

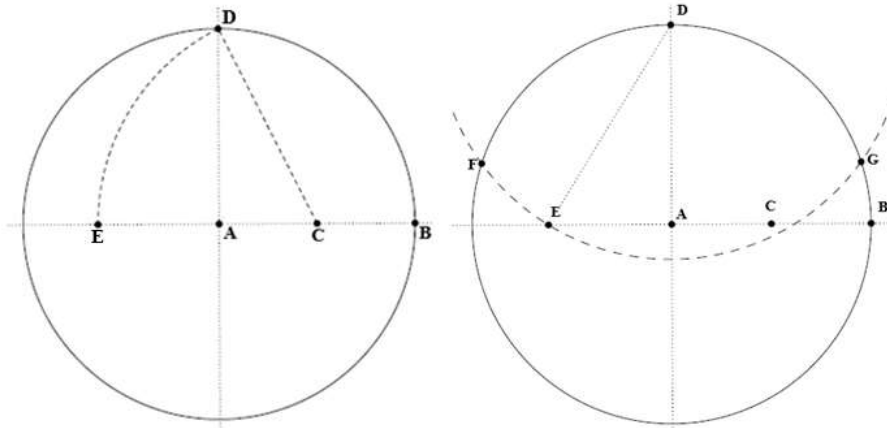
Figura 3.2.4 – Construção do pentágono
Etapa 1, 2 e 3



Fonte: Elaborado pelo autor

A construção de um pentágono regular é suficiente para que o Número Áureo se faça revelar. Como falamos anteriormente, ele naturalmente faz parte desse polígono.

Figura 3.2.5 – Construção do pentágono Etapa 4 e 5

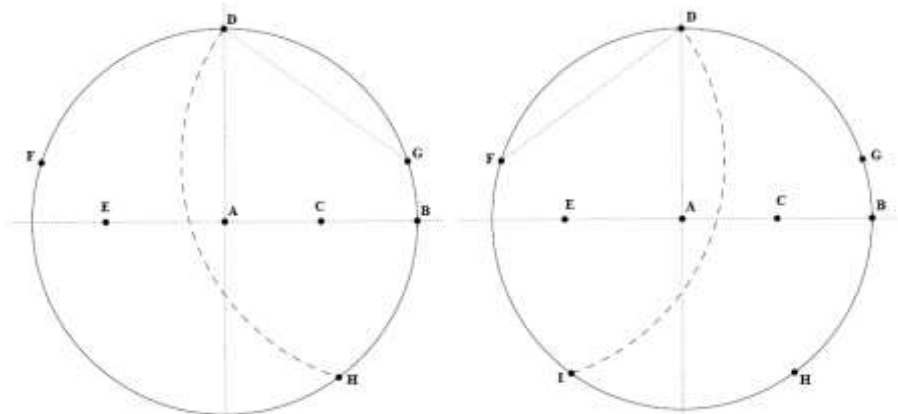


Fonte: Elaborado pelo autor

Etapas da construção:

1. Construir uma circunferência de raio AB e centro em A .
2. Determinar o ponto médio C do segmento AB .
3. Marcar um ponto D sobre a circunferência tal que AD seja perpendicular a AB .
4. Com o compasso em C e raio CD , marcar um ponto E sobre a reta AB , dentro da circunferência.
5. Com centro em D e raio DE , marcar os pontos F e G , interseções com a circunferência.

Figura 3.2.6 – Construção do pentágono Etapa 6 e 7



Fonte: Elaborado pelo autor

6. Com centro em G , marcar sobre a circunferência o ponto H , tal que $DG = GH$.
7. Com centro em F , marcar sobre a circunferência o ponto I , tal que $FD = FI$.

Unindo os pontos $DFIHG$, temos um pentágono regular que, como mostramos anteriormente, a razão entre a medida de seu lado e a medida de sua diagonal é o Número de Ouro.

4 UMA PROPOSTA DE AULA COM O NÚMERO DE OURO

“Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”

(Paulo Freire)

No Ensino Médio, o estudante, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar um aprofundamento dos conhecimentos educacionais. Esse estudante já deve estar mais integrado à vida em comunidade e, assim, também já possui “condições de compreender e desenvolver consciência mais plena de suas responsabilidades e direitos, juntamente com o aprendizado disciplinar.” (Brasil, 1999, p. 6)

O professor tem, então, como meta ser o facilitador do aprofundamento dos saberes disciplinares, através de procedimentos, objetivos e tratamentos didáticos específicos, articulando uma possível interdisciplinaridade desses saberes através de várias circunstâncias, como conteúdos tecnológicos e práticos.

Para a Geometria Euclidiana Plana, o desafio é sempre trazer a esse estudante uma visão prática ou contextualizada do conteúdo de modo que a aprendizagem possa ser dinâmica e construtiva.

Dessa forma, apresentamos aqui uma proposta de aula que guiará o professor, de modo que em uma de suas aulas de Geometria possa ser facilmente integrado o contexto do Número de Ouro.

Essa proposta de aula se baseia em alguns pré-requisitos. O Número de Ouro surge naturalmente em algumas das figuras da Geometria Euclidiana Plana, mas é necessário uma certa familiaridade com os conceitos e propriedades dos polígonos e com os conceitos de proporcionalidade, para que o estudante possa compreender de forma instintiva as relações áureas.

Outra observação importante é que o intuito dessa proposta de aula não é de acrescentar um novo conteúdo, trazendo enfado ao aluno e consumindo o tempo de aula do professor. A idéia na realidade é a de justamente alertar o estudante que a geometria está interligada com a natureza, com a ciência, até com as artes, através de um simples número.

4.1 METODOLOGIA

“Em ordem ponha, assim que acordar
As ações a fazer no dia a começar.”

(Pitágoras)

O Número de Ouro é sem dúvida fascinante. Mediante as suas relações com a geometria, as artes, a ciência e com a natureza, é inevitável que ele atraia uma curiosidade por parte dos seus observadores.

A seguinte proposta de aula foi construída de forma que esse número fosse exposto como curiosidade matemática em meio a uma aula de geometria, portanto, para o professor que desejar abordar o método, primeiramente, não é regra inviolável seguir estritamente o que o seguinte material propõe. Adaptações são necessárias, conforme a cultura de cada turma e conforme o método do professor.

Essa proposta de aula foi construída conforme os polígonos são comumente apresentados aos estudantes numa aula de geometria. Primeiramente, mostraremos a definição de razão e proporção para depois mostrarmos algebricamente o Número de Ouro no segmento de reta, depois nos triângulos, seguido dos quadriláteros e então nos pentágonos. Depois de mostrar matematicamente o Número de Ouro nas proporções métricas dessas figuras planas, apresentaremos como esse número está de fato relacionado com a natureza, com as artes, etc, através da sequência de Fibonacci.

Um conselho importante para o professor é que ele esteja minimamente familiarizado com o Número de Ouro, seja pelas informações apresentadas nesse trabalho ou por outras publicações estritamente acadêmicas e ainda preferencialmente pautadas na pesquisa de Livio. A dissertação aqui apresentada resume as principais informações necessárias para o transcorrer da aula, portanto, é uma opção viável de leitura.

A proposta de aula será apresentada em um roteiro didático, em apêndice ao final deste trabalho, para um uso prático do professor, de modo que simplifique seu trabalho ao imprimir apenas esse material, se assim preferir. Esse roteiro terá

seções voltadas exclusivamente para o professor, além do que será direcionado aos estudantes.

4.1.1 RAZÃO

Dados dois números reais a e b , com b diferente de zero, chamamos de razão entre a e b ao quociente

$$\frac{a}{b} = k$$

Note que k é um número real. O numerador é nomeado como antecedente e o denominador b é nomeado de conseqüente dessa razão (lê-se “ a está para b ” e também pode ser representado como $a:b$). A razão k indica o valor do número a quando comparado ao número b , tomando-o como unidade.

4.1.2 PROPORÇÃO

Denominamos proporção como a igualdade de duas razões.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$$

Essa representação pode também ser feita do seguinte modo:

$$a_1:b_1 :: a_2:b_2$$

Tais que a_1 , b_1 , a_2 e b_2 são números reais e b_1 e b_2 não nulos e k é a constante proporcional (Lê-se “ a_1 está para b_1 assim como a_2 está para b_2 ”). O antecedente da primeira razão (a_1) e o conseqüente da segunda (b_2) são chamados de extremos, enquanto o conseqüente da primeira razão (b_1) e o antecedente da segunda razão (a_2) são chamados de meios.

Propriedade fundamental da proporção: O produto dos meios é igual ao produto dos extremos, o que denotamos por:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow bc = ad$$

4.1.3 O SEGMENTO DE OURO

Dolce e Pompeo (1993, p. 8) definem segmento de reta: “Dados dois pontos distintos, a reunião desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta.”

O segmento dividido em extrema e média razão (ver Figura 2.2.1) nos traz a razão áurea ou a razão entre o segmento maior e o menor.

Se isso acontece, então, existe uma proporção de modo que o todo ($x + 1$) está para o maior (x), assim como esse maior (x) está para o menor (1).

$$\frac{x + 1}{x} = \frac{x}{1}$$

Dessa forma, descobrimos uma relação quadrática já apresentada anteriormente nesse trabalho e que chegamos aos seguintes resultados:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Definimos, então, $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\bar{\phi} = -\frac{1}{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, de forma que $\bar{\phi}$ é o oposto do inverso de ϕ . Usando uma calculadora obtemos:

$$\phi = 1,6180339887498948482045868343656 \dots$$

Figura 2.2.1 – Segmento em extrema e média razão



Fonte: Elaborado pelo autor

É importante que seus estudantes façam a conta e observem o resultado. Eles precisam compreender que, se não há agrupamentos de algarismos depois da vírgula que se repitam infinitamente, esse número se trata de um irracional. Dessa forma, o primeiro exercício para os estudantes poderá ser o seguinte.

Exercício 01: Sabendo que AB está para AC , assim como AC está para CB , qual o valor de $AC = x$ para $CB = 1$?

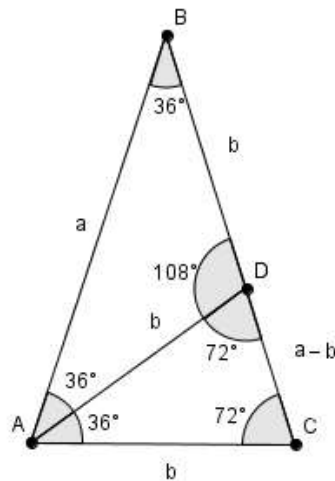
4.1.4 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dulce e Pompeo (1993, p. 198) definem que “Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos congruentes e os lados homólogos proporcionais.” Por outro lado, dos critérios de semelhança, “Se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.”

4.1.5 O TRIÂNGULO DE OURO

Os estudantes devem observar todos os detalhes do triângulo de ouro. Primeiramente se trata de um triângulo isósceles. O ângulo do vértice mede 36° e os ângulos da base medem ambos 72° . Um desses ângulos da base foi dividido em dois de 36° pela bissetriz interna (ver Figura 3.1.2). Outro triângulo menor foi formado e esse também é isósceles e, além disso, é semelhante ao primeiro pelo critério citado anteriormente.

Figura 3.1.2 – Triângulos semelhantes



Fonte: Elaborado pelo autor

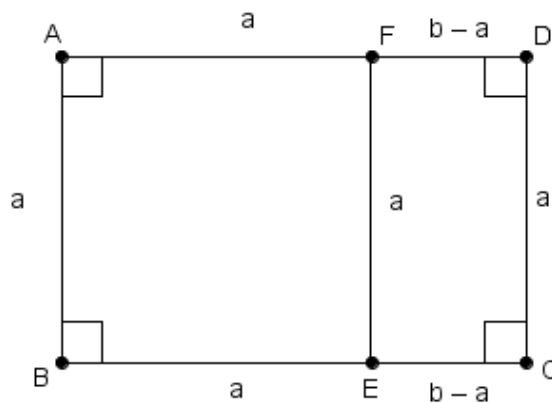
A resultante das afirmações anteriores já foram demonstradas no segundo capítulo, levando-nos a perceber que a razão entre a base e o lado do triângulo isósceles é o Número de Ouro. Assim, podemos propor o segundo exercício.

Exercício 02: Qual a razão entre os segmentos que formam a base e o lado do triângulo isósceles de vértice 72° ?

4.1.6 O RETÂNGULO DE OURO

O retângulo de ouro se mostrará o mais simples de ser compreendido pelos estudantes. O que talvez eles precisem ser lembrados são algumas de suas propriedades das quais as mais importantes, para esse caso, já foram citadas anteriormente no capítulo 2. Ao desenhar a figura, é importante frisar o quadrado que é formado interiormente ao retângulo, permitindo, assim, aparecer o retângulo menor.

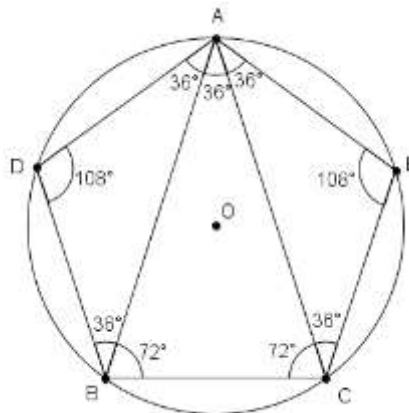
Figura 3.1.4 – O Retângulo de ouro



Fonte: Elaborado pelo autor

Vimos que a razão entre os lados maior e menor de um triângulo de ouro é o Φ . Assim, podemos propor o terceiro exercício aos estudantes.

Figura 3.1.5 – O Pentágono regular



Fonte: Elaborado pelo autor

Exercício 03: *Um retângulo é repartido por um segmento formando internamente um quadrado e um retângulo menor, conforme a Figura 3.1.4. Qual a razão entre o lado maior e o lado menor dos retângulos, sabendo que essa razão é a mesma?*

4.1.7 O PENTÁGONO REGULAR

Como definido anteriormente, o pentágono regular carrega naturalmente a propriedade do Número de Ouro em seus segmentos. Não importante a medida de seu lado, afirmamos que a razão entre seu lado e sua diagonal é áurea (ver Figura 3.1.5). Dessa forma, podemos propor a nossos estudantes o quarto exercício.

Exercício 04: *Qual a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular?*

4.1.8 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Fibonacci talvez ainda seja um personagem desconhecido para a maioria dos estudantes. A sequência de números que leva seu nome é, porém, de fácil compreensão. Se trata de uma sucessão de números que obedecem um padrão em que cada elemento consecutivo, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores. Ou seja, a sequência é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... com infinitos termos.

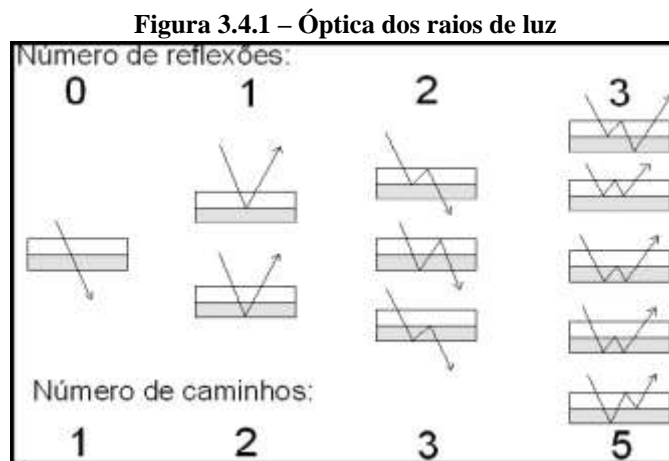
Essa sequência surgiu a partir do problema dos coelhos, citado anteriormente no primeiro capítulo. É importante que os estudantes assimilem essa sucessão a partir desse problema. Em seguida, de preferência, com o uso de calculadora, eles podem calcular a razão entre os termos consecutivos e anotarem os resultados, como foi feito anteriormente.

Eles devem, sozinhos, chegar à conclusão que, nessa razão, quanto maior os números da sequência de Fibonacci, mais próximos estaremos do Número de Ouro!

4.1.9 O NÚMERO DE OURO

O problema dos coelhos já deve intrigar a mente de quem se aventura a conhecer a sucessão numérica do matemático italiano Leonardo Fibonacci. Essa série surge, porém, em diversos outros cenários, como já tratamos anteriormente.

A sequência de Fibonacci ficou famosa não somente por causa do problema dos coelhos, mas porque a encontraremos em uma grande variedade de outros fenômenos aparentemente sem relação. Por exemplo, um tema que está muito distante da geração de coelhos é a óptica dos raios de luz. Pela Figura 3.4.1, observe que o raio de luz tem infinitas maneiras de refletir internamente a duas placas de vidro antes de emergir.



Fonte: https://sites.google.com/site/leonardofibonacci/7/_/rsrc/1468751023842/aplicacoes-da-sequencia-de-fibonacci/reflexoes.gif

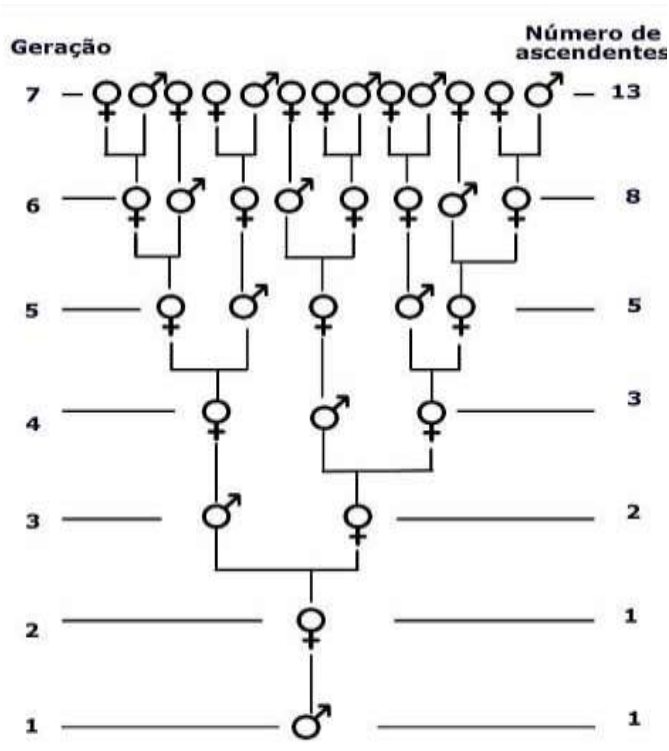
Vamos contar o número de emergências desses raios. Primeiro, se não houver reflexões internas, teremos apenas uma emergência de raio de luz (observe o caso 0 na figura). Se tivermos uma reflexão interna, obtemos então duas emergências desse raio de luz (observe o caso 1 na figura). No caso de duas reflexões, teremos três casos de emergência (observe o caso 2 na figura). Serão cinco raios de luz emergentes, se forem três reflexões internas (observe o caso 3 na figura), e oito caminhos, se o raio reflete quatro vezes, e treze caminhos para cinco reflexões e assim por diante. O número de raios de luz que emergem de duas placas de vidro – 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... – formam uma sequência de Fibonacci.

Outro problema relatado por Livio (2011, p. 118) nos traz uma idéia de solução bem parecida com o anterior, mas com uma problemática bem comum, se pensado no cotidiano. O problema é o seguinte:

Uma criança está tentando subir uma escada. O número máximo de degraus que ela pode subir de uma vez é dois, isto é, ela pode subir um ou dois degraus de cada vez. Se existem n degraus na escada, de quantas maneiras diferentes (C_n) ela pode subir?

Mais uma vez surge um problema que aparentemente não tem nada a ver com o Número de Ouro, mas, quando pensamos em sua solução, logo vemos a relação. Observe que se existe somente um degrau ($n = 1$), há somente uma maneira de subir, logo $C_n = 1$. Se houver dois degraus, ($n = 2$), então há duas maneiras de subir, ou de um em um, ou os dois de uma vez só, logo $C_n = 2$. Se há três degraus, então existem três maneiras de subir ($1 + 1 + 1$ ou $1 + 2$ ou $2 + 1$), portanto $C_n = 3$. Para quatro degraus, a criança terá cinco maneiras diferentes de subir a escada ($n = 4$) $C_n = 5$, e assim por diante, onde teremos $C_n = 8$ para cinco

Figura 3.4.2 – Árvore genealógica de um zangão



Fonte:

<http://www.bpiropo.com.br/graficos/FPC20070319a.jpg>

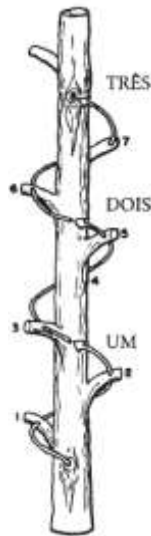
degraus, $C_n = 13$ para seis degraus, etc. Veja que as quantidades de maneiras de uma criança subir os degraus – 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... – formará uma sequência de Fibonacci.

Finalmente, vamos examinar a árvore genealógica de um zangão, o macho da abelha. De acordo com Livio (2011, p. 120):

Os ovos de abelhas não fertilizados se tornam zangões. Desse modo, um zangão não tem um “pai”, somente uma “mãe”. Os ovos da rainha, por outro lado, são fertilizados por zangões e se tornam fêmeas (operárias ou rainhas). Uma abelha, portanto tem uma “mãe” e um “pai”. Conseqüentemente, um zangão tem uma mãe e dois avós (pais de sua “mãe”), três trisavós (os dois pais da avó mais a mãe do avô), cinco trisavós (dois para cada bisavô e um para o bisavô) e assim por diante.

Observamos que a genealogia de um zangão tem claramente em números de antecessores – 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... – a sequência de Fibonacci (Figura 3.4.2)

Figura 3.4.3 – Filotaxia



Fonte: Livio, 2011, p.130

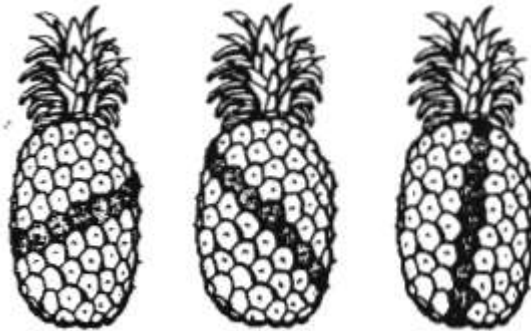
É muito intrigante como a sequência de Fibonacci relaciona a reprodução de coelhos, a óptica, o ato de subir escadas e a árvore genealógica dos zangões, com o Número de Ouro.

Quanto às plantas, Livio (2011, p.129) destaca:

As folhas ao longo do galho de uma planta ou os talos ao longo de um ramo tendem a crescer em posições que otimizariam sua exposição ao sol, à chuva e ao ar [...] a passagem de uma folha para a seguinte (ou de um talo para o seguinte ao longo dos ramos) é caracterizada por espaçamentos do tipo parafuso em volta do ramo. Por exemplo, nas tílias americanas, as folhas aparecem geralmente em dois lados opostos (correspondendo a metade de uma volta em torno dos ramos), o que é conhecido como razão filotáxica $1/2$. Em outras plantas, como a aveleira, a amoreira e a faia, a passagem de uma folha para a seguinte envolve um terço de uma volta (razão filotáxica $1/3$). De modo semelhante, a macieira, o carvalho e o damasqueiro têm folhas a cada $2/5$ de uma volta, e a pereira e o salgueiro-chorão têm folhas a cada $3/8$ de uma volta.

Percebemos que as frações indicadas em cada razão filotáxica tem elementos alternados da sequência de Fibonacci. A Figura 3.4.3 ilustra o caso em que são necessárias três voltas completas para passar por oito ramos, ou seja, a razão filotáxica é $3/8$.

Figura 3.4.4 – Abacaxis e suas espirais



Fonte: Livio, 2011, p.131

O primeiro a notar intuitivamente a relação entre filotaxia e os números de Fibonacci foi o astrônomo Johannes Kepler. Livio (2013, p.130) fala:

Escreveu Kepler: "É na similaridade dessa série autodeterminada [referindo-se à propriedade recursiva da seqüência de Fibonacci] que a faculdade da propagação, na minha opinião, é formada. E assim, numa flor, a autêntica bandeira dessa faculdade é exibida, o pentágono".

Os abacaxis são mais um exemplo que fornecem uma demonstração genuinamente bela de filotaxia baseada em Fibonacci. As camadas hexagonais na sua superfície estão em três espirais distintas. Na figura 3.4.4, é fácil ver uma das linhas paralelas que sobe suavemente da esquerda para a direita, uma das linhas paralelas que sobem de forma mais inclinada da direita inferior até a esquerda

superior, e uma das vinte e uma linhas paralelas que são bastante inclinadas (da esquerda inferior até a direita superior). A maior parte dos abacaxis tem cinco, oito, treze ou vinte e uma espirais de inclinação crescente na sua superfície e todos esses são números de Fibonacci.

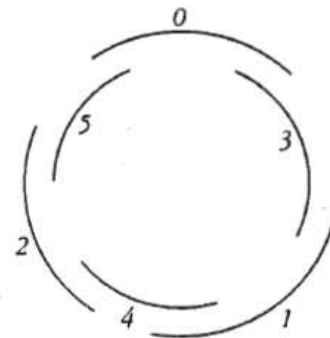
Uma outra expressão sensacional dessas espirais cruzadas é dada pelo arranjo dos flósculos nos girassóis. Ao olhar para um girassol (Figura 3.4.5), notamos padrões espirais horários e anti-horários formados pelos flósculos. É notório que esses flósculos crescem de modo a possibilitar a mais eficaz divisão de espaço horizontal. O número de espirais geralmente depende do tamanho do girassol. Livio (2011, p.133) relata que “O mais comum é que existam 34 espirais em um sentido e 55 no outro, mas girassóis com quocientes de números de espirais de $89/55$, $144/89$ e até de $233/144$ (pelo menos um; relatado por um casal de Vermont à *Scientific American* em 1951) foram vistos.” Essas razões são, claramente, de números de Fibonacci vizinhos.

Figura 3.4.5 – Flósculos nos girassóis



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/44/Helianthus_whorl.jpg

Figura 3.4.6 – Pétalas de rosas



Fonte: Livio, 2011, p.134

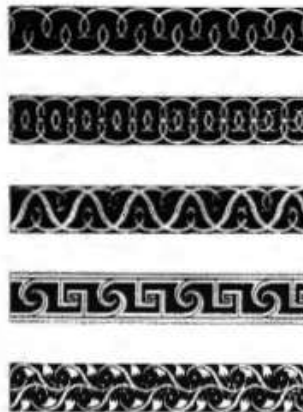
Em algumas flores, o arranjo e o número de pétalas também apresentam uma relação com o Número de Ouro. A maioria das margaridas-do-campo tem 13, 21 ou 34 pétalas, todos números de Fibonacci. As pétalas de rosas também têm um arranjo simétrico na razão áurea. Ao observarmos pétala por pétala, iremos notar que elas são compactamente unidas. Os ângulos que indicam as posições (em frações de uma volta completa) dessas pétalas são frações de múltiplos de ϕ . Se a pétala 1 (observe a Figura 3.4.6) está a 0,618 (a parte fracionária de ϕ) de uma volta da pétala 0, a pétala 2 está a 0,236 (a parte fracionária de 2ϕ) de uma volta da pétala 1, e assim por diante.

É notório que há uma forma espiral regida pelo Número de Ouro que relaciona os arranjos de flores e o vôo dos falcões que citamos anteriormente. Essa mesma espiral é observada em sistemas de estrelas agrupadas em um plano comum, como as da Via Láctea. Segundo Livio (2011, p.142),

Vistas de frente, galáxias espirais mostram braços espirais que começam perto do centro da galáxia e se estendem para fora por quase todo o disco [...] Os braços espirais constituem a parte do disco galáctico em que muitas estrelas jovens nasceram. Como as estrelas jovens são mais brilhantes, podemos ver a estrutura espiral de outras galáxias afastadas.

A natureza parece amar essas espirais. De girassóis, conchas do mar e redemoinhos a furacões e galáxias espirais gigantes, a natureza aparenta ter escolhido esta forma como seu "ornamento" predileto. A constância da espiral em todas as escalas de tamanho também se mostra com perfeição na natureza na forma de pequenos fósseis ou de espécimes unicelulares conhecidos como foraminíferas. Embora as conchas espirais nesses seres sejam compostas (e não um tubo contínuo), imagens da estrutura interna mostram que o formato da espiral logarítmica permaneceu o mesmo por milhões de anos.

Figura 3.4.7 – Artes espirais



Fonte: Livio, 2011, p.139

Não é somente a natureza que se relaciona com o Número de Ouro. Livio (2011, p.270) diz que “leis físicas são expressas em equações matemáticas, a estrutura do universo é fractal, galáxias se organizam em espirais logarítmicas, e assim por diante, porque a matemática é a “linguagem do Universo”.” Essa espiral,

estudada por Bernoulli, é tão impressionante que o matemático pediu que essa forma e o lema que atribuiu a ela – “*Eadem mutato resurgo*” (embora mudado, ressurjo o mesmo) – fossem memorizados em seu túmulo.

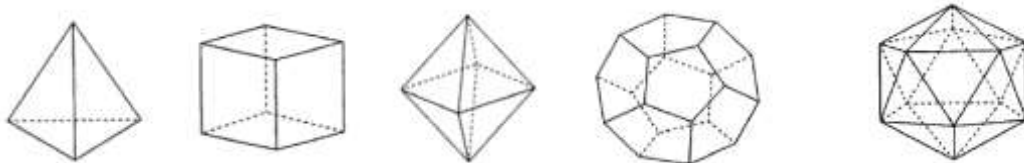
Figura 3.4.8 – A Última Ceia



Fonte: <https://p8.storage.canalblog.com/84/24/210892/67692951.jpg>

Artistas também viram o encanto das espirais logarítmicas. Leonardo da Vinci, em seu estudo sobre o tema mitológico "Leda e o cisne", por exemplo, desenha o cabelo disposto num modelo quase igual à espiral logarítmica. Ele reproduz essa forma várias vezes em seu estudo de espirais em nuvens e em água na excelente série de esboços para o "Dilúvio".

Figura 3.4.9 – Poliedros de Platão



Fonte: Livio, 2011, p.84

Outro artista que podemos destacar é o ilustrador e *designer* Edward B. Edwards, do século XX, que criou centenas de desenhos decorativos baseados na espiral logarítmica (Figura 3.4.7). Eles podem ser vistos no seu livro “*Pattern and Design with Dynamic Symmetry*”.

Outro caso em que o Número de Ouro é representado nas artes está na pintura de Salvador Dalí de 1955, “Sacramento da Última Ceia”, que pode ser vista

na “*National Gallery*”, Washington D. C. (Figura 3.4.8). As medidas da pintura (cerca de 270cm x 167cm) estão na razão áurea entre si. Ainda mais significativo é que parte de um enorme dodecaedro (sólido regular de 12 faces no qual cada face é um pentágono regular) é visto ao fundo, acima da mesa, encobrindo-a.

Quanto a esse trabalho de Dali, o motivo da escolha do sólido ter sido o dodecaedro pode ser explicado pelo fato de Platão, em “*Tiameus*”, discutir a origem e os mecanismos do cosmo usando os cinco sólidos regulares (ou poliedros) e as idéias de Empédocles (c. 490-430 a.C.), de que os quatro elementos básicos da matéria são terra, água, ar e fogo, com a teoria “atômica” da matéria (a existência de partículas indivisíveis) de Demócrito de Abdera (c. 460 a.C.-370 a.C.), sugerindo que cada um dos quatro elementos está relacionado a um tipo de partícula fundamental e é representado por um dos sólidos platônicos.

O quinto sólido, o dodecaedro, era referente ao universo como um todo, ou, nas palavras de Platão, o dodecaedro é aquele “que deus usou para ornamentar as constelações de todo o céu”. Foi por este motivo que o pintor Salvador Dalí decidiu incluir um imenso dodecaedro flutuando acima da mesa da ceia em seu quadro.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Número de Ouro foi definido por Euclides, ao expressar a construção do pentágono e do pentagrama através dessa proporção. Se essa fosse a única aplicação da Razão Áurea, não poderíamos ter construído esta pesquisa.

No cotidiano, usamos o termo proporção ou para a relação de comparação entre partes de coisas com respeito a tamanho ou quantidade, ou quando desejamos descrever uma relação harmoniosa entre diferentes partes. A Razão Áurea, além de ser uma relação que compara medidas de comprimento, é também uma relação matemática numérica, que representamos por frações equivalentes. Dessa forma, podemos multiplicar o “meio pelos extremos” (por exemplo, $2/3 = 6/9$).

O Número de Ouro é o valor numérico da Proporção Áurea em que a maior satisfação obtida a partir desse conceito é que ele se baseia no elemento surpresa. Por um lado, a Razão Áurea veio a se tornar a mais simples das frações contínuas (mas também o “mais irracional” de todos os números irracionais) e, por outro lado, o coração de um incontável número de fenômenos naturais complexos.

Na história dos números, o homem sempre adaptava a matemática às suas necessidades. Não se sabe o primeiro tipo de número que surgiu (cardinal ou ordinal), mas a evolução de se pensar em número de forma teórica, como o algarismo 2 ser duas coisas quaisquer, é ainda mais difícil de ser comprovada. O certo é que os números foram aos poucos associados a alguma coisa do cotidiano, como o número de dedos das mãos para o 10. Foi assim que alguns números se destacaram, como o Pi (π) e o Fi, o Número de Ouro, (ϕ), como números onipresentes na Matemática.

Os Elementos de Euclides foi o primeiro impresso com a definição do Número de Ouro (por volta de 300 a.C.), utilizando-se da Razão Áurea para a construção de figuras da Geometria Plana e Espacial. Euclides chegou a citar o Número de Ouro em quatro dos treze volumes, demonstrando sua proporção na Razão entre segmentos áureos no livro VI.

O Número de Ouro é presente na Geometria Euclidiana Plana ao construirmos o triângulo e o retângulo áureo. No caso do pentágono regular, a Razão Áurea é presente na razão entre seu lado e uma de suas diagonais. Dentro

desse pentágono, podemos construir com as diagonais um pentagrama do qual seu centro é outro pentágono regular semelhante ao primeiro, porém menor. A Razão Áurea certamente é uma propriedade de figuras planas que pode ser utilizada no ensino da Geometria.

A sequência de Fibonacci é uma progressão de números em que a razão entre dois de seus elementos consecutivos se aproxima da Razão Áurea, à medida que essa sequência aumenta. Manifestações da natureza e até do cotidiano podem ser relacionadas com essa sequência. A sequência de triângulos e retângulos áureos formados internamente pela Razão Áurea possui medidas na sequência de Fibonacci, que, por sua vez, tem a razão, entre dois de seus elementos consecutivos, igual ao Número de Ouro.

É notório que o estudo do Número de Ouro não se limita apenas à Geometria, mas somente nessa área vimos que há muito a ser pesquisado. O Plano (\mathbb{R}^2) não é o único meio em que podemos notar sua presença. É visível que o Espaço (\mathbb{R}^3) possui figuras em que a Razão Áurea e, conseqüentemente, o Número de Ouro estão presentes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, Natália de Carvalho de. **O Número de Ouro e Construções Geométricas**. 2013. 48 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Cap. 3. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2948/5/Natalia.pdf>>. Acesso em: 13 fev. 2019.

BRASIL. Brasil. Secretaria de Educação (Org.). **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 1999. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2019.

BRASIL. Brasil. Secretaria de Educação (Org.). . **PCN+ Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 2018. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 23 jan. 2019.

BERTATO, Fábio Maia. **A “De Divina Proportione” de Luca Pacioli**: Tradução anotada e comentada. 2008. 322 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Filosofia, Departamento de Filosofia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

CARVALHO, Augusto Schwager de. **Como trazer o Número Áureo para Dentro de Sala de Aula**. 2013. 108 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013. Cap. 3. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=46531>. Acesso em: 13 fev. 2019.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar: Geometria Plana**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

LIVIO, Mario. **Razão áurea: A história de Φ , um número surpreendente**. 6. ed. Rio de Janeiro: Record, 2011. 333 p. Tradução de Marco Shinobu Matsuma.

SANTOS, Gilberto Vieira dos. **Explorando a Matemática do Número Φ , o Número de Ouro**. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013. Cap. 4. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92414/santos_gv_me_rcla.pdf?sequence>. Acesso em: 13 fev. 2019.

APÊNDICE

ROTEIRO DIDÁTICO: Uma Aula de Ouro.

OBJETIVOS DO ROTEIRO DIDÁTICO:

Este roteiro didático tem como objetivo estudar alguns dos conteúdos de Geometria Euclidiana Plana, introduzindo a definição do Número de Ouro, para mostrar ao estudante a proximidade da Matemática com o cotidiano.

Especificamente, tem-se o propósito de:

- Aprender sobre o Número de Ouro;
- Conhecer a relação Áurea em algumas figuras geométricas;
- Compreender a relação do Número de Ouro com a sequência de Fibonacci;
- Relacionar o Número de Ouro com elementos do cotidiano.

PRÉ-REQUISITOS:

Para realizar esta atividade, o aluno precisa saber alguns conteúdos de Geometria Euclidiana Plana, como as Propriedade dos Triângulos, Semelhança de Triângulos, Segmento de Reta, Polígonos, além de Razão e Proporção e Equações do 2º grau.

CONTEÚDOS:

Segmento de Reta, Triângulo, Retângulo, Pentágono, Sequência de Fibonacci.

DESCRIÇÃO DOS PROCEDIMENTOS:

O professor irá apresentar as atividades à turma, que deverá acompanhar a revisão do conteúdo, apresentado anteriormente no capítulo 3 deste trabalho. Em seguida, os estudantes devem tentar, sozinhos, resolver o problema. Lembre que o intuito principal não é avaliar os estudantes e sim levá-los a reconhecer a presença do Número de Ouro em cada exercício.

Após a solução dos cinco exercícios, o professor pode ficar livre para explanar sobre o Número de Ouro e suas relações com o cotidiano. É importante que os estudantes vejam imagens, no projetor, por exemplo, que os ajudem a indentificar as propriedades que eles viram na aula de Geometria.

RECURSOS DIDÁTICOS:

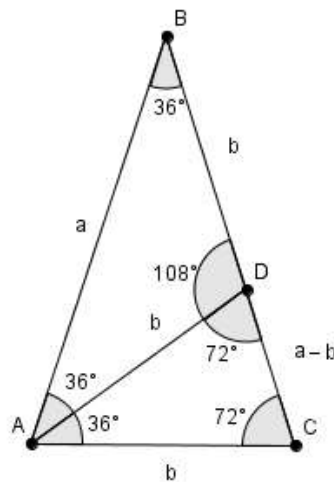
Datashow, notebook, folhas de ofício, quadro, pincel, apagador.

ATIVIDADES:

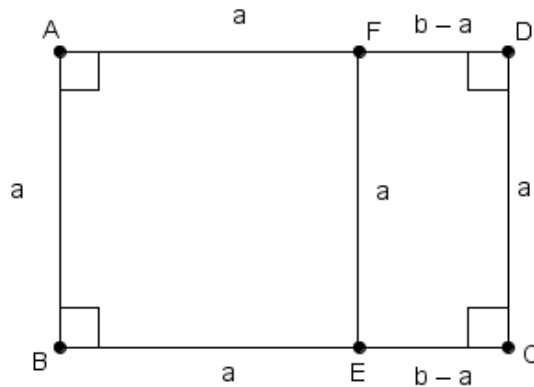
Exercício 01: Sabendo que AB é um segmento de reta tal que o ponto C , distinto de A e B , pertence a esse segmento de modo que AB está para AC assim como AC está para CB , qual o valor de $AC = x$ para $CB = 1$?



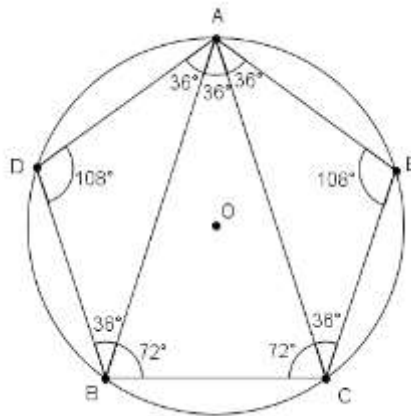
Exercício 02: Qual a razão entre os segmentos que formam a base e o lado do triângulo isósceles de vértice 72° ?



Exercício 03: Um retângulo é repartido por um segmento formando internamente um quadrado e um retângulo menor conforme a Figura 3.1.4. Qual a razão entre o lado maior e o lado menor dos retângulos sabendo que essa razão é a mesma?



Exercício 04: Qual a razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular?



Exercício 05: Acerca da razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, quanto maior forem esses termos, que número essa razão exprime?