



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI  
Departamento de Matemática e Estatística  
*Campus* de São João Del Rei

# Decomposição em Valores Singulares para construção de Biplots sobre inserção de Aprendizes no mercado de trabalho

Jakson de Almeida Silva

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João Del Rei , *Campus* de São João Del Rei.

Orientadora  
Profª. Dra. Carla Regina Guimarães Brighenti

2019

Silva, Jakson de Almeida

Decomposição em Valores Singulares para construção de Biplots sobre inserção de Aprendizizes no mercado de trabalho/ Jakson de Almeida Silva- São João Del Rei: [s.n.], 2019.

69 f.: fig., tab.

Orientadora: Carla Regina Guimarães Brighenti

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João Del Rei , Departamento de Matemática e Estatística.

1. SVD. 2. Matrizes Combinadas. 3. Inspeção do Trabalho no Brasil. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Jakson de Almeida Silva

DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES PARA CONSTRUÇÃO DE  
BILOTS SOBRE INSERÇÃO DE APRENDIZES NO MERCADO DE  
TRABALHO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João Del Rei , pela seguinte banca examinadora:

---

Profa. Dra. Carla Regina Guimarães Brighenti  
Orientadora

---

Profa. Dr. Ronaldo Ribeiro Alves  
Departamento Matemática e Estatística - UFSJ

---

Profa. Dra. Eliane da Silva Christo  
Departamento de Engenharia da Produção - UFF

São João Del Rei, 20 de setembro de 2019

*Aos meus pais, José e Luzia,  
Meus Irmãos: Jane, José Roberto, Janilda, Joselaine, Jander e Jussara,  
Ao filho, Luan;  
À Barbara, esposa e companheira, sempre presente neste desafio!*

# Agradecimentos

À Deus por todas as maravilhas, À clemente, piedosa, doce sempre virgem Maria. "(...) Por isso eu digo: obrigado, Senhor, por mais um dia. Obrigado, Senhor, que eu posso ver. Que seria de mim, sem a fé que eu tenho em Você?"

Aos professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFSJ, pelos ensinamentos. E a todos mestres que tanto contribuíram para esta caminhada, desde a Escola Estadual Alfredo Catão, Grupo do Areão, tempos que não voltam mais, saudades.

À professora Carla Regina Guimarães Brighenti, pela paciência, ensinamentos e profissionalismo sem os quais não seriam possíveis os trabalhos e reflexões aqui veiculados.

À Técnica Administrativa do PROFMAT da UFSJ Kátia Milena Mendonça Rios, pelo incentivo e ajuda constante durante todo curso.

Aos colegas da turma PROFMAT 2017 da UFSJ, pelo convívio fraterno.

A toda minha família, baluartes e fonte de inspiração, por torcerem e concorrerem para a materialização deste sonho.

À Secretaria de Inspeção do Trabalho, pela autorização de uso de dados da Inspeção oriundos da atuação da fiscalização em relação ao projeto de inserção de aprendizes no mercado de trabalho.

*"Aprendizagem,  
O tempo consumido em aprender coisas que não interessam  
priva-nos de descobrir as interessantes.  
(...)  
Vida,  
Aprendizado sem conclusão de curso."  
(Carlos Drummond de Andrade)*

# Resumo

Algumas noções de matrizes, como definições de operações envolvendo estas, o cálculo de determinantes, da matriz inversa, dos autovalores e dos autovetores fazem a base para o diálogo com a Álgebra Linear, na qual conceitos geométricos podem ser estendidos para espaços com dimensão maior do que a tridimensional. Assim, variáveis múltiplas foram manipuladas com base em conceitos da Álgebra Linear que permitiram a redução de dimensionalidade, por meio da Decomposição em Valores Singulares, DVS, e posterior interpretação dos dados com representação gráfica de tabelas bidimensionais, denominadas Biplots. No mercado de trabalho é importante avaliar o quanto o papel de ações como as de fiscalização podem influenciar na contratação de aprendizes. Para tanto, tais dados geram tabelas com múltiplas entradas, que necessitam de manipulação para a extração das informações almejadas e adaptação da técnica de DVS com o uso de matrizes particionadas. Desta forma se utilizaram dados públicos disponibilizados no painel de informações e estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil, denominado RADAR, com base em cinco variáveis, no caso, os setores de atividade econômica: Indústria, Construção, Comércio, Transporte e Outros. Estas variáveis foram analisadas no âmbito nacional e regional visando-se extrair e interpretar a associação destas com os dados referentes à aprendizagem profissional, especificamente, quais os setores que mais obtiveram êxito, com a contratação de aprendizes em decorrência de ação fiscal. Considerando-se dados dos anos de 2017 e 2018, buscou-se associação entre linhas e colunas, respectivamente, com dados dos Estados/Regiões e setores analisados, elaborando matrizes soma e diferença nos períodos estudados. Os dados foram processados com uso do *software R*. Conclui-se que a Indústria, no cenário nacional, tanto na matriz soma, quanto na matriz diferença, tem dissociação dos demais setores, com leve inclinação para as regiões sul e sudeste, ao passo que há um agrupamento dos demais setores e estes se relacionam ao Centro-Oeste e à Região Norte, de forma mais explícita em relação à diferença.

**Palavras-chave:** SVD, Matrizes Combinadas, Inspeção do Trabalho no Brasil.

# Abstract

Some notions of matrices, such as definitions of operations involving these, the calculation of determinants, inverse matrix, eigenvalues and eigenvectors form the basis for the dialogue with Linear Algebra, in which geometric concepts can be extended to spaces larger than the three-dimensional one. Thus, multiple variables were manipulated based on concepts of Linear Algebra that allowed the reduction of dimensionality through the Singular Values Decomposition, SVD, and later interpretation of the data with graphical representation of two-dimensional tables, called Biplots. In the labor market, it is important to evaluate how the role of actions such as supervision can influence the hiring of apprentices. Therefore, such data generate tables with multiple entries, which require manipulation to extract the desired information and adapt the DVS technique with the use of partitioned matrices. Thus, public data made available in the Labor Inspection in Brazil's information and statistics panel, called RADAR, were used, based on five variables, in this case, the sectors of economic activity: Industry, Construction, Trade, Transport and Others. These variables were analyzed at the national and regional levels in order to extract and interpret their association with data related to professional learning, specifically, which sectors were most successful, with the hiring of apprentices due to fiscal action. Considering data from 2017 and 2018, we sought to associate rows and columns, respectively, with data from the states/regions and sectors analyzed, producing sum and difference matrices in the studied periods. The data were processed using the R software. It is concluded that the Industry, in the national scenario, both in the sum matrix and in the difference matrix, has dissociation from the other sectors, with slight inclination to the south and southeast regions, while there is a grouping of the other sectors and these relate to the Midwest and the Northern Region, more explicitly in relation to the difference.

**Keywords:** SVD, Matched Matrices, Labor Inspection in Brazil.



# Lista de Figuras

2.1	Projeção Ortogonal de $\vec{u}$ em relação a $\vec{v}$ . . . . .	20
2.2	Projeção de Gram-Schmidt (tridimensional) . . . . .	21
2.3	Interpretação Básica de uma Representação Biplot . . . . .	30
2.4	Educação Engrenagem Central . . . . .	32
3.1	Página do Painel de Informações e Estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil . . . . .	37
4.1	Decomposição em valores Singulares da matriz do Exemplo 4.1 . . . . .	42
4.2	Vetores ortonormais que compõem a matriz $V$ da Decomposição em Valores Singulares, de forma que valha a igualdade $AV = U\Sigma$ ; . . . . .	43
4.3	Vetores que rotacionam e "esticam" as matrizes na Decomposição em Valores Singulares: em azul o círculo com os vetores ortogonais à direita, que compõem a matriz $V$ ; em preto, formando a elipse, os vetores do produto das matrizes $U\Sigma$ ; . . . . .	43
4.4	Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica por Regiões do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz soma (dos resultados neste interstício); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença. . . . .	51
4.5	Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Sudeste do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença. . . . .	53
4.6	Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Sul do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença. . . . .	54
4.7	Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Centro-Oeste do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença. . . . .	56

4.8	Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Norte do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença. . . . .	58
4.9	Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Nordeste do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença. . . . .	62

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela de Contingência A . . . . .	28
4.1	Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	46
4.2	Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Sudeste durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	46
4.3	Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Sul durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	46
4.4	Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Centro-Oeste durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	47
4.5	Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Norte durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	48
4.6	Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Nordeste durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	48
4.7	Decomposição em Valores Singulares da Matriz Bloco ( <b>Nacional</b> ), com dados da Tabela 4.1 . . . . .	50
4.8	Coordenadas dos Biplots da Figura 4.4 . . . . .	51
4.9	Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	52
4.10	Coordenadas dos Biplots da Figura 4.5 . . . . .	54
4.11	Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região <b>Sudeste</b> do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	55
4.12	Coordenadas dos Biplots da Figura 4.6 . . . . .	56
4.13	Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região <b>Sul</b> do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	57
4.14	Coordenadas dos Biplots da Figura 4.7 . . . . .	58
4.15	Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Centro-Oeste do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	59
4.16	Coordenadas dos Biplots da Figura 4.8 . . . . .	60

4.17	Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Norte do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	61
4.18	Coordenadas dos Biplots da Figura 4.9 . . . . .	62
4.19	Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Nordeste do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018. . . . .	63

# Lista de Siglas

DVS	Decomposição em Valores Singulares
LDU	Decomposição na qual $L$ e $U$ são matrizes triangulares (inferior e superior, respectivamente), com entradas na diagonal principal iguais a 1; e $D$ é uma matriz diagonal
CNAE	Classificação Nacional de Atividades Econômicas
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
Biplots	Tipo de gráfico exploratório usado em Estatística
FOGAP	Fórum Gaúcho de Aprendizagem Profissional
FUNARJ	Fundação Anita Mantuano de Artes do Estado do Rio de Janeiro
SENAI	Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial
SENAC	Serviço Nacional de Aprendizagem do Comércio
SENAR	Serviço Nacional de Aprendizagem Rural
SESCOOP	Serviço Nacional de Aprendizagem do Cooperativismo
SENAT	Serviço Nacional de Aprendizagem do Transporte
RADAR	Painel de Informações e Estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil
SIT	Secretaria de Inspeção do Trabalho
FGTS	Fundo de Garantia por Tempo de Serviço
PCD	Pessoas com Deficiência
SST	Segurança e Saúde no Trabalho

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Referencial Teórico</b>	<b>15</b>
2.1	Noções de Matrizes . . . . .	15
2.2	Autovalores e Autovetores . . . . .	18
2.3	Diagonalização Ortogonal . . . . .	18
2.3.1	O processo de Gram-Schmidt . . . . .	20
2.3.2	Teorema Espectral . . . . .	23
2.4	Decomposição em Valores Singulares . . . . .	24
2.5	Matriz Bloco . . . . .	25
2.6	Tabelas de Contingência . . . . .	27
2.7	Biplots . . . . .	28
2.8	Sistema de Aprendizagem Profissional . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>36</b>
3.1	Aplicação em Dados Fictícios . . . . .	38
3.2	Uso do <i>script</i> no software <i>R</i> para realização da Decomposição em Valores Singulares em matriz bloco . . . . .	38
3.3	Aplicação a Dados do Sistema de Aprendizagem Profissional . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussão</b>	<b>41</b>
4.1	Exemplos Didáticos de Aplicações em Dados Fictícios . . . . .	41
4.2	Tabelas e Dados Utilizados a partir do Painel de Informações e Estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil, RADAR . . . . .	45
4.3	Biplots e Aplicações aos dados do Sistema de Aprendizagem Profissional	47
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>64</b>
	<b>Referências</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>Termo de Autorização para uso de dados da Inspeção do Trabalho em Pesquisa</b>	<b>68</b>

# 1 Introdução

Os conceitos estatísticos servem como um parâmetro de aferição de várias ações, sejam elas educacionais, econômicas, segurança pública ou, neste caso, de aplicação em relação ao Sistema de Aprendizagem Profissional.

Em todos os casos é possível organizar os dados obtendo-se Tabelas de dupla entrada, buscando associar variáveis de interesse e estabelecer relação entre elas. A técnica estatística utilizada para avaliação destas variáveis é a Decomposição em Valores Singulares. Tal técnica visa, por meio da redução de dimensionalidade, elucidar quais são as variáveis que proporcionam maior contribuição, estabelecendo ponderação entre elas para que seja possível a representação gráfica de associações existentes, sendo comum a representação destas por biplots.

Especificamente, no que se refere à fiscalização, pode ser de interesse associar a ação fiscalizadora com a contratação de aprendizes nos diversos setores, tais como: Indústria, Comércio, Transporte, Construção, entre outros. Tais dados são atualizados e disponibilizados frequentemente no Painel de Informações Estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil, denominado RADAR. É possível categorizar as contratações, além de setores por regiões do Brasil, também com registro dos dados em âmbito nacional.

Há certa lacuna em relação às formulações sobre os efeitos e resultados alcançados a partir das atuações públicas, quando se refere às fiscalizações, sendo o caso particular da aprendizagem especificamente relacionado com as políticas públicas e diretrizes empregatícias, que refletem socioeconomicamente a produção de riquezas e estruturação do país. Assim a investigação sistemática, com uso de recursos e sistemas tecnológicos, serve como ferramenta útil às avaliações da forma como tem se pautado a fiscalização trabalhista.

Outro interesse reside no fato de verificar as mudanças ocorridas de um ano para outro, comparando-se as diferenças e os acréscimos ocorridos em anos consecutivos. No entanto, estudar as oscilações de contratações por setores e por regiões em anos consecutivos origina tabela de dimensão maior, ou seja, tabelas de tripla entrada que exigem, desta forma, uma adaptação da DVS tradicional, pois neste caso as matrizes constituir-se-iam em dois blocos, sendo necessário trabalhar-se com álgebra de matrizes bloco ou particionadas.

Desta forma, objetiva-se analisar a associação entre tabelas de contingência combinadas, oriundas de dados da atuação da Auditoria Fiscal do Trabalho nas cinco regiões do Brasil, em diversos setores, nos anos de 2017 e de 2018. Logo, para tal, utiliza-se a decomposição em valores singulares adaptada para matrizes soma e diferença, com posterior construção e interpretação dos respectivos biplots.

Considerando a validade e a utilidade do método Estatístico, planejado por Quetelet *apud* Lakatos e Marconi (2003, p. 108) expõe que este é tal que os processos estatísticos

permitem obter, de conjuntos complexos, representações simples e constatar se essas verificações simplificadas têm relações entre si. Assim, o método estatístico significa redução de fenômenos sociológicos, políticos, econômicos etc. a termos quantitativos e a manipulação estatística, que permite comprovar as relações dos fenômenos entre si, e obter generalizações sobre sua natureza, ocorrência ou significado.



## 2 Referencial Teórico

Inicialmente, revisaram-se conceitos básicos de matrizes afim de possibilitar ao leitor familiarização com a nomenclatura utilizada no decorrer desta.

### 2.1 Noções de Matrizes

A Álgebra Matricial apresenta inúmeras vantagens, além de tornar a apresentação das técnicas multivariadas mais elegante e concisa. A organização de dados reais em arranjos retangulares ou quadrados consistindo de  $n$  linhas e  $p$  colunas é denominado de matriz de ordem  $n$  por  $p$  e representado por  $n \times p$ . Esse tipo de arranjo dos dados possibilita-nos obter uma série de vantagens na representação de grandes quantidades de dados e nas operações aritméticas que ficam mais simplificadas (FERREIRA, 2008).

Considerando as matrizes  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ,  $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ , a matriz nula  $O = [o_{ij}]_{m \times n}$ , e a matriz identidade  $I = [i_{ij}]_{n \times n}$ , com  $i_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ , tem-se as seguintes operações:

- **Adição de matrizes** - Sejam  $A$  e  $B$ , duas matrizes, de mesma ordem  $(m \times n)$ ; denomina-se Soma da matriz  $A$  com a matriz  $B$ , e representa-se por  $A + B$ , a matriz  $C$ , que é do tipo  $(m \times n)$ , cujos elementos são obtidos quando se somam os elementos de  $A$  e  $B$  correspondentes. Pode-se dizer então que  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  são matrizes  $(m \times n)$ , e a soma de  $A$  e  $B$  é a matriz  $C = [c_{ij}]_{(m \times n)}$ , definida por:  $[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}]$ ; com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . Ou seja:  $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$ . Portanto,  $C$  é decorrente da adição dos elementos correspondentes de  $A$  e de  $B$ .
- **multiplicação de matrizes por um escalar** - é feita da seguinte forma: Seja  $k$  um número real. A multiplicação da matriz  $A$  por um escalar  $k$  é a matriz  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ , dada por:  $b_{ij} = k(a_{ij})$ ; com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

De acordo com Lipschutz e Lipson (2011), as propriedades básicas da soma e da multiplicação por escalar de matrizes são:

**Teorema 2.1.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes quaisquer (de mesmo tamanho) e  $k$  e  $k'$  escalares quaisquer. Então*

- |                                   |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| (i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ , | (v) $k(A + B) = kA + kB$ ,    |
| (ii) $A + 0 = 0 + A = A$ ,        | (vi) $(k + k')A = kA + k'A$ , |
| (iii) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ , | (vii) $(kk')A = k(k'A)$ ,     |
| (iv) $A + B = B + A$ ,            | (viii) $1 \cdot A = A$ .      |

Observe que, nos itens (ii) e (iii) do teorema, o 0 se refere à matriz nula.

- **multiplicação entre matrizes** - o produto  $A.B$  é a matriz  $C_{(m \times n)}$ , cujas entradas são determinadas fazendo-se o produto entre linha  $i$  da matriz  $A$  e a coluna  $j$  de  $B$ . Por isso, a condição de que o número de colunas de  $A$  seja igual ao número de linhas da matriz  $B$ . Quer dizer, com  $A_{(m \times n)}$  e  $B_{(n \times p)}$ , temos que  $A.B = C_{(m \times p)}$ . Segundo Ferreira (2008), as regras para multiplicação de matrizes, e em todos casos considerando diferentes dimensões, são:

- (i)  $A_{(m \times n)}$ ,  $B_{(n \times p)}$  e  $C_{(p \times r)}$  :  $(AB)C = A(BC) = ABC$ ;
- (ii)  $A_{(m \times n)}$ ,  $B_{(n \times m)}$  :  $AB \neq BA$ , em geral;
- (iii)  $A_{(m \times n)}$ ,  $B_{(n \times r)}$ ,  $C_{(n \times r)}$  :  $A(B \pm C) = AB \pm AC$ ;
- (iv)  $A, B_{(m \times n)}$ ,  $C_{(n \times r)}$  :  $(A \pm B)C = AC \pm BC$ ;
- (v)  $AO = O$ , sendo  $O$  a matriz nula; e
- (vi)  $A_{(n \times n)}$  :  $AI = IA = A$ , sendo  $I$ , a matriz identidade.

- **Determinante** - o determinante de uma matriz  $(n \times n)$ ,  $A = [a_{ij}]$ , pode ser obtido de diversas formas, sendo algumas bastante conhecidas e trabalhadas no ensino médio, como a regra de *Sarrus*, para matrizes de ordem dois e três, conforme se segue:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Ou ainda, o Determinante desta matriz  $(n \times n)$ ,  $A = [a_{ij}]$ , pode ser feito pela soma de  $n$  termos da forma  $\pm a_{ij} \cdot \det A$ , com os sinais de mais e menos se alternando, onde os elementos  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  são da linha  $i$  da matriz  $A$ . O determinante pode ser calculado, pelo processo de Laplace, na linha ou na coluna em que for mais conveniente, normalmente a que contenha mais elementos nulos, zero, da seguinte forma:  $\det A = (-1)^{i+1} \cdot (a_{i1}) \cdot (\det A_{i1}) + (-1)^{i+2} \cdot (a_{i2}) \cdot (\det A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} \cdot (a_{in}) \cdot (\det A_{in}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot (a_{ij}) \cdot (\det A_{ij})$ , onde  $i$  é a linha escolhida, podendo ser a 1ª, a 2ª ou a  $n$ -ésima linha.

Há também possibilidade de se chegar ao determinante pela regra de Chió ou, no caso específico em que os termos de cada linha estejam em progressão geométrica, pelo determinante na matriz de Vandermonde.

- **Matriz Inversa** - diz-se que  $A$  é uma matriz invertível ou não-singular, quando  $\det A \neq 0$ . E, a matriz inversa é tal que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ . Para se encontrar a matriz inversa, com base nesta regra em que o produto de uma matriz por sua inversa é igual à matriz identidade, recaímos em um sistema com o número de incógnitas igual ao número de equações. E, na via contraposta, a partir de um sistema com escalonamentos na forma matricial, tem-se a solução. Segundo Lipschutz e Lipson (2011, p. 83), uma maneira de resolver um sistema de equações lineares é utilizar sua matriz aumentada  $M$  em vez das equações em si. Mais precisamente, reduzimos  $M$  a uma forma escalonada (que nos diz se o sistema possui alguma solução) e, depois, voltamos a reduzir  $M$  à sua forma canônica

por linhas (que, essencialmente, nos dá a solução do sistema original de equações lineares).

**Proposição 2.1.** *seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Então:  $adj(A) \cdot A = det(A)I_n$ .*

*Demonstração.* Denotemos por  $B$  a matriz  $adj(A) \cdot A$ . Queremos mostrar que

$$b_{ij} = \begin{cases} det(A), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Denotando  $\Delta_{ij}(A)$  por  $\Delta_{ij}$  temos que:

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1i} & \cdots & \Delta_{ni} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Como determinante da matriz  $A$  pode ser feito como:

$$det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} det(A(i|j)), \text{ tem-se que: } b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \Delta_{ij} = det(A).$$

Por outro lado, seja  $i \neq j$ . Supondo, sem perda de generalidade, que  $i < j$ , temos

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{kj} \Delta_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{kj} det(A_{(k|j)}), \text{ que é o determinante da matriz}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

desenvolvido segundo os elementos da  $i$ -ésima coluna, o qual é nulo.  $\square$

**Teorema 2.2.** *Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , e  $det A \neq 0$ , então a inversa de  $A$  é:  $A^{-1} = \frac{1}{det A} adj(A)$ ; sendo que  $A^{-1}$  existe  $\iff det A \neq 0$ .*

A matriz adjunta ( $Adj(A)$ ) é obtida com algumas manipulações na matriz  $A$ , onde:  $Adj(A) = (\bar{A})^T$ , e  $\bar{A}$  é a matriz dos cofatores de  $A$ . Logo, a matriz adjunta de  $A$  é a matriz transposta (trocam-se linhas por colunas para se obter a matriz transposta)<sup>1</sup> da matriz dos cofatores de  $A$ . A matriz dos cofatores,  $\bar{A}$ , é feita de modo que:  $(-1)^{i+j} \cdot D_{i|j}$ , com  $D_{i|j}$  sendo o determinante da matriz que resta quando se retiram da matriz original ( $A$ , no caso) a linha  $i$  e a coluna  $j$ . Também com escalonamentos se faz possível a obtenção da matriz  $A$ , pelo método conhecido como eliminação de Gauss-Jordan. Ou, ainda, além de outras formas,

<sup>1</sup>Conforme Lipschutz e Lipson (2011), a relação entre a matriz  $A$ , quadrada com entradas reais, e sua transposta nos fornece espécies importantes de matrizes:

- (i) Matrizes Simétricas: dizemos que  $A$  é simétrica se  $A^T = A$ . Analogamente  $A^T = -A$  diz-se que  $A$  é antissimétrica.
- (ii) Matrizes Ortogonais: uma matriz real é ortogonal se  $A^T = A^{-1}$ . Com isso, toda matriz ortogonal quadrada é invertível.
- (iii) Matrizes Normais: quando esta se comuta com sua transposta, de modo que:  $AA^T = A^T A$ . Assim ( $A$  for simétrica ou  $A$  for ortogonal ou  $A$  for antissimétrica)  $\implies (A$  é normal).

a regra de Cramer pode ser utilizada para estudo de sistemas (se possui solução única, infinitas ou não possui soluções), bem como determinação(ões) desta(s), acaso a matriz seja não-singular.

## 2.2 Autovalores e Autovetores

Segundo Hefez e Fernandez (2016), o estudo de autovalores teve início com Cauchy no começo do século XIX em seu trabalho sobre formas quadráticas. Contudo, os primeiros problemas envolvendo autovalores apareceram, de forma implícita, durante o século XVIII, com o estudo de soluções de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

Os autovalores, normalmente simbolizados por  $\lambda$ , também denominados valores próprios ou valores característicos são soluções, raízes, do Polinômio característico obtido em relação à determinada matriz. O polinômio característico, de acordo com Hefez e Fernandez (2016), é tal que: seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . A matriz  $tI_n - A$ , onde  $t$  é uma constante indeterminada, é chamada *matriz característica de  $A$* . O determinante dessa matriz é um polinômio em  $t$ , chamado *polinômio característico da matriz  $A$*  e denotado por  $P_A(t)$ . Assim, segundo Lipschutz e Lipson (2011) tem-se que:

**Definição 2.1.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada qualquer. Dizemos que um escalar é um autovalor de  $A$  se existe um vetor (coluna) não nulo tal que:  $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . Qualquer vetor satisfazendo essa relação é denominado autovetor de  $A$  associado (ou correspondente, ou pertencente) ao autovalor  $\lambda$ . Observe que qualquer múltiplo escalar  $k\vec{v}$  de um autovetor  $\vec{v}$  associado a  $\lambda$  também é um autovetor associado a  $\lambda$ , pois  $A(k\vec{v}) = k(A\vec{v}) = k(\lambda\vec{v}) = \lambda(k\vec{v})$ .*

E seguem teoremas úteis:

**Teorema 2.3.** *Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é semelhante a uma matriz diagonal  $D$  se, e só se,  $A$  tem  $n$  autovetores LI. Nesse caso, os elementos diagonais de  $D$  são os autovalores associados e  $D = P^{-1}AP$ , onde  $P$  é a matriz cujas colunas são os autovetores.*

**Teorema 2.4.** *Seja  $A$  uma matriz quadrada. As afirmações dadas são equivalentes.*

- (i) *O escalar  $\lambda$  é um autovalor de  $A$ .*
- (ii) *A matriz  $M = A - \lambda I$  é singular.*
- (iii) *O escalar  $\lambda$  é uma raiz do polinômio característico  $\Delta(t)$  de  $A$ .*

## 2.3 Diagonalização Ortogonal

O Teorema 2.3 leva-nos às matrizes semelhantes, de modo que estas têm o mesmo determinante da original e, ainda, traz a vantagem de possuir elementos não-nulos apenas na diagonal principal, o que facilita a solução de sistemas e, na estatística, compilam-se as principais características da variância, traduzida em seus valores singulares e componentes principais. Então, para isso, torna-se de suma importância a compreensão deste Teorema que se analisa e prova, da seguinte forma:

Uma matriz  $A(n \times n)$  é diagonalizável se e somente se  $A$  tem  $n$  autovetores linearmente independentes (LI). Os vetores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$  são LI quando  $\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \dots + \alpha_n\vec{u}_n = 0$ . Caso contrário, os vetores são múltiplos uns dos outros e são Linearmente Dependentes (LD).

De fato,  $A = PDP^{-1}$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal se, e somente se, as colunas de  $P$  são  $n$  autovetores de  $A$  (LI). Nesse caso, os elementos da diagonal principal de  $D$  são os autovalores de  $A$  associados, respectivamente, aos autovetores em  $P$ . Logo:  $A$  é diagonalizável  $\Leftrightarrow$  existem autovetores suficientes para formar uma base para o  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $P$ , uma matriz  $(n \times n)$ , composta pelos vetores nas colunas:  $P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$ . E  $D$  uma matriz diagonal qualquer, com a diagonal principal com os elementos sendo autovalores:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Então,  $AP = [A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2 \ \dots \ A\vec{v}_n]$ ,

$$\text{enquanto } P \cdot D = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = [\lambda_1\vec{v}_1 \ \lambda_2\vec{v}_2 \ \dots \ \lambda_n\vec{v}_n]. \text{ Supõe-se}$$

que  $A$  é diagonalizável e  $A = PDP^{-1}$ . Então:  $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PDP^{-1}P \Leftrightarrow AP = PD$ . Destarte,  $[A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2 \ \dots \ A\vec{v}_n] = [\lambda_1\vec{v}_1 \ \lambda_2\vec{v}_2 \ \dots \ \lambda_n\vec{v}_n]$ . Com isso,  $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1; A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2; \dots; A\vec{v}_n = \lambda_n\vec{v}_n$ .

$P$  é invertível, pois é não-singular, então seus vetores  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$  são LI. Como  $A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ ; e todos vetores  $\vec{v}_i$  não são nulos, temos que  $\lambda_i$  representa os autovalores, e  $\vec{v}_i$  os autovetores associados.

( $\Leftarrow$ ) Suponham-se  $n$  autovetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , que são LI. Então os utilizando para montar as colunas da matriz  $P$ , e seus autovalores associados  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  para montar uma matriz diagonal  $D$ . Temos que  $AP = PD$ , e sendo os autovetores LI, a matriz  $P$  é inversível, então:  $AP = PD \Leftrightarrow APP^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$   $\square$

Conforme Anton (2012): Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas. Diz-se que  $A$  e  $B$  são **ortogonalmente semelhantes** se existir alguma matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^TAP = B$ . Se  $A$  for ortogonalmente semelhante a alguma matriz diagonal, então:  $P^TAP = D$ , tem-se que  $A$  é **ortogonalmente diagonalizável** e que  $P$  **diagonaliza  $A$  ortogonalmente**.

Nesta seara, em relação às matrizes semelhantes, tem-se que, de fato,  $D$  é uma matriz diagonal e pode ser obtida a partir da matriz  $A$ , já que:

$$D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} \Leftrightarrow PDP^{-1} = IAI = A. \quad (2.1)$$

Os autovalores e os autovetores permitem-nos a construção de uma matriz diagonal  $D$ , composta pelos autovalores, que pré-multiplicada pela matriz dos autovetores  $P$  e pós-multiplicada pela matriz inversa  $P^{-1}$ . Assim, a partir de uma matriz  $A$ ,  $n \times n$ , não-singular (determinante de  $A \neq 0$ ), conseguimos construir uma matriz semelhante (com o mesmo determinante) a  $A$ , que é diagonal. Isso nos permite calcular potências da matriz  $A$  com considerável facilidade.

Ademais, há possibilidade de escrita de uma matriz  $A$  quadrada de ordem  $n$  como combinação linear de matrizes com expoentes. Para tanto, com um polinômio  $p(t) = a_r t^r + a_{r-1} t^{r-1} + \dots + a_1 t + a_0$ , com coeficientes reais, Hefez e Fernandez (2016).

### 2.3.1 O processo de Gram-Schmidt

Para compreensão do processo de Gram-Schmidt, que é um algoritmo para criação de uma base ortogonal ou ortonormal para qualquer subespaço vetorial não-nulo de  $\mathbb{R}^n$ , na qual se trabalha com o produto interno e com a projeção ortogonal de um vetor em relação a outro. Então, podemos definir o produto interno entre vetores, da seguinte forma:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}; e \\ (\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)), & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0}, \text{ com } \theta = \langle (\vec{u}, \vec{v}) \end{cases}$$

Onde  $\theta = \langle (\vec{u}, \vec{v})$ , quer dizer o menor ângulo (agudo) formado entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . E, considerando os vetores pertencentes ao  $\mathbb{R}^n$ , com componentes  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , temos que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$ .

Para trabalhar-se com projeções ortogonais de um vetor na direção de outro, são úteis as seguintes propriedades, extraídas de Delgado *et al.* (2013 )

**Propriedade 2.1.** Sejam  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$ , vetores arbitrários do plano e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então:

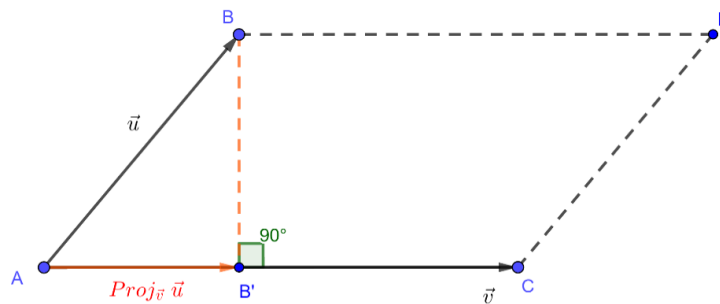
- (a)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$ ;
- (b)  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ;
- (c)  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ ;
- (d)  $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ;
- (e)  $\langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ;
- (f)  $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ ;
- (g)  $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ ;

Diz-se que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores ortogonais (ou perpendiculares), se  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $\langle (\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$ . Como consequência direta temos que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais (notação:  $\vec{u} \perp \vec{v}$  se, e somente se,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ ).

Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , com  $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ . Define-se o vetor projeção ortogonal de  $\vec{u}$  na direção de  $\vec{v}$ , ( $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ ), denotada por:  $[Proj]_{\vec{v}}(\vec{u})$ , que é o vetor  $\overrightarrow{AB'}$ , em que  $B'$  é o ponto obtido pela interseção da reta  $r$  que contém os pontos A e C; sendo a reta  $\tilde{r}$ , perpendicular à reta  $r$ , que passa pelo ponto B. Neste caso, queremos determinar as componentes do vetor  $[Proj]_{\vec{v}}(\vec{u}) = \overrightarrow{AB'}$ .

Geometricamente:

Figura 2.1: Projeção Ortogonal de  $\vec{u}$  em relação a  $\vec{v}$



Fonte: Elaborada pelo autor

O vetor Projeção ortogonal de  $\vec{u}$  em relação a  $\vec{v}$  pode ser calculado por  $[Proj]_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$

*Demonstração.* Como  $AB'$  e  $AC$  são colineares, temos que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que:  $AB' = \lambda AC = \lambda \vec{v}$ . Além disso temos que:  $-\vec{AB}' + \vec{AB} = -[Proj]_{\vec{v}}(\vec{u}) + \vec{u}$ .

Observe também que  $\langle \vec{AB}', \vec{B'B} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \lambda \vec{v}, \vec{u} - \lambda \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \lambda^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \lambda^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$ .

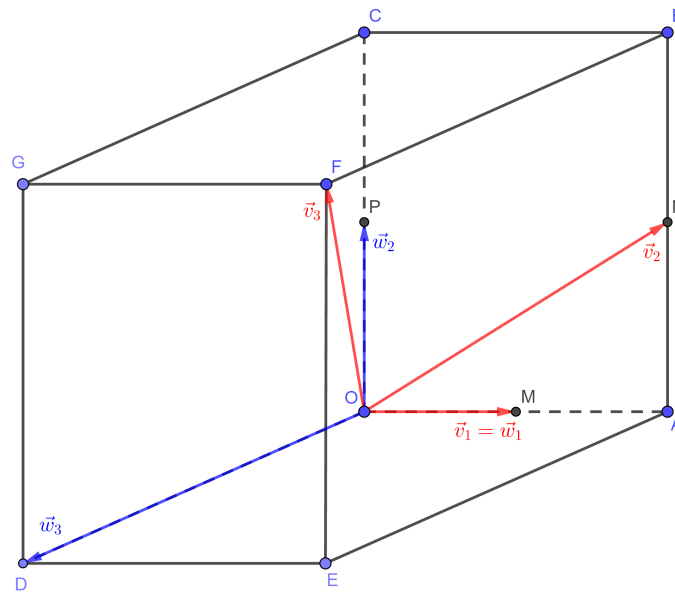
Para o caso  $\lambda = 0$ , temos  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . E isso implica  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ . Nesse caso também vale,  $\lambda = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$ , em que  $\lambda = 0$ .

Portanto,  $[Proj]_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$  □

Pode-se construir, pelo processo de Gram-Schmidt, em um espaço com produto interno não-nulo, de dimensão finita ( $< \infty$ ), uma base ortonormal (formada por vetores unitários e perpendiculares).

Geometricamente:

Figura 2.2: Projeção de Gram-Schmidt (tridimensional)



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \vec{v}_1 \\ \vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - [Proj]_{\vec{w}_1}(\vec{v}_2) \\ \vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - [Proj]_{\vec{w}_1}(\vec{v}_3) - [Proj]_{\vec{w}_2}(\vec{v}_3) \\ &\vdots \\ \vec{w}_n &= \vec{v}_n - \sum_{i=1}^{(n-1)} [Proj]_{\vec{w}_i}(\vec{v}_n) \end{aligned}$$

Na figura 2.2, observa-se que:  $M$ ,  $N$  e  $P$  são pontos médios, respectivamente, dos lados  $OA$ ,  $AB$  e  $OC$ ; e  $\vec{v}_1 = \vec{OM}$ ;  $\vec{v}_2 = \vec{ON}$ ; e  $\vec{v}_3 = \vec{OF}$  são três vetores LI, mas não ortogonais. Daí, com o processo de Gram-Schmidt, tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \vec{AN} = \vec{OP} \\ \vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|^2} \vec{w}_2 = \vec{v}_3 + \vec{BO} = \vec{BF} = \vec{OD}.\end{aligned}$$

Como  $\vec{OM} \perp \vec{OP} \perp \vec{OD} \Rightarrow \vec{w}_1 \perp \vec{w}_2 \perp \vec{w}_3$ , como se desejava.

Deste modo,  $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$  é uma base ortogonal para  $W$  e,  $Span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} = Span\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ , com  $\vec{w}_i = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ , tem-se que a normalização de  $\vec{w}_i$

será:  $\frac{1}{\|\vec{w}_i\|} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ , onde:  $\|\vec{w}_i\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (w_i)^2}$ .

Além do processo de Gram-Schmidt, em casos especiais, pode-se ortogonalizar matrizes, quando estas são simétricas ( $A = A^T$ ), com  $A$ , de ordem  $n \times n$ , sendo que seus autovetores, distintos no caso, formam uma base LI para  $\mathbb{R}^n$ .

Ademais, com a matriz  $A$ , diagonalizável, já que é simétrica, e semelhante á matriz  $D$ , temos que a  $P$  (formada pelos autovetores associados a seus respectivos autovalores a partir da matriz  $A$ ) é ortogonal, quer dizer,  $P^{-1} = P^T$  e,  $AA^T = A^T A = I_n$ , de forma que:  $A = PDP^{-1} = PDP^T$ .  $A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$ . Logicamente,  $D$  também é simétrica,  $D = D^T$ , pois é formada pelos autovalores, em ordem decrescente de seus valores absolutos, na diagonal principal.

**Teorema 2.5.** *Se  $A$  for uma matriz  $n \times n$ , então as afirmações seguintes são equivalentes:*

- (a)  $A$  é ortogonalmente diagonalizável.
- (b)  $A$  tem um conjunto ortonormal de  $n$  autovetores.
- (c)  $A$  é simétrica

*Demonstração.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Como  $A$  é ortogonalmente diagonalizável, existe alguma matriz ortogonal  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é diagonal. Como Os  $n$  vetores coluna de  $P$  são autovetores de  $A$ . Como  $P$  é ortogonal, esses vetores coluna são ortonormais, de modo que  $A$  tem  $n$  autovetores ortonormais.

(b)  $\Rightarrow$  (a): Suponha que  $A$  tenha um conjunto ortonormal  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de  $n$  autovetores. Como a matriz  $P$  que tem esses autovetores como colunas diagonaliza  $A$ . Como esses autovetores são ortonormais,  $P$  é ortogonal e, assim, diagonaliza  $A$  ortogonalmente.

(a)  $\Rightarrow$  (c): Na prova de (a)  $\Rightarrow$  (b), mostramos que uma matriz  $A$  de tamanho  $n \times n$  ortogonalmente diagonalizável é ortogonalmente diagonalizada por uma matriz  $P$  de tamanho  $n \times n$  cujas colunas formam um conjunto ortonormal de autovetores de  $A$ . Seja  $D$  a matriz diagonal,  $D = P^T A P \Leftrightarrow A = P D P^T$ . Assim  $A^T = (P D P^T)^T = P D^T P^T = P D P^T = A$ , o que mostra que  $A$  é simétrica.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Com os autovetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  associados aos autovalores distintos, respectivamente,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , deseja-se provar  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$ .

Observe que:  $\lambda_1 \vec{v}_1 \vec{v}_2 = (\lambda_1 \vec{v}_1)^T \vec{v}_2 = (A \vec{v}_1)^T \vec{v}_2$ , já que  $\vec{v}_1$  é autovetor de  $A$ .

Logo:  $(\vec{v}_1^T A^T) \vec{v}_2 = \vec{v}_1^T (A \vec{v}_2)$ , sendo  $A$  simétrica  $A = A^T$ .

E,  $\vec{v}_1^T (A \vec{v}_2) = \vec{v}_1^T (\lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_2 \vec{v}_1^T \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2$ , pois  $\vec{v}_2$  também é autovetor de  $A$ .



Então  $\lambda_1 \vec{v}_1 \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \vec{v}_2 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$ , com  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , necessariamente temos  $\vec{v}_1 \vec{v}_2 = 0$ . Portanto,  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ , com isso,  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$ , cqd.  $\square$

### 2.3.2 Teorema Espectral

Segundo Lay (1999): "A coleção dos autovalores de uma matriz  $A$  é chamada, algumas vezes, de *espectro* de  $A$ . A descrição do espectro dada a seguir é conhecida como um *teorema espectral*".

**Teorema 2.6. TEOREMA ESPECTRAL PARA MATRIZES SIMÉTRICAS:**

Uma matriz  $A$   $n \times n$  simétrica tem as seguintes propriedades:

- a.  $A$  tem  $n$  autovalores reais, contando multiplicidades.
- b. A dimensão do auto-espaço correspondente a cada autovalor  $\lambda$  é igual à multiplicidade de  $\lambda$  como raiz da equação característica.
- c. Os auto-espaços são ortogonais entre si, no sentido de que os autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.
- d.  $A$  é diagonalizável por matriz ortogonal

**Definição 2.2.** Se  $A$  for uma matriz simétrica ortogonalmente diagonalizada por  $P = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n]$  e se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  forem autovalores de  $A$  associados aos vetores unitários  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ , então sabemos que  $D = P^T A P$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal com os autovalores ao longo da diagonal. Segue disso que a matriz  $A$  pode ser expressa como

$$A = P D P^T = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} = [\lambda \mathbf{u}_1 \ \lambda \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \lambda \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix}$$

Multiplicando essas matrizes, obtemos a fórmula:

$$A = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T \tag{2.2}$$

que é denominada uma **decomposição espectral de  $A$** .<sup>2</sup>

**Teorema 2.7.** Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ . Se  $T : V \rightarrow V$  é um operador simétrico, então existe uma base ortonormal  $\beta$  tal que  $[T]_\beta^\beta$  é diagonal.

Vale observar que, um operador simétrico é também denominado operador auto-adjunto; e a equação característica de  $T$  possui  $n$  raízes reais (contadas com multiplicidade); Autovetores de  $T$  associados a autovalores distintos são ortogonais. Logo, equivale a este teorema a afirmação: Toda matriz simétrica ( $A = A^T$ ) é diagonalizável. E, além disso, esta matriz simétrica fornece uma base ortonormal (se for ortogonal, basta dividi-la pela norma de cada vetor componente da coluna) de autovetores.

Mas nem toda matriz é diagonalizável ortogonalmente, e conforme ensinamentos de Anton e Rorres (2012, p. 402-403 e 507), se  $A$  for uma matriz que não é diagonalizável ortogonalmente, ainda pode ser possível alcançar uma simplificação considerável na forma de  $P^T A P$  pela escolha apropriada da matriz ortogonal  $P$ .

<sup>2</sup>A terminologia decomposição espectral faz referência ao espectro de uma matriz, que é como muitas vezes é denominado o conjunto de todos os autovalores de uma matriz. A terminologia decomposição em autovalores se deve a Dan Kalman, que a introduziu num artigo científico premiado, intitulado "A Singularly Valuable Decomposition: The SVD of a Matrix," publicado no College Mathematics Journal, Vol. 27, No. 1, January 1996.

## 2.4 Decomposição em Valores Singulares

A partir do Teorema Espectral, tem-se a base para a Decomposição em Valores Singulares (DVS). Uma DVS, que é uma fatoração do tipo:  $A = U\Sigma V^T$  (com  $U_{m \times m}$  formada pelos vetores singulares à esquerda de  $A$  e  $V_{n \times n}$  formada pelos vetores singulares à direita de  $A$ , ambas ortogonais) é sempre possível, sendo a matriz  $A_{m \times n}$ , retangular (já que  $A^T A$  é quadrada e simétrica), onde os valores dos autovetores, em módulo, medem o quanto se estica (ou encurta) e rotacionam os vetores componentes da matriz  $A$ . A matriz  $\Sigma$ , também  $m \times n$  tem em sua diagonal principal os valores singulares de  $A$ , e os demais elementos nulos.

**Definição 2.3.** Se  $A$  for uma matriz  $m \times n$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $A^T A$ , então os números  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , tal que:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  são denominados valores singulares de  $A$ .

**Teorema 2.8. DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  de posto  $r$ . Então existe uma matriz  $m \times n$   $\Sigma$ :  $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , onde os elementos diagonais de  $D$  são os  $r$  primeiros valores singulares de  $A$ ,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ , e existe uma matriz ortogonal  $U_{m \times m}$  e uma matriz ortogonal  $V_{n \times n}$  tais que:  $A = U\Sigma V^T$

*Demonstração.* Suponha-se que  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é uma base ortonormal para  $\mathbb{R}^n$  consistindo em autovetores de  $A^T A$  ordenados de tal forma que os autovalores associados satisfaçam  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Se  $A$  tiver  $r$  autovalores singulares não-nulos, então:  $\{A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_r\}$  é uma base ortogonal para  $ColA$  e posto<sup>3</sup> de  $A = r$ .

Como  $\vec{v}_i$  e  $\lambda_j \vec{v}_j$  são ortogonais para  $i \neq j$ , sendo  $(A\vec{v}_i)^T (A\vec{v}_j) = \vec{v}_i^T A^T A \vec{v}_j = \vec{v}_i^T (\lambda_j \vec{v}_j) = 0$ . Logo,  $\{A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_r\}$  é um conjunto ortogonal. Além disso, como o comprimento dos vetores  $A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_r$  são os valores singulares de  $A$  e como existem  $r$  valores singulares não-nulos,  $A\vec{v}_i \neq 0$  se, e somente se,  $1 \leq i \leq r$ . Portanto,  $A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_r$  são vetores LI e pertencem à  $ColA$ .

Finalmente qualquer que seja  $\vec{y}$  em  $ColA$  —  $\vec{y} = A\vec{x}$ , onde  $\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n$  e  $\vec{y} = A\vec{x} = c_1 A\vec{v}_1 + \dots + c_r A\vec{v}_r + c_{r+1} A\vec{v}_{r+1} + \dots + c_n A\vec{v}_n = c_1 A\vec{v}_1 + \dots + c_r A\vec{v}_r + 0 + \dots + 0$ . Assim  $\vec{y}$  pertence a  $Span\{A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_r\}$ , o que mostra que  $\{A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_r\}$  é uma base (ortogonal) para  $ColA$ . Portanto, posto de  $A = dimColA = r$ .

Normalizando cada  $A\vec{v}_i$  obtendo uma base ortonormal  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$ , com  $\vec{u}_i = \frac{1}{\|A\vec{v}_i\|} A\vec{v}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\vec{v}_i$ . Então:

$$A\vec{v}_i = \sigma_i \vec{u}_i, \text{ com } (1 \leq i \leq r) \quad (2.3)$$

Agora vamos estender  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r\}$  a uma base ortonormal  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$  de  $\mathbb{R}^m$  e definir:  $U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_m]$  e  $V = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_m]$

Por construção  $U$  e  $V$  são ortogonais e de  $A\vec{v}_i = \sigma_i \vec{u}_i$ , com  $(1 \leq i \leq r)$ , temos:  $AV = [A\vec{v}_1 \ \dots \ A\vec{v}_r \ 0 \ \dots \ 0] = [\sigma_1 \vec{u}_1 \ \dots \ \sigma_r \vec{u}_r \ 0 \ \dots \ 0]$ .

Seja  $D$  a matriz diagonal cujos elementos diagonais são  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ , e seja  $\Sigma = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Então:

<sup>3</sup>posto ou *rank* é o número de linhas ou de colunas de uma matriz que são LI.

$$U\Sigma = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \cdots \ \vec{u}_m] \left[ \begin{array}{ccc|c} \Sigma_1 & & 0 & 0 \\ & \sigma_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_r \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right] = [\sigma_1 \vec{u}_1 \ \cdots \ \sigma_r \vec{u}_r \ 0 \ \cdots \ 0] = AV$$

Como  $V$  é uma matriz ortogonal,  $U\Sigma V^T = AVV^T = A$ .  $\square$

## 2.5 Matriz Bloco

Quando se utilizam softwares para processamento de dados, ganha especial relevância a compreensão do que seja matriz bloco, pois normalmente em computação gráfica, a transformação linear sofrida pelo objeto em estudo é perceptível a partir da organização de matrizes em submatrizes (blocos) da matriz original.

Desta forma, de acordo com Anton e Rorres (2012, p. 30-31), uma matriz pode ser particionada, ou subdividida, em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas. A partição de matrizes em blocos tem muitas utilidades, uma das quais sendo encontrar uma linha ou coluna específica de um produto matricial  $AB$  sem calcular todo o produto.

Lay (1999, p. 116) expõe a utilidade do uso de partições de matrizes para a álgebra linear moderna, como a possibilidade de considerar uma matriz  $A$  como uma coleção de vetores colunas, em vez de apenas um reticulado retangular de números. Esse ponto de vista tem sido tão útil que queremos considerar outras **partições** de  $A$ , indicadas por linhas divisórias horizontais e verticais. Matrizes particionadas aparecem com frequência em aplicações modernas da álgebra linear porque a notação simplifica muitas discussões e põe em evidência a estrutura essencial de cálculos matriciais.

- **Soma e Multiplicação por Escalar** - Se as matrizes  $A$  e  $B$  são do mesmo tipo e estiverem particionadas exatamente da mesma forma, então é natural fazer a mesma partição na soma  $A + B$ . Nesse caso, cada bloco de  $A + B$  é a soma (matricial) dos blocos correspondentes de  $A$  e  $B$ . A multiplicação por escalar de uma matriz particionada também é calculada bloco a bloco.
- **Multiplicação de Matrizes Particionadas** - As matrizes particionadas também podem ser multiplicadas pela regra usual da linha-por-coluna, como se os blocos fossem elementos numéricos, desde que, para um produto  $AB$ , a partição das colunas de  $A$  combine com a partição das linhas de  $B$ .

**Exemplo 2.1.** Seja a matriz  $A_{(4 \times 2)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix}$  e  $B_{(2 \times 4)} = \begin{bmatrix} i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$ . Então para determinarmos o produto  $A_{(4 \times 2)}B_{(2 \times 4)} = C_{(4 \times 4)}$ , podemos particionar as matrizes e fazer da seguinte forma:  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$  e  $B = [B_1 \mid B_2]$ , sendo  $A_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ;  $A_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ ;  $B_1 = \begin{bmatrix} i & j \\ m & n \end{bmatrix}$ ; e  $B_2 = \begin{bmatrix} k & l \\ o & p \end{bmatrix}$ .

Segue que:  $AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} [B_1 \mid B_2] = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & A_1 B_2 \\ A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$

Mas o particionamento não é único podendo existirem outros, desde que seja possível o produto dentro de cada bloco, de modo que  $[A_i]_{m \times n} [B_j]_{n \times p}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m, \dots, n$  e  $j = 1, 2, \dots, n, \dots, p$ ; com  $m < n < p$ . Poder-se-ia fazer a partição neste exemplo,

$$\text{da seguinte forma: } [A_1]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \\ g \end{bmatrix}; [A_2]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} b \\ d \\ f \\ h \end{bmatrix}; [B_1]_{1 \times 4} = [i \ j \ k \ l]; \text{ e} \\ [B_2]_{1 \times 4} = [m \ n \ o \ p].$$

$$\text{Segue que: } AB = [A_1 \mid A_2] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = [A_1 B_1 \ A_1 B_2 \ A_2 B_1 \ A_2 B_2] = [C]_{4 \times 4}.$$

Ou, ainda:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right], \text{ onde: } A_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix}; \text{ e } A_4 = \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix}.$$

$$B = \left[ \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right], \text{ onde: } B_1 = [i \ j]; B_2 = [k \ l]; B_3 = [m \ n]; \text{ e } B_4 = [o \ p].$$

$$\text{Logo: } \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ \hline A_3 B_1 + A_4 B_3 & A_3 B_2 + A_4 B_4 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array} \right]$$

Para diagonalização de matrizes particionadas o processo que é feito com o complemento de Schur, fornece a seguinte decomposição:

Seja a matriz quadrada simétrica  $X$ , dizemos que  $[C] - [B]^T [A]^{-1} B$  é o complemento de Schur de  $X$  em relação a  $A$ , quando  $A$  for simétrica e, por conseguinte, não-singular,  $\text{Det}(A) \neq 0$ , então:

$$X = \left[ \begin{array}{c|c} [A] & [B] \\ \hline [B]^T & [C] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline [B]^T [A]^{-1} & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} [A] & 0 \\ \hline 0 & [C] - [B]^T [A]^{-1} [B] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} I & [A]^{-1} [B] \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

É uma decomposição  $LDU$  (cujo produto é formado por uma matriz triangular inferior; uma diagonal; e uma triangular superior; no caso, com arranjo em blocos). Sobre a Decomposição  $LDU$ , Anton e Rorres (2012, p. 485), afirma que pode ser provado que se  $A$  for uma matriz quadrada que pode ser reduzida à forma escalonada por linhas sem permuta de linhas, então  $A$  pode ser fatorada de maneira única como  $A = LDU$  onde  $L$  é uma matriz triangular inferior com entradas na diagonal principal iguais a 1,  $D$  é uma matriz diagonal e  $U$  é uma matriz triangular superior com entradas na diagonal principal iguais a 1. Essa decomposição é denominada decomposição  $LDU$  de  $A$ , ou fatoração  $LDU$  de  $A$ .

O processo de decomposição de uma matriz como produto de outras, sendo estas outras triangulares ou diagonais em muito facilita a obtenção dos determinantes, pois nestas últimas tem-se o determinante como o produto dos componentes da diagonal principal. Para melhor sistematização do processo, seja a matriz  $A$  particionada do modo a seguir:

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right]. \text{ Então } A \text{ pode ser triangularizada, tanto de modo inferior (Lower), como superior (Upper), conforme se segue:}$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} I & -(A_{11})^{-1} A_{12} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & B \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & B \end{array} \right]$$

onde,  $B = (A_{22}) - (A_{21})(A_{11})^{-1}(A_{12})$ .

E, para se diagonalizar  $A$ , basta multiplicá-la pelas matrizes que a triangulariza, superior e inferiormente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} I & -(A_{11})^{-1}A_{12} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \dots \\ \dots & = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & B \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} I & -(A_{11})^{-1}A_{12} \\ \hline 0 & I \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right] \end{aligned}$$

Logo  $LAU = D$  é equivalente a  $L^{-1}LAUU^{-1} = L^{-1}DU^{-1}$ . Então  $A = L^{-1}DU^{-1}$ , onde  $Det(D) = A_{11}B$  ;  $Det(L) = 1$ ;  $Det(U) = 1$ . Com isso:

$$L^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{array} \right] \text{ e } U^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} I & (A_{11})^{-1}A_{12} \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

## 2.6 Tabelas de Contingência

Diz-se que tabelas de Contingência (ou tabelas de frequência de dupla entrada) são tabelas em que as frequências correspondem a classificações dispostas em linhas e colunas. Para Jelihovschi (2014), tabela é uma forma de organizar os dados. É uma tabela de tabulação cruzada de duas ou mais variáveis categóricas, podendo também ser chamada de fatores. Em geral, é o primeiro passo a ser dado com a finalidade de tornar as palavras, letras ou números, ou seja, os nossos dados, mais informativos. Imagine se você coletasse uma amostra de uma variável categórica, um questionário cujas respostas fossem ótimo, bom, regular, ruim e péssimo. O tamanho da amostra é de 100 objetos. Neste caso, os dados brutos são cem repetições destas palavras. Exatamente por isso vemos a necessidade de organizar estes dados de forma tal que possamos começar a retirar deles a informação útil que queremos.

As representações tabulares ou, como são chamadas mais comumente, tabelas, são tais que o ato de tabulação, ou seja, fazer uma tabela significa agregar as medidas da variável em questão que tenham uma propriedade em comum. Além disso, cada variável pode ser dicotômica, ou seja, ela somente tem dois resultados, também chamados de níveis; ou politômica, com vários níveis. Por exemplo, a variável sexo é dicotômica, enquanto a variável classe social é politômica, classe A, B, C ou D.

Segundo Morettin e Bussab (2010) para construção destas tabelas consideram-se duas variáveis (ou dois conjuntos de dados), em relação aos quais temos três situações, em que 1) as duas variáveis são qualitativas; ou 2) as duas variáveis são quantitativas; ou 3) uma variável é qualitativa e outra é quantitativa. As técnicas de análise de dados nas três situações são diferentes. Quando as variáveis são qualitativas, os dados são resumidos em tabelas de dupla entrada (ou de contingência), onde aparecerão as frequências absolutas ou contagens de indivíduos que pertencem simultaneamente a categorias de uma e outra variável. Quando as duas variáveis são quantitativas, as observações são provenientes de mensurações, e técnicas como gráficos de dispersão ou de quantis são apropriadas. Quando temos uma variável qualitativa e outra quan-

titativa, em geral analisamos o que acontece com a variável quantitativa quando os dados são categorizados de acordo com os diversos atributos da variável qualitativa. Mas podemos ter também o caso de duas variáveis quantitativas agrupadas em classes. Por exemplo, podemos querer analisar a associação entre renda e consumo de certo número de famílias e, para isso, agrupamos as famílias em classes de rendas e classes de consumo. Desse modo, recaímos novamente numa tabela de dupla entrada.

Logo, o elemento  $a_{ij}$  corresponde ao número de observações frequentes pela intersecção entre as categorias das variáveis, onde:  $a_{i+} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$  representa o subtotal i-ésima linha; e  $a_{+j} = \sum_{i=1}^m a_{ij}$  representa o subtotal da j-ésima coluna; e  $a_{++} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$  representa o total geral de frequência das observações (em linhas e colunas). Segue exemplo de tabela:

Tabela 2.1: Tabela de Contingência A

	Y				Total
	1	2	...	n	
1	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$	$a_{1+}$
2	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$	$a_{2+}$
X	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	$a_{m+}$
Total	$a_{+1}$	$a_{+2}$	...	$a_{+n}$	$a_{++} = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor

## 2.7 Biplots

Há possibilidade de exibição por meio de biplot para qualquer matriz de posto dois, onde se tem um vetor para cada linha e um vetor para cada coluna, escolhidos de modo que qualquer elemento da matriz seja exatamente o produto interno dos vetores correspondentes à sua linha e à sua coluna. Também se podem exibir por meio de biplot matrizes de posto mais alto, como aproximação por matriz de posto dois que se aproxima da matriz original. Assim, tem-se uma ferramenta útil de análise de dados que permite a avaliação visual da estrutura de grandes matrizes de dados.

Para Greenacre (2010), biplots são definidos como a decomposição de uma matriz alvo no produto de duas matrizes, chamadas matrizes esquerda e direita:  $S = XY^T$ . Os elementos na matriz alvo  $S$  são iguais aos produtos escalares entre os pares correspondentes de vetores nas linhas de  $X$  e  $Y$  respectivamente. O biplot faz com que as informações em uma tabela de dados se tornem transparentes, revelando as principais estruturas nos dados de maneira metódica, por exemplo, padrões de correlações entre variáveis ou semelhanças entre as observações. Matrizes de dados retangulares são a "matéria-prima" em muitas áreas de pesquisa, existentes em planilhas ou bancos de dados.

Os vetores nas matrizes esquerda e direita fornecem dois conjuntos de pontos, um dos quais pode ser considerado como um conjunto de vetores biplot definindo eixos biplot e o outro como um conjunto de pontos biplot. Os pontos podem ser projetados perpendicularmente aos eixos biplot para recuperar os valores na matriz alvo, uma vez que os comprimentos dessas projeções multiplicados pelos comprimentos dos vetores biplot correspondentes são iguais aos produtos escalares e, portanto, por sua vez, iguais aos valores alvo.

Ainda sugere que poderia ser chamado de biplots de posto reduzido, a parte na qual examina a teoria e a prática da redução de dimensionalidade e como uma matriz de dados de determinada dimensionalidade pode ser idealmente aproximada por uma matriz de menor dimensionalidade, onde se trabalha um dos resultados mais úteis da álgebra matricial, a decomposição em valores singulares. Algebricamente, o conceito geométrico de dimensionalidade é equivalente ao posto de uma matriz. Esse resultado não apenas nos fornece uma solução para a aproximação de posto reduzido de uma matriz otimizada, mas também fornece os valores de coordenadas dos pontos no biplot correspondente.

Logo, como o próprio nome diz, bi em biplot, refere-se ao fato de que dois conjuntos de pontos (ou seja, as linhas e colunas da matriz alvo) são visualizados por produtos escalares, não o fato de que a exibição é geralmente bidimensional. O biplot e sua geometria mantêm espaços de qualquer dimensionalidade, mas precisaremos de técnicas de redução de dimensão na prática quando as matrizes de dados tiverem alta dimensionalidade inerente e uma representação for necessária em relação a um baixo número de dimensões, geralmente dois ou três.

Já Torres-Salinas *et al.* (2013), elucidam sobre a interpretação das informações fornecidas pelo biplot, sendo este uma representação gráfica de dados multivariados, onde os elementos da matriz são representados de acordo com pontos, formando vetores associados às linhas e às colunas da matriz. O mapa bibliométrico e a técnica de visualização representam um dos principais pilares no campo da métrica científica. Assim, biplot é uma técnica de representação de dados que consiste em visualizar a matriz com mais de duas variáveis em um gráfico de menor dimensão, onde cada linha representa um sujeito e cada coluna uma variável. Esta técnica é aplicada usualmente após uma análise multivariada ser realizada, alcançando análise log-ratio, análise de componente principal ou análise de correspondência. Entretanto, para qualquer método temos que estes são baseados em DVS.

O Biplot é baseado no mesmo princípio de outras técnicas fatoriais para redução dimensional, com apenas uma diferença, ele representa não só dados, mas também variáveis, obtendo uma representação dual entre as componentes e coordenadas principais. Esta interpretação é baseada em conceitos geométricos que são intuitivos para o pesquisador, facilitando seu entendimento. Uma representação por biplot pode ser interpretada segundo características como a similaridade dos sujeitos (linhas), como uma função inversa da distância entre eles; o comprimento e os ângulos dos vetores (colunas) representam a variância e a covariância, respectivamente; assim como a relação entre linhas e colunas deve ser entendida como produtos de pontos, isto é, a projeção dos casos sobre as variáveis.

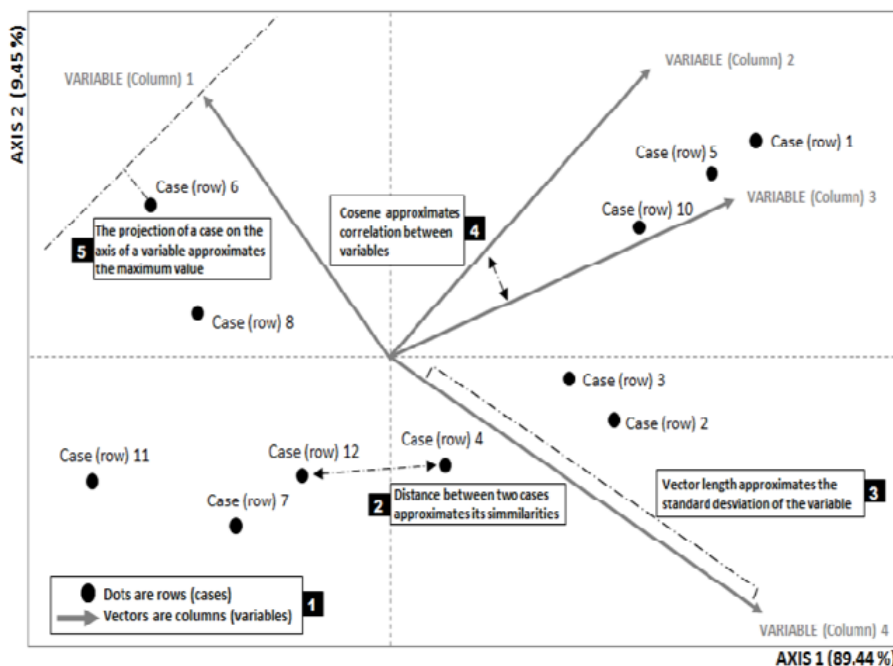
Duas variáveis correlacionadas positivamente são representadas com seus eixos no biplot apontando para direções similares, com objetos com maior ou menor valor para uma das variáveis correlacionadas. Contrariamente, se as variáveis são correlacionadas negativamente, existem objetos com valores maiores para uma das variáveis e menor

para outra variável. Isso significa que a correlação entre as variáveis pode ser obtida pelo ângulo que elas formam. Além disso, um ângulo agudo entre variáveis presumiria correlação positiva entre elas; um ângulo obtuso entre as variáveis presumiria uma correlação negativa; e o ângulo reto, ausência de correlação entre as variáveis. Estas correlações são representações aproximadas pela média do cosseno dos ângulos.

Outro aspecto importante quando interpretamos uma representação Biplot seria como fazer a disposição dos eixos. Normalmente, estes se encontram centrados no que cada objeto significa para as variáveis. Também a norma dos vetores é significativa, com uma disposição aproximada do valor do desvio-padrão das variáveis. Desta forma, seguindo a Figura 2.3, apresentam-se cinco elementos a serem levados em consideração na análise futura, sendo elas:

1. Pontos são linhas (casos) e vetores são colunas.
2. A distância entre dois casos aproxima sua similaridade.
3. O comprimento do vetor aproxima-se do desvio-padrão das variáveis.
4. O cosseno do ângulo entre dois vetores aproxima-se da correlação entre as variáveis.
5. A projeção de um caso sobre o eixo de uma variável aproxima-se do valor máximo.

Figura 2.3: Interpretação Básica de uma Representação Biplot



Fonte: Torres-Salinas *et al* (2013)

## 2.8 Sistema de Aprendizagem Profissional

A definição do conceito de aprendizagem na linguagem cotidiana, segundo Aulete (2004), Ausubel *et al.* (1983), Ferreira (1999) e Salvador (1994), *apud* Coelho Júnior e



Borges-Andrade (2008, p. 224), é feita considerando os principais usos do conceito de aprendizagem na linguagem cotidiana referindo-se à: (1) ação de reter algo, de fixar algo na memória, qualquer ofício, arte, ciência ou uma profissão (saber como, tornar-se capaz de); (2) ato, processo ou efeito de obter conhecimento por meio de escolarização/estudo, ficar sabendo (de algo com alguma finalidade); (3) aprender algo ou alguma coisa (conhecimento ou habilidade) por meio de escolarização e estudo, instruir-se em e instruir-se para; (4) adquirir habilidade prática (em aprender um esporte); (5) conhecimento ou habilidade obtido por meio de treino e/ou estudo, aplicada a principiantes em torno da aquisição de algo; (6) reter algo na memória, esforço deliberado para se obter conhecimento sobre algo e que se relaciona à vontade de aprender; (7) vivência, carga afetiva e de sensibilidade "aprendeu com a vida".

Verifica-se, em geral, que os principais usos cotidianos do conceito de aprendizagem remetem à aquisição de algum tipo de conhecimento ou habilidade, por meio de atividades formais de instrução. Tais conhecimentos e habilidades são direcionados a algum tipo de desempenho. Os indivíduos aplicam o que foi adquirido para alguma finalidade. O ato de aprender, portanto, seria uma ação proposital, e ocorreria em função do preenchimento de algo (alguma demanda ou necessidade) no repertório apresentado pelo indivíduo, conforme Coelho Júnior e Borges-Andrade (2008, p. 224).

O sistema de Aprendizagem profissional é intimamente ligado ao trabalho infantil, e remonta à Revolução Industrial, que é um marco no que tange à exploração do trabalho. Nas corporações de ofício, nas quais o trabalhador tinha o intuito de aprender, notamos as raízes do sistema de aprendizagem, embora muito aquém do regramento atualmente existente no Brasil. Neste contexto, ilustra-se com a imagem a seguir:

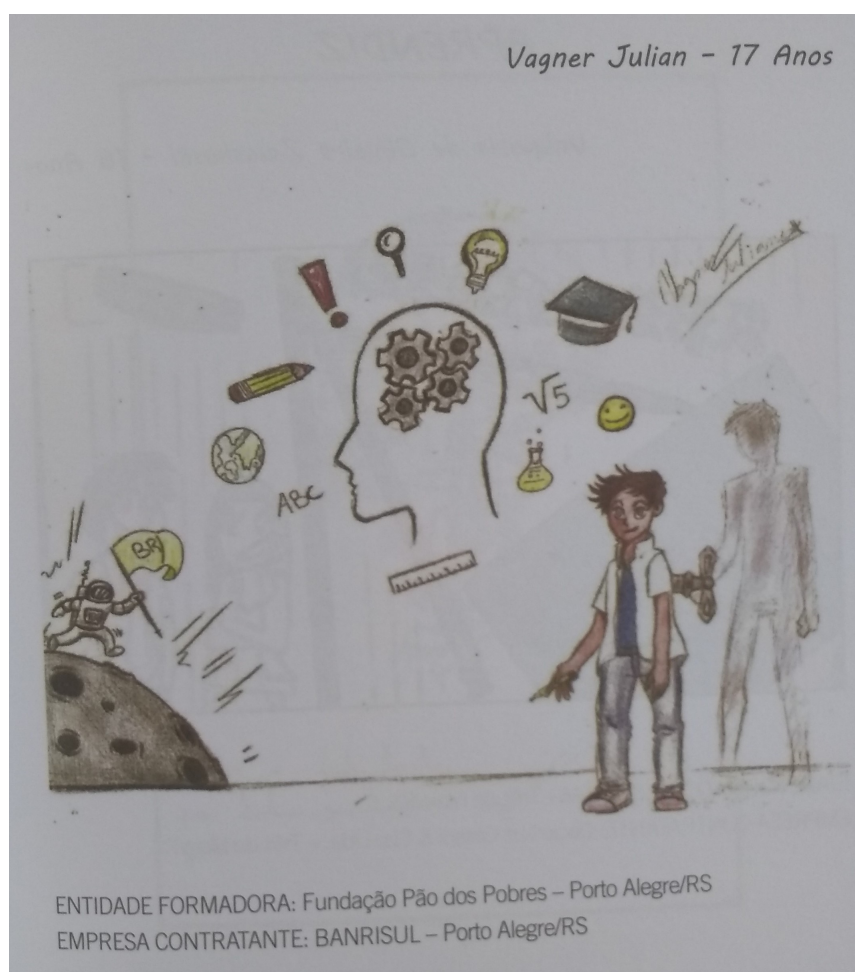
A aprendizagem é desenvolvida com base em um contrato especial de trabalho ajustado por escrito e por prazo determinado de no máximo dois anos, em que o empregado é submetido a uma formação técnico profissional metódica, com etapas teóricas e práticas, estabelecidas em programa de aprendizagem formatado e sob responsabilidade de entidades especializadas em formação profissional. Elucidando a importância da temática, temos que esta é tratada na Constituição da República Federativa do Brasil de 1988, no artigo 7º, sendo "direitos dos trabalhadores urbanos e rurais, além de outros que visem à melhoria de sua condição social: (...) XXXIII - proibição de trabalho noturno, perigoso ou insalubre a menores de dezoito e de qualquer trabalho a menores de dezesseis anos, salvo na condição de aprendiz, a partir de quatorze anos"; e também no artigo 227:

" É dever da família, da sociedade e do Estado assegurar à criança, ao adolescente e ao jovem, com absoluta prioridade, o direito à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária, além de colocá-los a salvo de toda forma de negligência, discriminação, exploração, violência, crueldade e opressão (BRASIL, 1988).

O manual de aprendizagem de 2014 do MTE (p. 13-14), apesar de alterações legislativas, ainda é útil para elucidação de alguns conceitos (*mutatis mutandis*, diga-se, atualizando as normatizações referentes à temática), tendo por objetivo " orientar os empregadores e as entidades formadoras habilitadas a respeito dos procedimentos que devem ser observados para a contratação de aprendizes à luz da Portaria MTE nº 723, de 2012<sup>4</sup>.", e expõe que a aprendizagem é o instituto destinado à formação técnico-

<sup>4</sup>Atualizada pela Portaria n. 634, de 2018

Figura 2.4: Educação Engrenagem Central



Fonte: FOGAP (2018, p.157)

profissional metódica de adolescentes e jovens, desenvolvida por meio de atividades teóricas e práticas e que são organizadas em tarefas de complexidade progressiva. Tais atividades são implementada por meio de um contrato de aprendizagem, com base em programas organizados e desenvolvidos sob a orientação e responsabilidade de entidades habilitadas. (Lei nº. 8.069/90 Art. 62 e CLT Art. 428)

Já o Contrato de aprendizagem é definido como o acordo de trabalho especial, ajustado por escrito e por prazo determinado não superior a dois anos, em que o empregador se compromete a assegurar ao aprendiz, inscrito em programa de aprendizagem, formação técnico-profissional metódica compatível com o seu desenvolvimento físico, moral e psicológico. Em contraponto, o aprendiz se compromete a executar com zelo e diligência as tarefas necessárias a essa formação. A validade do contrato de aprendizagem pressupõe anotação na Carteira de Trabalho e Previdência Social, matrícula e frequência do aprendiz à escola, caso não haja conclusão do Ensino Fundamental. Além disso, é necessário a inscrição em programa de aprendizagem desenvolvido sob a orientação de entidade qualificada em formação técnico-profissional metódica.

E, por fim, o programa de aprendizagem, neste caso, tem natureza técnico-profissional que prevê a execução de atividades teóricas e práticas, sob a orientação pedagógica de

entidade qualificada em formação técnico-profissional metódica e com atividades práticas coordenadas pelo empregador. As atividades devem ter a supervisão da entidade qualificadora, em que se é necessário observar uma série de fatores, como o público-alvo, indicando o número máximo de aprendizes por turma; perfil socioeconômico e justificativa para seu atendimento; objetivos do programa de aprendizagem, com especificação do propósito das ações a serem realizadas e sua relevância para o público participante, a sociedade e o mundo do trabalho; conteúdos a serem desenvolvidos, contendo os conhecimentos, habilidades e competências, sua pertinência em relação aos objetivos do programa, público participante a ser atendido e potencial de aplicação no mercado de trabalho; estrutura do programa de aprendizagem e sua duração total em horas, observando a alternância das atividades teóricas e práticas, bem como a proporção entre uma e outra, em função do conteúdo a ser desenvolvido e do perfil do público participante; mecanismos de acompanhamento e avaliação do programa de aprendizagem e mecanismos de inserção dos aprendizes no mercado de trabalho após o término do contrato de aprendizagem; e o período de duração - carga horária teórica - observando a concomitância e os limites mínimo e máximos das atividades práticas, observando os parâmetros estabelecidos na Portaria MTE nº 723, de 23 de abril de 2012.

Como reflexo do embate, que polariza opiniões, o que é próprio das relações sócio-laborais, traz-se a lume celeuma que existe quando se fala na obrigatoriedade do cumprimento de cotas em empresas nas quais suas atividades são preponderantemente insalubres, perigosas ou noturnas, o que é vedado ao menor. Mas a reticência em contratação de aprendiz reside exatamente no desconhecimento da sistemática do sistema de aprendizagem profissional no Brasil. Primeiro porque não é somente menor de idade que é aprendiz (como o vício que se criou na nomenclatura "menor aprendiz"), pois há aprendizes também na faixa etária entre 18 e 24 anos de idade, sem se falar no aprendiz com deficiência, que pode ultrapassar os 24 anos de idade. Não se apregoa que se coloquem aprendizes em atividades perigosas ou insalubres, em verdade, as medidas de proteção, medidas coletivas e administrativas devem ser implementadas para que se eliminem ou pelo menos reduzam a exposição de trabalhadores nestas atividades, propiciando redução danos psicofisiológicos.

Mas se, mesmo com esforços, considerando os avanços tecnológicos (estado da arte), não for possível eliminar ou reduzir aos níveis normais para exercício das atividades em determinados setores, logicamente que não se admitirão aprendizes, e até mesmo não se admite que qualquer ser humano seja exposto à atividade que lhe prejudique e o adoça ou lhe vitimize com acidente (admitir o contrário é a chamada precarização e coisificação de pessoas, mercantilização da mão de obra, retroagindo aos primórdios da Revolução Industrial, em que as reações a estes excessos foram proporcionalmente cruéis, como no Ludismo, no início do século XIX). Neste caso, automação ou outras medidas que vão muito além da cultura simplista de adoção de equipamentos de proteção individual (EPI), devem ser adotadas. Mas então, e estas empresas como ficariam em relação à cota de aprendizes? Dispensadas? Não. Pois, neste caso, que é certamente exceção e residual em relação às atividades das empresas nacionais, há a possibilidade de que a parte prática das aulas sejam cumpridas na própria entidade formadora ou em concedente da experiência prática do aprendiz, é a adoção da modalidade alternativa de cumprimento de cota <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Decreto nº 9579/2018, art. 65, estabelece que: "As aulas práticas poderão ocorrer na própria entidade qualificada em formação técnico-profissional metódica ou no estabelecimento contratante ou

Porém, enquanto determinados setores que têm obrigação legal de contratar aprendizes mostram-se reticentes (motivados pela desinformação ou ignorância, quiçá proposital, cegueira deliberada), em outros vislumbram-se esforços, como é o caso de aprendiz em teatro, cuja capacitação é oferecida a jovens, alunos de escolas públicas e adolescentes que cumprem medidas socioeducativas, com idades entre 16 e 22 anos. Tem-se visibilidade, conscientização e ampliação do debate social, em projetos como este, apesar de possuir abrangência reduzida, comparativamente com os demais, nos quais se concentram as empresas de maior porte econômico (que tem obrigação de contratar aprendizes, que não são Micro ou Pequenas Empresas).

Tem-se, no mesmo sentido, as declarações do Presidente da Fundação Anita Mantuano de Artes do Estado do Rio de Janeiro - FUNARJ, Nelson Freitas, para quem: "(...) o teatro é a arte de inventar a vida, e porque também é uma ferramenta de articulação com os meios, de preparo com a comunicação, de fortalecimento da capacidade crítica. Ou seja, ele prepara para a vida".

Destarte, notam-se questões pertinentes à aprendizagem profissional, nas quais se elucidam sua importância, como fator de modificação nas oportunidades de vida profissional, na organização familiar, sem se falar no próprio embate entre detentores dos meios de produção *versus* força de trabalho, bem como na dinâmica em que o Direito é construído e reconstruído, buscando-se a harmonia e o convívio em sociedade.

Ademais, a relevância social e utilidade pública que tangencia o Sistema de Aprendizagem profissional suscitam debates sobre as características do mercado de trabalho e da qualificação da mão de obra que lhe é disponibilizada e as distorções de nosso sistema. Assim, quando se trata da análise das condições de trabalho de jovens, o sistema de qualificação e os déficits e problemas do mercado de trabalho, tem-se a precarização que é bem definido o contexto em que surgem os ganchos, tachos e biscates<sup>6</sup>, segundo Machado Pais(2001), fruto de um mercado de trabalho fortemente segmentarizado em termos geracionais. A modernização da economia portuguesa tem originado uma flexibilização crescente das estruturas produtivas e dos usos da força de trabalho. É no segmento mais débil do mercado de trabalho que um número considerável de jovens portugueses ensaia, por múltiplas tentativas e variadas formas de precariedade, a sua inserção - nem sempre conseguida. E conclui:

---

concedente da experiência prática do aprendiz." c/c Decreto 8740/2016, que inclui o art. 23-A ao Decreto 5598/2005, que diz:

Art. 23-A. O estabelecimento contratante cujas peculiaridades da atividade ou dos locais de trabalho constituam embaraço à realização das aulas práticas, além de poderem ministrá-las exclusivamente nas entidades qualificadas em formação técnico profissional, poderão requerer junto à respectiva unidade descentralizada do Ministério do Trabalho e Previdência Social a assinatura de termo de compromisso para o cumprimento da cota em entidade concedente da experiência prática do aprendiz. (...) § 2º Consideram-se entidades concedentes da experiência prática do aprendiz: I - órgãos públicos; II - organizações da sociedade civil, nos termos do art. 2º da Lei nº 13.019, de 31 de julho de 2014; e III - unidades do Sistema Nacional de Atendimento Socioeducativo - Sinase.

<sup>6</sup>Ganchos e biscates são termos que se usam em sentido equivalente, traduzindo o exercício de atividades profissionais de carácter precário ou secundário. No caso de atividades ilícitas, usa-se mais o gancho. Tacho é o termo cujo uso tradicional deriva da expressão "ganhar para o tacho". Atualmente designa, mais frequentemente, uma ocupação bem remunerada e conseguida através de influências pessoais ("cunhas").

Os estudos sobre juventude nem sempre refletem a realidade juvenil. Apenas a traduzem. Mas a podem traduzir de maneira distorcida, com ocultações e desvios. Por isso, importa não ser realista no sentido trivial (que seria o que decorre de uma adaptação à imediaticidade do real); nem irrealista no sentido trivial (como se passa ao descurar as condicionantes da realidade); importa ser realista no "sentido complexo"<sup>7</sup>, isto é, importa compreender as incertezas da realidade; importa saber que há algo possível ainda que invisível ou mascarado. (MACHADO PAIS, 2001, p. 299).

Então, além do direcionamento da atuação estatal dotada de Poder de Polícia, há utilidade para a compreensão da dinâmica dos setores econômicos, que têm aporte de recursos públicos, notadamente os Serviços Nacionais de Aprendizagem, que são: Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (SENAI); e Serviço Nacional de Aprendizagem do Comércio (SENAC); Serviço Nacional de Aprendizagem Rural (SENAR); Serviço Nacional de Aprendizagem do Cooperativismo (SESCOOP); e Serviço Nacional de Aprendizagem do Transporte (SENAT).

---

<sup>7</sup>Edgar Morin *apud* Machado Pais, José. Les Septs Savoirs Nécessaires à l'Éducation du Futur, Unesco, Paris, 1999.

## 3 Metodologia

O conhecimento e domínio de conteúdos matemáticos de Álgebra Linear, de Estatística e uso de recursos computacionais, como o software R, são as bases para a análise dos dados no presente trabalho. Logo, além da compreensão da relevância social da temática, sobressai o tratamento das bases em relação ao ensino, com atividades em que se propõe o trabalho e compreensão de matrizes, como conteúdo de nível fundamental e médio, com os avanços e aprofundamentos propostos em Decomposição em Valores Singulares, Análise de gráficos Biplots, autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes.

A base de dados para utilização da técnica de DVS para matrizes combinadas tem como fonte dados disponíveis no Painel de informações e estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil, denominado RADAR, da Secretaria de Inspeção do Trabalho - SIT. Conforme Figura 3.1 (Disponível em: <<https://sit.trabalho.gov.br/radar>>. Acesso em: 22 jul. 2019), são dados públicos, a partir do ano de 2016, que compilam resultados da fiscalização e auditoria sobre vínculos, FGTS, Autuações, Aprendizagem, Pessoas Com Deficiência (PCD), Segurança e Saúde no Trabalho (SST), Acidentes de Trabalho, Trabalho Escravo e Trabalho Infantil.

Os métodos estatísticos adotados, com base na Decomposição em Valores Singulares e interpretação dos dados por meio de biplots, lastreiam a presente. Para análise de dados qualitativos ou quantitativos discretizados, é útil a aplicação das tabelas de contingência. A detecção da associação entre duas ou mais variáveis de uma tabela de contingência é o principal objetivo da análise categórica.

Há muitas técnicas que oferecem resumos numéricos de associação, principalmente para fornecer uma perspectiva gráfica para esta questão. Os procedimentos mais comuns são, por exemplo, a análise de componentes principais, a análise de correspondência e biplots em geral. Estes últimos representam interfaces gráficas das  $n$  linhas e  $m$  colunas da matriz de dados na forma de um mapa, geralmente bidimensionais, e são baseados na decomposição em valores singulares (DVS) de uma matriz (Greenacre, 2003). Esta técnica permite que o usuário visualize a correspondência entre as categorias em espaço dimensional reduzido.

De acordo com Gabriel (1971), o biplot representa uma matriz de posto dois exatamente, para a acurácia de plotagem, e permite uma rápida avaliação visual da estrutura da matriz. Um produto interno de dois vetores pode ser avaliado visualmente considerando-o como o produto do comprimento de um dos vetores multiplicado pelo comprimento da projeção do outro vetor sobre ele. Isso permite ver facilmente quais linhas ou colunas são proporcionais a quais outras linhas ou colunas (mesmas direções), quais entradas são zero (ângulos retos entre os efeitos de linha e coluna), etc.

Pode ser realizada uma análise considerando a soma ou a diferença entre tabelas de

Figura 3.1: Página do Painel de Informações e Estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil



Fonte: RADAR SIT

contingência (Greenacre, 2003). Desta forma, a tabela de contingência  $A_{m \times n}$ , com  $m$  categorias de linhas representando a variável linha ( $\mathbf{X}$ , no caso, nas aplicações foram os Estados) e  $n$  categorias de colunas da variável coluna ( $\mathbf{Y}$ , nas aplicações, *in concreto*, foram as categorias de atividade econômica: Indústria, Construção, Comércio, Transporte e Outros).

É comum obter tabelas de contingência oriundas de épocas ou grupos distintos envolvendo as mesmas variáveis em linha e coluna e pode haver interesse em saber se duas tabelas estão relacionadas, e o quanto estão relacionadas. Estas são as denominadas tabelas ou matrizes combinadas. Esta análise conjunta de duas matrizes que têm linhas e colunas em comum, originando, dados multivariados observados em dois momentos ou divididos de acordo com uma variável dicotômica, podem ocorrer, por exemplo, com tabelas observadas em diferentes épocas, indicadores econômicos (colunas) observados em um conjunto de países (linhas) em anos sucessivos; ou as classificações de um produto já existente em um conjunto de atributos (colunas) de uma amostra de consumidores (linhas) (Dossou-Gbété Grorud, 2002).

Quando se tem esta situação, há necessidade de alterar a decomposição em valores singulares tradicionalmente utilizada. Com tal finalidade, Greenacre (2003) propôs a decomposição para matrizes (tabelas) combinadas. Greenacre (2003) mostra que, através da organização de duas matrizes ( $A$  e  $B$ ) em um determinado formato bloco, componentes da matriz soma ( $A + B$ ) e da diferença ( $A - B$ ), podem ser analisados utilizando um algoritmo adaptado para a decomposição em valores singulares (DVS) dessas matrizes. Geralmente a soma das duas matrizes, fornece uma ideia geral da variabilidade das colunas. A diferença incidirá sobre as diferenças entre as matrizes

dentro de cada variável das linhas e como estas variam entre as linhas. Neste caso os biplots resultantes exibem, de forma otimizada, as diferenças entre as colunas e linhas, bem como as diferenças entre as duas matrizes, sendo este usualmente do tipo 'assimétrico'.

### 3.1 Aplicação em Dados Fictícios

Para elucidação e compreensão da teoria abordada no referencial teórico, foram desenvolvidos exemplos das aplicações atinentes aos temas abordados. E, da mesma forma, expôs-se como é possível fazer a conexão entre a álgebra linear e geometria analítica com a estatística, por meio de exemplificações fictícias, com meros fins didáticos e que são base do presente.

Assim, sejam os dados observados em determinada amostra agrupados, de forma matricial, por exemplo, uma matriz de ordem  $m \times n$ , de forma que se é possível fazer a construção da Decomposição em Valores Singulares (Reduzida e Completa).

### 3.2 Uso do *script* no software *R* para realização da Decomposição em Valores Singulares em matriz bloco

Foi elaborado um *script* no *software R* (2018) para realização da Decomposição em Valores Singulares, DVS, em matriz bloco, de forma que se contemplaram as seguintes etapas, no processamento da DVS para matrizes bloco, na qual se formou uma matriz de  $m$  linhas e  $n$  colunas:

- (i) Inserção dos dados por colunas em relação ao primeiro período em análise e consecutivamente os dados do segundo período;
- (ii) Montagem das matrizes particionadas individuais  $A_1$  e  $B_1$ ;
- (iii) Formação da matriz bloco específica para a DVS:  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & A_1 \end{bmatrix}$ ;
- (iv) Correção das matrizes pela média, com:  $\bar{c} = \frac{(\text{Média da Matriz A} + \text{Média da Matriz B})}{2}$ , levando à correção da matriz bloco por  $\bar{c}$ ;
- (v) Realização da DVS utilizando o comando: "svd";
- (vi) Interpretação da saída da DVS da matriz bloco;
- (vii) Identificação dos autovalores e dos autovetores da soma e da diferença produzidos a partir da matriz bloco, pela comparação dos sinais; e
- (viii) Construção do Biplot correspondente aos dois primeiros valores singulares.



### 3.3 Aplicação a Dados do Sistema de Aprendizagem Profissional

A matriz  $S$  tem dimensão  $m \times n$ , na qual  $m$  corresponde ao número de Estados por cada região (ou às regiões, quando se analisa em âmbito nacional), e  $n$ , ao número de setores analisados. No caso nacional,  $n = 5$ , correspondendo às cinco regiões brasileiras. Então temos a matriz com os dados da seguinte forma:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}$$

Com o propósito de comparar a ocorrência de contratações entre os anos de 2017 e de 2018, foram construídas duas tabelas de contingência, relativas aos respectivos trimestres dos anos considerados ( $S_{17}$  e  $S_{18}$ ). Os dados foram categorizados em cinco setores, sendo eles: Indústria, Construção, Comércio, Transporte e Outros (incluindo de forma agrupada as categorias com menor expressão na inserção de aprendizes no mercado de trabalho).

Seguindo recomendações de Greenacre(2003), com o propósito de extrair os componentes que relacionam a influência conjunta das variáveis e diferenças entre os valores dos anos de 2017 e 2018, simultaneamente representados por  $S_{17} + S_{18}$ , e  $S_{17} - S_{18}$  realizou-se a decomposição em valores singulares (DVS) considerando a matriz bloco  $M$  dada por:

$$M = \begin{bmatrix} S_{17} & S_{18} \\ S_{18} & S_{17} \end{bmatrix}_{2i \times 2j} \quad (3.1)$$

Realizou-se a correção dos valores de cada célula pela média, onde esta é:

$$\bar{c} = 0,5 \times (\bar{Y}_{S_{17}} + \bar{Y}_{S_{18}}) \quad (3.2)$$

E assim se procedeu a única DVS aplicada em  $M$  para fornecer simultaneamente as componentes devido à soma ( $S_{17} + S_{18}$ ) e à diferença ( $S_{17} - S_{18}$ ).

$$\begin{cases} S_{17} + S_{18} = U D_{\alpha} V^t \\ S_{17} - S_{18} = X D_{\beta} Y^t \end{cases} \quad (3.3)$$

Sendo  $U$  e  $X$  matrizes de vetores singulares à esquerda e  $V$  e  $Y$  matrizes de vetores singulares à direita, cada uma com  $k$  colunas ortonormais,  $D_{\alpha}$  e  $D_{\beta}$  representam as matrizes diagonais de valores singulares positivos  $\gamma$  em ordem decrescente de grandeza.

Considerando a DVS de uma matriz bloco de dimensão  $2i \times 2j$ , onde  $i$  representa os Estados/Regiões e  $j$ , os CNAE analisados, tem-se que  $U^t U = V^t V = I$  e  $X^t X = Y^t Y = I$ , é dada por:

$$\begin{bmatrix} S_{17} & S_{18} \\ S_{18} & S_{17} \end{bmatrix}_{2i \times 2j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} U & X \\ U & -X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{\alpha} & 0 \\ 0 & D_{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & Y \\ V & -Y \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

É importante ressaltar que os vetores singulares à esquerda e à direita da Equação 3.4

são todos ortogonais entre si graças à ortogonalidade dos vetores nas DVS e a alteração no sinal dos vetores singulares em  $X$  e  $Y$  corresponde à matriz diferença. A presença do fator  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  multiplicando os vetores à esquerda e à direita assegura a normalização correta, conforme Greenacre (2003).

As DVSs da soma ( $S_{17} + S_{18}$ ) e da diferença ( $S_{17} - S_{18}$ ) não aparecem separadas, mas intercaladas de acordo com a magnitude dos valores singulares correspondentes, as quais estão dispostas por ordem decrescente. Na avaliação de resultados da DVS da matriz bloco é fácil distinguir os vetores solução correspondentes à soma e a diferença: vetores singulares à esquerda e à direita correspondentes à soma têm duas cópias idênticas de um vetor, sendo estes agrupados na mesma coluna, enquanto que nos vetores singulares correspondentes a diferença o vetor agrupado ao vetor inicial tem sinais contrários a este.

Identificados os vetores associados às componentes, obtiveram-se as coordenadas para construção dos biplots ( $S_{17} + S_{18}$ ) e ( $S_{17} - S_{18}$ ). A contribuição de cada autovalor é calculada, de forma a não considerar o total dos  $n$  autovalores gerados, mas em  $\frac{n}{2}$ , pois metade deles se referem à união e a outra metade à diferença entre os valores. A obtenção dos resultados e elaboração dos gráficos foi feita por um *script* inserido no software R (2018).

Isto posto, com a metodologia descrita, foi possível o processamento de dados obtidos a partir do sistema da Secretaria de Inspeção do Trabalho, Painel de informações e estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil - RADAR SIT ( disponível em: <<https://sit.trabalho.gov.br/radar>>. Acesso em: 22 jul. 2019).

A partir da Classificação Nacional de Atividades Econômicas - CNAE<sup>1</sup> - fizeram-se os processamentos, considerando setores nos quais houve maior impacto da atuação da Auditoria Fiscal do Trabalho, em relação ao projeto de fiscalização que tem por objetivo a inserção de aprendizes no mercado de trabalho.

---

<sup>1</sup>A CNAE é o instrumento de padronização nacional dos códigos de atividade econômica e dos critérios de enquadramento utilizados pelos diversos órgãos da Administração Tributária do país.

Trata-se de um detalhamento da CNAE - Classificação Nacional de Atividades Econômicas, aplicada a todos os agentes econômicos que estão engajados na produção de bens e serviços, podendo compreender estabelecimentos de empresas privadas ou públicas, estabelecimentos agrícolas, organismos públicos e privados, instituições sem fins lucrativos e agentes autônomos (pessoa física).

A CNAE resulta de um trabalho conjunto das três esferas de governo, elaborada sob a coordenação da Secretaria da Receita Federal e orientação técnica do IBGE, com representantes da União, dos Estados e dos Municípios, na Subcomissão Técnica da CNAE, que atua em caráter permanente no âmbito da Comissão Nacional de Classificação - CONCLA.

A tabela de códigos e denominações da CNAE foi oficializada mediante publicação no DOU - Resoluções IBGE/CONCLA nº 01 de 04 de setembro de 2006 e nº 02, de 15 de dezembro de 2006.

Sua estrutura hierárquica mantém a mesma estrutura da CNAE (5 dígitos), adicionando um nível hierárquico a partir de detalhamento de classes da CNAE, com 07 dígitos, específico para atender necessidades da organização dos Cadastros de Pessoas Jurídicas no âmbito da Administração Tributária.

Na Secretaria da Receita Federal, a CNAE é um código a ser informado na Ficha Cadastral de Pessoa Jurídica (FCPJ) que alimentará o Cadastro Nacional de Pessoa Jurídica/CNPJ. (Disponível em: <<http://receita.economia.gov.br/orientacao/tributaria/cadastros/cadastro-nacional-de-pessoas-juridicas-cnpj/classificacao-nacional-de-atividades-economicas-2013-cnae/apresentacao>>. Acesso em: 22 jul. 2019)

## 4 Resultados e Discussão

### 4.1 Exemplos Didáticos de Aplicações em Dados Fictícios

**Exemplo 4.1.** Considere matriz:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ , tem-se sua DVS será:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$\det(A^T A) - \lambda I = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$ . Então a equação característica é:  $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$ . Daí,

$$\begin{cases} \lambda_1 = 7 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{7}; \\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{3} \end{cases}.$$

O autovetor associado a  $\lambda_1 = 7$  é tal que:

$$[(A^T A) - 7I] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Com  $-2x - 2y = 0$  um autovetor pode ser  $(\vec{v}_1) = (-1, 1)$ . Como  $A^T A$  é simétrica, o autovetor  $(\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1)$ . Então  $\vec{v}_2$  pode ter  $\vec{v}_2 = (1, 1)$ . E, normalizando estes autovetores ficam:  $\vec{v}_1 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; e  $\vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Daí, a matriz  $V = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ , com isso:  $V^T = V = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ .

Já a matriz diagonal será:  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ . E a matriz ortogonal à direita  $U$  pode ser obtida, fazendo-se  $\frac{A\vec{v}_i}{\|A\vec{v}_i\|} = \frac{A\vec{v}_i}{\sigma_i}$ , de modo que:

$$\frac{A\vec{v}_1}{\|A\vec{v}_1\|} = \frac{A\vec{v}_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

Daí,  $\sqrt{14} \cdot \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ;

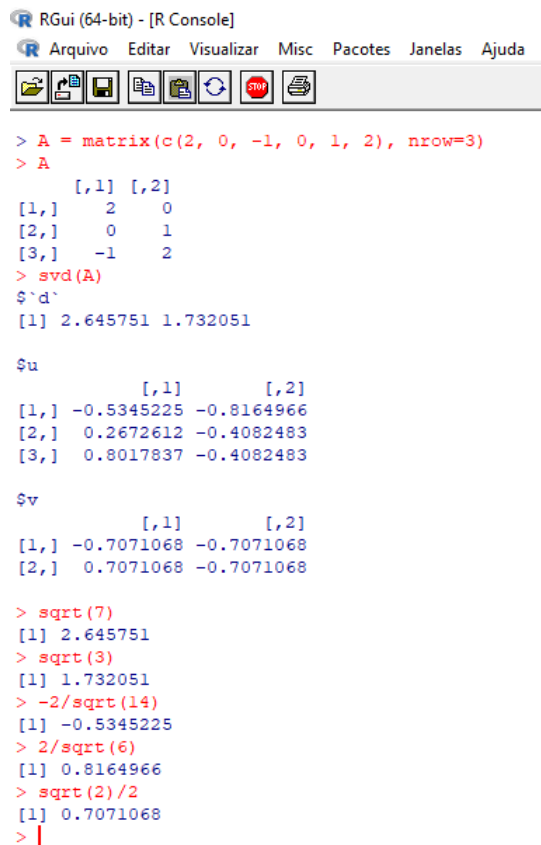
E de modo análogo,  $\frac{A\vec{v}_2}{\|A\vec{v}_2\|} = \frac{A\vec{v}_2}{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ .

Daí,  $\sqrt{6} \cdot \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . E, assim, tem-se a DVS em sua forma reduzida, onde:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{\sqrt{6}}{1} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Confronta-se este resultado com o processamento no software *R*, cujas saídas são equivalentes, mesmo no caso dos sinais, uma vez que o sistema informatizado considerou o vetor  $\vec{u}_2 = \left( \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$ , em vez de  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ . Ilustra-se a seguir com a Figura 4.1.

Figura 4.1: Decomposição em valores Singulares da matriz do Exemplo 4.1



```

RGui (64-bit) - [R Console]
Arquivo Editar Visualizar Misc Pacotes Janelas Ajuda

> A = matrix(c(2, 0, -1, 0, 1, 2), nrow=3)
> A
      [,1] [,2]
[1,]    2    0
[2,]    0    1
[3,]   -1    2
> svd(A)
$d
[1] 2.645751 1.732051

$u
      [,1] [,2]
[1,] -0.5345225 -0.8164966
[2,]  0.2672612 -0.4082483
[3,]  0.8017837 -0.4082483

$v
      [,1] [,2]
[1,] -0.7071068 -0.7071068
[2,]  0.7071068 -0.7071068

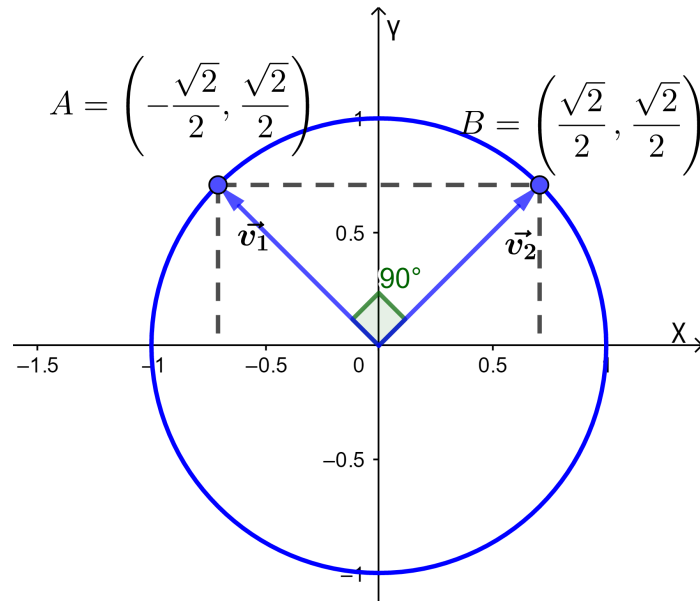
> sqrt(7)
[1] 2.645751
> sqrt(3)
[1] 1.732051
> -2/sqrt(14)
[1] -0.5345225
> 2/sqrt(6)
[1] 0.8164966
> sqrt(2)/2
[1] 0.7071068
> |

```

Fonte: Elaborada pelo autor

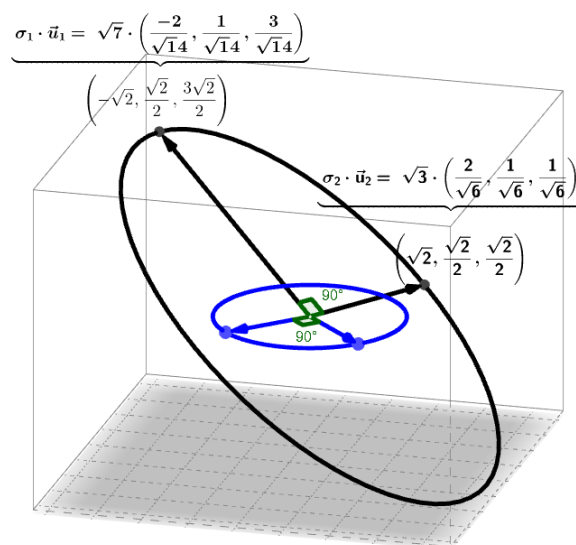
Geometricamente a DVS é tal que, as Figuras 4.2 e 4.3 auxiliam na compreensão do que está acontecendo com as rotações e "esticamentos" para que vislumbrem com mais detalhes os dados.

Figura 4.2: Vetores ortonormais que compõem a matriz  $V$  da Decomposição em Valores Singulares, de forma que valha a igualdade  $AV = U\Sigma$ ;



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.3: Vetores que rotacionam e "esticam" as matrizes na Decomposição em Valores Singulares: em azul o círculo com os vetores ortogonais à direita, que compõem a matriz  $V$ ; em preto, formando a elipse, os vetores do produto das matrizes  $U\Sigma$ ;



Fonte: Elaborada pelo autor

Para a DVS completa necessita-se obter  $\vec{u}_3$  ortonormal à  $\vec{u}_2$  e à  $\vec{u}_1$ . E isso, pode ser feito sem as incômodas raízes, de forma que:  $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Logo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, \text{ que normalizado corresponde à:}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot (1, -4, 2). \text{ Assim } (-2, 1, 3) \perp (2, 1, 1) \perp (1, -4, 2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (-2, 1, 3) \perp \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, 1, 1) \perp \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot (1, -4, 2).$$

Alternativamente,  $\vec{u}_3$  pode ser obtido pelo processo de Gram-Schmidt, no qual basta se tomar  $\vec{v}_3$ , que seja LI, com  $\vec{w}_1 = (-2, 1, 3)$  e  $\vec{w}_2 = (2, 1, 1)$ , e faz-se, por exemplo, com  $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$ :

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \sum_{i=1}^{(n-1)} [Proj]_{\vec{w}_i}(\vec{v}_n). \text{ No caso:}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - [Proj]_{\vec{w}_1}(\vec{v}_3) - [Proj]_{\vec{w}_2}(\vec{v}_3)$$

$$\vec{w}_3 = (1, 0, 0) - \frac{\langle (1,0,0), (-2,1,3) \rangle}{\|(-2,1,3)\|^2} \cdot (-2, 1, 3) - \frac{\langle (1,0,0), (2,1,1) \rangle}{\|(2,1,1)\|^2} \cdot (2, 1, 1) = \dots$$

$$\dots = (1, 0, 0) - \left(\frac{-2}{14}\right) \cdot (-2, 1, 3) - \left(\frac{2}{6}\right) \cdot (2, 1, 1) = (1, 0, 0) - \dots$$

$$\dots - \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{3}, \frac{-1}{7} + \frac{1}{3}, \frac{-3}{7} + \frac{1}{3}\right) = (1, 0, 0) - \left(\frac{6+14}{21}, \frac{-3+7}{21}, \frac{-9+7}{21}\right) = \left(\frac{1}{21}\right) \cdot (1, 4, -2). \text{ Que, como visto, pertence à } t \cdot (1, 4, -2), t \in \mathbb{R}, \text{ e segue o processo com a normalização, onde } \vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}.$$

Portanto,  $A = U\Sigma V^T$ , é tal que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-4}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}}_U \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Sigma \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{V^T}$$

**Exemplo 4.2.** A fatoração LDU da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ , que é não-singular,

pois  $\text{Det}(A) = 4 \neq 0$ , pode ser feita com partição da seguinte forma:

$$A = L^{-1}DU^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline A_{21}(A_{11})^{-1} & I \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c|c} I & (A_{11})^{-1}A_{12} \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right];$$

$$\begin{aligned}
 B &= [A_{22}] - [A_{21}] \cdot [A_{11}]^{-1} \cdot [A_{12}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \dots \\
 \dots &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; \\
 [A_{11}]^{-1} \cdot [A_{12}] &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}; \\
 [A_{21}] \cdot [A_{11}]^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \text{ cujo}$$

determinante é calculado como  $Det(A) = Det(L^{-1} \cdot D \cdot U^{-1}) = Det(L^{-1}) \cdot Det(D) \cdot Det(U^{-1}) = 1 \cdot Det(D) \cdot 1 = (2 \cdot 1 - 2 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = (-2) \cdot (-2) = 4$

## 4.2 Tabelas e Dados Utilizados a partir do Painel de Informações e Estatísticas da Inspeção do Trabalho no Brasil, RADAR

Há relevantes informações advindas das atividades econômicas dos setores da Indústria, Construção, Comércio e Transporte, embora em relação à Construção, esta é bastante ligada à sazonalidade e, por exemplo, as contratações em atividades de Construções Civis nos períodos analisados tiveram relevante redução. Quiçá se as avaliações retroagissem a período maior, como nas proximidades de 2010, haveria maior dominância desta atividade. Logo, o aquecimento econômico e a estruturação das atividades produtivas certamente interferem na contratação de mão de obra e, por conseguinte, na inserção de aprendizes durante a ação fiscal. Destarte, as tabelas com dados utilizados foram as Tabelas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6.

Percebe-se que, no âmbito nacional, as contratações sob ação fiscal, no setor da Indústria são superiores aos demais no Sul e no Sudeste, ao passo que no Nordeste há mais destaque para o setor do Comércio.

Considerando-se o Sudeste do Brasil, destaca-se que a Indústria é, de fato, o setor com maiores índices de contratações, excetuando-se o Estado do RJ, que possui maior variabilidade nos números de inserção de aprendizes. Inclusive, neste caso, há altas proporções no setor definido como "Outros", que inclui atividades como agricultura, educação, saúde, serviços domésticos, entre outras (Tabela 4.2).

Nota-se uma enorme discrepância, para os dados na Região Sul, em relação ao setor da Indústria no ano de 2018 no Estado de SC, que aumentou suas contratações de aprendizes em quase 10 vezes. Tal fato pode estar associado à sazonalidade, característica da aprendizagem, visto que os ciclos dos cursos coincidem com a oferta de cursos pelas entidades formadoras, o que normalmente é associado às programações para que as fiscalizações atinjam o máximo de utilidade na inserção de aprendizes, visto que ao abrir novas turmas, há necessidade de reposição, afim de que se cumpra a cota de aprendiz, legalmente determinada. (Tabela 4.3)

Tabela 4.1: Aprendizizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Ano	Região	Indústria	Construção	Comércio	Transporte	Outros
2017	Sudeste	3579	1370	1545	1010	2142
	Sul	1297	167	1034	140	657
	Centro-Oeste	284	19	852	99	553
	Norte	174	77	296	51	344
	Nordeste	551	462	1735	192	1234
2018	Sudeste	5770	1666	2319	868	1840
	Sul	4406	270	1552	526	741
	Centro-Oeste	465	54	340	68	285
	Norte	256	103	737	156	364
	Nordeste	763	519	2082	544	1494

Fonte: Sistema Radar - SIT

Tabela 4.2: Aprendizizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Sudeste durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Ano	Estado	Indústria	Construção	Comércio	Transporte	Outros
2017	ES	433	164	86	223	116
	MG	1756	868	306	27	954
	RJ	521	261	592	596	593
	SP	869	77	561	164	479
2018	ES	377	112	315	215	187
	MG	2585	1147	301	38	144
	RJ	480	174	737	352	726
	SP	2328	233	966	263	783

Fonte: Sistema Radar - SIT

Tabela 4.3: Aprendizizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Sul durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Ano	Estado	Indústria	Construção	Comércio	Transporte	Outros
2017	PR	608	47	333	22	202
	RS	422	96	591	91	283
	SC	267	24	110	27	172
2018	PR	707	42	402	99	205
	RS	803	71	656	353	361
	SC	2896	157	494	74	175

Fonte: Sistema Radar - SIT



Percebe-se desta forma, na região Centro-Oeste, grandes variações nas proporções de contratações, tanto entre os Estados, quanto entre os Setores, inexistindo regularidade entre os períodos estudados (Tabela 4.4). Pode-se inferir que nesta região a ação fiscalizadora tem sido suscetível a oscilações, podendo ser reflexo de modificação na forma de execução ou enfrentamento de alguma dificuldade na condução do projeto de fiscalização. De um modo geral, é possível que as contratações, que não se restringem às decorrentes da ação fiscal, não possuem uma almejada continuidade ou o projeto e programação fiscalizatória não têm coincidido com o fluxo regular disponibilização de vagas nos cursos e consequentes contratações.

Tabela 4.4: Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Centro-Oeste durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Ano	Estado	Indústria	Construção	Comércio	Transporte	Outros
2017	GO	24	4	387	1	110
	MT	77	10	253	15	391
	MS	183	5	212	83	52
2018	GO	114	8	30	9	103
	MT	280	12	94	12	31
	MS	71	34	216	47	151

Fonte: Sistema Radar - SIT

O Estado do Pará, em relação aos demais Estados da região Norte, é aquele com maior índice de contratação no decorrer da ação fiscalizadora, seguido do Amazonas. Nos demais Estados da região Norte os números muito aquém dos outros Estados da Federação, demonstrando necessidade de capilarização da atuação, nestes locais mais afastados e sabidamente mais carentes e que demandam maior desafio para que se busque o equilíbrio e se possam atingir melhorias. Entretanto, isto passa por planejamento e políticas públicas, com direcionamento de recursos e presença do Estado como um todo, não somente a área de fiscalização, embora o reduzido número de auditores (aposentadorias e falta de concursos públicos) também influencia e dificultam os trabalhos. Deve-se destacar a ocorrência de mudança significativa dos números no Estado de Tocantins, de 2017 para 2018, evidenciando uma mudança da fiscalização neste Estado (Figura 4.8).

O Estado de Pernambuco proporciona grande contribuição nos dados sobre a contratação de aprendizes em decorrência de ação fiscal, sendo, no Nordeste, o que demonstrou um aumento mais significativo na contratação de aprendizes entre todos os setores (Figura 4.9).

### 4.3 Biplots e Aplicações aos dados do Sistema de Aprendizagem Profissional

Os dados analisados são públicos e oficiais, com fidedignidade e confiabilidade, pois há dever no tratamento em relação aos dados oficiais, sob pena de responsabilização penal (art. 313-A do Código Penal há tipificação), civil e administrativa. Registrou-se

Tabela 4.5: Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Norte durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Ano	Estado	Indústria	Construção	Comércio	Transporte	Outros
2017	AC	4	0	4	0	0
	AM	56	7	38	7	28
	AP	13	20	13	1	54
	PA	98	29	190	37	225
	RO	3	0	39	6	23
	RR	0	7	3	0	8
	TO	0	14	9	0	6
2018	AC	0	3	2	0	0
	AM	63	21	19	41	55
	AP	0	0	0	0	0
	PA	85	41	650	56	267
	RO	22	5	56	11	17
	RR	0	4	2	0	19
	TO	86	29	8	48	6

Fonte: Sistema Radar - SIT

Tabela 4.6: Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região Nordeste durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Ano	Estado	Indústria	Construção	Comércio	Transporte	Outros
2017	AL	28	0	87	0	73
	BA	107	299	59	38	54
	CE	236	49	323	46	342
	MA	53	38	345	33	132
	PB	72	0	618	60	428
	PE	17	40	120	8	57
	PI	30	25	151	2	104
	RN	0	6	28	0	16
	SE	8	5	4	5	28
2018	AL	48	23	46	42	74
	BA	135	121	183	222	270
	CE	132	23	99	23	151
	MA	4	4	309	2	112
	PB	14	30	748	22	245
	PE	365	76	156	194	415
	PI	6	53	438	5	81
	RN	22	3	86	34	56
	SE	37	186	17	0	90

Fonte: Sistema Radar - SIT

o número de aprendizes inseridos no mercado de trabalho sob ação fiscal, em função da classificação conforme o CNAE, nos Estados do Brasil (analisados por regiões e entre as regiões do Brasil). Os dados das Tabelas separadas fornecem informações descritas que podem ser avaliados através da associação entre tabelas de contingência combinadas representando-as na construção de Biplots, os resultados obtidos são os que se analisam.

Como na Definição 2.3, chegou-se à relação  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , podemos, então, chegar aos autovalores ( $\lambda_i$ ), a partir dos valores singulares. Logo, com  $\lambda_i = \sigma_i^2$ , tem-se: A quadratura dos valores singulares fornece os autovalores que são os componentes da soma dos quadrados. A soma total de quadrados devido aos componentes soma (destacados com negrito) e diferença são assim para os valores singulares da Decomposição em Valores Singulares da Tabela 4.7, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soma:} \\ 8533,13^2 + 1987,66^2 + 716,75^2 + 182,18^2 + 151,91^2 + 0 = 77.335.096,64 \\ \text{Diferença:} \\ 4155,28^2 + 2369,27^2 + 589,40^2 + 292,93^2 + 151,91^2 + 0 = 23.336.069,2 \end{array} \right.$$

Sendo assim, no Biplot Soma os dois autovalores que representam os eixos dos biplots tem percentuais de 94,15% e 5,11%, explicando, com isso, 99,26% dos dados. E, na diferença estes percentuais, são de 73,99% e 24,05%, totalizando 98,04%. Procedimento este que, de forma análoga, pode ser feito para os demais dados, bastando que se diferenciem os autovalores correspondentes às matrizes Soma (que são aqueles nos quais os autovetores dispostos nas linhas das matrizes mantêm os sinais do primeiro bloco no segundo bloco, destacados em negrito nas respectivas tabelas) dos correspondentes à diferença (que mudam de sinal do primeiro para o segundo bloco).

Desta forma, ilustrativamente, na Tabela 4.7 as dimensões 1, 4, 5, 8 e 10 correspondem ao componente da matriz Soma e as dimensões 2, 3, 6, 7 e 9 correspondem à matriz Diferença.

Os resultados obtidos são os que se relacionam na Figura 4.4, Tabelas: 4.8 e 4.9.

### Nacional: Análise dos dados - biplots da Figura 4.4 e Tabelas 4.9 e 4.1

Neste caso, os dados processados sinalizam que a Indústria tem bastante influência nas regiões do Brasil, sendo que Transporte, Construção, Comércio e demais setores agrupam-se de forma que não ocorre direcionamento a nenhuma das regiões especificamente. Sendo assim, observa-se que a Indústria, no cenário nacional, tanto na Matriz Soma, quanto na da Diferença, tem dissociação dos demais setores, com certa inclinação na direção das regiões Sul e Sudeste, ao passo que há um agrupamento dos demais setores e estes se relacionam ao Centro-Oeste e à Região Norte, de forma mais explícita em relação à diferença. Essa associação às Regiões do Sul e Sudeste, de certa forma, pode ser reflexo da distribuição do parque industrial no território nacional, sendo que as maiores indústrias (que não são nem micro, nem pequena empresa), ainda se concentram nestas regiões, de forma também que se considere a atuação do Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial, SENAI, que tem constância e oferece formação e qualificação, possibilitando o cumprimento de quotas neste setor de atividade econômica.

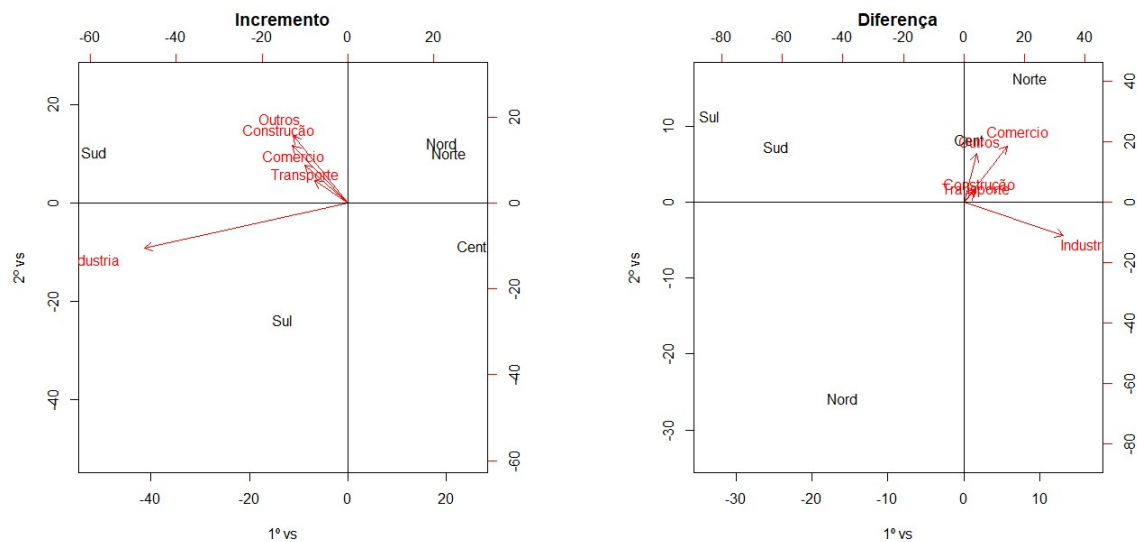
Os valores singulares são dispostos nos eixos coordenados do Biplot. O 1º valor singular possui peso maior quando é feita horizontalmente (na direção do eixo das

Tabela 4.7: Decomposição em Valores Singulares da Matriz Bloco (Nacional), com dados da Tabela 4.1

Dimensão	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valores Singulares										
	<b>85,33,13</b>	4155,28	2369,27	<b>1987,66</b>	<b>716,75</b>	589,40	292,93	<b>182,18</b>	151,91	<b>0,00</b>
Vetores Singulares à Esquerda										
	<b>-0,5585</b>	-0,3852	0,1490	<b>0,2309</b>	<b>-0,1803</b>	-0,5701	0,0196	<b>-0,0476</b>	-0,0636	<b>0,3162</b>
	<b>-0,1443</b>	-0,5211	0,2336	<b>-0,5322</b>	<b>0,3022</b>	-0,3996	-0,0058	<b>0,0681</b>	0,1190	<b>0,3162</b>
Primeiro Bloco										
	<b>0,2748</b>	0,0114	0,1709	<b>-0,1964</b>	<b>-0,5305</b>	0,0980	-0,2592	<b>-0,0668</b>	-0,6276	<b>0,3162</b>
	<b>0,2224</b>	0,1360	0,3363	<b>0,2260</b>	<b>0,2792</b>	0,0323	0,5887	<b>-0,4706</b>	-0,1441	<b>0,3162</b>
	<b>0,2056</b>	-0,2479	-0,5300	<b>0,2718</b>	<b>0,1293</b>	0,0680	0,2929	<b>0,5168</b>	-0,2593	<b>0,3162</b>
Segundo Bloco										
	<b>-0,5585</b>	0,3852	-0,1490	<b>0,2309</b>	<b>-0,1803</b>	0,5701	-0,0196	<b>-0,0476</b>	0,0636	<b>0,3162</b>
	<b>-0,1443</b>	0,5211	-0,2336	<b>-0,5322</b>	<b>0,3022</b>	-0,3996	0,0058	<b>0,0681</b>	-0,1190	<b>0,3162</b>
	<b>0,2748</b>	-0,0114	-0,1709	<b>-0,1964</b>	<b>-0,5305</b>	-0,0980	0,2592	<b>-0,0668</b>	0,6276	<b>0,3162</b>
	<b>0,2224</b>	-0,1360	-0,3363	<b>0,2260</b>	<b>0,2792</b>	-0,0323	-0,5887	<b>-0,4706</b>	0,1441	<b>0,3162</b>
	<b>0,2056</b>	0,2479	0,5300	<b>0,2718</b>	<b>0,1293</b>	-0,0680	-0,2929	<b>0,5168</b>	0,2593	<b>0,3162</b>
Vetores Singulares à Direita										
	<b>-0,6406</b>	0,6373	-0,2838	<b>-0,2952</b>	<b>-0,0178</b>	-0,0706	0,0797	<b>-0,0092</b>	-0,0449	<b>-0,0458</b>
	<b>-0,1747</b>	0,0784	0,1185	<b>0,3741</b>	<b>-0,3058</b>	0,1793	0,2928	<b>-0,4247</b>	0,6016	<b>0,2359</b>
Primeiro Bloco										
	<b>-0,1365</b>	0,2774	0,4784	<b>0,2448</b>	<b>0,6284</b>	0,3312	-0,2746	<b>-0,1184</b>	-0,0955	<b>0,1120</b>
	<b>-0,1054</b>	0,0659	0,0885	<b>0,1442</b>	<b>-0,0722</b>	-0,4488	-0,4308	<b>0,4866</b>	0,3174	<b>0,4755</b>
	<b>-0,1713</b>	0,0804	0,4108	<b>0,4384</b>	<b>-0,0782</b>	-0,3895	0,3832	<b>0,2623</b>	-0,1618	<b>-0,4512</b>
Segundo Bloco										
	<b>-0,6406</b>	-0,6373	0,2838	<b>-0,2952</b>	<b>-0,0178</b>	0,0706	-0,0797	<b>-0,0092</b>	0,0449	<b>-0,0458</b>
	<b>-0,1747</b>	-0,0784	-0,1185	<b>0,3741</b>	<b>-0,3058</b>	-0,1793	-0,2928	<b>-0,4247</b>	-0,6016	<b>0,2359</b>
	<b>-0,1365</b>	-0,2774	-0,4784	<b>0,2448</b>	<b>0,6284</b>	-0,3312	0,2746	<b>-0,1184</b>	0,0955	<b>0,1120</b>
	<b>-0,1054</b>	-0,0659	-0,0885	<b>0,1442</b>	<b>-0,0722</b>	0,4488	0,4308	<b>0,4866</b>	-0,3174	<b>0,4755</b>
	<b>-0,1713</b>	-0,0804	-0,4108	<b>0,4384</b>	<b>-0,0782</b>	0,3895	-0,3832	<b>0,2623</b>	0,1618	<b>-0,4512</b>

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.4: Biplot de Aprendizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica por Regiões do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz soma (dos resultados neste interstício); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença.



Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.8: Coordenadas dos Biplots da Figura 4.4

	UF	Coord.	CNAE	Coord.
<b>Soma</b>	Sudeste	(-51.59 , 10.29)	Ind.	(-59.18 , -13.16)
	Sul	(-13.33 , -23.73)	Const.	(-16.13 , 16.68)
	Centro-Oeste	(25.38 , -8.76)	Com.	(-12.61 , 10.91)
	Norte	(20.54 , 10.07)	Transp	(-9.74 , 6.43)
	Nordeste	(18.99 , 12.12)	Outros	(-15.83 , 19.54)
<b>Diferença</b>	Sudeste	(-24.83 , 7.25)	Ind.	(41.08 , -13.81)
	Sul	(-33.59 , 11.37)	Const.	(5.05 , 5.77)
	Centro-Oeste	(0.74 , 8.32)	Com.	(17.88 , 23.29)
	Norte	(8.77 , 16.37)	Transp	(4.25 , 4.31)
	Nordeste	(-15.98 , -25.8)	Outros	(5.18 , 19.99)

Fonte: Elaborada pelo autor

abscissas). Então, a partir dos dados constantes em Tabela 4.7 é possível a separação dos vetores da soma, negritados, que são os de dimensão 1, 4, 5, 8 e 10; e os da diferença são os de dimensão 2, 3, 6, 7 e 9. De forma que o percentual destes são:

- (i) Para a soma: 1º valor singular = 73,74% e 2º valor singular = 17,18%; e
- (ii) Para a diferença: 1º valor singular = 54,97% e 2º valor singular = 31,34%.

A Tabela 4.9 traz os valores detalhados dos Autovetores e Autovalores obtidos, a partir do processamento do *Script* processado no *software R* (2018).

Tabela 4.9: Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Dimensão	1	2	3	4	5
<b>Vetores Singulares</b>					
$\vec{u}$ da Soma	-0,5585	0,2309	-0,1803	-0,0476	0,3162
	-0,1443	-0,5322	0,3022	0,0681	0,3162
	0,2748	-0,1964	-0,5305	-0,0668	0,3162
	0,2224	0,2260	0,2792	-0,4706	0,3162
	0,2056	0,2718	0,1293	0,5168	0,3162
$\vec{u}$ da Diferença	-0,3852	0,1490	-0,5701	0,0196	-0,0636
	-0,5211	0,2336	0,3996	-0,0058	0,1190
	0,0114	0,1709	0,0980	-0,2592	-0,6276
	0,1360	0,3363	0,0323	0,5887	-0,1441
	-0,2479	-0,5300	0,0680	0,2929	-0,2593
$\vec{v}$ da Soma	-0,6406	-0,2952	-0,0178	-0,0092	-0,0458
	-0,1365	0,2448	0,6284	-0,1184	0,1120
	-0,1054	0,1442	-0,0722	0,4866	0,4755
	-0,1713	0,4384	-0,0782	0,2623	-0,4512
$\vec{v}$ da Diferença	0,6373	-0,2838	-0,0706	0,0797	-0,0449
	0,0784	0,1185	0,1793	0,2928	0,6016
	0,2774	0,4784	0,3312	-0,2746	-0,0955
	0,0659	0,0885	-0,4488	-0,4308	0,3174
	0,0804	0,4108	-0,3895	0,3832	-0,1618
<b>Valores Singulares</b>					
da Soma (em milhões)	8.533,13	1.987,66	716,75	182,18	0
Percentual (%)	74,72	17,41	6,28	1,60	0
da Diferença	4.155,28	2.369,27	589,40	292,93	151,91
Percentual (%)	54,97	31,34	7,80	3,88	2,01

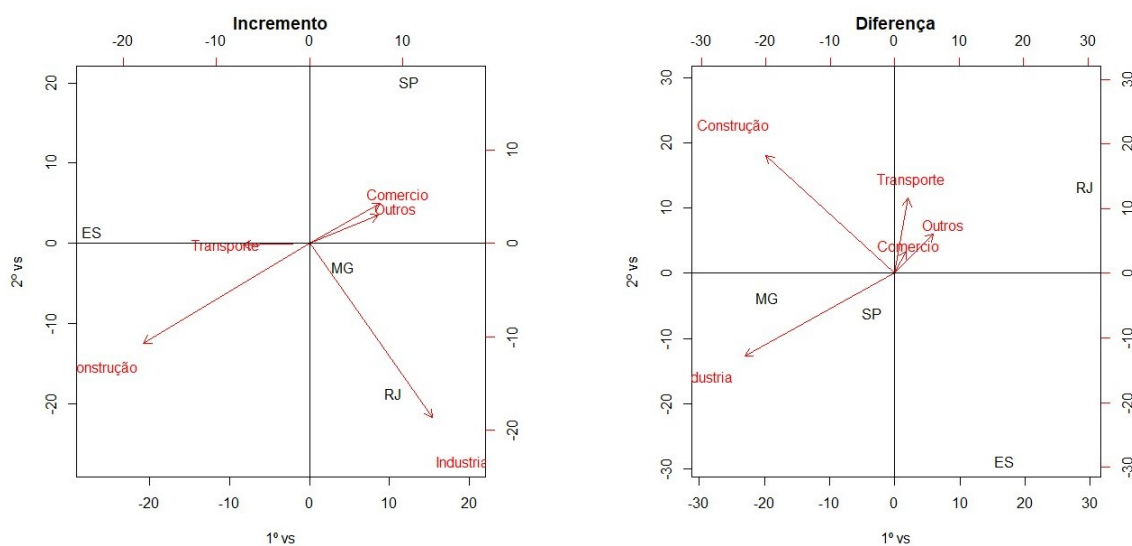
Fonte: Elaborada pelo Autor

Portanto os dados processados no Biplot explicam, de forma impressionante, 90,92% e 86,32%, respectivamente na soma e na diferença, havendo considerável confiabilidade

nos resultados apresentados e, principalmente, para a soma a projeção no eixo das abscissas uma boa proximidade com o sudeste do Brasil.

**Sudeste: Análise dos dados - biplots da Figura 4.5 e Tabelas 4.11 e 4.2**

Figura 4.5: Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Sudeste do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença.



Fonte: Elaborada pelo autor

A Tabela 4.11 traz os valores detalhados dos Autovetores e Autovalores obtidos a partir dos dados da Tabela 4.2, processados na DVS.

O Biplot da Figura 4.5 mostra-nos que MG e RJ, em relação à soma dos dados dos períodos correspondentes em análise (1º trimestre de 2017 *versus* 1º trimestre de 2018), estiveram associados à Indústria, sendo que MG, manteve a influência da Indústria, em relação à diferença, com valores consideráveis, com módulo do vetor Indústria significativo, bastando observar que sua projeção nos eixos coordenados tem valores absolutos consideráveis (além do fato de que a norma deste vetor representa o desvio-padrão desta variável, vide Figura 2.3), diverso de outros setores de atividade que tem caracteres semelhantes aos de Comércio, tanto na direção e ângulo (correlação), quanto nos valores, menos expressivos.

**Sul: Análise dos dados - biplots da Figura 4.6 e Tabelas 4.13 e 4.3**

A Tabela 4.13 traz os valores detalhados dos Autovetores e Autovalores obtidos a partir dos dados da Tabela 4.3, processados na DVS.

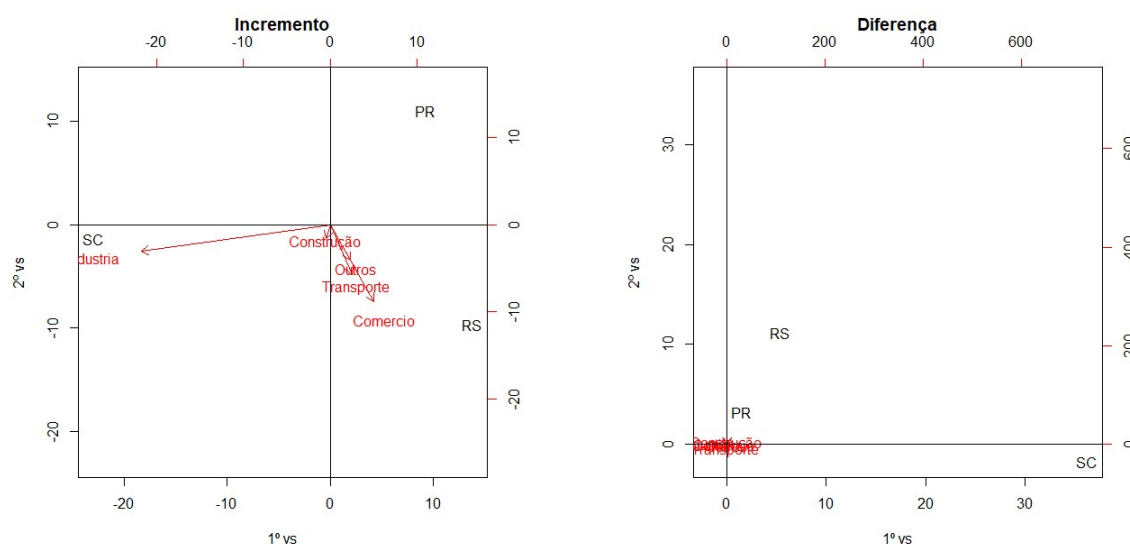
Tem-se singularidades, como em Santa Catarina, que é influenciada diretamente pela Indústria; e Rio Grande do Sul que é relativamente associado à Construção, Transporte e Comércio; ao passo que no Paraná, no 1º quadrante, não há influência pelos

Tabela 4.10: Coordenadas dos Biplots da Figura 4.5

	UF	Coord.	CNAE	Coord.
<b>Soma</b>	ES	(-27.22 , 1.47)	Ind.	(16.5 , -23.35)
	MG	(4.24 , -2.93)	Const.	(-22.3 , -13.36)
	RJ	(10.57 , -18.69)	Com.	(9.51 , 5.3)
	SP	(12.4 , 20.15)	Transp	(-8.9 , -0.27)
			Outros	(9.24 , 3.74)
<b>Diferença</b>	ES	(16.89 , -28.82)	Ind.	(-29.1 , -15.94)
	MG	(-19.5 , -3.8)	Const.	(-24.99 , 22.78)
	RJ	(29.36 , 13.32)	Com.	(2.22 , 4.35)
	SP	(-3.5 , -6.09)	Transp	(2.65 , 14.49)
			Outros	(7.51 , 7.6)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.6: Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Sul do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença.



Fonte: Elaborada pelo autor



Tabela 4.11: Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região **Sudeste** do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Dimensão	1	2	3	4
Vetores Singulares				
$\vec{u}$ da Soma	-0,6013	0,0375	-0,1096	0,3536
	0,0938	-0,0749	0,6005	0,3536
	0,2335	-0,4774	-0,3042	0,3536
	0,2740	0,5148	-0,1867	0,3536
$\vec{u}$ da Diferença	0,3043	-0,6260	0,0907	-0,0852
	-0,3515	-0,0827	0,6080	-0,0003
	0,5290	0,2894	0,3453	0,1311
	-0,0631	-0,1323	-0,0542	0,6896
$\vec{v}$ da Soma	0,3644	-0,5967	-0,0196	-0,1267
	-0,4926	-0,3413	-0,1980	0,0156
	0,2102	0,1353	-0,2182	-0,2572
	-0,1966	-0,0069	-0,3398	-0,3168
	0,2042	0,0955	-0,5452	0,1740
$\vec{v}$ da Diferença	-0,5244	-0,3463	0,2624	0,0119
	-0,4503	0,4948	-0,0976	0,0098
	0,0401	0,0945	0,2381	-0,6578
	0,0477	0,3147	0,0552	0,0634
	0,1354	0,1651	0,6015	0,2510
Valores Singulares				
da Soma	2119,38	2048,53	1531,87	0,00
Percentual (%)	37,18	35,94	26,88	0
da Diferença	3079,92	806,76	382,97	107,49
Percentual (%)	70,36	18,43	8,75	2,46

Fonte: Elaborada pelo Autor

Tabela 4.12: Coordenadas dos Biplots da Figura 4.6

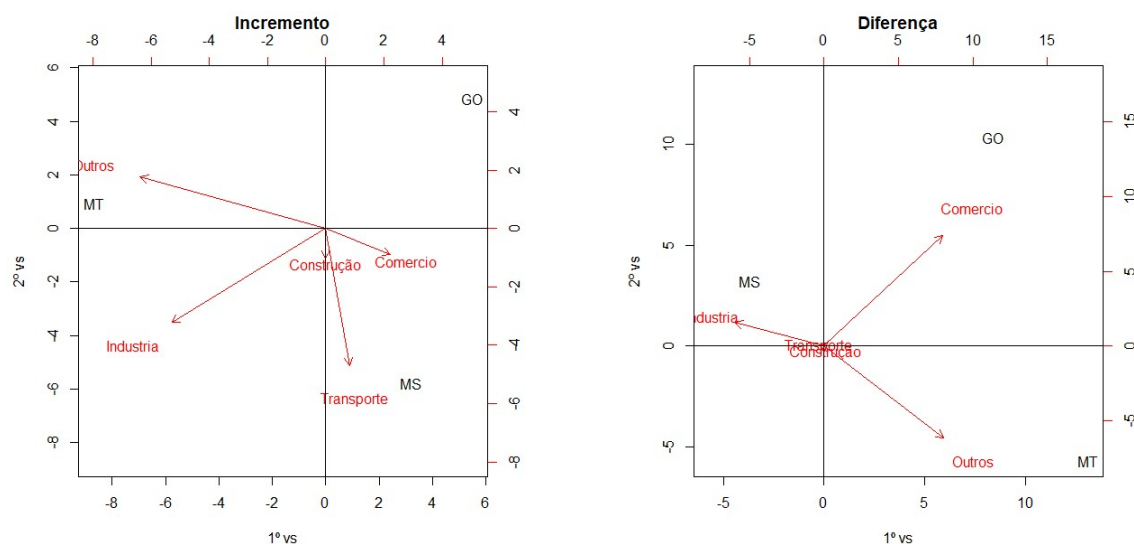
	UF	Coord.	CNAE	Coord.
<b>Soma</b>	PR	(9.2 , 11.02)	Ind.	(-27.26 , -3.83)
	RS	(13.75 , -9.66)	Const.	(-0.65 , -2.03)
	SC	(-22.95 , -1.37)	Com.	(6.27 , -10.1)
			Transp	(3.06 , -7.14)
			Outros	(2.9 , -5.09)
<b>Diferença</b>	PR	(1.5 , 3.24)	Ind.	(-36.23 , 0.43)
	RS	(5.36 , 11.2)	Const.	(-1.74 , 1.92)
	SC	(36.26 , -1.79)	Com.	(-5.34 , -0.95)
			Transp	(-1.2 , -11.15)
			Outros	(0.2 , -3.16)

Fonte: Elaborada pelo autor

setores analisados, no que pertine à contratação de aprendizes em decorrência de ação fiscal.

#### Centro-Oeste: Análise dos dados - biplots da Figura 4.7 e Tabelas 4.15 e 4.4

Figura 4.7: Biplot de Aprendizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Centro-Oeste do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença.



Fonte: Elaborada pelo autor

A Tabela 4.15 traz os valores detalhados dos Autovetores e Autovalores obtidos a partir dos dados da Tabela 4.4, processados na DVS.

No Centro-Oeste, na soma, temos no Mato Grosso a associação a Outros; Mato Grosso do Sul associa-se a Transportes; e na diferença, Goiás é associado ao Comércio,

Tabela 4.13: Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores na região **Sul** do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Dimensão	1	2	3
Vetores Singulares			
$\vec{u}$ da Soma	0,2299	0,5296	0,4082
	0,3437	-0,4639	0,4082
	-0,5736	-0,0657	0,4082
$\vec{u}$ da Diferença	0,0289	0,1942	0,6793
	0,1034	0,6714	-0,1963
	0,6989	-0,1074	0,0009
$\vec{v}$ da Soma	-0,6812	-0,1838	0,0499
	-0,0162	-0,0975	-0,9698
	0,1568	-0,5285	0,0125
	0,0765	-0,3429	0,0748
	0,0724	-0,2447	-0,0642
$\vec{v}$ da Diferença	-0,6984	0,0260	0,0969
	-0,0335	0,1153	-0,0310
	-0,1030	-0,0569	-0,6528
	-0,0231	-0,6685	-0,0172
-0,0038	-0,1894	0,2514	
Valores Singulares			
da Soma	1601,45	433,19	0,00
Percentual (%)	78,71	21,29	0
da Diferença	2691,51	277,94	52,80
Percentual (%)	89,06	9,20	1,75

Fonte: Elaborada pelo Autor

Tabela 4.14: Coordenadas dos Biplots da Figura 4.7

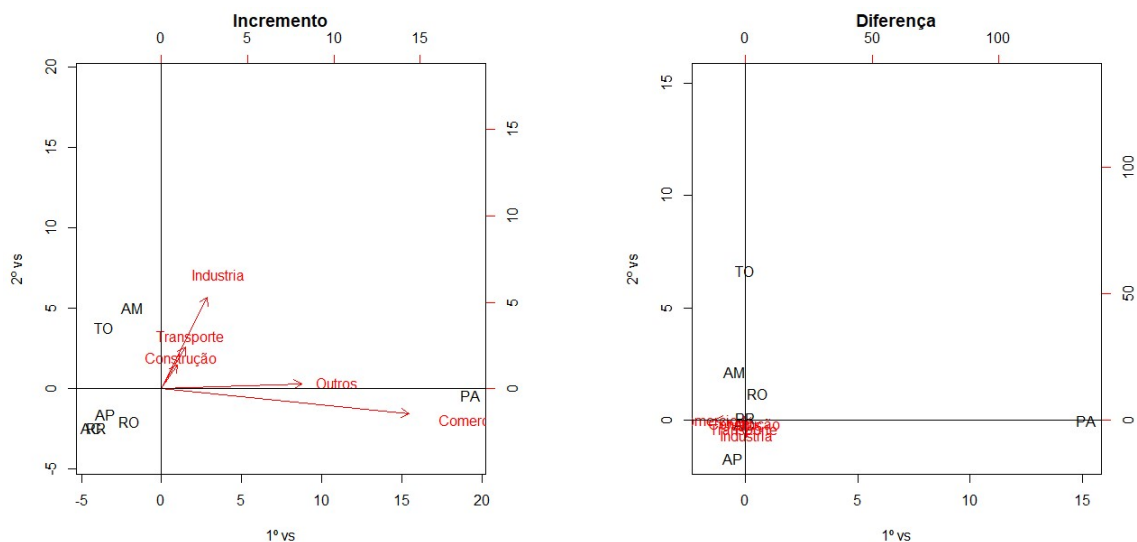
	UF	Coord.	CNAE	Coord.
<b>Soma</b>	GO	(5.5 , 4.85)	Ind.	(-6.61 , -4.01)
	MT	(-8.69 , 0.94)	Const.	(0 , -1.27)
	MS	(3.19 , -5.8)	Com.	(2.77 , -1.12)
			Transp	(1.01 , -5.85)
			Outros	(-7.97 , 2.2)
<b>Diferença</b>	GO	(8.4 , 10.31)	Ind.	( -7.48 , 1.97)
	MT	(13.12 , -5.7)	Const.	(0.09 , -0.41)
	MS	(-3.68 , 3.22)	Com.	(9.95 , 9.26)
			Transp	(-0.31 , 0.05)
			Outros	(10.05 , -7.7)

Fonte: Elaborada pelo autor

Mato Grosso do Sul à Indústria, ao passo que Mato Grosso mantém sua proximidade de Outros.

**Norte: Análise dos dados - biplots da Figura 4.8 e Tabelas 4.17 e 4.5**

Figura 4.8: Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Norte do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença.



Fonte: Elaborada pelo autor

A Tabela 4.17 traz os valores detalhados dos Autovetores e Autovalores obtidos a partir dos dados da Tabela 4.5, processados na DVS.

Na Norte, Amapá, Acre, Roraima e Rondônia se agrupam, mas nenhum deles se

Tabela 4.15: Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Centro-Oeste do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Dimensão	1	2	3
Vetores Singulares			
$\vec{u}$ da Soma	0,3611	0,4505	0,4082
	-0,5707	0,0875	0,4082
	0,2096	-0,5380	0,4082
$\vec{u}$ da Diferença	0,3709	0,5971	0,0769
	0,5796	-0,3298	-0,2352
	-0,1628	0,1864	-0,6624
$\vec{v}$ da Soma	-0,4341	-0,3725	0,5102
	-0,0002	-0,1176	0,4762
	0,1822	-0,1037	0,2118
	0,0666	-0,5432	-0,5570
	-0,5234	0,2038	-0,1118
$\vec{v}$ da Diferença	-0,3305	0,1143	-0,4700
	0,0041	-0,0239	0,2729
	0,4398	0,5363	-0,1030
	-0,0138	0,0032	-0,3545
	0,4440	-0,4459	-0,2614
Valores Singulares			
da Soma	231,90	116,10	0,00
Percentual (%)	66,64	33,36	0
da Diferença	512,11	298,31	70,98
Percentual (%)	58,10	33,84	8,05

Fonte: Elaborada pelo Autor

Tabela 4.16: Coordenadas dos Biplots da Figura 4.8

	UF	Coord.	CNAE	Coord.
<b>Soma</b>	AC	(-4.36 , -2.43)	Ind.	(3.3 , 6.6)
	AM	(-1.8 , 5.06)	Const.	(1.15 , 1.72)
	AP	(-3.53 , -1.6)	Com.	(17.93 , -1.8)
	PA	(19.28 , -0.39)	Transp	(1.7 , 3)
	RO	(-1.97 , -2.04)	Outros	(10.14 , 0.35)
	RR	(-4.07 , -2.44)		
	TO	(-3.54 , 3.83)		
<b>Diferença</b>	AC	(-0.06 , -0.17)	Ind.	(0.4 , -5.93)
	AM	(-0.49 , 2.15)	Const.	(-0.41 , -1.58)
	AP	(-0.6 , -1.7)	Com.	(-15.14 , 0.16)
	PA	(15.19 , -0.03)	Transp	(-0.59 , -3.74)
	RO	(0.53 , 1.2)	Outros	(-1.41 , -1.34)
	RR	(0 , 0.09)		
	TO	(-0.03 , 6.67)		

Fonte: Elaborada pelo autor

associam especificamente a algum dos CNAE analisados, em relação à Soma.

Em relação à matriz de diferença há casos em que não se constatou desvio-padrão considerável das variáveis (pequeno tamanho dos vetores, cujo Biplot ficou bastante embolado). É o caso dos Biplots das Figuras: 4.6 e 4.8.

Esta assimetria no Norte é explicada pelo Estado do Pará (que na Soma associava-se ao Comércio) e teve um aumento considerável, o que pode ser observado a partir dos dados da Tabela 4.5, na qual temos que houve variação de 190 (cento e noventa) para 650 (seiscentos e cinquenta), do primeiro trimestre de 2017 para o primeiro trimestre de 2018.

### Nordeste: Análise dos dados - biplots da Figura 4.9 e Tabelas 4.19 e 4.6

A Tabela 4.19 traz os valores detalhados dos Autovetores e Autovalores obtidos a partir dos dados da Tabela 4.6, processados na DVS.

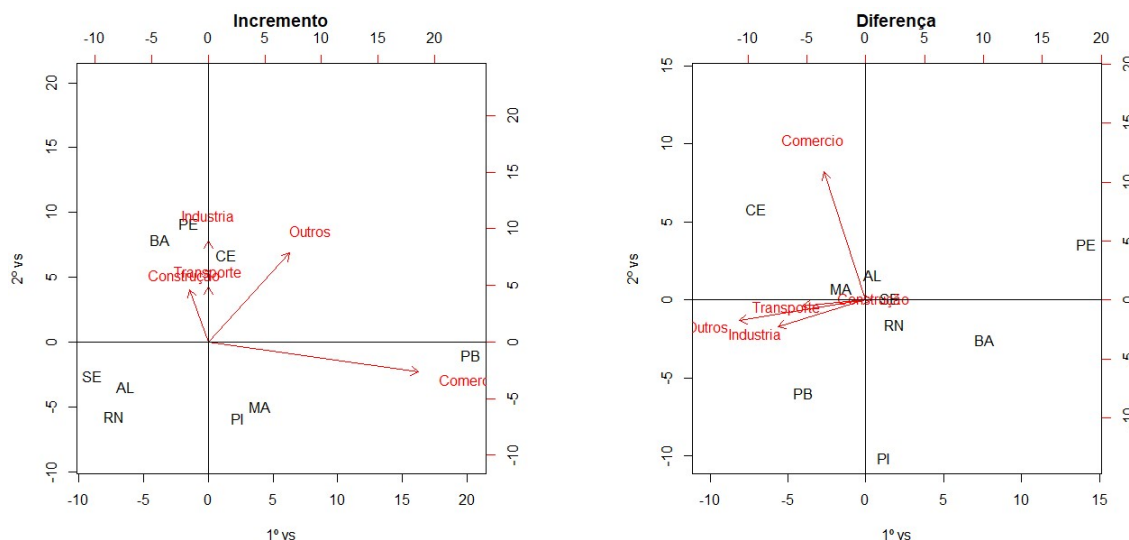
Por derradeiro, no Nordeste, tem-se Ceará, Bahia e Pernambuco associados, respectivamente, ao Transporte, à Construção e à Indústria; e na Paraíba ao Comércio. Já na diferença os resultados são apresentados no Biplot com brusca assimetria, o que se deveu à redução do comércio no Estado do Ceará, de um para outro período em análise a ponto de interferir nos setores que mais contratam aprendizes sob ação fiscal (reduziu de 323 para 99, conforme Tabela 4.6). É provável que isso decorre de certa tendência nos ciclos dos cursos que são oferecidos e, via de regra, movimentados conforme a constância em que estes determinados setores são fiscalizados.

Tabela 4.17: Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Norte do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Dimensão	1	2	3	4	5
<b>Vetores Singulares</b>					
$\vec{u}$ da Soma	-0,1470	-0,2236	-0,1721	-0,1568	-0,5334
	-0,0608	0,4657	0,2375	-0,3858	0,0053
	-0,1192	-0,1472	0,4206	0,2313	-0,0753
	0,6503	-0,0357	0,0021	0,0448	-0,0359
	-0,0663	-0,1875	-0,3300	-0,2697	0,3400
	-0,1374	-0,2247	0,1614	0,1032	0,3047
	-0,1195	0,3529	-0,3195	0,4332	-0,0054
$\vec{u}$ da Diferença	-0,0028	-0,0169	0,0235	0,0531	0,2880
	-0,0227	0,2077	0,3197	0,5760	0,0634
	-0,0277	-0,1649	-0,5647	0,3753	-0,0920
	0,7058	-0,0025	-0,0078	0,0379	-0,0123
	0,0247	0,1162	-0,1265	-0,1321	0,3315
	-0,0001	0,0091	0,1068	-0,0399	-0,5354
	-0,0015	0,6448	-0,2256	-0,0636	-0,0887
$\vec{v}$ da Soma	0,1112	0,6080	-0,0451	-0,2163	-0,2631
	0,0387	0,1584	0,0212	0,6666	-0,1692
	0,6047	-0,1665	-0,3184	-0,0036	-0,0717
	0,0576	0,2766	-0,1753	0,0931	0,6171
	0,3422	0,0322	0,6045	-0,0144	0,1275
$\vec{v}$ da Diferença	0,0186	-0,5735	0,1952	0,3544	0,0841
	-0,0190	-0,1528	-0,1823	0,0120	-0,6655
	-0,7030	0,0151	0,0707	0,0230	-0,0024
	-0,0274	-0,3618	0,0028	-0,6026	0,0722
	-0,0655	-0,1291	-0,6509	0,1029	0,2117
<b>Valores Singulares</b>					
da Soma	878,62	118,00	50,94	22,35	3,83
Percentual (%)	81,83	10,99	4,74	2,08	0,36
da Diferença	463,52	107,00	62,58	26,91	8,08
Percentual (%)	569,38	16,02	9,37	4,03	1,21

Fonte: Elaborada pelo Autor

Figura 4.9: Biplot de Aprendizizes Contratados sob ação fiscal nos diversos setores de atividade econômica na Região Nordeste do Brasil no primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018. À esquerda, Biplot da Matriz Soma (dos resultados neste período); e à direita, analogamente, Biplot da matriz de diferença.



Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 4.18: Coordenadas dos Biplots da Figura 4.9

	UF	Coord.	CNAE	Coord.
<b>Soma</b>	AL	(-6.4 , -3.45)	Ind.	(0.01858362 11.175942)
	BA	(-3.75 , 7.87)	Const.	(-2.09951854 5.793755)
	CE	(1.4 , 6.7)	Com.	(23.22441088 -3.314134)
	MA	(3.95 , -4.96)	Transp	(0.05631246 6.111129)
	PB	(20.3 , -1.01)	Outros	(9.01577326 9.825123)
	PE	(-1.57 , 9.17)		
	PI	(2.26 , -5.89)		
	RN	(-7.26 , -5.77)		
	SE	(-8.97 , -2.65)		
<b>Diferença</b>	AL	(0.43 , 1.63)	Ind.	(-9.37 , -2.85)
	BA	(7.59 , -2.55)	Const.	(0.62 , -0.01)
	CE	(-7.02 , 5.83)	Com.	(-4.48 , 13.57)
	MA	(-1.61 , 0.72)	Transp	(-6.70 , -0.64)
	PB	(-4.03 , -5.97)	Outros	(-13.43 , -2.22)
	PE	(14.17 , 3.59)		
	PI	(1.13 , -10.15)		
	RN	(1.85 , -1.55)		
	SE	(1.52 , 0.11)		

Fonte: Elaborada pelo autor



Tabela 4.19: Autovetores e Autovalores Singulares das matrizes (Soma e Diferença) com dados de Aprendizes Contratados sob Ação Fiscal nos diversos setores no Nordeste do Brasil durante o primeiro trimestre dos anos de 2017 e de 2018.

Dimensão	1	2	3	4	5
Vetores Singulares					
$\vec{u}$ da Soma	-0,1808	-0,1401	0,1554	-0,1301	-0,1853
	-0,1059	0,3194	-0,5251	-0,1100	0,0326
	0,0395	0,2718	0,3294	0,3294	0,2208
	0,1118	-0,2015	-0,0265	-0,1236	0,2790
	0,5741	-0,0411	-0,0513	0,0345	-0,3231
	-0,0435	0,3723	0,2233	-0,2558	-0,0455
	0,0639	-0,2391	-0,0968	0,0362	0,3964
	-0,2054	-0,2342	0,1161	-0,2475	-0,1419
	-0,2536	-0,1075	-0,1247	0,4669	-0,2329
$\vec{u}$ da Diferença	0,0165	0,0818	0,0320	-0,1205	0,2996
	0,2937	-0,1283	-0,5119	0,1133	0,2998
	-0,2716	0,2932	-0,1199	-0,2556	0,3354
	-0,0624	0,0362	-0,0932	0,1464	-0,1258
	-0,1562	-0,3003	0,0894	-0,4071	0,1088
	0,5485	0,1804	0,1801	-0,3136	-0,0470
	0,0438	-0,5106	0,0757	-0,0490	0,0675
	0,0715	-0,0781	-0,0120	-0,0192	0,0836
	0,0590	0,0055	0,4093	0,3450	0,4080
$\vec{v}$ da Soma	0,0005	0,4537	0,2374	-0,0020	0,4876
	-0,0594	0,2352	-0,6032	0,2674	0,0759
	0,6568	-0,1346	-0,1189	-0,0558	0,1822
	0,0016	0,2481	-0,1946	-0,6175	-0,1386
	0,2550	0,3989	0,1666	0,2098	-0,4517
$\vec{v}$ da Diferença	-0,3627	-0,1434	-0,2422	0,4613	0,2765
	0,0239	-0,0007	-0,6295	-0,1383	-0,2898
	-0,1735	0,6826	-0,0338	0,0330	0,0417
	-0,2595	-0,0322	0,2035	0,2388	-0,5773
	-0,5201	-0,1117	0,0498	-0,4582	0,0680
Valores Singulares					
da Soma	1250,14	606,66	332,06	113,91	95,29
Percentual (%)	52,13	25,30	13,85	4,75	3,97
da Diferença	667,33	395,24	291,57	118,34	90,19
Percentual (%)	42,70	25,29	18,66	7,57	5,77

Fonte: Elaborada pelo Autor

## 5 Conclusão

A exposição das bases teóricas de conceitos de geometria analítica e de álgebra linear, que são aplicados na estatística, auxiliaram o desenvolvimento de exemplos em dados fictícios, também sendo base para os processamentos nos dados sobre inserção de aprendizes no mercado de trabalho que foram extraídos do painel RADAR.

O processamento de Decomposição em Valores Singulares simultâneo de matrizes combinadas por bloco organizando-as em duas tabelas de contingência facilitam os cálculos e permitem extrair informações completas dos autovetores e autovalores correspondentes às somas e às diferenças entre as tabelas consideradas.

A técnica de decomposição em valores singulares de matrizes combinadas permitiu a construção dos biplots para explicar a inserção de aprendizes nos diferentes setores do mercado de trabalho nas diferentes regiões do Brasil, bem como no cenário nacional, comparando-se as diferenças (ou semelhanças) ocorridas nos períodos considerados, primeiro trimestre, dos anos de 2017 e de 2018.

Observou-se que a Indústria, em âmbito nacional, tanto na matriz soma, quanto na diferença, teve maior destaque na contratação de aprendizes, sendo esta mais evidente nas regiões sul e sudeste.

Portanto, pesquisas bibliográficas, aplicação em exemplos teóricos e a avaliação dos setores segundo a CNAE permitiram a avaliação da influência e correlação nas regiões do Brasil. Espera-se que a temática com relevância social, apresente alguma utilidade aos atores envolvidos (Governo, Serviços Nacionais de Aprendizagem - Sistema S, Entidades sem fins lucrativos, escolas de formação profissional e sociedade, em geral) e que se possa servir como instrumental interpretativo, de forma que as atividades econômicas reflitam as áreas nas quais se cumpre o dever legal e contribui para estruturação do sistema laboral.

# Referências

- [1] ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra Linear com Aplicações*. Tradução técnica de Claus Ivo Doering. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- [2] AULETE, Caldas. **Minidicionário contemporâneo da língua portuguesa**. Nova Fronteira, 2004.
- [3] AUSUBEL, David P. *et al.* **Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo**. México: Trillas, 1983.
- [4] BRASIL. Constituição (1988). Constituição da República Federal do Brasil. **Brasília, DF: Senado Federal**, 1988.
- [5] \_\_\_\_\_. Decreto nº 9.579, de 22 de novembro de 2018. **Consolida atos normativos editados pelo Poder Executivo federal que dispõem sobre a temática do lactente, da criança e do adolescente e do aprendiz, e sobre o Conselho Nacional dos Direitos da Criança e do Adolescente, o Fundo Nacional para a Criança e o Adolescente e os programas federais da criança e do adolescente, e dá outras providências**. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_ato2015-2018/2018/decreto/D9579.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2018/decreto/D9579.htm)>. Acesso em: 10 mar. 2019.
- [6] \_\_\_\_\_. Decreto nº 8.740, de 4 de maio de 2016. **Altera o Decreto nº 5.598, de 1º de dezembro de 2005, para dispor sobre a experiência prática do aprendiz**. Disponível em: [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/\\_Ato2015-2018/2016/Decreto/D8740.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2016/Decreto/D8740.htm). Acesso em: 10 mar. 2019.
- [7] COELHO JÚNIOR, Francisco Antônio; BORGES-ANDRADE, Jairo Eduardo. *Uso do conceito de aprendizagem em estudos relacionados ao trabalho e organizações*. Scielo Brasil, 2008.
- [8] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Kátia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria analítica. Coleção PROFMAT, Editora SBM, Rio de Janeiro*, 2013.
- [9] DOSSOU-GBÉTÉ, Simplicie; GRORUD, Axel. Biplots for matched two-way tables. In: **Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques**. 2002, p. 469-483.
- [10] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999.
- [11] FERREIRA, Daniel Furtado. **Estatística multivariada**. Lavras: Editora Ufla, 2008.

- 
- [12] FOGAP. **Aprendizagem e erradicação do trabalho infantil em prosa, verso, imagem e música**: trabalhos participantes dos concursos para jovens aprendizes, promovidos pelo fórum gaúcho de aprendizagem - 2. ed. rev. e ampl. - Porto Alegre: Exclamação/Evangraf, 2018.
- [13] FUNARJ. **Primeiro curso de teatro voltado para jovem aprendiz é lançado na casa de cultura Laura Alvim**. Disponível em: <<http://www.funarj.rj.gov.br/primeiro-curso-de-teatro-voltado-para-jovem-aprendiz-e-lancado-na-casa-de-cultura-laura-alvim>>. Acesso em: 28 jul. 2019.
- [14] GABRIEL, Karl Ruben. The biplot graphic display of matrices with application to principal component analysis. **Biometrika**, v. 58, n. 3, p. 453-467, 1971.
- [15] GREENACRE, Michael John. Singular value decomposition of matched matrices. **Journal of applied statistics**, v. 30, n. 10, p. 1101-1113, 2003.
- [16] \_\_\_\_\_. **Biplots in practice**. Fundacion BBVA, 2010.
- [17] HEFEZ, Abramo. Fernández, Cecília de Souza. **Introdução à Álgebra Linear (Coleção PROFMAT)**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- [18] JELIHOVSCHI, Enio. **Análise exploratória de dados usando o R**. Ilhéus, BA: Editus, 2014.
- [19] LAY, David C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2ª edição. Editora LTC, p. 524, 1999.
- [20] LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Álgebra Linear: Coleção Schaum**. Bookman Editora, 2011.
- [21] MACHADO PAIS, José. **Ganchos, tachos e biscates: jovens, trabalho e futuro**. Porto: Ambar, 2001.
- [22] MANUAL de Aprendizagem MTE. **Aprendizagem**: o que é preciso saber para contratar o aprendiz. Ministério do Trabalho e Emprego, Secretaria de Inspeção do Trabalho, Secretaria de Políticas Públicas de Emprego. - 9. ed. rev. e ampliada - Brasília: Assessoria de Comunicação do MTE, 2014.
- [23] MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. - 5. ed. - São Paulo: Atlas, 2003.
- [24] MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira. **Estatística básica**. - 6. ed. - São Paulo: Saraiva, 2010.
- [25] PIRES, Ricardo. **Jovem aprendiz em postos de combustíveis**: obrigatoriedade ou não? Disponível em: <<https://blog.clubpetro.com/jovem-aprendiz-em-postos-de-combustiveis>>. Acesso em: 10 mar. 2019.
- [26] R Core Team (2018). **R**: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.

- 
- [27] RADAR. **Painel de Informações e estatísticas da inspeção do trabalho no Brasil**. Statistics and information Dashboard of Labor Inspection in Brazil. Disponível em: <<https://sit.trabalho.gov.br/radar>>. Acesso em: 22 jul. 2019.
- [28] RECEITA FEDERAL. **CNAE: Apresentação**. Disponível em: <<http://receita.economia.gov.br/orientacao/tributaria/cadastros/cadastro-nacional-de-pessoas-juridicas-cnpj/classificacao-nacional-de-atividades-economicas-2013-cnae/apresentacao>>. Acesso em: 22 jul. 2019.
- [29] TORRES - SALINAS, Daniel *et al.* On the use of biplot analysis for multivariate bibliometric and scientific indicators. **Journal of the American Society for Information Science and Technology**, v. 64, n. 7, p. 1468-1479, 2013.
- [30] SALVADOR, César Coll. Aprendizagem escolar e construção do conhecimento. In: **Aprendizagem escolar e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

# A Termo de Autorização para uso de dados da Inspeção do Trabalho em Pesquisa



**MINISTÉRIO DO TRABALHO**  
**Secretaria de Inspeção do Trabalho**

**Termo de Autorização para uso dados da Inspeção do Trabalho em pesquisa**

**O Secretário de Inspeção do Trabalho, no uso de suas atribuições legais,**

**Considerando** que o Auditor-Fiscal do Trabalho, Sr. Jakson de Almeida Silva, matrícula SIAPE: 1371226, CIF: 35767-7, CPF: 046.156.796-29, tem previsão de conclusão do curso de mestrado profissional em matemática, restando apenas as disciplinas em curso no 2º semestre de 2018 (MA23 – Geometria Analítica e MA24 – Trabalho de Conclusão de Curso). Sendo esta última (MA24), sob orientação da Prof<sup>ª</sup>. Dra. Carla Regina Guimaraes Brighenti, disciplina que aborda tema inerente à Fiscalização do Trabalho (Inserção de Aprendizizes no mercado de trabalho) e respectiva análise estatística, aspectos educacionais e natureza da atuação pela auditoria;

**Considerando** que há pertinência do assunto (análise dados estatísticos produzidos a partir da atuação da inspeção trabalhista) e interesse da Secretaria de Inspeção, pois esta abordagem (estatística) sobre aprendizagem apresenta conteúdo compatível com as atribuições do cargo ocupado pelo servidor e estão em consonância com o plano anual de capacitação do Ministério do Trabalho;

**Considerando** que o Auditor-Fiscal do Trabalho, acima identificado, atualmente em exercício na Gerência Regional do Trabalho em Juiz de Fora/MG, já se encontrava afastado<sup>1</sup>, com ônus limitado, para a realização do curso de pós-graduação *stricto sensu* (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) e que houve suspensão<sup>2</sup>, a pedido do próprio servidor, da concessão de afastamento. Portanto, já analisada a própria pertinência, relevância e utilidade para o órgão ministerial, quando da concessão do afastamento e que o servidor declinou por suspender e conciliar os estudos no mestrado com suas atribuições fiscalizatórias e de auditoria fiscal.

**AUTORIZA:**

A utilização dos dados da Inspeção do Trabalho, disponíveis em sistemas, aos quais o servidor tem acesso, bem como demais dados disponibilizados pelos responsáveis pelo desenvolvimento de sistemas, sendo que o uso e análise destes dados destinam-se à pesquisa (requisito para a obtenção do título de mestre pela Universidade Federal de São João Del Rei, Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT), em que se dará a publicidade dos resultados dos trabalhos (em revistas e/ou periódicos).

Brasília/DF, 6 / 11 / 2018

  
Claudio Secchin

Secretário de Inspeção do Trabalho

<sup>1</sup>Portaria n 276, de 24/03/2017, processo n° 47622.000010/2017-48, publicada no DOU n° 59, de 27/03/2017, seção 2, pg. 52, que concedeu afastamento ao servidor de 30/05/2017 até 30/03/2019.

<sup>2</sup>Portaria n° 1058, de 19/09/2017, que suspendeu, a pedido, a concessão do afastamento concedido ao servidor, publicada no DOU n° 181, de 20/09/2017, seção 2, pg. 105.