UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLÁUDIO DOS SANTOS MOTA

UM ESTUDO SOBRE GENERALIZAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE PELL E APLICAÇÕES COM O CAS MAPLE

FORTALEZA – CEARÁ

2019

CLÁUDIO DOS SANTOS MOTA

UM ESTUDO SOBRE GENERALIZAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE PELL E APLICAÇÕES COM O CAS MAPLE

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

FORTALEZA – CEARÁ

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Mota, Cláudio dos Santos.
Um estudo sobre generalizações da sequência de Pell e aplicações com o CAS Maple [recurso eletrônico] / Cláudio dos Santos Mota. - 2019.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 119 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2019.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Sequência de Pell. 2. Generalizações. 3. Conjuntos numéricos. 4. CAS Maple. I. Título.

CLÁUDIO DOS SANTOS MOTA

UM ESTUDO SOBRE GENERALIZAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE PELL E APLICAÇÕES COM O CAS MAPLE

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática

Aprovada em: 29 de Agosto de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. João Marques Pereira
Universidade Estadual do Ceará – UECE

À minha família, professores e colegas do PROFMAT da UECE, turma de 2017.

AGRADECIMENTOS

A Jeová Deus, pelo dom dado da vida bem como pela possibilidade de dispersão de todo o conhecimento humano.

Ao Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves pela orientação desse trabalho com as valiosas instruções e ajudas necessárias, bem como pela grande paciência demonstrada durante a produção desse trabalho e ainda o incentivo à produção de artigos acadêmicos.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves, Prof. Dr. João Montenegro de Miranda e Prof. Dr. João Marques Pereira pelas observações, questionamentos e críticas.

Aos professores Dr. Tiago Caula Ribeiro, Dr. João Montenegro de Miranda, Dr. Claudemir Silvino Leandro, MsC. Manoel Pereira Gomes Neto, Dr. João Marques Pereira e Dr. José Robério Rogério pela transmissão do conhecimento nas aulas durante as disciplinas do curso.

À Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira, por ministrar a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso e por apresentar seus conselhos e sugestões para a elaboração desse trabalho.

A todos os colegas e futuros mestres do PROFMAT UECE, turma de 2017: Alan Derick, Alan Ladislau (Ladismau), Alison Ferreira, Allan Júnior, Annelise Maymone (Mamãe), Carlos Fábio (Kuririn), Cristiano Holanda, Dioclécio Válber, Ed Massey, Fábio Sampaio, Francisco Bruno (Bruninha), Francisco Odécio (Vittar), Hugo Alves, Marcília Ferreira (Dalva), Rafael Kaio (Leoa), Raimundo Neto e Wesley Liberato pelos maravilhosos momentos de diversão e aprendizado, além da amizade que será levada à vida toda.

Aos colegas professores do IFRN *campus* Santa Cruz, em especial a equipe de Matemática: MsC. Bruna Emanuelly, Esp. Cristiano Rodrigo, MsC. Danielle de Oliveira, MsC. Emanuel Adriano, MsC. Jamerson Fernando, MsC. Rosângela Araújo e MsC. Thiago Jefferson pela acolhida no instituto como pelos bons momentos de trabalho.

Aos alunos dos cursos de licenciatura do IFRN *campus* Santa Cruz, em especial aos que contribuiram para a construção desse texto, a saber: Vanessa Glaziela, Mateus Soares e Fábio Fernandes.

À UECE e a SBM pela oportunidade de realizar o curso.

E a todos que direta ou indiretamente, citados aqui ou não, contribuiram de alguma forma para a realização deste trabalho.

RESUMO

O estudo de generalizações da sequência de Pell é objeto de estudo nesse trabalho. A necessidade humana da construção dos números e de padrões numéricos e a partir disso a observação no cotidiano e na natureza de sequências numéricas é observada no contexto histórico. Com isso, ocorre um caminho natural para o desenvolvimento de uma sequência numérica com uso significativo em Matemática aplicada: a Sequência de Pell, com sua equação de recorrência e suas principais características e propriedades básicas, sendo usado para isso indução matemática e álgebra matricial. Após isso, é feita a ampliação desta última sequência para inteiros quaisquer no mesmo modelo. Uma generalização nos reais ($\mathbb{R}$) desta última sequência, conhecida como k-Pell é introduzida como elemento necessário para implementação destes conceitos, bem como no conjunto dos números complexos é inserida a gaussiana de Pell e ainda as generalizações para os inteiros ($\mathbb{Z}$). Após isso são construídos alguns resultados como limites, funções geradoras, polinomiais e hiperbólicas, bem como a construção nos conjuntos quatérnios e bicomplexos com a aplicação no *software* Maple. Isso é feito a partir de uma pesquisa qualitativa descritiva com a análise de artigos que desenvolvem os conceitos do texto, principalmente os voltados à construção da sequência, apresentação de propriedades e extensão para outros conjuntos numéricos como os quatérnions e bicomplexos a partir dos naturais. Espera-se que ao final seja possível analisar o comportamento das generalizações da sequência de Pell de tal forma a contribuir para a formação de professores de Matemática que tenham interesse na temática, como elemento mais prático e eficiente para o ensino de sequências numéricas avançadas.

Palavras-chave: Sequência de Pell. Generalizações. Conjuntos numéricos. CAS Maple.

ABSTRACT

The study of generalizations of the Pell sequence is object of study in this work. The human need for the construction of numbers and numerical patterns and from this the observation in everyday life and the nature of numerical sequences is observed in the historical context. Thus, there is a natural way to develop a numerical sequence with significant use in applied mathematics: the Pell sequence, with its recurrence equation and its main characteristics and basic properties, being used for this mathematical induction and matrix algebra. After that, this last sequence is enlarged to any integers in the same model. A generalization in reals ($\mathbb{R}$) of this last sequence, known as k-Pell is introduced as a necessary element for the implementation of these concepts, and in the set of complex numbers is inserted the Gaussian of Pell and plus generalizations for integers ($\mathbb{R}$). After that some results are constructed as limits, generating functions, polynomial and hyperbolic functions, as well as the construction in quaternions and bicomplex sets with the application in Maple software. That is based on a descriptive qualitative research with the analysis of articles that develop the concepts of the text, especially those focused on sequence construction, properties presentation and extension to other numerical sets like quaternions and bicomplexes from natural ones. It is hoped that in the end it will be possible to analyze the behavior of generalizations of the Pell sequence in such a way as to contribute to the training of mathematics teachers who are interested in the subject as a more practical and efficient element for teaching advanced numerical sequences.

Keywords: Pell Sequence. Generalizations. Numerical Sets. CAS Maple.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A análise de sequências numéricas é parte crucial da aritmética. Por bastante tempo tem havido inúmeros estudos envolvendo o padrão numérico de números dispostos em sequência, independente do comportamento dos mesmos. Ao mesmo tempo, viu-se a necessidade da construção de novos conjuntos numéricos a partir dos naturais ($\mathbb{N}$), tais como os inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$), reais ($\mathbb{R}$) e até a necessidade da construção dos complexos($\mathbb{C}$) chegando nos dias atuais com os números hipercomplexos, duais, quatérnions entre outros.

Quando é feito um estudo histórico acerca do desenvolvimento das sequências numéricas, observa-se que talvez os mais antigos registros remontem ao Egito Antigo, por volta de 3.400 a.C. E que estas foram sendo aprimoradas e estudadas mais profundamente a partir da sua observação prática em situações do cotidiano ao se encontrar padrões numéricos e da natureza, bem como na aplicação dos conjuntos numéricos mencionados anteriormente.

Diante disso apresentam-se inúmeros exemplos de sequências numéricas que vão desde as mais simples, como o próprio conjunto dos números naturais, com os axiomas de Peano, ou ainda a sequência dos números ímpares nos inteiros até as consideradas mais avançadas com aplicações muito interessantes e peculiares, passíveis de um estudo mais analítico como as sequências de Fibonacci, Pell, Lucas, Padovan, Jacobsthal, Mersenne, Perrin e Narayana apenas para citar algumas.

Aliado com o desenvolvimento matemático relacionado às sequências numéricas, desde sua construção até as aplicações atuais, ocorreu em tempos mais recentes o desenvolvimento de generalizações de sequências numéricas, como uma possibilidade de extensão dos conceitos de um conjunto numérico para os demais. Na perspectiva de criar novas abordagens e observações acerca do estudo dessas sequências e com isso obter resultados mais profundos e eficientes nos estudos matemáticos inclusive no que tange sequências numéricas bem como de dinamizar a metodologia de ensino, de tal forma que facilite a compreensão por parte dos discentes o que está sendo ensinado.

Dessa maneira, observa-se nesse momento a necessidade de estudos mais aprofundados relacionados à generalização de sequências, desde as mais simples até as mais avançadas. Com esses elementos, e restringindo-se a uma sequência específica: a de Pell, apresenta-se o questionamento:

É possível realizar generalizações em conjuntos numéricos de sequências, como um elemento mais prático e eficiente para o ensino de sequências numéricas matemáticas avançadas, a saber de forma mais específica, a sequência de Pell?

Isso posto em virtude do que é observado atualmente na apresentação deste conteúdo. Atualmente a análise das sequências numéricas se inicia com os estudos das progressões, tanto aritmmétias quanto geométricas, que são estudadas no ensino médio. Se o professor tiver a oportunidade de avançar ainda no ensino médio, são objetos de estudo as progressões aritmo-geométricas e as geo-aritméticas especialmente para àqueles alunos que desejam fazer provas olímpicas. Já no ensino superior, quando se trata de sequências, estudam-se os comportamentos das sequências numéricas e se for o caso as sequências de funções e de potências.

Dessa forma, faz-se necessário o estudo mais aprofundado de sequências numéricas mais avançadas, como a de Pell, com suas generalizações, que tem aplicações encontradas no cotidiano e que não possuem tantas abordagens acadêmicas. Bem como a partir desse estudo, determinar alguma aplicação voltada ao processo de construção de um padrão numérico da sequência de Pell, bem como sejam possíveis encontrar mecanismos mais práticos para o aprendizado desse conteúdo.

Assim, diante do exposto, é necessário a explanação dessa sequência específica, a saber: Pell, fazendo inicialmente a construção da mesma a partir de sua definição, passando por sua equação de recorrência, demonstrando suas propriedades, fazendo sua generalização para os inteiros, os reais, os complexos e chegando finalmente na generalização desses elementos em conjuntos numéricos como os quatérnios e os bicomplexos, haja visto a existência de pouco ou quase nenhum estudo sobre essas aplicações em caso específico da sequência de Pell generalizada.

Naturalmente, para ser feita essa construção é necessário um embasamento teórico a partir do que já se tem atualmente sobre essa sequência numérica. Assim, esse texto tem como base fundamental artigos produzidos nessa direção, sendo o principal e base o de (AYDIN; KÖKLÜ, 2017) que define a sequência de Pell, bem como realiza as generalizações para os inteiros, os duas e ainda nos complexos.

E com isso, após um entendimento dos elementos históricos do comportamento de padrões e sequências numéricas obtidas anteriormente, que podem ser encontradas em (BOYER; MERZBACH, 1996) e (EVES, 2011), é possível analisar o comportamento de tal sequência inicialmente como uma sequência dos naturais até de acordo com a definição de sequência numérica feita por (LIMA, 2012). Ao se realizar a extensão no corpo dos ($\mathbb{Z}$), é utilizado inicialmente os resultados obtidos por recorrências lineares de primeira e de segunda ordem encontrados em (LIMA *et al.*, 2016), que permitem determinar elementos quaisquer de sequências numéricas e assim ser feita uma aplicação para índices que estão no conjunto dos inteiros.

Bem como é feita ainda uma análise minuciosa de artigos tais como os de (BICKNELL, 1975), (HORADAM, 1971), (NORONHA; ALVES, 2018), (CATARINO, 2013), (CATARINO, 2018) e de (MELHAM, 1999) onde são apresentados algumas identidades e propriedades úteis no desenvolvimento do texto, bem como é feita ainda uma representação matricial da sequência de Pell para que com isso seja feita uma extensão suave para os inteiros. Nessa direção, (WANI *et al.*, 2019) indica ainda um caso específico dessa generalização: a sequência e a matriz de *k*-Pell e (HALICI; ÖZ, 2016) apresenta também o conceito de sequência gaussiana de Pell, um modelo utilizando elementos complexos.

Com todos esses elementos construídos é possivel observar alguns resultados como limites, funções geradoras, polinomiais e hiperbólicas de Pell além de análise nos conjuntos quatérnios e bicomplexos como forma de aplicação no ensino de Matemática, principalmente focada na possibilidade de inserção dentro da sala de aula.

Quantos aos objetivos deste trabalho, eles se dividem em geral e específicos que são os resultados esperados ao final do trabalho e estão apresentados a seguir. O objetivo geral deste trabalho é:

- Realizar generalizações como ferramenta de implementação para aplicações da sequência de Pell.

e quantos aos objetivos específicos, tem-se três e estão elencados como segue:

- Compreender os elementos históricos matemáticos que levaram ao desenvolvimento de sequências numéricas e que culminaram na sequência de Pell bem como a análise de suas propriedades;
- Descrever a construção das generalizações da sequência de Pell e;
- Analisar os resultados dessas generalizações em funções bem como em conjuntos numéricos ainda em estudo e em ferramenta computacional.

Para se atingir tais objetivos foi feita uma pesquisa qualitativa descritiva acerca da aplicação da sequência numérica de Pell com suas generalizações em alguns conjuntos numéricos com possibilidades de inserção destes conceitos dentro de sala de aula. Dessa forma, a pesquisa é realizada em algumas fases apresentadas a seguir:

i. Na primeira fase, é estudado os elementos históricos que possibilitaram e determinaram a construção da sequência de Pell, desde a construção dos conjuntos numéricos, a partir da necessidade humana, até o desenvolvimento da sequência.

ii. Na segunda fase, é analisada a construção da sequência de Pell com os conceitos relacionados aos conjuntos dos naturais, como suas propriedades, determinação de termos a partir de equação de recorrência linear, bem como ainda um desenvolvimento matricial da sequência.
iii. Na terceira fase, é realizada uma extensão dos conceitos da sequência de Pell no conjunto dos números reais, sendo extendidos inicialmente para o conjunto dos inteiros e posterior extensão para o conjunto dos números complexos, bem como a verificação das aplicações de acordo com os resultados obtidos nos naturais.
iv. Na quarta fase, serão determinadas as demais generalizações com algumas aplicações.
v. Na quinta e última fase é utilizada para a produção de escrita do texto da pesquisa bem como da apresentação da mesma como objeto de defesa do mesmo.

Comenta-se ainda que a construção desse texto se baseou a partir das regras de normalização da UECE encontrados em (UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ, 2016) tendo as referências bibliográficas construídas com a ajuda de (MORE..., 2013) e a produção desse texto feito usando o sistema de preparação de documentos LaTeXa partir do ambiente *online* encontrado em Overleaf (2019).

2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA SEQUÊNCIA DE PELL

Ao longo da história da Matemática existem incontáveis estudos acerca de conjuntos numéricos, sendo que a partir da disposição adotada pelos elementos desses conjuntos é possível a formação das mais diversas sequências numéricas.

Eves (2011) indica o provável do que seja um dos registros mais velhos de um possível agrupamento numérico simples e padronizado que remonte por volta do ano 3400 a.C. encontrado no Egito Antigo.

> Talvez o mais antigo tipo de sistema de numeração a se desenvolver tenha sido aquele chamado *sistema de agrupamento simples*. Nessa modalidade de sistema escolhe-se um número b como base e adotam-se símbolos para 1, b, b^2, b^3 etc. Então, qualquer número se expressa pelo uso desses símbolos *aditivamente*, repetindo-se cada um deles o número necessário de vezes. (EVES, 2011, p. 30)

Ainda com o passar do tempo e com o desenvolvimento da própria Matemática, foram sendo aprimorados outros sistemas de numeração como o sistema multiplicativo, o cifrado chegando até o proposicional, que perdura até os dias atuais.

Tratando-se de forma mais específica de uma sequência numérica padronizada e que não seja um sistema de numeração, Eves (2011) apresenta um dos problemas do papiro Rhind, de número 79, que embora não se tenha uma precisão de interpretação, é mostrado um conjunto de dados:

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2401
Hecates de grãos	16807
	19607

Nesse problema é possível ver o padrão da sequência como sendo as primeiras cinco potências de 7, além da soma dessas potências. Os historiadores imaginavam em um momento inicial que o escriba estivesse utilizando os termos: *casas*, *gatos*, *ratos* e os outros para indicar potências de 7. Mas com o tempo e com estudos históricos além da interpretação de Cantor, apresentou-se o problema:

> Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quantos havia disso tudo?. (EVES, 2011, p. 76)

Uma questão antiga e que permanece em meio ao folclore cultural, principalmente na cultura inglesa. Outros exemplos de sequências numéricas foram sendo observadas e apresentadas com o tempo. Assim chega-se ao que provavelmente é a mais conhecida sequência numérica denominada a partir da observação do seu autor, Fibonacci, do problema proposto apresentado por Boyer e Merzbach (1996):

> Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?. (BOYER; MERZBACH, 1996, p. 174)

Tal sequência que ficou conhecida como Sequência de Fibonacci, possuindo diversas aplicaçõesna natureza, cehgando até nas artes. Bem como chegamos ainda no momento histórico onde John Pell, determinou a sequência que leva o seu nome e tal sequência está intimamente ligada ao número $\sqrt{2}$ bem como à *equação de Pell* também possuídora de diversas aplicações, objeto de estudo principal desse texto e também será investigada em seções posteriores.

Com esses elementos históricos e ainda com a formalização da Matemática, Lima (2012) apresenta que uma família com índices nos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ chama-se sequência. Dessa forma, uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ com elementos de um conjunto X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$ em que o valor $x(n)$ é representado pela simbologia x_n e se chama *n-ésimo termo* da sequência.

À medida que o tempo passava, verificou-se que as sequências poderiam ser estudadas, desde que essas possuíssem um padrão, ou até mesmo, uma lei de formação. Atualmente, o estudo das sequências já faz parte do conteúdo do Ensino Médio, no que tange as progressões aritméticas e geométricas. Nesse sentido, Iezzi e Hazzan (2004) observam que existem diversos tipos de comportamentos para essas sequências numéricas, tais como:

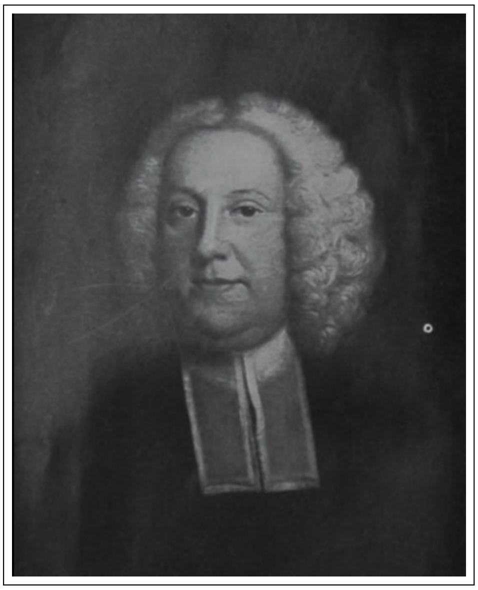
- Finita ou infinita de acordo com a quantidade de termos;
- Crescente, constante, decrescente, alternante ou estacionária.

Bem como, sendo vista no Ensino Superior nas disciplinas dos cursos das áreas de exatas, mas agora com aplicações em sequências limitadas e monótonas, chegando nas séries infinitas até funções e de potências.

Existem algumas sequências numéricas mais conhecidas e estudadas, como exemplos citamos a sequência de Fibonacci, mas ainda outras sequências são pouco conhecidas e exploradas, mas que possuem muitas aplicações no cotidiano e na natureza. Sendo que uma delas de forma específica, sequência de Pell, será objeto de estudo pormenorizado a partir da próxima seção.

2.1 SEQUÊNCIA DE PELL

Figura 1 – John Pell



Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/John_Pell

Noronha e Alves (2018, p. 3) falam rapidamente da história de John Pell (1611 - 1685), que foi um matemático inglês que se interessou principalmente em Álgebra na teoria de equações. Durante sua vida, possuiu envolvimentos na carreira diplomática e acadêmica. Sendo que nesta última, junto com seu aluno suiço Johann Heinrich Rahn, conhecido como Rhonius, estudaram e publicaram a expressão $ax^2 + 1 = y^2$ que posteriormente ficou conhecida erroneamente como Equação de Pell.

Pois tal equação havia sido desenvolvida e apresentada antes por Fermat para a comunidade acadêmica e veio ser conhecida por equação de Pell após a associação com seu aluno na publicação de estudos desta expressão baseado nas constribuições de Pell no estudo de teoria dos números, principalmente se tratando de equações diofantinas.

Noronha e Alves (2018, p. 3) ainda entre outros elementos comentam um pouco sobre a vida de Pell, apresentando-o como uma pessoa bastante reservada e com poucas publicações, talvez devido às suas condições financeiras na época, o que fez com que embora fosse respeitado pela comunidade acadêmica por suas correspondências com outros matemáticos, não se tenha uma certeza acerca de suas legítimas contribuições.

Após sua morte, Leonard Euler fez uma associação baseada numa equação diofantina específica: $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, tendo as variáveis x e y inteiras, conhecida como Equação de Pell, atribuída a partir do estudo feito por Pell de uma equação cognata fazendo que fosse desenvolvido assim o que ficou conhecido como sequência de Pell.

Aydin e Köklü (2017, p. 1) apresentam a sequência de Pell pela recursividade

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad (n \geq 3) \tag{2.1}$$

com $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$.

Note que partindo de (2.1) observa-se que é possível determinar os n primeiros termos dessa sequência, como disposto:

$$\begin{array}{lllllll}
P_1 & = & 1 & & & & \\
P_2 & = & 2 & & & & \\
P_3 & = & 2P_2 + P_1 & = & 2(2)+1 & = & 5 \\
P_4 & = & 2P_3 + P_2 & = & 2(5)+2 & = & 12 \\
P_5 & = & 2P_4 + P_3 & = & 2(12)+5 & = & 29 \\
P_6 & = & 2P_5 + P_4 & = & 2(29)+12 & = & 70
\end{array}$$

e assim por diante, formando assim a sequência de Pell:

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, ..., P_n, ... \tag{2.2}$$

Veja que nesta sequência só é possível obter o n-ésimo termo a partir do conhecimento dos dois termos imediatamente anteriores, não sendo possível assim determinar um termo genérico qualquer ou até mesmo sua posição que ele ocupa na sequência.

Desta maneira, se faz necessário a construção de uma equação de recorrência para satisfazer essa necessidade, o que será apresentado na próxima seção.

2.2 EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Voltando a equação que representa a Sequência de Pell, a saber, (2.1) e utlizando os conceitos do Apêndice (A), podemos reescrever tal expressão recursiva modificando os índices dos termos de forma conveniente, ficando:

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n \qquad (n \geq 1) \tag{2.3}$$

Considerando (2.3) como sendo uma equação de recorrência linear de segunda ordem, e tomando assim sua equação característica

$$r^2 = 2r + 1 \tag{2.4}$$

ou ainda

$$r^2 - 2r - 1 = 0$$

cujas soluções dessa equação quadrática são

$$r = 1 \pm \sqrt{2}$$

fazendo com que a solução geral de (2.3) possa ser escrita como

$$P_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n \tag{2.5}$$

e para se determinar os valores de A e B tomamos $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$ formando o sistema.

$$\begin{cases} P_1 = A(1+\sqrt{2})^1 + B(1-\sqrt{2})^1 = 1 \\ P_2 = A(1+\sqrt{2})^2 + B(1-\sqrt{2})^2 = 2 \end{cases}$$

Ao resolver esse sistema, mais vez será usado método da comparação isolando a incógnita A nas duas equações. Na primeira:

$$\begin{aligned} A(1+\sqrt{2})^1 + B(1-\sqrt{2})^1 &= 1 \quad \Rightarrow \\ A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) &= 1 \quad \Rightarrow \\ A(1+\sqrt{2}) &= 1 - B(1-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Isolando a incógnita A, vem:

$$A = \frac{1 - B(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}$$

racionalizando este resultado, fica:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - B(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} . \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \\ &= \frac{1(1-\sqrt{2}) - B(1-2\sqrt{2}+2)}{1-2} \quad \Rightarrow \\ &= \frac{1-\sqrt{2} - B(3-2\sqrt{2})}{-1} \quad \Rightarrow \\ A &= \sqrt{2} - 1 + B(3-2\sqrt{2}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{array}{rcll} A(1+\sqrt{2})^2+B(1-\sqrt{2})^2 &=& 2 & \Rightarrow \\ A(1+2\sqrt{2}+2)+B(1-2\sqrt{2}+2) &=& 2 & \Rightarrow \\ A(3+2\sqrt{2})+B(3-2\sqrt{2}) &=& 2 & \Rightarrow \\ A(3+2\sqrt{2}) &=& 2-B(3-2\sqrt{2}) & \end{array}$$

Usando raciocício análogo na segunda equação do sistema:

Isolando novamente a incógnita A fica:

$$A = \frac{2-B(3-2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}$$

e racionalizando o resultado anterior, vem:

$$\begin{array}{rcll} A &=& \frac{2-B(3-2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}.\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} & \Rightarrow \\ &=& \frac{2(3-2\sqrt{2})-B(9-12\sqrt{2}+8)}{9-8} & \Rightarrow \\ &=& \frac{2(3-2\sqrt{2})-B(17-12\sqrt{2})}{1} & \Rightarrow \\ A &=& 6-4\sqrt{2}-B(17-12\sqrt{2}) & \end{array} \tag{2.7}$$

Tomando os segundos termos das equações (2.6) e (2.7) e igualando:

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{2}-1+B(3-2\sqrt{2}) &=& 6-4\sqrt{2}-B(17-12\sqrt{12}) & \Rightarrow \\ B(3-2\sqrt{2})+B(17-12\sqrt{2}) &=& 6-4\sqrt{2}-\sqrt{2}+1 & \Rightarrow \\ 3B-2B\sqrt{2}+17B-12B\sqrt{2} &=& 7-5\sqrt{2} & \Rightarrow \\ 20B-14B\sqrt{2} &=& 7-5\sqrt{2} & \Rightarrow \\ B(20-14\sqrt{2}) &=& 7-5\sqrt{2} & \Rightarrow \\ B &=& \frac{7-5\sqrt{2}}{20-14\sqrt{2}} & \end{array}$$

Racionalizando este último resultado, tem-se:

$$\begin{array}{rcll} B &=& \frac{7-5\sqrt{2}}{20-14\sqrt{2}}.\frac{20+14\sqrt{2}}{20+14\sqrt{2}} & \Rightarrow \\ &=& \frac{140+98\sqrt{2}-100\sqrt{2}-140}{400-392} & \Rightarrow \\ &=& -\frac{2\sqrt{2}}{8} & \Rightarrow \\ B &=& -\frac{\sqrt{2}}{4} & \end{array} \tag{2.8}$$

Substituindo o valor de B obtido em (2.8) na equação (2.6), consegue-se determinar o valor de A:

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{2}-1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)(3-2\sqrt{2}) && \Rightarrow \\
&= \sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{4}(3-2\sqrt{2}) && \Rightarrow \\
&= \sqrt{2}-1-\frac{3\sqrt{2}}{4}+1 && \Rightarrow \\
&= \sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4} && \Rightarrow \\
&= \frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{4} && \Rightarrow \\
A &= \frac{\sqrt{2}}{4} && (2.9)
\end{aligned}
$$

Desse modo, usando os resultados de A e B encontrados respectivamente nas expressões (2.9) e (2.8) e aplicando na equação geral (2.5), temos a equação de recorrência da sequência de Pell:

$$P_n = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n \tag{2.10}$$

Sendo que essa equação é útil para se encontrar qualquer termo da sequência de acordo com o valor tomado por n. Bicknell (1975, p. 345) apresenta ainda uma forma mais elegante para a equação de recorrência da sequência de Pell, dada por:

$$P_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.11}$$

com $\alpha = 1+\sqrt{2}$ e $\beta = 1-\sqrt{2}$. Naturalmente é fácil ver que as expressões (2.10) e (2.11) são equivalentes. Para isso basta tomar a última expressão e substituir os valores de α e β, como segue:

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = \frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})} = \frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}} \Rightarrow \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]
\end{aligned}
$$

isso posto ao racionalizar a última passagem, comprovando assim a igualdade das expressões. Entretanto, este resultado aparentemente só funciona para os números naturais, ficando o questionamento da possibilidade de uma suave extensão dos resultados obtidos anteriormente para o conjunto dos números inteiros. Tal análise será feita na próxima seção.

2.3 SEQUÊNCIA DE PELL EXTENDIDA NOS INTEIROS

Até o momento, foi apresentado no conceito de sequência numérica para índices apenas nos naturais ($\mathbb{N}$), isso até de acordo com a definição de Lima (2012). No entanto, outros autores, como exemplo Horadam (1971) conseguiu fazer uma expansão dos conceitos obtidos em algumas sequências para os índices no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$). E isso será objeto de estudo dessa seção para a sequência de Pell.

Naturalmente, ao ser feita uma extensão para índices inteiros, os termos obtidos devem obedecer tanto à recursividade que define a sequência sem a restrição quanto aos índices como também a equação de recorrência obtida. Assim, de forma específica, tratando-se da sequência de Pell, será feito sua extensão para os índices nos inteiros.

Como elemento inicial, será determinado o termo P_0 usando as duas formas. Para a equação de recorrência (2.10), tomaremos $n = 0$ que fica

$$P_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^0 - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^0 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$$

e utilizando a recursividade (2.3) removendo $(n \geq 1)$, tomando para isso $n = 0$ e os termos $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$ da definição vem

$$P_2 = 2P_1 + P_0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = P_2 - 2P_1 = 2 - (2)1 = 0$$

Confirmando assim a existência do termo zero tal que $P_0 = 0$. Utilizando esta última forma de reescrever a sequência de Pell, $P_n = P_{n+2} - 2P_{n+1}$ é natural aceitar a existência de outros elementos tais como $P_{-1}, P_{-2}, ..., P_{-n}, ...$, e assim por diante e se podem determinar alguns deles de forma análoga ao que foi feito quando da definição da sequência de Pell para os índices naturais, o que é obtido nos resultados:

$$\begin{array}{llllllll}
n=-1 & \therefore & P_{-1} & = & P_1 - 2P_0 & = & 1-2(0) & = & 1 \\
n=-2 & \therefore & P_{-2} & = & P_0 - 2P_{-1} & = & 0-2(1) & = & -2 \\
n=-3 & \therefore & P_{-3} & = & P_{-1} - 2P_{-2} & = & 1-2(-2) & = & 5 \\
n=-4 & \therefore & P_{-4} & = & P_{-2} - 2P_{-3} & = & -2-2(5) & = & -12 \\
n=-5 & \therefore & P_{-5} & = & P_{-3} - 2P_{-4} & = & 5-2(-12) & = & 29 \\
n=-6 & \therefore & P_{-6} & = & P_{-4} - 2P_{-5} & = & -12-2(29) & = & -70
\end{array}$$

Comenta-se aqui que tais resultados também poderiam ser determinados a partir do uso da equação de recorrência (2.10) para os mesmos índices, sendo que estes também foram obtidos com o auxílio de ferramenta computacional apropriada. Note ainda que existe uma semelhança dos termos com índices negativos com seus respectivos índices positivos, modificando o sinal quando o índice é par.

Diante disso é possível fazer uma associação tal como Horadam (1971, p.245) fez entre os pares de termos da sequência de Pell:

$$P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n \tag{2.12}$$

Tomando a expressão (2.12) e desenvolvendo P_n de forma conveniente, vem

$$\begin{array}{rclcll} P_{-n} & = & (-1)^{n+1}.P_n & = & (-1)^{n+1}.[P_{n+2} - 2P_{n+1}] & \Rightarrow \\ & = & (-1)^{n+1}.P_{n+2} - 2.(-1)^{n+1}P_{n+1} & = & (-1)^{n+1}P_{n+2} + 2.(-1)^{n}P_{n+1}] & \Rightarrow \\ & = & 2.(-1)^{n}P_{n+1} + (-1)^{n+1}.P_{n+2} & = & 2.(-1)^{n+2}P_{n+1} + (-1)^{n+1}.P_{n+2} & \end{array}$$

Utilizando mais uma vez (2.12), temos

$$P_{-n} = 2P_{-(n+1)} + P_{-(n+2)} = 2P_{-n-1} + P_{-n-2} \tag{2.13}$$

onde (2.13) nada mais representa do que a relação de recorrência da sequência de Pell para índices negativos. Comprovando assim ser possível realizar a extensão dos mesmos conceitos da sequência dos naturais ($\mathbb{N}$) para os inteiros ($\mathbb{Z}$).

Além do conceito obtido nessa seção, tem-se ainda outro bastante útil no desenvolvimento desse trabalho relacionado com a construção de elementos matriciais para a sequência de Pell. Assunto que será abordado na próxima seção.

2.4 CONCEITOS MATRICIAIS DA SEQUÊNCIA DE PELL

Uma das disposições para a representação da sequência de Pell é o da matriz associada à sequência. De acordo com Bicknell (1975, p. 347):

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

Utilizando o resultado anterior, pode-se determinar as primeiras matrizes das sequências de Pell:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} P_4 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} P_5 & P_4 \\ P_4 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$$

e assim por diante. Embora seja possível determinar as matrizes associadas à sequência de Pell, elas também se relacionam por recorrência de forma análoga à própria sequência. Isso é o que garante o próximo teorema.

Teorema 2.4.1 *Seja a sequência de Pell (P_n) e a representação matricial dela $\mathbf{M}_n$, esta pode ser apresentada por*

$$\mathbf{M}_n = 2\mathbf{M}_{n-1} + \mathbf{M}_{n-2}$$

Demonstração. Usando os elementos de álgebra matricial e a definição da sequência de Pell, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_n &= 2\mathbf{M}_{n-1} + \mathbf{M}_{n-2} \\
\mathbf{M}_n &= 2\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2P_n + P_{n-1} & 2P_{n-1} + P_{n-2} \\ 2P_{n-1} + P_{n-2} & 2P_{n-2} + P_{n-3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_n &= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

Um outro resultado muito útil consiste em associar o índice da matriz associada da sequência de Pell com a potência da matriz correspondente da mesma matriz. Esse resultado será apresentado no próximo teorema desenvolvido por Noronha e Alves (2018)[p. 21].

Teorema 2.4.2 *Toda matriz ($\mathbf{M}_n$) associada à sequência de Pell (P_n) se relaciona com a potência da mesma matriz da forma*

$$\mathbf{M}_n = [\mathbf{M}_1]^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Observa-se inicialmente que as matrizes associadas da sequência de Pell são simétricas, sendo possível ter a comutatividade entre o produto de duas dessas matrizes. Assim, usando o princípio de indução matemática, tem-se:

Para $n = 1$:

$$\mathbf{M}_1 = [\mathbf{M}_1]^1 = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 \end{bmatrix}$$

Agora suponha que este resultado seja verdadeiro para $n > 1$, ou seja,

$$\mathbf{M}_n = [\mathbf{M}_1]^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

assim, para $n+1$, usando o produto matricial, vem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{n+1} = [\mathbf{M}_1]^{n+1} &= [\mathbf{M}_1]^n . [\mathbf{M}_1]^1 \\
&= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2P_{n+1} + P_n & P_{n+1} + 0 \\ 2P_n + P_{n-1} & P_n + 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_{n+1} = [\mathbf{M}_1]^{n+1} &= \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Comprovando ser verdade para $n+1$ de acordo com a definição de matriz associada da sequência de Pell (P_n).

■

Dessa maneira, veja que é possível determinar as matrizes $[\mathbf{M}_1]^2$, $[\mathbf{M}_1]^3$, $[\mathbf{M}_1]^4$, ..., $[\mathbf{M}_1]^n$,... a partir do produto entre as matrizes $\mathbf{M}_1$ ou utilizando recorrência, obtendo assim as matrizes: $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$, ..., $\mathbf{M}_n$,...

Na mesma direção do que foi feito na extensão da sequência de Pell para os $\mathbb{Z}$, o próximo passo se tratando das matrizes associadas da sequência de Pell seria o de observar o comportamento de $\mathbf{M}_{-n}$. Entretanto, de acordo com o resultado anterior, deveria-se ter $\mathbf{M}_{-n} = [\mathbf{M}_1]^{-n}$.

Mas, veja que $[\mathbf{M}_1]^{-n}$ representa a matriz inversa da matriz $[\mathbf{M}_1]^n$, isso posto, pois

$$[\mathbf{M}_1]^{-n} = [(\mathbf{M}_1)^n]^{-1}$$

E para se inverter uma matriz de ordem 2, faz-se necessário o conhecimento do determinante dessa matriz. O próximo teorema apresenta um resultado bastente útil para as matrizes associadas da sequência de Pell.

Teorema 2.4.3 *O determinante de toda matriz* ($\mathbf{M}_n$) *associada à sequência de Pell* (P_n) *se relaciona por*

$$det\,(\mathbf{M}_n) = (-1)^n.$$

Demonstração. Sabendo que o determinante da matriz para $n = 1$ é,

$$det\,(\mathbf{M}_1) = det\left([\mathbf{M}_1]^1\right) = det\,(\mathbf{M}) = 2.0 - 1.1 = 0 - 1 = -1$$

tem-se utilizando as propriedades dos determinantes

$$det\,(\mathbf{M}_n) = det\,([\mathbf{M}_1]^n) = [det\,(\mathbf{M})]^n = (-1)^n$$

■

Dessa forma, como $det\,(\mathbf{M}_n) = det\,([\mathbf{M}_1]^n) \neq 0$ é natural compreender que existe a inversa da matriz associada da sequência de Pell. Com isso é possível apresentar o corolário que segue:

Corolário 2.4.1 *Toda matriz associada da sequência de Pell* (P_{-n}) *com índices negativos* ($\mathbf{M}_{-n}$) *é determinada pela inversa da matriz com índices positivos* $(\mathbf{M}_n)^{-1}$.

Demonstração. Ora, seja a representação $\mathbf{M}_{-n}$ para as matrizes associadas das sequências com índices negativos de Pell. Usando a demonstração do Teorema (2.4.2) se tem

$$\mathbf{M}_{-n} = [\mathbf{M}_1]^{-n} = [(\mathbf{M}_1)^n]^{-1}$$

e para se determinar a inversa da matriz $[\mathbf{M}_1]^n$ é usado o processo de inversão de matrizes de ordem 2

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{-n} &= [(\mathbf{M}_1)^n]^{-1} &=& \frac{1}{(-1)^n}.\begin{bmatrix} P_{n-1} & -P_n \\ -P_n & P_{n+1} \end{bmatrix} \\
&&=& \begin{bmatrix} (-1)^n.P_{n-1} & (-1)^n.-P_n \\ (-1)^n.-P_n & (-1)^n.P_{n+1} \end{bmatrix} \\
&&=& \begin{bmatrix} P_{-(n-1)} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-(n+1)} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_{-n} &= &=& \begin{bmatrix} P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cujo resultado equivale à definição para matriz associada à sequência de Pell tomando n negativo.

■

Veja que com estas demonstrações é possível fazer uma extensão também do conceito de matriz associada ($\mathbf{M}_n$) da sequência de Pell (P_n) também para os inteiros ($\mathbb{Z}$). Um resultado particular e muito interessante é tomado quando $n = 0$

$$
\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

que é a matriz identidade. É importante citar ainda a existência de algumas propriedades da sequência de Pell, assunto que seré demonstrado na próxima seção.

2.5 ALGUMAS PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE PELL

Algumas das principais propriedades da sequência de Pell são dispostas a seguir e são utilizados para suas demonstrações os conceitos de equação de recorrência, extensão no conjunto dos ($\mathbb{Z}$), resultados obtidos em matrizes associadas e de k-Pell.

Propriedade 2.1 $P_mP_{n+1} + P_{m-1}P_n = P_{m+n}$

Demonstração. Ora, sejam as matrizes da sequência de Pell $\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} P_{m+1} & P_m \\ P_m & P_{m-1} \end{bmatrix}$, realizando o produto dessas matrizes, vem

$$\mathbf{M}_n.\mathbf{M}_m = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P_{m+1} & P_m \\ P_m & P_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+1}P_{m+1}+P_nP_m & P_{n+1}P_m+P_nP_{m-1} \\ P_nP_{m+1}P_{n-1}P_m & P_nP_m+P_{n-1}P_{m-1} \end{bmatrix}$$

e lembrando do Teorema (2.4.2) usando propriedade de potência, temos $\mathbf{M}_n.\mathbf{M}_m = \mathbf{M}^n.\mathbf{M}^m = \mathbf{M}^{n+m} = \mathbf{M}_{n+m}$ além da definição de matriz da sequência de Pell para o caso $n+m$, fica

$$\mathbf{M}_{n+m} = \begin{bmatrix} P_{n+m+1} & P_{n+m} \\ P_{n+m} & P_{n+m-1} \end{bmatrix}.$$

e pela igualdade de matrizes, tomando as entradas da primeira linha e segunda coluna nos dois lados fica $P_{n+1}P_m + P_nP_{m-1} = P_{n+m}$ demonstrando a propriedade.

■

Corolário 2.5.1 $P_{-m}P_{-n+1} + P_{-m-1}P_{-n} = P_{-m-n}$

Demonstração. De forma análoga à Propriedade (2.1), temos as matrizes da sequência de Pell $\mathbf{M}_{-n} = \begin{bmatrix} P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n-1} \end{bmatrix}$ e $\mathbf{M}_{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+1} & P_{-m} \\ P_{-m} & P_{-m-1} \end{bmatrix}$, multiplicando essas matrizes, temos

$$\mathbf{M}_{-n}.\mathbf{M}_{-m} = \begin{bmatrix} P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P_{-m+1} & P_{-m} \\ P_{-m} & P_{-m-1} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} P_{-n+1}P_{-m+1}+P_{-n}P_{-m} & P_{-n+1}P_{-m}+P_{-n}P_{-m-1} \\ P_{-n}P_{-m+1}P_{-n-1}P_{-m} & P_{-n}P_{-m}+P_{-n-1}P_{-m-1} \end{bmatrix}$$

e utilizando o Teorema (2.4.2) usando propriedade de potência, temos $\mathbf{M}_{-n}.\mathbf{M}_{-m} = [\mathbf{M}_1]^{-n}.[\mathbf{M}_1]^{-m} = [\mathbf{M}_1]^{-n-m} = \mathbf{M}_{-n-m}$ além da definição de matriz da sequência de Pell para o caso $-n-m$, fica

$$\mathbf{M}_{-n-m} = \begin{bmatrix} P_{-n-m+1} & P_{-n-m} \\ P_{-n-m} & P_{-n-m-1} \end{bmatrix}.$$

e pela igualdade de matrizes, tomando as entradas da primeira linha e segunda coluna nos dois lados fica $P_{-n+1}P_{-m} + P_{-n}P_{-m-1} = P_{-n-m}$ demonstrando a propriedade.

■

Propriedade 2.2 $P_mP_{n+1} - P_{m+1}P_n = (-1)^nP_{m-n}$

Demonstração. Tomando a propriedade anterior, para o caso $-n$ e utilizando ainda a relação (2.12), vem:

$$\begin{aligned}
P_{m+(-n)} &= P_m P_{-n+1} + P_{m-1} P_{-n} \quad \Rightarrow \\
P_{m-n} &= P_m (-1)^n P_{n+1} + P_{m-1} (-1)^{n+1} P_n \quad \Rightarrow \\
P_{m-n} &= (-1)^n [P_m P_{n+1} - P_{m-1} P_n] \quad \Rightarrow \\
(-1)^n P_{m-n} &= P_m P_{n+1} - P_{m-1} P_n
\end{aligned}$$

■

Propriedade 2.3 *(Identidade de Cassini[1])* $P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 = (-1)^n$

Demonstração. Ora, foi demonstrado no Teorema (2.4.3) que $det(\mathbf{M}_n) = (-1)^n$, mas pela definição de matriz da sequência de Pell bem como no cálculo do determinante da matriz de ordem 2, vem:

$$det(\mathbf{M}_n) = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} = P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n.$$

■

Propriedade 2.4 $P_n^2 + P_{n+1}^2 = P_{2n+1}$

Demonstração. Seja a matriz da sequência de Pell $\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$. A matriz $\mathbf{M}_{2n}$ pode ser obtida tanto pela potência da matriz anterior ao quadrado quanto pela definição de matriz associada da sequência de Pell. De um lado, temos:

$$\mathbf{M}_{2n} = \mathbf{M}_{n+n} = \mathbf{M}^{2n} = \mathbf{M}^n.\mathbf{M}^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} P_{n+1}P_{n+1} + P_nP_n & P_{n+1}P_n + P_nP_{n-1} \\ P_nP_{n+1}P_{n-1}P_n & P_nP_n + P_{n-1}P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+1}^2 + P_n^2 & P_{n+1}P_n + P_nP_{n-1} \\ P_nP_{n+1}P_{n-1}P_n & P_n^2 + P_{n-1}^2 \end{bmatrix}$$

e de outro lado, usando a definição da matriz da sequência de Pell para o caso $2n$, fica

$$\mathbf{M}_{2n} = \begin{bmatrix} P_{2n+1} & P_{2n} \\ P_{2n} & P_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

e pela igualdade de matrizes, tomando a entrada da primeira linha e primeira coluna nos dois lados temos $P_{n+1}^2 + P_n^2 = P_{2n+1}$.

■

[1] Giovanni Domenico Cassini (1625 - 1712) foi um astrônomo e matemático italiano que desenvolveu a maior parte dos seus trabalhos na área de astronomia do estudo de planetas solaresm mas que também contribuiu para alguns elementos da Álgebra.

Propriedade 2.5 $P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 = 2P_{2n}$

Demonstração. Tomando as matrizes dos dois lados da propriedade anterior além da definição da sequência de Pell no caso $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \Rightarrow 2P_n = P_{n+1} - P_{n-1}$, e observando a igualdade para a entrada da primeira linha e segunda coluna, vem:

$$\begin{array}{rcl} P_{2n} & = & P_{n+1}P_n + P_nP_{n-1} \quad = \quad P_n[P_{n+1} + P_{n-1}] \qquad \Rightarrow \\ 2P_{2n} & = & 2P_n[P_{n+1} + P_{n-1}] \quad = \quad [P_{n+1} - P_{n-1}][P_{n+1} + P_{n-1}] \qquad \Rightarrow \\ 2P_{2n} & = & P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 \end{array}$$

■

Propriedade 2.6 $2P_{n+1}P_n - 2P_n^2 = P_{2n}$

Demonstração. Da propriedade anterior, e utilizando ainda a definição da sequência de no caso $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \Rightarrow P_{n-1} = P_{n+1} - 2P_n$, fica:

$$\begin{array}{rcl} 2P_{2n} & = & P_{n+1}^2 - P_{n-1}^2 \qquad \Rightarrow \\ P_{2n} & = & \dfrac{[P_{n+1} + P_{n-1}][P_{n+1} - P_{n-1}]}{2} \qquad \Rightarrow \\ & = & \dfrac{[P_{n+1} + P_{n+1} - 2P_n][P_{n+1} - (P_{n+1} - 2P_n)]}{2} \qquad \Rightarrow \\ & = & \dfrac{[2P_{n+1} - 2P_n][2P_n]}{2} \qquad \Rightarrow \\ P_{2n} & = & 2P_{n+1}P_n - 2P_n^2 \end{array}$$

■

Além dessas propriedades elementares, temos uma que envolve somas de termos da sequência de Pell:

Propriedade 2.7 $\sum_{k=1}^{n} P_i^2 = \dfrac{P_nP_{n+1}}{2}$

Demonstração. Usando o processo de indução matemática sobre n, tem-se:

Para $k = 1$, vem:

$$\sum_{k=1}^{1} P_i^2 = P_1^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{P_1P_{1+1}}{2} = \frac{P_1P_2}{2} = \frac{1.2}{2} = 1$$

Agora suponha que a hipótese de indução seja verdadeira para certo $n > 1$, ou seja, $\sum_{k=1}^{n} P_i^2 = \dfrac{P_nP_{n+1}}{2}$, vamos observar o que acontece para $n+1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} P_i^2 &= \sum_{k=1}^{n} P_i^2 + P_{n+1}^2 = \frac{P_n P_{n+1}}{2} + P_{n+1}^2 = \frac{P_n P_{n+1} + 2P_{n+1}^2}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{P_{n+1}[P_n + 2P_{n+1}]}{2} = \frac{P_{n+1} P_{n+2}}{2}
\end{aligned}
$$

■

Com estes resultados, findam-se os elementos iniciais acerca da sequência de Pell. Sendo que existe a extensão dessa mesma sequência um modelo conhecido como sequência de k-Pell, o que será apresentado no próximo capítulo.

3 SEQUÊNCIA DE *K*-PELL

Wani *et al.* (2019, p. 19) fazem um estudo acerca da generalização de Fibonacci e apresentam ainda o conceito da sequência de k-Pell, que segue:

Definição 3.0.1 *Para $k \in \mathbb{R}^+$ a sequência de k-Pell $\langle P_{k,n} \rangle$ é definida pela lei de recorrência*

$$P_{k,n+2} = 2P_{k,n+1} + kP_{k,n}, \qquad n \geq 1 \tag{3.1}$$

com $P_{k,1} = 1$ e $P_{k,2} = 2$.

Utilizando a definição anterior, é possível determinar os n primeiros termos da sequência de k-Pell:

$$\begin{array}{lllllll}
P_{k,1} & = & 1 & & & & \\
P_{k,2} & = & 2 & & & & \\
P_{k,3} & = & 2P_{k,2} + kP_{k,1} & = & 2(2) + k(1) & = & 4 + k \\
P_{k,4} & = & 2P_{k,3} + kP_{k,2} & = & 2(4+k) + k(2) & = & 8 + 2k + 2k \\
 & & & & & = & 8 + 4k \\
P_{k,5} & = & 2P_{k,4} + kP_{k,3} & = & 2(8+4k) + k(4+k) & = & 16 + 8k + 4k + k^2 \\
 & & & & & = & 16 + 12k + k^2 \\
P_{k,6} & = & 2P_{k,5} + kP_{k,4} & = & 2(16+12k+k^2) + k(8+4k) & = & 32 + 24k + 2k^2 + 8k + 4k^2 \\
 & & & & & = & 32 + 32k + 6k^2
\end{array}$$

É natural observar o comportamento do crescimento do grau da variável k nos termos da sequência de k-Pell, agora como uma sequência polinomial com o grau sendo elevado à medida que aumenta o valor do índice da sequência.

Naturalmente, assim como na sequência de Pell, para a obtenção de um termo da sequência de k-Pell é necesssário o conhecimentos dos dois termos anteriores, sendo questionado a possibilidade da existência de uma lei geral de recorrência, assunto que será abordado na próxima seção.

3.1 EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA PARA *K*-PELL

Observe que a equação (3.1) utlizando os conceitos do Aoêndice (A), é possível escrever a equação característica substituindo os coeficientes como

$$x^2 - 2x - k = 0$$

e utilizando elementos análogos aos da Seção (2.2), temos inicialmente as soluções dessa equação quadrática

$$x = 1 \pm \sqrt{1+k} \tag{3.2}$$

E assim a equação de recorrência geral da sequência de k-Pell é dada pela expressão a seguir usando os resultados de (3.2):

$$P_{k,n} = A(1+\sqrt{1+k})^n + B(1-\sqrt{1+k})^n \tag{3.3}$$

E desejando-se encontrar os valores das incógnitas A e B em (3.3), formamos um sistema aplicando os valores iniciais apresentados na definição (3.1), a saber, $P_{k,1} = 1$ e $P_{k,2} = 2$.

$$\begin{cases} P_{k,1} = A(1+\sqrt{1+k})^1 + B(1-\sqrt{1+k})^1 = 1 \\ P_{k,2} = A(1+\sqrt{1+k})^2 + B(1-\sqrt{1+k})^2 = 2 \end{cases}$$

Para resolver tal sistema, será tomada a primeira equação e isolado o termo $A(1+\sqrt{1+k})$ como segue

$$\begin{aligned} A(1+\sqrt{1+k})^1 + B(1-\sqrt{1+k})^1 &= 1 \quad \Rightarrow \\ A(1+\sqrt{1+k}) + B(1-\sqrt{1+k}) &= 1 \quad \Rightarrow \\ A(1+\sqrt{1+k}) &= 1 - B(1-\sqrt{1+k}) \end{aligned}$$

e substituindo esse resultado na segunda equação, vem:

$$\begin{aligned} [1-B(1-\sqrt{1+k})](1+\sqrt{1+k}) + B(1-2\sqrt{1+k}+1+k) &= 2 \quad \Rightarrow \\ 1+\sqrt{1+k} - B(1-(1+k)) + B(2+k-2\sqrt{1+k}) &= 2 \quad \Rightarrow \\ kB + B(2+k-2\sqrt{1+k}) &= 2-1-\sqrt{1+k} \quad \Rightarrow \\ 2B(1+k-\sqrt{1+k}) &= 1-\sqrt{1+k} \quad \Rightarrow \\ B &= \frac{1-\sqrt{1+k}}{2(1+k-\sqrt{1+k})} \end{aligned}$$

racionalizando este último resultado, temos:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1-\sqrt{1+k}}{2(1+k-\sqrt{1+k})}.\frac{1+k+\sqrt{1+k}}{1+k+\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{1+k+\sqrt{1+k}-\sqrt{1+k}-k\sqrt{1+k}-(1+k)}{2((1+k)^2-(1+k))} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{-k\sqrt{1+k}}{2(1+2k+k^2-1-k)} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{-k\sqrt{1+k}}{2k(1+k)} \quad \Rightarrow \\
B &= -\frac{\sqrt{1+k}}{2(1+k)}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

e consequentemente usando o valor de B definido em (3.4) se determina o valor de A:

$$
\begin{aligned}
A(1+\sqrt{1+k}) &= 1-\left[-\frac{\sqrt{1+k}}{2(1+k)}\right].(1-\sqrt{1+k}) \quad \Rightarrow \\
&= \frac{2(1+k)+\sqrt{1+k}.(1-\sqrt{1+k})}{2(1+k)} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{2+2k+\sqrt{1+k}-(1+k)}{2(1+k)} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{1+k+\sqrt{1+k}}{2(1+k)} \quad \Rightarrow \\
A &= \frac{1+k+\sqrt{1+k}}{2(1+k)[1+\sqrt{1+k}]}
\end{aligned}
$$

e mais uma vez racionalizando esse resultado se obtém a variável A:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1+k+\sqrt{1+k}}{2(1+k)[1+\sqrt{1+k}]}.\frac{1-\sqrt{1+k}}{1-\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{1-\sqrt{1+k}+k-k\sqrt{1+k}+\sqrt{1+k}-(1+k)}{2(1+k)(1-(1+k))} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{1+k-k\sqrt{1+k}-1-k}{2(1+k)(1-1-k)} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{-k\sqrt{1+k}}{2(1+k)(-k)} \quad \Rightarrow \\
A &= \frac{\sqrt{1+k}}{2(1+k)}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Finalmente, substituindo tais valores das incógnitas A e B aplicadas na equação de recorrência (3.3), fica:

$$
\begin{aligned}
P_{k,n} &= \frac{\sqrt{1+k}}{2(1+k)}.(1+\sqrt{1+k})^n-\frac{\sqrt{1+k}}{2(1+k)}.(1-\sqrt{1+k})^n \quad \Rightarrow \\
P_{k,n} &= \frac{\sqrt{1+k}}{2(1+k)}.[(1+\sqrt{1+k})^n-(1-\sqrt{1+k})^n]
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Além disso, Wani *et al.* (2019) ainda apresentam uma forma mais elegante deste último resultado para a equação de recorrência (3.6), a saber:

$$P_{k,n} = \frac{(r_1)^n - (r_2)^n}{(r_1) - (r_2)} \tag{3.7}$$

sendo $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$.

Naturalmente, faz-se necessário averiguar a veracidade dos resultados obtidos em (3.6) e (3.7). Para isso, tomemos inicialmente o desenvolvimento do denominador de (3.7), como segue:

$$(r_1) - (r_2) = 1 + \sqrt{1+k} - (1 - \sqrt{1+k}) = 1 + \sqrt{1+k} - 1 + \sqrt{1+k} = 2\sqrt{1+k}$$

E substituindo tal resultado em (3.7), fica:

$$P_{k,n} = \frac{(r_1)^n - (r_2)^n}{2\sqrt{1+k}} = \frac{(1+\sqrt{1+k})^n - (1-\sqrt{1+k})^n}{2\sqrt{1+k}}$$

Confirmando que este último resultado seja equivalente à (3.6) sem naturalmente ser realizada a operação de racionalização do denomindor, o que pode ser facilmente executado. Naturalmente se questiona o fato da possibilidade de também a sequência de k-Pell possuir termos com índices negativos, o que será visto na próxima seção.

3.2 SEQUÊNCIA DE *K*-PELL COM ÍNDICES NOS INTEIROS

Para esse processo, será tomado um raciocício análogo ao que foi feito na extensão para o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$) na própria sequência de Pell.

Mais uma vez, os termos obtidos deverão obedecer à recursividade bem como a equação geral de recorrência. Inicialmente, determinaremos o elemento $P_{k,0}$ usando a equação de recorrência (3.6), como segue:

$$P_{k,0} = \frac{\sqrt{1+k}}{2(1+k)}.[(1+\sqrt{1+k})^0 - (1-\sqrt{1+k})^0] = \frac{\sqrt{1+k}}{2(1+k)}.[1-1] = 0$$

e utilizado a recursividade que define a sequência de k-Pell com a remoção da restrição inicial $(n \geq 1)$ e tomando $n = 0$ bem como os valores iniciais $P_{k,1} = 1$ e $P_{k,2} = 2$, temos:

$$P_{k,2} = 2P_{k,1} + kP_{k,0} \quad \Rightarrow \quad kP_{k,0} = P_{k,2} - 2P_{k,1} = 2 - (2)1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{k,0} = 0$$

Após ser removida a restrição e utilizando este último artíficio, a saber, usar a expressão $kP_{k,n} = P_{k,n+2} - 2P_{k,n+1}$ é possível a partir de então determinar os elementos $P_{k,-1}, P_{k,-2}, P_{k,-3}, ..., P_{k,-n}, ...$ tomando para isso os valores para n de forma apropriada. Alguns desses valores são determinados como forma de exemplo:

$$
\begin{array}{llcllcl}
n=-1 & \therefore\ kP_{k,-1} & = & P_{k,1}-2P_{k,0} & = & 1-2(0) & = & 1 \\
 & \Rightarrow\ P_{k,-1} & = & \dfrac{1}{k} & & & & \\
n=-2 & \therefore\ kP_{k,-2} & = & P_{k,0}-2P_{k,-1} & = & 0-2\left(\dfrac{1}{k}\right) & = & -\dfrac{2}{k} \\
 & \Rightarrow\ P_{k,-2} & = & -\dfrac{2}{k^2} & & & & \\
n=-3 & \therefore\ kP_{k,-3} & = & P_{k,-1}-2P_{k,-2} & = & \dfrac{1}{k}-2\left(-\dfrac{2}{k^2}\right) & = & \dfrac{k+4}{k^2} \\
 & \Rightarrow\ P_{k,-3} & = & \dfrac{4+k}{k^3} & & & & \\
n=-4 & \therefore\ kP_{k,-4} & = & P_{k,-2}-2P_{k,-3} & = & -\dfrac{2}{k^2}-2\left(\dfrac{4+k}{k^3}\right) & = & -\dfrac{2k+8+2k}{k^3} \\
 & \Rightarrow\ P_{k,-4} & = & -\dfrac{8+4k}{k^4} & & & &
\end{array}
$$

Comenta-se aqui que tais resultados também poderiam ser determinados a partir do uso da equação geral de recorrência (3.6) utilizando os valores para n apropriados. É interessante observar que existe uma associação entre os respectivos termos de índices positivos e seus negativos dada pelo próprio termo de índice oposto modificando o sinal quando o índice é par sendo sempre dividido por k elevado ao módulo do índice.

Esta última relação pode ser apresentada por

$$P_{k,-n}=\frac{(-1)^{n+1}}{k^n}P_{k,n} \tag{3.8}$$

Para apresentar uma justificativa dessa relação desenvolvemos $P_{k,n}$ de forma conveniente como segue

$$
\begin{array}{lclcl}
P_{k,-n} & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{k^n}.\left[\dfrac{P_{k,n+2}-2P_{k,n+1}}{k}\right] & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{k^{n+1}}.P_{k,n+2}-2.\dfrac{(-1)^{n+1}}{k^{n+1}}.P_{k,n+1} \quad \Rightarrow \\
 & = & 2.\dfrac{(-1)^{n}}{k^{n+1}}.P_{k,n+1}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{k^{n+1}}.P_{k,n+2} & = & 2.\dfrac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}}.P_{k,n+1}+k.\dfrac{(-1)^{n+3}}{k^{n+2}}.P_{k,n+2}
\end{array}
$$

e usando ainda (3.8) encontramos

$$P_{k,-n}=2P_{k,-(n+1)}+kP_{k,-(n+2)}=2P_{k,-n-1}+kP_{k,-n-2}$$

em que esta expressão nada mais é do que a própria lei de recorrência da sequência de k-Pell para índices negativos. Comprovando assim ser possível também realizar a extensão para índices negativos da sequência de k-Pell.

Um outro conceito importante e que ajuda no desenvolvimento dos conceitos da construção da sequência de Pell, ainda se tratando do escopo nos inteiros, é a matriz da sequência de Pell, que será tratada na próxima seção.

3.3 MATRIZ DA SEQUÊNCIA DE K-PELL

Wani *et al.* (2019, p. 20) definem também o conceito de matriz de k-Pell, como segue:

Definição 3.3.1 *Para $k \in \mathbb{R}^+$ a matriz da sequência de k-Pell $\langle \mathbf{V}_{k,n} \rangle$ é definida pela lei de recorrência*

$$\mathbf{V}_{k,n} = 2\mathbf{V}_{k,n-1} + k\mathbf{V}_{k,n-2}, \qquad n \geq 2 \tag{3.9}$$

com $\mathbf{V}_{k,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{V}_{k,1} = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

A partir da definição anterior é possível determinar alguns exemplos iniciais das matrizes de k-Pell:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{k,1} &= \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{V}_{k,2} &= 2\mathbf{V}_{k,1} + k\mathbf{V}_{k,0} = 2\begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+k & 2k \\ 2 & k \end{bmatrix} \\
\mathbf{V}_{k,3} &= 2\mathbf{V}_{k,2} + k\mathbf{V}_{k,1} = 2\begin{bmatrix} 4+k & 2k \\ 2 & k \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+4k & 4k+k^2 \\ 4+k & 2k \end{bmatrix} \\
\mathbf{V}_{k,4} &= 2\mathbf{V}_{k,3} + k\mathbf{V}_{k,2} = 2\begin{bmatrix} 8+4k & 4k+k^2 \\ 4+k & 2k \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 4+k & 2k \\ 2 & k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 16+12k+k^2 & 8k+4k^2 \\ 8+4k & 4k+k^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Veja que nesses valores iniciais é possível estabelecer uma relação que será expressa pelo próximo teorema.

Teorema 3.3.1 *Para qualquer natural $n \geq 1$, a matriz de k-Pell é dada por*

$$\mathbf{V}_{k,n} = \begin{bmatrix} P_{k,n+1} & kP_{k,n} \\ P_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Na demonstração desse teorema será utilizado o processo de indução matemática sobre n:

Para o caso inicial $n = 1$, temos:

$$\mathbf{V}_{k,1} = \begin{bmatrix} P_{k,2} & kP_{k,1} \\ P_{k,1} & kP_{k,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O que é verdade de acordo com a Definição (3.3.1). Agora suponha que a hipótese de indução seja verdadeira para certo $n > 1$, ou seja, a matriz de k-Pell de ordem n é dada por $\mathbf{V}_{k,n} = \begin{bmatrix} P_{k,n+1} & kP_{k,n} \\ P_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{bmatrix}$, para $n+1$ devemos ter pela definição

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{k,n+1} &= 2\mathbf{V}_{k,n} + k\mathbf{V}_{k,n-1} && \Rightarrow \\
&= 2\begin{bmatrix} P_{k,n+1} & kP_{k,n} \\ P_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} P_{k,n+1} & kP_{k,n} \\ P_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2P_{k,n+1} + kP_{k,n} & k(2P_{k,n} + kP_{k,n-1}) \\ 2P_{k,n} + kP_{k,n-1} & k(2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2}) \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
\mathbf{V}_{k,n+1} &= \begin{bmatrix} P_{k,n+2} & kP_{k,n+1} \\ P_{k,n+1} & kP_{k,n} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

A partir deste teorema é possível construir uma relação apresentada pelo próximo lema.

Lema 3.3.1 *Sejam $\mathbf{V}_{k,n}$ e $\mathbf{V}_{k,m}$ matrizes associadas à sequência de k-Pell com $m, n \geq 1$, vale a relação:*

$$\mathbf{V}_{k,m+n} = \mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,n}$$

Demonstração. Para demonstrar esse lema, utilizamos indução matemática sobre n fixando m:

Para o caso inicial $n = 1$, vem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{k,m+1} = \mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,1} &= \begin{bmatrix} P_{k,m+1} & kP_{k,m} \\ P_{k,m} & kP_{k,m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2P_{k,m+1} + kP_{k,m} & kP_{k,m+1} + 0 \\ 2P_{k,m} + kP_{k,m-1} & kP_{k,m} + 0 \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} P_{k,m+2} & kP_{k,m+1} \\ P_{k,m+1} & kP_{k,m} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O que é verdade de acordo com o Teorema (3.3.1). Agora suponha ser verdade a hipótese de indução para certo $n > 1$, ou seja, $\mathbf{V}_{k,m+n} = \mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,n}$. Tomando para $n+1$, devemos ter

$$\mathbf{V}_{k,m+n+1} = \mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,n+1}$$

No entanto, utilizando a definição temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{k,m+n+1} &= 2\mathbf{V}_{k,m+n} + k\mathbf{V}_{k,m+n-1} && \Rightarrow \\
&= 2\mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,n} + k\mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,n-1} && \Rightarrow \\
&= \mathbf{V}_{k,m}[2\mathbf{V}_{k,n} + k\mathbf{V}_{k,n-1}] && \Rightarrow \\
\mathbf{V}_{k,m+n+1} &= \mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,n+1}
\end{aligned}$$

■

E com esse lema, é possível ainda estabelecer a comutatividade entre o produto de matrizes da sequência de k-Pell, como comprova o próximo teorema.

Teorema 3.3.2 *Sejam as matrizes associadas da sequência de k-Pell* $\mathbf{V}_{k,n}$ *e* $\mathbf{V}_{k,m}$*, vale a comutatividade entre elas, ou seja:*

$$\mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,n} = \mathbf{V}_{k,n}\mathbf{V}_{k,m}.$$

Demonstração. Utilizando os resultados do Lema (3.3.1), vem:

$$\mathbf{V}_{k,m}\mathbf{V}_{k,n} = \mathbf{V}_{k,m+n} = \mathbf{V}_{k,n+m} = \mathbf{V}_{k,n}\mathbf{V}_{k,m}$$

■

Utilizando os conceitos da comutatividade de matrizes associadas da sequência de k-Pell, apresenta-se o próximo teorema, que relaciona a matriz de índice n com a potência da mesma matriz com o mesmo valor.

Teorema 3.3.3 *Seja* $\mathbf{V}_{k,n}$ *a matriz associada à sequência de k-Pell com* $n \geq 1$*, vale a relação:*

$$\mathbf{V}_{k,n} = [\mathbf{V}_{k,1}]^n$$

Demonstração. Na demonstração desse teorema, utilizamos indução matemática:

No caso inicial $n = 1$, fica:

$\mathbf{V}_{k,1} = [\mathbf{V}_{k,1}]^1 = \mathbf{V}_{k,1}$

Naturalmente verdade. Tomando a hipótese de indução verdadeira para certo $n > 1$, ou seja, $\mathbf{V}_{k,n} = [\mathbf{V}_{k,1}]^n$, vamos observar o que acontece para $n+1$:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{V}_{k,1}]^{n+1} &= [\mathbf{V}_{k,1}]^n[\mathbf{V}_{k,1}]^1 && \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} P_{k,n+1} & kP_{k,n} \\ P_{k,n} & kP_{k,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2P_{k,n+1} + kP_{k,n} & kP_{k,n+1} + 0 \\ 2P_{k,n} + kP_{k,n-1} & kP_{k,n} + 0 \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} P_{k,n+2} & kP_{k,n+1} \\ P_{k,n+1} & kP_{k,n} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{k,n+1}
\end{aligned}$$

Isso posto a partir comutividade da multiplicação desse tipo de matriz bem como do uso da definição da sequência da matriz de k-Pell.

■

E com isso é possível determinar as matrizes associadas à sequência de k-Pell a partir do produto entre as matrizes dessa sequência. A continuidade natural deve ser tentar realizar a extensão dessas matrizes cuja potência pertence ao conjunto dos naturais ($\mathbb{N}$) para a potência no conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$). Em outras palavras, procura-se determinar as matrizes associadas à sequência de k-Pell da forma $\mathbf{V}_{k,-n}$.

Mas, de acordo com o Teorema (3.3.3) a matriz $\mathbf{V}_{k,-n}$ equivale à $[\mathbf{V}_{k,1}]^{-n}$, ou ainda $[(\mathbf{V}_{k,1})^n]^{-1}$ que é a inversa da matriz associada da sequência de k-Pell com índice n. E para se determinar a inversa de uma matriz se faz necessário o conhecimento do determinante dessa matriz. Assunto abordado no próximo teorema.

Teorema 3.3.4 *O determinante de toda matriz ($\mathbf{V}_{k,n}$) associada à sequência de k-Pell é dado por:*

$$det(\mathbf{V}_{k,n}) = (-k)^n$$

Demonstração. Para o caso em que $n = 1$, o determinante da matriz é calculado por:

$$det(\mathbf{V}_{k,1}) = det([(\mathbf{V}_{k,1})]^1) = 2.0 - 1.k = -k$$

E usando as propriedades dos determinantes:

$$det(\mathbf{V}_{k,n}) = det([(\mathbf{V}_{k,1})]^n) = det(det[(\mathbf{V}_{k,1})])^n = [-k]^n$$

■

Após ser calculado o valor do determinante de uma matriz associada à sequência de k-Pell, e observando a condição que tal determinante é diferente de zero, é possível obter a matriz $\mathbf{V}_{k,-n}$ pelo processo de inversão de matrizes, que será mostrado no próximo corolário.

Corolário 3.3.1 *Toda matriz associada da sequência de k-Pell ($P_{k,-n}$) com índices negativos ($\mathbf{V}_{k,-n}$) é determinada pela inversa da matriz com índices positivos* $(\mathbf{V}_{k,n})^{-1}$.

Demonstração. Ora, seja a representação $\mathbf{V}_{k,-n}$ para as matrizes associadas das sequências com índices negativos de k-Pell. Usando a demonstração do Teorema (3.3.3) se tem

$$\mathbf{V}_{k,-n} = (\mathbf{V}_{k,1})^{-n} = \left[(\mathbf{V}_{k,1})^{n}\right]^{-1}$$

e para se determinar a inversa da matriz $(\mathbf{V}_{k,1})^{n}$ é usado o processo de inversão de matrizes de ordem 2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{k,-n} \quad = \quad \left[(\mathbf{V}_{k,1})^{n}\right]^{-1} \quad &= \frac{1}{(-1)^n k^n} \cdot \begin{bmatrix} kP_{k,n-1} & -kP_{k,n} \\ -P_{k,n} & P_{k,n+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{kP_{k,n-1}}{(-1)^n k^n} & \dfrac{-kP_{k,n}}{(-1)^n k^n} \\ \dfrac{-P_{k,n}}{(-1)^n k^n} & \dfrac{P_{k,n+1}}{(-1)^n k^n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{k,-(n-1)} & kP_{k,-n} \\ P_{k,-n} & kP_{k,-(n+1)} \end{bmatrix} \\
\mathbf{V}_{k,-n} \quad = \quad &= \begin{bmatrix} P_{k,-n+1} & kP_{k,-n} \\ P_{-n} & kP_{k,-n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Cujo resultado equivale à definição para matriz associada à sequência de Pell tomando n negativo.

■

Na continuidade dos conceitos da sequência de Pell, existe um modelo dessa sequência, denominada de gaussiana de Pell, que inclui conceitos dos conjuntos dos números complexos ($\mathbb{C}$), que será abordado no próximo capítulo.

4 SEQUÊNCIA GAUSSIANA DE PELL

Depois de feita a extensão da sequência de Pell para índices negativos, bem como uma generalização desta sequência para um k real positivo, como visto nos capítulos anteriores, questiona-se o fato da possibilidade da existência de termos dessa sequência possuirem elementos no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Desta forma, este capítulo trata de uma extensão dos termos da sequência de Pell com valores no conjunto dos números imaginários.

Halici e Öz (2016, p. 11), definem a sequência gaussiana de Pell, como segue:

Definição 4.0.1 *A sequência gaussiana de Pell é definida por:*

$$G_n = P_n + iP_{n-1}, \qquad i^2 = -1, \qquad (n \geq 2) \tag{4.1}$$

com $G_1 = 1$.

De acordo com essa definição (4.1), é possível determinar os n-ésimos termos da sequência gaussiana, como segue:

$$\begin{array}{lllll} G_1 & = & 1 & & \\ G_2 & = & P_2 + iP_1 & = & 2+i \\ G_3 & = & P_3 + iP_2 & = & 5+2i \\ G_4 & = & P_4 + iP_3 & = & 12+5i \\ G_5 & = & P_5 + iP_4 & = & 29+12i \end{array}$$

Formando assim a sequência complexa de Pell:

$$1, 2+i, 5+2i, 12+5i, 29+12i, 70+12i, ..., G_n, ... \tag{4.2}$$

É possível ainda expressar a sequência gaussiana de Pell de forma análoga à definição da sequência de Pell (2.1), como é apresentada na proposição:

Proposição 4.0.1 *A sequência gaussiana de Pell, G_n, pode ser indicada pela relação de recorrência*

$$G_n = 2G_{n-1} + G_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

com $G_1 = 1$ *e* $G_2 = 2+i$.

Demonstração. Para se verificar a validade dessa proposição basta apenas aplicar a definição da sequência de Pell (2.1) na definição da sequência gaussiana de Pell (4.1):

$$\begin{aligned}
G_n &= P_n + iP_{n-1} \quad \Rightarrow \\
&= 2P_{n-1} + P_{n-2} + i[2P_{n-2} + P_{n-3}] \quad \Rightarrow \\
&= 2P_{n-1} + 2iP_{n-2} + P_{n-2} + iP_{n-3} \quad \Rightarrow \\
&= 2[P_{n-1} + iP_{n-2}] + P_{n-2} + iP_{n-3} \quad \Rightarrow \\
G_n &= 2G_{n-1} + G_{n-2}
\end{aligned}$$

e como se trata de uma recorrência de segunda ordem, basta fazer a inserção dos valores iniciais, a saber, $G_1 = 1$ e $G_2 = 2 + i$.

■

Observando ainda o comportamento da sequência gaussiana de Pell (4.2) é possível estabelecer uma relação entre as sequências de Pell e a gaussiana de Pell, indicada na proposição a seguir.

Proposição 4.0.2 *O n-ésimo termo da sequência gaussiana de Pell, G_n é dado por*

$$G_n = [2 + i]P_{n-1} + [1]P_{n-2}$$

Demonstração. Na demonstração dessa proposição será utilizado o processo de indução matemática:

i. Tome o caso inicial $n = 3$, ou seja:
   $G_3 = [2+i]P_2 + [1]P_1 = [2+i]2 + [1]1 = 4 + 2i + 1 = 5 + 2i$
   O que é verdade, de acordo com a sequência (4.2).
ii. Agora suponha que a hipótese de indução seja verdadeira para um certo $n > 3$, ou seja, é válida a expressão $G_n = [2+i]P_{n-1} + [1]P_{n-2}$.
   Vamos verificar para $n + 1$:
   $$G_{n+1} = [2+i]P_n + [1]P_{n-1}.$$
   Observando o comportamento desta última expressão após a igualdade e aplicando a definição da sequência de Pell (2.1), temos:

$$\begin{aligned}
G_{n+1} &= (2+i)P_n + (1)P_{n-1} \qquad \Rightarrow \\
&= (2+i)[2P_{n-1} + P_{n-2}] + (1)[2P_{n-2} + P_{n-1}] \qquad \Rightarrow \\
&= 2[(2+i)P_{n-1} + (1)P_{n-2}] + (2+i)P_{n-2} + (1)P_{n-1} \qquad \Rightarrow \\
G_{n+1} &= 2G_n + G_{n-1}
\end{aligned}$$

De acordo com a hipótese de indução bem como com a proposição anterior (4.0.1), encerrando a demonstração.

■

De acordo com esta proposição é natural observar que os termos que multiplicam os elementos da sequência de Pell são também termos da sequência gaussiana de Pell, sendo possível estabelecer ainda outra relação entre essas sequências a partir dos dados a seguir:

$$\begin{aligned}
G_{n+1} &= [2+i]P_n + [1]P_{n-1} &&= G_2P_n + G_1P_{n-1} \\
G_{n+2} &= [2+i]P_{n+1} + [1]P_n &&= (2+i)[2P_n + P_{n-1}] + (1)P_n \quad \Rightarrow \\
&= (4+2i+1)P_n + (2+i)P_{n-1} &&= [5+2i]P_n + [2+i]P_{n-1} \quad \Rightarrow \\
G_{n+2} &= G_3P_n + G_2P_{n-1}
\end{aligned}$$

Dessa forma, ao serem fixados os termos da sequência de Pell, P_n e P_{n-1} e tomando certo $m \in \mathbb{N}$ sendo $m > n$, utilizando ainda a proposição anterior (4.0.2), temos outra relação entre as duas sequências, como segue na proposição:

Proposição 4.0.3 *Pode-se associar a sequência gaussiana de Pell com a sequência de Pell a partir da relação*

$$G_{n+m} = G_{m+1}P_n + G_mP_{n-1}$$

Demonstração. Mais uma vez, na demonstração dessa proposição será utilizado o processo de indução matemática sobre m sendo fixos os valores para n, como segue:

i. Seja o valor inicial $m = 1$, ou seja:

   $G_{n+1} = G_2P_n + G_1P_{n-1} = [2+i]P_n + [1]P_{n-1}$

   O que é verdade, de acordo com a Proposição (4.0.2).

ii. Supondo que a hipótese de indução seja verdadeira para certo $m > 1$, ou seja, é válida a expressão $G_{n+m} = G_{m+1}P_n + G_mP_{n-1}$.

   Vejamos o que acontece para $m+1$:

$$G_{n+m+1} = G_{m+2}P_n + G_{m+1}P_{n-1}.$$

Efetuando os cálculos depois da igualdade, fixando P_n e P_{n-1}, e aplicando a Proposição (4.0.1) vem:

$$\begin{aligned} G_{m+2}P_n + G_{m+1}P_{n-1} &= [2G_{m+1} + G_m]P_n + [2G_m + G_{m-1}]P_{n-1} && \Rightarrow \\ &= 2G_{m+1}P_n + G_mP_n + 2G_mP_{n-1} + G_{m-1}P_{n-1} && \Rightarrow \\ &= 2[G_{m+1}P_n + G_mP_{n-1}] + [G_mP_n + G_{m-1}P_{n-1}] && \Rightarrow \\ G_{m+2}P_n + G_{m+1}P_{n-1} &= 2G_{n+m} + G_{n+m-1} = G_{n+m+1} \end{aligned}$$

■

Demonstrando com isso uma associação entre as sequências de Pell e a gaussiana de Pell por meio de duas relações. Observa-se que estas relações dependem de termos anteriores, questionando-se o fato da determinação de algum membro desta última sequência a partir do conhecimento apenas da posição, o que será visto na próxima seção.

4.1 EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA DA SEQUÊNCIA GAUSSIANA DE PELL

Retornando à equação apresentada na Proposição (4.0.1) e reescrevendo a expressão recursiva modificando os índices dos termos de forma conveniente, temos:

$$G_{n+2} = 2G_{n+1} + G_n \qquad (n \geq 1) \tag{4.3}$$

Observe que esta expressão representa uma equação de recorrência linear de segunda ordem que possui equação característica similar à sequência de Pell, a saber $t^2 = 2t + 1$, ou ainda $t^2 - 2t - 1 = 0$, cujas raízes dessa expressão é:

$$t = 1 \pm \sqrt{2}$$

fazendo com que a solução geral de (4.3) seja escrita como

$$G_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n \tag{4.4}$$

e para se determinar as incógnitas de A e B tomamos os casos iniciais $G_1 = 1$ e $G_2 = 2+i$ formando o sistema.

$$\begin{cases} G_1 = A(1+\sqrt{2})^1 + B(1-\sqrt{2})^1 = 1 \\ G_2 = A(1+\sqrt{2})^2 + B(1-\sqrt{2})^2 = 2+i \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, usaremos o método da comparação isolando a incógnita A nas duas equações. Na primeira:

$$\begin{aligned} A(1+\sqrt{2})^1+B(1-\sqrt{2})^1 &= 1 \qquad \Rightarrow \\ A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2}) &= 1 \qquad \Rightarrow \\ A(1+\sqrt{2}) &= 1-B(1-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Isolando a incógnita A, fica:

$$A=\frac{1-B(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}$$

racionalizando este resultado, fica:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-B(1-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}.\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \\ &= \frac{1(1-\sqrt{2})-B(1-2\sqrt{2}+2)}{1-2} \qquad \Rightarrow \\ &= \frac{1-\sqrt{2}-B(3-2\sqrt{2})}{-1} \qquad \Rightarrow \\ A &= \sqrt{2}-1+B(3-2\sqrt{2}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

De forma semelhante, mas na segunda equação do sistema temos:

$$\begin{aligned} A(1+\sqrt{2})^2+B(1-\sqrt{2})^2 &= 2+i \qquad \Rightarrow \\ A(1+2\sqrt{2}+2)+B(1-2\sqrt{2}+2) &= 2+i \qquad \Rightarrow \\ A(3+2\sqrt{2})+B(3-2\sqrt{2}) &= 2+i \qquad \Rightarrow \\ A(3+2\sqrt{2}) &= 2+i-B(3-2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Isolando a incógnita A vem:

$$A=\frac{2+i-B(3-2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}$$

racionalizando esse resultado anterior, temos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2+i-B(3-2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}.\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \\ &= \frac{2(3-2\sqrt{2})+i(3-2\sqrt{2})-B(9-12\sqrt{2}+8)}{9-8} \qquad \Rightarrow \\ &= \frac{2(3-2\sqrt{2})+i(3-2\sqrt{2})-B(17-12\sqrt{2})}{1} \qquad \Rightarrow \\ A &= 6-4\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2}-B(17-12\sqrt{2}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Tomando os segundos termos das equações (4.5) e (4.6) e resolvendo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}-1+B(3-2\sqrt{2}) &= 6-4\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2}-B(17-12\sqrt{12}) & \Rightarrow \\
B(3-2\sqrt{2})+B(17-12\sqrt{2}) &= 6-4\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2}-\sqrt{2}+1 & \Rightarrow \\
3B-2B\sqrt{2}+17B-12B\sqrt{2} &= 7-5\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2} & \Rightarrow \\
20B-14B\sqrt{2} &= 7-5\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2} & \Rightarrow \\
B(20-14\sqrt{2}) &= 7-5\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2} & \Rightarrow \\
B &= \frac{7-5\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2}}{20-14\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Racionalizando este último resultado, tem-se:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{7-5\sqrt{2}+3i-2i\sqrt{2}}{20-14\sqrt{2}}.\frac{20+14\sqrt{2}}{20+14\sqrt{2}} & \Rightarrow \\
&= \frac{140+98\sqrt{2}-100\sqrt{2}-140+60i+42i\sqrt{2}-40i\sqrt{2}-56i}{400-392} & \Rightarrow \\
&= \frac{-2\sqrt{2}+4i+2i\sqrt{2}}{8} & \Rightarrow \\
&= \frac{-\sqrt{2}+2i+i\sqrt{2}}{4} & \Rightarrow \\
B &= -\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{2+\sqrt{2}}{4} & (4.7)
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de B obtido em (4.7) na expressão (4.5), determinamos a incógnita A:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{2}-1+\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right](3-2\sqrt{2}) & \Rightarrow \\
&= \sqrt{2}-1-\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{4}{4}+\frac{6i}{4}-\frac{4i\sqrt{2}}{4}+\frac{3i\sqrt{2}}{4}-\frac{4i}{4} & \Rightarrow \\
&= \frac{4\sqrt{2}-4-3\sqrt{2}+4+6i-4i\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-4i}{4} & \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}+2i}{4} & \Rightarrow \\
A &= \frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{2-\sqrt{2}}{4} & (4.8)
\end{aligned}$$

Assim, utilizando os resultados das incógnitas A e B obtidos nas expressões (4.8) e (4.7) e inserindo na expresão (4.4), determinamos a equação geral de recorrência da sequência gaussiana de Pell:

$$G_n = \left[\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right](1+\sqrt{2})^n - \left[\frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right](1-\sqrt{2})^n \tag{4.9}$$

É possível ainda apresentar esse último resultado de uma forma similar à relação de Binet para a sequência de Pell, indicada em (2.11), como é demonstrado no próximo teorema.

Teorema 4.1.1 *A fórmula de Binet para a sequência gaussiana de Pell é dada por*

$$G_n = \frac{(1-i\beta)\alpha^n - (1+i\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta}.$$

com $\alpha = 1+\sqrt{2}$ *e* $\beta = 1-\sqrt{2}$.

Demonstração. Utilizando a Definição (4.1) e ainda a fórmula de Binet para a sequência de Pell (2.11), temos:

$$\begin{aligned}
G_n &= P_n + iP_{n-1} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta} + i\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{\alpha^n - \beta^n + i(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})}{\alpha-\beta} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{\alpha^n - \beta^n + i\alpha\alpha^n - i\beta\beta^n}{\alpha-\beta} \quad \Rightarrow \\
G_n &= \frac{(1+i\alpha)\alpha^n - (1+i\beta)\beta^n}{\alpha-\beta}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

■

Naturalmente, os resultados (4.9) e (4.10) são equivalentes. Para se fazer essa verificação, basta efetuar as trocas para os valores de α e β e realizar as devidas operações, como segue:

$$\begin{aligned}
G_n = \frac{(1+i\alpha)\alpha^n - (1+i\beta)\beta^n}{\alpha-\beta} &= \frac{[1+i(1+\sqrt{2})](1+\sqrt{2})^n - [1+i(1-\sqrt{2})[1-\sqrt{2}]^n}{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})} \\
&= \frac{[1+i+i\sqrt{2}](1+\sqrt{2})^n - [1+i-i\sqrt{2}](1-\sqrt{2})^n}{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{[1+i+i\sqrt{2}](1+\sqrt{2})^n - [1+i-i\sqrt{2}](1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

e ao ser racionalizado nesta última etapa da operação, obtemos assim a equivalência entre ambas, conforme já se era de esperar. Naturalmente, estas expressão são apenas obtidas em valores com índices inteiros, sendo feito o questionamento sobre o comportamento com os índices no conjunto dos inteiros. Análise que será feita na próxima seção.

4.2 SEQUÊNCIA GAUSSIANA DE PELL COM ÍNDICES INTEIROS

Diante do que foi apresentado tanto na obtenção da fórmula de Binet para a sequência gaussiana de Pell bem como dos resultados da Seção (2.3) é possível realizar a construção da sequência gaussiana de Pell com índices no conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$) tomando para isso os valores desses índices bem como os valores da sequência de Pell com índices negativos.

De fato, na extensão para termos da sequência com índices negativos, estes devem satisfazer tanto à Definição (4.1) sendo removido naturalmente a restrição $n \geq 1$ quanto a expressão recursiva (4.9) e ainda a fórmula de Binet para a sequência gaussiana de Pell (4.10) tomando valores não positivos para n. Dessa maneira, a partir de agora será realizada a extensão da sequência gaussiana de Pell para índices não naturais.

Inicialmente, será calculado o termo G_0 tomando a Definição (4.1) e $n = 0$, como segue:

$$G_0 = P_0 + iP_{-1} = 0 + i(1) = i$$

Comenta-se que este resultado também poderia ser obtido a partir do uso da Proposição (4.0.1) usando um procedimento análogo ao utilizado ao que foi feito com a extensão da sequência de Pell para índices negativos. Comprovando o valor para G_0 e utilizando ainda este modelo, fica simples a partir da inserção dos termos com índices negativos da sequência de Pell a determinação de outros termos da sequência gaussiana de Pell com índices inteiros tais como G_{-1}, G_{-2}, G_{-3}, ..., G_{-n}, ... e com isso é possível apresentar alguns exemplos de termos iniciais dessa sequência, como segue:

$$\begin{array}{lclclclcl}
n=-1 & \therefore & G_{-1} & = & P_{-1}+iP_{-2} & = & 1+i(-2) & = & 1-2i \\
n=-2 & \therefore & G_{-2} & = & P_{-2}+iP_{-3} & = & -2+i(5) & = & -2+5i \\
n=-3 & \therefore & G_{-3} & = & P_{-3}+iP_{-4} & = & 5+i(-12) & = & 5-12i \\
n=-4 & \therefore & G_{-4} & = & P_{-4}+iP_{-5} & = & -12+i(29) & = & -12+29i \\
n=-5 & \therefore & G_{-5} & = & P_{-5}+iP_{-6} & = & 29+i(-70) & = & 29-70i \\
n=-6 & \therefore & G_{-6} & = & P_{-6}+iP_{-7} & = & -70+i(169) & = & -70+169i
\end{array}$$

Estes resultados também poderiam ser obtidos pela equação de recorrência apresentada em (4.9) para os mesmos índices, sendo que estes foram determinados a partir de software computacional. Observe ainda a existência de um padrão que relaciona os termos de índices negativos com os termos positivos, bem como uma alternância de sinal entre os termos e os elementos com índices negativos possuem as parcelas pares positivas e as parcelas pares negativas.

Diante disso é possível fazer uma associação entre os pares de termos da sequência gaussiana de Pell:

$$G_{-n} = i(-1)^{n+1}G_{n+1} \tag{4.11}$$

Ora, tomando esta expressão e desenvolvendo após a igualdade, vem:

$$\begin{aligned}
G_{-n} &= i(-1)^{n+1}.G_{n+1} \quad \Rightarrow \\
&= i(-1)^{n}.[2C_n + C_{n-1}] \quad \Rightarrow \\
&= 2i(-1)^{n}.C_n + i(-1)^{n}.C_{n-1} \quad \Rightarrow \\
&= 2i(-1)^{n}[P_n + iP_{n+1}] + i(-1)^{n}[P_{n-1} + iP_n] \quad \Rightarrow \\
&= 2i(-1)^{n}P_n - 2(-1)^{n}P_{n+1} + i(-1)^{n}P_{n-1} - (-1)^{n}P_n \quad \Rightarrow \\
&= -2iP_{-n} - 2P_{-n+1} + iP_{-n-1} + P_{-n} \quad \Rightarrow \\
&= i[-2P_{-n} + P_{-n-1}] - 2P_{-n+1} + P_{-n} \quad \Rightarrow \\
G_{-n} &= P_{-n} + iP_{-n-1}
\end{aligned}$$

Que de acordo com (4.1) representa a definição da sequência gaussiana de Pell, mas com índices negativos a partir dos resultados análogos à sequência de índices negativos da sequência de Pell, como segue:

$$G_{-n} = P_{-n} + iP_{-n-1} = P_{-n} + iP_{-(n+1)} \tag{4.12}$$

comprovando com isso a possibilidade de extensão dos mesmos conceitos da sequência gaussiana de Pell dos índices naturais ($\mathbb{N}$) para os inteiros ($\mathbb{Z}$).

Além do conceito obtido nessa seção, tem-se ainda outro bastante importante na construção do trabalho acerca dos elementos matriciais da sequência complexa de Pell, assunto da próxima seção.

4.3 MATRIZ DA SEQUÊNCIA GAUSSIANA DE PELL

De forma semelhante ao que foi feita na sequência de Pell bem como na sequência de k-Pell na construção de matrizes que representam as respectivas sequências, será visto nessa seção a construção da matriz da sequência gaussiana de Pell.

Utilizando os resultados obtidos na Seção (2.4) é possível estabelecer uma relação entre a matriz associada à sequência de Pell com a construção da matriz associada à sequência gaussiana de Pell, como é mostrado na próxima proposição:

Proposição 4.3.1 *Seja a sequência de Pell (P_n) com sua devida representação matricial* $\mathbf{M}_n$*, a matriz associada à sequência gaussiana de Pell com seus devidos elementos (G_n) pode ser indicada por*

$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Usando álgebra matricial e a definição da matriz associada à sequência de Pell, tem-se a soma entre as matrizes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_n + i\mathbf{M}_{n-1} &= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{n+1} + iP_n & P_n + iP_{n-1} \\ P_n + iP_{n-1} & P_{n-1} + iP_{n-2} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_n + i\mathbf{M}_{n-1} &= \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_n + i\mathbf{M}_{n-1} &= \mathbf{C}_n
\end{aligned}$$

Isso de acordo com a Definição (4.1) que indica a sequência gaussiana de Pell.

■

A matriz associada à sequência gaussiana de Pell será indicada por $\mathbf{C}_n$ a partir de agora e de acordo com a proposição anterior é possível realizar a construção das primeiras matrizes da sequência gaussiana de Pell:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} G_3 & G_2 \\ G_2 & G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+2i & 2+i \\ 2+i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} G_4 & G_3 \\ G_3 & G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+5i & 5+2i \\ 5+2i & 2+i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} G_5 & G_4 \\ G_4 & G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29+12i & 12+5i \\ 12+5i & 5+2i \end{bmatrix}$$

e assim por diante. É possível também realizar uma associação entre as matrizes associadas à sequência gaussiana de Pell com a definição de uma forma similar à da sequência, como mostra o próximo teorema.

Teorema 4.3.2 *Seja a sequência gaussiana de Pell* (G_n) *e a representação matricial dela* $\mathbf{C}_n$*, esta pode ser apresentada por*

$$\mathbf{C}_n = 2\mathbf{C}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-2}$$

Demonstração. Usando álgebra matricial bem como a Proposição (4.0.1), tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_n &= 2\mathbf{C}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-2} \\
\mathbf{C}_n &= 2\begin{bmatrix} G_n & G_{n-1} \\ G_{n-1} & G_{n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{n-1} & G_{n-2} \\ G_{n-2} & G_{n-3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2G_n + G_{n-1} & 2G_{n-1} + G_{n-2} \\ 2G_{n-1} + G_{n-2} & 2G_{n-2} + G_{n-3} \end{bmatrix} \\
\mathbf{C}_n &= \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Existe ainda outra associação entre as matrizes associadas da sequência de Pell com as da sequência gaussiana de Pell, como mostra o próximo teorema.

Teorema 4.3.3 *Seja a matriz associada da sequência de Pell* $(\mathbf{M}_n)$ *e a matriz associada da sequência gaussiana de Pell* $(\mathbf{C}_n)$*, estas se relacionam pela expressão*

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{M}_n\mathbf{C}_0.$$

Demonstração. Naturalmente, pela simetria apresentada nas duas matrizes associadas às sequências de Pell, existe a comutatividade na multiplicação de duas dessas matrizes. Dessa forma, utilizando indução matemática, vem:

Para $n = 1$:

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{M}_1\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{bmatrix}$$

Agora tome tal resultado como verdadeiro para certo $n > 1$, ou seja,

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{M}_n\mathbf{C}_0$$

dessa forma, para $n+1$, e sabendo da definição da matriz da sequência de Pell com potência n, usando o produto matricial, vem:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{n+1} &= \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-2i \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} P_{n+2}+iP_{n+1} & iP_{n+2}+P_{n+1}-2iP_{n+1} \\ P_{n+1}+iP_n & iP_{n+1}+P_n-2iP_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} G_{n+2} & i[2P_{n+1}+P_n]+P_{n+1}-2iP_{n+1} \\ G_{n+1} & i[2P_n+P_{n-1}]+P_n-2iP_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} G_{n+2} & P_{n+1}+iP_n \\ G_{n+1} & P_n+iP_{n-1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbf{C}_{n+1} &= \begin{bmatrix} G_{n+2} & G_{n+1} \\ G_{n+1} & G_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

De acordo com a definição da matriz associada à sequência gaussiana de Pell.

■

É possível ainda realizar a associação entre o índice da matriz da sequência gaussiana de Pell com sua respectiva potência da matriz gaussiana inicial. Tal associação será demonstrada no próximo teorema.

Teorema 4.3.4 *Toda matriz ($\mathbf{C}_n$) associada à sequência gaussiana de Pell (G_n) se relaciona com a potência da mesma matriz da forma*

$$\mathbf{C}_n = [\mathbf{C}_1]^n = \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Utilizando os Teoremas (2.4.2) e (4.3.3) temos:

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{M}_n\mathbf{C}_0 = \mathbf{M}^n\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix}$$

■

Dessa forma é possível a obtenção das matrizes $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{C}^4$, ..., $\mathbf{C}^n$,... a partir da produto da potência das matrizes $\mathbf{M}^n$ com a matriz $\mathbf{C}_0$ ou utilizando recorrência, obtendo assim as matrizes: $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_4$, ..., $\mathbf{C}_n$,...

Como sequência natural, deseja-se realizar a extensão das matrizes associadas à sequência gaussiana de Pell para índices negativos, observando assim o comportamento de $\mathbf{C}_{-n}$. Entretanto, de acordo com o resultado anterior, deveria-se ter $\mathbf{C}_{-n} = \mathbf{C}^{-n}$.

Mas, veja que $\mathbf{C}^{-n}$ representa a matriz inversa da matriz $\mathbf{C}^n$, isso posto, pois

$$\mathbf{C}^{-n} = (\mathbf{C}^n)^{-1}$$

E para se inverter uma matriz de ordem 2, faz-se necessário o conhecimento do determinante dessa matriz. O próximo teorema apresenta um resultado bastente útil para as matrizes associadas da sequência gaussiana de Pell.

Teorema 4.3.5 *O determinante de toda matriz ($\mathbf{C}_n$) associada à sequência gaussiana de Pell (G_n) se relaciona por*

$$det\,(\mathbf{C}_n) = [-2(1-i)]^n.$$

Demonstração. Sabendo que o determinante da matriz para $n = 1$ é,

$$det\,(\mathbf{C}_1) = det\left(\mathbf{C}^1\right) = (2+i)i - 1.1 = 2i - 1 - 1 = -2(1-i)$$

tem-se utilizando as propriedades dos determinantes

$$det\,(\mathbf{C}_n) = det\,(\mathbf{C}^n) = [det\,(\mathbf{C}_1)]^n = (-2(1-i))^n$$

■

Dessa forma, como $det\,(\mathbf{C}_n) = det\,(\mathbf{C}^n) \neq 0$ é natural compreender que existe a inversa da matriz associada da sequência gaussiana de Pell. Com isso é possível apresentar o corolário que segue:

Corolário 4.3.1 *Toda matriz associada da sequência gaussiana de Pell (G_{-n}) com índices negativos ($\mathbf{C}_{-n}$) é determinada pela inversa da matriz com índices positivos* $(\mathbf{C}_n)^{-1}$.

Demonstração. Ora, seja a representação $\mathbf{C}_{-n}$ para as matrizes associadas das sequências com índices negativos de Pell e usando o Teorema (4.3.3) junto com álgebra matricial, fica $\mathbf{C}^{-n} = [(\mathbf{C})^n]^{-1} = \mathbf{C}_{-n} = \mathbf{M}_{-n}\mathbf{C}_0$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}^{-n} &= \begin{bmatrix} P_{-n+1} & P_{-n} \\ P_{-n} & P_{-n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-2i \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} P_{-n+1}+iP_{-n} & iP_{-n+1}+P_{-n}-2iP_{-n} \\ P_{-n}+iP_{-n-1} & iP_{-n}+P_{-n-1}-2iP_{-n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} G_{-n+1} & P_{-n}+i(P_{-n+1}-2P_{-n}) \\ G_{-n} & P_{-n-1}+i(P_{-n}-2P_{-n-1}) \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} G_{-n+1} & P_{-n}+iP_{-n-1} \\ G_{-n} & P_{-n-1}+iP_{-n-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbf{C}^{-n} &= \begin{bmatrix} G_{-n+1} & G_{-n} \\ G_{-n} & G_{-n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cujo resultado equivale à definição para matriz associada à sequência gaussiana de Pell tomando n negativo.

■

Veja que com estas demonstrações é possível fazer uma extensão também do conceito de matriz associada ($\mathbf{C}_n$) da sequência gaussiana de Pell (G_n) também para os inteiros ($\mathbb{Z}$). Além desses resultados apresentados até agora, existem outras generalizações sobre sequência de Pell, assunto do próximo capítulo.

5 O MODELO GENERALIZADO DA SEQUÊNCIA DE PELL

De acordo com os resultados obtidos nos capítulos anteriores, a partir da definição e das propriedades da Sequência de Pell, bem como do comportamento das sequências de k e complexa de Pell é possível fazer uma generalização desses resultados dos termos para inteiros quaisquer, que será apresentado na próxima seção.

5.1 SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE PELL

A sequência generalizada de Pell, de acordo com Aydin e Köklü (2017, p. 3) indicada por $\mathbb{P}_n$, é definida como:

$$\mathbb{P}_n = 2\mathbb{P}_{n-1} + \mathbb{P}_{n-2}, \qquad (n \geq 3) \tag{5.1}$$

com $\mathbb{P}_1 = q$ e $\mathbb{P}_2 = p$, tomando p e q inteiros arbitrários.

Tomando (5.1) é possível encontrar os n-ésimos primeiros termos da sequência:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1 &= q \\
\mathbb{P}_2 &= p \\
\mathbb{P}_3 &= 2\mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_1 = 2(p) + q = 2p + q \\
\mathbb{P}_4 &= 2\mathbb{P}_3 + \mathbb{P}_2 = 2(2p+q) + p = 5p + 2q \\
\mathbb{P}_5 &= 2\mathbb{P}_4 + \mathbb{P}_3 = 2(5p+2q) + 2p + q = 12p + 5q \\
\mathbb{P}_6 &= 2\mathbb{P}_5 + \mathbb{P}_4 = 2(12p+5q) + 5p + 2q = 29p + 12q
\end{aligned}$$

e dando prosseguimento, é formada a sequência generalizada de Pell:

$$q, p, 2p+q, 5p+2q, 12p+5q, 29p+12q, ..., \mathbb{P}_n, ... \tag{5.2}$$

Com isso é possível estabelecer uma relação entre as sequências de Pell e a generalizada de Pell, indicada na proposição a seguir.

Proposição 5.1.1 *O n-ésimo termo da sequência generalizada de Pell $\mathbb{P}_n$ é dado por*

$$\mathbb{P}_n = pP_{n-1} + qP_{n-2}$$

Demonstração. Para se provar tal proposição será utilizado o processo de indução matemática para os casos válidos, ou seja:

i. Tome o caso inicial $n = 3$, ou seja:

$\mathbb{P}_3 = pP_2 + qP_1 = p(2) + q(1) = 2p + q$

O que é verdade, de acordo com (5.2).

ii. Agora suponha que a hipótese de indução seja verdadeira para um certo $n > 3$, ou seja, é válida a expressão $\mathbb{P}_n = pP_{n-1} + qP_{n-2}$.

Deve-se verificar a validade para $n+1$, ou seja, que $\mathbb{P}_{n+1} = pP_n + qP_{n-1}$. Ora, observa-se que depois da igualdade, tem:

$$\begin{array}{rcll} pP_n + qP_{n-1} & = & p[2P_{n-1} + P_{n-2}] + q[2P_{n-2} + P_{n-3}] & \Rightarrow \\ & = & 2pP_{n-1} + pP_{n-2} + 2qP_{n-2} + qP_{n-3} & \Rightarrow \\ & = & 2[pP_{n-1} + qP_{n-2}] + pP_{n-2} + qP_{n-3} & \Rightarrow \\ pP_n + qP_{n-1} & = & 2\mathbb{P}_n + \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}_{n+1} & \end{array}$$

De acordo com a definição, demonstrando assim a hipótese de indução.

■

Utilizando este último resultado é possível observar ainda outra relação entre as sequências de acordo com os dados a seguir:

$$\begin{array}{rclcll} \mathbb{P}_{n+1} & = & pP_n + qP_{n-1} & = & \mathbb{P}_2 P_n + \mathbb{P}_1 P_{n-1} & \\ \mathbb{P}_{n+2} & = & pP_{n+1} + qP_n & = & p[2P_n + P_{n-1}] + qP_n & \Rightarrow \\ & = & 2pP_n + pP_{n-1} + qP_n & = & [2p+q]P_n + pP_{n-1} & \Rightarrow \\ & = & \mathbb{P}_3 P_n + \mathbb{P}_2 P_{n-1} & & & \end{array}$$

E assim, fixando os termos da sequência de Pell, P_n e P_{n-1} e tomando um certo $m \in \mathbb{N}$ com $m > n$ e utilizando o resultado da proposição anterior (5.1.1), tem-se ainda outra relação entre as sequências de Pell e a generalizada de Pell, como segue:

Proposição 5.1.2 *Pode-se associar a sequência de Pell com a sequência generalizada de Pell a partir da relação*

$$\mathbb{P}_{n+m} = \mathbb{P}_{m+1} P_n + \mathbb{P}_m P_{n-1}$$

Demonstração. Novamente para se provar tal proposição será utilizado o processo de indução matemática:

i. Tome o caso inicial $m = 1$, ou seja:

$\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}_2 P_n + \mathbb{P}_1 P_{n-1} = pP_n + qP_{n-1}$

O que é verdade, de acordo com a Proposição (5.1.1).

ii. Agora suponha que a hipótese de indução seja verdadeira para um certo $m > 1$, ou seja, é válida a expressão $\mathbb{P}_{n+m} = \mathbb{P}_{m+1}P_n + \mathbb{P}_m P_{n-1}$.

Deve-se verificar a validade para $m+1$, ou seja:

$$\mathbb{P}_{n+m+1} = \mathbb{P}_{m+2}P_n + \mathbb{P}_{m+1}P_{n-1}.$$

Ora, mais uma vez observa-se que depois da igualdade, tem:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{m+2}P_n + \mathbb{P}_{m+1}P_{n-1} &= [2\mathbb{P}_{m+1} + \mathbb{P}_m]P_n + [2\mathbb{P}_m + \mathbb{P}_{m-1}]P_{n-1} && \Rightarrow \\
&= 2\mathbb{P}_{m+1}P_n + \mathbb{P}_m P_n + 2\mathbb{P}_m P_{n-1} + \mathbb{P}_{m-1}P_{n-1} && \Rightarrow \\
&= 2[\mathbb{P}_{m+1}P_n + \mathbb{P}_m P_{n-1}] + \mathbb{P}_m P_n + \mathbb{P}_{m-1}P_{n-1} && \Rightarrow \\
\mathbb{P}_{m+2}P_n + \mathbb{P}_{m+1}P_{n-1} &= 2\mathbb{P}_{n+m} + \mathbb{P}_{n+m-1} = \mathbb{P}_{n+m+1}
\end{aligned}$$

De acordo com a proposiçõ anterior, demonstrando assim a hipótese de indução.

■

Após serem feitas as demonstrações dessas duas proposições e voltando para (5.1) é natural perceber que os termos da sequência generalizada de Pell é obtida apenas a partir dos dois termos imediatamente anteriores, sendo necessária uma expressão que determique qualquer termo a partir de sua posição, o que será apresentado na próxima seção.

5.1.1 Equação de recorrência da sequência generalizada de Pell

Voltando a definição da Sequência Generalizada de Pell, a saber, (5.1), e representando a mesma de forma conveniente a partir da alteração de seus índices, podemos ter:

$$\mathbb{P}_{n+2} = 2\mathbb{P}_{n+1} + \mathbb{P}_n, \qquad (n \geq 1) \tag{5.3}$$

Tomando (5.3) uma equação de recorrência linear de segunda ordem é fácil verificar que essa tem a mesma equação de recorrência da sequência de Pell (2.4) e utilizando os elementos contidos no Apêndice (A) naturalmente as mesmas raízes, a saber, $r = 1 \pm \sqrt{2}$, sendo que sua solução geral possa ser escrita como:

$$\mathbb{P}_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n \tag{5.4}$$

e para se determinar as incógnitas A e B tomamos $\mathbb{P}_1 = q$ e $\mathbb{P}_2 = p$ formando o sistema.

$$\begin{cases} \mathbb{P}_1 = A(1+\sqrt{2})^1 + B(1-\sqrt{2})^1 = q \\ \mathbb{P}_2 = A(1+\sqrt{2})^2 + B(1-\sqrt{2})^2 = p \end{cases}$$

Na resolução desse sistema, será isolada a incógnita B na primeira equação:

$$\begin{aligned}
A(1+\sqrt{2})^1+B(1-\sqrt{2})^1 &= q \quad \Rightarrow \\
A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2}) &= q \quad \Rightarrow \\
B(1-\sqrt{2}) &= q-A(1+\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \\
B &= \frac{q-A(1+\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de B na segunda equação, vem:

$$\begin{aligned}
A(1+\sqrt{2})^2+\frac{q-A(1+\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}}.(1-\sqrt{2})^2 &= p \quad \Rightarrow \\
A(1+2\sqrt{2}+2)+[q-A(1+\sqrt{2})].(1-\sqrt{2}) &= p \quad \Rightarrow \\
A(3+2\sqrt{2})+q(1-\sqrt{2})-A(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) &= p \quad \Rightarrow \\
A(3+2\sqrt{2})-A(1-2) &= p-q(1-\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \\
A(4+2\sqrt{2}) &= p-q(1-\sqrt{2}) \quad \Rightarrow \\
A &= \frac{p-q(1-\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Racionalizando a incógnita A vem:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{p-q(1-\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}.\frac{4-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{p(4-2\sqrt{2})-q(1-\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{2p(2-\sqrt{2})-2q(4-3\sqrt{2})}{16-8} \quad \Rightarrow \\
A &= \frac{p(2-\sqrt{2})-q(4-3\sqrt{2})}{4} \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

E substituindo o resultado de A para se determinar o valor de B, vem:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{q-\frac{p(2-\sqrt{2})-q(4-3\sqrt{2})}{4}.(1+\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{\frac{4q-p(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+q(4-3\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{4}}{1-\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{4q-p(\sqrt{2})+q(-2+\sqrt{2})}{4}.\frac{1}{1-\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \\
B &= \frac{-p\sqrt{2}+q(2+\sqrt{2})}{4(1-\sqrt{2})}
\end{aligned}$$

Racionalizando este último resultado, encontra-se a incógnita B:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{-p\sqrt{2}+q(2+\sqrt{2})}{4(1-\sqrt{2})}.\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} && \Rightarrow \\
&= \frac{-p\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+q(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{4(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} && \Rightarrow \\
&= \frac{-p\sqrt{2}-2p+q(2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+2)}{4(1-2)} && \Rightarrow \\
&= \frac{-p(2+\sqrt{2})+q(4+3\sqrt{2})}{-4} && \Rightarrow \\
B &= \frac{p(2+\sqrt{2})-q(4+3\sqrt{2})}{4} && (5.6)
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando os valores das incógnitas A e B encontrados respectivamente nas expressões (5.5) e (5.6) e aplicando na equação geral, tem-se a fórmula de Binet para a sequência generalizada de Pell:

$$
\mathbb{P}_n = \frac{p(2-\sqrt{2})-q(4-3\sqrt{2})}{4}.[1+\sqrt{2}]^n + \frac{p(2+\sqrt{2})-q(4+3\sqrt{2})}{4}.[1-\sqrt{2}]^n \qquad (5.7)
$$

Uma forma mais prática para o resultado anterior é apresentado no próximo teorema, como a fórmula de Binet para a sequência generalizada de Pell.

Teorema 5.1.3 *A fórmula de Binet para a sequência generalizada de Pell é:*

$$
\mathbb{P}_n = \frac{\overline{\alpha}\alpha^n - \overline{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta} \qquad (5.8)
$$

Demonstração. Tomando a equação de recorrência (5.1) e a reescrevendo de forma conveniente $\mathbb{P}_{n+2} = 2\mathbb{P}_{n+1} + \mathbb{P}_n$, cuja equação caracaterística é $t^2 - 2t - 1 = 0$ a partir do Apêndice (A) e sendo as raízes dessa equação

$$
\begin{aligned}
\alpha &= 1+\sqrt{2} \\
\beta &= 1-\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

com $\alpha+\beta = 2$, $\alpha-\beta = 2\sqrt{2}$ e $\alpha\beta = -1$. Utilizando a equação de recorrência e tomando $\mathbb{P}_0 = q$ e $\mathbb{P}_1 = p$ como valores iniciais, encontra-se a fórmula de Binet para $\mathbb{P}_n$ como

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_n &= (p-2q)P_n + qP_{n+1} && \Rightarrow \\
&= (p-2q)\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right) + q\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) && \Rightarrow \\
&= \frac{\overline{\alpha}\alpha^n - \overline{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}
\end{aligned}
$$

com $\overline{\alpha} = p + q(\alpha-2)$ e $\overline{\beta} = p + q(\beta-2)$.

■

Sendo possível com este último resultado encontrar qualquer termo da sequência generalizada de Pell tomando qualquer valor para n. No entanto, questiona-se a possibilidade de realizar, assim como na sequência de Pell, a extensão dos índices para o conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), assunto que será abordado na próxima seção.

5.2 EXTENSÃO PARA ÍNDICES NEGATIVOS

A partir dos resultados nos capítulos anteriores se tratanto da extensão de termos para índices negativos, é possível fazer a extensão da sequência generalizada de Pell com índices no conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$) tomando para isso os valores desses índices bem como os valores da sequência de Pell com índices negativos.

De fato, na extensão para termos da sequência com índices negativos, estes devem satisfazer tanto à definição da sequência generalizada sendo removido naturalmente a restrição $n \geq 1$ quanto a expressão recursiva obtida na seção anterior e ainda a fórmula de Binet para a sequência generalizada de Pell tomando valores não positivos para n. Dessa maneira, a partir de agora será realizada a extensão da sequência generalizada de Pell para índices não naturais.

Inicialmente, será calculado o termo $\mathbb{P}_0$ tomando a definição e $n = 0$ e modificando os termos de forma conveniente, como segue:

$$\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_2 - 2\mathbb{P}_1 = (p) - 2(q) = p - 2q$$

Comenta-se que este resultado também poderia ser obtido a partir do uso da recorrência bem como da fórmula de Binet para a sequência generalizada de Pell tomando $n = 0$. Comprovando o valor para $\mathbb{P}_0$ e utilizando ainda este modelo, fica simples a partir da troca a obtenção de outros termos da sequência generalizada de Pell como índices inteiros tais como $\mathbb{P}_{-1}$, $\mathbb{P}_{-2}$, $\mathbb{P}_{-3}$, ..., $\mathbb{P}_{-n}$, ... e com isso é possível apresentar alguns exemplos de termos iniciais dessa sequência, como segue:

$$\begin{array}{lclclclcl}
n=-1 & \therefore & \mathbb{P}_{-1} & = & \mathbb{P}_1-2\mathbb{P}_0 & = & (q)-2(p-2q) & = & -2p+5q \\
n=-2 & \therefore & \mathbb{P}_{-2} & = & \mathbb{P}_0-2\mathbb{P}_{-1} & = & (p-2q)-2(-2p+5q) & = & 5p-12q \\
n=-3 & \therefore & \mathbb{P}_{-3} & = & \mathbb{P}_{-1}-2\mathbb{P}_{-2} & = & (-2p+5q)-2(5p-12q) & = & -12p+29q \\
n=-4 & \therefore & \mathbb{P}_{-4} & = & \mathbb{P}_{-2}-2\mathbb{P}_{-3} & = & (5p-12q)-2(-12p+29q) & = & 29p-70q \\
n=-5 & \therefore & \mathbb{P}_{-5} & = & \mathbb{P}_{-3}-2\mathbb{P}_{-4} & = & (-12p+29q)-2(29p-70q) & = & -70p+169q
\end{array}$$

Observe a existência de um padrão que relaciona os termos de índices negativos com os termos positivos, bem como uma alternância de sinal entre os termos e os elementos com índices negativos possuem as parcelas pares positivas e as parcelas pares negativas.

E a partir da construção da família de sequências de Pell com índices negativos, é possível comprovar a extensão dos mesmos conceitos para a sequência generalizada de Pell dos índices naturais ($\mathbb{N}$) para os inteiros ($\mathbb{Z}$).

Além do conceito obtido nessa seção, tem-se ainda outro bastante importante na construção do trabalho acerca dos elementos vetoriais da sequência generalizada de Pell, assunto da próxima seção.

Com estes elementos é possível realizar a construção da matriz generalizada associada à sequência de Pell. Assunto que será abordado na próxima seção.

5.3 MATRIZ DA SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE PELL

De maneira similar ao que foi construído para a família da sequência de Pell, em relação a determinação de matrizes associadas à sequência, é possível também obter a matriz associada à sequência generalizada de Pell, como será apresentado nessa seção.

Utilizando os resultados obtidos na Seção (2.4) é possível estabelecer uma relação entre a matriz associada à sequência de Pell com a construção da matriz associada à sequência generalizada de Pell, como é mostrado na próxima proposição:

Proposição 5.3.1 *Seja a sequência de Pell (P_n) com sua devida representação matricial* $\mathbf{M}_n$*, a matriz associada à sequência generalizada de Pell com seus devidos elementos ($\mathbb{P}_n$) pode ser indicada por*

$$\mathbb{M}_n = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n+1} & \mathbb{P}_n \\ \mathbb{P}_n & \mathbb{P}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Utilizando a Proposição (5.1.1) com a matriz associada à sequência de Pell ($\mathbf{M}_n$) junto com álgebra matricial, vem:

$$\begin{aligned}
p\mathbf{M}_{n-1}+q\mathbf{M}_{n-2} &= p\begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} pP_n+qP_{n-1} & pP_{n-1}+qP_{n-2} \\ pP_{n-1}+qP_{n-2} & pP_{n-2}+qP_{n-3} \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
p\mathbf{M}_{n-1}+q\mathbf{M}_{n-2} &= \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n+1} & \mathbb{P}_n \\ \mathbb{P}_n & \mathbb{P}_{n-1} \end{bmatrix} && \Rightarrow \\
p\mathbf{M}_{n-1}+q\mathbf{M}_{n-2} &= \mathbb{M}_n
\end{aligned}$$

Isso de acordo com a Proposição (5.1.1) que indica a sequência generalizada de Pell.

■

A matriz associada à sequência generalizada de Pell será indicada por $\mathbb{M}_n$ a partir de agora e de acordo com a proposição anterior é possível realizar a construção das primeiras matrizes da sequência generalizada de Pell:

$$\mathbb{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_2 & \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_1 & \mathbb{P}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p-2q \end{bmatrix} \qquad \mathbb{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_3 & \mathbb{P}_2 \\ \mathbb{P}_2 & \mathbb{P}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p+q & p \\ p & q \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{M}_3 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_4 & \mathbb{P}_3 \\ \mathbb{P}_3 & \mathbb{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5p+2q & 2p+q \\ 2p+q & p \end{bmatrix} \qquad \mathbb{M}_4 = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_5 & \mathbb{P}_4 \\ \mathbb{P}_4 & \mathbb{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12p+5q & 5p+2q \\ 5p+2q & 2p+q \end{bmatrix}$$

e assim por diante. É possível também realizar uma associação entre as matrizes associadas à sequência generalizada de Pell com a definição de uma forma similar à da sequência, como mostra o próximo teorema.

Teorema 5.3.2 *Seja a sequência generalizada de Pell ($\mathbb{P}_n$) e a representação matricial dela $\mathbb{M}_n$, esta pode ser apresentada por*

$$\mathbb{M}_n = 2\mathbb{M}_{n-1} + \mathbb{M}_{n-2}$$

Demonstração. Usando álgebra matricial bem como a proposição anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_n &= 2\mathbb{M}_{n-1}+\mathbb{M}_{n-2} \quad \Rightarrow \\
\mathbb{M}_n &= 2\begin{bmatrix} \mathbb{P}_n & \mathbb{P}_{n-1} \\ \mathbb{P}_{n-1} & \mathbb{P}_{n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n-1} & \mathbb{P}_{n-2} \\ \mathbb{P}_{n-2} & \mathbb{P}_{n-3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2\mathbb{P}_n+\mathbb{P}_{n-1} & 2\mathbb{P}_{n-1}+\mathbb{P}_{n-2} \\ 2\mathbb{P}_{n-1}+\mathbb{P}_{n-2} & 2\mathbb{P}_{n-2}+\mathbb{P}_{n-3} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbb{M}_n &= \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n+1} & \mathbb{P}_n \\ \mathbb{P}_n & \mathbb{P}_{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

Existe ainda outra associação entre as matrizes associadas da sequência de Pell com as da sequência generalizada de Pell, como mostra o próximo teorema.

Teorema 5.3.3 *Seja a matriz associada da sequência de Pell ($\mathbf{M}_n$) e a matriz associada da sequência generalizada de Pell ($\mathbb{M}_n$), estas se relacionam pela expressão*

$$\mathbb{M}_n = \mathbf{M}_{n-1}\mathbb{M}_1 = \mathbf{M}_{n-1}\begin{bmatrix} p & q \\ q & p-2q \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Naturalmente, pela simetria apresentada nas duas matrizes associadas às sequências de Pell, existe a comutatividade na multiplicação de duas dessas matrizes. Dessa forma, utilizando indução matemática, vem:

Para $n=1$:

$$\mathbb{M}_1 = \mathbf{M}_0\mathbb{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & p-2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p-2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_1 & \mathbb{P}_0 \\ \mathbb{P}_0 & \mathbb{P}_{-1} \end{bmatrix}$$

Agora tome tal resultado como verdadeiro para certo $n>1$, ou seja,

$$\mathbb{M}_n = \mathbf{M}_{n-1}\mathbb{M}_1$$

dessa forma, para $n+1$, e sabendo da definição da matriz da sequência de Pell com potência n, usando o produto matricial, vem:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_{n+1} &= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & p-2q \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} pP_{n+1}+qP_n & qP_{n+1}+pP_n-2qP_n \\ pP_n+qP_{n-1} & qP_n+pP_{n-1}-2qP_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n+2} & q[P_{n+1}-2P_n]+pP_n \\ \mathbb{P}_{n+1} & q[P_n-2P_{n-1}]+pP_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n+2} & pP_n+qP_{n-1} \\ \mathbb{P}_{n+1} & pP_{n-1}+qP_{n-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
\mathbb{M}_{n+1} &= \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n+2} & \mathbb{P}_{n+1} \\ \mathbb{P}_{n+1} & \mathbb{P}_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

De acordo com a definição da matriz associada à sequência generalizada de Pell.

■

É possível ainda realizar a associação entre o índice da matriz da sequência generalizada de Pell com sua respectiva potência da matriz generalizada inicial. Tal associação será demonstrada no próximo teorema.

Teorema 5.3.4 *Toda matriz ($\mathbb{M}_n$) associada à sequência generalizada de Pell ($\mathbb{P}_n$) se relaciona com a potência da mesma matriz da forma*

$$\mathbb{M}_n = [\mathbb{M}_1]^n = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p-2q \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n+1} & \mathbb{P}_n \\ \mathbb{P}_n & \mathbb{P}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Utilizando os Teoremas (2.4.2) e (5.3.3) temos:

$$\mathbb{M}_n = \mathbf{M}_{n-1}\mathbb{M}_1 = \mathbf{M}^{n-1}\mathbb{M}_1 = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & p-2q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{n+1} & \mathbb{P}_n \\ \mathbb{P}_n & \mathbb{P}_{n-1} \end{bmatrix}$$

■

Dessa forma é possível a obtenção das matrizes $\mathbb{M}^2$, $\mathbb{M}^3$, $\mathbb{M}^4$, ..., $\mathbb{M}^n$,... a partir da produto da potência das matrizes $\mathbf{M}^n$ com a matriz $\mathbb{M}_1$ ou utilizando recorrência, obtendo assim as matrizes: $\mathbb{M}_2$, $\mathbb{M}_3$, $\mathbb{M}_4$, ..., $\mathbb{M}_n$,...

Como sequência natural, deseja-se realizar a extensão das matrizes associadas à sequência generalizada de Pell para índices negativos, observando assim o comportamento de $\mathbb{M}_{-n}$. Entretanto, de acordo com o resultado anterior, deveria-se ter $\mathbb{M}_{-n} = [\mathbb{M}_1]^{-n}$.

Mas, veja que $[\mathbb{M}_1]^{-n}$ representa a matriz inversa da matriz $\mathbb{M}^n$, isso posto, pois

$$[\mathbb{M}_1]^{-n} = [\mathbb{M}^n]^{-1}$$

E para se inverter uma matriz de ordem 2, faz-se necessário o conhecimento do determinante dessa matriz. O próximo teorema apresenta um resultado bastente útil para as matrizes associadas da sequência generalizada de Pell.

Teorema 5.3.5 *O determinante de toda matriz ($\mathbb{M}_n$) associada à sequência gaussiana de Pell ($\mathbb{P}_n$) se relaciona por*

$$det\,(\mathbb{M}_n) = \left[p^2 - 2pq - q^2\right]^n.$$

Demonstração. Sabendo que o determinante da matriz para $n = 1$ é,

$$det\,(\mathbb{M}_1) = det\left(\mathbb{M}^1\right) = p(p-2q) - q^2 = p^2 - 2pq - q^2$$

tem-se utilizando as propriedades dos determinantes

$$det\,(\mathbb{M}_n) = det\,(\mathbb{M}^n) = [det\,(\mathbb{M}_1)]^n = \left(p^2 - 2pq - q^2\right)^n$$

■

Dessa forma, como $det\,(\mathbb{M}_n) = det\,(\mathbb{M}^n) \neq 0$ tomando naturalmente p e q diferentes de zero é possível determinar a inversa da matriz associada da sequência generalizada de Pell. Com isso é possível apresentar o corolário que segue:

Corolário 5.3.1 *Toda matriz associada da sequência generalizada de Pell ($\mathbb{P}_{-n}$) com índices negativos ($\mathbb{M}_{-n}$) é determinada pela inversa da matriz com índices positivos* $(\mathbb{M}_n)^{-1}$.

Demonstração. Ora, seja a representação $\mathbb{M}_{-n}$ para as matrizes associadas das sequências com índices negativos de Pell e usando o Teorema (5.3.3) junto com álgebra matricial, fica $\mathbb{M}^{-n} = [\mathbb{M}^n]^{-1} = \mathbb{M}_{-n} = \mathbf{M}_{-n-1}\mathbb{M}_1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}^{-n} &= \begin{bmatrix} P_{-n} & P_{-n-1} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & p-2q \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} pP_{-n} + qP_{-n-1} & qP_{-n} + pP_{-n-1} - 2qP_{-n-1} \\ pP_{-n-1} + qP_{-n-2} & qP_{-n-1} + pP_{-n-2} - 2qP_{-n-2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \\
\mathbb{M}^{-n} &= \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{-n+1} & \mathbb{P}_{-n} \\ \mathbb{P}_{-n} & \mathbb{P}_{-n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Cujo resultado equivale à definição para matriz associada à sequência generalizada de Pell tomando n negativo.

■

Veja que com estas demonstrações é possível fazer uma extensão também do conceito de matriz associada ($\mathbb{M}_n$) da sequência generalizada de Pell ($\mathbb{P}_n$) também para os inteiros ($\mathbb{Z}$). E com todas essas generalizações é possível apresentar alguns resultados da família da sequência de Pell, assunto que será abordado no próximo capítulo.

6 ALGUNS RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados algumas aplicações da sequência de Pell, bem como de suas generalizações. Nessa perspectiva serão tratados inicialmente conceitos relacionados com o cálculo diferencial e integral, posteriormente aplicações em funções polinomiais, hiperbólicas e com números quatérnios e bicomplexos, além do uso no softwware Maple como segue.

6.1 LIMITES

6.1.1 Limite da sequência de Pell

Como elemento inicial, questiona-se o fato da possibilidade de existência ou não do limite da sequência de Pell e quem sabe até uma possível convergência, principalmente quando esta tende ao infinito positivo. Naturalmente, pelo que foi apresentado nos capítulos anteriores, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty$$

isso posto pois a sequência P_n é uma sequência monótona estritamente crescente tomando $n \in \mathbb{N}$.

Mas quando se deseja determinar alguma convergência para a sequência de Pell, utilizamos o critério da razão, que podem ser consultados em (LEITHOLD, 1994, p. 734) e (GUIDORIZZI, 2015, p. 62).

Para isso, vamos analisar o comportamento da razão entre alguns termos consecutivos iniciais da sequência de Pell:

$$\begin{aligned}
\frac{P_2}{P_1} &= \frac{2}{1} = 2\\
\frac{P_3}{P_2} &= \frac{5}{2} = 2,5\\
\frac{P_4}{P_3} &= \frac{12}{5} = 2,4\\
\frac{P_5}{P_4} &= \frac{29}{12} = 2,41\overline{6}\\
\frac{P_6}{P_5} &= \frac{70}{29} = 2,4137931034482758620689655172414
\end{aligned}$$

e assim tentamos determinar a convergência da razão entre $\frac{P_{n+1}}{P_n}$. Considerando P_n o n-ésimo termo da sequência de Pell, com $n \in \mathbb{N}$, temos pela definição (2.1) que $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$.

Mostraremos inicialmente que o limite existe. É natural observar que $P_n < P_{n+1}$, e consequentemente pela definição da sequência: $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} < 2P_n + P_n$. Logo, $P_{n+1} < 3P_n$ e portanto, $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 3$. E como os dois primeiros termos da sequência possuem razão 2, temos que:

$$2 \leq \frac{P_{n+1}}{P_n} < 3$$

E dessa forma, a razão entre termos consecutivos da sequência é limitada e convergente, assim seu limite existe. Para se determinar esse limite, utilizaremos a forma de recorrência (2.11) com $\alpha = 1+\sqrt{2}$ e $\beta = 1-\sqrt{2}$ encontrada por (BICKNELL, 1975) de forma a facilitar o cálculo desse limite, como segue:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha^n-\beta^n}$$

Tomando o fato de que $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, temos que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$, logo o resultado anterior fica:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}.\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha$$

Comenta-se aqui que tal resultado $\alpha = 1+\sqrt{2}$ é conhecido como recorrência de prata ou número prateado e vale a convergência da sequência.

Um outro resultado importante é obtido pelo limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_n}{P_{n+1}}$ que será determinado de forma análoga ao cálculo que foi feito anteriormente:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\alpha-\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\end{aligned}$$

É natural observar que este último resultado deve ser racionalizado pois $\alpha = 1+\sqrt{2}$, como segue:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}.\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = -(1-\sqrt{2}) = -\beta$$

Comenta-se que os limites de convergência da sequência de Pell assumem tanto os valores das raízes da equação característica como os valores dos coeficientes que formam a recorrência para a expressão geral dessa sequência.

Na sequência das aplicações é possível enxergar a existência do limite para a extensão da sequência de Pell, a saber a sequência de k-Pell, o que será feita na próxima seção.

6.1.2 Limite da sequência de k-Pell

Catarino (2013, p. 1879) apresenta algumas identidades acerca da sequência de k-Pell, a partir do uso da lei de recorrência geral já determinada anteriormente em (3.7), como segue:

$$P_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$

tomando agora as variáveis $r_1 = 1 + \sqrt{1+k}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{1+k}$ de forma a diferenciar as variáveis utilizadas na seção anterior. Tomando o fato de que foi possível encontrar a convergência da sequência de Pell, é possível também determinar a convergência agora da sequência de k-Pell, como será apresentada na próxima proposição:

Proposição 6.1.1 *A convergência da razão de termos consecutivos da sequência de k-Pell é dada por*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{k,n+1}}{P_{k,n}} = r_1$$

Demonstração. Ora, utilizando a recorrência geral da sequência de k-Pell

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{k,n+1}}{P_{k,n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_1-r_2}}{\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1^n - r_2^n}$$

Sabendo que a relação $\left|\frac{r_2}{r_1}\right| < 1$, então $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n = 0$, e assim:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{k,n+1}}{P_{k,n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1}.\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{r_1}} = r_1$$

■

Determinando agora a convergência da relação inversa entre $\frac{P_{k,n}}{P_{k,n+1}}$, temos a próxima proposição:

Proposição 6.1.2 *A convergência da relação* $\frac{P_{k,n}}{P_{k,n+1}}$ *é dada por*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{k,n}}{P_{k,n+1}} = -\frac{r_2}{k}$$

Demonstração. Utilizando um raciocínio análogo ao da proposição (6.1.1), temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{P_{k,n}}{P_{k,n+1}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}}{\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_1-r_2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}{r_1-r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1}\end{aligned}$$

Racionalizando este resultado, pois $r_1 = 1+\sqrt{1+k}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{P_{k,n}}{P_{k,n+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{1+k}}.\frac{1-\sqrt{1+k}}{1-\sqrt{1+k}} = \frac{1-\sqrt{1+k}}{1-(1+k)} = \frac{1-\sqrt{1+k}}{-k} = -\frac{r_2}{k}$$

■

Apresentando assim a convergência da sequência de k-Pell. E podendo ainda observar o comportamento dessas convergências em relação às raízes da equação característica bem como também dos coeficientes da recorrência geral da sequência.

6.1.3 Limite da sequência generalizada de Pell

Aydin e Köklü (2017, pp. 4, 5) apresentam dois teoremas para a sequência generalizada de Pell, que seguem:

Teorema 6.1.3 *Se $\mathbb{P}_n$ pertence à sequência generalizada de Pell, então*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}_{n+1}}{\mathbb{P}_n} = \frac{p\alpha+q}{q\alpha+(p-2q)}$$

quando $\alpha = 1+\sqrt{2}$.

Demonstração. Horadam (1971) apresenta que para os números de Pell, P_n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha$$

com $\alpha = 1+\sqrt{2}$. Assim, para a sequência generalizada de Pell ($\mathbb{P}_n$), encontra-se:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}_{n+1}}{\mathbb{P}_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{pP_{n+1}+qP_n}{qP_{n+1}+(p-2q)P_n}\\ &= \frac{p\alpha+q}{q\alpha+(p-2q)} \qquad (6.1)\end{aligned}$$

■

Outra aplicação no contexto do cálculo diferencial e integral consiste no conceito de função geradora, que será visto na próxima seção.

6.2 FUNÇÕES GERADORAS

Utilizando os resultados do Apêndice (B), é possível construir as funções geradoras das sequência de Pell e de k-Pell, como segue.

6.2.1 Função geradora da sequência de Pell

Podemos escrever a sequência de Pell como uma série de potências onde cada termo da sequência corresponde aos coeficientes da série e assim é gerada a função. Por definição, seja a função geradora ordinária

$$G(P_n;x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + ... + P_n x^n + ...$$

Utilizando os valores iniciais da sequência de Pell, a saber $P_0 = 0$ e $P_1 = 1$ vem:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n = 0 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n x^n$$

e aplicando agora a definição da sequência de Pell, vem:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (2P_{n-1} + P_{n-2}) x^n \\
&= x + 2\sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-2} x^n \\
&= x + 2x \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-2} x^{n-2}
\end{aligned}$$

e tomando de forma conveniente $j = n-1$ e $m = n-2$, podemos reescrever como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n = x + 2x \sum_{j=0}^{+\infty} P_j x^j + x^2 \sum_{m=0}^{+\infty} P_m x^m$$

e naturalmente tal expressão equivale à

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n &= x + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n \\
\sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n - x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n &= x \\
\sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n [1 - 2x - x^2] &= x
\end{aligned}$$

E assim podemos escrever a função geradora ordinária da sequência de Pell

$$G(P_n;x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n = \frac{x}{1-2x-x^2} \tag{6.2}$$

De forma semelhante ao que foi feito com a sequência de Pell, é possível obter a função geradora da sequência de k-Pell, o que será determinado na próxima subseção.

6.2.2 Função geradora da sequência de k-Pell

Catarino (2013, p. 1881) determina a função geradora da sequência de k-Pell e que será calculada a partir de agora usando raciocínio semelhante ao que foi utilizado na seção anterior. Seja a definição da série de potência para a sequência de k-Pell

$$G(P_{k,n};x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n = P_{k,0} + P_{k,1}x + P_{k,2}x^2 + \ldots + P_{k,n}x^n + \ldots$$

Usando os valores iniciais da sequência de k-Pell: $P_{k,0} = 0$ e $P_{k,1} = 1$ temos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n = 0 + x + \sum_{n=2}^{+\infty} P_{k,n}x^n$$

inserindo a definição da sequência de k-Pell, fica:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2})x^n \\
&= x + 2\sum_{n=2}^{+\infty} P_{k,n-1}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} kP_{k,n-2}x^n \\
&= x + 2x\sum_{n=2}^{+\infty} P_{k,n-1}x^{n-1} + kx^2\sum_{n=2}^{+\infty} P_{k,n-2}x^{n-2}
\end{aligned}$$

tomando os valores para $j = n-1$ e $m = n-2$, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n = x + 2x\sum_{j=0}^{+\infty} P_{k,j}x^j + kx^2\sum_{m=0}^{+\infty} P_{k,m}x^m$$

e assim fica equivalente à

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n &= x + 2x\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n + kx^2\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n \\
\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n - 2x\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n - kx^2\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n &= x \\
\sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n[1 - 2x - kx^2] &= x
\end{aligned}$$

E finalmente conseguimos escrever a função geradora de k-Pell

$$G(P_{k,n};x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{k,n}x^n = \frac{x}{1-2x-kx^2} \tag{6.3}$$

6.3 FUNÇÕES POLINOMIAIS

Um estudo acerca das funções polinomiais está intimamente ligado com o as sequências numéricas, principalmente depois da abordagem de função geradora, vista na seção passada. Dessa forma, será introduzio nesta seção um novo conceito, o de função polinomial da sequência de Pell.

6.3.1 Função Polinomial de Pell

O polinômio de Pell $P_n(x)$ é definido por:

Definição 6.3.1 *O polinômio de Pell é definido pela relação:*

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + P_n(x)$$

com $P_1(x) = 1$ *e* $P_2(x) = 2$.

Dessa forma, utilizando tal definição é possível observar a construção dos n-ésimos primeiros polinômios de Pell, como segue:

$$\begin{array}{lllllll}
P_1(x) & = & 1 & & & & \\
P_2(x) & = & 2 & & & & \\
P_3(x) & = & 2xP_2(x) + P_1(x) & = & 2x(2) + 1 & = & 4x + 1 \\
P_4(x) & = & 2xP_3(x) + P_2(x) & = & 2x(4x+1) + 2 & = & 8x^2 + 2x + 2 \\
P_5(x) & = & 2xP_4(x) + P_3(x) & = & 2x(8x^2 + 2x + 2) + 4x + 1 & = & 16x^3 + 4x^2 + 8x + 1
\end{array}$$

É natural observar o crescimento do grau da sequência polinomial à medida que n aumenta. Fica o questionamento sobre como determinar o termo da sequência polinomial a partir do uso da fórmula de recorrência. O próximo teorema aborda esse tema.

Teorema 6.3.1 *A fórmula de Binet para a sequência polinomial é dada por:*

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

com $\alpha(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{2}$ *e* $\beta(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{2}$.

Demonstração. Sabendo inicialmente que a equação característica da relação de recorrência $t^2 = 2xt + 1$ produz as raízes $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, e que a sequência polinomial pertence à família de sequências de Pell, utilizando os valores iniciais $P_1(x) = 1$ e $P_2(x) = 2$, determinamos a relação

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}.$$

■

Dando continuidade ao estudo, é possível determinar a função geradora do polinômio de Pell, como segue o próximo teorema:

Teorema 6.3.2 *A função geradora da sequência polinomila é dada por:*

$$G(P_n(x),t) = \frac{t}{1-2xt-t^2}$$

Demonstração. Utilizando o conceito de função geradora sendo aplicada na função polinomial vem:

$$\begin{aligned}
G(P_n(x),t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n = P_0(x)t^0 + P_1(x)t^1 + P_2(x)t^2 + \ldots + P_n(x)t^n + \ldots \Rightarrow \\
&= t + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(x)t^n \Rightarrow \\
&= t + \sum_{n=2}^{+\infty} (2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x))t^n \Rightarrow \\
&= t + 2x\sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-1}(x)t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-2}(x)t^n \Rightarrow \\
&= t + 2xt\sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-1}(x)t^{n-1} + t^2\sum_{n=2}^{+\infty} P_{n-2}(x)t^{n-2} \Rightarrow \\
G(P_n(x),t) &= \quad = t + 2xtG(P_n(x),t) + t^2G(P_n(x),t)
\end{aligned}$$

Resolvendo essa equação em relação a $G(P_n(x),t)$ temos:

$$\begin{aligned}
G(P_n(x),t) - 2xtG(P_n(x),t) - t^2G(P_n(x),t) &= t \Rightarrow \\
G(P_n(x),t)[1-2xt-t^2] &= t \Rightarrow \\
G(P_n(x),t) &= \frac{t}{1-2xt-t^2}
\end{aligned}$$

■

6.4 FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

A partir dos elementos do Apêndice (C), é possível realizar a construção de funções hiperbólicas das sequência de Pell e de k-Pell, como segue.

6.4.1 Funções hiperbólicas de Pell

As funções hiperbólicas de Pell são definidas de acordo com a próxima definição, como segue:

Definição 6.4.1 *A função seno hiperbólico de Pell é definida por*

$$sPh(x) = \frac{(\alpha)^x - (\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}}$$

enquanto a função cosseno hiperbólico de Pell é definida por

$$cPh(x) = \frac{(\alpha)^x + (\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}}$$

sendo $\alpha = 1+\sqrt{2}$ *a raiz positiva da equação característica (2.4) da recorrência da sequência de Pell.*

A partir dessas definições é possível realizar um estudo acerca do comportamento geral dessas funções de acordo com as proposições e teoremas da seção anterior, realizando assim uma generalização das funções hiperbólicas junto com a sequência de Pell, como mostram os próximos teoremas e proposições.

Teorema 6.4.1 *(Teorema de Pitágoras) Sejam* $cPh(x)$ *e* $sPh(x)$ *as funções cosseno e seno hiperbólico de Pell. Para cada* $x \in \mathbb{R}$*, vale a relação:*

$$[cPh(x)]^2 - [sPh(x)]^2 = \frac{1}{2}$$

Demonstração. Usando a definição (6.4.1) temos:

$$\begin{aligned} [cPh(x)]^2 - [sPh(x)]^2 &= \left[\frac{(\alpha)^x + (\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}}\right]^2 - \left[\frac{(\alpha)^x - (\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}}\right]^2 \Rightarrow \\ &= \frac{(\alpha)^{2x} + 2 + (\alpha)^{-2x}}{8} - \frac{(\alpha)^{2x} - 2 + (\alpha)^{-2x}}{8} \Rightarrow \\ &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Antes de enunciar o próximo teorema, existe uma proposição bastante útil para a demonstração do mesmo, como segue:

Proposição 6.4.2 *A soma e a diferença entre* $cPh(x)$ *e* $sPh(x)$ *é dada por:*

i. $cPh(x)+sPh(x)x = \dfrac{(\alpha)^x}{\sqrt{2}}$

ii. $cPh(x)-sPh(x) = \dfrac{(\alpha)^{-x}}{\sqrt{2}}$

Demonstração. Para comprovar esta proposição será utilizado a Definição (6.4.1):

i. $cPh(x)+sPh(x)x = \dfrac{(\alpha)^x+(\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}} + \dfrac{(\alpha)^x-(\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2(\alpha)^x}{2\sqrt{2}} = \dfrac{(\alpha)^x}{\sqrt{2}}$

ii. $cPh(x)-sPh(x)x = \dfrac{(\alpha)^x+(\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}} - \dfrac{(\alpha)^x-(\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2(\alpha)^{-x}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{(\alpha)^{-x}}{\sqrt{2}}$

■

Bem como também temos as relações para soma e diferença de valores nos reais para as funções seno e cosseno hiperbólico de Pell, como segue no próximo teorema:

Teorema 6.4.3 *(Soma e diferença) Sejam $sPh(x)$ e $cPh(x)$ funções hiperbólicas de Pell e tomando $x,y \in \mathbb{R}$ e ainda $k \in \mathbb{R}^+$, temos as identidades:*

i. $sPh(x+y) = \sqrt{2}[sPh(x)cPh(y)+cPh(x)sPh(y)]$

ii. $sPh(x-y) = \sqrt{2}[sPh(x)cPh(y)-cPh(x)sPh(y)]$

iii. $cPh(x+y) = \sqrt{2}[cPh(x)cPh(y)+sPh(x)sPh(y)]$

iv. $cPh(x-y) = \sqrt{2}[cPh(x)cPh(y)-sPh(x)sPh(y)]$

.

Demonstração. Na demonstração desse teorema são utilizados tanto a Definição (6.4.1) quanto o resultado obtido na Proposição (6.4.2), em cada caso, como segue:

i.

$$\begin{aligned}
sPh(x+y) &= \frac{(\alpha)^{x+y}-(\alpha)^{-(x+y)}}{2\sqrt{2}} && \Rightarrow \\
&= \frac{(\alpha)^x(\alpha)^y-(\alpha)^{-x}(\alpha)^{-y}}{2\sqrt{2}} && \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}[cPh(x)+sPh(x)]\sqrt{2}[cPh(y)+sPh(y)]}{2\sqrt{2}} \\
&\quad -\frac{\sqrt{2}[cPh(x)-sPh(x)]\sqrt{2}[cPh(y)-sPh(y)]}{2\sqrt{2}} && \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[cPh(x)cPh(y)+cPh(x)sPh(y)+sPh(x)cPh(y) \\
&\quad +sPh(x)sPh(y)-cPh(x)cPh(y)+cPh(x)sPh(y) \\
&\quad +sPh(x)cPh(y)-sPh(x)sPh(y)] && \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[2cPh(x)sPh(y)+2sPh(x)cPh(y)] && \Rightarrow \\
sPh(x+y) &= \sqrt{2}[sPh(x)cPh(y)+cPh(x)sPh(y)]
\end{aligned}$$

ii.

$$
\begin{aligned}
sPh(x-y) &= \frac{(\alpha)^{x-y}-(\alpha)^{-(x-y)}}{2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{(\alpha)^{x}(\alpha)^{-y}-(\alpha)^{-x}(\alpha)^{y}}{2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}[cPh(x)+sPh(x)]\sqrt{2}[cPh(y)-sPh(y)]}{2\sqrt{2}} \\
&\quad -\frac{\sqrt{2}[cPh(x)-sPh(x)]\sqrt{2}[cPh(y)+sPh(y)]}{2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[cPh(x)cPh(y)-cPh(x)sPh(y)+sPh(x)cPh(y) \\
&\quad -sPh(x)sPh(y)-cPh(x)cPh(y)-cPh(x)sPh(y) \\
&\quad +sPh(x)cPh(y)+sPh(x)sPh(y)] \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[2sPh(x)cPh(y)-2cPh(x)sPh(y)] \qquad \Rightarrow \\
sPh(x-y) &= \sqrt{2}[sPh(x)cPh(y)-cPh(x)sPh(y)]
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
cPh(x+y) &= \frac{(\alpha)^{x+y}+(\alpha)^{-(x+y)}}{2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{(\alpha)^{x}(\alpha)^{y}+(\alpha)^{-x}(\alpha)^{-y}}{2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}[cPh(x)+sPh(x)]\sqrt{1+k}[cPh(y)+sPh(y)]}{2\sqrt{2}} \\
&\quad +\frac{\sqrt{2}[cPh(x)-sPh(x)]\sqrt{2}[cPh(y)-sPh(y)]}{2\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[cPh(x)cPh(y)+cPh(x)sPh(y)+sPh(x)cPh(y) \\
&\quad +sPh(x)sPh(y)+cPh(x)cPh(y)-cPh(x)sPh(y) \\
&\quad -sPh(x)cPh(y)+sPh(x)sPh(y)] \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[2cPh(x)cPh(y)+2sPh(x)sPh(y)] \qquad \Rightarrow \\
cPh(x+y) &= \sqrt{2}[cPh(x)cPh(y)+sPh(x)sPh(y)]
\end{aligned}
$$

$$
\text{iv.}\quad
\begin{aligned}
cPh(x-y) &= \frac{(\alpha)^{x-y}+(\alpha)^{-(x-y)}}{2\sqrt{2}} && \Rightarrow\\
&= \frac{(\alpha)^{x}(\alpha)^{-y}+(\alpha)^{-x}(\alpha)^{y}}{2\sqrt{2}} && \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{2}[cPh(x)+sPh(x)]\sqrt{2}[cPh(y)-sPh(y)]}{2\sqrt{2}}\\
&\quad +\frac{\sqrt{2}[cPh(x)-sPh(x)]\sqrt{2}[cPh(y)+sPh(y)]}{2\sqrt{2}} && \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[cPh(x)cPh(y)-cPh(x)sPh(y)+sPh(x)cPh(y)\\
&\quad -sPh(x)sPh(y)+cPh(x)cPh(y)+cPh(x)sPh(y)\\
&\quad -sPh(x)cPh(y)-sPh(x)sPh(y)] && \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}[2cPh(x)cPh(y)-2sPh(x)sPh(y)] && \Rightarrow\\
cPh(x-y) &= \sqrt{2}[cPh(x)cPh(y)-sPh(x)sPh(y)]
\end{aligned}
$$

.

■

Tomando as demonstrações deste teorema e usando $y = x$ nos casos *i* e *iii*, observa-se o comportamento das funções seno e cosseno hiperbólico de Pell para o dobro de um valor real, como é mostrado no próximo corolário:

Corolário 6.4.1 *(Argumento duplo) Seja $x \in \mathbb{R}$ e as funções seno e cosseno hiperbólico de Pell, valem as identidades:*

i. $sPh(2x) = \sqrt{2}[2sPh(x)cPh(x)]$

ii. $cPh(2x) = \sqrt{2}[(cPh(x))^2 + (sPh(x))^2]$

Demonstração. Utilizando os resultados do Teorema (6.4.3) no caso em que $y = x$ vem em cada caso:

$$
\text{i.}\quad
\begin{aligned}
sPh(2x) &= sPh(x+x) && \Rightarrow\\
&= \sqrt{2}[sPh(x)cPh(x)+cPh(x)sPh(x)] && \Rightarrow\\
sPh(2x) &= \sqrt{2}[2sPh(x)cPh(x)]
\end{aligned}
$$

$$
\text{ii.}\quad
\begin{aligned}
cPh(2x) &= cPh(x+x) && \Rightarrow\\
&= \sqrt{2}[cPh(x)cPh(x)+sPh(x)sPh(x)] && \Rightarrow\\
cPh(2x) &= \sqrt{2}[(cPh(x))^2+(sPh(x))^2]
\end{aligned}
$$

.

■

Corolário 6.4.2 *(Meio Argumento) Seja $x \in \mathbb{R}$ e as funções seno e cosseno hiperbólico de Pell, valem as identidades:*

i. $cPh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{1+cPh(x)\sqrt{2}}}{2}$

ii. $sPh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{-1+cPh(x)\sqrt{2}}}{2}$

Demonstração. Utilizando os resultados do Corolário (6.4.1) bem como o Teorema (6.4.1) tomando o caso em que $\frac{x}{2}$ vem em cada caso:

$$\begin{aligned}
cPh(x) &= \sqrt{2}\left[\left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + \left(sPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right] && \Rightarrow \\
&= \sqrt{2}\left[\left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + \left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{2}\right] && \Rightarrow \\
&= \sqrt{2}\left[2\left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{2}\right] && \Rightarrow \\
&= 2\sqrt{2}\left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} && \Rightarrow
\end{aligned}$$

i.
$$\begin{aligned}
2\sqrt{2}\left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= cPh(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} && \Rightarrow \\
\left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \frac{cPh(x)}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(2)} && \Rightarrow \\
\left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \frac{cPh(x)\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} && \Rightarrow \\
cPh\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+cPh(x)\sqrt{2}}{4}} && \Rightarrow \\
cPh\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\frac{\sqrt{1+cPh(x)\sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned}
\left(sPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \left(cPh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{2} && \Rightarrow \\
&= \frac{1+cPh(x)\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} && \Rightarrow \\
&= \frac{1+cPh(x)\sqrt{2}-2}{4} && \Rightarrow \\
&= \frac{-1+cPh(x)\sqrt{2}}{4} && \Rightarrow \\
sPh\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{-1+cPh(x)\sqrt{2}}{4}} && \Rightarrow \\
sPh\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\frac{\sqrt{-1+cPh(x)\sqrt{2}}}{2}
\end{aligned}$$

.

■

É possível também realizar um estudo similar, mas com as funções hiperbólicas de k-Pell, assunto da próxima seção.

6.4.2 Funções hiperbólicas de *k*-Pell

Catarino (2018, p. 64) define as funções hiperbólicas de *k*-Pell, como segue:

Definição 6.4.2 *A função seno hiperbólico de k-Pell é definida por*

$$sP_kh(x) = \frac{(r_1)^x - (r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}}$$

enquanto a função cosseno hiperbólico de k-Pell é definida por

$$cP_kh(x) = \frac{(r_1)^x + (r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}}$$

sendo $r_1 = 1+\sqrt{1+k}$ a raiz positiva da equação característica (3.2) da recorrência da sequência de k-Pell.

É natural observar que no caso particular em que $k = 1$, tem-se as funções hiperbólicas de Pell, tanto para seno quanto para cosseno, objeto de estudo da seção anterior. E como extensão, nesta seção são apresentadas as principais propriedades das funções hiperbólicas de *k*-Pell de forma semelhante às propriedades da seção anterior.

Teorema 6.4.4 *(Teorema de Pitágoras) Sejam $cP_kh(x)$ e $sP_kh(x)$ as funções cosseno e seno hiperbólico de k-Pell. Para cada $x \in \mathbb{R}$, vale a relação:*

$$[cP_kh(x)]^2 - [sP_kh(x)]^2 = \frac{1}{1+k}$$

Demonstração. Usando a definição (6.4.2) temos:

$$\begin{aligned}
[cP_kh(x)]^2 - [sP_kh(x)]^2 &= \left[\frac{(r_1)^x + (r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}}\right]^2 - \left[\frac{(r_1)^x - (r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}}\right]^2 && \Rightarrow \\
&= \frac{(r_1)^{2x} + 2 + (r_1)^{-2x}}{4(1+k)} - \frac{(r_1)^{2x} - 2 + (r_1)^{-2x}}{4(1+k)} && \Rightarrow \\
&= \frac{4}{4(1+k)} = \frac{1}{1+k}
\end{aligned}$$

■

Antes de enunciar o próximo teorema, existe uma proposição bastante útil para a demonstração do mesmo, como segue:

Proposição 6.4.5 *A soma e a diferença entre $cP_kh(x)$ e $sP_kh(x)$ é dada por:*

i. $cP_kh(x) + sP_kh(x)x = \dfrac{(r_1)^x}{\sqrt{1+k}}$

ii. $cP_kh(x) - sP_kh(x) = \dfrac{(r_1)^{-x}}{\sqrt{1+k}}$

Demonstração. Para comprovar esta proposição será utilizado a Definição (6.4.2):

$$\text{i. } cP_kh(x) + sP_kh(x)x = \frac{(r_1)^x + (r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}} + \frac{(r_1)^x - (r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}} = \frac{2(r_1)^x}{2\sqrt{1+k}} = \frac{(r_1)^x}{\sqrt{1+k}}$$

$$\text{ii. } cP_kh(x) - sP_kh(x)x = \frac{(r_1)^x + (r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}} - \frac{(r_1)^x - (r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}} = \frac{2(r_1)^{-x}}{2\sqrt{1+k}} = \frac{(r_1)^{-x}}{\sqrt{1+k}}$$

■

Bem como também temos as relações para soma e diferença de valores nos reais para as funções seno e cosseno hiperbólico de k-Pell, como segue no próximo teorema:

Teorema 6.4.6 *(Soma e diferença) Sejam $sP_kh(x)$ e $cP_kh(x)$ funções hiperbólicas de k-Pell e tomando $x, y \in \mathbb{R}$ e ainda $k \in \mathbb{R}^+$, temos as identidades:*

i. $sP_kh(x+y) = \sqrt{1+k}[sP_kh(x)cP_kh(y) + cP_kh(x)sP_kh(y)]$

ii. $sP_kh(x-y) = \sqrt{1+k}[sP_kh(x)cP_kh(y) - cP_kh(x)sP_kh(y)]$

iii. $cP_kh(x+y) = \sqrt{1+k}[cP_kh(x)cP_kh(y) + sP_kh(x)sP_kh(y)]$

iv. $cP_kh(x-y) = \sqrt{1+k}[cP_kh(x)cP_kh(y) - sP_kh(x)sP_kh(y)]$

.

Demonstração. Na demonstração desse teorema são utilizados tanto a Definição (6.4.2) quanto o resultado obtido na Proposição (6.4.5), em cada caso, como segue:

$$\text{i.} \quad \begin{aligned}
sP_kh(x+y) &= \frac{(r_1)^{x+y} - (r_1)^{-(x+y)}}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{(r_1)^x(r_1)^y - (r_1)^{-x}(r_1)^{-y}}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{1+k}[cP_kh(x) + sP_kh(x)]\sqrt{1+k}[cP_kh(y) + sP_kh(y)]}{2\sqrt{1+k}} \\
&\quad - \frac{\sqrt{1+k}[cP_kh(x) - sP_kh(x)]\sqrt{1+k}[cP_kh(y) - sP_kh(y)]}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{1+k}}{2}[cP_kh(x)cP_kh(y) + cP_kh(x)sP_kh(y) + sP_kh(x)cP_kh(y) \\
&\quad + sP_kh(x)sP_kh(y) - cP_kh(x)cP_kh(y) + cP_kh(x)sP_kh(y) \\
&\quad + sP_kh(x)cP_kh(y) - sP_kh(x)sP_kh(y)] \quad \Rightarrow \\
&= \frac{\sqrt{1+k}}{2}[2cP_kh(x)sP_kh(y) + 2sP_kh(x)cP_kh(y)] \quad \Rightarrow \\
sP_kh(x+y) &= \sqrt{1+k}[sP_kh(x)cP_kh(y) + cP_kh(x)sP_kh(y)]
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
sP_kh(x-y) &= \frac{(r_1)^{x-y}-(r_1)^{-(x-y)}}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{(r_1)^{x}(r_1)^{-y}-(r_1)^{-x}(r_1)^{y}}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}[cP_kh(x)+sP_kh(x)]\sqrt{1+k}[cP_kh(y)-sP_kh(y)]}{2\sqrt{1+k}}\\
&\quad -\frac{\sqrt{1+k}[cP_kh(x)-sP_kh(x)]\sqrt{1+k}[cP_kh(y)+sP_kh(y)]}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}}{2}[cP_kh(x)cP_kh(y)-cP_kh(x)sP_kh(y)+sP_kh(x)cP_kh(y)\\
&\quad -sP_kh(x)sP_kh(y)-cP_kh(x)cP_kh(y)-cP_kh(x)sP_kh(y)\\
&\quad +sP_kh(x)cP_kh(y)+sP_kh(x)sP_kh(y)] \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}}{2}[2sP_kh(x)cP_kh(y)-2cP_kh(x)sP_kh(y)] \quad \Rightarrow\\
sP_kh(x-y) &= \sqrt{1+k}[sP_kh(x)cP_kh(y)-cP_kh(x)sP_kh(y)]
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
cP_kh(x+y) &= \frac{(r_1)^{x+y}+(r_1)^{-(x+y)}}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{(r_1)^{x}(r_1)^{y}+(r_1)^{-x}(r_1)^{-y}}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}[cP_kh(x)+sP_kh(x)]\sqrt{1+k}[cP_kh(y)+sP_kh(y)]}{2\sqrt{1+k}}\\
&\quad +\frac{\sqrt{1+k}[cP_kh(x)-sP_kh(x)]\sqrt{1+k}[cP_kh(y)-sP_kh(y)]}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}}{2}[cP_kh(x)cP_kh(y)+cP_kh(x)sP_kh(y)+sP_kh(x)cP_kh(y)\\
&\quad +sP_kh(x)sP_kh(y)+cP_kh(x)cP_kh(y)-cP_kh(x)sP_kh(y)\\
&\quad -sP_kh(x)cP_kh(y)+sP_kh(x)sP_kh(y)] \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}}{2}[2cP_kh(x)cP_kh(y)+2sP_kh(x)sP_kh(y)] \quad \Rightarrow\\
cP_kh(x+y) &= \sqrt{1+k}[cP_kh(x)cP_kh(y)+sP_kh(x)sP_kh(y)]
\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}
cP_kh(x-y) &= \frac{(r_1)^{x-y}+(r_1)^{-(x-y)}}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{(r_1)^{x}(r_1)^{-y}+(r_1)^{-x}(r_1)^{y}}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}[cP_kh(x)+sP_kh(x)]\sqrt{1+k}[cP_kh(y)-sP_kh(y)]}{2\sqrt{1+k}}\\
&\quad +\frac{\sqrt{1+k}[cP_kh(x)-sP_kh(x)]\sqrt{1+k}[cP_kh(y)+sP_kh(y)]}{2\sqrt{1+k}} \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}}{2}[cP_kh(x)cP_kh(y)-cP_kh(x)sP_kh(y)+sP_kh(x)cP_kh(y)\\
&\quad -sP_kh(x)sP_kh(y)+cP_kh(x)cP_kh(y)+cP_kh(x)sP_kh(y)\\
&\quad -sP_kh(x)cP_kh(y)-sP_kh(x)sP_kh(y)] \quad \Rightarrow\\
&= \frac{\sqrt{1+k}}{2}[2cP_kh(x)cP_kh(y)-2sP_kh(x)sP_kh(y)] \quad \Rightarrow\\
cP_kh(x-y) &= \sqrt{1+k}[cP_kh(x)cP_kh(y)-sP_kh(x)sP_kh(y)]
\end{aligned}$$

.

$\blacksquare$

Tomando as demonstrações deste teorema e usando $y = x$ nos casos i e iii, observa-se o comportamento das funções seno e cosseno hiperbólico de k-Pell para o dobro de um valor real, como é mostrado no próximo corolário:

Corolário 6.4.3 *(Argumento duplo) Seja $x \in \mathbb{R}$ e as funções seno e cosseno hiperbólico de k-Pell, valem as identidades:*

i. $sP_kh(2x) = \sqrt{1+k}[2sP_kh(x)cP_kh(x)]$

ii. $cP_kh(2x) = \sqrt{1+k}[(cP_kh(x))^2 + (sP_kh(x))^2]$

Demonstração. Utilizando os resultados do Teorema (6.4.6) no caso em que $y = x$ vem em cada caso:

$$\text{i.} \quad \begin{array}{rcll} sP_kh(2x) & = & sP_kh(x+x) & \Rightarrow \\ & = & \sqrt{1+k}[sP_kh(x)cP_kh(x) + cP_kh(x)sP_kh(x)] & \Rightarrow \\ sP_kh(2x) & = & \sqrt{1+k}[2sP_kh(x)cP_kh(x)] & \end{array}$$

$$\text{ii.} \quad \begin{array}{rcll} cP_kh(2x) & = & cP_kh(x+x) & \Rightarrow \\ & = & \sqrt{1+k}[cP_kh(x)cP_kh(x) + sP_kh(x)sP_kh(x)] & \Rightarrow \\ cP_kh(2x) & = & \sqrt{1+k}[(cP_kh(x))^2 + (sP_kh(x))^2] & \end{array}$$

.

$\blacksquare$

Corolário 6.4.4 *(Meio Argumento) Seja $x \in \mathbb{R}$ e as funções seno e cosseno hiperbólico de k-Pell, valem as identidades:*

i. $cP_kh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cP_kh(x)\sqrt{1+k}}{2(1+k)}}$

ii. $sP_kh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{-1+cP_kh(x)\sqrt{1+k}}{2(1+k)}}$

Demonstração. Utilizando os resultados do Corolário (6.4.3) bem como o Teorema (6.4.4) tomando o caso em que $\frac{x}{2}$ vem em cada caso:

$$
\begin{aligned}
cP_kh(x) &= \sqrt{1+k}\left[\left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2+\left(sP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right] && \Rightarrow\\
&= \sqrt{1+k}\left[\left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2+\left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-\frac{1}{1+k}\right] && \Rightarrow\\
&= \sqrt{1+k}\left[2\left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-\frac{1}{1+k}\right] && \Rightarrow\\
&= 2\sqrt{1+k}\left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-\frac{\sqrt{1+k}}{1+k} && \Rightarrow
\end{aligned}
$$

i.

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{1+k}\left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= cP_kh(x)+\frac{\sqrt{1+k}}{1+k} && \Rightarrow\\
\left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \frac{cP_kh(x)}{2\sqrt{1+k}}+\frac{\sqrt{1+k}}{2\sqrt{1+k}(1+k)} && \Rightarrow\\
\left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \frac{cP_kh(x)\sqrt{1+k}}{2(1+k)}+\frac{1}{2(1+k)} && \Rightarrow\\
cP_kh\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+cP_kh(x)\sqrt{1+k}}{2(1+k)}}
\end{aligned}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
\left(sP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \left(cP_kh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-\frac{1}{1+k} && \Rightarrow\\
&= \frac{1+cP_kh(x)\sqrt{1+k}}{2(1+k)}-\frac{1}{1+k} && \Rightarrow\\
&= \frac{1+cP_kh(x)\sqrt{1+k}-2}{2(1+k)} && \Rightarrow\\
&= \frac{-1+cP_kh(x)\sqrt{1+k}}{2(1+k)} && \Rightarrow\\
sP_kh\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{-1+cP_kh(x)\sqrt{1+k}}{2(1+k)}}
\end{aligned}
$$

.

■

6.5 NÚMEROS QUATÉRNIOS

A partir dos estudos de Hamilton apresentados no Apêndice (D) sobre números quatérnios, são desenvolvidas abordagens para a sequência de Pell e de k-Pell, como são mostradas nas próximas seções.

6.5.1 Funções quatérnias hiperbólicas de Pell

As funções quatérnias hiperbólicas de Pell são definidas como seguem:

Definição 6.5.1 *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{H}$ um quatérnio, a função seno hiperbólico quatérnio de Pell para q é definida por*

$$sPh(x)q = sPh(x) + sPh(x+1)i + sPh(x+2)j + sPh(x+3)k$$

enquanto a função cosseno hiperbólico quatérnio de Pell para q é definida por

$$cPh(x)q = cPh(x) + cPh(x+1)i + cPh(x+2)j + cPh(x+3)k$$

sendo $sPh(x)$ e $cPh(x)$ as funções hiperbólicas de Pell apresentadas na Definição (6.4.1).

É possível a partir desta definição apresentar resultados importantes como mostram os dois próximos teoremas:

Teorema 6.5.1 *Sejam $sPh(x)q$ e $cPh(x)q$ funções hiperbólicas quatérnias de Pell e tomando $x \in \mathbb{R}$, temos as identidades:*

i. $sPh(x+1)q = \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] cPh(x)q + sPh(x-1)q$

ii. $cPh(x+1)q = \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] sPh(x)q + cPh(x-1)q$

iii. $sPh(x+2)q = \left[(\alpha)^{2} + (\alpha)^{-2}\right] sPh(x)q - sPh(x-2)q$

iv. $cPh(x+2)q = \left[(\alpha)^{2} + (\alpha)^{-2}\right] cPh(x)q - cPh(x-2)q$

.

Demonstração. Na demonstração desse teorema são utilizadas as Definições (6.4.1) e (6.5.1), em cada caso, como segue:

i.

$$\begin{aligned}
sPh(x+1)q - sPh(x-1)q &= (sPh(x+1) - sPh(x-1)) \\
&\quad + (sPh(x+2) - sPh(x))i \\
&\quad + (sPh(x+3) - sPh(x+1))j \\
&\quad + (sPh(x+4) - sPh(x+2))k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] cPk(x) + \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] cPk(x+1)i \\
&\quad + \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] cPk(x+2)j \\
&\quad + \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] cPk(x+3)k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] cPh(x)q \qquad \Rightarrow \\
sPh(x+1)q &= \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] cPh(x)q + sPh(x-1)q
\end{aligned}$$

ii.

$$
\begin{aligned}
cPh(x+1)q - cPh(x-1)q &= (cPh(x+1) - cPh(x-1)) \\
&\quad +(cPh(x+2) - cPh(x))i \\
&\quad +(cPh(x+3) - cPh(x+1))j \\
&\quad +(cPh(x+4) - cPh(x+2))k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] sPk(x) + \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] sPk(x+1)i \\
&\quad + \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] sPk(x+2)j \\
&\quad + \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] sPk(x+3)k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] sPh(x)q \qquad \Rightarrow \\
cPh(x+1)q &= \left[\alpha - (\alpha)^{-1}\right] sPh(x)q + cPh(x-1)q
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
sPh(x+2)q + sPh(x-2)q &= (sPh(x+2) + sPh(x-2)) \\
&\quad +(sPh(x+3) + sPh(x-1))i \\
&\quad +(sPh(x+4) + sPh(x))j \\
&\quad +(sPh(x+5) + sPh(x+1))k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] sP_hk(x) \\
&\quad + \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] sPk(x+1)i \\
&\quad + \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] sPk(x+2)j \\
&\quad + \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] sPk(x+3)k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] sPh(x)q \qquad \Rightarrow \\
sPh(x+2)q &= \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] sPh(x)q - sPh(x-1)q
\end{aligned}
$$

iv.

$$
\begin{aligned}
cPh(x+2)q + cPh(x-2)q &= (cPh(x+2) + cPh(x-2)) \\
&\quad +(cPh(x+3) + cPh(x-1))i \\
&\quad +(cPh(x+4) + cPh(x))j \\
&\quad +(cPh(x+5) + cPh(x+1))k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] cPk(x) \\
&\quad + \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] cPk(x+1)i \\
&\quad + \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] cPk(x+2)j \\
&\quad + \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] cPk(x+3)k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] cPh(x)q \qquad \Rightarrow \\
cPh(x+2)q &= \left[(\alpha)^2 + (\alpha)^{-2}\right] cPh(x)q - cPh(x-1)q
\end{aligned}
$$

.

■

A partir desse teorema é possível extender tais resultados para qualquer $n \in \mathbb{N}$ como segue tanto na função quatérnia hiperbólica seno quanto para a cosseno de Pell:

$$sPh(x+n)q = sPh(x+n) + sPh(x+n+1)i + sPh(x+n+2)j + sPh(x+n+3)k$$

e

$$cPh(x+n)q = cPh(x+n) + cPh(x+n+1)i + cPh(x+n+2)j + cPh(x+n+3)k$$

sendo $sPh(x)$ e $cPh(x)$ as funções hiperbólicas de Pell.

E utilizando ainda o conceito de norma de um número quatérnio, temos os próximo teorema:

Teorema 6.5.2 *Sejam $sPh(x)q$ e $cPh(x)q$ funções hiperbólicas quatérnias de Pell e tomando $x \in \mathbb{R}$, temos as identidades para as normas:*

$$i.\ ||sPh(x)q||^2 = \frac{\left((\alpha)^2+1\right)\left((\alpha)^4+1\right)\left(2\sqrt{2}sPh(2x)+(\alpha)^{-2x}\left(1+(\alpha)^{-6}\right)\right)-8}{8}$$

$$ii.\ ||cPh(x)q||^2 = \frac{\left((\alpha)^2+1\right)\left((\alpha)^4+1\right)\left(2\sqrt{2}cPh(2x)+(\alpha)^{-2x}\left((\alpha)^{-6}-1\right)\right)+8}{8}$$

.

Demonstração. Na demonstração desse teorema são utilizadas o conceito de norma de um número quatérnio bem como a Definição (6.4.2), em cada caso, como segue:

$$\text{i.}\quad \begin{aligned} ||sPh(x)q||^2 &= (sPh(x))^2 + (sPh(x+1))^2 \\ &\quad +(sPh(x+2))^2 + (sPh(x+3))^2 \qquad \Rightarrow \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{2})^2}\left[(\alpha)^{2x}\left(\frac{(\alpha)^8-1}{(\alpha)^2-1}\right)\right. \\ &\quad \left. +(\alpha)^{2x}\left(\frac{(\alpha)^8-1}{(\alpha)^2-1}-8\right]\right. \qquad \Rightarrow \\ ||sPh(x)q||^2 &= \frac{\left((\alpha)^2+1\right)\left((\alpha)^4+1\right)\left(2\sqrt{2}sPh(2x)+(\alpha)^{-2x}\left(1+(\alpha)^{-6}\right)\right)-8}{8} \end{aligned}$$

$$\text{ii.}\quad \begin{aligned} ||cPh(x)q||^2 &= (cPh(x))^2 + (cPh(x+1))^2 \\ &\quad +(cPh(x+2))^2 + (cPh(x+3))^2 \qquad \Rightarrow \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{2})^2}\left[(\alpha)^{2x}\left(\frac{(\alpha)^8-1}{(\alpha)^2-1}\right)\right. \\ &\quad \left. +(\alpha)^{2x}\left(\frac{(\alpha)^8-1}{(\alpha)^2-1}-8\right]\right. \qquad \Rightarrow \\ ||sPh(x)q||^2 &= \frac{\left((\alpha)^2+1\right)\left((\alpha)^4+1\right)\left(2\sqrt{2}sPh(2x)+(\alpha)^{-2x}\left(1+(\alpha)^{-6}\right)\right)-8}{8} \end{aligned}$$

.

■

6.5.2 Funções quatérnias hiperbólicas de *k*-Pell

Catarino (2018, p. 66) define também as funções quatérnias hiperbólicas de *k*-Pell, como segue:

Definição 6.5.2 *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{H}$ um quatérnio, a função seno hiperbólico quatérnio de k-Pell para q é definida por*

$$sP_kh(x)q = sP_kh(x) + sP_kh(x+1)i + sP_kh(x+2)j + sP_kh(x+3)k$$

enquanto a função cosseno hiperbólico quatérnio de k-Pell para q é definida por

$$cP_kh(x)q = cP_kh(x) + cP_kh(x+1)i + cP_kh(x+2)j + cP_kh(x+3)k$$

sendo $sP_kh(x)$ e $cP_kh(x)$ as funções hiperbólicas de k-Pell apresentadas na Definição (6.4.2).

É possível a partir desta definição apresentar resultados importantes como mostram os dois próximos teoremas:

Teorema 6.5.3 *Sejam $sP_kh(x)q$ e $cP_kh(x)q$ funções hiperbólicas quatérnias de k-Pell e tomando $x \in \mathbb{R}$ e ainda $k \in \mathbb{R}^+$, temos as identidades:*

i. $sP_kh(x+1)q = \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_kh(x)q + sP_kh(x-1)q$

ii. $cP_kh(x+1)q = \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_kh(x)q + cP_kh(x-1)q$

iii. $sP_kh(x+2)q = \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_kh(x)q - sP_kh(x-2)q$

iv. $cP_kh(x+2)q = \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] cP_kh(x)q - cP_kh(x-2)q$

.

Demonstração. Na demonstração desse teorema são utilizadas as Definições (6.4.2) e (6.5.1), em cada caso, como segue:

i.

$$\begin{aligned}
sP_kh(x+1)q - sP_kh(x-1)q &= (sP_kh(x+1) - sP_kh(x-1)) \\
&\quad +(sP_kh(x+2) - sP_kh(x))i \\
&\quad +(sP_kh(x+3) - sP_kh(x+1))j \\
&\quad +(sP_kh(x+4) - sP_kh(x+2))k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_hk(x) + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_hk(x+1)i \\
&\quad + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_hk(x+2)j \\
&\quad + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_hk(x+3)k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_kh(x)q \qquad \Rightarrow \\
sP_kh(x+1)q &= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_kh(x)q + sP_kh(x-1)q
\end{aligned}$$

ii.

$$
\begin{aligned}
cP_kh(x+1)q - cP_kh(x-1)q &= (cP_kh(x+1) - cP_kh(x-1)) \\
&\quad +(cP_kh(x+2) - cP_kh(x))i \\
&\quad +(cP_kh(x+3) - cP_kh(x+1))j \\
&\quad +(cP_kh(x+4) - cP_kh(x+2))k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_hk(x) + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_hk(x+1)i \\
&\quad + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_hk(x+2)j \\
&\quad + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_hk(x+3)k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_kh(x)q \qquad \Rightarrow \\
cP_kh(x+1)q &= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_kh(x)q + cP_kh(x-1)q
\end{aligned}
$$

iii.

$$
\begin{aligned}
sP_kh(x+2)q + sP_kh(x-2)q &= (sP_kh(x+2) + sP_kh(x-2)) \\
&\quad +(sP_kh(x+3) + sP_kh(x-1))i \\
&\quad +(sP_kh(x+4) + sP_kh(x))j \\
&\quad +(sP_kh(x+5) + sP_kh(x+1))k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_hk(x) \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_hk(x+1)i \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_hk(x+2)j \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_hk(x+3)k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_kh(x)q \qquad \Rightarrow \\
sP_kh(x+2)q &= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_kh(x)q - sP_kh(x-1)q
\end{aligned}
$$

iv.

$$
\begin{aligned}
cP_kh(x+2)q + cP_kh(x-2)q &= (cP_kh(x+2) + cP_kh(x-2)) \\
&\quad +(cP_kh(x+3) + cP_kh(x-1))i \\
&\quad +(cP_kh(x+4) + cP_kh(x))j \\
&\quad +(cP_kh(x+5) + cP_kh(x+1))k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] cP_hk(x) \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] cP_hk(x+1)i \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] cP_hk(x+2)j \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] cP_hk(x+3)k \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] cP_kh(x)q \qquad \Rightarrow \\
cP_kh(x+2)q &= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] cP_kh(x)q - cP_kh(x-1)q
\end{aligned}
$$

.

■

A partir desse teorema é possível extender tais resultados para qualquer $n \in \mathbb{N}$ como segue tanto na função quatérnia hiperbólica seno quanto para a cosseno de k-Pell:

$$sP_kh(x+n)q = sP_kh(x+n) + sP_kh(x+n+1)i + sP_kh(x+n+2)j + sP_kh(x+n+3)k$$

e

$$cP_kh(x+n)q = cP_kh(x+n) + cP_kh(x+n+1)i + cP_kh(x+n+2)j + cP_kh(x+n+3)k$$

sendo $sP_kh(x)$ e $cP_kh(x)$ as funções hiperbólicas de k-Pell.

E utilizando ainda o conceito de norma de um número quatérnio, temos os próximo teorema:

Teorema 6.5.4 *Sejam $sP_kh(x)q$ e $cP_kh(x)q$ funções hiperbólicas quatérnias de k-Pell e tomando $x \in \mathbb{R}$ e ainda $k \in \mathbb{R}^+$, temos as identidades para as normas:*

i. $||sP_kh(x)q||^2 = \dfrac{\left((r_1)^2+1\right)\left((r_1)^4+1\right)\left(2\sqrt{1+k}sP_kh(2x)+(r_1)^{-2x}\left(1+(r_1)^{-6}\right)\right)-8}{4(1+k)}$

ii. $||cP_kh(x)q||^2 = \dfrac{\left((r_1)^2+1\right)\left((r_1)^4+1\right)\left(2\sqrt{1+k}cP_kh(2x)+(r_1)^{-2x}\left((r_1)^{-6}-1\right)\right)+8}{4(1+k)}$

.

Demonstração. Na demonstração desse teorema são utilizadas o conceito de norma de um número quatérnio bem como a Definição (6.4.2), em cada caso, como segue:

i.
$$\begin{aligned}
||sP_kh(x)q||^2 &= (sP_kh(x))^2 + (sP_kh(x+1))^2 \\
&\quad + (sP_kh(x+2))^2 + (sP_kh(x+3))^2 \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{1+k})^2}\left[(r_1)^{2x}\left(\frac{(r_1)^8-1}{(r_1)^2-1}\right)\right. \\
&\quad \left. +(r_1)^{2x}\left(\frac{(r_1)^8-1}{(r_1)^2-1}-8\right]\right. \qquad \Rightarrow \\
||sP_kh(x)q||^2 &= \frac{\left((r_1)^2+1\right)\left((r_1)^4+1\right)\left(2\sqrt{1+k}sP_kh(2x)+(r_1)^{-2x}\left(1+(r_1)^{-6}\right)\right)-8}{4(1+k)}
\end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned}
||cP_kh(x)q||^2 &= (cP_kh(x))^2 + (cP_kh(x+1))^2 \\
&\quad + (cP_kh(x+2))^2 + (cP_kh(x+3))^2 \qquad \Rightarrow \\
&= \frac{1}{(2\sqrt{1+k})^2}\left[(r_1)^{2x}\left(\frac{(r_1)^8-1}{(r_1)^2-1}\right)\right. \\
&\quad \left. +(r_1)^{2x}\left(\frac{(r_1)^8-1}{(r_1)^2-1}-8\right]\right. \qquad \Rightarrow \\
||sP_kh(x)q||^2 &= \frac{\left((r_1)^2+1\right)\left((r_1)^4+1\right)\left(2\sqrt{1+k}sP_kh(2x)+(r_1)^{-2x}\left(1+(r_1)^{-6}\right)\right)-8}{4(1+k)}
\end{aligned}$$

.

■

6.6 NÚMEROS BICOMPLEXOS

A partir dos elementos obtidos no Apêndice (E) sobre a álgebra dos números bicomplexos e das funções hiperbólicas, podemos implementar os conceitos acerca das sequência de Pell e de k-Pell para as funções bicomplexas hiperbólicas de Pell e de k-Pell, assunto que será abordado nas próximas seções.

6.6.1 Funções bicomplexas hiperbólicas de *k*-Pell

As funções bicomplexas hiperbólicas de k-Pell são definidas como seguem:

Definição 6.6.1 *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{BC}$ um bicomplexo, a função seno hiperbólico bicomplexo de k-Pell para q é definida por*

$$sP_kh(x)q = sP_kh(x) + sP_kh(x+1)i + sP_kh(x+2)j + sP_kh(x+3)ij$$

enquanto a função cosseno hiperbólico bicomplexo de k-Pell para q é definida por

$$cP_kh(x)q = cP_kh(x) + cP_kh(x+1)i + cP_kh(x+2)j + cP_kh(x+3)ij$$

sendo $sP_kh(x)$ e $cP_kh(x)$ as funções hiperbólicas de k-Pell apresentadas na Definição (6.4.2).

É possível a partir desta definição apresentar resultados importantes como mostram os dois próximos teoremas:

Teorema 6.6.1 *Sejam $sP_kh(x)q$ e $cP_kh(x)q$ funções hiperbólicas bicomplexas de k-Pell e tomando $x \in \mathbb{R}$ e ainda $k \in \mathbb{R}^+$, temos as identidades:*

i. $sP_kh(x+1)q = \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_kh(x)q + sP_kh(x-1)q$

ii. $cP_kh(x+1)q = \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_kh(x)q + cP_kh(x-1)q$

iii. $sP_kh(x+2)q = \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_kh(x)q - sP_kh(x-2)q$

iv. $cP_kh(x+2)q = \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] cP_kh(x)q - cP_kh(x-2)q$

.

Demonstração. Na demonstração desse teorema são utilizadas as Definições (6.4.2) e (6.5.1), em cada caso, como segue:

i.

$$\begin{aligned}
sP_kh(x+1)q - sP_kh(x-1)q &= (sP_kh(x+1) - sP_kh(x-1)) \\
&\quad +(sP_kh(x+2) - sP_kh(x))i \\
&\quad +(sP_kh(x+3) - sP_kh(x+1))j \\
&\quad +(sP_kh(x+4) - sP_kh(x+2))ij \qquad \Rightarrow \\
&= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_hk(x) + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_hk(x+1)i \\
&\quad + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_hk(x+2)j \\
&\quad + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_hk(x+3)ij \qquad \Rightarrow \\
&= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_kh(x)q \qquad \Rightarrow \\
sP_kh(x+1)q &= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] cP_kh(x)q + sP_kh(x-1)q
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
cP_kh(x+1)q - cP_kh(x-1)q &= (cP_kh(x+1) - cP_kh(x-1)) \\
&\quad +(cP_kh(x+2) - cP_kh(x))i \\
&\quad +(cP_kh(x+3) - cP_kh(x+1))j \\
&\quad +(cP_kh(x+4) - cP_kh(x+2))ij \qquad \Rightarrow \\
&= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_hk(x) + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_hk(x+1)i \\
&\quad + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_hk(x+2)j \\
&\quad + \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_hk(x+3)ij \qquad \Rightarrow \\
&= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_kh(x)q \qquad \Rightarrow \\
cP_kh(x+1)q &= \left[r_1 - (r_1)^{-1}\right] sP_kh(x)q + cP_kh(x-1)q
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
sP_kh(x+2)q + sP_kh(x-2)q &= (sP_kh(x+2) + sP_kh(x-2)) \\
&\quad +(sP_kh(x+3) + sP_kh(x-1))i \\
&\quad +(sP_kh(x+4) + sP_kh(x))j \\
&\quad +(sP_kh(x+5) + sP_kh(x+1))ij \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_hk(x) \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_hk(x+1)i \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_hk(x+2)j \\
&\quad + \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_hk(x+3)ij \qquad \Rightarrow \\
&= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_kh(x)q \qquad \Rightarrow \\
sP_kh(x+2)q &= \left[(r_1)^2 + (r_1)^{-2}\right] sP_kh(x)q - sP_kh(x-1)q
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rcl}
cP_kh(x+2)q+cP_kh(x-2)q & = & (cP_kh(x+2)+cP_kh(x-2)) \\
& & +(cP_kh(x+3)+cP_kh(x-1))i \\
& & +(cP_kh(x+4)+cP_kh(x))j \\
& & +(cP_kh(x+5)+cP_kh(x+1))ij \qquad \Rightarrow \\
& = & \left[(r_1)^2+(r_1)^{-2}\right] cP_hk(x) \\
\text{iv.} & & +\left[(r_1)^2+(r_1)^{-2}\right] cP_hk(x+1)i \\
& & +\left[(r_1)^2+(r_1)^{-2}\right] cP_hk(x+2)j \\
& & +\left[(r_1)^2+(r_1)^{-2}\right] cP_hk(x+3)ij \qquad \Rightarrow \\
& = & \left[(r_1)^2+(r_1)^{-2}\right] cP_kh(x)q \qquad \Rightarrow \\
cP_kh(x+2)q & = & \left[(r_1)^2+(r_1)^{-2}\right] cP_kh(x)q-cP_kh(x-1)q
\end{array}
$$

.

■

A partir desse teorema é possível extender tais resultados para qualquer $n \in \mathbb{N}$ como segue tanto na função bicomplexa hiperbólica seno quanto para a cosseno de k-Pell:

$$sP_kh(x+n)q = sP_kh(x+n)+sP_kh(x+n+1)i+sP_kh(x+n+2)j+sP_kh(x+n+3)ij$$

e

$$cP_kh(x+n)q = cP_kh(x+n)+cP_kh(x+n+1)i+cP_kh(x+n+2)j+cP_kh(x+n+3)ij$$

sendo $sP_kh(x)$ e $cP_kh(x)$ as funções hiperbólicas de k-Pell.

E utilizando ainda o conceito de norma de um número bicomplexo, temos os próximo teorema:

Teorema 6.6.2 *Sejam $sP_kh(x)q$ e $cP_kh(x)q$ funções hiperbólicas bicomplexas de k-Pell e tomando $x \in \mathbb{R}$ e ainda $k \in \mathbb{R}^+$, temos as identidades para as normas:*

i. $$||sP_kh(x)q||^2 = \frac{\left((r_1)^2+1\right)\left((r_1)^4+1\right)\left(2\sqrt{1+k}sP_kh(2x)+(r_1)^{-2x}\left(1+(r_1)^{-6}\right)\right)-8}{4(1+k)}$$

ii. $$||cP_kh(x)q||^2 = \frac{\left((r_1)^2+1\right)\left((r_1)^4+1\right)\left(2\sqrt{1+k}cP_kh(2x)+(r_1)^{-2x}\left((r_1)^{-6}-1\right)\right)+8}{4(1+k)}$$

.

Demonstração. Na demonstração desse teorema são utilizadas o conceito de norma de um número bicomplexo bem como a Definição (6.4.2), em cada caso, como segue:

$$
\begin{array}{lrcl}
 & ||sP_kh(x)q||^2 & = & (sP_kh(x))^2+(sP_kh(x+1))^2 \\
 & & & +(sP_kh(x+2))^2+(sP_kh(x+3))^2 \qquad \Rightarrow \\
\text{i.} & & = & \dfrac{1}{(2\sqrt{1+k})^2}\left[(r_1)^{2x}\left(\dfrac{(r_1)^8-1}{(r_1)^2-1}\right)\right. \\
 & & & \left.+(r_1)^{2x}\left(\dfrac{(r_1)^8-1}{(r_1)^2-1}-8\right]\right. \qquad \Rightarrow \\
 & ||sP_kh(x)q||^2 & = & \dfrac{\left((r_1)^2+1\right)\left((r_1)^4+1\right)\left(2\sqrt{1+k}sP_kh(2x)+(r_1)^{-2x}\left(1+(r_1)^{-6}\right)\right)-8}{4(1+k)} \\
 & ||cP_kh(x)q||^2 & = & (cP_kh(x))^2+(cP_kh(x+1))^2 \\
 & & & +(cP_kh(x+2))^2+(cP_kh(x+3))^2 \qquad \Rightarrow \\
\text{ii.} & & = & \dfrac{1}{(2\sqrt{1+k})^2}\left[(r_1)^{2x}\left(\dfrac{(r_1)^8-1}{(r_1)^2-1}\right)\right. \\
 & & & \left.+(r_1)^{2x}\left(\dfrac{(r_1)^8-1}{(r_1)^2-1}-8\right]\right. \qquad \Rightarrow \\
 & ||sP_kh(x)q||^2 & = & \dfrac{\left((r_1)^2+1\right)\left((r_1)^4+1\right)\left(2\sqrt{1+k}sP_kh(2x)+(r_1)^{-2x}\left(1+(r_1)^{-6}\right)\right)-8}{4(1+k)}
\end{array}
$$

.

■

Dessa forma, foi possível encontrar alguns resultados inéditos em se tratando das funções bicomplexas hiperbólicas de k-Pell, como os anteriores. Além desses resultados é possível ainda apresentar alguns resultados aplicados em software computacional, utilizando o Maple, que será abordado na próxima seção.

6.7 APLICAÇÕES COM O MAPLE

6.7.1 Sequência Gaussiana

Segundo o que estabelecemos nas seções predecessoras, poderemos considerar a seguinte matriz representacional a partir do trabalho de Ercolano (1979), ao considerar a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e, já foi apresentado que $P^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$.

Agora, com origem no trabalho de Alves e Catarino (2019), e a partir da matriz $(\mathbf{C}_n)$ associada à sequência gaussiana de Pell com seus devidos elementos (G_n) apresentada na Proposição (4.3.1).

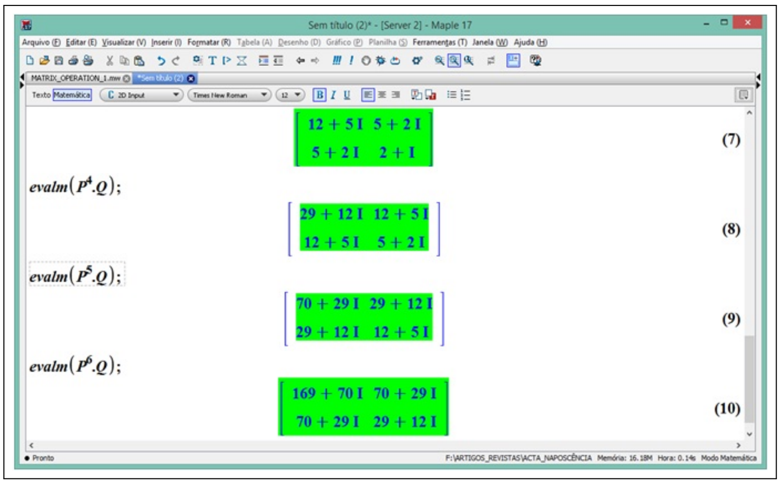
$$\mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix}$$

É possível apresentar uma outra forma de demonstrar o Teorema (4.3.3) utilizando para isso potências de matrizes da sequência associada de Pell, utilizando também para isso elementos do Teorema (4.3.4) e da Proposição (4.3.1), como segue:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_n &= \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix} & \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix} i & \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} i & \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} i \right) & \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} i \right) & \Rightarrow \\
\mathbf{C}_n &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1-2i \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Além desses resultados é possível analisar o comportamento das potências da matriz associada à sequência gaussiana de Pell à medida que n aumenta utilizando para isso o software Maple, como é mostrado na próxima figura.

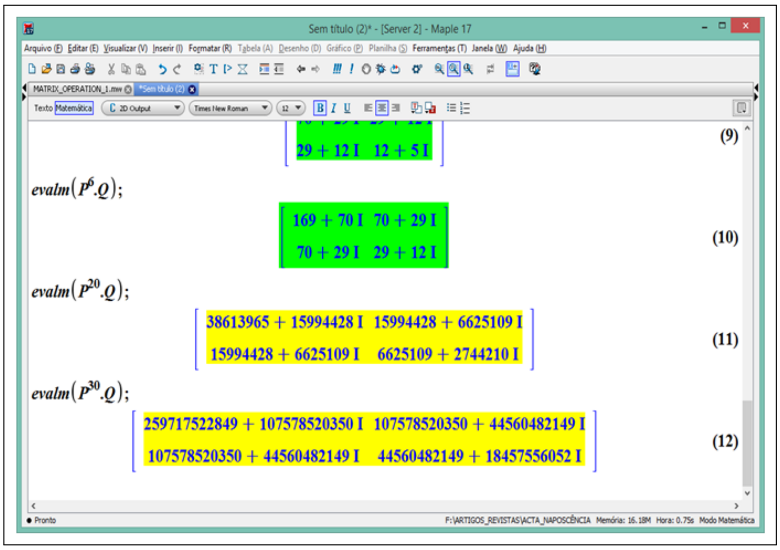
Figura 2 – Potências iniciais da matriz gaussiana de Pell



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na **Figura 2** apresentamos alguns casos particulares que avaliamos o comportamento das matrizes do tipo C_n tomado como o produto das matrizes P^n e a matriz $Q = C_0$, com $n \geq 1$. Podemos verificar que os coeficientes e entradas das matrizes correspondem aos números da seqência gaussiana de Pell. Também é possível obter potências maiores tomando valores aleatórios para n, tais como $n = 20$ e $n = 30$, como é mostrado na próxima figura.

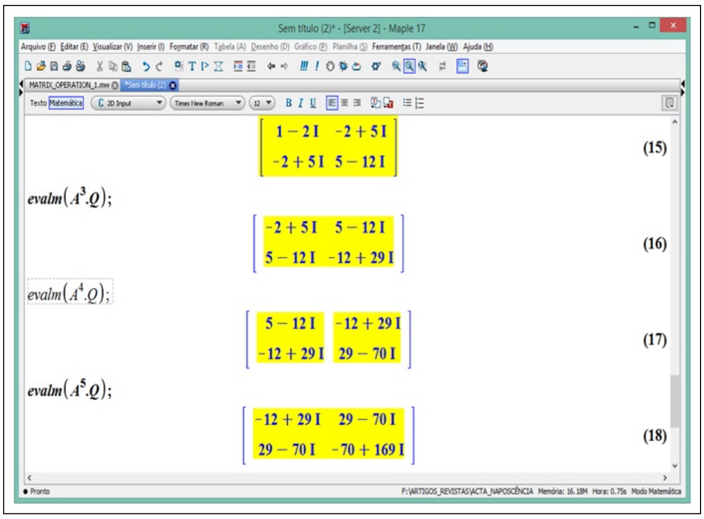
Figura 3 – Potências maiores da matriz gaussiana de Pell



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir ainda do Corolário (4.3.1), que apresenta as matrizes associadas da sequência gaussiana de Pell, a partir do processo de inversão das matrizes da sequência gaussiana de Pell correspondentes para índices maiores do que zero e utilizando ainda a ferramenta Maple é possível representar as matrizes com índices negativos, como mostra a próxima figura.

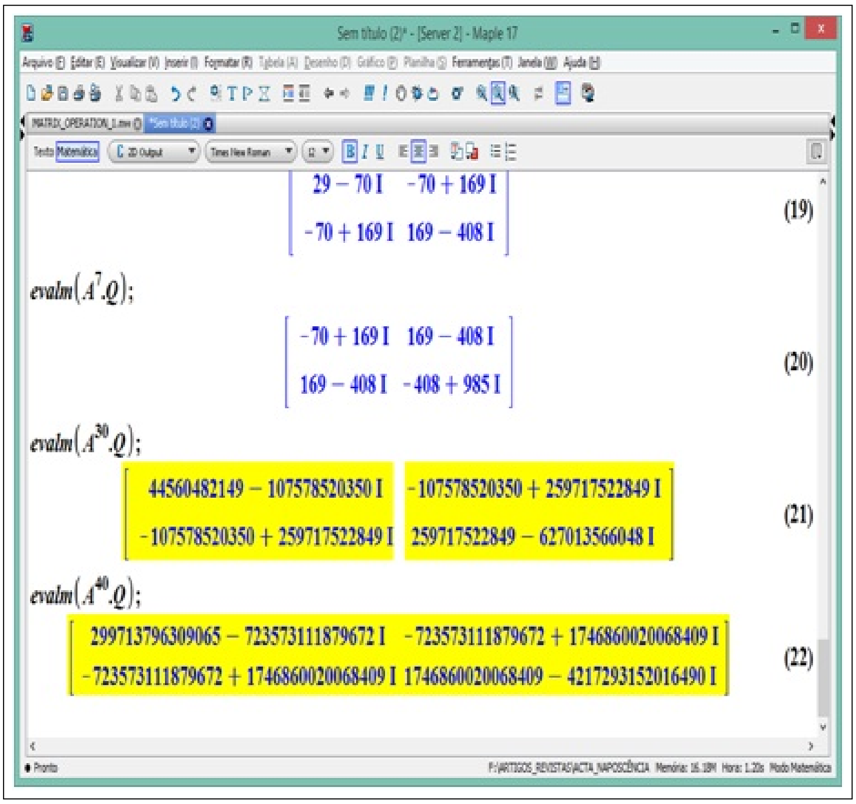
Figura 4 – Potências iniciais negativas da matriz gaussiana de Pell



Fonte: Elaborado pelo autor.

Veja que na **Figura 4** foram tomados o produto entre as matrizes A^n representando a respectiva inversa da matriz gaussiana de Pell com índíce positivo e Q. E com isso, finalmente é possível também determinar as potências com índices negativos maiores. Como exemplo, a próxima figura apresenta as inversas para $n = 7$, $n = 30$ e $n = 40$.

Figura 5 – Potências negativas da matriz gaussiana de Pell



Fonte: Elaborado pelo autor.

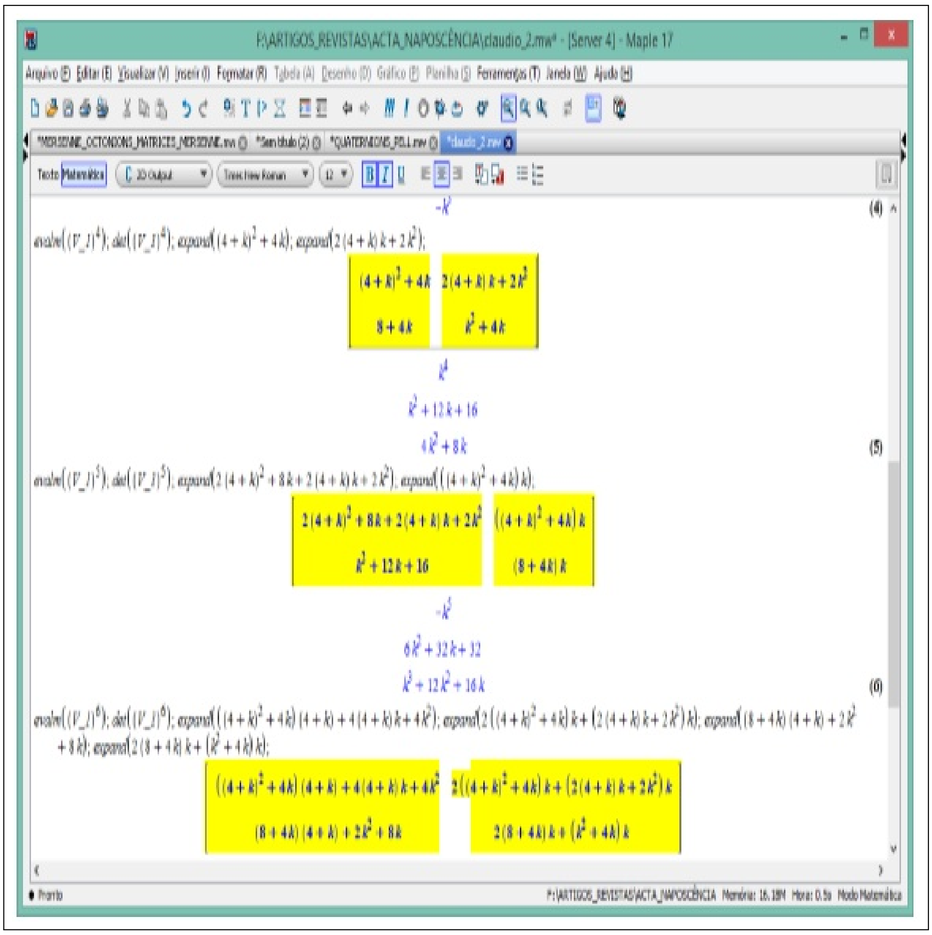
Na **Figura 5** foram tomados os valores $n = 7$, $n = 30$ e $n = 40$ que representam respectivamente as matrizes C_{-7}, C_{-30} e C_{-40} associadas à sequência gaussiana de Pell com índices negativos. Na próxima seção serão apresentadas aplicações na sequência de k-Pell.

6.7.2 Sequência de k-Pell

A partir dos resultados obtidos na Seção (3.3), onde foram apresentados os conceitos da matriz associada à sequência de k-Pell, tanto para índices positivos quanto negativos, estes últimos relacionados com as respectivas inversas das matrizes de termos positivos, é possível realizar a construção utilizando o software Maple de algumas dessas matrizes, como são apresentadas nas próximas figuras.

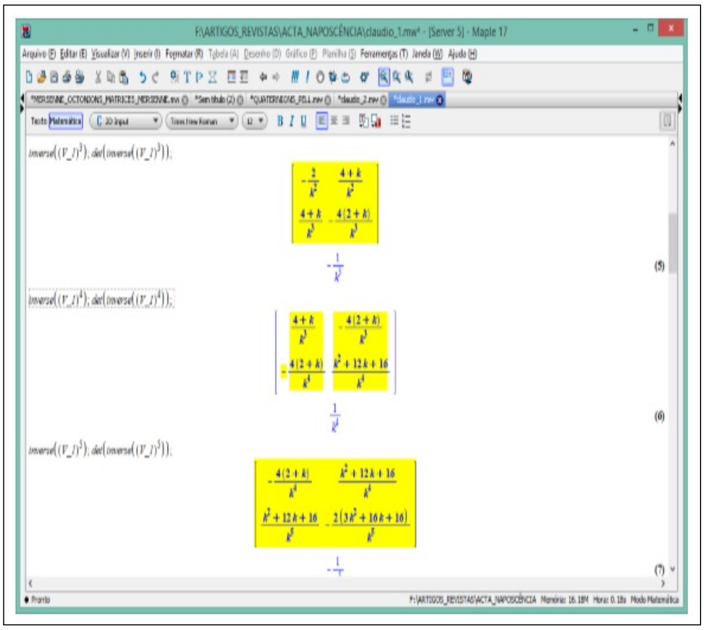
É possível observar na **Figura 6** a construção utilizando a ferramenta computacional Maple das potências n tomando $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$ destas matrizes da sequência associada à matriz de k-Pell.

Figura 6 – Potências da matriz de k-Pell



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Figura 7 – Potências da matriz inversa de k-Pell



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Na **Figura 7**, observa-se a partir de um raciocínio análogo ao que foi realizado anteriormente, a construção usando o Maple das potências de índices negativos das matrizes da sequência de k-Pell para $n = -3$, $n = -4$ e $n = -5$. Na próxima seção, será apresentada uma última aplicação, desta vez nas matrizes da sequência quatérnia de Pell.

6.7.3 Sequência quatérnia de Pell

Antes de realizar a construção utilizando o Maple para as matrizes associadas à sequência quatérnia de Pell, se faz necessário compreender a construção do modelo dessas matrizes. Dessa forma, a partir dos resultados obtidos na Seção (6.5.1) formalizar a matriz associada à sequência quatérnia de Pell, como segue:

Podemos considerar a representação matricial $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e, já foi mostrado na Seção (6.7.1) que $P^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$.

Tomando a sequência quatérnia de Pell

$$Q_n = P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}j + P_{n+3}k$$

podemos construir a matriz associada à sequência quatérnia de Pell como

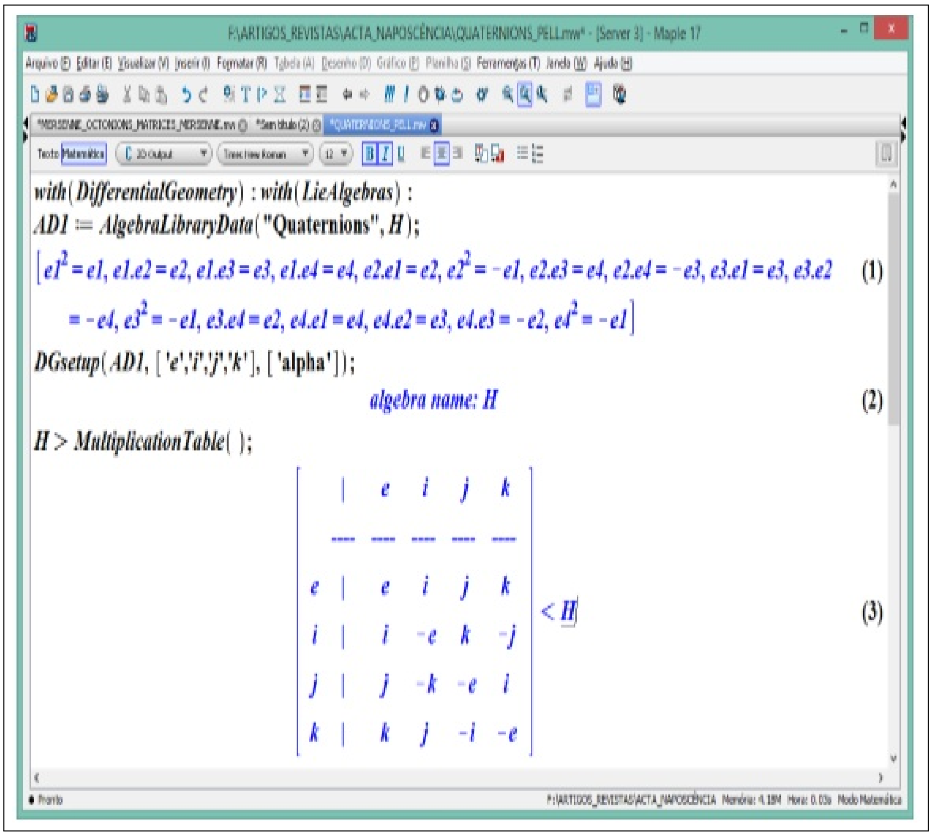
$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} Q_{n+1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n+1} + P_{n+2}i + P_{n+3}j + P_{n+4}k & P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}j + P_{n+3}k \\ P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}j + P_{n+3}k & P_{n-1} + P_n i + P_{n+1}j + P_{n+2}k \end{bmatrix}$$

Ainda com este último resultado é possível escrever utilizando álgebra matricial uma relação entre a matriz associada à sequência quatérnia de Pell com a matriz associada à sequência de Pell, como segue:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}_n &= \begin{bmatrix} P_{n+1}+P_{n+2}i+P_{n+3}j+P_{n+4}k & P_n+P_{n+1}i+P_{n+2}j+P_{n+3}k \\ P_n+P_{n+1}i+P_{n+2}j+P_{n+3}k & P_{n-1}+P_ni+P_{n+1}j+P_{n+2}k \end{bmatrix} \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_n \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} P_{n+3} & P_{n+2} \\ P_{n+2} & P_{n+1} \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} P_{n+4} & P_{n+3} \\ P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix} k \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} i + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+2} j + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+3} k \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 j + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 k \right) \Rightarrow \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} k \right) \Rightarrow \\
\mathbf{Q}_n &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1+2i+5j+12k & i+2j+5k \\ i+2j+5k & 1+0i+j+2k \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

E com isso, é possível realizar a construção de potências das matrizes da sequência quatérnia de Pell utilizando o software Maple, como é mostrado na próxima figura.

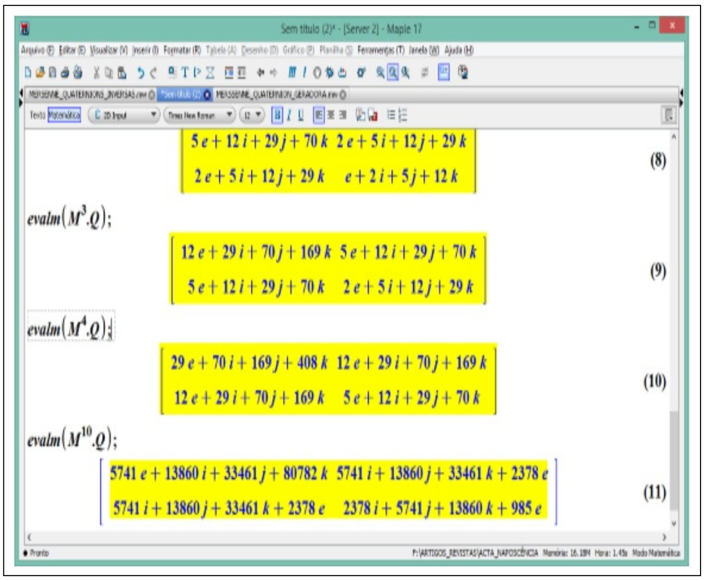
Figura 8 – Modelo de construção para matriz quatérnia de Pell



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

A partir da **Figura 8** como modelo no citado software é construído alguns exemplos

Figura 9 – Exemplos das potências das matrizes quatérnias de Pell

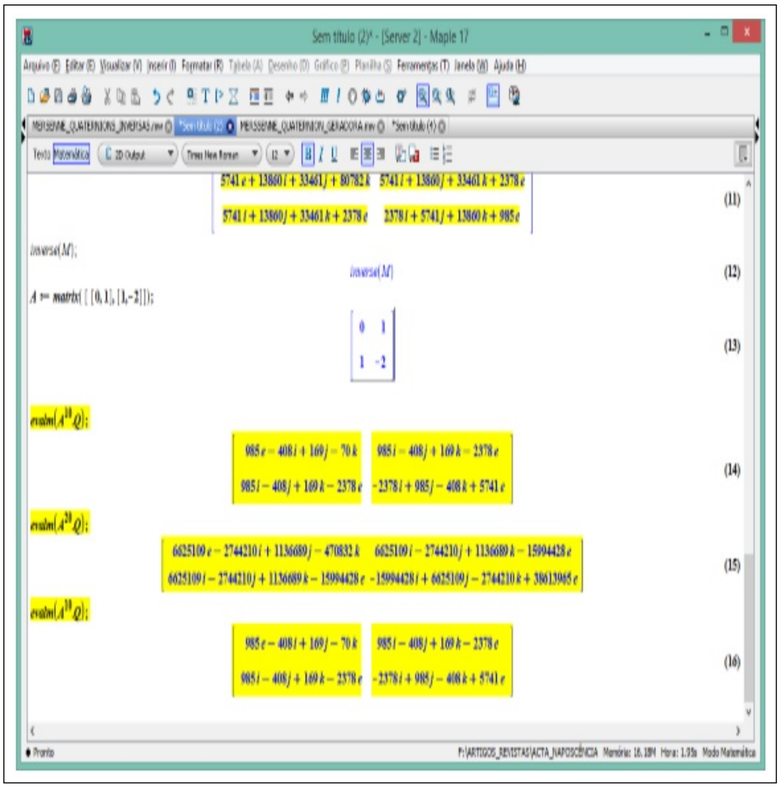


Fonte**:** Elaborado pelo autor.

das potências de matrizes da sequência quatérnia de Pell, como é mostrado na próxima figura:

Observa-se na **Figura 9** a construção das matrizes da sequência quatérnia de Pell tomando para isso potências da matrizes da sequência de Pell para os casos de $n = 3$, $n = 4$ e $n = 10$.

Figura 10 – Exemplos das potências negativas das matrizes quatérnias de Pell



Fonte**:** Elaborado pelo autor.

Além disso também é possível construir as matrizes com índices negativos da sequência quatérnia de Pell, como é visto na **Figura 10**, tomando para isso as respectivas inversas das potências de índices positivos ou ainda com o mesmo procedimento, mas com a inversa da matriz associada à sequência de Pell.

E dessa forma podemos concluir que utilizando a ferramenta computacional Maple é possível determinar qualquer potência, positiva ou negativa, da sequência gaussiana de Pell.

7 CONCLUSÃO

A partir dos elementos históricos advindos desde a necessidade de construção de conjuntos numéricos até os dias atuais, os padrões numéricos sempre apareceram no cotidiano e em elementos da natureza. Dessa forma, a partir do padrão de sequências numéricas, e de forma mais específica, sobre a sequência de Pell, são necessários aprofundamentos nos estudos sobre esse assunto.

Dessa forma, ao ser realizado um estudo minucioso de artigos voltados à temática, tais como os de (ALVES; CATARINO, 2019), (BICKNELL, 1975), (HORADAM, 1971), (NORONHA; ALVES, 2018), (CATARINO, 2013) e de (MELHAM, 1999) apenas para citar aqueles que formam o *background* do texto, foi tentado transmitir na construção desse texto o processo de evolução matemática acerca das generalizações da família de sequências de Pell.

Como foi apresentada a partir de (WANI *et al.*, 2019) a sequência de k-Pell se tratando de termos pertencentes ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e ainda com (HALICI; ÖZ, 2016) a sequência gaussiana de Pell contendo elementos nos números complexos ($\mathbb{C}$). E foi feita ainda a generalização dessa sequência para inteiros p e q quaisquer.

Em todos os casos, inclusive na sequência de Pell original, foram obtidas as relações de recorrência para termos quaisquer bem como feitas as devidas extensões para os índices negativos, tentanto fazer uma associação entre os termos de índice positivo com o respectivo de índice negativo. Posteriormente, foi construída uma associação do modelo matricial de cada sequência bem como analisadas as questões relacionadas com álgebra matricial, determinante e inversa de cada matriz.

Foram desenvolvidos ainda resultados associados ao limite, às funções geradoras, polinomiais e hiperbólicas de Pell além de análise nos conjuntos quatérnios e bicomplexos como forma de generalização maior em conjuntos numéricos que ainda estão sendo objeto de estudo e aprofundamento na atualidade.

Dessa forma, foi possível atingir os objetivos do trabalho, ao serem realizadas as generalizações como ferramenta de implementação para aplicações da sequência de Pell a partir da compreensão dos elementos históricos matemáticos além do interesse por parte de especialistas que levaram ao desenvolvimento de sequências numéricas e que culminaram na sequência de Pell, da construção das generalizações da sequência de Pell e análise dos resultados dessas generalizações.

Comenta-se também que na produção desse texto foram analisados artigos na sua maior quantidade em inglês, haja visto pouca ou quase nenhuma publicação específica sobre a temática em português, além do que ocorreram contribuições significativas em áreas que os autores dos artigos não haviam apresentados nos mesmos, principalmente no tange as matrizes associadas às sequências bem como o processo de inversão destas.

Dessa maneira, espera-se que o leitor interessado na temática possa a partir da leitura do texto, conseguir abrir possibilidades de investigar as demais generalizações da sequência de Pell, pelo fato de que o texto não conseguiu trazer todas as generalizações da sequência de Pell.

No que tange as limitações do texto, foram realizadas extensões dos índices apenas para o conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$) ficando o questionamento acerca do comportamento da sequência de Pell em se tratando de índices nos demais conjuntos: racionais ($\mathbb{Q}$), reais ($\mathbb{R}$), complexos ($\mathbb{C}$) além de outros como os duais, hiperbólicos e híbridos.

Ainda falando de trabalhos futuros, deseja-se analisar as aplicações dessa família da sequência de Pell principalmente em *softwares* Matemáticos como o GeoGebra e o Maple, com a perspectiva de otimizar a transmissão desse conhecimento para alunos e professores interessados na temática. Bem como analisar a possibilidade ainda das generalizações do estudo das sequências de Pell com índices inteiros em outros conjuntos numéricos tais como: os duais, octônios, sedênios, híbridos entre outros bem como suas propriedades e devidas extensões.

Finalmente, espera-se com esta pesquisa difundir e expandir os conceitos acerca da sequência de Pell entre alunos e professores de universidades que estejam interessados na temática, apresentando um material conciso e de fácil compreensão, para servir de fundamento para demais pesquisas e aplicações relacionadas à sequência de Pell.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Sequência matricial generalizada de Fibonacci e sequência matricial k-Pell: propriedades matriciais. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 15, n. 1, p. 39–54, jul. 2019. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v15a03-sequencia-matricial-generalizada.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2019.

AYDIN, F. T.; KÖKLÜ, K. **On Generalizations of the Pell Sequence.** 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1711.06260.pdf>. Acesso em: 28 jan. 2019.

BICKNELL, M. A primer on the Pell sequence and related sequences. **The Fibonacci Quaterly**, Califórnia, v. 4, n. 13, p. 345 – 349, dez. 1975. Disponível em: <https://www.fq.math.ca/Scanned/13-4/bicknell.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2019.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996.

CATARINO, P. On some identities and generating functions for k-pell numbers. **International Journal Of Mathematical Analysis**, [S.l.], v. 7, n. 38, p. 1877 – 1884, 2013. Hikari,.http://dx.doi.org/10.12988/ijma. Disponível em: <http://www.m-hikari.com/ijma/ijma-2013/ijma-37-40-2013/catarinoIJMA37-40-2013.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2019.

CATARINO, P. On hyperbolic k-Pell quaternions sequences. **Annales Mathematicae Et Informaticae,** [S.l.], v. 49, p. 61 – 73, 2018. Annales Mathematicae et Informaticae - AMI. http://dx.doi.org/10.33039/ami.2018.05.005. Disponível em: <http://ami.ektf.hu/uploads/papers/finalpdf/AMI_49_from61to73.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2019.

ERCOLANO, J. Matrix generators of Pell sequences. **The Fibonacci Quaterly,** Califórnia, v. 17, n. 1, p. 71 – 77, jan. 1979. Disponível em: <https://www.fq.math.ca/Scanned/17-/ercolano.pdf>. Acesso em: 27 ago. 2019.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. v. 4.

HALICI, S.; ÖZ, S. On some Gaussian Pell and Pell-Lucas numbers. **Ordu University Journal Of Science And Tecnology**, Ordu, v. 6, n. 1, p. 8 – 18, 2016. Disponível em: <http://dergipark.ulakbim.gov.tr/ordubtd/article/view/5000196295/5000170189>. Acesso em: 10 ago. 2019.

HORADAM, A. F. Pell identities. **The Fibonacci Quaterly**, Califórnia, v. 3, n. 9, p. 245 – 252, mai. 1971. Disponível em: <https://www.fq.math.ca/Scanned/9-3/horadam-a.pdf>. Acesso em: 12 mar. 2019.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 4.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica.** Tradução de: Cyro de Carvalho Patarra. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 2.

LIMA, E. L. **Curso de Análise.** 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. v. 1.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio.** 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 2. 322p.

MELHAM, R. Sums involving Fibonacci and Pell numbers. **Portugaliae Mathematica,** Lisboa, v. 56, n. 3, p. 309 – 317, 1999. Disponível em: <https://www.emis.de/journals/PM/56f3/pm56f306.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2019.

NORONHA, W. F. R.; ALVES, F. R. V. Sequência de Pell: propriedades e considerações epistemológicas. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 13, n. 1, p. 1–30, dez. 2018. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v13a01-sequencia-de-pell-propriedades.pdf>. Acesso em: 08 mar. 2019.

WANI, A. A.; BADSHAH, V. H.; RATHORE, G. P. S.; CATARINO, P. Generalized Fibonacci and k-Pell matrix sequences. Journal Of Mathematics, Lahore, v. 51, n. 1, p. 17 – 28, jan. 2019. Disponível em: <http://pu.edu.pk/images/journal/maths/PDF/Paper-3_51_1_2019.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – RECORRÊNCIA LINEAR

Lima *et al.* (2016, p. 65) indicam que alguns tipos de sequências numéricas podem ser definidas recursivamente, ou seja, a partir de seu termo imediatamente anterior e com isso são denominadas de recorrência linear de primeira ordem ou a partir de seus imediatos termos anteriores e assim chamadas de recorrência linear de segunda ordem. Com isso tem-se as definições:

Definição A.0.1 *Chama-se de recorrência linear de primeira ordem toda expressão do tipo com valor inicial*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \tag{A.1}$$

.

Para se encontrar a solução geral de uma equação de recorrência linear de primeira ordem se usa o teorema apresentado por Lima *et al.* (2016, p. 71) que segue:

Teorema A.0.1 *Seja a_n a solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então, a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad em \quad y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n).a_n]^{-1}$$

Demonstração. Seja a substituição x_n por $a_n y_n$ que transforma a expressão anterior

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad \text{em} \quad a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$$

Entretanto, $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$.

E assim a equação se transforma em

$$g(n)a_n y_{n+1} \quad = \quad g(n)a_n y_n + h(n)$$

ou ainda

$$y_{n+1} \quad = \quad y_n + \frac{h(n)}{g(n).a_n}$$

■

Veja que a uma recorrência linear de primeira ordem geral pode ser escrita como sendo uma recorrência linear homogênea, haja visto não terem termo independente de x_n.

Definição A.0.2 *Chama-se de recorrência linear de segunda ordem toda expressão do tipo com valores iniciais*

$$x_{n+2} = g(x)x_{n+1} + h(n)x_n + i(n) \tag{A.2}$$

.

Nesse texto será tratada um tipo específico de recorrência linear de segunda ordem, chamada de homogênea com coeficientes constantes que será suficiente para o desenvolvimento de todo o trabalho.

Definição A.0.3 *Chama-se de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes a expressão do tipo com valores iniciais*

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0 \tag{A.3}$$

Naturalmente, temos de ter na expressão (A.3) que o valor do coeficiente q tenha de ser diferente de zero, caso contrário, quando $q = 0$, tem-se uma recorrência linear de primeira ordem.

Para se encontrar uma solução de uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes à maneira de (A.3) utiliza-se uma equação quadrática chamada de *equação característica* indicada por

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{A.4}$$

e que pelo fato anterior de $q \neq 0$ impossibilita que $r = 0$ seja solução da equação característica.

Assim, sendo r_1 e r_2 as raízes da equação característica, independente de pertencerem ao conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) ou dos complexos ($\mathbb{C}$), tem-se duas possibilidades: ou $r_1 \neq r_2$ ou $r_1 = r_2$ que apresentam soluções distintas para a recorrência. Mais uma vez, será tratada apenas o caso em que $r_1 \neq r_2$ no próximo teorema, pois este será suficiente para o desenvolvimento do restante do texto.

Teorema A.0.2 *Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, com $r_1 \neq r_2$, então, todas as soluções da recorrência linear $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ serão da forma $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes.*

Demonstração. Na demonstração desse teorema, é necessário inicialmente ver que a expressão $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da expressão e posteriormente que todas as soluções são desse tipo. Assim, tem-se:

i. Ora, sendo $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ solução da recorrência, temos ainda:

$$\begin{array}{rclcl} x_{n+1} & = & C_1 r_1^{n+1} + C_2 r_2^{n+1} & = & r_1 C_1 r_1^n + r_2 C_2 r_2^n \\ x_{n+2} & = & C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} & = & r_1^2 C_1 r_1^n + r_2^2 C_2 r_2^n \end{array}$$

então a recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ pode ser escrita como:

$r_1^2 C_1 r_1^n + r_2^2 C_2 r_2^n + pr_1 C_1 r_1^n + pr_2 C_2 r_2^n + qC_1 r_1^n + qC_2 r_2^n = 0 \qquad \Rightarrow$

$C_1 r_1^n [r_1^2 + pr_1 + q] + C_2 r_2^n [r_2^2 + pr_2 + q] = 0$

e como r_1 e r_2 são raízes da equação característica, temos:

$C_1 r_1^n [0] + C_2 r_2^n [0] = 0$

demonstrando a parte inicial.

ii. Seja $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ uma solução qualquer da recorrência linear $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Para se determinar as constantes C_1 e C_2 se utiliza o sistema de equações

$$\begin{cases} y_1 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \\ y_2 = C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 \end{cases}$$

cujos valores para C_1 e C_2 são respectivamente tomando o fato de que $r_1 \neq r_2 \neq 0$.

$$C_1 = \frac{y_2 - y_1 r_2}{r_1(r_1 - r_2)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{y_1 r_1 - y_2}{r_2(r_1 - r_2)}$$

Extendendo y_n para $\forall n \in \mathbb{N}$, prova-se o teorema. Com efeito, tomando $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$ se consegue mostrar que $z_n = 0$ para qualquer n. Ora:

$$\begin{array}{rcl} z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n & = & y_{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2} \\ & & +p(y_{n+1} - C_1 r_1^{n+1} - C_2 r_2^{n+1}) \\ & & +q(y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n) \qquad \Rightarrow \\ & = & y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n \\ & & -C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) \\ & & -C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \qquad \Rightarrow \\ z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n & = & 0 \end{array}$$

Isso posto, pois y_n é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ e r_1 e r_2 são raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$. Dessa forma, como $y_1 = C_1 r_1 + C_2 r_2$ e $y_2 = C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2$, resulta em $z_1 = z_2 = 0$ e pela recorrência $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$, com os dois valores iniciais, resulta que $z_n = 0$ para todo n.

$\blacksquare$

APÊNDICE B – FUNÇÕES GERADORAS

Antes de ser introduzido o conceito de função geradora, será lembrado o conceito de série de potência, que será aplicado para a determinação das funções geradoras da família da sequência de Pell.

Definição B.0.1 *Seja a_n com $n \geq 0$ uma sequência numérica e $x_0 \in \mathbb{R}$, a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{B.1}$$

é denominada série de potências com coeficientes a_n em volta de x_0.

Um caso especial consiste quando $x_0 = 0$ tornando a série de potência em torno de x, que é indicada por $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. E como estamos interessados na convergência dessa soma, para cada valor de x que essa soma fornece um limite, ela define assim uma função, que segue:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{B.2}$$

E utilizando tal conceito é possível definir uma função geradora como sendo:

Definição B.0.2 *Seja a_n com $n \geq 0$ uma sequência numérica. A função formada pela série de potência*

$$G(a_n;x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{B.3}$$

é denominada função geradora ordinária para a sequência.

APÊNDICE C – FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

As funções clássicas hiperbólicas são conhecidas e definidas a seguir:

Definição C.0.1 *A função seno hiperbólico é definida por*

$$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

enquanto a função cosseno hiperbólico é definida por

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

onde tanto o domínio quando a imagem de ambas as funções é o conjunto dos reais $\mathbb{R}$.

Algumas identidades úteis são apresentadas na proposição que segue:

Proposição C.0.1 *A soma e a diferença entre coshx e senhx é dada por:*

i. $coshx + senhx = e^x$

ii. $coshx - senhx = e^{-x}$

Demonstração. Para comprovar esta proposição será utilizado a Definição (C.0.1):

i. $coshx + senhx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^x}{2} = e^x$

ii. $coshx - senhx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{2e^{-x}}{2} = e^{-x}$

$\blacksquare$

Proposição C.0.2 *Para coshx e senhx vale a identidade:*

$$cosh^2x - senh^2x = 1$$

Demonstração. Para comprovar esta proposição será utilizado mais uma vez a Definição (C.0.1):

$$\begin{aligned} cosh^2x - senh^2x &= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^2 \quad \Rightarrow \\ &= \frac{e^{2X} + 2 + e^{-2x} - (e^x - 2 + e^{-2x})}{4} \quad \Rightarrow \\ cosh^2x - senh^2x &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Tais resultados são utilizados para a comprovação da soma e diferença de seno e cosseno hiperbólico, como é mostrado no próximo teorema:

Teorema C.0.3 *(Soma e diferença) Sejam x e y* $\in \mathbb{R}$ *e as funções seno e cosseno hiperbólico, valem as identidades:*

$$i.\ senh(x+y) = senhxcoshy + senhycoshx$$

$$ii.\ senh(x-y) = senhxcoshy - senhycoshx$$

$$iii.\ cosh(x+y) = coshxcoshy + senhxsenhy$$

$$iv.\ cosh(x-y) = coshxcoshy - senhxsenhy$$

.

Demonstração. Para a demonstração desse teorema são utilizados tanto a Definição (C.0.1) quanto o resultado obtido na Proposição (C.0.1), em cada caso, como segue:

i.

$$\begin{aligned}
senh(x+y) &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{e^x e^y - e^{-x}e^{-y}}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{[coshx + senhx][coshy + senhy]}{2} - \frac{[coshx - senhx][coshy - senhy]}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{coshxcoshy + coshxsenhy + senhxcoshy + senhxsenhy}{2} - \frac{[coshxcoshy - coshxsenhy - senhxcoshy + senhxsenhy]}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{2coshxsenhy + 2senhxcoshy}{2} \Rightarrow \\
senh(x+y) &= coshxsenhy + senhxcoshy
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
senh(x-y) &= \frac{e^{x-y} - e^{-(x-y)}}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{e^x e^{-y} - e^{-x}e^{y}}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{[coshx + senhx][coshy - senhy]}{2} - \frac{[coshx - senhx][coshy + senhy]}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{coshxcoshy - coshxsenhy + senhxcoshy - senhxsenhy}{2} - \frac{[coshxcoshy + coshxsenhy - senhxcoshy - senhxsenhy]}{2} \Rightarrow \\
&= \frac{2senhxcoshy - 2coshxsenhy}{2} \Rightarrow \\
senh(x-y) &= senhxcoshy - coshxsenhy
\end{aligned}$$

iii.

$$
\begin{aligned}
cosh(x+y) &= \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{e^{x}e^{y}+e^{-x}e^{-y}}{2} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{[coshx+senhx][coshy+senhy]}{2} \\
&+ \frac{[coshx-senhx][coshy-senhy]}{2} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{coshxcoshy+coshxsenhy+senhxcoshy+senhxsenhy}{2} \\
&+ \frac{[coshxcoshy-coshxsenhy-senhxcoshy+senhxsenhy]}{2} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{2coshxcoshy+2senhxsenhy}{2} \quad \Rightarrow \\
cosh(x+y) &= coshxcoshy+senhxsenhy
\end{aligned}
$$

iv.

$$
\begin{aligned}
cosh(x-y) &= \frac{e^{x-y}+e^{-(x-y)}}{2} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{e^{x}e^{-y}+e^{-x}e^{y}}{2} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{[coshx+senhx][coshy-senhy]}{2} \\
&+ \frac{[coshx-senhx][coshy+senhy]}{2} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{coshxcoshy-coshxsenhy+senhxcoshy-senhxsenhy}{2} \\
&+ \frac{[coshxcoshy+coshxsenhy-senhxcoshy-senhxsenhy]}{2} \quad \Rightarrow \\
&= \frac{2coshxcoshy-2senhxsenhy}{2} \quad \Rightarrow \\
senh(x-y) &= coshxcoshy-senhxsenhy
\end{aligned}
$$

.

■

Utilizando os resultados deste teorema nos casos *i* e *iii* e tomando $y = x$ é possível observar o comportamento para o dobro de um valor real nos casos da função seno e cosseno hiperbólico, que é apresentado no corolário a seguir:

Corolário C.0.1 *(Arco duplo) Seja $x \in \mathbb{R}$ e as funções seno e cosseno hiperbólico, vale as identidades:*

i. $senh2x = 2senhxcoshx$

ii. $cosh2x = cosh^2x + senh^2x$

Demonstração. Tomando o resultado do último Teorema (C.0.3) no caso em que $y = x$ vem em cada caso:

i.
$$\begin{aligned} senh2x &= senh(x+x) && \Rightarrow \\ &= coshxsenhx + senhxcoshx && \Rightarrow \\ senh2x &= 2senhxcoshx \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} cosh2x &= cosh(x+x) && \Rightarrow \\ &= coshxcoshx + senhxsenhx && \Rightarrow \\ cosh2x &= cosh^2x + senh^2x \end{aligned}$$

.

■

A partir deste último corolário e usando a Proposição (C.0.2) é possível construir a metade de um valor real também nos casos da função seno e cosseno hiperbólico, como mostra o próximo corolário:

Corolário C.0.2 *(Meio arco) Seja $x, y \in \mathbb{R}$ e as funções seno e cosseno hiperbólico, valem as identidades:*

$$i.\ \ senh\frac{y}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{coshy-1}{2}}, sey \geq 0 \\ -\sqrt{\dfrac{coshy-1}{2}}, sey < 0 \end{cases}$$

$$ii.\ \ cosh\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{coshy+1}{2}}$$

Demonstração. É possível inicialmente escrever a Proposição (C.0.2) como:

$$cosh^2y = 1 + senh^2y \text{ e } senh^2y = cosh^2y - 1$$

Utilizando ainda o último Corolário (C.0.1) no caso em que $y = 2x$ vem em cada caso:

i.
$$\begin{aligned} cosh2x &= senh^2x + cosh^2x && \Rightarrow \\ &= senh^2x + senh^2x + 1 && \Rightarrow \\ cosh2x &= 2senh^2x + 1 && \Rightarrow \\ coshy &= 2senh^2\frac{y}{2} + 1 && \Rightarrow \\ 2senh^2\frac{y}{2} + 1 &= coshy && \Rightarrow \\ 2senh^2\frac{y}{2} &= coshy - 1 && \Rightarrow \\ senh^2\frac{y}{2} &= \frac{coshy-1}{2} && \Rightarrow \\ senh\frac{y}{2} &= \pm\sqrt{\frac{coshy-1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cosh2x &= cosh^2x + senh^2x \qquad \Rightarrow \\
&= cosh^2x + cosh^2x - 1 \qquad \Rightarrow \\
cosh2x &= 2cosh^2x - 1 \qquad \Rightarrow \\
coshy &= 2cosh^2\frac{y}{2} - 1 \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned}
2cosh^2\frac{y}{2} - 1 &= coshy \qquad \Rightarrow \\
2cosh^2\frac{y}{2} &= coshy + 1 \qquad \Rightarrow \\
cosh^2\frac{y}{2} &= \frac{coshy+1}{2} \qquad \Rightarrow \\
cosh\frac{y}{2} &= \sqrt{\frac{coshy+1}{2}}
\end{aligned}$$

Comenta-se que não existe parte negativa no caso da função cosseno hiperbólico de meio arco por que a imagem desta função é o conjunto $[1,+\infty)$.

.

■

Tais resultados são bastante úteis na construção das funções hiperbólicas da família de sequências de Pell, assunto que será visto nas próximas seções.

APÊNDICE D – NÚMEROS QUATÉRNIOS

Hamilton desenvolveu no ano de 1843 a partir de uma família do conjunto dos números hipercomplexos, o conjunto de números quatérnios, definido por quatro bases elementares $1, i, j, k$ tendo as propriedades:

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k = -ji \\ jk = i = -kj \\ ik = j = -ki \end{cases}$$

Em que um número quatérnio é definido por:

Definição D.0.1 *Um número quatérnio pode ser indicado por*

$$q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 = (a_0 + ia_1) + (a_2 + ia_3)j = z_0 + z_1 j$$

em que $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} \in \mathbb{R}$ *e* $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ *além da não comutatividade observada entre as bases complexas citadas anteriormente. Tal número pode ainda ser indicado por*

$$\mathbb{H} = \{z_0 + z_1 j : \quad z_0, z_1 \in \mathbb{C}, \quad ij = k \quad e \quad j^2 = -1\}$$

O conjunto dos números quatérnios ($\mathbb{H}$) possui operações semelhantes ao conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$), ou seja, tomando os números:

$$q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 \qquad \text{e} \qquad p = b_0 + ib_1 + jb_2 + kb_3$$

com $q, p \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar nos qutérnios são definidas por:

$$\begin{aligned} q + p &= a_0 + b_0 + i(a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) + k(a_3 + b_3) \\ q - p &= a_0 - b_0 + i(a_1 - b_1) + j(a_2 - b_2) + k(a_3 - b_3) \\ \lambda q &= \lambda a_0 + i\lambda a_1 + j\lambda a_2 + k\lambda a_3 \end{aligned}$$

bem como o produto entre p e q é dada por:

$$\begin{aligned} pq &= a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &\quad + b_0(a_1 i + a_2 j + a_3 k) + a_0(b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &\quad + (b_2 a_3 - b_3 a_2)i + (b_3 a_1 - b_1 a_3)j + (b_1 a_2 - b_2 a_1)k \end{aligned}$$

e o conjugado q^* de um número quatérnio é:

$$q^* = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k = \overline{z_0}$$

e finalmente a norma de um número quatérnio q é indicada por:

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{(a_0)^2 + (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$

APÊNDICE E – NÚMEROS BICOMPLEXOS

O conjunto dos números bicomplexos são definidos como segue:

Definição E.0.1 *Um número bicomplexo pode ser indicado por*

$$q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ija_3 = (a_0 + ia_1) + j(a_2 + ia_3) = z_0 + jz_1$$

em que $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} \in \mathbb{R}$ *e* $i^2 = -1,\ j^2 = -1$ *e* $ij = ji$. *Tal número pode ainda ser indicado por*

$$\mathbb{BC} = \{z_0 + jz_1 : \qquad z_0, z_1 \in \mathbb{C} \quad e \quad j^2 = -1\}$$

O conjunto dos números bicomplexos $\mathbb{BC}$ possui operações semelhantes ao conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ como já era de se esperar, ou seja, tomando os números

$$q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ija_3 \qquad \text{e} \qquad p = b_0 + ib_1 + jb_2 + ijb_3$$

com $q, p \in \mathbb{BC}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ as operações de adição, subtração e multiplicação por escalar são definidas por:

$$\begin{aligned} q + p &= a_0 + b_0 + i(a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) + ij(a_3 + b_3) \\ q - p &= a_0 - b_0 + i(a_1 - b_1) + j(a_2 - b_2) + ij(a_3 - b_3) \\ \lambda q &= \lambda a_0 + i\lambda a_1 + j\lambda a_2 + ij\lambda a_3 \end{aligned}$$

bem como o produto entre q e p é dada por:

$$\begin{aligned} pq &= a_0b_0 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &\quad + b_0(a_1i + a_2j + a_3ij) + a_0(b_1i + b_2j + b_3ij) \\ &\quad + (b_2a_3 - b_3a_2)i + (b_3a_1 - b_1a_3)j + (b_1a_2 - b_2a_1)ij \end{aligned}$$

e o conjugado q^* de um número bicomplexo é:

$$q^* = a_0 - a_1i - a_2j - a_3ij = \overline{z_0}$$

e finalmente a norma de um número bicomplexo q é indicada por:

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{(a_0)^2 + (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$