UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ALINE OLIVEIRA CALASANS

Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria no Ensino Médio

Ilhéus-Bahia
2019

ALINE OLIVEIRA CALASANS

Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Básica.

Orientador: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

Ilhéus-Bahia
2019

C143 Calasans, Aline Oliveira.
Uma proposta de sequência didática para o ensino de trigonometria no ensino médio / Aline Oliveira Calasans. – Ilhéus, BA: UESC, 2019.
63 f. : il.

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências e apêndices.

1. Trigonometria – Estudo e ensino (Ensino médio). 2. Sequências (Matemática). 3. Resolução de problemas (Matemática). I. Título.

CDD 516.24

Aline Oliveira Calasans

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Básica.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 06 de setembro de 2019.

Castañeda

Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión (Orientador-UESC)

Pryscilla dos S. F. Silva

Prof.ª Dra. Pryscilla dos Santos Ferreira Silva (UESC)

Renan Maneli Mezabarba

Prof. Dr. Renan Maneli Mezabarba (Membro Externo-UFES)

"Só é útil o conhecimento que nos torna melhores."
Sócrates

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas bênçãos que derrama sobre minha vida e pela oportunidade de participar do curso de mestrado em Matemática.

Agradeço a minha mãe Marlene Santos de Oliveira pelo amor incondicional, pelo carinho que sempre me dedicou e por seu incentivo.

Ao meu marido Edmilson e ao meu filho Rafael, que foram muito importantes nessa caminhada estando ao meu lado nos momentos mais difíceis dispensando amor, companheirismo e incentivos constantes.

Aos meus irmãos e irmã, pela torcida.

Aos meus colegas do curso, que dividiram comigo nesses dois anos alegrias, angústias, conquistas e sabedorias. E em especial a minha amiga Deborah Souza que me acolheu em sua casa durante esses dois anos e foi uma grande parceira nos momentos de alegrias e de tristezas.

Às minhas amigas Cíntia, Thaiane, Nelma e Eliana que me encorajaram em todos os momentos.

Aos meus alunos do 2º ano vespertino do Colégio Estadual Desembargador Júlio Virginio de Santana em Vera Cruz - BA, pela dedicação na aplicação da sequência didática e pelo constante incentivo.

Aos meus colegas de trabalho, em especial ao meu diretor Cristóvão, pelo seu apoio e compreensão.

Agradeço aos professores, pela dedicação que tiveram durante o curso, e em especial o meu orientador Professor Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión por dedicar seu precioso tempo e conhecimento, com paciência à minha orientação.

A todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a minha vitória o meu muito obrigado!

Resumo

Este trabalho apresenta uma Sequência Didática (SD) elaborada no intuito de servir de alternativa ao tratamento de alguns dos conteúdos de trigonometria previstos para o segundo ano do ensino médio, e aplicada no Colégio Estadual Desembargador Júlio Virginio de Santana em Vera Cruz - BA. A SD inicia com uma atividade introdutória que visa conhecer os conhecimentos prévios dos alunos sobre trigonometria. Num segundo encontro são aplicados dois Módulos que são adaptações de atividades contextualizadas e lúdicas propostas por Oliveira (2014) e Monteiro (2016). A SD finaliza com a aplicação de uma atividade que avalia os conhecimentos adquiridos pelos estudantes através da resolução de problemas que usam informação contextualizada com seu cotidiano. Em todas as etapas foi sugerido o uso da técnica de Resolução de Problemas proposta por Polya (1978). O relato de experiência reforça a tese que o uso de atividades lúdicas munido a Resolução de Problemas contextualizados pode contribuir para a melhora do processo de ensino-aprendizagem de trigonometria.

Palavras-chave: Ensino Médio. Sequência Didática. Razões Trigonométricas. Ciclo Trigonométrico. Resolução de Problemas. Contextualização.

Abstract

This work presents a didactic sequence (DS) developed to be used as an alternative to the approach of some of the Trigonometry contents foreseen for the classes of the second year's students of high school, and applied at the Colégio Estadual Desembargador Júlio Virginio de Santana in Vera Cruz - BA. The DS begins with an introductory activity that aims to learn the students' previous knowledge about trigonometry. In a second meeting two Modules are applied which are adaptations of contextualized and playful activities proposed by Oliveira (2014) and Monteiro (2016). The DS ends with the application of activity that evaluates the knowledge acquired by students through the resolution of problems that use information contextualized with their daily lives. At all stages it was suggested to use the Problem Solving technique proposed by Polya (1978). The experience report reinforces the thesis that the use of playful activities with contextualized problem solving can contribute to the improvement of the trigonometry teaching-learning process.

Keywords: High school. Didatic sequence. Trigonometric functions. Trigonometric cycle. Problem solving. Contextualization.

Sumário

Introdução

A matemática está presente na história do ser humano desde os tempos primórdios, ajudando em diversos desenvolvimentos da tecnologia e ciência no mundo. De acordo com Silva (2019), no cenário escolar a matemática é vista como uma disciplina difícil por muitos estudantes, sendo compreendida por aqueles que possuem mais habilidade para seus cálculos. Como forma de desconstruir esses conceitos e pensamentos sobre a matemática, os docentes buscam cada vez mais encontrar alternativas para criar conexões entre os estudantes e a matemática, tornando os conteúdos ensinados mais significativos. Por meio de um maior uso de contextualização, os estudantes passam a ter um papel ativo na construção do próprio conhecimento, contribuindo para produzir conhecimentos mais sólidos e duradouros.

Diante desse contexto, foi identificada a necessidade de elaborar atividades com os estudantes do 2º ano do Ensino Médio sobre os conteúdos de trigonometria. As atividades estão contempladas em uma proposta de sequência didática, que foi aplicada no Colégio Estadual Desembargador Júlio Virginio de Santana em Vera Cruz, Bahia. No decorrer de 1º semestre de 2019, a professora da turma, e autora deste trabalho, desenvolveu os conteúdos básicos de trigonometria mediante o uso de aulas tradicionais. Nesse período, foram identificadas diversas dificuldades dos alunos, sendo necessário ajustar a proposta inicial de sequência didática (ver Anexo A) que iria abranger conteúdos mais avançados como as leis dos senos e dos cossenos e até conhecimentos de física (decomposição de forças e segunda lei de Newton).

A proposta contempla atividades fora da sala de aula, observando dificuldades e necessidades do cotidiano, verificando como a matemática pode ser útil para ajudar nessas necessidades, além de comprovar conceitos e teoremas através de experiências práticas e dinâmicas. Por meio da proposta, é possível oferecer condições para que os estudantes deem significados aos conteúdos de trigonometria de forma a observar o aprendizado de uma forma diferente, tendo uma visão mais agradável. O objetivo é propor uma sequência didática que contempla conceitos trigonométricos, relacionando-os entre si e a outros conteúdos matemáticos, assim, possibilitando aos alunos visualizarem, reconhecerem e dialogarem com o objeto de estudo. O trabalho parte de uma atividade prática até chegar ao nível de abstração que permita os alunos aplicarem esses conteúdos para resolver problemas contextualizados com o seu cotidiano.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, é contextualizado o motivo de se escolher a trigonometria como assunto a ser trabalhado pela sequência didática e apresentado um levantamento de dados obtidos a partir de documentos oficiais.

No Capítulo 2, é descrita a fundamentação teórica sobre a ferramenta de contextualização, que é muito utilizada na matemática para consolidar a aprendizagem dos alunos. Além disso, é abordada a resolução de problemas como ferramenta de estudo e ensino. Por fim, discute-se sobre a metodologia de Sequência Didática (SD), abordando modelos de sequências desenvolvidas disponíveis na literatura e como podem ajudar no processo de construção do conhecimento dos estudantes.

No Capítulo 3, é descrita a proposta de SD e algumas questões não utilizadas. A Proposta foi aplicada aos alunos e é composta pela apresentação da situação, a produção inicial, o desenvolvimento de dois módulos e a produção final. Os módulos desenvolvidos foram inspirados nos trabalhos de Monteiro (2016) e Oliveira (2014) do Profmat. A segunda seção aborda questões sobre as Leis dos Senos e dos Cossenos que não foram utilizadas neste trabalho, mas podem ser usadas para a formulação de outras SD.

No Capítulo 4, é descrita a base matemática da proposta de SD por meio da discussão das questões nela contidas.

No Capítulo 5, é descrito o relato da experiência de aplicação da sequência didática com os estudantes.

No Capítulo 6, são feitas as considerações finais.

Capítulo 1

Por que Trigonometria?

Neste capítulo, contextualiza-se a razão da trigonometria ser definida como tema da sequência didática, mostrando as principais dificuldades e barreiras que são encontradas no ensino da matemática no cenário brasileiro. Para reforçar a situação desse cenário, são ilustrados dados do ensino da matemática.

1.1 Contexto

A matemática promove desafios para aqueles que a estudam, mas muitos estudantes não a visualizam dessa maneira, podendo ser vista como difícil e destinada apenas para os que possuem mais habilidades. Assim, quanto mais próxima da realidade do estudante a matemática for, o seu estudo será visto com maior relevância, mostrando-se como ferramenta de resolução de problemas do dia-a-dia. De acordo com Lorenzato (2006), o ensino dessa disciplina deveria ser construído do concreto ao abstrato, demonstrando que o conhecimento começa pelos sentidos e que a única forma de aprender é praticando.

Diante da variedade de temas na matemática, a trigonometria é um tema essencial e representa uma ferramenta imprescindível para diversas áreas, como engenharia, física, informática, entre outras. De acordo com Oliveira (2014), o seu desenvolvimento no Ensino Médio também é essencial, uma vez que este tema faz parte de muitas situações cotidianas e de fácil compreensão, como no cálculo da altura através da sombra projetada do objeto. Essa compreensão defende a importância do estudo da trigonometria no Ensino Médio, permitindo aos estudantes, através da resolução de problemas, se prepararem para estudos posteriores. O estudo desse tema permite desenvolver várias competências, quando destinado às aplicações cotidianas, e não ao processo mecânico de resolução de cálculos algébricos, já que o aluno terá uma maior conexão com o que é mais próximo de sua realidade.

A dificuldade, frequentemente observada, dos alunos compreenderem os assuntos da trigonometria de forma clara está relacionada com a dificuldade de compreensão de outros temas matemáticos. A trigonometria exige conhecimentos, como operações básicas de matemática, razões, proporções, equações e geometria plana. Dessa forma, se os alunos não possuem os conhecimentos básicos desses temas, a compreensão da trigonometria se torna mais complexa, criando bloqueios de aprendizado e desmotivação para estudar, dificultando também o entendimento de aplicações dessa área da matemática.

Existe também a responsabilidade dos docentes, pois ao explicar temas da trigonometria, não raro realizam uma abordagem mecânica, ensinando fórmulas fixadas e realizando cálculos repetitivos que, fora de contexto, se tornam cansativos para os alunos. É o caso de temas que envolvem equações, inequações e funções trigonométricas. Dessa forma, impedem que o aluno de compreender a essência do conteúdo, dificultando sua capacidade de aplicá-lo na vida real e enxergá-lo de maneira mais clara e objetiva (OLIVEIRA, 2014).

A tarefa de tornar o ensino de matemática mais dinâmico e motivador para o aluno não é algo fácil de ser conquistado, uma vez que ao longo de diversos séculos tem sido feito o aperfeiçoamento do ensino da matemática, ressignificando-o. Entretanto, através de ferramentas didáticas tais como contextualização, resolução de problemas e sequências didáticas, o ensino da trigonometria pode se tornar mais prático e atrativo, despertando a motivação e o interesse nos alunos. Mesmo que essas ferramentas não sejam novas, representam métodos inovadores, atualizando o ensino diante das constantes mudanças ocorridas na sociedade e, em particular, no processo de educação. Portanto, defendemos que é necessário se adaptar às mudanças e tornar o processo de ensino o mais eficiente e prático possível.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) apontam como objetivo do ensino de matemática no ensino médio aplicar os conhecimentos matemáticos em situações distintas, além de aprimorar a interpretação da ciência, tanto em atividades tecnológicas, como em atividades do dia a dia. Também objetiva o desenvolvimento do raciocínio lógico, da habilidade de resolver problemas, da comunicação, do espírito crítico e criativo. Além disso, deve promover que o estudante utilize de forma confiante os procedimentos de resolução de problemas, de forma a permitir a compreensão de conceitos matemáticos. (BRASIL, 2000).

Dessa forma, é imprescindível o foco que se deve dar ao desenvolvimento de valores, habilidades e competências dos estudantes em relação ao conhecimento e às relações entre colegas e professores. A orientação dos PCNEM é que exista entendimento do conhecimento da ciência e da tecnologia como consequência de um desenvolvimento humano social e histórico. No caso da trigonometria, o objetivo é que os estudantes sejam capazes de identificar as relações trigonométricas em momentos e contextos distintos de sua realidad (BRASIL, 2000).

Diante das mudanças no processo de educação, o modelo atual busca promover competências generalizadas, articulando conhecimentos disciplinares ou não. É um modelo que aperfeiçoa a educação arcaica, que buscava transmitir os conhecimentos das ciências de forma padronizada através de informações e procedimentos. Nesse cenário, os professores podem buscar ferramentas didáticas e alternativas para desenvolver a capacidade criativa dos alunos, promovendo engajamento, discussões e trocas de ideias.

1.2 Levantamento de dados em documentos oficiais

As barreiras no processo de ensino-aprendizagem de matemática na escola, especialmente no nível do Ensino Médio vêm crescendo cada vez mais. A escola possui uma função de ser transformadora na formação de seus alunos e a matemática precisa renascer com uma nova perspectiva pedagógica no meio escolar que garanta condições para o desenvolvimento contínuo dos processos de ensino-aprendizagem. Alguns dados mostram que a educação brasileira não tem atingido as metas traçadas ao longo dos anos e esta é uma realidade que precisa ser transformada.

O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), criado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) em 2007, medido em uma escala que vai de zero a dez, leva em consideração a aprovação média de desempenho dos estudantes em língua portuguesa e matemática visando avaliar a qualidade da educação. O indicador é obtido a partir da aprovação escolar registrada no Censo Escolar, das médias de desempenho no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e na Prova Brasil. Esse sistema é composto por um conjunto de avaliações que são realizadas em larga escala, permitindo ao INEP diagnosticar a educação básica no Brasil e os fatores que interferem no desempenho do estudante, oferecendo um indicativo sobre a qualidade do ensino. Através de provas e questionários aplicados em períodos definidos pelo INEP, o SAEB permite que os vários níveis do governo avaliem a qualidade da educação ofertada no país, oferecendo subsídios para a criação, o monitoramento e o desenvolvimento de políticas com base em evidências. Foram estabelecidas metas bienais para a qualidade da educação. Cada escola, município e unidade de Federação possui sua meta, além da meta geral para a educação no Brasil. A meta para o Brasil é atingir o índice de 6,0 em 2022, ano que representa o bicentenário da Independência (BRASIL, 2017).

Verificando o IDEB do Brasil no período de 2007 a 2017, nota-se que o índice teve um pequeno crescimento de 3,5 para 3,8. Entretanto, o índice não alcançou sua meta, que era de 4,7. Os dados podem ser observados na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Evolução do IDEB nacional

Ano	IDEB Verificado	IDEB - Meta
2007	3.5	3.4
2009	3.6	3.5
2011	3.7	3.7
2013	3.7	3.9
2015	3.7	4.3
2017	3.8	4.7

Fonte: Brasil (2017)

Analisando por dependência administrativa, ou seja, separando por rede privada e pública, é possível notar que o IDEB da rede privada cresceu de 5,6 para 5,8 no período de 2007 a 2017, sendo que a meta para 2017 era de 6,7. A rede pública teve um crescimento de 3,2 para 3,5 de 2007 para 2017, sendo que a meta para 2017 era de 4,4. Em ambos casos, o índice teve um pequeno crescimento ao longo dos 10 anos e ainda se encontra distante das metas estipuladas. Os dados podem ser observados na Tabela 1.2.

Verificando o IDEB do estado da Bahia no período de 2007 a 2017, nota-se que o índice manteve o mesmo valor de 3,0. Assim como o índice nacional, o índice estadual da Bahia não alcançou sua meta, que era de 4,3. Isso mostra como a educação nesse estado não apresentou avanços, ficando ainda estagnada. Os dados podem ser observados na Tabela 1.3.

Em uma outra análise, feita pela organização da sociedade civil Todos pela Educação, baseado no SAEB, verificou-se que o aprendizado de matemática dos estudantes do 3º ano

Tabela 1.2: Evolução do IDEB nacional por dependência administrativa

Ano	IDEB - Privada	Meta - Privada	IDEB - Pública	Meta - Pública
2007	5.6	5.6	3.2	3.1
2009	5.6	5.7	3.4	3.2
2011	5.7	5.8	3.4	3.4
2013	5.4	6.0	3.4	3.6
2015	5.3	6.3	3.5	4.0
2017	5.8	6.7	3.5	4.4

Fonte: Brasil (2017)

Tabela 1.3: Evolução do IDEB da Bahia

Ano	IDEB Verificado	IDEB - Meta
2007	3.0	3.0
2009	3.3	3.1
2011	3.2	3.2
2013	3.0	3.5
2015	3.1	3.8
2017	3.0	4.3

Fonte: Brasil (2017)

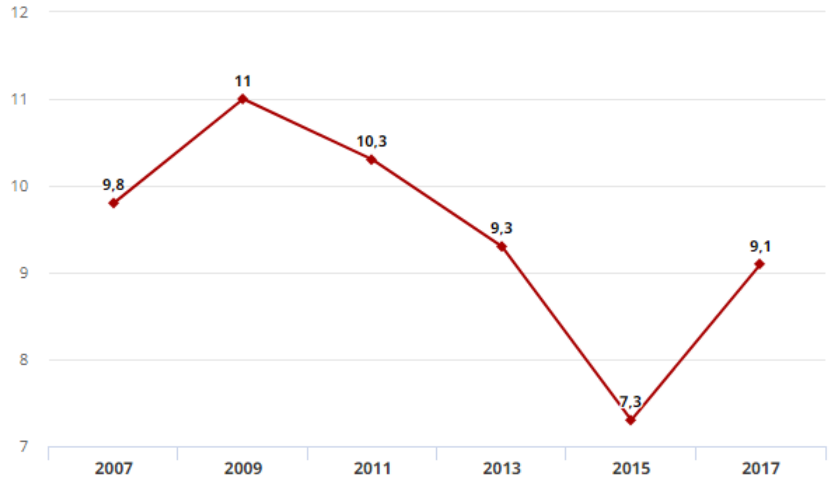
do ensino médio teve uma queda de 0,7 ponto percentual (pp) no Brasil entre os anos 2007 e 2017. Ou seja, os concluintes desse nível de ensino estão finalizando a escola com menos conhecimento que os estudantes que se formaram em 2007 (BRASIL, 2017). A evolução pode ser observada na Figura 1.1.

No ano de 2007, a pesquisa do SAEB mostrou que 9,8% dos alunos no 3º ano do ensino médio tiveram um aprendizado adequado dos assuntos em matemática. Após um crescimento em 2009 para 11%, os índices caíram até o ano de 2015, crescendo novamente em 2017. Mesmo assim, em 2017, esse índice representou 9,1%, um percentual menor do que o de 10 anos atrás.

De acordo com a análise do Todos pela Educação (2017), analisando o índice para a rede pública de ensino, apenas 4% dos estudantes que estavam no 3º ano do ensino médio em 2017 haviam aprendido o que era esperado em matemática. Nas escolas da rede privada, o índice foi de 39,3%. Verificou-se também que o nível socioeconômico do aluno tem influência em seu desempenho escolar. Nas escolas que tem uma maior concentração de alunos de menor renda, o percentual de alunos que apresentam conhecimentos de matemática adequados representou 3,1%. Nas escolas de concentração de estudantes de maior renda, o percentual foi de 63,6%. Em relação à raça, os estudantes que se declararam pretos tiveram um percentual de 4,1%, enquanto os pardos 5,7% e brancos 16%.

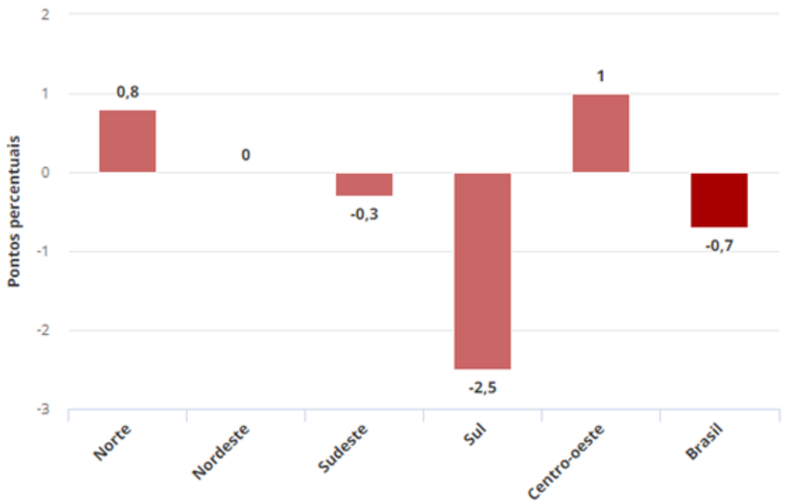
Analisando o índice por região, as únicas regiões que apresentaram crescimento foram Norte (0,8 pp) e Centro Oeste (1 pp). A região Nordeste não apresentou crescimento. Por outro lado, as outras regiões tiveram quedas nos índices, sendo a região Sul a mais expressiva com uma queda de 2,5 pp e a região Sudeste com uma redução de 0,3 pp. A evolução pode ser observada na Figura 1.2.

Figura 1.1: Evolução da porcentagem de alunos com aprendizado adequado no 3° ano do Ensino Médio



Fonte: Portal de notícias G1 (2018)

Figura 1.2: Evolução em pontos percentuais da quantidade de alunos com aprendizado adequado



Fonte: Portal de notícias G1 (2018)

Diante dos dados apresentados, é possível perceber o déficit da educação brasileira, principalmente, no ensino da matemática. Tal evento parece demonstrar que as propostas pedagógicas tradicionais não estão contribuindo significativamente para o aumento dos índices supracitados. Diante disso, neste trabalho fazemos a proposta de uma sequência didática fortemente baseada na contextualização e na resolução de problemas, podendo contribuir à construção de um ensino de trigonometria com mais significado para os alunos e, consequentemente, à melhoria do quadro atual.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Neste capítulo, discute-se sobre as ferramentas didáticas aplicadas no trabalho, que são: a contextualização, a resolução de problemas e a metodologia de sequência didática. É abordada a importância dessas ferramentas no processo de ensino-aprendizagem e como podem trazer a participação ativa do aluno na construção do conhecimento.

2.1 Contextualização

A Contextualização é um grande destaque na educação escolar, permitindo ao aluno vincular os assuntos de sua aprendizagem a um contexto que esteja ao nível de sua compreensão. De acordo com Santos e Oliveira (2015), a Contextualização aplicada na Matemática permite ao professor enfatizar os conteúdos ensinados através de uma interação dos alunos com situações-problema. Essas situações despertam a curiosidade dos estudantes, incentivando-os a levantar novas questões e buscar conhecimento, recorrendo às suas experiências pessoais, reformando-as diante da nova concepção adquirida.

O processo de contextualização no ensino de matemática passa por estabelecer relações com outras áreas do conhecimento trazendo situações práticas do cotidiano. Dessa forma, os conceitos matemáticos devem ser abordados explicitando a origem e finalidade no processo de aprendizagem para contribuir na formação completa do estudante. Segundo Bassanezi (2002), a utilização da matemática nas ciências factuais deve unir de forma harmônica a abstração e a formalização, não esquecendo das fontes que originaram o processo.

Cada aluno possui uma realidade diferente de vida e cada um possui diferentes níveis de dificuldade com relação aos conteúdos matemáticos. Entretanto, a contextualização busca aproveitar o potencial dos alunos através de atividades que promovam oportunidades de superação das limitações dos estudantes e, despertem a curiosidade e o prazer pelo processo de aprendizagem. A contextualização busca transformar a disciplina de estudo como uma ferramenta que seja útil à realidade de cada estudante, permitindo que ele utilize os conteúdos em diversos contextos da realidade. O objetivo é motivar o aluno a ser reflexivo, despertando questionamentos e o desejo de respostas. Então, além de considerar a relevância do cotidiano, deve-se criar situações que permitam construir significados dos assuntos não só de experiências da atualidade, mas de experiências que também venham a fazer parte do futuro (SANTOS e OLIVEIRA, 2015).

Segundo Vasconcellos (2008), para elaborar o currículo escolar, é preciso considerar que a contextualização exerce um diálogo entre o conhecimento científico e o saber escolar. A contextualização do ensino é realizada apresentando na sala de aula diferentes situações que deem sentido aos conteúdos que devem ser aprendidos pelos alunos. Esse processo é dado pela problematização, retomando conhecimentos prévios e informações que os alunos possuem, criando um contexto que tenha significado ao conteúdo e facilite a compreensão.

O ensino da Matemática normalmente é feito pela apresentação dos conteúdos por definições, teoremas e exemplos, seguidos de listas de exercícios e resoluções de problemas. Essa é uma prática vista como contextualização por muitos professores, mas é uma abordagem muito superficial e restrita. De acordo com Maioli (2012), para abordagem mais completa, a Contextualização deve problematizar a formação dos conceitos matemáticos. Por mais que a estratégia de relacionar a matemática com a realidade seja feita nesses casos, não é suficiente para desenvolver a aprendizagem se não atiçar o aluno a questionar como os conceitos podem ser aplicados em uma realidade próxima à sua.

Santos e Oliveira (2015) relatam que os alunos devem vivenciar a Matemática, e não ter uma visão de que os conteúdos podem ser aprendidos por uma parcela cognitivamente privilegiada de estudantes. Para contornar essa questão, a contextualização é usada de forma que os alunos compreendam os conceitos, relacionando com suas experiências cotidianas. Os professores devem motivar os alunos desenvolvendo situações e condições que estimulem a aprendizagem, utilizando a reflexão, criatividade e capacidade de construir saberes. O ensino da Matemática contextualizado permite transformar e aperfeiçoar o processo de aprendizagem dessa matéria em que muitos estudantes encontram limitações de aprendizagem e abstração. Além disso, permite responder aos desejos de uma sociedade que busca a aprendizagem matemática ao alcance de todos os alunos, correspondendo às expectativas de aprendizagem.

2.2 Resolução de Problemas

No começo do século XX, o ensino da matemática consistia em repetir e memorizar. A partir de meados do mesmo século, o ensino passou a ter um foco na aprendizagem com compreensão. No ensino da Matemática, deve-se fomentar a procura de novas metodologias de ensino para estimular a criatividade do aluno através da investigação de fenômenos e situações. Também é necessário despertar a curiosidade do aluno para construir um conhecimento significativo. Essas questões têm sido objeto de estudo de diversos pesquisadores, que procuram alternativas para o modelo tradicional de educação. Dentre as metodologias pesquisadas, evidencia-se a Resolução de Problemas, que consiste no processo de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas. É uma metodologia que busca colocar o aluno como participante ativo do seu conhecimento, libertando-o da passividade inerente ao modelo tradicional, onde apenas recebia informações prontas, imutáveis e muitas vezes desestimulantes.

Em 1944, surge a primeira obra de George Polya como uma referência no que tange ao ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Segundo Polya (1978), para organizar o processo de resolução de problemas, existem quatro etapas que são desenvolvidas: a compreensão da atividade; a criação de um plano que leve ao objetivo pretendido; a execução desse plano; e a análise para verificar se o objetivo foi atingido.

A primeira etapa, a compreensão da atividade, busca o entendimento. Uma vez que a tarefa é compreendida, o aluno será despertado a solucioná-la e perceberá quais procedimentos devem ser realizados. Espera-se que o aluno verifique a incógnita e a condicionante, tendo compreensão do processo. Essa é uma etapa que possui forte relação com a afetividade, então não é suficiente apenas compreender a situação, deve-se ter interesse, curiosidade e o aluno deve se sentir desafiado para realizar o trabalho.

A segunda etapa, a criação do plano, o aluno deve buscar por situações semelhantes à que deve resolver, uma vez que o autor defende que as boas ideias são baseadas em experiências passadas e em ensinamentos adquiridos previamente. Nos casos de insucesso, o aluno deverá fazer variações do problema, tais como generalizações, particularizações e analogias. Assim, o plano representa um roteiro para solucionar o problema.

A terceira etapa, a execução do plano, busca o efetivo trabalho do plano criado. Um bom desenvolvimento das fases anteriores tornará essa etapa mais fácil de ser realizada. O sucesso do estudante é obtido através do estímulo a realizar cada procedimento com atenção, estando atento a cada ação realizada e verificando cada passo. O estudante também deve ser motivado a mostrar que cada procedimento desenvolvido está correto, permitindo que o seu aprendizado e a comunicação de sua produção sejam afirmados.

A quarta etapa, verificação para determinar se o objetivo foi atingido, é uma etapa de revisão, depuração e abstração da resolução do problema. O processo de depuração tem por objetivo checar os procedimentos utilizados, simplificando-os ou procurando outras formas de solucionar o problema de maneira mais simples. O processo de abstração permite ao aluno refletir sobre os procedimentos realizados, descobrindo a importância da situação e do método utilizado para solucioná-la. Dessa forma, está apto a transmitir o aprendizado adquirido nesta atividade para solucionar outros problemas.

As etapas propostas por Polya para a Resolução de Problemas são condizentes com as habilidades e competências que constam nos Parâmetros Nacionais Curriculares (BRASIL, 1999) visando desenvolver a capacidade de investigar e compreender. Elas são, identificar o problema (compreendendo enunciados e formulando questionamentos), selecionar e interpretar as informações que os problemas abordam, levantar teses e estimar os resultados, selecionar estratégias para solucionar os problemas, interpretar e criticar os resultados em situações concretas, utilizar raciocínios, experimentar modelos, recorrer a fatos já conhecidos, a relações e a propriedades e discutir ideias para produzir argumentos sólidos.

A resolução de problemas apresenta um grande potencial para a aprendizagem em trigonometria, promovendo uma participação ativa do estudante, e não só uma postura passiva de recepção de conteúdo. Assim, permite que o aluno assuma um papel de responsabilidade por sua aprendizagem. De acordo com Onuchic (2010), quando a matemática é ensinada através da resolução de problemas, os alunos detém um meio poderoso de desenvolver a sua própria compreensão. O processo de resolução de problemas necessita uma participação ativa do estudante, de forma a conduzi-lo a uma extensão do seu entendimento inicial. Esse processo é construído para além do conhecimento adquirido, analisando hipóteses, formando conjecturas e buscando argumentos que permitam ao aluno defender seu ponto de vista e expressar uma linha de raciocínio.

Segundo D'Ambrosio (2010), o entendimento da Matemática como uma ciência com resultados precisos e procedimentos que não falham, onde os elementos principais são as operações, cálculos algébricos e teoremas geométricos, a torna uma disciplina que não cede espaço para a criatividade aos alunos. Então, esse entendimento conduz ao desinteresse. Em contrapartida a esse pensamento surge a resolução de problemas, permitindo ao aluno desenvolver sua criatividade, encontrar novas estratégias de resolução, diferentes das tradicionais, além de entender que os conteúdos matemáticos podem ser notados ao seu redor, no cotidiano. Os estudantes aprenderão a fazer matemática se conseguirem a capacidade de resolver problemas e o professor desempenha um papel chave no desenvolvimento dessa competência nos alunos.

A matemática tem uma participação muito presente no cotidiano, em algumas situações de forma concreta e em outras de forma abstrata. É uma componente fundamental da cultura do indivíduo, sendo possível observá-la na propaganda, nos jogos, nas leis, na imprensa, dentre outras diversas situações. A aplicação dos conhecimentos matemáticos envolve a resolução de problemas, situação que estimula o desenvolvimento da criatividade, autoestima, imaginação e esforço de aprender através de desafios, além de conectar o abstrato e a realidade (LIMA, 2003).

Para aperfeiçoar o estudo da matemática, é preciso desconstruir o conceito de que representa algo distante do mundo real. De acordo com Chassot (2001), é necessário que o ensino contemple fortemente a realidade, tornando os conceitos vivos e estimulantes. E a ferramenta Resolução de Problemas está alinhada nesse sentido com o processo de ensino-aprendizagem, sendo uma parte que integra toda a aprendizagem matemática.

2.3 Sequência didática

O processo de ensino matemático é caracterizado pela interação direta entre professor, quem ensina, e aluno, quem busca conhecimento. É um processo mútuo, em que a aprendizagem é conduzida de forma paralela com o processo de ensino, permitindo que essa interação fortaleça tanto a compreensão, como a expansão dos conhecimentos envolvidos. Assim existe a tríade professor-aluno-saber, que deve funcionar de maneira apropriada para que o aprendizado de matemática seja contemplado pelos estudantes. Nessa tríade, há a presença da subjetividade do professor e dos alunos, que é parcialmente determinante do processo de ensino e aprendizagem (ONUCHIC, 2013).

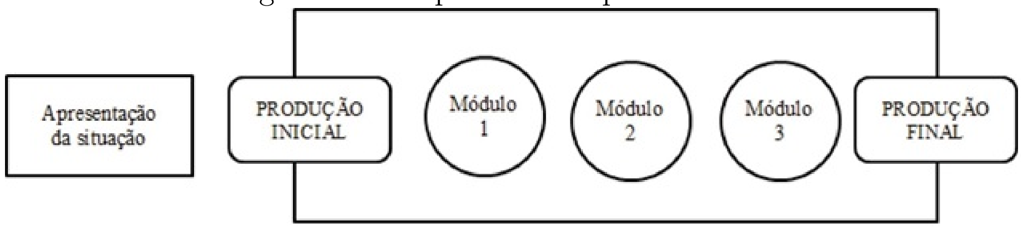
Onuchic (2013), recomenda também que o professor trabalhe com situações-problema na sala de aula. Nelas, o professor deve saber a intenção didática desejada e deve mediar o trabalho dos alunos para não fugirem do objetivo perseguido. É comum que os alunos busquem de forma espontânea encontrar respostas para as questões propostas sem avaliar o sentido real da solução encontrada. O desenvolvimento do saber é dado pelas decisões definidas pelo aluno, e o professor deve procurar condições objetivas para demonstrar como o aluno pode solucionar a situação-problema.

Uma das possibilidades de trabalho com situações-problema é a utilização de uma Sequência Didática (SD) pelo professor. Uma SD está constituída por uma série de situações estruturadas ao longo de uma quantidade definida de aulas, tendo como objetivo tornar possível o desenvolvimento do conhecimento dos alunos. Apesar da sequência ser estruturada previamente, o seu cumprimento deve ser flexível o suficiente para atender às necessidades e às dificuldades dos alunos no processo. Assim, permitindo que o objetivo seja alcançado

(BABINSKI, 2017).

Segundo Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), o modelo de SD é um conjunto de atividades estruturadas de forma sistemática em torno de um gênero textual ou escrito, sendo aplicado como ferramenta didática do professor para organizar atividades de ensino em função de grupos temáticos e de procedimentos. As etapas da sequência didática envolvem: apresentação da situação, produção inicial, aplicação dos módulos e produção final. A estrutura pode ser observada no diagrama da Figura 2.1.

Figura 2.1: Esquema de sequência didática



Fonte: Dolz, Noverraz e Schneuwly, 2004

A apresentação da situação é uma seção de abertura, descrevendo a tarefa de exposição oral ou escrita que os alunos irão realizar. Nessa etapa, podem ser apresentados exemplos sobre a temática escolhida ou solicitando pesquisas em sala de aula.

A produção inicial tem o objetivo de diagnosticar as capacidades adquiridas pelos alunos previamente, verificando os conhecimentos que já possuem. É uma forma de avaliar as capacidades dos alunos e ajustar as etapas posteriores ao nível de dificuldade da turma.

Após a produção inicial, são realizados os módulos (ou oficinas), que compõem atividades ou exercícios progressivos para permitir que os alunos aprendam sobre os temas abordados na sequência didática. Nessa etapa, as lacunas e deficiências dos alunos deverão ser supridas, de forma a capacitá-los. O número de módulos é determinado pelo gênero de estudo, pelas temáticas abordadas e pelo nível de conhecimento prévio dos alunos.

A última etapa é a produção final, em que os alunos colocam em prática todos os conhecimentos desenvolvidos e o professor avalia o progresso, além de ser um momento para avaliação do tipo somativa. Na avaliação somativa, é verificado o que o aluno efetivamente aprendeu, utilizando um sistema de atribuição de notas e é fornecido um *feedback* de seu aprendizado. Essa etapa é semelhante à produção inicial, por isso estão conectadas no esquema.

Para que a sequência didática aconteça, de acordo com os autores Paretti e Costa (2013), é necessário que os alunos sejam apresentados a atividades práticas com material diferenciado que apresente desafios com nível progressivo de dificuldade, permitindo a construção do conhecimento. No momento em que se inicia a sequência, precisa-se realizar um levantamento prévio dos conhecimentos que os alunos possuem, e a partir desses, planejar atividades diferenciadas, jogos, análises ou reflexões. Aos poucos, deve-se progredir o nível de complexidade das atividades, aprofundando-se no tema.

Os conteúdos abordados devem contribuir no processo de formação de cidadãos conscientes, informados e agentes transformadores da sociedade. Para isso, a configuração da sequência deve ser bem pensada, sendo um importante caminho na melhoria das práticas educativas. Através dessa prática com foco em atividades investigativas, o processo de construção do conhecimento pode acontecer possibilitando a experimentação, abstração e a formação de significados. Permite também a interdisciplinaridade, uma vez que é possível abordar temas ligados a outras disciplinas, permitindo explorar o conhecimento de forma global, assim, diminui-se a fragmentação (PARETTI; COSTA, 2013).

Segundo Zabala (2014), para validar o modelo de sequência didática, deve-se analisar diversos fatores de sua estrutura. Devem existir atividades que permitam verificar os conhecimentos prévios dos alunos. Os novos conteúdos devem ser propostos de forma significativa e funcional. As atividades devem ser apropriadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno e devem ser desafios alcançáveis. O autor afirma ainda ser necessário que haja a provocação de um conflito cognitivo e promover a atividade mental do aluno para que os conhecimentos prévios sejam relacionados com os conteúdos propostos.

Nesse sentido, as atividades devem motivar o aprendizado e devem estimular a autoestima do aluno, permitindo que o próprio estudante veja o seu desenvolvimento e enxergue que o esforço valeu a pena. Também deve incentivar o aluno a ser autônomo em suas aprendizagens, estimulando o desenvolvimento de habilidades como aprender a aprender (ZABALA, 2014).

Zabala (2014) traz o exemplo de quatro unidades de sequências didáticas que são amplamente utilizadas nos sistemas educacionais. O primeiro exemplo consiste em:

A - Comunicação da lição;

B - Estudo individual;

C - Repetição do conteúdo aprendido;

D - Prova/exame;

E - Avaliação.

Nesse tipo de sequência, os princípios de uma aprendizagem significativa dificilmente são atendidos, não incluindo atividades que forneçam mais informações e permitam intervenções. É um tipo de sequência que é muito simples, sendo difícil para que os professores consigam controlar os processos de ensino do aluno e garantam uma aprendizagem efetiva. Pode ser funcional para conteúdos factuais ou quando os conteúdos são simples para o nível dos alunos, mas para um conteúdo mais complexo, não é recomendada.

O segundo exemplo apresentado por Zabala (2014) tem a seguinte estrutura:

A - Apresentação da situação problemática;

B - Busca de soluções;

C - Exposição do conceito e algoritmo;

D - Generalização;

E - Aplicação;

F - Exercitação;

G - Prova/exame;

H - Avaliação.

Esse tipo de sequência satisfaz diversas condições para que a aprendizagem seja significativa, dando atenção às particularidades de desenvolvimento dos alunos. Entretanto, se as atividades não derem sentido à tarefa de aprendizagem, a motivação inicial pode ser enfraquecida. Outra questão importante é que não há diálogo entre professores e alunos na construção dos conceitos, dando a impressão de que o único elemento participativo na construção dos conceitos foi o professor.

O terceiro exemplo apresentado pelo autor, consiste em:

A - Apresentação da situação problemática;
B - Diálogo;
C - Comparação de pontos de vista;
D - Conclusões;
E - Generalização;
F - Exercícios de memorização;
G - Prova/exame;
H - Avaliação.

Esse tipo de sequência satisfaz diversos critérios para uma aprendizagem significativa, além de promover uma notável participação dos alunos nos processos iniciais. Entretanto, a dificuldade está no controle do processo individual em cada um dos alunos, uma vez que o professor é o protagonista no desenvolvimento das explicações finais. Para isso, as avaliações deverão ter um nível de profundidade que permita avaliar se os alunos conseguiram assimilar os conteúdos propostos.

O quarto e último exemplo de estrutura de SD apresentado por Zabala (2014, p. 53) e ao qual se aproxima a proposta de sequência didática deste trabalho, consiste em:

A - Apresentação da situação problemática;
B - Problemas;
C - Respostas intuitivas ou suposições;
D - Fontes de informação;
E - Busca de informação;
F - Elaboração de conclusões;
G - Generalização;
H - Exercícios de memorização;
I - Prova/exame;
J - Avaliação.

Dentre os exemplos apresentados, este é o que tem a maior variedade de atividades, satisfazendo os critérios de aprendizagem significativa. Para que seja efetiva, o professor deve ter noção clara do objetivo de cada etapa, evitando ser levado pela dinâmica e se esquecer do objetivo final. Diante da complexidade da sequência, uma maior quantidade de tempo é necessária para sua aplicação, permitindo o professor não só focar nas atividades de pesquisa, mas também dê importância às atividades iniciais e finais.

Neste último exemplo apresentado por Zabala (2014), assim como na proposta de sequência didática que é apresentada neste trabalho, o professor desenvolve um tema relacionado a algum fato ou acontecimento. Em seguida, os alunos desenvolvem respostas sobre as situações propostas pelo professor e terão contato com fontes de informação para coletar dados e informações para desenvolver o conhecimento. Essas fontes podem ser: o próprio professor, pesquisas bibliográficas, experiências, atividades de observação e trabalhos de campo. Tendo o contato com as fontes de informação, os alunos serão guiados para as conclusões e generalizações de conhecimento, ajudando-os na resolução dos problemas propostos. Os exercícios de memorização permitem aos alunos relembrar as conclusões e generalizações obtidas, reforçando os conhecimentos desenvolvidos. Na avaliação final, os alunos realizam uma produção final num tempo determinado. O professor utilizará os resultados dessa atividade, além dos resultados das outras atividades desenvolvidas anteriormente, para verificar o desempenho dos alunos.

Segundo Zabala (2014), a depender do tipo de conteúdo que seja ensinado, um modelo de sequência é mais apropriado que outro. Para ensinar conteúdos factuais, as atividades básicas devem contemplar exercícios de repetição e a depender da quantidade e complexidade das informações, devem ser usadas estratégias que permitam organizações significativas e associações. Para ensinar conceitos e princípios, é necessário um processo de elaboração pessoal que reconheça os conhecimentos prévios, promova significado e funcionalidade ao processo de aprendizagem, leve em consideração o nível de desenvolvimento do aluno e incentive a atividade mental.

No caso do ensino de conteúdos procedimentais, há uma necessidade de realizar diversos exercícios sobre os procedimentos. Nesse caso, as atividades precisam ser significativas, funcionais, precisam contemplar diferentes níveis de ajudas e práticas guiadas, além de promover o trabalho independente. Para o ensino de conteúdos atitudinais, as atividades devem ser adaptadas às necessidades reais dos alunos, introduzir reflexão crítica, promover modelos das atitudes e promover a autonomia moral de cada aluno (ZABALA, 2014).

De acordo com Babinski (2017), uma sequência didática pode ser estruturada, aplicada e analisada em qualquer nível de ensino, desde que considere as particularidades dos envolvidos e tenha claro os objetivos a serem alcançados. Dessa forma, é um modelo que deve considerar o ensino como projeto e ação social em que o aluno se apropria de um conhecimento já construído ou em processo de construção. Sendo aplicada na matemática, irá buscar condições de transmissão e construção dos conhecimentos matemáticos pelos aprendizes.

A Teoria das Sequências Didáticas possui novos desafios na busca de ferramentas que melhorem o processo de ensino/aprendizagem da matemática. Segundo Babinski (2017), o papel do professor não está restrito apenas à comunicação de um conhecimento, da mesma forma que o aluno não é apenas um receptor. A sequência didática deve considerar que o aluno aprende através de sua adaptação ao meio e aos conhecimentos, uma vez que o meio sem intenção didática não promove a aprendizagem. O professor deve criar e planejar situações de ensino de forma a promover a apreensão dos conhecimentos aos alunos. Então, seu papel é organizar atividades bem estruturadas, proporcionando aos alunos novas perspectivas de reflexão das questões. E cabe ao aluno aceitar os desafios, iniciando o processo de aprendizagem.

Existem situações numa SD em que o professor não tem controle pleno, mas em outras, o controle será feito pela ação didática. Então é esperado que o aluno assimile que aquela atividade estruturada pelo professor foi desenvolvida para que ele amplie seu saber. Daí será possível que ele perceba a importância do conhecimento abordado. O aluno apenas terá adquirido o conhecimento quando tiver a capacidade de aplicá-lo por si próprio em situações fora do contexto de ensino (BABINSKI, 2017).

Capítulo 3

Proposta de Sequência Didática

Neste capítulo são mostradas a proposta de sequência didática aplicada com os alunos e questões que não fazem parte da SD, mas que podem ser utilizadas em outras situações de aprendizado.

3.1 Proposta de SD

Nesta seção é apresentada a SD produto deste trabalho seguindo a estrutura proposta por Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004) mostrada na Figura 2.1. As subseções seguem a referida estrutura composta por apresentação da situação, produção inicial, desenvolvimento de dois módulos e produção final. Esta proposta é resultado da evolução de uma versão inicial apresentada no Apêndice A.

3.1.1 Apresentação da situação

No momento de apresentação, o professor explica a proposta do trabalho e o assunto que será abordado, que é a trigonometria. Com ajuda dos alunos, define os conceitos básicos da trigonometria, verificando os conhecimentos prévios que os alunos possuem.

É recomendado fazer uma discussão da importância da trigonometria e como pode ser observada no dia a dia. Os alunos participarão indicando situações no cotidiano onde se pode aplicar a trigonometria, realizando uma discussão com o grupo.

3.1.2 Produção inicial

No momento de produção inicial, serão testados os conhecimentos prévios dos alunos sobre trigonometria a partir de situações aplicadas no cotidiano. Os alunos irão utilizar a calculadora básica do celular para realizar os cálculos.

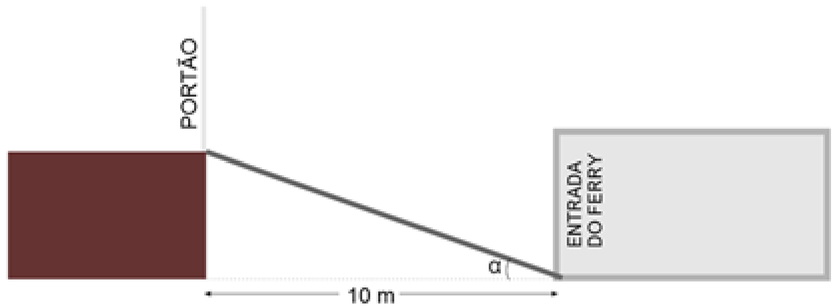
<u>Questão 1</u>: Manoel saiu para pescar de barco na praia do Jaburu e após ultrapassar os arrecifes ele jogou a âncora que atingiu o fundo do mar. Como a profundidade do mar nesse ponto era menor que o comprimento da corrente que prende a âncora ao barco, este se moveu 8 m em relação ao ponto de onde foi lançada a âncora, esticando completamente a corrente. Sabendo que a medida do ângulo formado entre a superfície da água e a corrente é $36°$, qual

é a profundidade do mar no ponto onde a âncora foi lançada? (Considere sen36°=0,60; cos 36° = 0,80)[1]

Questão 2: Para a construção da ponte Salvador - Itaparica um engenheiro deve medir a distância entre esses municípios. Para isso, ele fixou um ponto A no Elevador Lacerda e um ponto B no cais de Mar Grande (margem oposta). A seguir, ele se deslocou 16 km perpendicularmente à reta AB, partindo de A, até o ponto C no Farol da Barra e utilizando um teodolito, ele mede o ângulo ACB, obtendo 44°. Qual a distância que o engenheiro encontrou entre os municípios? (Considere sen44° = 0,69)[2]

Questão 3: O acesso ao compartimento onde os automóveis ficam estacionados no Ferry-boat, situado no seu subsolo, é feito por uma rampa do portão à entrada do Ferry. A rampa forma um ângulo α com a horizontal, como mostra a figura, tal que sen $\alpha = 5/13$. Sabe-se que a distância entre o portão e a entrada do Ferry é de 10 m de comprimento, como ilustra a Figura 3.1. Qual é o comprimento da rampa?[3]

Figura 3.1: Rampa para Ferry-boat



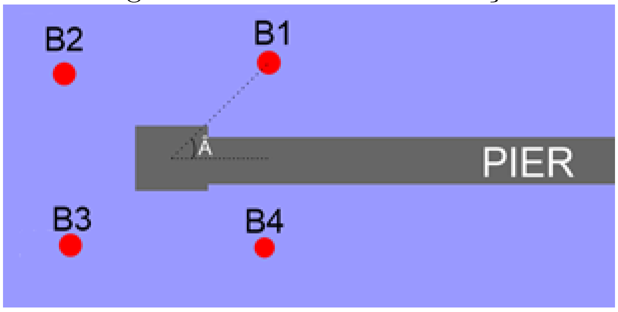
Fonte: A autora (2019)

Questão 4: Paulinho está empinando arraia na praia do Duro em Mar Grande e já usou toda a linha do seu carretel. A linha, que tem 100 m, está totalmente esticada no ar e o ângulo que a linha forma com a horizontal é de 19°. Sabendo que a distância da mão de Paulinho ao solo é aproximadamente de 1,2 m, a que altura está a arraia? (Considere tg19° = 0,35)[4]

Questão 5: A prefeitura de Itaparica irá colocar novas boias de sinalização náutica no Terminal de Bom Despacho, como ilustra a Figura 3.2. Existem 4 boias e 3 delas serão trocadas. O ponto de referência para a posição das boias é a extremidade do píer. A boia B1 está a um ângulo Â em relação à extremidade do pier. B2 é simétrica a B1 em relação a reta perpendicular ao pier que passa pela origem do ângulo Â. B3 é simétrica a B1 em relação à origem do ângulo Â e B4 é simétrica a B1 em relação ao pier. Considerando que Â = 40º, quais são os ângulos das outras três boias em relação à extremidade do pier?

[1]Adaptado de Paiva (2015)
[2]Adaptado de Paiva (2015)
[3]Adaptado de Paiva (2015)
[4]Adaptado de Lima et al (2010)

Figura 3.2: Boias de sinalização



Fonte: A autora (2019)

Discussão final: Após a resolução das questões, será feita uma discussão sobre os conceitos de trigonometria abordados, contemplando as razões trigonométricas, ciclo trigonométrico e tipos de ângulos. Todos os conceitos abordados nas questões serão discutidos, preparando os alunos para os módulos. Os alunos também terão oportunidade de conhecer o instrumento teodolito (instrumento ótico que mede ângulos horizontais e verticais, podendo ser aplicado para medir distâncias através dos ângulos) e serão feitas algumas medidas utilizando o instrumento, de forma a aplicar os conceitos trigonométricos.

3.1.3 Módulos

Os módulos irão desenvolver os conhecimentos dos alunos através de situações práticas e aplicadas. Através da participação dos alunos nessas atividades, o professor irá explicar os conceitos e relações da trigonometria, construindo o conhecimento com os alunos e os preparando para a produção final. O Módulo 1 aborda as razões trigonométricas e o Módulo 2 aborda o ciclo trigonométrico.

Módulo 1 - Razões trigonométricas[5]

Essa atividade deverá ocorrer em um dia de sol ao ar livre, pois é necessário que aconteça a projeção da sombra pela luz do sol. Será utilizada uma trena ou fita métrica, os alunos serão divididos em duplas para que as medições possam ter o máximo de exatidão.

O objetivo dessa atividade é reconhecer no problema proposto um triângulo retângulo, onde a altura e a sombra são os catetos desse triângulo.

Etapa 1: Cada dupla deverá medir o tamanho de suas sombras e de suas alturas anotando esses valores, usando duas casas decimais e colocar na Tabela 3.1:

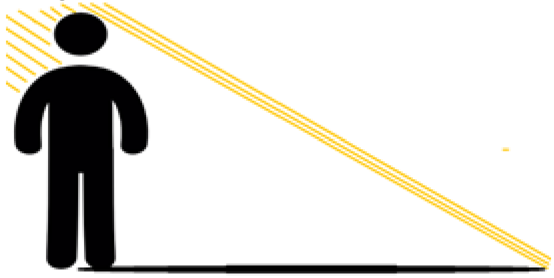
	Altura	Sombra
Aluno 1		
Aluno 2		

Tabela 3.1: Medidas de alturas e sombras

[5] Adaptado de Monteiro (2016)

Etapa 2: Qual figura plana é formada pelo aluno e sua sombra? O esquema dos raios solares e a sombra de uma pessoa está ilustrado na Figura 3.3.

Figura 3.3: Esquema dos raios solares



Fonte: A autora, 2019

Etapa 3: Desenhe em uma folha de papel o triângulo retângulo que representa a altura e a sombra de cada um utilizando uma escala de 1:10 (um centímetro no papel representa dez centímetros medidos com a trena). Ou seja, se sua altura for 165 cm e sua sombra 285 cm, o triângulo terá os lados perpendiculares com 16,5 cm e 28,5 cm.

Etapa 4: Utilizando uma calculadora, calcule o quociente entre o comprimento da altura e da sombra, utilizando duas casas decimais.

Etapa 5: Por que os resultados foram aproximadamente iguais se as alturas e tamanhos de sombras são diferentes?

Devemos induzir os estudantes a perceberem que o ângulo reto e o ângulo dos raios de sol em relação ao solo são iguais em todos os triângulos. E o terceiro ângulo pode ser obtido através da soma dos ângulos internos, assim, terá a mesma medida para todos os triângulos. Como os ângulos correspondentes são congruentes, as razões entre os lados correspondentes serão as mesmas.

Podemos comentar que devido ao conceito de semelhança, a tangente de um ângulo agudo independe das dimensões do triângulo retângulo.

Etapa 6: A partir do Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa do triângulo com duas casas decimais. Utilizando este resultado, calcule os valores do seno e do cosseno do ângulo Â que os raios de sol formam com o solo, usando o triângulo que você construiu. Organize os valores encontrados na Tabela 3.2:

Tabela 3.2: Seno e cosseno de medidas

	$sen(A) = \dfrac{comprimento\ da\ Altura}{comprimento\ da\ hipotesusa}$	$cos(A) = \dfrac{comprimento\ da\ Sombra}{comprimento\ da\ hipotesusa}$
Aluno 1		
Aluno 2		

Etapa 7: Discuta com seu colega se os valores encontrados são diferentes ou iguais? A que razões atribuem esse fato?

O professor deve intervir novamente, comentando sobre o fato de todos os triângulos possuírem ângulos correspondentes congruentes, devido ao paralelismo dos raios solares que determinam ângulos correspondentes em relação ao solo, para medidas de sombra realizadas simultaneamente. E que devido ao conceito de semelhança de triângulos, as razões trigonométricas de um ângulo agudo independem das dimensões do triângulo retângulo.

Módulo 2 - Ciclo trigonométrico [6]
Materiais necessários:
- Folha de papel
- Régua
- Transferidor
- Lápis
- Compasso

Solicite aos alunos para que desenhem um círculo de 10cm de raio e duas retas perpendiculares que passam pelo centro do círculo. Solicite aos alunos para dividirem a circunferência em 12 partes iguais de 30º cada.

Etapa 1: Marque os ângulos de 30°, 45° e 60° a partir do 1° quadrante. E usando a sua representação geométrica, calcule os valores aproximados do seno, cosseno e tangente para os ângulos, construindo Tabela 3.3 com os valores encontrados.

Tabela 3.3: Razões trigonométricas para 30°, 45° e 60°

Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente
30°			
45°			
60°			

Etapa 2: Encontre os 3 ângulos simétricos aos ângulos estudados (30°, 45° e 60°), nos 3 eixos: vertical (seno), horizontal (cosseno) e em relação ao centro. Depois marque-os no ciclo trigonométrico e preencha a Tabela 3.4.

Nesse momento, lembramos que no ciclo trigonométrico trabalhamos três tipos de simetria: em relação ao eixo vertical (seno), eixo horizontal (cosseno) e em relação ao centro. O professor irá explicar sobre as relações de ângulos suplementares, replementares e explementares.

Etapa 3: Preencha a Tabela 3.5 com os valores de seno, cosseno e tangente para os 3 ângulos simétricos dos ângulos estudados.

[6] Adaptado de Oliveira (2014)

Tabela 3.4: Ângulos simétricos

Ângulos	Resultado
Suplementar de 30º	
Replementar de 30º	
Explementar de 30º	
Suplementar de 45º	
Replementar de 45º	
Explementar de 45º	
Suplementar de 60º	
Replementar de 60º	
Explementar de 60º	

Tabela 3.5: Razões trigonométricas para ângulos simétricos

Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente
Suplementar de 30º			
Replementar de 30º			
Explementar de 30º			
Suplementar de 45º			
Replementar de 45º			
Explementar de 45º			
Suplementar de 60º			
Replementar de 60º			
Explementar de 60º			

3.1.4 Produção final

Na produção final, os alunos irão aplicar os seus conhecimentos desenvolvidos na Sequência Didática em exemplos com um nível um pouco maior de complexidade, mas que ainda assim são contextualizados com sua realidade e abordando os assuntos estudados.

Questão 1: A capital da Bahia e a ilha de Itaparica serão ligadas por uma ponte. A obra surge para otimizar o fluxo de veículos entre a ilha de Itaparica e a região metropolitana de Salvador. Até o momento, o transporte entre essas localidades apenas pode ser feito através do ferry-boat para veículos de pequeno porte ou através de rodovias.

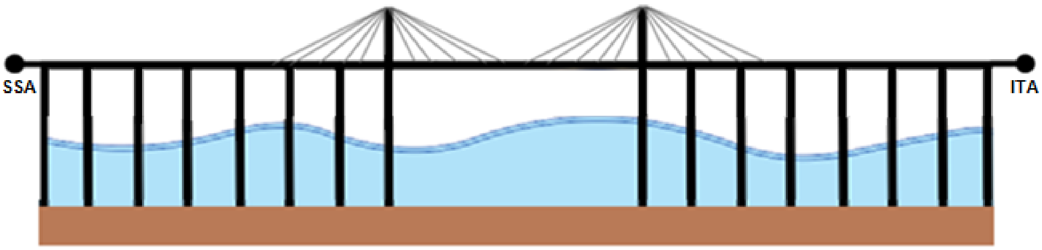
O projeto prevê a construção de uma ponte estaiada, um tipo de ponte suspensa por cabos constituída de um ou mais mastros, por onde partem cabos de sustentação para os tabuleiros da ponte. O esboço pode ser observado na Figura 3.4.

A ponte é composta por 2 mastros, que fixam 5 cabos de cada lado, além de 16 suportes submersos no mar.

O projeto da ponte já foi desenvolvido e está em fase de implementação. Entretanto, os estudantes de uma instituição de Vera Cruz resolveram aplicar seus conhecimentos na prática, realizando estudos do projeto da ponte.

A primeira etapa do estudo é verificar a altura dos mastros. Os alunos têm conhecimento

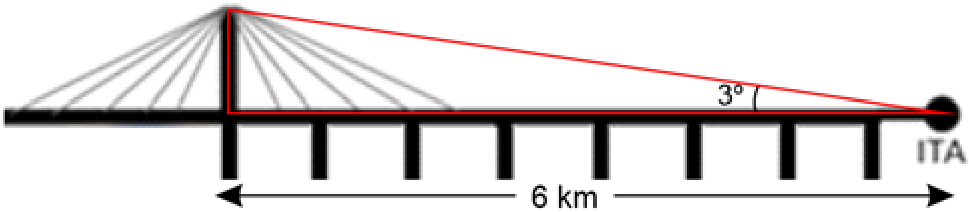
Figura 3.4: Ponte Salvador-Itaparica



Fonte: A autora (2019)

que o mastro mais próximo à Itaparica fica a uma distância de 6km. Através do uso do teodolito, os alunos verificaram que o ângulo entre o topo desse mastro e a superfície da ponte na extremidade de Itaparica é de 3º, como observado na Figura 3.5. Qual é a altura do mastro, em relação à superfície da ponte? (Considere sen3º = 0,05).

Figura 3.5: Mastro da ponte



Fonte: A autora (2019)

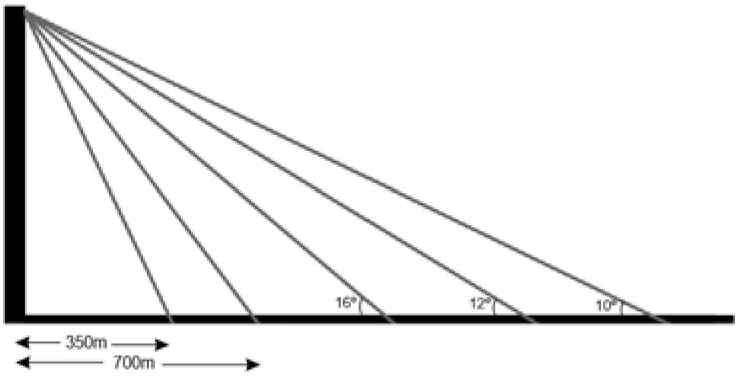
Questão 2: Em uma outra etapa do estudo que os alunos de Vera Cruz fizeram sobre a ponte, o objetivo foi calcular o comprimento dos cabos da ponte. Como a ponte é do tipo estaiada, existirão cabos nos mastros para suportar a estrutura. Os cabos serão fixados no topo do mastro do suporte principal e na base da ponte, como mostra a Figura 3.6. Para cada mastro, serão 5 cabos fixados de cada lado. Os dois primeiros cabos serão fixados a distâncias de 350 e 700 metros. Para os outros três cabos, não se conhece a distância, mas se conhece os valores dos ângulos que os cabos formam com a superfície da ponte. O terceiro cabo forma 16º, o quarto forma 12º e o quinto forma 10º. Quais foram as medidas encontradas? Utilize o resultado da altura do mastro da questão anterior. (Considere cos16º = 0,96; sen12º = 0,21; sen10º = 0,17).

Questão 3: Os moradores do Condomínio Ilha Mar irão instalar uma placa de memorial nas Ruinas da Igreja de São Paulo. Para isso, a placa deve estar alinhada com o topo do crucifixo em um ângulo de depressão de 60º. A figura 3.7 ilustra a visão lateral das ruinas. Os moradores já verificaram que a altura da base da igreja até o topo do crucifixo tem uma medida de 7,2 metros. Entretanto, ainda não sabem a distância da placa até as ruinas da igreja. Calcule essa distância.[7]

Questão 4: Em uma praça circular da Ilha de Itaparica, a prefeitura deseja plantar alguns cajueiros. A praça possui apenas 2 mudas de cajueiro (C1 e C2), a primeira na entrada da

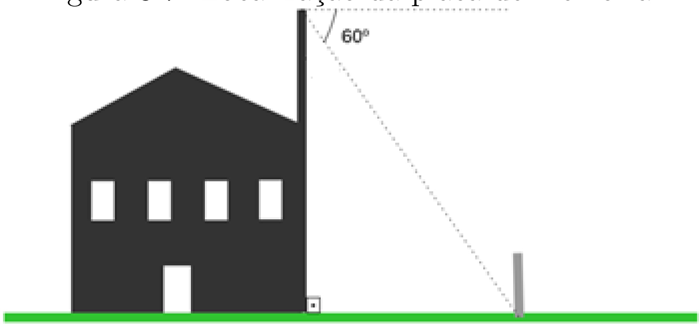
[7]Adaptado de Oliveira (2014)

Figura 3.6: Cabos da ponte



Fonte: A autora (2019)

Figura 3.7: Localização da placa de memorial



Fonte: A autora (2019)

praça e outra a um ângulo de 30º em relação à primeira, como mostrado na Figura 3.8. O projeto deverá realizar o plantio de mais 3 unidades (C3, C4 e C5) e a equipe do projeto resolveu plantar as novas mudas em locais cujos ângulos tivessem uma relação de simetria com o ângulo entre as duas primeiras mudas. Para isso, utilizarão relações entre ângulos no ciclo trigonométrico. Pensando na praça como o ciclo trigonométrico, C1 estaria na posição de origem e C2 ocupa um espaço no primeiro quadrante. As outras três mudas serão dispostas nos outros quadrantes.

O ângulo para a C3 tem uma relação suplementar com 30º.

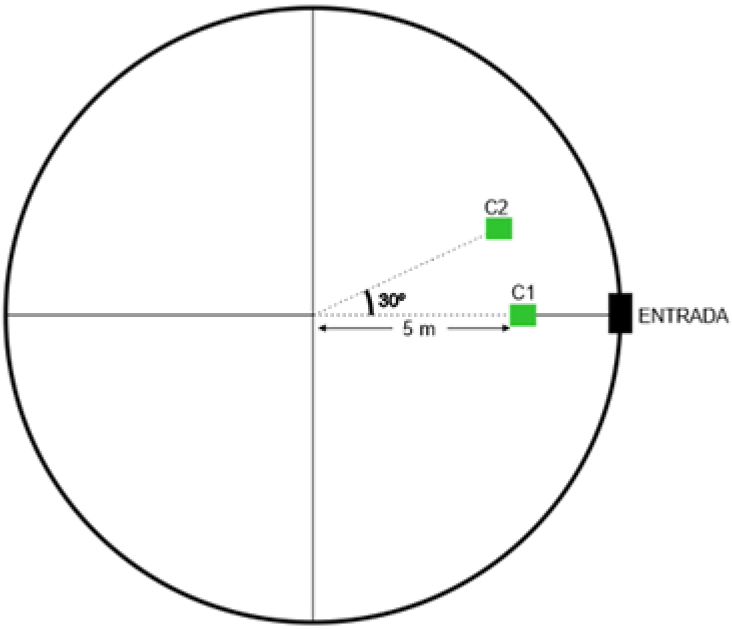
O ângulo para a C4 tem uma relação replementar com 30º.

O ângulo para a C5 tem uma relação explementar com 30º.

Calcule os valores desses ângulos.

Sabendo que as mudas devem ser plantadas a 5 metros de distância do centro da praça para atender aos requisitos do sistema de irrigação, qual é a distância entre C2 e C3? E qual a distância entre C3 e C4? A Figura 3.8 ilustra o esquema da plantação.

Figura 3.8: Esquema da plantação



Fonte: A autora (2019)

3.2 Algumas questões adicionais

Durante o processo de elaboração da Sequência Didática, diversos tipos de questões foram criados para possível aplicação no trabalho. Nesta seção estão ilustradas algumas questões sobre Lei dos Cossenos que não foram utilizadas na SD aplicada, pois foi priorizada a abordagem de conceitos básicos de trigonometria devido ao perfil da turma. Estas questões podem servir para elaborar uma SD posterior sobre o tema.

Questão 1: Outra etapa do estudo da ponte é verificar sua extensão, que vai de Salvador (SSA) à ilha de Itaparica (ITA). Eles não possuem recursos para medição de distâncias em alto mar, mas conseguem determinar ângulos em distâncias de até 10 km. Uma solução é visitar algumas ilhas da região (I1, I2, I3) para realizar medidas, além de utilizar alguns dados geográficos disponíveis. A ponte ainda não foi totalmente construída, mas existem pontos referenciais para a localização dos mastros (M1 e M2), o que poderá ajudar no estudo.

A primeira ilha visitada fica à 4 km de Itaparica. Em Itaparica, os estudantes mediram o ângulo entre a ponte e a Ilha 1, obtendo 60º. Ao chegarem em I1, mediram a angulação entre ITA e M1, obtendo 75º. Mediram também a entre M1 e I2, sendo 30º.

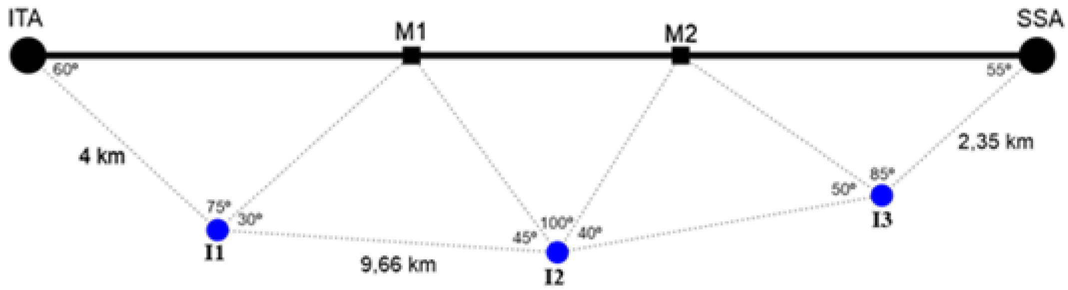
Na Ilha 2, que fica a 9,66 km da Ilha 1, mediram o ângulo entre M1 e M2, obtendo 100º. Mediram também a angulação entre I1 e M1 (45º), além da angulação entre M2 e I3 (40º).

Ao visitar a Ilha 3, mediram o ângulo entre o ponto M2 e SSA, obtendo 85º. Além disso, mediram a angulação entre M2 e I2, sendo 50º.

Por fim, chegaram em Salvador, que fica a 2,35 km de I3. Lá mediram o ângulo entre a ponte e I3, obtendo 55º.

Através dos ângulos calculados e das distâncias, os estudantes acreditaram em poder calcular as três medidas da ponte. Quais foram as medidas encontradas? E qual é a medida total da extensão da ponte? O trajeto para medir a extensão da ponte está representado na Figura 3.9

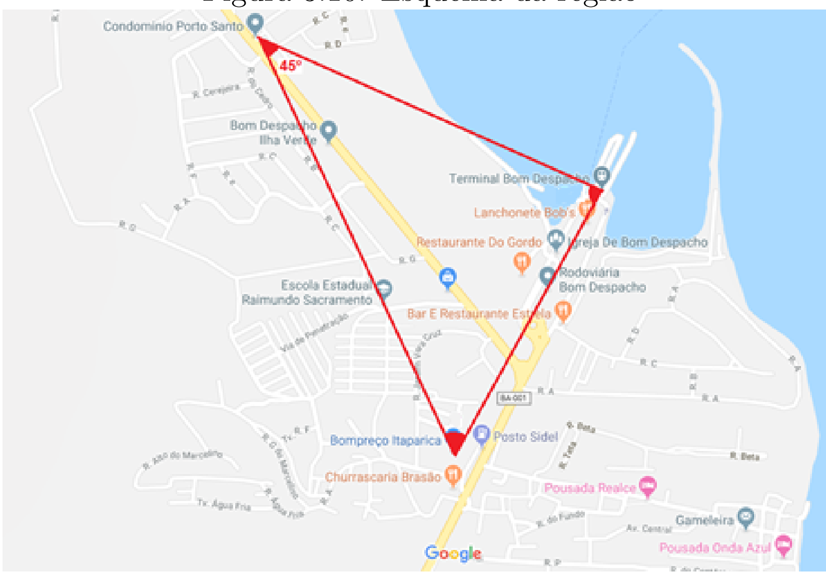
Figura 3.9: Trajeto para medir extensão da ponte



Fonte: A autora (2019)

Questão 2: Uma das possibilidades do projeto da ponte Salvador-Itaparica é ter uma conexão com o Terminal Bom Despacho. Para isso, deve-se colocar uma fiação que parte do supermercado Bompreço Itaparica chegando no terminal. Os alunos decidiram realizar um estudo topográfico da região, então se posicionaram no Condomínio Porto Santo, onde moram. Determinaram que o Terminal Bom Despacho e o supermercado Bompreço Itaparica estão a 7 km e 8 km do condomínio, respectivamente. Sabendo que os segmentos de reta que unem o condomínio ao terminal e ao supermercado formam um ângulo de 45°, qual foi o comprimento da fiação determinado por eles? Veja a Figura 3.10.

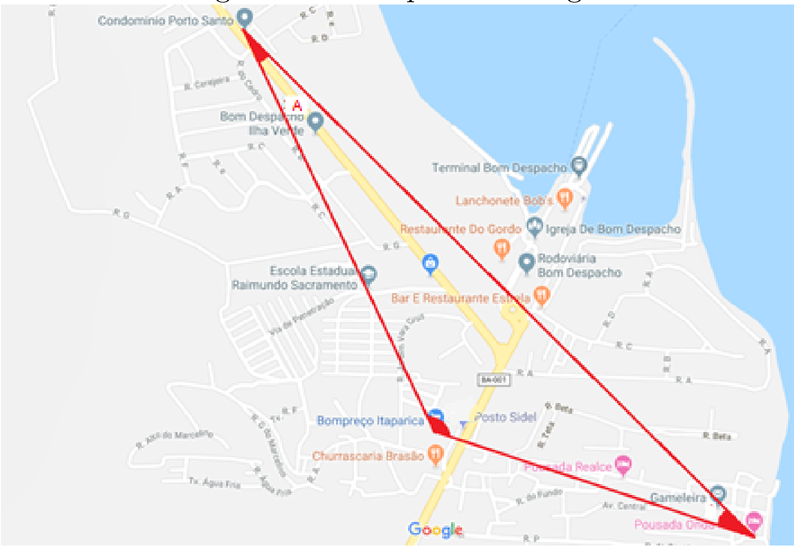
Figura 3.10: Esquema da região



Fonte: A autora (2019)

Questão 3: Os alunos verificaram a possibilidade de ao invés da ponte ter conexão no Terminal Bom Despacho, ter a conexão próxima à Pousada Onda Azul. Os estudantes continuam posicionados no Condomínio Porto Santo. Determinaram que a pousada Onda Azul e o supermercado Bompreço Itaparica estão a 12 km e 8 km do condomínio, respectivamente. Sabendo que a distância entre o supermercado e a pousada é de 7,5 km, qual é o ângulo A formado pelos segmentos de reta que unem o condomínio ao supermercado e à pousada? Veja a Figura 3.11.

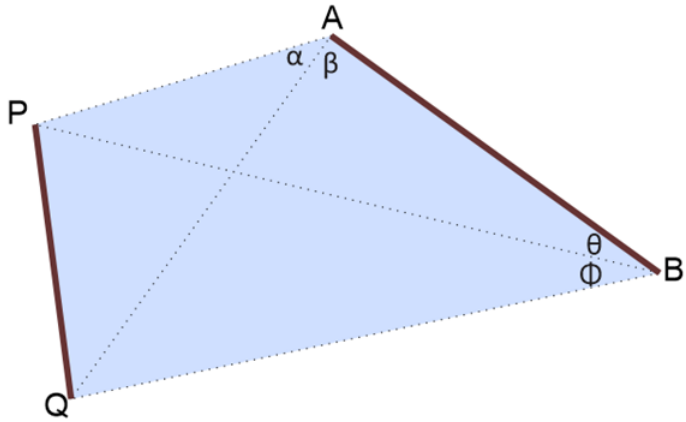
Figura 3.11: Esquema da região



Fonte: A autora (2019)

Questão 4: Em uma gincana realizada no Colégio Estadual Oceano, na ilha de Itaparica, os alunos foram desafiados a calcularem o tamanho da Ilha do Amor (distância de PQ) sabendo que a distância entre os pontos A e B na praia de Cacha Pregos é de 60 m. Como não seria possível atravessar o mar até a ilha, não é possível calcular a distância entre os pontos P e Q diretamente. Entretanto, os jovens construíram um teodolito caseiro para determinar os ângulos α, β, θ e ϕ, e assim determinar a medida da distância PQ. Verificaram que: $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$, $\theta = 25°$ e $\phi = 45°$. Qual é a distância de PQ?

Figura 3.12: Esquema da região - Praia de Cacha Pregos



Fonte: A autora (2019)

Capítulo 4

A Matemática por trás da proposta

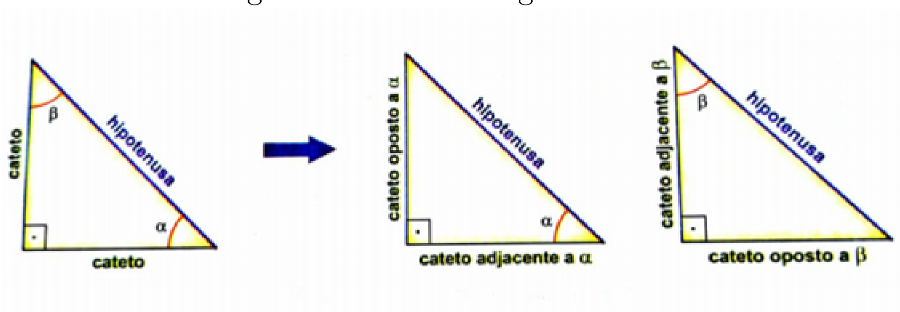
Nesse capítulo, descrevem-se os fundamentos de trigonometria que foram abordados, bem como a resolução das atividades propostas na SD. Isso é feito seguindo a organização da proposta descrita na Seção 3.1. A referência básica para este Capítulo é Lima et al (2006). Salientamos que o sistema de medida angular utilizado é o sexagesimal e que expressões decimais serão arredondadas ao centésimo mais próximo.

4.1 Fundamentos da trigonometria

4.1.1 Produção inicial

As Questões 1, 2, 3 e 4 utilizam conceitos de razões trigonométricas. Na figura 4.1 é possível observar um triângulo retângulo, identificando os ângulos, hipotenusa e catetos e, na sequência, é colocado o mesmo triângulo identificando a posição dos catetos com relação a cada um dos ângulos agudos (α e β).

Figura 4.1: Razões trigonométricas



Fonte: Silva (2019)

Como sabemos, para um ângulo agudo α definimos o seno, o cosseno e a tangente de α (escrevemos senα, cosα e tgα, respectivamente) por

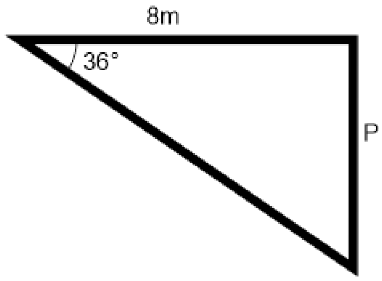
$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{Hipotenusa}}, \ \cos\alpha = \frac{\text{Cateto adjacente a } \alpha}{\text{Hipotenusa}} \ \text{ e } \ \text{tg}\alpha = \frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{Cateto adjacente a } \alpha}.$$

Por semelhança de triângulos, fixado um ângulo agudo α, essas razões independem do tamanho do triângulo retângulo. Também, decorre dessa definição que

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Questão 1: Seja o triângulo retângulo cuja medida do ângulo agudo formado entre a superfície da água e a corrente esticada é 36° e a medida do cateto adjacente a este ângulo é de 8 m (distância entre o local onde foi jogada a âncora e a posição final do barco). Seja também P a medida do cateto oposto ao ângulo agudo (profundidade do mar no ponto onde a âncora foi lançada), como ilustra a Figura 4.2.

Figura 4.2: Triângulo da Questão 1



Fonte: A autora (2019)

Sabemos que o valor da tangente do ângulo de 36° é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a este ângulo, ou seja, $P/8$, e, por outro lado, é também a razão entre o valor do seno e do cosseno deste ângulo. Então, considerando os dados do problema temos

$$\text{tg}36^\circ = \frac{P}{8} = \frac{0,60}{0,80} \Leftrightarrow \frac{P}{8} = 0,75 \leftrightarrow P = 6 \text{ m}.$$

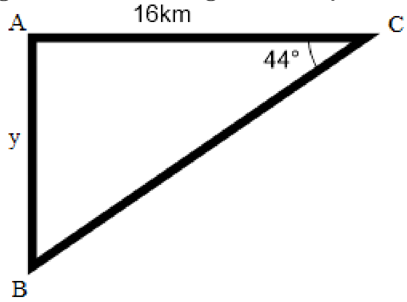
Nas Questões 2, 3 e 4 será preciso usar o Teorema de Pitágoras o qual estabelece que, num triângulo retângulo qualquer, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Questão 2: Seja o triângulo retângulo ABC cuja medida do ângulo agudo é 44°, a medida do cateto adjacente a este ângulo é de 16 km e seja y a medida do cateto oposto ao ângulo agudo (distância entre os municípios), como ilustrado na Figura 4.3.

Da figura 4.3 temos que tg 44°= $y/16$. Como foi dado apenas o valor do seno deste ângulo, considere um triângulo retângulo semelhante com cateto oposto ao ângulo de 44° medindo 69 e hipotenusa medindo 100. Se o cateto adjacente a 44° medir x, aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$100^2 = 69^2 + x^2 \Rightarrow x \approx 72,38.$$

Figura 4.3: Triângulo da Questão 2



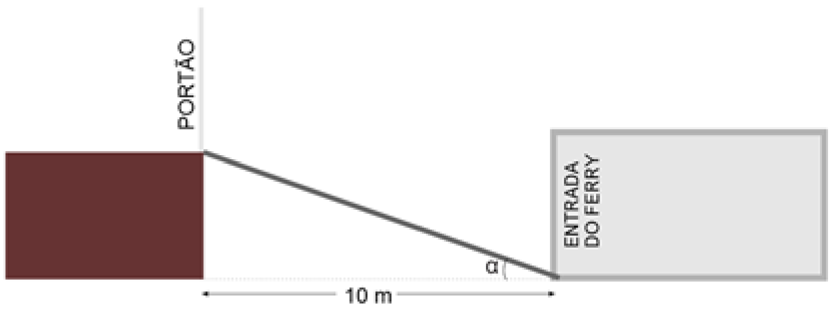
Fonte: A autora (2019)

Logo,

$$\text{tg}44° = \frac{y}{16} \approx \frac{69}{72,38} \Rightarrow y \approx 15,25 \text{ km}.$$

Questão 3: Seja o triângulo retângulo com ângulo agudo α, medida do cateto adjacente a este ângulo igual a 10 m (distância entre o portão e a entrada do Ferry) e com hipotenusa medindo R (comprimento da rampa), como ilustrado na Figura 4.4.

Figura 4.4: Rampa de acesso ao Ferry-boat



Fonte: A autora (2019)

Veja que $\cos\alpha = \dfrac{10}{R}$. O problema fornece $\text{sen}\alpha = 5/13$, assim considerando um triângulo retângulo semelhante cujo cateto oposto a α mede 5 e a hipotenusa mede 13, então chamando de x a medida do cateto adjacente a α, pelo teorema de Pitágoras, temos

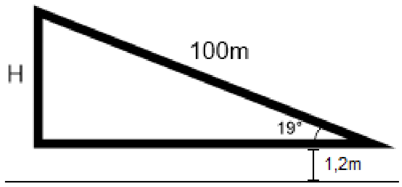
$$13^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x = 12,$$

assim,

$$\cos\alpha = \frac{10}{R} = \frac{12}{13} \Rightarrow R \approx 10,83 \text{ m}.$$

Questão 4: Na Figura 4.5 é mostrado o triângulo retângulo que descreve o cenário de Paulinho empinando arraia. Um ângulo agudo mede 19°, a hipotenusa mede 100 m (comprimento da linha) e o cateto oposto ao ângulo agudo (altura da arraia em relação à mão de Paulinho) mede H.

Figura 4.5: Triângulo da Questão 4



Fonte: A autora (2019)

Da figura, temos que sen 19°= $H/100$. Como tg 19°= 35/100, considerando um triângulo retângulo semelhante com catetos oposto e adjacente a 19° medindo 35 e 100, respectivamente, se x for a medida da hipotenusa, pelo teorema de Pitágoras temos

$$x^2 = 35^2 + 100^2 \Rightarrow x \approx 105,95 \text{ m}.$$

Logo,

$$\text{sen}19^\circ = \frac{H}{100} \approx \frac{35}{105,95} \Rightarrow H \approx 37,08 \text{ m}.$$

Portanto, a altura da arraia em relação ao solo é aproximadamente 37,08 m + 1,20 m = 38,28 m.

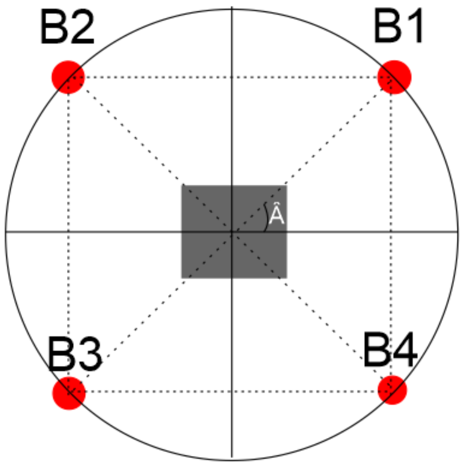
Para abordar a Questão 5 é necessária a seguinte

Definição 4.1 *Dizemos que dois ângulos A e B são*

- *Complementares, se sua soma é igual a um ângulo reto, isto é,* $A + B = 90°$*,*
- *Suplementares, se sua soma é igual a um ângulo raso, isto é,* $A + B = 180°$*,*
- *Explementares, se sua diferência (do maior menos o menor) é igual a um ângulo raso, isto é,* $A - B = 180°$ *(supondo* $A > B$*).*
- *Replementares, se sua soma é igual ao ângulo de uma volta, isto é,* $A + B = 360°$*.*

Questão 5: Considere um círculo trigonométrico de centro no vértice do ângulo A, onde os ângulos relativos à localização das boias B2, B3 e B4 são α, β e ϕ, respectivamente. A Figura 4.6 ilustra o esquema da questão. Assim, da Definição 4.1 temos
α = 180º - 40º = 140º (suplementar)
β = 180° + 40° = 220° (explementar)
ϕ = 360° - 40° = 320° (replementar).

Figura 4.6: Ciclo trigonométrico da Questão 5



Fonte: A autora (2019)

4.1.2 Módulos

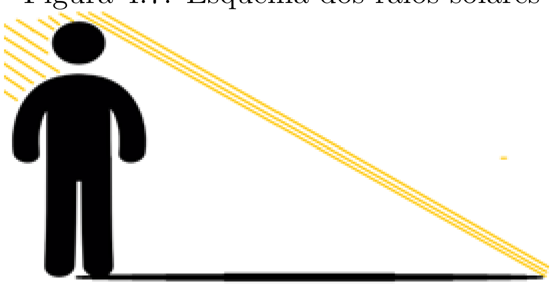
Etapa 1: os alunos irão colocar as medidas de altura e sombra na tabela indicada. Como diversas respostas podem ser adotadas, iremos trabalhar com uma resposta obtida por um teste feito pela professora, que está indicada na Tabela 4.1.

	Altura	Sombra
Aluno 1	174 cm	188 cm
Aluno 2	179 cm	190 cm

Tabela 4.1: Medidas de alturas e sombras

Etapa 2: A figura plana formada pelo aluno e sua sombra é um triângulo, como ilustrado na Figura 3.3.

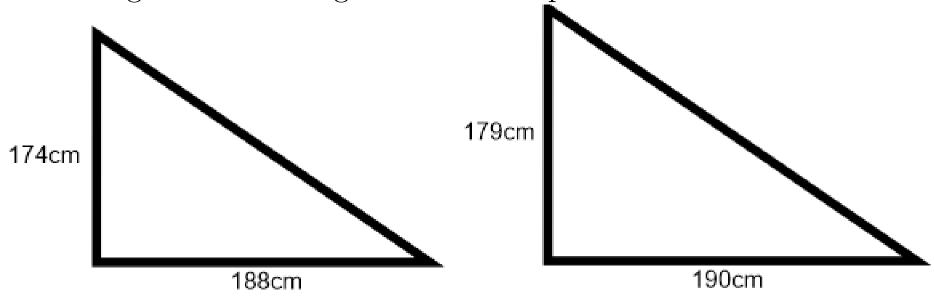
Figura 4.7: Esquema dos raios solares



Fonte: A autora, 2019

Etapa 3: As figuras devem ser triângulos retângulos, como representado na Figura 4.8.

Figura 4.8: Triângulos formados pelas altura e sombra



Fonte: A autora (2019)

Etapa 4: Calculando o quociente entre o comprimento da altura e da sombra para o exemplo da Etapa 1, obtém-se $\dfrac{174}{188} \approx 0,93$ para o Aluno 1 e $\dfrac{179}{190} \approx 0,94$ para o Aluno 2.

Etapa 5: Como mostrado na Figura 4.7, independentemente da altura do aluno, o ângulo agudo que os raios do sol formam com o solo será sempre o mesmo (a medição é feita no mesmo horário), assim, todos os triângulos retângulos serão semelhantes. Portanto, a tangente do ângulo agudo adjacente ao chão será a mesma para todos os alunos.

Etapa 6: Sendo x e y o comprimento da hipotenusa para o triângulo retângulo do Aluno 1 e do Aluno 2, respectivamente, o teorema de Pitágoras nos dá $x^2 = 174^2+188^2 \Rightarrow x \approx 256,16$ e $y^2 = 179^2 + 190^2 \Rightarrow y \approx 261,03$.

A Tabela 4.2 ilustra os cálculos e resultados de seno e cosseno para os dois alunos.

Tabela 4.2: Cálculo do seno e cosseno

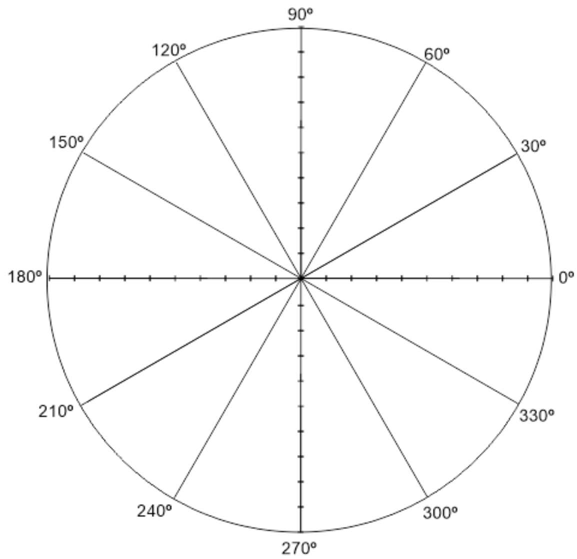
	sen $A = \frac{\text{Altura}}{\text{Hipotenusa}}$	cos$A = \frac{\text{Comprimento da sombra}}{\text{Hipotenusa}}$
Aluno 1	$\frac{174}{256{,}16} \approx 0,68$	$\frac{188}{256{,}16} \approx 0,73$
Aluno 2	$\frac{179}{261{,}03} \approx 0,68$	$\frac{190}{261{,}03} \approx 0,73$

Etapa 7: Pelo exposto na Etapa 5 todas as razões trigonométricas do ângulo agudo adjacente ao chão independem das dimensões do triângulo retângulo, assim, serão as mesmas para todos os alunos.

Módulo 2 - Ciclo trigonométrico

Antes da Etapa 1, os alunos irão desenhar um círculo trigonométrico, obtendo uma ilustração semelhante à Figura 4.9.

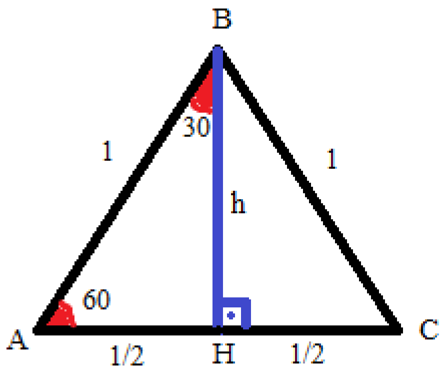
Figura 4.9: Ciclo trigonométrico



Fonte: A autora (2019)

Etapa 1: Na Figura 4.10, o triângulo ABC é equilátero de lado 1. A altura BH relativa ao lado AC é também bissetriz do ângulo B e mediana (relativa ao mesmo lado). Logo, H é ponto médio de AC e, assim, $\overline{AH} = \overline{HC} = 1/2$. Agora, pelo teorema de Pitágoras, $h^2 = 1 - (1/2)^2$, isto é, $h = \sqrt{3}/2$. Dessa forma, no triângulo retângulo AHB temos, sen30º=cos60º $= 1/2$, cos30º=sen60º$= \sqrt{3}/2$, tg30º$= 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$ e tg60º$= \sqrt{3}$.

Figura 4.10: Triângulo de 30º e 60º

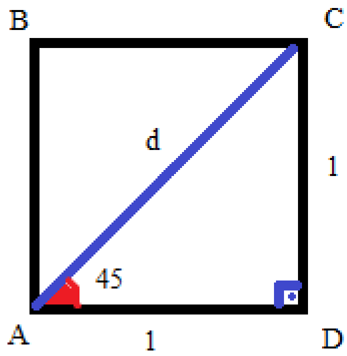


Fonte: A autora (2019)

Na Figura 4.11, $ABCD$ é um quadrado de lado 1. A diagonal AC é bissetriz do ângulo reto A, assim, o triângulo retângulo ADC é isósceles com ângulo agudo igual a 45º. Pelo

Teorema de Pitágoras, a diagonal AC tem comprimento $d = \sqrt{2}$. Logo, a partir do triângulo ADC obtemos sen45º=cos45º $= 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ e tg45º$= 1$.

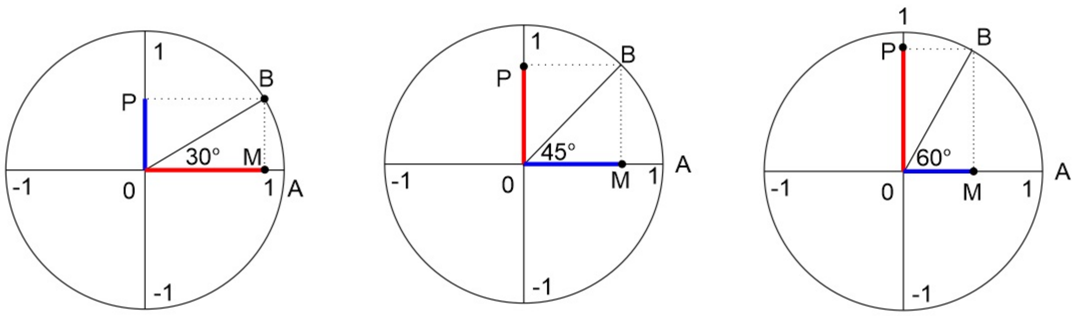
Figura 4.11: Triângulo retângulo de 45º



Fonte: A autora (2019)

No círculo trigonométrico, os arcos de 30°, 45º e 60º são ilustrados na Figura 4.1.2.

Figura 4.12: Arcos de 30°, 45° e 60° no círculo trigonométrico



Fonte: Silva (2019)

um resumo com os valores obtidos pode ser visto na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Razões trigonométricas para 30°, 45° e 60°

Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$

Etapa 2: Encontram-se os ângulos simétricos para os ângulos 30°, 45° e 60° diretamente no círculo trigonométrico. É adequado evidenciar a relação entre este tipo de simetrias com os conceitos de classificação de ângulos vistos na Definição 4.1 da Produção Inicial. Os resultados podem ser vistos na Tabela 4.4.

Tabela 4.4: Ângulos simétricos

Ângulos	Resultado
Suplementar de 30º	150°
Replementar de 30º	330°
Explementar de 30º	210°
Suplementar de 45º	135°
Replementar de 45º	315°
Explementar de 45º	225°
Suplementar de 60º	120°
Replementar de 60º	300°
Explementar de 60º	240°

Etapa 3: O suplementar de um ângulo agudo está localizado no 2º quadrante do ciclo trigonométrico, então possui valor de seno positivo e valores de cosseno e tangente negativos. Como ângulos suplementares são simétricos com relação ao eixo vertical, o módulo dos senos, cossenos e tangentes são os mesmos, mudando os sinais do cosseno e da tangente, que são negativos.

O explementar de um ângulo agudo está localizado no 3º quadrante do ciclo trigonométrico, então possui valores de seno e cosseno negativos e valor de tangente positivo. Como ângulos explementares são simétricos com reação à origem, o módulo dos senos, cossenos e tangentes são os mesmos, mudando os sinais de seno e cosseno, que são negativos.

O replementar de um ângulo agudo está localizado no 4º quadrante do ciclo trigonométrico, então possui valores de seno e tangente negativos e valor de cosseno positivo. Como ângulos replementares são simétricos com relação ao eixo horizontal, o módulo dos senos, cossenos e tangentes são os mesmos, mudando os sinais do seno e da tangente, que são negativos.

Os resultados podem ser vistos na Tabela 4.5.

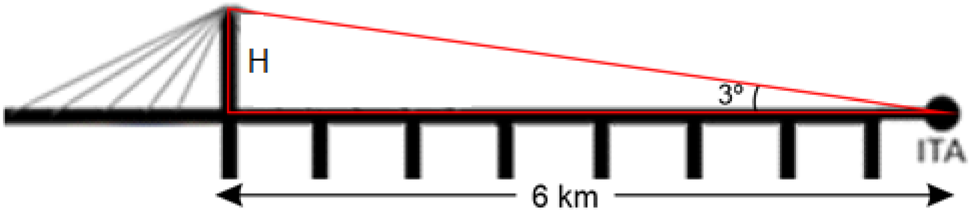
Tabela 4.5: Razões trigonométricas para ângulos simétricos

Ângulos	Seno	Cosseno	Tangente
Suplementar de 30º	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
Explementar de 30º	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
Replementar de 30º	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
Suplementar de 45º	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
Explementar de 45º	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
Replementar de 45º	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
Suplementar de 60º	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
Explementar de 60º	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$
Replementar de 60º	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$

4.1.3 Produção final

Questão 1: Considere o triângulo retângulo com um ângulo agudo de 3°, medida do cateto adjacente a este ângulo igual a 6 km e seja H a medida do cateto oposto ao ângulo agudo (altura do mastro), como ilustrado na Figura 4.13.

Figura 4.13: Mastro da ponte



Fonte: A autora (2019)

Da figura temos tg3°$= H/6$. Como foi dado apenas o valor do seno deste ângulo, considere outro triângulo retângulo semelhante com cateto oposto ao ângulo de 3° medindo 5 e hipotenusa medindo 100. Sendo x o cateto adjecente a 3°, pelo teorema de Pitágoras temos

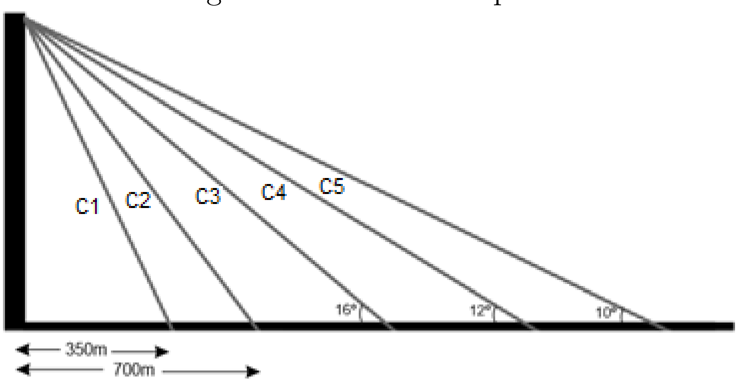
$$100^2 = 5^2 + x^2 \Rightarrow x \approx 99,87.$$

Portanto, tg3° $= \frac{H}{6} \approx \frac{5}{99,87} \Rightarrow H \approx 0,3$ km.

Questão 2: Para os dois primeiros cabos, será utilizado o teorema de Pitágoras, tendo a altura do mastro e as distâncias do cabos. Nessa questão, os cálculos serão feitos na unidade de metros, então é necessário converter a unidade da altura encontrada na Questão 1, isto é, $H \approx 0,3$ km $= 300$ m.

A Figura 4.14 ilustra os cabos da ponte.

Figura 4.14: Cabos da ponte



Fonte: A autora (2019)

Cabo 1: Os catetos do triângulo valem 300 m e 350 m, enquanto a hipotenusa é o comprimento do cabo (C1). Aplicando o Teorema de Pitágoras, $(C1)^2 = 300^2 + 350^2 \Rightarrow C1 = 460,98$ m.

Cabo 2: Para o segundo cabo, aplicando o Teorema de Pitágoras dá $(C2)^2 = 300^2 + 700^2 \Rightarrow C2 \approx 761,58$ m.

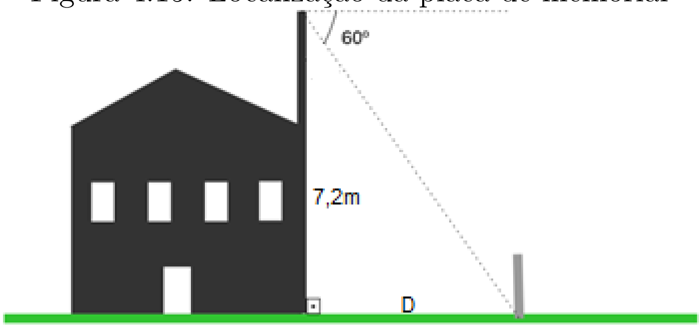
Cabo 3: A altura do mastro (300 m) é o cateto oposto ao ângulo de 16°. Veja que sen16° $= 300/C3$. Como foi dado apenas o valor do cosseno, considere outro triângulo retângulo semelhante com cateto adjacente a 16° medindo 96 e hipotenusa medindo 100. Considerando que o cateto oposto a 16° mede x m, o teorema de Pitágoras nos dá $100^2 = 96^2 + x^2 \Rightarrow x = 28$ m. Portanto, sen16°$= 300/C3 = 28/100 \Rightarrow C3 \approx 1071,43$ m.

Cabo 4: A altura do mastro (300 m) é o cateto oposto ao ângulo de 12°. Considerando o comprimento do cabo (C4), sabemos que sen14° $= 300/C4$. Assim, sen12°$\approx 300/C4 = 0,21 \Rightarrow C4 \approx 1428,57$ m.

Cabo 5: A altura do mastro (300 m) é o cateto oposto ao ângulo de 10°. Considerando o comprimento do cabo (C5), sabemos que sen10°$= 300/C5$. Logo, sen10°$= 300/C5 = 17/100 \Rightarrow C5 \approx 1764,71$ m.

Questão 3: Seja o triângulo retângulo cuja medida do ângulo de depressão é 60° e a medida do cateto oposto a este ângulo é de 7,2 m (altura da base da igreja até o topo do crucifixo). E seja D a medida do cateto adjacente a este ângulo (distância da placa até às ruínas da igreja), como ilustra a Figura 4.15.

Figura 4.15: Localização da placa de memorial



Fonte: A autora (2019)

Da figura segue que tg60°$= 7,2/D$, mas, tg60°$= \sqrt{3}$, portanto $D = \frac{7,2}{\sqrt{3}} \approx= 4,16$ m.

Outra possibilidade de resolução é utilizar o outro ângulo agudo do triângulo retângulo. Como um dos ângulos é 60°, o outro ângulo agudo é igual a 30°. Daí, $\sqrt{3}/3 =$tg30°$= D/7,2$, assim, como antes, $D \approx 4,16$ m.

Questão 4: Através das classificações de ângulos já vistas na Questão 5 da Produção Inicial, verifica-se que:

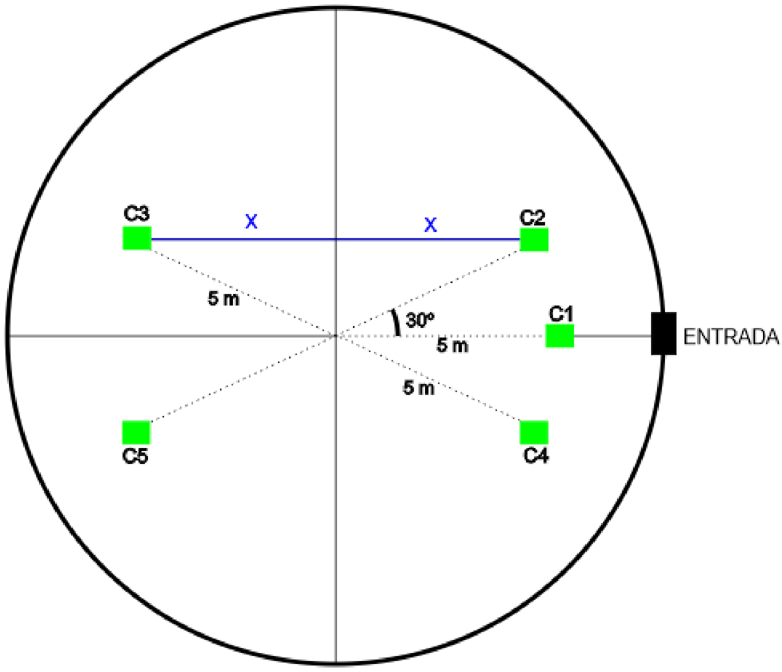
Se ângulo para a C3 tem uma relação suplementar com 30º, então equivale a 150° (180°-30°).

Se ângulo para a C4 tem uma relação replementar com 30º, então equivale a 330° (360°-30°).

Se ângulo para a C5 tem uma relação explementar com 30º, então equivale a 210° (180°+30°).

O esquema pode ser visualizado na Figura 4.16.

Figura 4.16: Esquema da plantação



Fonte: A autora (2019)

Os cajueiros serão plantados em um raio de 5m do centro, então a distância entre C3 e C4 equivale a duas vezes o raio, ou seja 10 m. Para calcular a distância entre C2 e C3, da Figura 4.16, segue que X é o cateto adjacente a 30° no triângulo notável de 30° e 60° com hipotenusa (distância do centro aos cajueiros) igual a 5, daí, $X = 5\sqrt{3}/2$. Portanto, a distância entre C2 e C3 é de $5\sqrt{3}$ m.

4.2 As Leis dos Senos e dos Cossenos

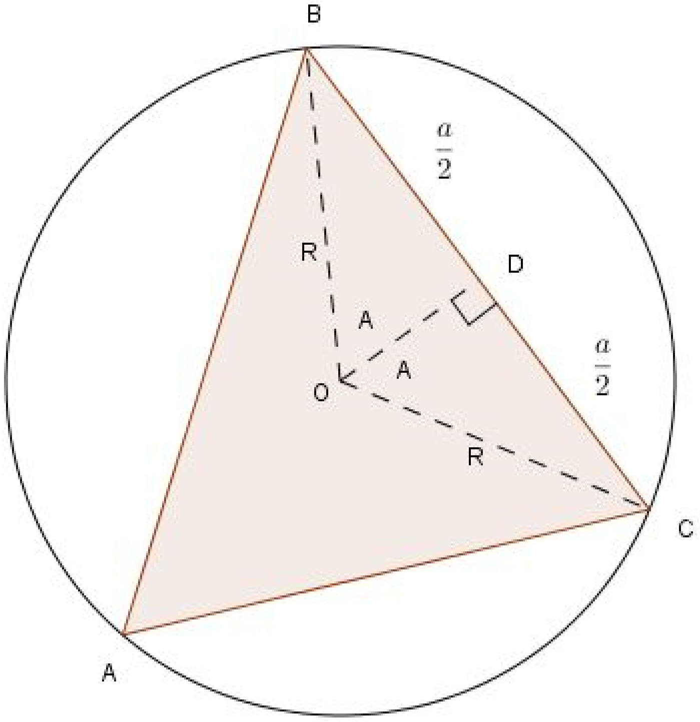
Na Seção 3.2 colocamos questões adicionais que foram criadas no intuito de desenvolver uma SD que aborde pelo menos a Lei dos Cossenos. Nesta seção são enunciadas e demonstradas tanto a Lei dos Senos quanto a Lei dos Cossenos e como aplicação é apresentada uma técnica usada em topografia para calcular a distância entre pontos de difícil acesso.

Teorema 4.2 (Lei dos Senos) *Em todo triângulo os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é duas vezes o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.*

Prova. Seja ABC um triângulo acutângulo como mostra a Figura 4.17

O triângulo BOC é isósceles e a altura OD é também bissetriz de $\angle BOC$, assim, $\angle COD = \angle A$. Agora, no triângulo CDO temos $\operatorname{sen} A = \frac{a/2}{R}$, daí, $2R = a/\operatorname{sen} A$. De

Figura 4.17: Triângulo inscrito



Fonte: A autora (2019)

forma análoga se obtém $2R = b/\text{sen}B$ e $2R = c/\text{sen}C$. Portanto,

$$2R = \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}.$$

A demonstração para o caso de um triângulo obtusângulo é similar. ∎

Teorema 4.3 (Lei dos Cossenos) *Em todo triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o dobro do produto desses lados vezes o cosseno do ângulo que formam.*

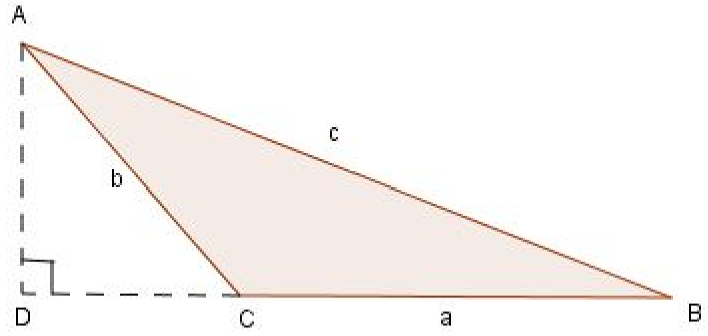
Prova. Demonstraremos o Teorema no caso de um triângulo obtusângulo como mostra a Figura 4.18 Como $\angle ACD$ e $\angle C$ são suplementares, no triângulo retângulo ADC temos

$$\overline{AD} = b\text{sen}(180° - C) = b\text{sen}C \text{ e}$$
$$\overline{DC} = b\cos(180° - C) = -b\cos C.$$

Usando isto e o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADB, temos

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 &\Rightarrow c^2 = (b\text{sen}C)^2 + (-b\cos C + a)^2 \\ &\Rightarrow c^2 = b^2\text{sen}^2C + b^2\cos^2C - 2ab\cos C + a^2 \\ &\Rightarrow c^2 = b^2(\underbrace{\text{sen}^2C + \cos^2C}_{=1}) - 2ab\cos C + a^2 \\ &\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.\end{aligned}$$

Figura 4.18: Triângulo obtusângulo

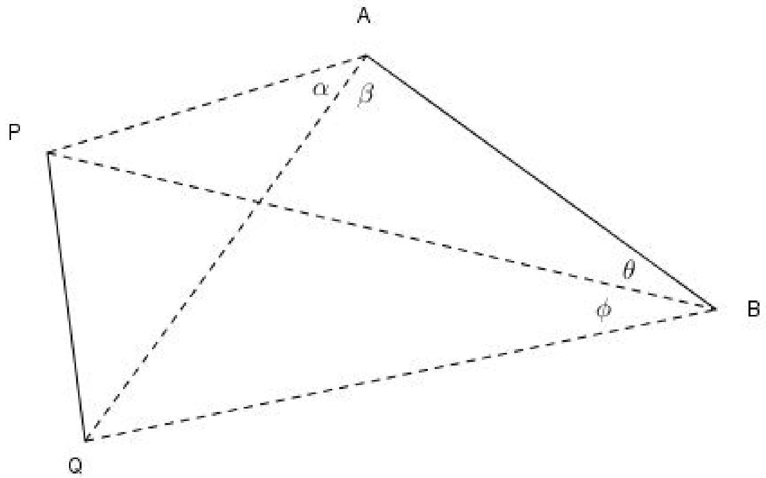


Fonte: A autora (2019)

Relações similares são provadas de forma análoga para os outros ângulos do triângulo. ■

Observação 4.4 *Uma técnica usada em topografia para o cálculo de distâncias entre pontos de difícil acesso é dada pela Figura 4.19*

Figura 4.19: Aplicação no cálculo de distâncias



Fonte: A autora (2019)

É conhecida a distância entre os pontos A e B e devido a problemas de acesso (por exemplo um rio) não é possível calcular diretamente a distância entre os pontos P e Q, mas eles podem ser vistos de forma que é possível determinar os ângulos α, β, θ e ϕ (por exemplo, usando um teodolito).

Conhecendo-se os ângulos α, β, θ e ϕ então são conhecidos $\angle APB$ e $\angle AQB$, logo, a aplicação da lei dos Senos no triângulos APB e AQB nos permitirá determinar $\overline{PB}$ e $\overline{QB}$. Por fim, usando a lei dos Cossenos no triângulo PBQ determinaremos $\overline{PQ}$.

Capítulo 5

Discussão

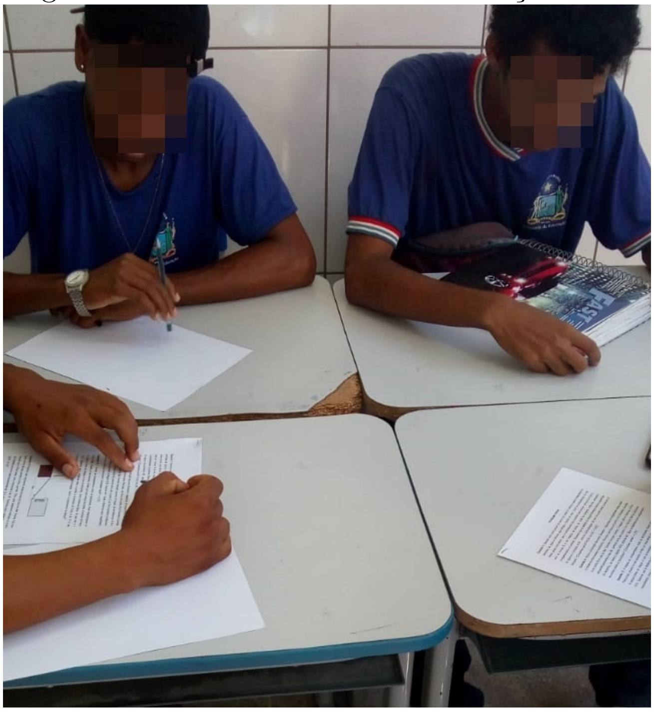
Nesse capítulo, está descrito o relato da experiência da sequência didática, mostrando como foi a participação dos alunos, as dificuldades encontradas e como a professora os orientou para superá-las.

A sequência didática apresentada na Seção 3.1 foi aplicada junto aos alunos do segundo ano do Ensino Médio, do turno vespertino, do Colégio Estadual Desembargador Júlio Virginio de Santana em 17 de julho de 2019. A atividade foi realizada no turno oposto ao regular dos alunos, com uma participação de 22 estudantes que buscavam uma melhor compreensão dos conteúdos de trigonometria já estudados no primeiro semestre.

Os estudantes foram divididos em 4 grupos, formados com 4 alunos cada e um composto por 6 alunos. Os alunos trabalharam em duplas, mas compartilhando os conhecimentos com todo o grupo formado. A proposta do trabalho foi apresentada, explicando os objetivos e foi realizada uma discussão sobre a importância do estudo da trigonometria. Foi explicado que a trigonometria pode ser utilizada para medir distâncias inacessíveis, como por exemplo o raio da Terra, a distância relativa do Sol e da Lua, a localização de um navio em alto mar, a altura de pirâmides e prédios e a largura de rios. Também foram discutidos alguns conceitos trigonométricos, como seno, cosseno e tangente. Em seguida, deu-se início a produção inicial. Na Figura 5.1 é possível verificar os alunos realizando essa etapa.

Já na primeira questão, foi possível notar inúmeras dificuldades que os alunos apresentavam. Foi solicitado que relessem a questão e fizessem um desenho que representasse a situação, porém poucos conseguiam compreender cabalmente o problema. Após várias tentativas, a professora fez o desenho do triângulo formado pela âncora, o barco e a superfície do mar no quadro para ajudar na compreensão e solicitou que localizassem as informações dadas e reconhecessem o que era solicitado, ou seja, a incógnita. Podemos observar nesta etapa o primeiro passo que é recomendado por Polya. Após identificarem as informações, perguntou-se qual das razões trigonométricas seriam usadas para resolver o problema. Entretanto, ao verificarem que não havia o valor da razão necessária para fazer os cálculos, os alunos solicitaram ajuda à professora sobre como poderiam resolver o problema sem essa informação. Alguns dividiram o valor do seno pelo valor do cosseno para encontrar o valor da tangente do ângulo. A professora fez diversas indagações, questionando quais eram as informações dadas da questão, qual o objetivo na questão e quais razões trigonométricas seriam utilizadas. A maioria apenas conseguiu resolver a questão após esses direcionamentos que são sugeridos por Polya (estabelecer um plano e executá-lo).

Figura 5.1: Alunos realizando Produção Inicial



Fonte: A autora, 2019

Na segunda questão, percebemos que os alunos não estavam acostumados com o processo de a partir do conhecimento de uma função trigonométrica de um ângulo agudo encontrar as outras usando geometria, isto é, desenhar um triângulo retângulo, a partir do valor dado colocar valores adequados em dois lados, usar o teorema de Pitágoras para calcular o comprimento do terceiro lado e finalmente, conhecendo o comprimento de todos os lados, calcular as outras funções trigonométricas do ângulo usando sua definição. Como isto não estava claro para eles, foi realizada uma explanação no quadro para auxiliá-los

Os alunos apresentavam problemas básicos relacionados à disciplina Geometria, por exemplo, na expressão "ângulo ACB" eles não mostraram familiaridade com a notação, pois não identificaram qual seria o vértice do ângulo. Também, perguntaram sobre o significado da palavra "perpendicularmente". Em ambos os casos a professora teve que explicar notações e colocar exemplos. Como nenhum aluno questionou o que era um teodolito, a professora lançou para eles tal pergunta. Nenhum deles soube responder, o que levou a professora a proferir uma explicação sobre teodolito, mostrando um do tipo caseiro, fazendo posteriormente uma demonstração na quadra da escola e simulando essa questão. Foi explicado que o teodolito é utilizado para medir distâncias inacessíveis a partir da medida de ângulos e explicou-se que o teodolito caseiro é feito com um copo de plástico com tampa acima de uma fotocópia de um transferidor alinhada e colada numa base redonda de papelão, um palito de dente e um canudo. A Figura 5.5 ilustra o teodolito caseiro utilizado.

Nas questões 3 e 4, os alunos apresentaram mais dificuldades, que não eram apenas no conteúdo de trigonometria, mas também na resolução de proporções, equações e potências numéricas. Essas dificuldades podem ser observadas nas imagens do Apêndice B. A professora frisou a importância de entender o problema, pediu para eles relerem e na sequência realizou questionamentos que consolidaram o entendimento dos alunos sobre o que estava sendo pedido pelo problema. A partir daí eles conseguiram evoluir nas ideias para finalmente resolver o problema.

Na última questão, tiveram dificuldade de compreender as simetrias, então foi solicitado a imaginarem que o vértice do ângulo A fosse o centro de um ciclo trigonométrico, e que as boias fossem as extremidades dos arcos que se originam no píer. Assim, aplicando o primeiro passo na resolução de problemas por Polya. A partir disso, eles lembraram das relações entre os ângulos, pois se tratava de um conteúdo já trabalhado em sala de aula e conseguiram traçar um plano, continuando os procedimentos de resolução de problemas por Polya. A professora aproveitou para fazer a associação da simetria com a definição de ângulos suplementares, replementares e explementares, como apresentado na Seção 4.1 .

Logo na produção inicial, os alunos conseguiram fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos sobre o conhecimento da matemática, estabelecendo diversas relações entre eles. Também conseguiram interagir com seus pares cooperativamente, trabalhando de forma coletiva na busca de soluções para problemas propostos e respeitando a forma de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

O tempo de aplicação planejado para a produção inicial foi de 3 horas. Essa etapa foi finalizada no mesmo dia, restando ainda 15 minutos para o fim do tempo planejado. Esse tempo foi utilizado para fazer as medidas das alturas de cada dupla, que seriam necessárias na aplicação do Módulo 1. Na Figura 5.2 é possível ver os alunos medindo alturas para o módulo.

Figura 5.2: Alunos medindo alturas

Fonte: A autora (2019)

No dia seguinte, como o tempo estava chuvoso, não foi possível dar continuidade ao módulo, em que seriam feitas medidas das sombras. Então, prosseguiu-se para o Módulo 2. Essa etapa foi realizada com 20 alunos, que foram divididos em 5 grupos com duas duplas cada e com um tempo de 3 horas.

Os objetivos deste módulo foram explicados e alguns estudantes quiseram desenhar o círculo utilizando o transferidor, pois não possuíam o hábito de usar o compasso. Então, a professora ensinou a cada grupo como utilizar os instrumentos, como registrado na Figura 5.3.

Figura 5.3: Professora explicando uso do compasso

Fonte: A autora (2019)

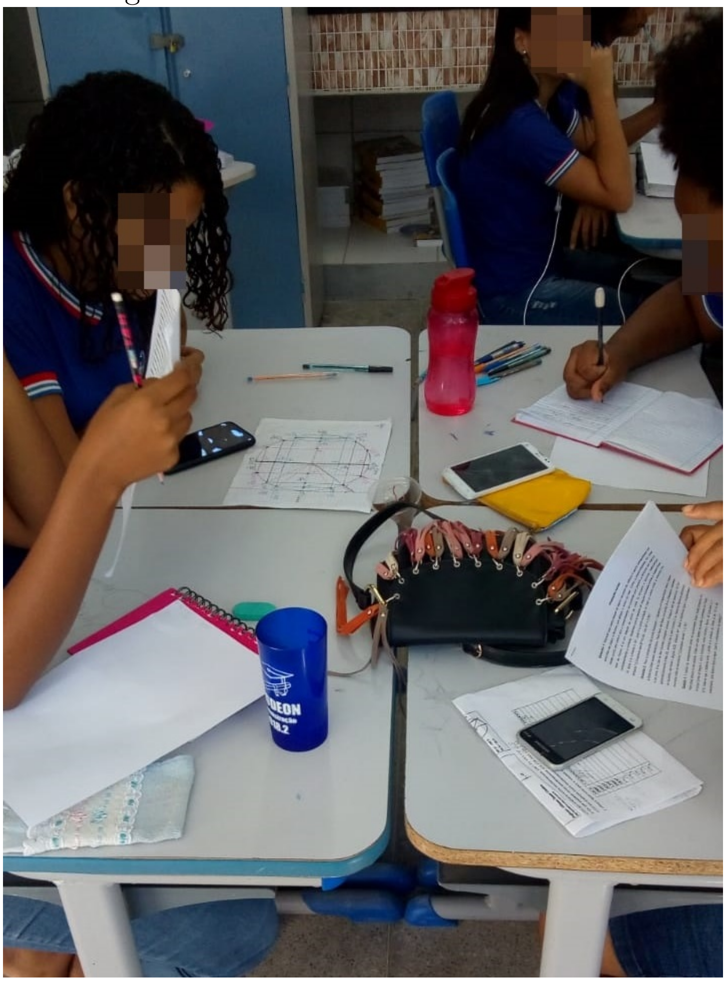
Apesar das dificuldades, eles conseguiram construí-lo, fazendo os eixos perpendiculares. Apesar de não ser solicitado na questão, eles também traçaram a reta tangente ao círculo, pois um exercício semelhante já havia sido feito em sala. A Figura que ilustra o registro dessa etapa está registrada no Apêndice B.

Na etapa 1 deste módulo, os estudantes tentaram copiar os valores do seno e do cosseno de uma tabela que já haviam feito em aula, porém foi exigido que descobrissem geometricamente. Como não lembravam o procedimento, a professora realizou a demonstração da Seção 4.1 para o seno e o cosseno de 30°, sendo que os alunos fizeram os cálculos para os outros ângulos. Nessa etapa, foi perceptível novamente a dificuldade dos alunos em resolver equações, racionalizar, somar e dividir frações. Por esse motivo, a etapa consumiu bastante tempo, haja vista a necessidade de minimizar essas dificuldades. Mesmo com as dificuldades, os alunos conseguiram finalizar os cálculos seguindo os mesmos procedimentos explicados. Os cálculos dos alunos podem ser vistos no Apêndice B.

Já na etapa 2, a maioria não teve dificuldade devido a revisão feita no dia anterior.

Na etapa 3, a maioria dos alunos não fez a marcação dos valores simétricos das razões trigonométricas no ciclo desenhado, então tiveram dificuldade para encontrar as razões dos ângulos simétricos aos ângulos estudados. A professora orientou os alunos a marcarem as razões trigonométricas dos ângulos simétricos, observando a relação entre seno, cosseno e tangente entre os ângulos. A partir disso, compreenderam o conceito da simetria e preencheram rapidamente a tabela. A Figura 5.4 mostra os alunos realizando o Módulo 2.

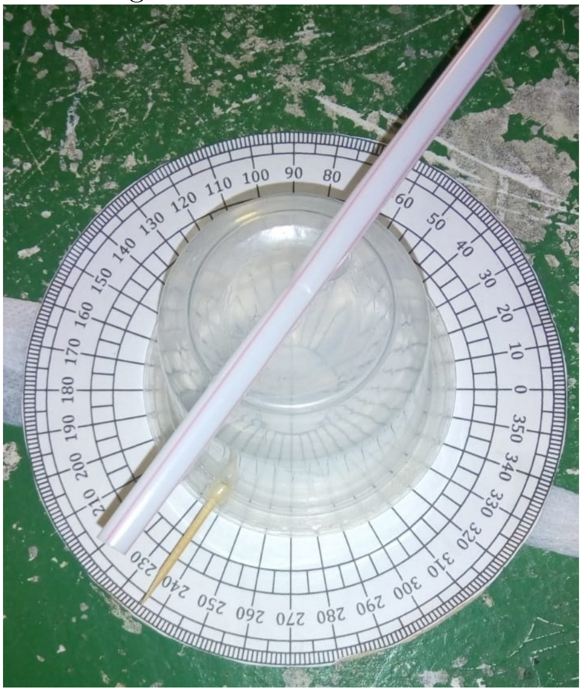
Figura 5.4: Alunos realizando Módulo 2



Fonte: A autora (2019)

Nessa etapa, os alunos conseguiram identificar os conhecimentos matemáticos como alternativas para compreender a realidade à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, como aspecto que estimula a curiosidade e o desenvolvimento da capacidade para resolução de problemas.

Figura 5.5: Teodolito caseiro



Fonte: A autora (2019)

No último dia, ocorrido em 24 de julho de 2019 e com duração de 3 horas e 50 minutos, os alunos foram levados à quadra da escola para fazer as medidas da sombra, dando continuidade ao módulo. Esse dia contou com a presença de 11 estudantes. Esse número baixo foi devido a uma paralisação dos professores. Como os alunos não teriam aula nesse dia, a prefeitura não disponibilizou transporte, impossibilitando o comparecimento dos estudantes que moram em localidades de difícil acesso, reduzindo assim o número de alunos participantes. Assim, os mesmos foram divididos em 3 grupos, 2 com duas duplas e um formado por um trio.

A professora fez uma demonstração do uso do teodolito, representado na Figura 5.5. Foi feita uma simulação da Questão 2 da produção inicial para medir a distância entre os municípios de Vera Cruz e Salvador, imaginando que a quadra da escola é cortada pelo mar e para medir essa distância imaginária, não vamos atravessá-lo. Com o pincel, foi assinalada as margens. Para isso, foi posicionado um aluno no ponto A (Elevador Lacerda) e um outro no ponto B (cais de Mar Grande na margem oposta), como registrado na Figura 5.6.

A seguir, medimos com a trena 8 m perpendicularmente à reta AB, partindo de A até o ponto C (Farol da Barra). Utilizando um teodolito caseiro sobre uma mesa posicionada com o centro na direção do ponto C, através do canudo, foi mirado o aluno localizado no ponto B e observado o ângulo de 32° marcado no transferidor. Depois foi mirado o aluno localizado no ponto A, observando o ângulo de 81° marcado no transferidor. A diferença entre esses valores observados foi calculada, encontrando a medida do ângulo ACB, obtendo 49°. Com a trena, foi feita a medida da distância AB, sendo encontrado 9 m aproximadamente para comparar os resultados encontrados em sala.

Figura 5.6: Professora explicando teodolito

Fonte: A autora (2019)

Devido aos alunos terem o costume de arredondar as medidas, alguns concluíram que a medida do ângulo ACB era 50°, então foi pedido que fizessem também o cálculo utilizando o valor da tangente de 50° fazendo com que eles percebessem que o resultado ficou mais distante do valor encontrado com a trena. A Figura 5.7 registra a medição dos ângulos pela professora.

Com esses dados e usando trigonometria, foi calculado a distância D entre os municípios como segue

$$tg49^\circ = \frac{D}{8} \Rightarrow \frac{D}{8} \approx 1,15 \Rightarrow D \approx 9,2\text{m}.$$

Com essa experiência os alunos puderam ver na prática o uso do teodolito para medir distâncias inacessíveis. Após isso, os alunos fizeram as medições das sombras, momento registrado na Figura 5.8.

Na Etapa 2 os alunos conseguiram sem dificuldades identificar a forma geométrica formada pelo seu corpo, os raios solares e sua sombra no chão, isto é, um triângulo retângulo. Na Etapa 3, os estudantes começaram a construir o triângulo retângulo sem fidelidade à medida dos lados (pois arredondaram) e à medida do ângulo reto. Com o auxílio do transferidor, mediram o ângulo formado entre os raios do sol e a sombra verificando que a medida ficou diferente das medidas dos triângulos construídos pela sua dupla e pelos outros colegas. Assim, a professora solicitou que refizessem utilizando as medidas corretas. Dessa forma, observaram que os valores ficaram mais próximo uns dos outros. A professora comentou que a falta de precisão da fita métrica, instrumento de medida utilizado pelos alunos, contribuiu também para as diferenças na medida do ângulo.

Na Etapa 4, deviam calcular o quociente entre o comprimento da altura e da sombra. Entretanto, eles não sabiam o significado da palavra "quociente", o que teve que ser expli-

Figura 5.7: Alunos fazendo demonstração com teodolito

Fonte: A autora (2019).

Figura 5.8: Alunos medindo sombras

Fonte: A autora (2019)

cado pela professora. Após isso, conseguiram fazer os cálculos. Na Etapa 5, os estudantes compreenderam a igualdade dos ângulos correspondentes devido às medidas das sombras serem feitas praticamente no mesmo instante. Também compreenderam que os triângulos eram semelhantes, mas não escreveram adequadamente essas observações. Não conseguiram concluir sozinhos que, devido à semelhança, as razões entre os lados serão as mesmas e, dessa forma, a tangente de um ângulo agudo independe das dimensões do triângulo retângulo.

Na Etapa 6, visando o preenchimento da Tabela 3.2, os alunos tiveram dificuldades para calcular o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo usando o Teorema de Pitágoras. A professora orientou os alunos na resolução e eles conseguiram finalizar a questão após a orientação. Já na Etapa 7, conseguiram compreender que as conclusões eram semelhantes à da Etapa 5, mas alguns ainda tiveram dificuldades para colocar suas ideias no papel. Essas dificuldades estão ilustradas no Apêndice B. Essa etapa permitiu aos alunos desenvolver sua comunicação matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados e argumentá-los.

A produção final teve que ser aplicada logo após o término do módulo, tendo que prolongar em uma hora além do tempo programado para a aplicação neste dia, devido à paralisação dos professores, que se estenderia até sexta e impossibilitaria o acesso dos estudantes ao colégio. Com isso, ao final da aplicação, os estudantes já estavam desmotivados devido ao cansaço.

Na Questão 1, os alunos perceberam que para resolver o problema poderiam usar a razão tangente, pois era dada a medida do ângulo agudo formado entre a altura do mastro e a superfície da ponte na extremidade de Itaparica que é 3º e a distância do mastro mais próximo à Itaparica que é de 6 km (cateto adjacente ao ângulo dado) e foi pedido a altura do mastro (cateto oposto ao ângulo de 3°). Como na questão só era dado o valor do seno, eles aplicaram o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo cujo ângulo agudo mede 3°, a medida da hipotenusa igual a 100 e a medida do cateto oposto ao ângulo agudo igual a 5, porém ainda tiveram dificuldade em resolver a equação para obter a medida do cateto adjacente. Assim, mais uma vez foi preciso que a professora explicasse como resolver a equação, fazendo dois exemplos no quadro.

Para responderem à Questão 2, foi preciso que a professora relembrasse no quadro como transformar a medida da altura do mastro que estava em quilômetros para metros. Como eles tinham utilizado o teorema de Pitágoras na questão anterior, conseguiram aplicá-lo novamente e achar a medida do primeiro cabo. Então, foi dito que não precisaria fazer os cálculos para achar a medida do segundo cabo. Para o cálculo da medida do terceiro cabo, verificaram que usariam a razão seno, pois era dada a medida do ângulo agudo formado entre o cabo e a superfície da ponte e a medida do cateto oposto a esse ângulo (altura do mastro). Como na questão só era dado o valor do cosseno, eles aplicaram o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo cujo ângulo agudo mede 16°, a medida da hipotenusa igual a 100 e a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo igual a 96 e resolveram a equação, encontrando a medida do cateto oposto ao ângulo de 16°. Após finalizarem os cálculos e acharem o valor da medida do terceiro cabo, demonstraram que não tinham mais dúvidas em relação ao uso das razões trigonométricas. Então, foi solicitado que passassem para a próxima questão.

A questão 3 solicitava a distância da placa até às ruínas da igreja, fornecia a altura da base da igreja até o topo do crucifixo e informava que a placa deveria estar alinhada com o topo do crucifixo em um ângulo de depressão de 60º. Assim, foi perceptível pelos estudantes que o ângulo complementar ao ângulo de depressão era de 30° e que utilizando a razão tangente deste ângulo encontravam a distância pedida. Alguns perceberam também que poderia ser usado a razão tangente de 60°, pois era o ângulo agudo do triângulo retângulo congruente ao outro, de catetos formado pela distância pedida e altura do topo do crucifixo.

Na última questão, devido ao cansaço, alguns estudantes não pararam para refletir sobre as definições das relações de ângulos replementares e explementares já explicadas na produção inicial e trocaram as posições das mudas dos cajueiros 4 e 5. Para fazerem os cálculos das distâncias entre os cajueiros 2 e 3, aplicaram a razão cosseno de 30° corretamente, encontrando a metade da distância, porém muitos esqueceram de dobrar o valor encontrado para encontrar a distância total.

Nessa etapa, os alunos ainda demonstraram dificuldades na resolução de equações, na transformação de unidades de medidas e nos conceitos de classificação dos ângulos, trocando o conceito de replementar com o de explementar. Entretanto, foi perceptível que os estudantes compreenderam as razões trigonométricas, o teorema de Pitágoras e o ciclo trigonométrico, conseguindo aplicá-los corretamente.

A etapa final permitiu que os alunos resolvessem situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, além de desenvolver estratégias de raciocínio e processos, como a dedução, a intuição e a estimativa.

Capítulo 6

Considerações finais

Nesse capítulo, estão descritas as considerações finais do trabalho.

Através dessa experiência, foi possível verificar as inúmeras dificuldades que os alunos e alunas possuem, as quais não são possíveis de se perceber totalmente no dia a dia escolar, diante da grande quantidade de alunos em sala de aula. Este é um fator que prejudica o professor na tarefa de identificar as dificuldades individuais de cada aluno.

Os alunos tiveram uma boa participação nas atividades. Mesmo alguns, que em sala normalmente não participam, tiveram uma atuação ativa, buscando ser protagonistas, fazendo com que a aplicação dessa sequência didática fosse proveitosa, tanto para o aprendizado dos estudantes voluntários, quanto para o crescimento da professora. Diversos fatores que contribuíram para isso foram a utilização de um material manipulável (teodolito), a realização de uma aula externa na quadra da escola, tornando as atividades diferenciadas e despertando o interesse dos alunos.

As principais dificuldades da aplicação envolveram a disponibilidade de salas para utilizar no turno oposto, pois a escola estava passando por uma reforma, além da paralização dos professores, que impactou em uma redução da quantidade de alunos participantes. Houve também a questão do clima, pois um módulo tinha que ser realizado em um dia ensolarado e teve que ser postergado por conta das chuvas na cidade. Por fim, houve também as dificuldades dos próprios alunos em conceitos matemáticos, sendo necessário dedicar um tempo da SD para revisar esses conceitos que eles tinham dificuldades. Em um cenário em que a as salas de aula possuem cerca de 40 alunos, essas dificuldades em conceitos serão muito mais expressivas, o que dificulta a implementação de novas práticas para despertar o interesse dos alunos e trabalhar as dificuldades individuais.

Assim como a proposta de Monteiro (2016), foi possível notar que houve uma transformação positiva em como os alunos se relacionavam com a matemática, percebendo a participação e colaboração de alunos que normalmente tinham aversão à disciplina. Apesar das diferenças entre a proposta desenvolvida nesse trabalho e a de Monteiro (2016), em ambos os casos se notou a dificuldade dos alunos em compreenderem a linguagem matemática e expressarem suas ideias de forma escrita. O trabalho de Oliveira (2014) apenas desenvolve uma proposta de resolução de problemas, mas não foi aplicada aos alunos sendo diferente do nosso trabalho, que teve aplicação.

Esse trabalho também teve influência na prática didática da autora. Também houve uma mudança na apresentação dos conteúdos, iniciando com problemas contextualizados com o dia a dia, além de seguir os quatros passos de Polya na resolução de problemas e nas atividades em geral, fazendo sempre indagações que levem aos alunos chegarem nas suas próprias conclusões.

Com relação à parte algébrica, trabalhamos somas de frações, racionalização e proporções pretendendo ter um ganho substancial na prática dos alunos com esses conceitos. Com relação à trigonometria, os alunos viram na realidade como os triângulos funcionam, trazendo uma percepção espacial. Isso foi alcançado através do experimento com o teodolito, permitindo uma visão real dos conceitos. Dessa forma, foi possível unir conceitos algébricos e geométricos, contribuindo para o desenvolvimento dos estudantes.

Diante dessa experiência, é possível verificar a necessidade de os professores criarem e testarem práticas didáticas alternativas ao ensino tradicional, visando promover uma melhor aprendizagem dos alunos, além de fortalecer as relações de afeto entre professor e os mesmos. São ações que contribuem muito ao crescimento e formação dos saberes do aluno, permitindo que consigam aplicar em seu dia a dia e em outras situações contextualizadas, trazendo sentido ao que aprendem. Além disso, foi perceptível que com atividades diferenciadas os alunos se sentem mais motivados a participarem ativamente do seu processo de aprendizagem, engajando-se com o aprendizado da Matemática.

Referências

BABINSKI, A. L. **Sequência Didática (SD): experiência no ensino da Matemática.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2017.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma Nova Estratégia.** 3ª ed. São Paulo: Contexto. 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação**. 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: MEC/Semtec, 2006.

CHASSOT, A. **Alfabetização Científica - Questões e Desafios para a Educação.** 2º. Ed. Unijuí: Ijuí, 2001.

D'AMBRÓSIO, U. **Algumas reflexões sobre a resolução de problemas.** Disponível em http://issonaoeproblemaseu.blogspot.com/2010/09/algumas-reflexoes-sobreresolucaode.html. Acesso em: 31 jul. 2019

DOLZ, J.; NOVERRAZ, M.; SCHNEUWLY, B. **Sequências didáticas para o oral e para o escrito: apresentação de um procedimento.** In: DOLZ, J. Gêneros orais e escritos na escola. Campinas: Mercado de Letras, 2004, p. 95 - 128.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino (Coleção do Professor de Matemática)**. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

LIMA, E. L. et al. **Temas e Problemas Elementares**, [S. l.]: SBM, 2010, 289 p.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1**, 9 Ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006, 237 p. (Coleção do Professor de Matemática; 13)

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. 178 p.

MAIOLI, M. **A contextualização na matemática do Ensino Médio.** Tese de Doutorado, São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2012.

MONTEIRO, K. G. **Uma proposta para o ensino de trigonometria e semelhança de triângulos no Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, 2016.

OLIVEIRA, D. V. R. **A resolução de problemas como método de ensino de trigonometria.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) ? Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2014.

ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V. Pesquisa Em Educação Matemática: Concepções E Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

PARETTI, L. TONIN DA COSTA, G. M. Sequência didática na matemática, **Revista de Educação do IDEAU**, Vol. 8 - Nº 17 - Janeiro - Junho 2013.

PAIVA, M. **Matemática Paiva 2**, [S.l.]: Moderna, 2015. 575 p.

POLYA, G. A. **A arte de resolver problemas.** São Paulo: Interciência, 1978.

Portal de notícias G1. **No Ideb 2017, sete estados e o DF têm queda no ensino médio; no Brasil, só anos iniciais do fundamental cumprem meta.** Disponível em https://g1.globo.com/edu-cacao/noticia/2018/09/03/sete-estados-e-o-df-tem-queda-no-ideb-do-ensino-medio-no-brasil-so-anos-iniciais-do-fundamental-cumprem-meta.ghtml. Acesso em: 31 jul. 2019.

SANTOS, A. O. OLIVEIRA, G. S., Contextualização no ensino-aprendizagem da matemática: princípios e práticas **Revista Educação em Rede: Formação e Prática Docente,** vol. 4, Nº 5, Julho 2015.

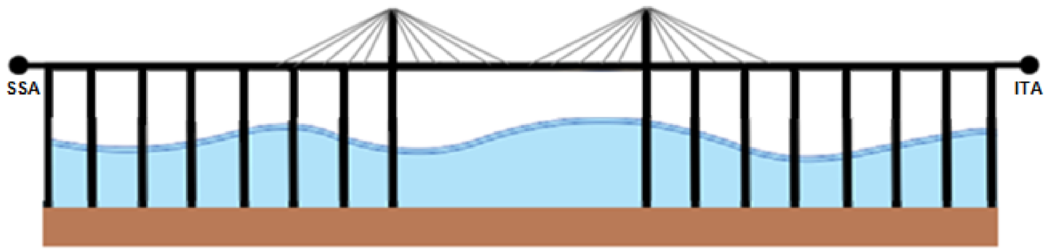
SILVA, R. C. T. Z., **Trigonometria: história e aplicações no contexto escolar.** Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2019.

VASCONCELOS, M. B. F. **A contextualização e o ensino de matemática: Um estudo de caso.** Dissertação de Mestrado, João Pessoa, Universidade Federal da Paraíba. 2008.
ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar.** Porto Alegre: Artmed, 2014. 224 p.

Apêndice A

Proposta inicial

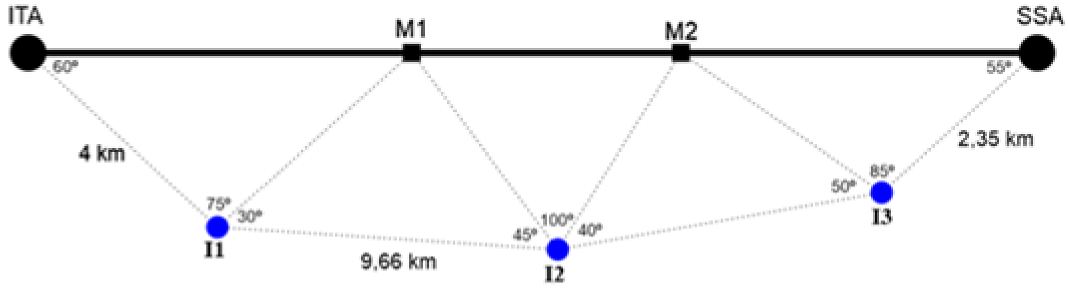
A capital da Bahia e a ilha de Itaparica serão ligadas por uma ponte. A obra surge para otimizar o fluxo de veículos entre a ilha de Itaparica e a região metropolitana de Salvador. Até o momento, o transporte entre essas localidades apenas pode ser feito através de ferry-boat para veículos de pequeno porte ou através de rodovias. O projeto prevê a construção de uma ponte estaiada, um tipo de ponte suspensa por cabos constituída de um ou mais mastros, por onde partem cabos de sustentação para os tabuleiros da ponte. O esboço pode ser observado na figura a seguir:



Fonte: A autora (2019)

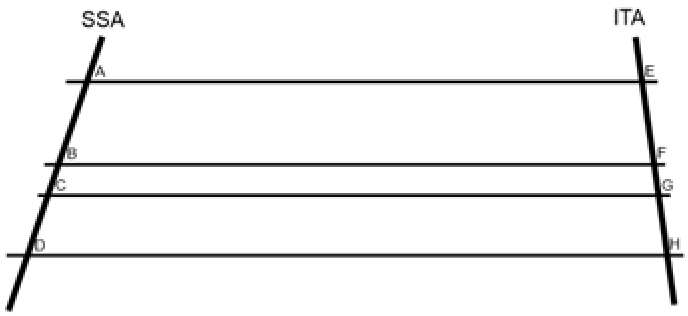
A ponte é composta por 2 mastros, que fixam 5 cabos de cada lado, além de 16 suportes submersos no mar. O projeto da ponte já foi desenvolvido e está em fase de implementação. Entretanto, os estudantes de uma instituição de Vera Cruz resolveram aplicar seus conhecimentos na prática, realizando seis estudos de projeto da ponte.

1. Extensão da ponte A primeira etapa do estudo é verificar a extensão da ponte, que vai de Salvador (SSA) à ilha de Itaparica (ITA). Eles não possuem recursos para medida de distâncias em alto mar, mas conseguem verificar ângulos em distâncias de até 10 km. Uma solução é visitar algumas ilhas da região (I1, I2, I3) para realizar medidas, além de utilizar alguns dados geográficos disponíveis. A ponte ainda não foi construída, mas existem pontos referenciais para a localização dos mastros (M1 e M2), o que poderá ajudar no estudo. A primeira ilha visitada fica à 4 km de Salvador. Em Salvador, os estudantes mediram o ângulo entre a ponte e a Ilha 1, obtendo 60°. Ao chegarem em I1, mediram a angulação entre SSA e M1, obtendo 75°. Mediram também a angulação entre M1 e I2, sendo 30°. Na Ilha 2, que fica a 9,66 km da Ilha 1, mediram o ângulo entre M1 e M2, obtendo 100°. Mediram também a angulação entre I1 e M1 (45°), além da angulação entre M2 e I3 (40°). Ao visitar a Ilha 3, mediram o ângulo entre o ponto M2 e ITA, obtendo 85º. Além disso, mediram a angulação entre M2 e I2, sendo 50º. Por fim, retornaram à Ilha de Itaparica, que fica a 2,35 km de I3. Lá mediram o ângulo entre a ponte e I3, obtendo 55º. Através dos ângulos calculados e das distâncias, os estudantes acreditaram em poder calcular as três medidas da ponte. Quais foram as medidas encontradas? E qual é a medida total da extensão da ponte?



Fonte: A autora (2019)

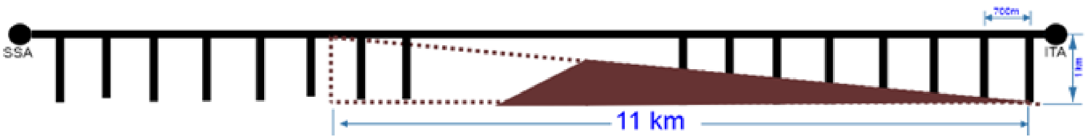
2. Extremidade das pistas A segunda etapa do estudo é verificar o comprimento das extremidades das pistas. As extremidades de Salvador e Itaparica não são paralelas entre si, então as extremidades das pistas terão comprimentos diferentes. O projeto da ponte prevê três pistas: duas rodovias e uma ciclovia no meio. Apenas se sabe as medidas do lado de Salvador (ABCD) e os estudantes decidiram verificar o comprimento do lado de Itaparica (EFGH). O lado AB vale 8m, BC vale 2,5 m e CD vale 6 m. A única informação sobre o lado de Itaparica é que a pista de lado EF tem 4 m a mais que o dobro de extensão da ciclovia. Quais medidas os estudantes devem encontrar nessa etapa?



Fonte: A autora (2019)

3. Altura dos suportes A terceira etapa do projeto é verificar a altura dos suportes submersos. Os estudantes acreditavam que os suportes teriam a mesma altura. Entretanto, ao realizar um estudo da área marítima, observaram que há uma irregularidade no relevo, que possui uma elevação de caráter linear na área próxima à Itaparica. Dessa forma, as alturas dos suportes do lado de Itaparica não serão as mesmas. Caso a elevação continuasse até a altura da ponte, sua extensão horizontal seria de 11 km. A equipe descobriu que a altura do maior suporte deve ser de 1 km. Sabendo que a distância entre os suportes é de 700m, quais as alturas que foram encontradas pelos estudantes?

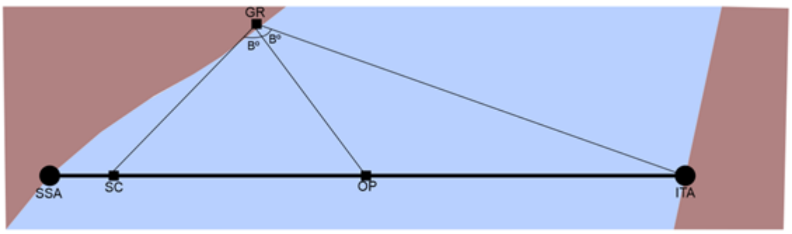
4. Comprimento dos cabos A quarta etapa do estudo é sobre os cabos da ponte. Como a ponte é do tipo estaiada, existirão cabos nos mastros para suportar a estrutura. Os



Fonte: A autora (2019)

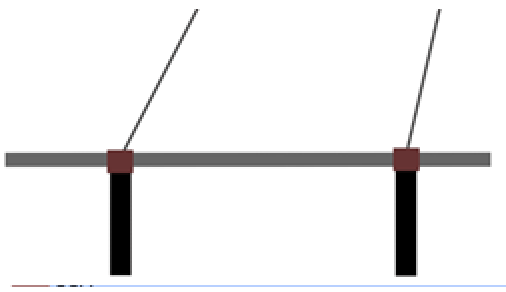
mastros têm altura de 300 metros. Os cabos serão fixados no topo do mastro do suporte principal e na base da ponte. Para cada mastro, serão 5 cabos fixados de cada lado a distâncias de 350, 700, 1050, 1400 e 1750 metros. Sabendo que o mastro e a base da ponte formam um ângulo reto (90°), os estudantes decidiram calcular o comprimento de cada cabo. Quais foram as medidas encontradas para os cabos?

5. Distância para sala de controle A quinta etapa do projeto é sobre a distância entre o centro de operações e a sala de controle (SC). O centro de operações da ponte (OP) receberá energia elétrica diretamente da base geradora de Salvador (GR) e será encaminhada pelo mar. As únicas distâncias que os estudantes têm conhecimento são a distância entre GR e SC (7 km), entre GR e a extremidade da ponte em Itaparica (10 km) e entre SC e a extremidade em Itaparica (14 km). Entretanto, é necessário verificar a distância entre SC e OP para projetar uma tubulação elétrica. Sabe-se que o centro de operações está localizado em um ponto que parte da bissetriz de GR, como pode ser observado na figura a seguir. Assim, os estudantes conseguiram calcular essa distância. Qual o valor que foi encontrado para a distância entre SC e OP?



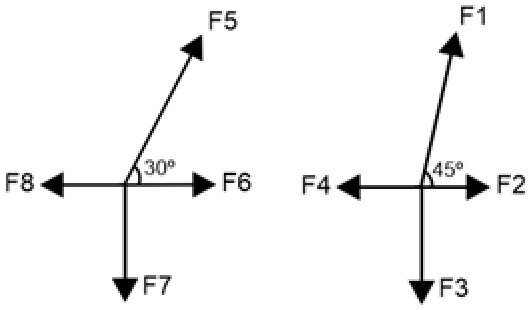
Fonte: A autora (2019)

6. Peso dos mastros A última etapa do estudo é verificar as forças atuantes na ponte. A equipe tem o interesse em verificar a atuação das forças em alguns pontos da ponte, então resolveram analisar duas junções. Nessas junções existem os cabos do mastro, suportes e a base da estrada, como pode ser observado no esboço dos alunos a seguir:



Fonte: A autora (2019)

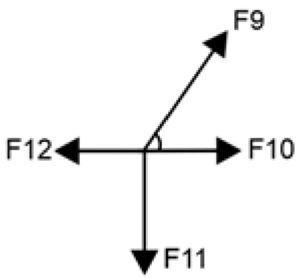
Como os elementos mencionados estão em equilíbrio, a equipe fez a representação da figura em um diagrama de forças, sendo possível verificar as forças atuantes nas junções:



Fonte: A autora (2019)

Os alunos já listaram algumas informações sobre as forças, tais como: F2 = 30 MN (Mega Newtons); F3 = 50 MN (Mega Newtons); F7 = F3; F6 tem o mesmo módulo de F4.

Entretanto, ainda não sabem o módulo das forças F1, F4 e F8 e realizaram os cálculos para verificarem. Quais os resultados que eles devem encontrar? Em uma terceira junção, os estudantes conhecem apenas as forças, mas não sabem o valor do ângulo.



Fonte: A autora (2019)

As informações listadas foram que: F9 = 38 MN; F10 = 15 MN.

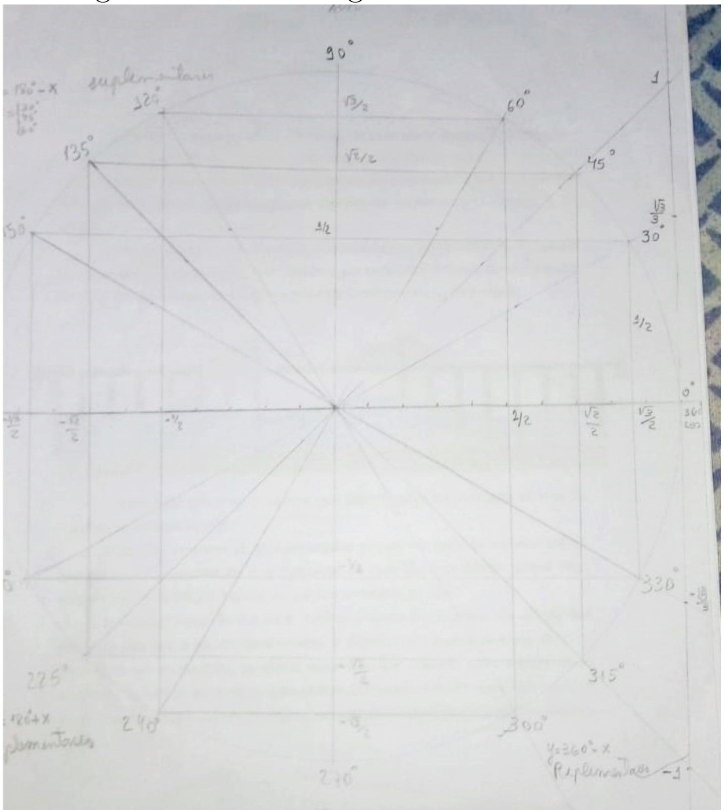
Os estudantes verificaram que as forças F11 e F12 estão relacionadas com F9. A força F11 é 5 MN menor que F9, enquanto F12 é 4 MN menor que F9. Através das forças que eles conhecem, qual o valor do ângulo que foi encontrado?

Apêndice B

Fotos de material produzido pelos alunos

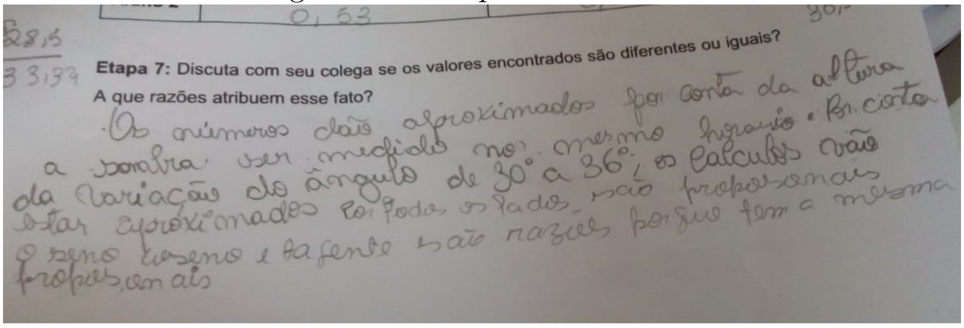
Neste apêndice estão ilustradas as figuras dos cálculos, respostas e desenhos feitos pelos alunos.

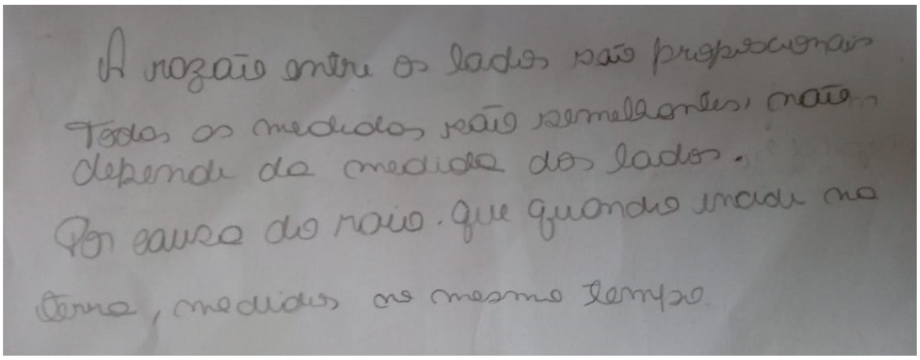
Figura B.1: Ciclo trigonométrico construído



Fonte: A autora (2019)

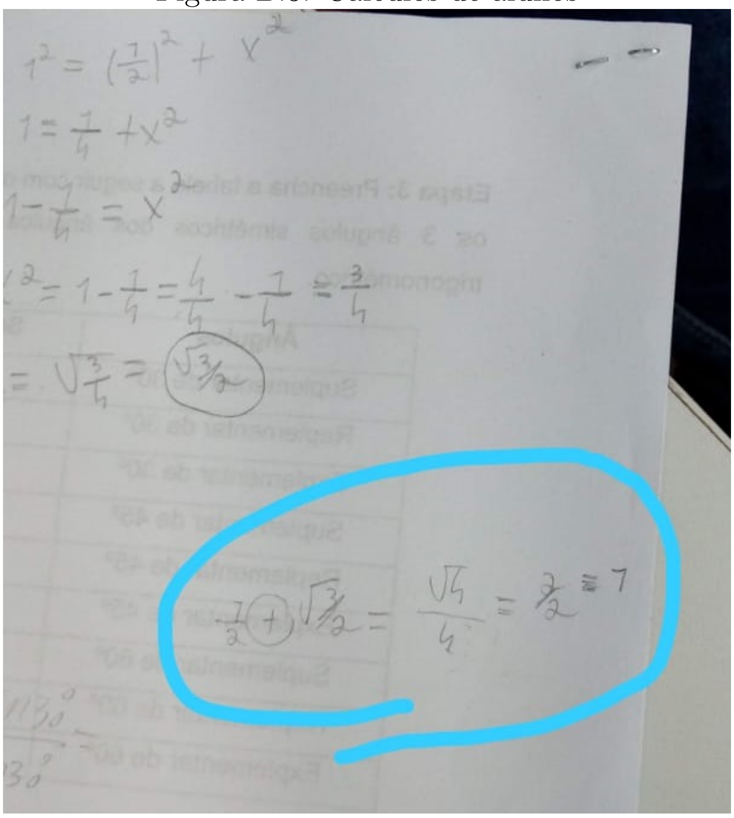
Figura B.2: Respostas de alunos





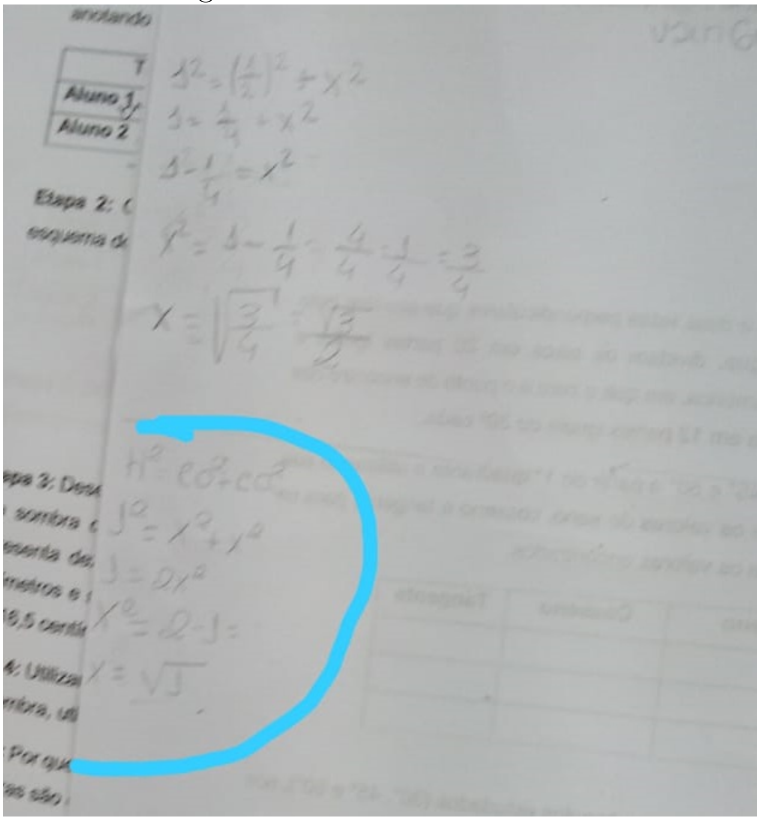
Fonte: A autora (2019)

Figura B.3: Cálculos de alunos



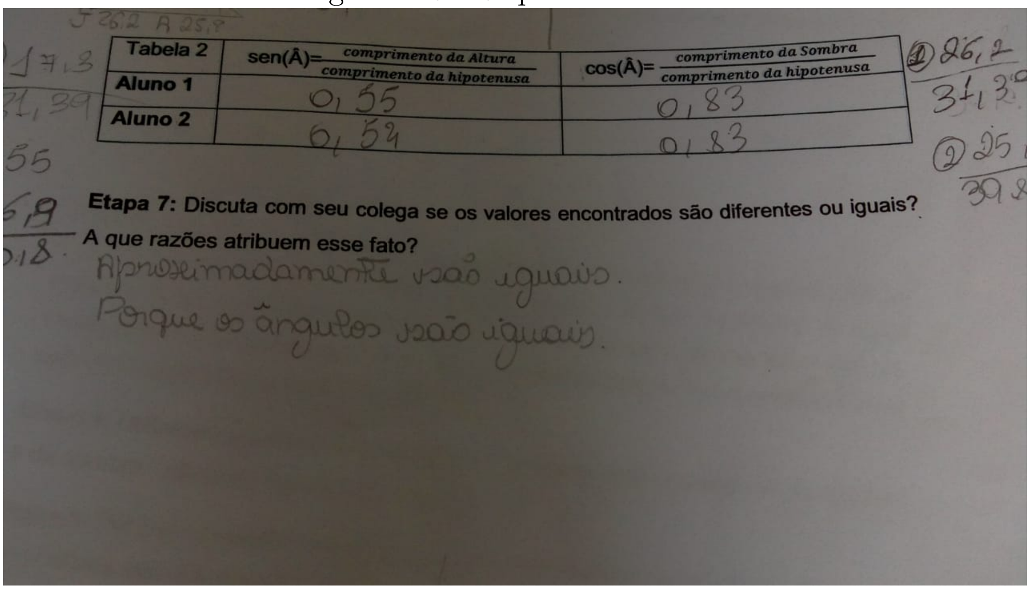
Fonte: A autora (2019)

Figura B.4: Cálculos de alunos



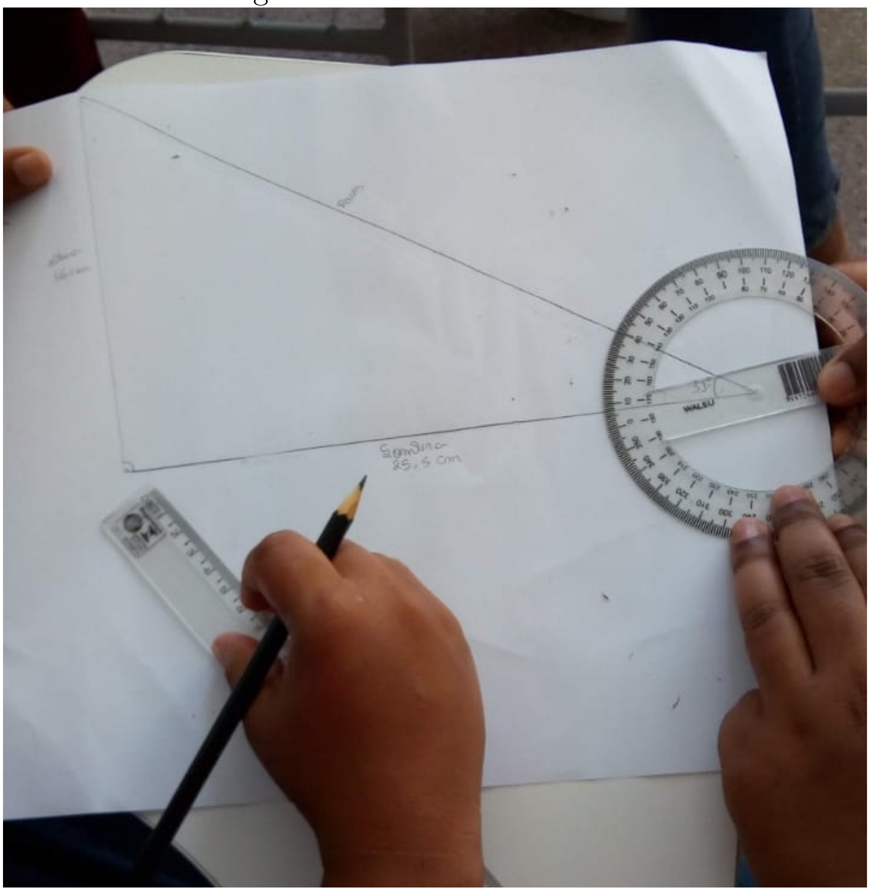
Fonte: A autora (2019)

Figura B.5: Resposta de alunos



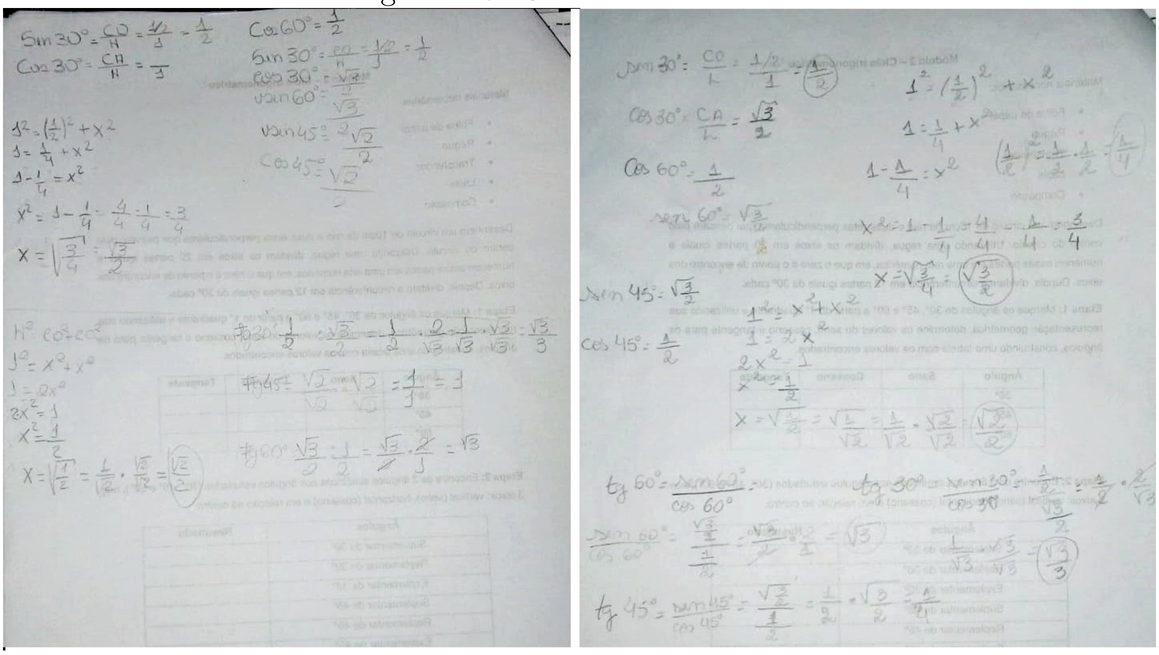
Fonte: A autora (2019)

Figura B.6: Desenho de alunos



Fonte: A autora (2019)

Figura B.7: Cálculos do Módulo 2



Fonte: A autora (2019)