



Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO ARAGUAIA



O dominó de quatro pontas: um jogo de contagem

Maria Cristina de Souza Batalha

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva**

Trabalho financiado pela Capes

Barra do Garças/MT

Setembro de 2019

O dominó de quatro pontas: um jogo de contagem

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Maria Cristina de Souza Batalha e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 26 de setembro de 2019.

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva (Orientador)

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto (Membro Interno)

Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza (Membro Externo)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

B328d Batalha, Maria Cristina de Souza.
O dominó de quatro pontas: um jogo de contagem / Maria
Cristina de Souza Batalha. – 2019
xi, 83 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Carlos Rodrigues da Silva.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de
Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de
Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia,
2019.
Inclui bibliografia.

1. Prática pedagógica dos jogos. 2. Jogo dominó de quatro
pontas. 3. Múltiplos. 4. Análise Combinatória. 5. Probabilidades. I.
Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a)
autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança - 78.060-900 - Cuiabá/MT
Fone: (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "O dominó de quatro pontas: um jogo de contagem"

Autora: Maria Cristina de Souza Batalha

defendida e aprovada em 26/09/2019.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador	Doutor	Carlos Rodrigues da Silva
Instituição:	Universidade Federal de Mato Grosso	
Examinador Interno	Doutor	Adilson Antônio Berlatto
Instituição:	Universidade Federal de Mato Grosso	
Examinador Externo	Doutor	Marcelo Almeida de Souza
Instituição:	Universidade Federal de Goiás	

Barra do Garças, 26/09/2019.

À minha família

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que traçou este caminho em minha vida e me mostrou como podemos alcançar nossos sonhos. Aos meus pais, Raimundo Batalha e Izabel de Sousa Batalha, que sempre acreditaram em minha capacidade e me incentivaram em novas conquistas. Ao meu esposo, Jhone Pereira Rosa, que esteve ao meu lado nos momentos de fraqueza e desânimo e se tornou pai e mãe das nossas filhas durante minha ausência devido as viagens e aos estudos, mesmo em casa. As minhas filhas, Helena Cristina e Maria Eduarda, por cederem a atenção dedicada a elas em outros momentos. Aos meus irmãos e demais familiares que sempre me incentivaram. Ao meu colega de profissão Alceu Busanello, grande motivador de toda essa história. Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva, pelo incentivo mesmo antes da dissertação, com palavras que fizeram grande diferença para continuar esta jornada. Ao coordenador do curso PROFMAT-Barra do Garças, Prof. Dr. Adilson Berlatto. Aos meus colegas de turma e os que vieram a somar durante o caminho, alguns se tornaram amigos que sempre vou me lembrar com muita alegria e nostalgia. Ao PROFMAT, pela oportunidade e a CAPES, pelo apoio financeiro. Agradeço a todos!

*Ninguém é tão ignorante que não tenha
algo a ensinar,
Ninguém é tão sábio que não tenha
algo a aprender.*

Blaise Pascal.

Resumo

Esta dissertação traz uma proposta no processo de ensino e aprendizagem de matemática envolvendo o estudo de múltiplos e divisores de números inteiros, análise combinatória e probabilidades, através do jogo Dominó de Quatro Pontas, para os alunos do Ensino Médio. Para isto, foram realizadas pesquisas sobre o uso do recurso didático da prática de jogos em sala de aula, a origem, as regras e aplicações do jogo envolvendo os temas propostos. Este trabalho priorizou a ludicidade como estratégia auxiliar para o entendimento dos conceitos matemáticos envolvidos. Entre as principais observações feitas, destacam-se a melhora do raciocínio lógico para tomada de decisão pelo estudo da melhor jogada, o fortalecimento dos conceitos de múltiplos e divisores, e a interatividade e interesse dos estudantes.

Palavras chave: Prática pedagógica dos jogos, jogo dominó de quatro pontas, ensino médio, múltiplos, análise combinatória, probabilidades.

Abstract

This dissertation brings a proposal in the process of teaching and learning of mathematics involving the study of multiples and integer divisors, combinatorial analysis and probabilities, through the Four Point Domino game, for the high school students. To this end, research was conducted on the use of the practice of classroom games, the origin, rules and applications of the game involving the proposed themes. This work prioritized playfulness as an auxiliary strategy for understanding the mathematical concepts involved. Among the main observations made are the improvement of logical reasoning for decision making through the study of the best move, the strengthening of the concepts of multiples and dividers, and the interactivity and interest of the students.

Keywords: Pedagogical practice of games, four-way domino game, high school, multiples, combinatorial analysis, probabilities.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	xi
Introdução	1
1 Fundamentação teórica	6
1.1 Sistemas de numeração	6
1.1.1 Divisores de um número inteiro	10
1.2 Máximo divisor comum entre dois números	12
1.2.1 Algoritmo de Euclides	14
1.2.2 Algoritmo de Euclides estendido	16
1.3 Mínimo múltiplo comum	17
1.4 Números primos	18
1.4.1 Teorema Fundamental da Aritmética	19
1.4.2 Identificação de um número primo	20
1.5 Congruências	21
1.5.1 Aplicações de congruências	23
1.6 Critérios de Divisibilidade.	24
1.6.1 Múltiplos inteiros de um número	24
1.6.2 Critério de divisibilidade por 5 e por 10	24
1.6.3 Critérios de divisibilidade por 3 e por 9	25
1.6.4 Critérios de divisibilidade por 6	25

1.6.5	Critérios de divisibilidade por 11	25
1.7	Análise combinatória	26
1.7.1	O Princípio Fundamental da Contagem	26
1.7.2	Fatorial	27
1.7.3	Permutação e combinações	28
1.7.4	Estratégia para resolver problemas de combinatória	29
1.8	Probabilidades	30
1.8.1	Experimento aleatório	30
1.8.2	Espaço amostral	31
1.8.3	Evento	31
1.8.4	Conceito de probabilidades	31
1.8.5	Eventos complementares	32
1.8.6	Probabilidade condicional	35
1.8.7	Eventos independentes	36
2	Os jogos e seu uso como prática pedagógica	38
2.1	Considerações sobre a matemática	38
2.2	Dificuldades de Aprendizado	40
2.3	Utilização dos jogos como ferramenta facilitadora do ensino	43
3	O jogo dominó	48
3.1	O jogo dominó de quatro pontas	48
3.1.1	Origens do jogo de dominó	48
3.2	Regras do dominó de quatro pontas	50
3.2.1	Jogo Fechado	54
3.3	A estratégia dos três erres (RRR)	56
4	O jogo dominó de quatro pontas e os múltiplos de cinco em sala de aula	58
4.1	Metodologia e público alvo	58
4.2	O jogo	60
4.2.1	Resultados	71
4.2.2	Outras situações	73
4.3	Proposta para os múltiplos de 3	75
4.4	Proposta para os múltiplos de 11	76

Considerações Finais	79
Referências Bibliográficas	81

Lista de Figuras

1.1	Dado Cúbico.	31
1.2	Lançamento de dois dados.	33
3.1	Dominó, um jogo de contagem	49
3.2	Situação de um jogo que gera pontuação 10	51
3.3	Situação de passe do jogador	52
3.4	Situação de “garagem” de 10 pontos	52
3.5	As 28 peças do Jogo Dominó.	54
3.6	Jogo Fechado.	55
4.1	Duplas, reconhecendo o jogo.	60
4.2	Quadro de Regras.	61
4.3	Marcação dos pontos das duplas LM e JE.	61
4.4	Pedras na mesa, situação de passar a vez.	62
4.5	Batida carroça de Quadra.	65
4.6	Rodada Cinquenta.	66
4.7	Mão Jogador Rodada 50.	66
4.8	Carroça de Quina <i>Morta</i>	69
4.9	Jogo Fechado.	70
4.10	Torneio Jogo Dominó.	71
4.11	Resposta 2, aluna Cintia.	71
4.12	Resposta 2, aluna Jeniffer.	72
4.13	Resposta 2, aluna Renata.	72
4.14	Situação de um jogo que gera pontuação 10	75
4.15	Vinte e dois pontos.	77
4.16	Trinta e três pontos.	78

Introdução

“Minha probabilidade de êxito aumenta a cada evento.”
(John Nash)

Estudar matemática nem sempre está entre as preferências dos alunos na fase final da educação básica e ensino médio. Apesar de toda sua aplicação e importância, não nota-se muitos alunos entusistas em suas teorias, mesmo as mais simples. Nesse ponto, percebe-se a necessidade de proporcionar aos jovens um conhecimento matemático que faça mais sentido para suas práticas escolares.

Estar em sala de aula, sentar-se em fileiras, copiar o que é escrito na lousa, se manter sentado e atento. É o que geralmente acontece durante quatro ou cinco horas na rotina de um estudante na escola. Mas, fora dela, a realidade é outra. Celulares, tablets e jogos dos mais variados estão à mão dos estudantes cada vez mais cedo e a qualquer momento. As práticas lúdicas, na maioria das vezes, tem espaço apenas fora das salas de aula. E, para muitos especialistas, esse é um dos fatores que tornam a escola cada vez menos atrativa aos jovens, levando à falta de interesse, à indisciplina e até à evasão.

A Matemática escolar é frequentemente vista como um ciência abstrata, quase sem utilidade concreta no dia a dia ou no estudo das demais ciências. Concebida dessa maneira, seu ensino tende a valorizar em sala de aula, a importância do pensamento lógico-dedutivo em detrimento de possíveis aplicações práticas dessa ciência. Um sinal de que o trabalho com a matemática aplicada não tem recebido a devida atenção é o fato de muitos professores relatarem que dedicam mais tempo à teorização matemática do que à exploração da matemática experimental em sala de aula. (Granja, 2012)

Uma maneira de tentar reverter esse cenário é o uso de ferramentas de ensino capazes de prender efetivamente a atenção dos estudantes. Os jogos, quando bem elaborados e utilizados, são uma boa opção para isso: fazem os alunos participarem mais das aulas, interagirem e favorece aqueles que têm dificuldade de entender conteúdos transmitidos de forma tradicional. É claro que não há um jogo para cada conteúdo específico,

mas para uma parte dele sim. O professor deve estar se atualizando em todos os sentidos. Veja o que traz a Base Nacional Comum Curricular , p. 14:

No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades. (Brasil, 2017)

De acordo com Brasil (2013), as necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite conhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola a aprendizagem apresenta melhor resultado.

Ainda de acordo com Nacionais-PCN (1997), recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais tem um papel importante no processo de ensino aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados à situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática.

Diferentes métodos devem ser inseridos nos planejamentos de uma aula com o principal objetivo de envolver os alunos nos conteúdos pretendidos, levando assim a uma aprendizagem mais significativa. Tudo com muita atenção para que se alcance a assimilação esperada.

Por parte do professor, é importante realizar uma reflexão sobre o planejamento e as formas de inserção dos jogos em suas atividades diárias. Caso contrário, propostas bem fundamentadas e interessantes não atingem os reais objetivos quando colocadas em prática, sob o risco de não serem inseridas na escola e na vida dos alunos. Essa reflexão é fundamental para conscientização sobre a função mediadora dos professores nos processos de aprendizagem e para uma progressiva segurança e autonomia na sua função, principalmente ao serem questionados sobre a utilização de jogos na escola. (Torres, 2017)

Existe uma grande busca de novas ferramentas que tornem as aulas mais atrativas para alunos e professores, com o objetivo de alcançar um aprendizado mais significativo e menos superficial. Os jogos podem trazer uma nova motivação para o querer aprender.

Na verdade, o paradigma educacional baseado em jogos destaca-se como ferramenta educacional pelos seus aspectos interativos, que proporcionam aos alunos a geração de novos problemas e de novas possibilidades de resolução, constituindo-se, dessa forma, em um suporte metodológico que possibilita ao professor, educador-pesquisador, resgatar e compreender o raciocínio do aluno e, dessa maneira, obter referências necessárias para o pleno desenvolvimento de sua ação pedagógica (avaliação). (Grando et al., 2000)

A presente dissertação tenta explorar ao máximo essas estratégias através do jogo dominó, um jogo composto por peças retangulares, cada peça é dividida ao meio, em cada uma dessas metades há a indicação de um número representado por certa quantidade de bolinhas. Este jogo apresenta-se em diversas versões, sendo a duplo-seis a versão mais conhecida. Nessa versão, as peças que formam o conjunto geram vinte e oito combinações de valores numéricos de 0 a 6 gravados em ambas as metades. As vinte e oito pedras são compostas por sete séries numéricas, que vão desde o 0 (branco) até o 6 (sena). Em cada série há sete pedras, de modo que em cada uma delas há alguns elementos próprios e exclusivos, e outros comuns com as outras séries.

Apesar de muitas versões o surgimento do popular jogo de dominó até hoje é incerto. Alguns dizem que foi na China, também especulam que tenha sido nas cortes da Europa e ainda a opção de, por sua simplicidade, ter sido criado, simultaneamente, em diversos lugares do mundo. Os dominós são apreciados em vários países. Em nosso país, a versão mais conhecida é aquela em que dois ou quatro jogadores dividem-se igualmente as peças entre si e o jogo segue até que o primeiro consiga eliminar todas as peças que tem em suas mãos. Para o projeto proposto, utiliza-se o jogo de dominó de quatro pontas e duas duplas, versão que é largamente praticada no Estado do Amazonas, região norte do país.

O jogo de dominó é um jogo de tomar decisões, antecipar jogadas, prever pontos e de concentração. E isso contribui para fortalecer a autonomia e disciplina do aluno.

As habilidades desenvolvem-se porque, ao jogar, os alunos têm a oportunidade de resolver problemas, investigar e descobrir a melhor jogada; refletir e analisar as regras, estabelecendo relações entre os elementos do jogo e os conceitos matemáticos. Podemos dizer que o jogo possibilita uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de matemática. (Smole e Kiyukawa, 1999)

O jogo dominó de quatro pontas reduz a consequência dos erros e dos fracassos do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia. No fundo, o jogo é uma atividade séria que não tem consequências frustrantes para quem joga, uma vez que o erro não é visto como algo definitivo ou insuperável.

Através da prática de jogos, tentaremos aqui agregar os conceitos de análise combinatória e probabilidades. Observando as jogadas e propondo possíveis atividades envolvendo seus conceitos de forma prática. Os estudos de análise combinatória e probabilidades realizados na educação básica muitas vezes enfrentam dificuldades por parte de alunos e professores em fixar os conteúdos além das fórmulas e relações.

Existem situações em que os alunos apresentam soluções equivocadas por não analisarem algum caso ou por contarem possibilidades mais de uma vez. Ao cometer erros surge uma grande oportunidade de aprender e deve ser aproveitada. Observar erros individuais e coletivos para discutir com a classe o que pensaram de errado e quais equívocos cometeram.

A análise combinatória é uma parte importante do estudo das probabilidades, ela desenvolve o raciocínio lógico matemático eficaz. Quando trabalhada corretamente com o aluno, faz com que ele consiga desenvolver diversas outras capacidades de resolução de problemas.

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. (Morgado et al., 1991)

Da mesma forma que no estudo de combinatória procuramos associar os raciocínios e conceitos às situações cotidianas na abordagem dos conceitos de probabilidades. Porém, as atividades podem se tornar vazias em aplicação matemática se não dermos aplicações reais. Para Morgado et al. (1991) a teoria das probabilidades desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios.

Não podemos deixar que esses assuntos se tornem desmotivantes e distantes da realidade vivenciada pelos alunos. Tratam-se de dois assuntos de importância elevada para interpretação de problemas e sua correlação é tão estreita quanto necessária.

Para realização desta dissertação, inicialmente foi feita uma pesquisa bibliográfica sobre a prática de jogos em sala de aula e suas contribuições no processo de ensino aprendizagem, este se encontra no capítulo 2. Na sequência temos o capítulo 3, onde falaremos do jogo dominó, algumas de suas variações e sua versão de quatro pontas envolvendo os múltiplos de 5. O capítulo 4 será reservado para apresentar a estratégia para levar o jogo

dominó de quatro pontas em sala de aula e os resultados obtidos. Toda a fundamentação teórica está no capítulo 1.

Capítulo 1

Fundamentação teórica

As referências para este capítulo são Domingues (1991), Hefez (2014) e Moreira (2012).

1.1 Sistemas de numeração

Tendo em vista o processo de contagem dos múltiplos de 5 para que seja possível obter uma estratégia ótima, será realizado, então, um apanhado geral sobre Sistemas de Numeração e mudança de bases numéricas. O sistema de numeração amplamente utilizado pelas pessoas para representar os números inteiros é o sistema decimal posicional. É chamado de decimal pois todo número é representado por uma sequência formada pelos algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e acrescidos do símbolo 0 (zero), que representa a ausência de algarismo. É dito posicional, pois cada algarismo possui um peso, ou seja, representa uma quantidade que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa. Esse peso, sempre uma potência de dez, do seguinte modo:

- O algarismo da extrema direita com peso um;
- O seguinte, da direita para a esquerda, tem peso dez;
- O seguinte tem peso cem;
- O seguinte tem peso mil, e assim por diante.

No sistema decimal cada algarismo possui uma ordem contada da direita para a esquerda e a cada terna de ordens forma-se uma classe. Temos:

- i. Classe das Unidades: unidades (1^a ordem); dezenas (2^a ordem); centenas (3^a ordem).
- ii. Classes das Dezenas: unidades de milhar (4^a ordem); dezenas de milhar (5^a ordem); centenas de milhar (6^a ordem).
- iii. Classe do Milhão: unidades de milhão (7^a ordem); dezenas de milhão (8^a ordem); centenas de milhão (9^a ordem).

Os sistemas de numeração posicionais baseiam-se no teorema a seguir, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema 1.1 - Sejam dados os números a e b , com $a > 0$ e $b > 1$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \dots, r_n < b$ com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1b + r_2b^2 + \dots + r_nb^n$.

Demonstração: Vamos demonstrar o teorema por Indução Completa sobre a . Se $0 < a < b$, basta tomar $n = 0$ e $r_0 = a$. A unicidade da escrita é clara nesse caso.

Suponhamos o resultado válido para todo natural menor do que a , onde $a \geq b$. Vamos prová-lo para a . Pela divisão euclidiana, existem q e r , únicos, tais que

$$a = bq + r$$

com

$$0 \leq r < b$$

Como $0 < q < a$, pela hipótese de indução segue-se que existem números inteiros $n' \geq 0$ e $0 \leq r_1, \dots, r_{n'+1} < b$, com $r_{n'+1} \neq 0$, univocamente determinados, tais que

$$q = r_1 + r_2b + \dots + r_{n'+1}b^{n'}$$

.

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que

$$a = bq + r = b(r_1 + r_2b + \dots + r_{n'+1}b^{n'}) + r,$$

donde o resultado segue-se pondo $r_0 = r$ e $n = n' + 1$.

A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b . Quando $b = 10$ essa expansão é chamada *expansão decimal*, e quando $b = 2$, ela toma o nome de *expansão binária*.

Trata-se de aplicar, sucessivamente, a divisão euclidiana, como segue:

$$a = bq_0 + r_0, r_0 < b,$$

$$q_0 = bq_1 + r_1, r_1 < b,$$

$$q_1 = bq_2 + r_2, r_2 < b,$$

e assim por diante. Como $a > q_0 > q_1 > \dots$, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$ e, portanto, de

$$q_{n-1} = bq_n + r_n,$$

decorre que $q_n = 0$, o que implica $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \dots$, e, portanto, $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \dots$

Temos, então, que

$$a = r_0 + r_1b + r_2b^2 + \dots + r_nb^n$$

O problema que queremos abordar em seguida é comparar dois números escritos nas suas expansões na base b . Este é o conteúdo do próximo resultado.

Proposição 1.1 - *Sejam dados os números inteiros $b > 1, n, n' \geq 0, 0 \leq r_0, \dots, r_n < b$ e $0 \leq r'_0, \dots, r'_{n'} < b$, tem-se que:*

- i) $r_0 + r_1b + \dots + r_nb^n < b^{n+1}$;
- ii) $n > n'$ e $r_n \neq 0$ então $r_0 + r_1b + \dots + r_nb^n > r'_0 + r'_1b + \dots + r'_{n'}b^{n'}$;
- iii) $n = n'$ e $r_n > r'_n$ então $r_0 + r_1b + \dots + r_nb^n > r'_0 + r'_1b + \dots + r'_nb^{n'}$;

Demonstração:

i) Temos, para todo $i = 0, 1, \dots, n$, que

$$r_ib^i \leq (b-1)b^i = b^{i+1} - b^i$$

Tomando $\sum_{i=0}^n r_i b^i$ de ambos os lados da igualdade, ao variar i no intervalo $0 \leq i \leq n$, obtemos:

$$r_0 + r_1 b + \dots + r_n b^n \leq b^{n+1} - 1 < b^{n+1}$$

ii) Pelo item anterior, temos que se $n > n'$ e $r_n \neq 0$, então

$$r'_0 + r'_1 b + \dots + r'_{n'} b^{n'} < b^{n'+1} \leq b^n \leq r_0 + r_1 b + \dots + r_n b^n.$$

iii) Nessa situação, temos por (ii) que

$$r_0 + r_1 b + \dots + (r_n - r'_n) b^n > r'_0 + r'_1 b + \dots + r'_{n-1} b^{n-1},$$

o que prova o resultado, já que $(r_n - r'_n) > 0$.

A expansão numa dada base b nos fornece um método para representar os números naturais. Para tanto, escolha um conjunto S de b símbolos

$$S = s_0, s_1, \dots, s_{b-1},$$

com $s_0 = 0$, para representar os números de 0 a $b - 1$. Um número natural a na base b escreve-se na forma

$$x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0,$$

com $x_0, \dots, x_n \in S$, e n variando, dependendo de a , representando o número

$$x_0 + x_1 b + \dots + x_n b^n.$$

No sistema decimal, isto é, de base $b = 10$, usa-se

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Se $b \leq 10$, utiliza-se os símbolos $0, 1, \dots, b - 1$. Se $b > 10$, acostuma-se usar os símbolos de 0 a 9, acrescentando novos símbolos para $10, \dots, b - 1$.

No sistema de base $b = 2$, muito utilizado na computação, temos que

$$S = \{0, 1\},$$

e todo número natural é representado por uma sequência dos algarismos 0 e 1.

Proposição 1.2 *Seja $a = r_n \dots r_1 r_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 5 é que r_0 seja 0 ou 5.*

Demonstração: Sendo $a = 10 \cdot (r_n \dots r_1) + r_0$, temos que a é divisível por 5 se, e somente se, r_0 é divisível por 5, e, portanto, $r_0 = 0$ ou $r_0 = 5$. Por outro lado, a é divisível por 10 se, e somente se, r_0 é divisível por 10, o que somente ocorre quando $r_0 = 0$.

1.1.1 Divisores de um número inteiro

Dados dois números inteiros a e b , diremos que a divide b , escrevendo $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$.

Definição 1.1 - Divisor de um número inteiro a é todo número inteiro b tal que $b|a$, ou seja, a é um múltiplo de b .

O conjunto dos divisores de um inteiro a é representado por:

$$D(a) = \{x \in \mathbb{Z}^*; x|a\}, \text{ onde } \mathbb{Z}^* \text{ denota-se o conjunto dos inteiros não nulos.}$$

Exemplo 1.1 - O conjunto dos divisores de 12 é $D(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

Observe que para todo $d \in \mathbb{Z}$ temos $1|d$ e $d|0$, inclusive quando $d = 0$, pois 0 é múltiplo de qualquer número. Note também que se $d|a$, então $-d|a$, $d|-a$ e $-d|-a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$.

Observe também que se a e d são números naturais, com $a \neq 0$, e se $d|a$, então $d \leq a$. De fato, sendo a um múltiplo natural não nulo do número natural d sabemos que $a \geq d$.

Das duas propriedades acima, segue que os divisores de um número inteiro formam um conjunto finito de números inteiros.

1.1.1.1 Divisão euclidiana

Teorema 1.2 - Dados a, b inteiros existem dois inteiros únicos p, r tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$.

Demonstração:

Vamos dividir a prova em dois itens: existência e unicidade.

(i) Existência: Pela propriedade arquimediana dos inteiros $\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que $-ba \geq -a$ de modo que $a - bq \geq 0$. Seja $S = \{x = a - bq; q \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$, onde x é o candidato a resto.

Pelo Princípio da Boa Ordenação, S tem um menor elemento, vamos denominá-lo r . Vamos supor que $0 \leq r < |b|$, logo temos que $r \geq 0$, pois pertence a S . Agora, vamos supor, por contradição, que $r \geq |b|$, ou seja, $r = |b| + s$ onde $s \geq 0$ e $s < r$. Vamos mostrar que $s \in S$:

Sabemos que;

$$a = bq + r = bq + |b| + s = bq \pm b + s,$$

dependendo de b então:

$$a = b(q \pm 1) + s,$$

sendo assim:

$$s = a - b(q \pm 1)$$

ou seja: $s \in S$, o que é uma contradição, pois r é o menor elemento.

Portanto,

$$r < |b|.$$

(ii) Unicidade: Para provar a unicidade vamos supor que existem q, q', r e $r' \in \mathbb{Z}$ tais que: $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$ e $a = bq' + r', 0 \leq r' < |b|$, assim igualando as duas equações obtemos:

$$bq + r = bq' + r'$$

então:

$$0 = b(q - q') + r - r'$$

assim:

$$r' - r = b(q - q')$$

logo:

$$|r' - r| = |b| \cdot |q - q'| \quad (1)$$

Multiplicando a inequação $0 \leq r' < |b|$ por -1 e somando à $0 \leq r < |b|$, obtemos:

$$-|b| \leq r - r' < |b|$$

logo

$$r - r' < |b| \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2) obtemos:

$$|b| \cdot |q - q'| < |b|$$

logo:

$$|q - q'| < 1$$

isso implica que:

$$|q - q'| = 0$$

Portanto $q = q'$ e, por (1),

$$r = r'.$$

Dessa forma, em uma divisão euclidiana $b = aq + r$ temos que o número b é chamado dividendo, o número a divisor, os números q e r são chamados, respectivamente, quociente e resto.

1.2 Máximo divisor comum entre dois números

Definição 1.2 - Dados dois números inteiros a e b não simultaneamente nulos é chamado de máximo divisor comum de a e b ao maior divisor comum de ambos e representado por $mdc(a, b)$ ou simplesmente por (a, b) .

A definição dada por Euclides nos *Elementos* constitui-se um dos pilares de sua aritmética:

Dizemos que um número inteiro $d \geq 0$ é um máximo divisor comum (*mdc*) de a e b , se possui as seguintes propriedades:

- (i) d é um divisor comum de a e b , e
- (ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b .

Podemos reescrever as propriedades acima como:

- (i') $d|a$ e $d|b$; e
- (ii') se $c|a$ e $c|b$ então $c|d$.

Demonstração: Vamos demonstrar (i') e (ii').

Para provar (i') vamos precisar do resultado a seguir:

Lema 1.1 - Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$, se existe $(a, b - na)$, então (a, b) existe e

$$(a, b) = (a, b - na).$$

Demonstração:

Seja $d = (a, b - na)$. Como $d|a$ e $d|b - na$ segue que d divide $b = b - na + na$.

Logo d é um divisor comum de a e b .

Para provar (ii') vamos supor que existe $c \in \mathbb{Z}$ que divide a e divide b então $c|d$.

De fato:

se $c|a$ e $c|b$ então $c|a - bn$, ou seja, c é um divisor comum de b e $a - bn$, logo $c|d$.

Exemplo 1.2 - Dados $a \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 1$ e $m \in \mathbb{N}$, temos que $(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1) = (a - 1, m)$.

Resolução:

De fato, a igualdade acima é trivialmente verificada se $m = 1$ e como:

$$\frac{a^m - 1}{a - 1} = \frac{(a - 1) \cdot (a^{m-1} + a^{m-2} \cdot 1^1 + \dots + a^0 \cdot 1^{m-1})}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a + 1$$

Então:

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = a^{m-1} + a^{m-2} + \dots + a + 1$$

Temos que:

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = (a^{m-1} - 1 + a^{m-2} - 1 + \cdots + a - 1 + 1 - 1 + m, a - 1)$$

Logo:

$$\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1\right) = (m \cdot (a - 1) + m, a - 1) = (m, a - 1) = (a - 1, m).$$

1.2.1 Algoritmo de Euclides

Euclides, no livro VII da sua mais famosa obra *Elementos*, apresentou um método construtivo do cálculo do *mdc*, esse método é conhecido como *Algoritmo de Euclides*, é tido como um primor do ponto de vista computacional e não teve grandes aperfeiçoamentos em mais de dois mil anos.

Ele consiste na aplicação do algoritmo da divisão euclidiana sucessivamente até se obter o resto igual a zero, obtendo assim o *mdc*, que será o último resto não nulo.

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$, tomemos, sem perda de generalidade, que $b \leq a$. Se $b = 1$ ou $b = a$ ou ainda $b|a$, temos que $(a, b) = a$. Suponhamos então que $1 < b < a$ e que $b \nmid a$. Assim, pela divisão euclidiana podemos escrever:

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b$$

Daí temos duas possibilidades:

(a) $r_1|b$. Nesse caso, $r_1 = (b, r_1)$ e, pelo Lema 1.1, temos que:

$$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1b) = (b, a) = (a, b),$$

e o algoritmo termina.

(b) $r_1 \nmid b$. Nesse caso, fazemos a divisão de b por r_1 , obtendo:

$$b = r_1q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, temos duas possibilidades:

(a') $r_2|r_1$. Nesse caso, $r_2 = (r_1, r_2)$ e, novamente, pelo Lema 1.1, temos:

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, b - q_2r_1) = (r_1, b) = (a - q_1b, b) = (a, b),$$

e aqui termina o algoritmo.

(b') $r_2 \nmid r_1$. Nesse caso, efetuamos a divisão de r_1 por r_2 , obtendo:

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Esse procedimento deve ser repetido até que pare, o que certamente vai acontecer, pois caso contrário teríamos uma sequência de números naturais $b > r_1 > r_2 \dots$ que não possui um menor elemento, contrariando o Princípio da Boa Ordenação (Se S é um subconjunto não vazio de \mathbb{Z} e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento). Logo, para algum n , temos que $r_n | r_{n-1}$, o que implica que $(a, b) = r_n$.

Podemos sintetizar essas operações no conjunto de equações a seguir:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b \\ b &= r_1q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-3} &= r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}, \text{ com } 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + 0 \end{aligned}$$

Assim o $mdc(a, b)$ é o último resto não nulo da sequência de divisões descritas acima, ou seja, $(a, b) = r_{n-1}$.

Exemplo 1.3 - Vamos calcular o máximo divisor comum dos números 348 e 154, utilizando o algoritmo de Euclides:

Resolução:

Utilizando o algoritmo da divisão euclidiana, podemos escrever as seguintes equações:

$$\begin{aligned} 348 &= 154 \cdot 2 + 40 \\ 154 &= 40 \cdot 3 + 34 \\ 40 &= 34 \cdot 1 + 6 \\ 34 &= 6 \cdot 5 + 4 \\ 6 &= 4 \cdot 1 + 2 \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Assim, como o último resto não nulo é 2, temos que $(348, 154) = 2$

Em particular, quando esse último resto não nulo for igual a 1, temos a seguinte definição:

Definição 1.3 - Dois números a, b são ditos primos entre si ou coprimos, se $(a, b) = 1$.

1.2.2 Algoritmo de Euclides estendido

O algoritmo de Euclides estendido é uma outra versão do algoritmo de Euclides que possibilita calcular ao mesmo tempo o *mdc* de dois números a e b e determinar inteiros m e n tais que $(a, b) = ma + nb$.

Tomando $a \geq b$ para encontrarmos o *mdc* de a e b através do algoritmo estendido montamos a matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para o primeiro passo de aplicação do algoritmo vamos subtrair da segunda linha q_1 vezes a primeira linha, onde q_1 é o quociente da divisão de a por b , obtemos assim a matriz:

$$A_1 = \begin{bmatrix} b & 1 & 0 \\ a - bq_1 & -q_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 1 & 0 \\ r_1 & -q_1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde r_1 como o resto da divisão de a por b .

O próximo passo consiste, na matriz A_1 , subtrair da primeira linha q_2 vezes a segunda linha, onde q_2 é o quociente de b por r_1 , obtendo a matriz:

$$A_2 = \begin{bmatrix} b - q_2r_1 & 1 + q_1q_2 & -q_2 \\ r_1 & -q_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_2 & 1 + q_1q_2 & -q_2 \\ r_1 & -q_1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde r_2 é o resto da divisão b por r_1 .

O algoritmo continua reproduzindo o Algoritmo de Euclides para determinação do *mdc* de a e b , só que agora sobre as duas linhas da matriz, obtendo ao final uma matriz B que terá 0 na em uma das linhas no elemento da primeira coluna e na outra linha teremos (d, n, m) , onde $d = (a, b)$ e os inteiros m, n são tais que $(a, b) = ma + nb$. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.4 - Calcular o máximo divisor comum dos números 348 e 156, utilizando o algoritmo de Euclides estendido:

Para utilizar o algoritmo de Euclides estendido, temos:

$$\begin{bmatrix} 156 & 1 & 0 \\ 348 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 156 & 1 & 0 \\ 348 - 2 \cdot 156 & 0 - 2 \cdot 1 & 1 - 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156 & 1 & 0 \\ 36 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 156 - 4 \cdot 36 & 1 - 4 \cdot (-2) & 0 - 4 \cdot 1 \\ 36 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & -4 \\ 36 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 9 & -4 \\ 36 - 3 \cdot 12 & -2 - 3 \cdot 9 & 1 - 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & -4 \\ 0 & -29 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Portanto $(348, 156) = 12$ e $n = 9$ e $m = -4$, logo $12 = 156 \cdot 9 + 348 \cdot (-4)$.

1.3 Mínimo múltiplo comum

Chamamos de mínimo múltiplo comum de dois números a e b inteiros ao menor múltiplo de ambos os números, simultaneamente, e representamos por $[a, b]$. Em outras palavras, temos a seguinte definição:

Definição 1.4 - Seja $m \in \mathbb{Z}$, com $m > 0$, dizemos que m é um *mínimo múltiplo comum* (*mmc*) dos números inteiros a e b , se possuir as seguintes propriedades:

- (i) m é um múltiplo comum de a e b , e
- (ii) se c é um múltiplo comum de a e b , então $m|c$

Exemplo 1.5 - Sejam os inteiros 3 e 4. Listando alguns múltiplos temos,

- Múltiplos de 3 = $\{m \in \mathbb{N}^*; m = 3 \cdot k, \forall k \in \mathbb{N}^*\}$, temos $\{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 3 \cdot 6, 3 \cdot 7, 3 \cdot 8, \dots\} = \{3, 6, 9, \mathbf{12}, 15, 18, 21, 24, \dots\}$.
- Múltiplos de 4 = $\{m \in \mathbb{N}^*; m = 4 \cdot k, \forall k \in \mathbb{N}^*\}$, temos $\{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, 3 \cdot 3, 4 \cdot 4, 4 \cdot 5, 4 \cdot 6, \dots\} = \{4, 8, \mathbf{12}, 16, 20, 24, \dots\}$.

temos que 24 é um múltiplo comum a ambos, mas não é o *mmc* de 3 e 4, pois temos ainda 12 que também é múltiplo de ambos e $12|24$, assim o *mmc* de 3 e 4 é 12.

Proposição 1.3 - Dados dois números inteiros a e b , temos que $[a, b]$ existe e

$$a, b = |a \cdot b|$$

onde $|a \cdot b|$ é o módulo do produto ab .

Demonstração:

Tomemos $m = \frac{ab}{(a,b)} \in \mathbb{Z}$. Observemos que $\frac{a}{(a,b)}$ e $\frac{b}{(a,b)}$ são inteiros e primos entre si, então:

(i) $m = a \cdot \frac{b}{(a,b)} = \frac{a}{(a,b)} \cdot b$ e isso implica que m é múltiplo comum de a e b ; e

(ii) Se c é um múltiplo de a e também de b então $c = n \cdot a = n' \cdot b$, agora temos que provar que $m|c$.

Temos: $\frac{n \cdot a}{(a,b)} = \frac{n' \cdot b}{(a,b)}$, segue que: $n \cdot \frac{a}{(a,b)} = n' \cdot \frac{b}{(a,b)}$ e,

como $\frac{a}{(a,b)}$ e $\frac{b}{(a,b)}$ são coprimos entre si então:

$\frac{b}{(a,b)} | n$, o que implica que:

$n = \frac{b}{(a,b)} \cdot n''$, assim fazendo uma substituição, obtemos:

$c = na = \frac{b}{(a,b)} n'' \cdot a = m \cdot n''$, logo $m|c$.

Esse resultado nos permite encontrar o *mmc* através do algoritmo estendido de Euclides, pois basta encontrar o *mdc* e aplicar essa proposição.

Temos que no **exemplo 1.4**, onde $(348, 156) = 12$ poderíamos calcular $[348, 156]$ facilmente,

$$[348, 156] \cdot (348, 156) = |348 \cdot 156|$$

$$[348, 156] \cdot 12 = |54288|$$

$$[348, 156] = 4524$$

Logo, temos que $[348, 156] = 4524$.

1.4 Números primos

Definição 1.5 - Um número natural diferente de 0 e de 1 e que é apenas múltiplo de 1 e de si próprio é chamado de número primo. Um número diferente de 0 e de 1 que não é primo é chamado de número composto.

Em outras palavras, chamamos de números primos a todo número inteiro $p > 1$ que só possui dois únicos divisores positivos: 1 e o próprio número p .

Os números primos são considerados números especiais, pois desempenham um papel importante dentro da teoria dos números e, entre outras coisas, os seus produtos representam todos os números naturais, como veremos ainda nesta seção.

1.4.1 Teorema Fundamental da Aritmética

Agora vamos apresentar um dos mais importantes resultados da Teoria de Números:

Primeiramente apresentaremos dois resultados importantes que são necessários para demonstração.

Proposição 1.4 - Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$ com p primo. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração: É suficiente provar que, se $p|ab$ e $p \nmid a$, então $p|b$. Se $p|ab$, então existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $ab = pc$. Se $(p, a) = 1$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$mp + na = 1$$

multiplicando por b ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$b = mbp + nba$$

substituindo ab por pc nesta última igualdade, temos que

$$b = mbp + npc = p(mb + nc)$$

e, portanto, $p|b$.

Corolário 1.1 - Se p, p_1, \dots, p_n são números primos e, se $p|p_1 \cdots p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, \dots, n$.

Teorema 1.3 - Teorema Fundamental da Aritmética: Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (ao menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração:

Vamos usar o Princípio de Indução Completa ou Indução Forte, como também é conhecida para provar a existência do teorema.

Para $n = 2$, o resultado é obviamente verificado. Vamos supor que seja válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que vale para n .

Se n é primo, não há nada a demonstrar, então suponhamos que n seja composto. Logo existem números naturais n_1 e n_2 , tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Sabemos, pela hipótese indutiva que $n_1 = p_1.p_2.\cdots.p_r$ e $n_2 = q_1.q_2.\cdots.q_s$, onde $p_1.p_2.\cdots.p_r$ e $q_1.q_2.\cdots.q_s$ são números primos. Portanto $n = p_1.p_2.\cdots.p_r.q_1.q_2.\cdots.q_s$, logo n é formado por um produto de primos.

Agora temos que provar a unicidade da escrita. Vamos supor que tenhamos $n = p_1.p_2.\cdots.p_r = q_1.q_2.\cdots.q_s$, onde os p_i e q_j são números primos. Como $p_1|q_1 \cdots q_s$, pelo corolário acima, logo $p_1 = q_j$ para algum j , que, após reordenamento de q_1, \cdots, q_s , podemos supor que seja q_1 . Portanto,

$$p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$$

Como $p_2 \cdots p_r < n$, pela hipótese indutiva podemos concluir que $r = s$ para cada p_i e q_j na fatoração.

1.4.2 Identificação de um número primo

Já sabemos qual é a definição de números primos, mas quantos números primos existem? É uma pergunta que Euclides respondeu no livro IX dos *Elementos*, onde deu uma prova que até hoje é utilizada e considerada uma das pérolas da matemática.

Teorema 1.4 - Existem infinitos números primos.

Demonstração:

Vamos supor que exista apenas um número finito de números primos p_1, p_2, \cdots, p_r . Tomemos um número natural $n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. Temos que n possui um fator primo p , ou seja, n é múltiplo de algum primo, que portanto deve ser um dos p_1, p_2, \cdots, p_r , digamos: p_j , então temos que $p_j|n$. Mas conseqüentemente, $p_j|(n - p_1.p_2.\cdots.p_r) = 1$, ou seja, p divide 1, o que é um absurdo, portanto, existem infinitos números primos.

Lema 1.2 - Se um número natural $n > 1$ não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.

Demonstração:

Vamos supor por absurdo, que n não seja divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$ e que não seja primo. Seja q o menor número primo que divide n , então $n = qn_1$, com $q \leq n_1$. Segue daí que $q^2 \leq qn_1 = n$. Logo, n é divisível por um número primo q tal que $q^2 \leq n$, o que é um absurdo. Portanto segue a afirmação do resultado.

Podemos utilizar o Lema 1.2 como um teste de primalidade, assim para verificar se um número é primo, basta verificar que ele não é divisível por nenhum primo p menor do que \sqrt{n} .

1.5 Congruências

Boa parte do que veremos nessa seção foi introduzida por Gauss (1755-1855) em seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, publicado em 1801. Vamos agora introduzir a ideia de Gauss de desenvolver uma aritmética dos restos da divisão por um certo número fixado. Essa ideia é o que chamamos de *Aritmética dos Restos* ou *Aritmética Modular*.

Definição 1.6 - Dado m um número natural, diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m , se os restos de suas divisões euclidianas por m são iguais. Representamos por $a \equiv b \pmod{m}$. Quando a relação $a \equiv b \pmod{m}$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes módulo m , ou ainda, que a e b são incongruentes módulo m .

Exemplo 1.6 - Temos que $35 \equiv 19 \pmod{2}$, pois ambos deixam resto 1 na divisão por 2.

A relação de congruência possui as seguintes propriedades: Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

- (i) $a \equiv a \pmod{m}$.
- (ii) se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$.
- (iii) se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

O resultado a seguir nos permite saber se dois números são congruentes módulo m sem precisar efetuar a divisão euclidiana e comparar os restos.

Proposição 1.5 - Dados $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$, tem-se que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m|b - a$.

Demonstração:

Pela divisão euclidiana, podemos escrever $a = mq + r$ com $0 \leq r < m$ e $b = mq' + r'$, com $0 \leq r' < m$, temos que: $b - a = m(q' - q) + (r' - r)$, portanto $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $r = r'$, o que equivale a dizer que $m|b - a$, já que $|r - r'| < m$.

O que torna muito útil a relação de congruência é o fato de ela ser compatível com as operações de adição e multiplicação nos inteiros, conforme a próxima proposição.

Proposição 1.6 - Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$, tem-se:

- (i) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.
- (ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Demonstração:

Vamos supor que $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, logo $m|(b - a)$ e $m|(d - c)$ e assim::

- (i) temos que $m|[(b - a) + (d - c)]$ e, portanto, $m|[(b + d) - (a + c)]$.
- (ii) temos que $bd - ac = d(b - a) + a(d - c)$, logo $m|bd - ac$.

Também são válidos o resultado ao qual denominamos *lei do cancelamento*:

Corolário 1.2 - Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$ temos que $a + c \equiv b + c \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

Demonstração:

Segue da proposição 1.6 que se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv c \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + c \pmod{m}$. Reciprocamente, temos que se $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, então $m|b + c - (a + c)$ o que implica que $m|b - a$, portanto $a \equiv b \pmod{m}$.

O resultado anterior nos confirmou que vale a lei do cancelamento em relação à adição. Mas, em relação à multiplicação nem sempre será válido.

A partir dessa conclusão temos a seguinte proposição.

Proposição 1.7 - Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$ temos que $ac \equiv bc \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{(c, m)}}$.

Demonstração:

Como $\frac{m}{(c, m)}$ e $\frac{c}{(c, m)}$ são coprimos, temos que:

$$ac \equiv bc \pmod{m} \Leftrightarrow m|(b-a)c \Leftrightarrow \frac{m}{(c, m)}|(b-a)\frac{c}{(c, m)} \Leftrightarrow \frac{m}{(c, m)}|b-a \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{(c, m)}}.$$

Corolário 1.3 - Para todo $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$ e $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $(c, m) = 1$, então $ac \equiv bc \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$.

Demonstração:

Pela proposição 1.5, temos que, como $(c, m) = 1$, então:

$$m|ac - bc \Leftrightarrow n|(a - b)c \Leftrightarrow n|a - b.$$

Com a notação de congruência, usando o Pequeno Teorema de Fermat: Se p é um número primo e $a \in \mathbb{Z}$, então $a^p \equiv a \pmod{p}$. Além disso, se $p \nmid a$, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

1.5.1 Aplicações de congruências

Através das relações de congruência podemos saber qual o critério, ou seja, qual a característica que o número deve ter para ser divisível por um número inteiro dado. Essa é uma das aplicações de congruência muito utilizada tanto no ensino fundamental como no ensino médio, é o que chamamos de critério de divisibilidade de um número inteiro. É possível encontrar o critério de divisibilidade para qualquer número inteiro utilizando a aritmética modular. Alguns desses critérios estão nas próximas seções.

1.6 Critérios de Divisibilidade.

1.6.1 Múltiplos inteiros de um número

Definição 1.7 - Chamamos de múltiplo de um número inteiro a ao número ma que resulta da multiplicação do número a pelo número m .

Seja um a um número inteiro chamamos de conjunto dos múltiplos de a ao conjunto:

$$a\mathbb{Z} = \{a \cdot d; d \in \mathbb{Z}\}.$$

Os múltiplos de um número inteiro possuem as propriedades abaixo, considerando a e m números inteiros.

(i) 0 é múltiplo de a .

(ii) Se m é um múltiplo de a , então $-m$ é múltiplo de a .

(iii) Um múltiplo de um múltiplo de a é um múltiplo de a .

(iv) Se m e m' são múltiplos de a , então $m + m'$ e $m - m'$ são também múltiplos de a .

(v) Se m e m' são múltiplos de a , então $e \cdot m + f \cdot m'$ é múltiplo de a , quaisquer que sejam os inteiros e e f .

(vi) Se $m + m'$ ou $m - m'$ é múltiplo de a e m é múltiplo de a , então m' é múltiplo de a .

1.6.2 Critério de divisibilidade por 5 e por 10

Seja $n = n_r n_{r-1} \dots n_0$ um número representado no sistema decimal. Uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 5 (respectivamente por 10) é que r_0 seja 0 ou 5 (respectivamente por 0). E usando a noção de congruência, como $10 \equiv 0 \pmod{5}$ e $10 \equiv 0 \pmod{10}$, temos que

$$n_i 10^i \equiv 0 \pmod{5}, \quad n_i 10^i \equiv 0 \pmod{10}; \quad i \geq 1; \quad \text{com } 0 \leq i \leq n$$

portanto, dado um número $n_r n_{r-1} \dots n_0$, temos que

$$n \equiv n_0 \pmod{5}, \quad n \equiv n_0 \pmod{10},$$

o que nos diz que n é divisível por 5 ou por 10 se, e somente se, n_0 é divisível por 5 ou por 10.

1.6.3 Critérios de divisibilidade por 3 e por 9

Como $10 \equiv 1 \pmod{3}$ e $10 \equiv 1 \pmod{9}$, segue que $n_i 10^i \equiv n_i \pmod{3}$ e $n_i 10^i \equiv n_i \pmod{9}$. Então, se n é representado na base 10 como $n_r n_{r-1} \cdots n_0$, temos:

$$n \equiv (n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0) \pmod{3}$$

e

$$n \equiv (n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0) \pmod{9}$$

o que prova que n é divisível por 3 ou por 9 se, e somente se, $n_r + n_{r-1} + \cdots + n_0$ é divisível, respectivamente por 3 ou por 9. Assim, basta somar os algarismos do número para saber se ele é divisível por 3 ou por 9. Por exemplo, o número 2019 é divisível por 3, mas não é divisível por 9.

1.6.4 Critérios de divisibilidade por 6

Vamos observar esses resultados obtidos com a utilização da definição 1.7:

$$10 \equiv 4 \pmod{6},$$

$$10^2 \equiv 4^2 \equiv 4 \pmod{6},$$

$$10^3 \equiv 10^2 \cdot 10 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{6},$$

$$10^4 \equiv 10^3 \cdot 10 \equiv 4 \cdot 4 \equiv 4 \pmod{6}.$$

Assim temos que, $10^i \equiv 4 \pmod{6}$, para todo número natural $i > 0$. Vejamos se realmente é verdadeira essa afirmação.

Se um número natural n é escrito no sistema decimal como $n_r n_{r-1} \cdots n_0$, temos que $n = (n_0 + 10n_1 + 10^2n_2 + \cdots + 10^r n_r) \equiv (n_0 + 4n_1 + 4n_2 + \cdots + 4n_r) \pmod{6}$. Com isto, temos que o resto da divisão de n por 6 é igual ao resto da divisão de $n_0 + 4n_1 + 4n_2 + \cdots + 4n_r$ por 6. Logo, provamos que: um número $n = n_r n_{r-1} \cdots n_0$ é divisível por 6 se, e somente se $n_0 + 4n_1 + 4n_2 + \cdots + 4n_r$ é divisível por 6.

1.6.5 Critérios de divisibilidade por 11

Temos que $10 \equiv -1 \pmod{11}$, elevando cada membro a $2i$, obtemos que $10^{2i} \equiv 1 \pmod{11}$ e, multiplicando membro a membro as duas congruências, pela proposição 1.4, obtemos:

$$10^{2i+1} \equiv -1 \pmod{11}.$$

Dessa forma, sendo $n = n_r \cdots n_5 n_4 n_3 n_2 n_1 n_0$ um número escrito na base 10. Temos então:

$$\begin{aligned} n_0 &\equiv n_0 \pmod{11} \\ n_1 10 &\equiv -n_1 \pmod{11} \\ n_2 10^2 &\equiv n_2 \pmod{11} \\ &\dots \\ n_r 10^r &\equiv n_r \pmod{11} \end{aligned}$$

Somando membro a membro as congruências acima, pela proposição 1.4, temos que:

$$n \equiv n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \cdots + (-1)^r n_r \pmod{11}.$$

Portanto, n é divisível por 11 se, e somente se, é divisível por 11 o número $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \cdots + (-1)^r n_r$.

Por exemplo, o número 6 172 947 é divisível por onze pois, $7 - 4 + 9 - 2 + 7 - 1 + 6$ é igual a 22 e 11 divide 22. Já o número 7 942 761 não é, já que $1 - 6 + 7 - 2 + 4 - 9 + 7$ é igual a 2, que não é divisível por 11.

1.7 Análise combinatória

As referências para as seções 1.7 e 1.8 são Morgado (2014) e Nemitz (2016).

1.7.1 O Princípio Fundamental da Contagem

Se existem x maneiras de se tomar um decisão D_1 e, para cada uma delas, y maneiras de se tomar uma decisão D_2 , então o número de maneiras de tomarmos sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é dado por $x.y$.

Esse é o **princípio fundamental da contagem** e é válido para qualquer número de decisões sucessivas.

Exemplo 1.7 - Dispondo-se das cores verde, vermelho, azul e amarelo, de quantas maneiras é possível pintar uma bandeira dividida em 4 listras de modo que duas listras adjacentes não tenham a mesma cor?

É importante assumir o problema como sendo seu, visualizar a situação em questão. Dois exemplos de possíveis bandeiras pintadas de acordo com as condições estabelecidas seriam (azul, verde, vermelho, amarelo) ou (verde, amarelo, verde, amarelo).

Para pintar a bandeira, precisamos escolher a cor de cada listra.

Existem 4 maneiras de escolher a cor da primeira listra, pois nenhuma delas foi pintada. E, a partir daí, 3 modos de escolher a cor de cada uma das outras 3 listras. Logo, usando o princípio multiplicativo temos $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ maneiras diferentes de pintar a bandeira em questão.

Exemplo 1.8 - Quantos números com 3 algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

Para formar um número com 3 algarismos, precisamos escolher os algarismos da centena, da dezena e da unidade.

O algarismo da centena pode ser escolhido de 5 maneiras, pois não pode ser igual a 0. Escolhido o algarismo da centena, existem 5 maneiras de escolher o da dezena, pois este pode ser igual a 0, mas não pode ser igual ao algarismo da centena. O da unidade pode ser escolhido de 4 maneiras, pois deve ser diferente dos dois algarismos anteriores. Portanto, a quantidade de números com 3 algarismos distintos é: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$.

Neste exemplo, a escolha do algarismo da centena é mais restritiva que as demais, pois ele deve ser diferente de 0.

1.7.2 Fatorial

O fatorial de um número natural $n > 1$ é indicado por $\mathbf{n!}$ e definido como sendo o produto de \mathbf{n} por todos os números positivos que o antecedem.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Veja, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

A definição anterior é válida para qualquer número natural maior do que 1. Na continuidade do estudo de análise combinatória, desenvolveremos alguns raciocínios para os quais será conveniente definir valores também para os fatoriais de 1 e de 0. São eles: $1! = 1$ e $0! = 1$.

1.7.3 Permutação e combinações

Com o princípio fundamental da contagem, podemos resolver qualquer problema de combinatória. Entretanto, em determinadas situações, existem características que nos permitem desenvolver raciocínios mais específicos e que podem facilitar a resolução dos problemas. É isso que faremos a partir de agora. Os problemas de contagem estão relacionados basicamente a duas ações: a de ordenar e a de escolher. A primeira corresponde ao que denominamos permutação, e a segunda, ao que chamamos de combinação.

Um problema envolvendo anagramas, por exemplo, é resolvido aplicando o conceito de permutação, pois basta ordenar as letras de uma palavra. Na palavra LUXO, temos os seguintes anagramas: OULX, OUXL, UOLX, OLXU, OLUX, OXUL, OXLU, LOUX, LOXU, LUOX, LUXO, LXOU, LXUO, UOLX, UOXL, ULOX, ULXO, UXOL, UXLO, XOUL, XOLU, XLOU, XLUO, XUOL, XULO. Ao todo temos 24 anagramas da palavra LUXO. Podemos chegar nesse número sem, necessariamente, escrever todas essas possibilidades utilizando o conceito de fatorial. Temos quatro letras distintas para ocuparem quatro lugares, logo o total se dá por $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Esse tipo de anagrama é dito como **permutações simples**, pois os elementos ordenados são distintos. As permutações simples de n são representadas por P_n .

Quando os elementos que queremos ordenar não são todos distintos é necessário retirar as permutações repetidas. Veja por exemplo, na palavra OVO, a letra **O** repete-se duas vezes, sua mudança de lugar não representa outro anagrama. Essas letras **O**, podem ser ordenadas $2! = 2$ maneiras. Assim, o número de anagramas distintos é $\frac{P_3}{P_2} = \frac{6}{2} = 3$. Que são exatamente: OOV, VOO, OVO.

Para esse tipo de problema usamos a chamada **permutação com repetição**.

Nos problemas de contagem onde entre n objetos distintos escolhemos p , formamos dois grupos: um com os p elementos escolhidos e outro com os $n - p$ elementos escolhidos. Temos,

1. O número de maneiras de ordenar os n elementos é $P_n = n!$.
2. O número de maneiras de ordenar os elementos em cada um dos grupos são $p!$ e $(n - p)!$.

Como trocas dentro de um mesmo grupo geram divisões idênticas, o número de

combinações simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Para ilustrar melhor podemos propor o seguinte exemplo: De quantas maneiras uma pessoa pode escolher 5 camisetas entre as 8 que tem para levar em uma viagem?

A quantidade de maneiras de fazer a escolha é dada pelo número de combinações simples das 8 camisetas tomadas 5 a 5. Ou seja, $C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = 56$. Portanto, a pessoa pode fazer a escolha de 56 maneiras diferentes.

1.7.4 Estratégia para resolver problemas de combinatória

Uma forma de lidar com problemas envolvendo conceitos de combinatória além de uma boa leitura e conhecimento, é seguir três passos que indicaremos a seguir:

1. **Postura:** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação, assumindo para nós o problema proposto.
2. **Divisão:** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
3. **Não adiar dificuldades:** Pequenas dificuldades adiadas ou prorrogadas costumam se transformarem em grandes dificuldades. Se uma decisão a ser tomada é mais complicada ou mais restrita que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar.

Quando perguntamos quantos anagramas da palavra FRAMBOESA terminam por vogal, a escolha da letra que ocupará a última posição é mais restritiva que as demais, pois ela deve ser uma vogal. E além, disso é necessário analisar os casos de ser a vogal **a** ou as demais presentes na palavra, pois tem-se duas vogais iguais.

Imagine agora que, ao resolver esse problema, não considerássemos a situação em que a última posição fosse uma vogal ou ainda que há repetição de uma delas. Desse modo, teríamos 9 possibilidades de escolha para a primeira letra. Em seguida, 8 para a segunda posição e assim sucessivamente até chegar na última posição.

Nesse caso, escolhida as letras das oito posições anteriores, de quantas maneiras a escolha da letra que ocupará a última posição pode ser feita?

A resposta para essa pergunta é “depende”. Não podemos garantir a presença de uma vogal na última posição. Ou ainda, mesmo que começássemos pela última posição deveríamos separar em dois casos: sendo a letra **a** na última posição ou terminando com as vogais **e** ou **o** (garantindo que nas letras que restam não há repetição). Por não termos começado pela decisão mais restritiva (escolha da letra que ocupará a última posição), não será possível obter diretamente a resposta para o problema.

1.8 Probabilidades

A probabilidade é um ramo da matemática que visa calcular as chances de ocorrência de um determinado experimento. Logo, a probabilidade é uma medida numérica da possibilidade de que um evento ocorra, podendo então ser usadas como medidas do grau de incerteza. A matemática pode ser aplicada de diferentes formas, por exemplo, ao fazer o lançamento de uma simples moeda, as chances de se obter cara ou coroa, pode ser estimada através de cálculos e então concluir quais são essas chances. A probabilidade e estatística pode contribuir significativamente para diminuição dos erros e favorecer a análise da melhor tomada de atitude, considerando as mais diversas situações.

1.8.1 Experimento aleatório

Experimentos aleatórios são aqueles que se repetidos várias vezes sob certas condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis.

Em uma afirmação do tipo “é provável que meu time ganhe a partida de hoje” pode resultar:

1. Que o time perca.
2. Que o time ganhe.
3. Que o time empate.

O resultado é imprevisível e depende do acaso. Esses fenômenos são chamados fenômenos aleatórios ou experimentos aleatórios.

1.8.2 Espaço amostral

Espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório (E). Indicaremos o espaço amostral por S e o número de elementos de S por $n(S)$.

Por exemplo, ao jogar dado cúbico e observar o número da face de cima temos $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(S) = 6$.

Figura 1.1: Dado Cúbico.



Fonte: a autora, 2019

1.8.3 Evento

Evento em probabilidade é qualquer subconjunto do espaço amostral S de um experimento aleatório E .

Em um experimento, onde é lançado um dado cúbico e observado o número da face de cima, o espaço amostral dado será $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Temos, por exemplo, que o evento $A = \{\text{sair número par}\}$ pode ser escrito como $A = \{2, 4, 6\}$, sendo então $n(A) = 3$

Observações:

- O conjunto vazio é chamado evento impossível.
- Quando o evento coincide com o espaço amostral, ele é chamado evento certo.

1.8.4 Conceito de probabilidades

Quando em um fenômeno (ou experimento) aleatório, com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma chance de ocorrer (o espaço é **equiprovável**), a probabilidade de ocorrer o evento A , é indicada por $P(A)$, é um número que mede essa chance e é dado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Exemplo 1.9 - Considerando o lançamento de um dado cúbico, a probabilidade de ocorrer na face superior um número par.

Temos que $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e $n(S) = 6$. Considerando o evento $A = \{2, 4, 6\}$, logo $n(A) = 3$. Assim, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou 50%.

Exemplo 1.10 - Considerando o lançamento de um dado cúbico, vamos calcular a probabilidade de ocorrer na face superior o número 2.

Trata-se do mesmo espaço amostral do exemplo anterior. Assim, considerando o evento $B = \{2\}$, temos $n(B) = 1$. Resultando na probabilidade $P(B) = \frac{1}{6}$ ou aproximadamente 16,67%.

As possibilidades nestes dois casos podem variar de eventos como desde um evento impossível até um evento certo. Em resumo, temos:

- Se $P(A) = 1$, temos o evento certo;
- Se $P(A) = 0$, temos o evento impossível;
- Sempre teremos, $0 \leq P(A) \leq 1$.

1.8.5 Eventos complementares

Um evento pode ocorrer ou não. Sendo p a probabilidade de que ele ocorra (sucesso) e q a probabilidade de que ele não ocorra (insucesso), então: $p + q = 1$ ou $q = 1 - p$.

Assim, no lançamento de um dado, a probabilidade de ocorrer o número 2 na face superior é $1/6$ ou aproximadamente 16,67%. Logo, a probabilidade de não tirar 2 no lançamento é $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ou aproximadamente 83,33%.

Exemplo 1.11 - No lançamento simultâneo de dois dados cúbicos, um preto e um vermelho, e a observação da soma dos números que aparecem nas faces superiores. Qual é a probabilidade de obtermos soma par ou soma múltipla de 3?

Figura 1.2: Lançamento de dois dados.



Fonte: a autora, 2019

Neste caso temos o espaço amostral $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$, onde $n(S) = 36$. Vamos separar em dois casos.

Considerando o evento A : {sair soma par}, onde $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$ e $n(A) = 18$. Podemos calcular a probabilidade de obtermos soma par por $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

E considerando o evento B : {sair soma múltipla de 3}, onde $B = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$ e $n(B) = 12$. Calculando a probabilidade de obtermos soma múltipla de 3 por $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Por fim, a probabilidade de obter soma par ou soma múltipla de 3, ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento $A \cup B$, será:

$A \cup B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 6)\}$ e $n(A \cup B) = 24$. Temos,

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Considerando ainda, a probabilidade de obter soma par e soma múltipla de 3, ou seja, procuramos a probabilidade de ocorrer o evento $A \cap B$. Temos $A \cap B = \{(1, 5), (2,$

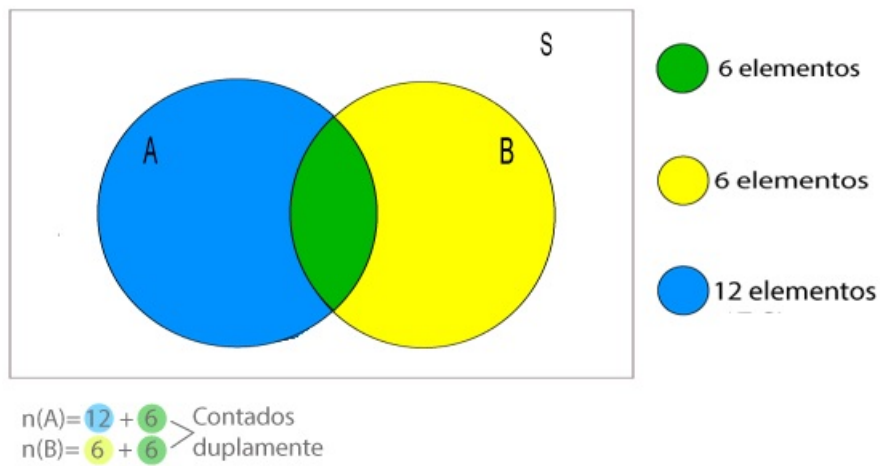
4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)}, onde $n(A \cap B) = 6$. Temos,

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Considerando os resultados obtidos de $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$, temos a igualdade: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$ que é exatamente a relação,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

. É possível observar esse resultado pelo Diagrama de Venn a seguir:



Na igualdade $n(A \cup B) = 18 + 12 - 6$, ao dividir os dois membros por $n(S)$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

logo,

$$n(A \cup B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Em particular, se A e B são eventos mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$), então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Dois eventos, A e B, de um espaço amostral S, são eventos complementares se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = S$.

Consequentemente, se A e B são eventos complementares, então, são mutuamente exclusivos: $P(A) + P(B) = P(A \cup B) = P(S) = 1$. Logo, $P(A) + P(B) = 1$.

1.8.6 Probabilidade condicional

Seja S um espaço amostral e A e B , dois eventos. Denotamos por $A|B$ o evento A condicionado ao fato de o evento B já ter ocorrido e por $P(A|B)$ a probabilidade condicional de ocorrer A tendo ocorrido B . Sendo, $P(A|B)$, consideramos B o novo espaço amostral “reduzido” dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A .

Exemplo 1.12 Qual a probabilidade de se jogar um dado cúbico e se obter um número ímpar dado que ele é maior ou igual a 2?

Temos que $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Inicialmente podemos considerar os eventos $A = \{\text{sair número ímpar}\}$ e $B = \{\text{sair um número maior ou igual a 2}\}$. Assim, $n(A) = 3$ e $n(B) = 5$. Logo, a probabilidade é dada por,

$$P(A|B) = \frac{2}{5}$$

1.8.6.1 Cálculo de probabilidade condicional

Em circunstâncias usuais, a probabilidade de ocorrência de um evento A é $\frac{n(A)}{n(S)}$, em que $n(S)$ é o número total de resultados do espaço amostral e $n(A)$ é o número de elementos em A . Porém, sabemos que nem todos esses resultados são possíveis: se B ocorreu, apenas os resultados em B devem ser considerados. Portanto, o número de possibilidades é $n(B)$. A questão agora é quantas dessas possibilidades restantes incluem o evento A ? De modo geral, há $n(A)$ maneiras de A ocorrer, mas agora nem todas essas maneiras são possíveis. Dessa forma, o número de resultados possíveis em que o evento A pode ocorrer é igual ao número de resultados que estão tanto em A como em B , ou seja, $n(A \cap B)$. Logo, a probabilidade de o evento A ocorrer, dado que B ocorreu, é:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ou seja, a probabilidade de A ocorrer, dado que B ocorreu, é igual à probabilidade de ocorrência simultânea de A e B dividida pela probabilidade de ocorrência de B; com $P(B) > 0$.

Em resumo, se tem duas formas de calcular a probabilidade condicional $P(A|B)$:

- Considerando que a probabilidade do evento A será calculada em relação ao espaço amostral “reduzido” B.
- Empregando a fórmula $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, em que tanto $P(A \cap B)$ como $P(B)$ são calculadas em relação ao espaço amostral original S.

Exemplo 1.13 - Em uma população de 500 pessoas, 270 são mulheres e 60 exercem a profissão de advogado, sendo 25 do sexo feminino. Tomando ao acaso uma dessas pessoas, vamos calcular a probabilidade de que, sendo uma mulher, seja advogada.

Considerando, o evento $A = \{\text{a pessoa exerce advocacia}\}$ e o evento $B = \{\text{a pessoa é do sexo feminino}\}$, procuramos $P(A|B)$. Temos que, $P(B) = \frac{280}{500} = \frac{14}{25}$ e $P(A \cap B) = \frac{20}{500} = \frac{1}{25}$, aplicando a fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{14}{25}} = \frac{1}{14}$$

Assim, a chance de escolher uma pessoa do sexo feminino que seja advogada é de $\frac{1}{14}$.

1.8.7 Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes quando a realização de um dos eventos não afeta a probabilidade da realização do outro, isto é, se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$. Dessa forma, para a ocorrência simultânea dos dois eventos independentes, temos:

$$P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

onde

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

Por exemplo, no lançamento de dois dados cúbicos, temos que:

- Probabilidade de obtermos 1 no primeiro dado: $\frac{1}{6}$
- Probabilidade de obtermos 5 no segundo dado: $\frac{1}{6}$

Logo, a probabilidade de obtermos, simultaneamente, 1 no primeiro dado e 5 no segundo dado é: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Observação:

Eventos independentes com eventos mutuamente exclusivos são diferentes.

Se A e B são mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \emptyset$, $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, logo: $P(A \cap B) = 0$ e $P(A) \cdot P(B) \neq 0$. Dessa forma, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, ou seja, A e B são eventos dependentes.

Exemplo 1.14 - Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral E. Suponhamos que $P(A) = 0,35$, $P(A \cup B) = 0,75$ e $P(B) = p$. Vamos determinar o valor de p para os casos em que A e B forem mutualmente exclusivos ou eventos independentes.

No caso de A e B serem mutualmente exclusivos, temos que $A \cap B = \emptyset$, logo $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, segue que $P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,75 - 0,35 = 0,40$.

E, no caso dos eventos A e B serem independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, assim $P(A \cap B) = 0,35 \cdot p$.

Dessa forma, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, segue que $P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$, temos assim $0,75 - 0,35 = p - 0,35 \cdot p$, logo $p \approx 0,615$.

Capítulo 2

Os jogos e seu uso como prática pedagógica

Ao longo dos anos, a prática de jogos matemáticos vem se desenvolvendo e ocupando espaço nas aulas de matemática. Esta dissertação procura fundamentar como os jogos e as situações problemas podem intermediar a aprendizagem do aluno apresentando uma versão do jogo dominó como possível mediação desta prática. Existem muitas discussões sobre diferentes práticas que o professor pode ou deve usar em suas aulas para despertar nos alunos o interesse em estudar os conceitos matemáticos, uma dessas formas seria através de jogos, algo que alivia, em um primeiro momento, a ideia de livros e quadro. Neste capítulo são feitas algumas considerações sobre a prática pedagógica do uso de jogos e suas contribuições no processo de ensino aprendizagem.

2.1 Considerações sobre a matemática

A matemática acompanha o homem desde os primórdios como bem retratam os livros de história. As paredes das cavernas eram como os cadernos de hoje em dia, servindo para registrar as pinturas referentes ao cotidiano (registros rupestres), estimulando uma noção de semelhanças e diferenças - tamanhos, formas, quantidades, caracterizando os habitantes das cavernas como os primeiros a lidarem com o universo dos números. Tal relação se deu por conta do processo de evolução do homem, onde lhe foi exigido à reorganização de suas atividades, desenvolvendo uma dinâmica para o controle das quantidades, compreensão do tempo, começando assim a criar um molde inicial para a matemática e

construindo uma nova percepção em relação ao mundo.

A Matemática é, provavelmente, a ciência mais antiga que se possa ter notícia, é fácil observar que a Matemática está presente em toda a sociedade, seja nas construções feitas pelo homem, seja na natureza ou nos eventos naturais ou provocados pelo ser humano. Se buscar na história, muitos pensadores, matemáticos ou não, atribuíam à Matemática muitos eventos, nesse sentido, se pode ter uma certeza, ela está com a humanidade desde seu surgimento. (Basso, 2012)

Aristóteles definiu a matemática de forma simples, no entanto bastante precisa, como uma ciência que, de modo muito próprio, consegue unir ordem, simetria e limitação, sendo estes seus grandes feitos. Desde então grandes transformações acompanham o cenário matemático, aprimorando sua funcionalidade e método de ensino. É sabido que, para um cidadão exercer o seu papel na sociedade de forma eficaz é imprescindível sua compreensão matemática até mesmo para as atividades simplórias como calcular distâncias, fazer compras, identificar lugares, fazer uma receita de bolo e tantas outras situações. O fato é que a matemática faz parte da evolução humana, caminha lado a lado com a ebulição de transformações, se adequando, aprimorando para responder às necessidades sociais e por isso continua sendo essencial para condução da rotina das pessoas. Apesar de indispensável, não é atrativa e carrega o estereótipo desagradável de ser complicada. Defronte deste panorama, não se pode negar que esse bordão deve-se, muitas vezes, a falta de vontade do corpo docente em criar novos moldes de abordagens e construção de conhecimento.

[...] de trabalhar segundo metodologias de ensino e de aprendizagem diversificadas, de modo a desenvolver uma variedade de conhecimentos, de capacidades, de atitudes e de valores. Esta exposição a diferentes métodos também funciona como um mecanismo de aprendizagem. (Da Ponte, 2000)

A ludicidade desperta a imaginação, o mundo do faz de conta, além de proporcionar diversão e interação. Essa atmosfera ultrapassa a imagem conservadora e rígida de ensino, cultivando um solo fértil, ou seja, um aluno aberto aos novos conhecimentos e com ânimo para superar suas limitações, lapidando uma natureza exploratória, curiosa e reflexiva mesmo se tratando de matemática.

Chegaram ao seu coração e à sua mente, na medida exata do seu entendimento, de sua capacidade emocional, porque continham esse elemento que a fascinava, despertava o seu interesse e curiosidade, isto é, o encantamento, o fantástico, o maravilhoso, o faz de conta. (Abramovich, 1997)

Estudar Matemática desconhecendo o seu desenvolvimento e a sua importância nas transformações socioculturais, políticas e tecnológicas se torna algo sem grandes motivações. A partir da própria experiência e do conhecimento da evolução desta ciência, mostra-se aos alunos uma matemática viva, ativa, feita em resposta às necessidades culturais, sociais e naturais que nos rodeiam.

A Matemática, como disciplina pedagógica, está presente em muitos momentos da vida do aluno, seja ela sob aspectos numéricos ou não. O ensino da Matemática auxilia na formação de hábitos e atitudes, no desenvolvimento de habilidades e até mesmo na alteração de comportamento, beneficiando a formação da personalidade do aluno.

2.2 Dificuldades de Aprendizado

Não há uma única causa para explicar as dificuldades e resistências em estudar matemática. O educador deve estar sempre observando seus alunos, desde sua postura ao ouvir as explicações até a forma como ele encara as atividades propostas. Nosso método de ensino não pode ser único e imutável. Por vezes, é preciso agir para que mais alunos se interessem em nossas aulas. Cada turma tem alunos com diferentes dificuldades e interesses, e despertar a vontade de aprender deve ser constante em cada momento da aula.

Ao perceber as dificuldades de um aluno, verificamos que na verdade ela pode estar sendo agravada pelo desinteresse ou vice-versa. Na esfera da educação, muitos são os envolvidos desde os recursos que cabe a cada unidade de ensino até a família do aluno que é atendido.

Portanto, identificar um único culpado não é possível, porém desistir de buscar a melhor maneira de levar conhecimento aos alunos não pode ser uma opção. Segundo SÁNCHEZ (2004, p.174 apud BISOGNIN,2015 , p.12):

Dificuldades em relação ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática; do tipo da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, quanto à prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações. Dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente.

Dificuldades quanto às crenças, às atitudes, às expectativas e aos fatores emocionais acerca da matemática. Questões de grande interesse e que com o tempo podem dar lugar ao fenômeno da ansiedade para com a matemática e que sintetiza o acúmulo de problemas que os alunos maiores experimentam diante do contato com a matemática.

Dificuldades relativas à própria complexidade da matemática, como seu alto nível de abstração e generalização, a complexidade dos conceitos e algoritmos. A hierarquização dos conceitos matemáticos, o que implica ir assentando todos os passos antes de continuar, o que nem sempre é possível para muitos alunos; a natureza lógica e exata de seus processos, algo que fascinava os pitagóricos, dada sua harmonia e sua necessidade, mas que se torna muito difícil pra certos alunos; a linguagem e a terminologia utilizadas, que são precisas, que exigem uma captação (nem sempre alcançada por certos alunos), não só do significado, como da ordem e da estrutura em que se desenvolve. Podem ocorrer dificuldades mais intrínsecas, como bases neurológicas, alteradas. Atrasos cognitivos generalizados ou específicos. Problemas linguísticos que se manifestam na matemática; dificuldades atencionais e motivacionais; dificuldades na memória, etc.

Dificuldades originadas no ensino inadequado ou insuficiente, seja porque a organização do mesmo não está bem sequenciado, ou não se proporcionam elementos de motivação suficientes; seja porque os conteúdos não se ajustam às necessidades e ao nível de desenvolvimento do aluno, ou não estão adequados ao nível de abstração, ou não se treinam as habilidades prévias; seja porque a metodologia é muito pouco motivadora e muito pouco eficaz. .

Um resultado que preocupa é que nos anos subsequentes, a quantidade de alunos sem os conhecimentos construídos de forma efetiva, a cada ano letivo, aumenta dos anos iniciais até o ensino médio, e por consequência vem provocar desistências, números altos de reprovação e acentuação das dificuldades em relação aos conteúdos que virão a ser estudados, que na maioria das vezes são mínimas, mas reais. Hoje, muito se fala sobre intervenções que devem ser realizadas para sanar as dificuldades enfrentadas pelos alunos. No entanto, cada vez mais o que se observa são classes repletas de alunos com dificuldades que o acompanharão até a conclusão do ensino médio e ingresso em curso superior, isso se este aluno não ficar retido em alguma série por dois, três anos ou desistir. A progressão parcial, quando o aluno pode ser promovido para a série (ou período) seguinte mesmo não alcançando resultados satisfatórios em algumas disciplinas da série (fase, etapa) anterior, também é uma situação preocupante, em que momento de fato esses alunos terão suas dificuldades superadas? Não podemos deixar de lado um aluno que apresenta dificuldades.

Diferentes fatores podem ser causa de um erro. Por exemplo, um aluno que erra o resultado da operação $126 - 39$ pode não ter estabelecido uma correspondência entre os dígitos ao “armar” a conta; pode ter subtraído 6 de 9, apoiado na idéia de que na subtração se retira o número menor do número maior; pode ter colocado qualquer número como resposta por não ter compreendido o significado da operação; pode ter utilizado um procedimento aditivo ou contar errado; pode ter cometido erros de cálculo por falta de um repertório básico. Quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, mas é bem provável que outros continuarão sem compreender e sem condições de reverter a situação. (Brasil, 2013)

Na disciplina de matemática existe a ideia que uma resposta ou está certa ou está errada, porém ao julgar o erro precisamos investigar a tentativa e como intervir para superar as dificuldades de aprendizagem matemática.

O cenário de ensino martelado ao longo dos anos fez com que a visão da matemática se limitasse à memorização de fórmulas, criando uma perspectiva superficial e fria. O método é olhar para o quadro e anotar no caderno. Essa conduta engessada e meramente expositiva não é capaz de envolver o aluno, tampouco de despertar neste o interesse pela matéria, já que o sentimento de insegurança se torna dominante, impedindo o raciocínio mais livre, explorativo e menos sistemático.

[...] primeiro, os alunos passam a acreditar que a aprendizagem da matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, dos quais não se duvida ou questiona, e nem mesmo se preocupam em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios. (Abramovich, 1997)

Deste modo, as situações matemáticas tornam-se mais complexas do que são, o que coloca uma barreira ainda maior entre ela e o aluno, dificultando o aprendizado e alimentando à indiferença e objeção já tão expressiva.

Sendo a Escola o espaço destinado ao aprendizado, o lugar de elucubrar, de vencer os desafios e limitações, estando livre do medo de tentar diversas vezes, de cair e levantar, o aluno deve ser acolhido de forma que se sinta estimulado e à vontade.

O professor dentro do ambiente escolar é a ponte para o saber, a porta que traz as respostas, desperta curiosidades sendo um alicerce e grande entusiasta do educando. No tocante à matemática, mas sem dúvidas desaguando nas demais matérias, o docente

tem o dever de ajudar o aluno a enxergar as situações abstratas que são tratadas em sala dentro dos cenários da vida real. Inovação dentro da tradição de ensino, fazendo do aluno um participante ativo durante as aulas, formando mentes questionadoras, que levantem hipóteses, tirem conclusões sem medo de errar, ao contrário, com o anseio de aprender, inspirando um ambiente de harmonia e entrosamento, unindo o foco e brincadeiras, visando o bem-estar e motivação.

Para ensinar nos dias atuais, onde as tecnologias de informação estão tão presentes e acessíveis, é necessário explorar todos os possíveis caminhos, ferramentas e metodologias disponíveis.

Agregar ao método de ensino o prazer como peça - chave fortalece no educando a sua disposição para aprender, aumentando o seu empenho, comprometimento e envolvimento e, conseqüentemente, proporciona a renovação da atmosfera dentro das salas de aulas.

2.3 Utilização dos jogos como ferramenta facilitadora do ensino

Quando a palavra JOGO é mencionada a ideia transmitida de imediato é de diversão, entretenimento e brincadeira. A leveza e sensação de lazer contrastam com o ambiente formal e exigente da sala de aula. Nesse caso, os opostos se atraem a fim de garantir a inovação das propostas pedagógicas de ensino-aprendizagem na tentativa de tornar as aulas mais atrativas e proveitosas.

A rotina de estudos atual segue um ritmo cada dia mais intenso, com uma grande carga de cobrança por bons resultados em avaliações internas ou externas. O aluno precisa controlar sua ansiedade para que esta não prejudique seu desempenho escolar. Sabendo desenvolver suas habilidades de forma plena e com segurança. Encarando suas dificuldades e visando um melhor aproveitamento dos conteúdos de sala de aula.

A dinâmica repetitiva de lançar conteúdo, copiar e buscar respostas prontas fortifica a imagem de complexidade de algumas disciplinas. Com base nisso, a busca por alternativas que entrelacem o prazer e o aprendizado é uma oportunidade de ascender o sentimento de satisfação e até mesmo o rendimento, sem contar com o fortalecimento do vínculo professor - aluno.

Sendo a matemática um universo que trabalha com a busca constante de soluções e o seu aprendizado exige a fomentação da capacidade lógica, da ampliação do pensamento diante do problema, utilizando também a criatividade para traçar estratégias. É um conjunto de pontos que só podem ser alcançados se o aluno receber auxílio para construir sua autoconfiança no ambiente escolar, motivação para captação de sua atenção integral e desenvolvimento do senso de dedução. A utilização dos jogos permite a espontaneidade e arranca os medos, ultrapassa o sentimento de vergonha, atuando como uma ferramenta de estímulo e capacitação, um recurso didático com alto potencial de alcance.

Para aplicação dessa didática é essencial que o professor elabore um plano de ação, escolhendo os jogos adequados à realidade de classe e fase de desenvolvimento dos seus alunos, conhecendo os objetivos e regras dos mesmos, sempre relacionando o conteúdo ministrado com jogo, oferecendo um ambiente de descontração, mas com o foco de enriquecer as aulas, estimulando a competição saudável, a interação entre os estudantes; empolgação, criticidade e confiança em expor suas tentativas de resolução.

A exploração do aspecto lúdico, pode se tornar uma técnica facilitadora na elaboração de conceitos, no reforço de conteúdos, na sociabilidade entre os alunos, na criatividade e no espírito de competição e cooperação, tornando esse processo transparente, ao ponto que o domínio sobre os objetivos propostos na obra seja assegurado. (Fialho, 2007)

Através desse envolvimento, também é possível ter a real percepção das dificuldades dos alunos, o que facilita para que este receba o suporte adequado, suprimindo suas deficiências com um acompanhamento direcionado.

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções, além de possibilitar a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (Brasil, 2013)

A partir dessa visão renovada do processo de aprendizagem, com a elaboração de um planejamento pedagógico que ofereça novos métodos de ensino, o professor evita a rotina das inúmeras folhas de exercícios - em algumas das vezes ineficazes, pois o aluno não consegue render - aderindo à inclusão dos jogos nas aulas, estes atuando como ponte na construção de conhecimento e extensão da prática do conteúdo abordado em sala.

Dentre os diversos tipos de jogos (estratégicos, geométricos e de treinamento), a escolha sobre qual utilizar envolve o objetivo traçado pelo professor juntamente com

o seu tato e vivência de sala, já que depende do conteúdo que esteja sendo trabalhado, além da realidade (a base e as dificuldades que necessitam de reforço) dos alunos, se será necessário intensificar o raciocínio lógico, reforçar conteúdo ou desenvolver novas habilidades, dentre outras. A dinâmica do jogo provoca o aluno a se envolver, conhecer as regras, o objetivo, compartilhar pensamentos e opiniões, ou seja, uma atmosfera de total interação que facilita o aprendizado.

Portanto, proporcionar práticas inovadoras que colaborem para o amadurecimento, superação dos bloqueios e limitações do educando dentro da sala de aula é imprescindível; um posicionamento desafiador por parte dos professores, exigindo que estejam enraizados em um compromisso de desmistificar as versões que os próprios alunos fazem sobre si, se considerando incapazes, despreparados e inseguros para o aprendizado da matemática.

A utilização dos jogos e de situações problemas surge como um escape, capaz de oxigenar o fluxo de aprendizado, preparando o estudante de uma forma mais próxima, estimulando a resolução dos problemas com pensamentos lógicos e fortalecendo a ideia de que o aprendizado em equipe é prazeroso e estimulante, capaz de ressignificar a metodologia de ensino da matemática.

Os jogos estratégicos favorecem a construção e a verificação de hipóteses. As possibilidades de jogo são construídas a partir destas hipóteses que vão sendo elaboradas pelos sujeitos. Quando o sujeito executa uma jogada, encontra um universo de possibilidades existentes para aquela jogada. Neste processo, quanto mais o sujeito analisa, executa e toma as decisões sobre as possibilidades, coordenando as informações que ele vai obtendo no jogo, tornando-se o melhor jogador, pois é capaz de enxergar as várias chances, a análise das possibilidades favorece a precisão e a antecipação no jogo. (Oliveira, 2018)

Os jogos trabalhados em sala de aula devem ter regras, esses podem ser classificados em três tipos:

- Jogos estratégicos, onde são trabalhadas as habilidades que compõem o raciocínio lógico. Com eles, os alunos leem as regras e buscam caminhos para atingirem o objetivo final, utilizando estratégias para isso. O fator sorte não interfere no resultado;
- Jogos de treinamento, os quais são utilizados quando o professor percebe que alguns alunos precisam de reforço num determinado conteúdo e quer substituir as extensas

listas de exercícios. Neles, quase sempre o fator sorte exerce um papel preponderante e interfere nos resultados finais, o que pode frustrar as ideias anteriormente colocadas;

- Jogos geométricos, que têm como objetivo desenvolver a habilidade de observação e o pensamento lógico. Com eles conseguimos trabalhar figuras geométricas, semelhança de figuras, ângulos e polígonos.

Os jogos com regras são importantes para o desenvolvimento do pensamento lógico, pois a aplicação sistemática das mesmas encaminha a deduções. São mais adequados para o desenvolvimento de habilidades de pensamento do que para o trabalho com algum conteúdo específico. As regras e os procedimentos devem ser apresentados aos jogadores antes da partida e preestabelecer os limites e possibilidades de ação de cada jogador. A responsabilidade de cumprir normas e zelar pelo seu cumprimento encoraja o desenvolvimento da iniciativa, da mente alerta e da confiança em dizer honestamente o que pensa.

Temos hoje a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento oficial que orienta os currículos escolares das redes pública e privada do Brasil. A Base traz os conhecimentos essenciais, as competências e habilidades pretendidas para os estudantes nas fases da Educação Básica, do Ensino Fundamental ao Ensino Médio. O item dois da BNCC, nas competências específicas da área de matemática, diz: “Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.”

Ainda referindo-se a BNCC, temos no item oito: “Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (Brasil, 2017)”

Para Piaget (1998), o jogo é essencial para o desenvolvimento infantil: “a atividade lúdica é o berço das atividades intelectuais da criança, sendo por isso, indispensável à prática educativa”. Piaget e Inhelder (1997) afirmam ainda que “os jogos são admiráveis instituições sociais”, porque ao jogar as crianças desenvolvem suas habilidades sociais e criam um relacionamento grupal. O relacionamento social desenvolve-se na vivência de

situações estratégicas de liderança e cooperação, onde a criança começa a perceber quais seus limites e os limites dos outros. Os jogos atuam também como redutores das tensões do grupo, permitindo a participação e integração negociada.

É também tarefa do educador promover o trabalho em grupo, utilizar-se de jogos como instrumento de trabalho com a ideia de medida mais do que contagem, desafiar o pensamento da criança provocando desequilíbrio e propiciar a descoberta e a invenção, não a memorização mecânica. (Aranão, 1996)

Portanto, transportar o lúdico para a educação significa: favorecer a aprendizagem, o desenvolvimento pessoal, social e cultural; promover saúde mental; facilitar os processos de interação, expressão, comunicação e de construção do conhecimento. Procurar meios que tragam mais significado para os conteúdos estudados e assim envolver os alunos de forma ativa no processo de ensino aprendizagem.

Capítulo 3

O jogo dominó

Nesse capítulo é feita a apresentação do jogo de dominó tradicional, as particularidades sobre a versão do jogo de dominó de quatro pontas, regras do jogo e principais estratégias utilizadas pelos jogadores iniciantes e experientes.

3.1 O jogo dominó de quatro pontas

As referências para essa seção são: Silva et al. (2015) e Pires (2016).

Apesar do crescimento das novas tecnologias em todas as áreas, o jogo de dominó é praticado por milhões de pessoas no Brasil e no mundo. As pessoas costumam praticar este jogo em reuniões familiares, círculos de amigos entre outros. O jogo dominó não possui uma versão e regras universais, podendo variar de acordo com a região que é praticado. Apesar de suas diversas variações, este jogo é simples de se jogar.

As possíveis origens do jogo dominó e sua variação de quatro pontas encontram-se nesse seção.

3.1.1 Origens do jogo de dominó

Há muitas versões sobre o surgimento do popular jogo de dominó. Certos estudiosos acreditam que a origem do nome “dominó” origina-se da expressão latina *Domino gratias* (graças ao Senhor), dita pelos padres europeus para assinalar a vitória em uma partida. No Brasil o jogo teria chegado com os portugueses no século XVI, transformando-se em entretenimento para os escravos. Figura 3.1:

Figura 3.1: Dominó, um jogo de contagem



Fonte: site LivrEsportes-Hortelândia/SP, 2010

O dominó usado no ocidente, comumente tem vinte e oito peças, e é chamado duplo-6. No entanto, existem o duplo-9 e o duplo-12, que são pouco usados. Existem também dominós com figuras, frequentemente usados para o ensino infantil, facilitando o desempenho no jogo. O número de peças desse jogo, por vezes, é diferente de um país para outro. O dominó oriental compõe-se de vinte e uma peças (sendo que é excluído o zero das peças). Já nos Estados Unidos, são utilizados dominós com vinte e uma peças e com cinquenta e cinco peças (numeradas de 0 a 9).

A riqueza desse material lúdico permite o seu aproveitamento como recurso pedagógico em diferentes níveis de dificuldade. Assim, tanto o material como o jogo de dominó, possibilitam desenvolver uma série de desempenhos em um contexto educacional como o raciocínio lógico e aritmético dos aprendizes. O jogo de dominó pode ajudar a desenvolver a noção da influência das ações individuais no todo. Os jogadores terão que pensar bem para realizar jogadas que ajudem o jogador seguinte, visando o objetivo comum do jogo. O objetivo do jogo de dominó mais comum é livrar-se de suas peças antes dos demais. O vencedor marca um total de pontos igual a soma dos pontos que os seus adversários ainda têm na mão. Para jogar é necessário papel e caneta para anotar. Existem mais de 70 regras e tipos diferentes de jogos de dominó.

Uma das mais simples versões e que talvez seja a mais praticada em casa, escola entre outros lugares é o que chamamos de dominó tradicional, ou simplesmente, dominó. Nesta versão pode-se jogar em duplas, trios, quartetos ou até oito jogadores divididos e

em quatro subgrupos de duas pessoas para cada jogo de dominó. No total, este jogo pode ser jogado por tantas pessoas quantos forem os jogos de dominó. Para começar a jogar temos as seguintes regras:

- Embaralhar as peças com as faces voltadas para baixo;
- Sete peças para cada participante. Se houver menos de quatro jogadores sobrarão pedras para serem “compradas”;
- O jogador organiza as peças de um jeito que ninguém possa ver;
- Começa o jogo com quem tem a “carroça” de seis. Passando a saída para as demais de forma decrescente em relação aos números da face (quina, quadra, terno,...);
- Seguindo o sentido horário o próximo jogador procura em suas peças uma que tenha a mesma face da peça jogada pelo primeiro jogador.
- Se não tiver na mão e houver peças para comprar, compra uma, se servir joga, caso contrário passa a vez.
- Ganha o jogo quem acabar as peças primeiro ou quem ficou com a peça de menor soma (no caso do jogo fechar).

Diante das muitas possibilidades de adaptação do formato clássico do jogo de dominó, sua aplicação auxilia consideravelmente a metodologia de ensino, agregando valor ao conteúdo, proporcionando renovação dentro do ambiente escolar e ainda mais importante, contribuindo para uma nova visão sobre o aprendizado da matemática, o que acaba por favorecer o rendimento do aluno e assim os seus resultados finais.

3.2 Regras do dominó de quatro pontas

No Brasil, a modalidade de dominó mais praticada é a versão duplo 6 com duas pontas, podendo ser jogado um contra o outro ou em duplas, como apresentado na seção 3.1.1. O objetivo dessa versão de dominó é simplesmente alcançar primeiro a batida do jogo, ou seja, ser o primeiro a terminar de jogar suas peças. Na região norte do Brasil, pratica-se com mais frequência a versão duplo 6 com 4 pontas, que possui regras e objetivos bem diferentes da versão duplo 6 de duas pontas.

Na versão duplo 6 de quatro pontas, antes do início de uma partida, todas as vinte oito peças são “embaralhadas” sobre a mesa. Em seguida as peças são distribuídas entre as duas duplas. Aquele jogador que estiver com a peça 6-6, inicia a primeira rodada. O jogo segue o sentido horário, duas ou quatro jogadas por rodada, sendo revezadas entre jogador e um de seus oponentes (haverá mais de um oponente no caso de o jogo ser jogado por 2 duplas). Uma partida é constituída de várias rodadas. Uma rodada chega ao fim quando um dos jogadores não possui mais pedras que possam ser encaixadas em qualquer uma das 4 pontas do jogo. Qualquer rodada, que não seja a primeira, pode ser iniciada com qualquer carroça, pelo jogador que finalizou a rodada anterior.

O objetivo do jogo de dominó é somar 200 ou mais pontos. O número de rodadas necessárias para atingir o objetivo vai depender de cada jogo. Se ao fim de uma rodada, uma dupla conseguir 200 ou mais pontos, ela ganha a partida. A seguir, elencamos as cinco maneiras de pontuar no jogo de dominó versão duplo 6 com 4 pontas:

1. O resultado da soma das 4 extremidades das peças encaixadas na mesa é múltiplo de 5. Essa é a principal forma de pontuar no jogo. Em uma jogada um jogador pode obter 5, 10, 15, 20, 25 ou 30 pontos. A figura 3.2 ilustra essa situação onde são obtidos 10 pontos;

Figura 3.2: Situação de um jogo que gera pontuação 10

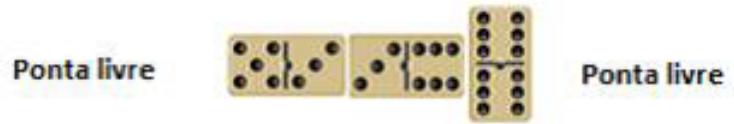


Fonte: Silva, 2015

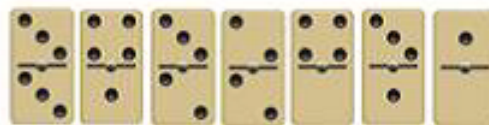
2. Um jogador não possui peças que sejam pares das pontas livres na partida, a pontuação de 20 pontos é contabilizada para o adversário ou para a dupla adversária (no caso de ser jogada por duas duplas). Na figura 3.3 temos uma situação de jogo onde o jogador não possui peças que se encaixem em alguma ponta livre, logo ele

“passa” a vez;

Figura 3.3: Situação de passe do jogador



Mão do jogador na vez



Fonte: Silva, 2015

- Quando um jogador realiza uma jogada e anuncia previamente que todos os outros jogadores irão passar na jogada. É anunciado “galo” ou “cinquenta”. A pontuação obtida é 50 pontos;
- No fim de uma rodada, quando o jogador finaliza um jogo, “batida”, com uma carroça. A sua dupla receberá 20 pontos;
- Com o encerramento da rodada, a soma das pedras dos adversários é arredondada para o múltiplo de 5 ou abaixo e mais próximo de seu valor. Essa situação é chamada de **garagem**. Essa pontuação é contabilizada para a dupla a qual o jogador que bateu pertence. A figura 3.4 ilustra um exemplo de garagem, em que a soma das pedras é 14, gerando 10 pontos.

Figura 3.4: Situação de “garagem” de 10 pontos



Fonte: Silva, 2015

As estratégias adotadas pelos jogadores de dominó podem ser divididas em 3 categorias. Somente jogadores experientes são capazes de guardar informações cruciais ao longo do jogo e, assim, executarem as estratégias mais complexas. As ações referentes são listadas a seguir, em ordem crescente de dificuldade:

- Jogar de forma “egoísta”: Quando o jogador estiver em uma posição favorável no jogo, ou seja, possuir pedras altas e diversas, deve-se jogar pedras que somem 10, como 5-5 ou peças altas, como 4-6. Jogar peças altas favorece diminuir a contagem de pontos da situação cinco descrita anteriormente, em caso da dupla adversária ganhe. Caso não seja possível, jogam-se carroças para manter o controle sobre a disposição das pontas. Em uma situação de desvantagem do jogador, ou seja, quando o mesmo possuir peças que não pontuem ou com baixo valor, por exemplo, se as pontas da mesa são 2-6 e as pedras disponíveis 2-1, 3-5 e 6-3, a melhor escolha será 6-3, pois facilitará a jogada futura da peça 3-5;
- Jogar em prol do parceiro: O jogador deverá estar atento às pedras jogadas pelo parceiro, e através de estimativas, descartar as pedras cujos números o seu parceiro possa ter;
- Bloquear a dupla adversária: O jogador deverá estar atento às pedras jogadas pelo adversário seguinte, e tentar bloqueá-lo presumindo as peças que o mesmo não tem. A maneira de presumir quais pedras o adversário não possui é observar os seus passes durante uma rodada. A partir desta informação, o jogador deverá descartar na mesa pedras cujos números o seu adversário presumivelmente não possui. Deve-se também forçar o oponente a descartar suas peças mais baixas, jogando peças com valor 0 ou 1. Desta forma, em caso de uma batida favorável, aumenta-se a possibilidade de pontuação através da contagem de pontos da garagem.

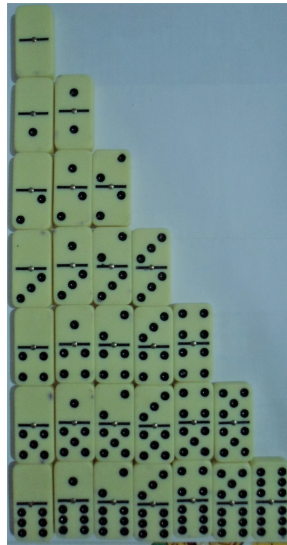
Dessa forma percebemos que a prática do jogo pelo jogo não é o que propomos deve-se sempre lembrar do sentido que o jogo traz. No caso do jogo dominó há uma correlação direta com o raciocínio matemático. Nesse jogo temos regras, instruções, operações, definições e deduções que agregadas à cooperação, incentivo e conceitos podem e devem ser explorados em sala de aula. As estratégias devem ser estudadas, compartilhadas e principalmente praticadas. Todo jogo com cunho matemático desenvolve muito

mais que socialização, eles são carregados de grandes contribuições para a melhora do pensamento lógico das pessoas.

3.2.1 Jogo Fechado

O dominó é um jogo formado por vinte oito peças, como as da figura 3.5:

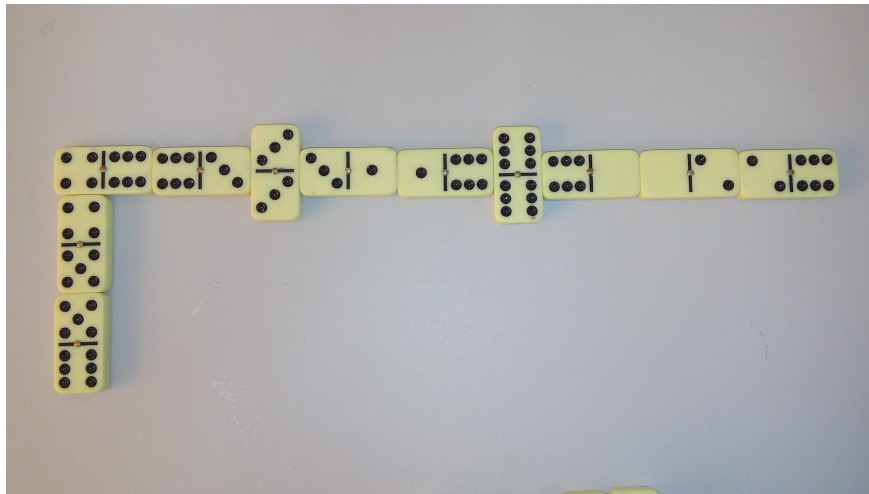
Figura 3.5: As 28 peças do Jogo Dominó.



Fonte: a autora, 2017

Nela aparecem todas as combinações possíveis dos números de 0 a 6, dois a dois, inclusive com repetição. Cada número aparece 8 vezes, conforme as regras do jogo. Um exemplo de jogo fechado é o seguinte:

Figura 3.6: Jogo Fechado.



Fonte: a autora, 2017

Este jogo se diz fechado porque todas as pedras que contêm o 6 já estão na mesa e, em consequência, ninguém mais tem como jogar.

Em um jogo fechado, os números nas duas extremidades são iguais. De fato, todos os números, salvo os das pontas, aparecem aos pares, pela própria regra do jogo. Portanto, um jogo fechado que começa com 3, por exemplo, terá 6 ocorrências do 3 internamente e o último 3 disponível terá que estar, necessariamente, na outra ponta.

Como consequência, a soma de todos os números (na mesa), em um jogo fechado, será par. Observando que a soma total dos pontos em um jogo de dominós é $S = 8(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$ e, portanto, par. Vê-se que, em um jogo fechado, sobra, ao todo, um número par de pontos nas mãos das duas equipes adversárias.

Isto significa que cada uma das equipes terá um número par de pontos (dando uma soma par), ou cada uma das equipes terá um número ímpar de pontos (dando também uma soma par). O que não pode acontecer é que a soma dos pontos de uma equipe seja par e da outra, ímpar, pois neste caso a soma total seria ímpar, o que já vimos não pode acontecer.

Outra observação pode ser feita a partir do conceito: “Uma pedra é ímpar quando a soma de seus números for ímpar”. Por exemplo, 3 : 2 é uma pedra ímpar. Podemos então tirar mais uma conclusão: Em um jogo fechado, a quantidade de pedras ímpares, na mesa, é par.

De fato, já vimos que em um jogo fechado, a soma dos pontos, na mesa, é par.

Ora, uma soma par deve ter um número par de parcelas ímpares.

3.3 A estratégia dos três erres (RRR)

Referência para essa seção FEPAD (2013).

Existe uma regra no dominó chamada 3R que simplesmente quer dizer: REPETIR, RESPEITAR e RECORDAR. Trata-se de uma simples, porém importante maneira de se chegar à vitória. Os alunos podem desenvolver aos poucos e logo se beneficiarão dos seus resultados. No jogo não é permitido qualquer tipo de comunicação entre as duplas, logo ficar atento aos movimentos e pedras que estão na mesa são atitudes bastantes significativas. O dominó de quatro pontas é um jogo de contagem, observando as peças que tem-se na mesa podemos supor quais poderão vir nas próximas jogadas.

A cada peça que um jogador desce existe uma possível informação. O entendimento que cada jogador tem a partir desta informação é determinante para realizar jogadas que levarão a dupla à vitória. Cada jogada deve ser muito bem observada, ou seja, a concentração no jogo faz parte da estratégia.

REPETIR: É a regra mais simples de cumprir, pois só temos que ter pedra ou pedras iguais a que foi colocada pelo companheiro de maneira pensada, ou simplesmente tenha sido a saída do mesmo. Porém nosso companheiro pode ter jogado de maneira obrigada, aí é que deve-se recordar como jogou (pensada ou não) e ao repetir dará toda vantagem ao adversário, nestes casos é preferível jogar uma pedra com melhor acomodação para a nossa dupla ou jogar uma pedra que evite a entrada das pedras do adversário.

RESPEITAR: Esta estratégia consiste em respeitar as pedras cujos números foram iniciados pelo nosso parceiro, quer dizer não devemos “matá-las”. Porém, igualmente ao que ocorreu na regra anterior, pode-se deixar de cumprir, de acordo com o seguinte: Se o companheiro saiu com 0-0 (carroça de branco) o jogador seguinte joga 0-3 e você tem o seguinte jogo: 0-6, 6-6, 6-2, 6-5, 5-5, 3-1 e 5-4. Neste caso, é primordial matar a pedra do parceiro com 0-6, em vez de jogar 3-1, já que estaria dando uma informação errada e poderia ser fatal para o desenlace final. Se jogar 3-1, primeiro: você está iniciando uma ponta que não tem mais nenhuma fora, além disso o seu parceiro poderia ter recebido uma informação errada, repetir o 1, o que seria um caos e segundo: você não está dando informação sobre a quantidade de pontos que tem em mãos. Então aqui a

jogada correta seria matar a saída do parceiro com 6-0.

RECORDAR: Antes de recordar, o mais importante é dar informação para que nosso companheiro tenha a informação necessária, assim poderá recordar para processar e transformar a jogada em um bom jogo. Muitas vezes, com uma informação correta, é possível ganhar uma partida mesmo com um jogo ruim nas mãos. Dos três erres (RRR), o mais importante é o de RECORDAR ou Reter a informação porque somente assim se pode e se tem o dever de quebrar as outras duas regras. Por exemplo: se temos a informação de que nosso companheiro tem a falta da pedra com o número 6 em seu jogo e ele mesmo iniciou o jogo com a carroça 1-1, e na nossa vez de jogar tem quadra nas duas pontas e o nosso jogo é 4-1, 4-3, e 3-6 e falta por jogar 6-1, neste caso não se pode repetir a saída do companheiro, pois seria a entrada do 6-1, que prejudicaria o jogo do companheiro e pior ainda a saída de preciosos pontos. Então a jogada correta seria jogar com pensada prévia: 4-3, já que tem a chave que é 3-6.

Ao cumprir a estratégia dos três erres os jogadores levam grande vantagem diante de duplas que apenas contam com a sorte sem maiores preocupações em observar o jogo em si. Saber perceber jogadas que vão além de uma peça encaixada no jogo.

Capítulo 4

O jogo dominó de quatro pontas e os múltiplos de cinco em sala de aula

Nesse capítulo está a proposta que traz o jogo dominó de quatro pontas como uma prática viável no ensino médio, tais como a metodologia abordada, os sujeitos da pesquisa, a coleta de dados e os resultados obtidos durante o projeto.

Todo jogo, por natureza, desafia, encanta, traz movimento, barulho e uma certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis. Essa dimensão não pode ser perdida apenas porque os jogos envolvem conceitos de matemática. Ao contrário, ela é determinante para que os alunos sintam-se chamados a participar das atividades com interesse.

A ideia é apresentar o jogo de dominó de quatro pontas, suas regras, breves estratégias e objetivos clássicos, porém na versão duplo-6 de quatro pontas para que os alunos experimentem uma nova maneira de entender e aplicar a contagem dos múltiplos de 5, paridade de peças entre outros conceitos, onde destacam-se o da estratégia da tomada de decisão.

4.1 Metodologia e público alvo

Para um melhor aproveitamento das teorias implícitas no jogo dominó de pontos, há a necessidade de que o público alvo já tenha noções do princípio de contagem e probabilidades. Nesse caso os selecionados foram os vinte alunos do 2º ano do ensino médio técnico, pois já estavam em um nível de conhecimento sobre análise combinatória e

probabilidades, da Escola Estadual Antonio Gröhs, no município de Água Boa, no estado de Mato Grosso. Foi feita uma sondagem sobre os conceitos de contagem, divisibilidade e probabilidades, além de perguntas acerca do jogo dominó tradicional. Foi utilizada uma aula para explicação das regras do jogo e duas outras aulas para seu reconhecimento, marcação de pontos e estratégias e por fim uma competição entre as duplas, que tiveram outras duas aulas para acontecer. Para a disputa deixamos as duplas se escolherem por afinidade ou outros propósitos, além de um aluno para marcar os pontos. A disputa se organizou da seguinte maneira: cada par de duplas jogou uma partida de cem pontos e as duplas vencedoras se enfrentaram na disputa final com uma partida de duzentos pontos. Foram no total oito duplas na fase classificatória. Destas, quatro duplas foram para a semifinal e então duas duplas chegaram a final. Um intervalo de cinco minutos foi feito a cada final de partida. Após a fase de jogos aconteceu uma roda de discussões sobre os conceitos envolvidos no jogo dominó de pontos e estratégias adotadas pelas duplas em cada etapa das partidas, com o objetivo de comparar as práticas adotadas e os reflexos para a permanência de cada dupla na competição.

Os principais objetivos foram:

1. Desenvolver as noções de múltiplos e divisores dos números 5 e de 10 na marcação dos pontos;
2. Estender os conceitos do jogo de dominó de quatro pontas com múltiplos de 5 para múltiplos de 3 e 11;
3. Reconhecer e calcular situações que envolvam probabilidade nas jogadas;
4. Compreender, que em um jogo fechado de dominó a quantidade de peças ímpares na mesa é par, este objetivo foi melhor explicado em outro momento junto ao professor da classe.
5. Melhorar as tomadas de decisão ao jogar, entendendo que contar as peças que restam fora de mesa fazendo previsões de quais peças estão nas mãos dos adversários pode ser de extrema importância para “passar” o adversário, pontuar ou simplesmente não passar a vez.

4.2 O jogo

As primeiras aulas, como foi dito, foram reservadas a apresentação do jogo dominó de quatro pontas, explicações das regras e principalmente como pontuar nessa variação do jogo dominó. Os primeiros contatos com as pedras do jogo deram-se de forma natural, a maioria dos alunos já o conheciam e foram passando suas informações para os poucos que desconheciam.

Figura 4.1: Duplas, reconhecendo o jogo.



Fonte: a autora, 2017

Inicialmente ao serem convidados a participarem de uma nova proposta para o entendimento dos múltiplos de 5 a partir de um jogo, os alunos, a maioria meninas, demonstraram grande entusiasmo, o que foi um ponto positivo para o início da prática. Nas primeiras partidas ficou evidente que a principal estratégia era não passar a vez e o quesito pontuação ficou em segundo plano. As duplas quase não interagem e neste momento houve a intervenção do professor que ao ver situações de pontuação alertava:

- “Tem ponto na mesa!”

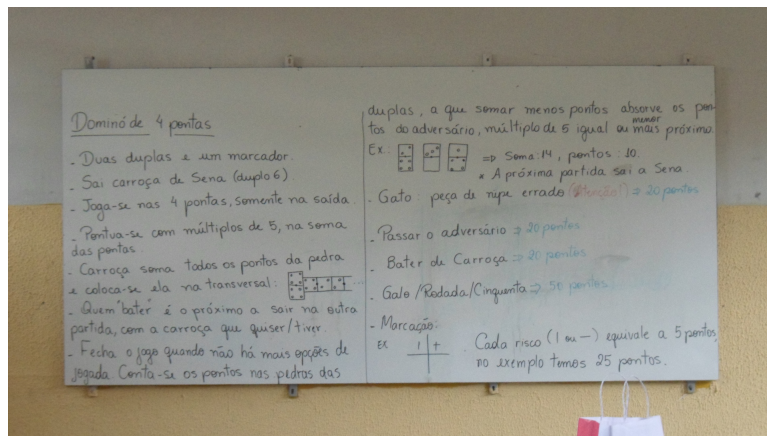
Dessa forma, com um certo alvoroço os jogadores começaram a tentar supor quais pedras poderiam pontuar. Para aqueles que ainda tinham dificuldades em somar para obter um múltiplo de 5. Alguns alunos ajudavam com frases do tipo:

- “Soma os pontos que tem na mesa em todas as pontas, mas não esquece de subtrair a ponta que vai ser substituída pela pedra que você vai colocar”.

As regras permaneceram no quadro durante as primeiras partidas, para que os alunos, e principalmente o marcador, pudessem ficar atentos para o que era permitido ou

não durante o jogo.

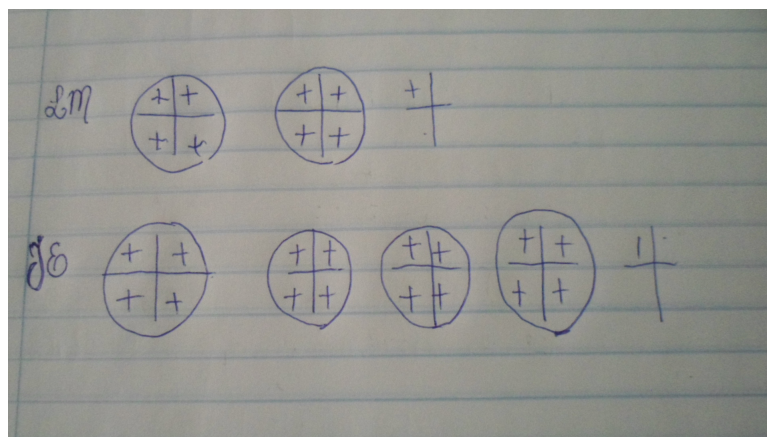
Figura 4.2: Quadro de Regras.



Fonte: a autora, 2017

Um aluno que tem papel fundamental no jogo é o marcador, ele deve estar atento às pedras que são postas na mesa; à conversa entre duplas; ao jogador que passa a vez e, obviamente, marcar os pontos que são “cantados” pelas duplas, lembrando que só são marcados pontos que são “cantados”. Esse aluno usa uma técnica de marcação bem simples com “riscos” em cruz, onde cada “risco” corresponde a 5 pontos, essa marcação facilita a contagem de pontos que se torna quase automática através de uma multiplicação. Veja figura 4.3:

Figura 4.3: Marcação dos pontos das duplas LM e JE.



Fonte: a autora, 2017

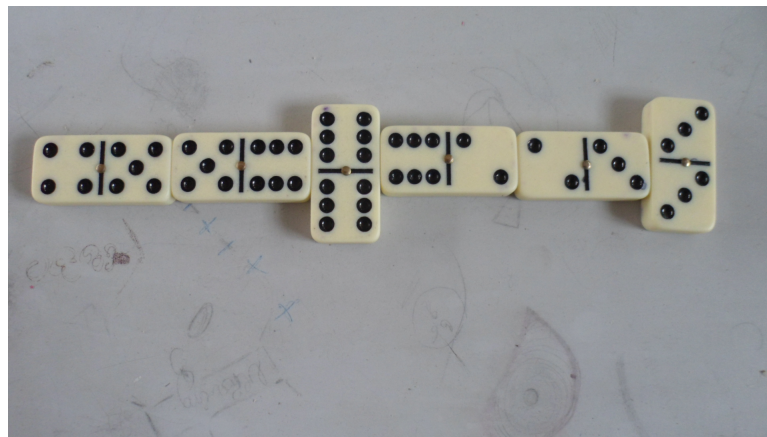
Nesta situação o placar está 120 pontos para dupla LM a 215 para a dupla JE.

Com o decorrer das partidas era feito um revezamento entre os marcadores e duplas.

Muitas situações podem ser observadas nessa etapa de reconhecimento e jogo, iremos listar algumas delas comentando conceitos de análise combinatória e probabilidade:

1. Passar a vez: sabemos que essa situação gera 20 pontos. Em particular, é uma das situações, aqui listadas, mais comuns. Observe a Figura 4.4 :

Figura 4.4: Pedras na mesa, situação de passar a vez.



Fonte: a autora, 2017

Nesta situação partimos da informação que nenhum jogador passou a vez até o momento e que o jogador em questão assume a terceira posição da ordem de jogadas. Foram jogadas seis peças, restando vinte e duas no jogo, doze delas poderiam jogar e dez não.

Nesse estado da partida ainda restavam as peças (0,6), (1,6), (3,6), (4,6), (0,4), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (0,3), (1,3), (3,5) que se encaixariam em alguma das pontas possíveis, dessas 12 peças apenas 3 pontuariam na partida 5 ou 10 pontos. A saber (3,6), (1,3) ou (0,6) pontuariam. Listaremos a seguir algumas possibilidades de cálculos envolvendo conceitos de análise combinatória complementando com comparativos probabilísticos:

- (a) Passar a vez: para essa situação devemos observar quais peças não se encaixariam em nenhuma das três pontas da mesa, nesse caso, das vinte e duas peças que estão fora da mesa dez não jogam. Assim, o total de combinações

possíveis que esse jogador tem de possuir seis dessas dez peças é dado pela combinação $C_{10}^6 = 210$.

- (b) Jogar: como foi dito há doze peças com as quais o jogador não passa a vez. Assim, basta ele ter pelo menos uma dessas doze peças dentre suas seis, ou seja, $C_{12}^1 \cdot C_{10}^5 + C_{12}^2 \cdot C_{10}^4 + C_{12}^3 \cdot C_{10}^3 + C_{12}^4 \cdot C_{10}^2 + C_{12}^5 \cdot C_{10}^1 + C_{12}^6 = 74403$ possibilidades.

Nas combinações $C_{12}^i \cdot C_{10}^j$ temos, $i + j = 6$, ou seja, escolhemos dentre as doze peças que jogam e das 10 peças que o não jogam. Somando o total de seis peças que estão na mão do jogador.

- (c) Jogar e não pontuar: o jogador não tem em sua mão nenhuma das três peças que pontuam, podemos pensar em retirar das 12 peças aquelas que não pontuam e analisar as possibilidades das demais peças. Para isso podemos garantir que ele não pontuará se não estiver com nenhuma das três peças que pontuam, nesse caso, teremos $12 - 3 = 9$ pedras disponíveis para escolha. Novamente, para jogar basta que ele tenha pelo menos uma peça que encaixe em uma das pontas. Completando suas seis com qualquer peça que pontue ou não. Vejamos,

$$C_9^6 + C_9^5 \cdot C_{10}^1 + C_9^4 \cdot C_{10}^2 + C_9^3 \cdot C_{10}^3 + C_9^2 \cdot C_{10}^4 + C_9^1 \cdot C_{10}^5 = 26922 \text{ possibilidades.}$$

Temos nessa soma todas as possíveis escolhas de seis pedras, com as quais o jogador joga e não pontua.

- (d) Jogar e pontuar: nesse caso é necessário incluir a situação de quais peças pontuam, então, podemos pensar em garantir essa situação partindo da ideia que o jogador precisa ter ao menos uma das três peças que pontuam. Vamos separar em três casos:

- O jogador possuir todas as três peças que pontuam:

$$C_9^3 + C_9^2 \cdot C_{10}^1 + C_9^1 \cdot C_{10}^2 + C_{10}^3 = 969$$

Garantimos que ele está com todas as pedras que pontuam retirando-as do total de escolhas. Ainda assim, temos que analisar a escolha das outras três peças do jogador.

- O jogador possuir exatamente duas das três peças que pontuam:

$$C_9^4 + C_9^3 \cdot C_{10}^1 + C_9^2 \cdot C_{10}^2 + C_9^1 \cdot C_{10}^3 + C_{10}^4 = 3876$$

Considerando as combinações entre as três peças tomadas duas a duas, teremos o total de $3 \cdot 3876 = 11628$ possibilidades.

Quando dizemos “exatamente” precisamos, além de retirar as peças que pontuam, entender que uma dessas peças não faz parte das minhas escolhas. Assim, ainda resta escolher outras quatro pedras.

- O jogador possuir exatamente uma dentre as três peças que pontuam:

$$C_9^5 + C_9^4 \cdot C_{10}^1 + C_9^3 \cdot C_{10}^2 + C_9^2 \cdot C_{10}^3 + C_9^1 \cdot C_{10}^4 + C_{10}^5 = 11628$$

Aqui também devemos multiplicar esse último resultado por três, resultando em $3 \cdot 11628 = 34884$.

Novamente, entender que retirando as peças que pontuam do total resulta na escolha de outras cinco peças.

Portanto, a resposta ao problema é obtida pela soma dos resultados dessas três situações:

$$969 + 11628 + 34884 = 47481$$

Ou seja, teremos 47481 possibilidades desse jogador ter algumas das peças que pontuam.

Considerando que neste caso o número de elementos do espaço amostral é dado por $C_{22}^6 = 74613$, onde temos a combinação das vinte e duas peças que estão fora da mesa, as probabilidades referentes aos eventos anteriores são dadas por:

- (a) Probabilidade do evento $A = \{\text{passar a vez}\}$:

$$P(A) = \frac{C_{10}^6}{C_{22}^6} = \frac{210}{74613} \approx 0,0028$$

- (b) Probabilidade do evento $B = \{\text{jogar}\}$:

$$P(B) = \frac{C_{12}^1 \cdot C_{10}^5 + C_{12}^2 \cdot C_{10}^4 + C_{12}^3 \cdot C_{10}^3 + C_{12}^4 \cdot C_{10}^2 + C_{12}^5 \cdot C_{10}^1 + C_{12}^6}{C_{22}^6}$$

Resultando em,

$$P(B) = \frac{74403}{74613} \approx 0,9972$$

(c) Probabilidade do evento $C = \{\text{jogar e não pontuar}\}$:

$$P(C) = \frac{26922}{C_{22}^6} = \frac{26922}{74613} \approx 0,3608$$

(d) Probabilidade do evento $D = \{\text{jogar e pontuar}\}$:

$$P(D) = \frac{47481}{C_{22}^6}$$

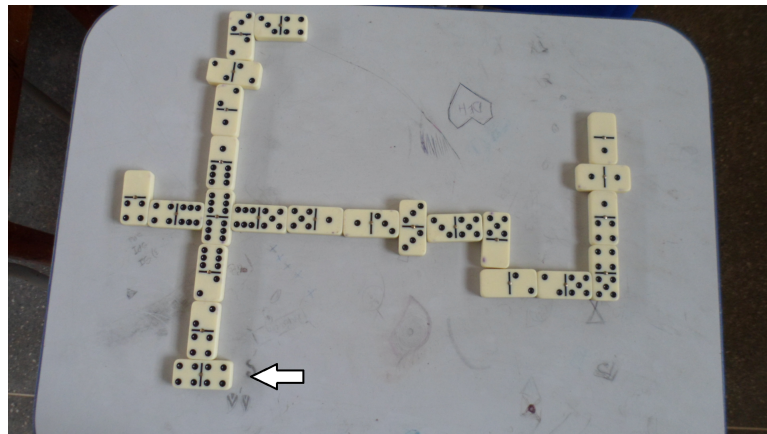
Assim,

$$P(C) = \frac{47481}{74613} \approx 0,6336$$

A chance desse jogador passar a vez é muito pequena (menos que 1%), então vale a pena analisar melhor suas possíveis jogadas, já que sua chance de pontuar ultrapassa 60%.

2. Batida de carroça: 20 pontos. Essa situação requer muita segurança na sua possível batida, pois há o risco de “matarem” sua carroça, ou seja, encaixarem a última peça do número da carroça sem deixar a ponta livre. Logo, abrir pontas do número desejado é essencial, contar as peças que estão na mesa, fazer uma estimativa de quais peças podem obrigar seus adversários a descer o número desejado.

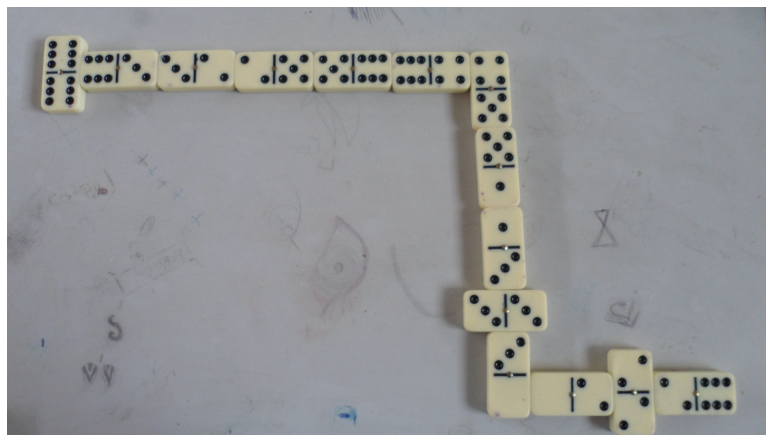
Figura 4.5: Batida carroça de Quadra.



Fonte: a autora, 2017

3. Galo ou cinquenta: 50 pontos. Nesta situação o jogador deve estar seguro que apenas ele irá jogar, logo ele possui os números que estão na mesa. Contar as peças é essencial, pois se cantar (anunciar) equivocadamente, ele perde 20 pontos como punição. Para este jogador ocorreu a seguinte configuração de peças, conforme figura 4.6:

Figura 4.6: Rodada Cinquenta.



Fonte: a autora, 2017

Assim, apenas aqueles jogadores que possuem sena poderiam jogar e, neste caso, as únicas duas peças possíveis estavam na mão de um mesmo jogador, podendo assim cantar a “Rodada de 50”. Conforme figura 4.7:

Figura 4.7: Mão Jogador Rodada 50.



Fonte: a autora, 2017

Muitas vezes essa jogada ocorre quando, se não todas, a maioria das peças de um

mesmo número estão concentradas nas mãos de uma mesma dupla que articulam jogadas e conseqüentemente a dupla adversária passar a vez rendendo alguns pontos tranquilos, além de dificultar pontuação por parte da dupla adversária. Vejamos algumas situações que podem ser abordadas:

(a) Sair com duas peças que figuram o mesmo número, problema proposto em OBMEP (2013): vamos separar em dois casos a saber,

- $A = \{\text{sair com uma carroça e uma peça simples, tendo um número em comum}\}$
ou
- $B = \{\text{sair com duas peças simples}\}$.

No primeiro caso há 7 modos de escolher a carroça e 6 modos de escolher uma peça simples que apresente o número da carroça. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, há $7 \cdot 6 = 42$ sorteios favoráveis.

No segundo caso há 7 modos de escolher o número comum às duas peças. Escolhido este número, há $C_6^2 = 15$ modos de tomarmos duas peças simples. Pelo Princípio Multiplicativo, temos $7 \cdot 15 = 105$ sorteios favoráveis.

Como A e B são situações disjuntas que juntas descrevem o evento $E = \{\text{sair com duas peças que figurem o mesmo número}\}$, então a probabilidade de E ocorrer, é a soma das probabilidades dos dois casos ocorrerem. Assim:

$$P(E) = P(A) + P(B) = \frac{42}{74613} + \frac{105}{74613} = \frac{147}{74613} \approx 0,00197$$

(b) Sair com exatamente cinco peças que figurem o número seis no início da partida: devemos agora estender a situação anterior para cinco peças com mesmo número de um total de sete, que foi o que aconteceu na situação real do jogo. Aqui temos dois casos novamente para explorar os conceitos de combinatória e probabilidades. Chamaremos de eventos A e evento B.

- $A = \{\text{sair com a carroça de seis e quatro peças simples do número seis}\}$
ou
- $B = \{\text{sair com cinco peças simples do número seis}\}$.

Procedendo com o mesmo raciocínio para duas peças podemos primeiramente

pensar, para as possibilidades do evento A, fixar a carroça de seis (6,6). Restando assim, outras quatro peças que também seriam deste número. Assim, seria a combinação de seis números (0, 1, 2, 3, 4, 5) tomados quatro a quatro (peças). Para as duas peças onde o número seis não está presente basta calcular a combinação das vinte e uma peças (sem o número seis) tomados dois a dois. Resultando em, $1 \cdot C_6^4 \cdot C_{21}^2 = 15 \cdot 210 = 3150$ possibilidades.

Para o evento B seria a situação de sair com cinco peças simples do número seis. Nesse caso, um dos dois números das quatro peças já está escolhido. Resta escolher o outro, ou seja, trata-se da combinação de seis elementos tomados cinco a cinco. Para o restante das sete peças o raciocínio é o mesmo do evento A. Resultando em, $C_6^5 \cdot C_{21}^2 = 6 \cdot 210 = 1260$ possibilidades.

Temos então 1260 possibilidades de ocorrência para o evento B.

Tratam-se de eventos disjuntos, onde o número de elementos do espaço amostral é dado pela $C_{28}^7 = 118440$. Calculando a probabilidade de ocorrer A ou B, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3150}{118440} + \frac{1260}{118440} \approx 0,037$$

(c) A dupla sair com todas as peças de um mesmo número: Podemos unir os itens anteriores. Na situação real, sabemos que um dos componentes da dupla estava com duas peças do mesmo número, sendo uma a carroça de sena e o outro saiu com as demais peças de sena. Há algumas situações a considerar:

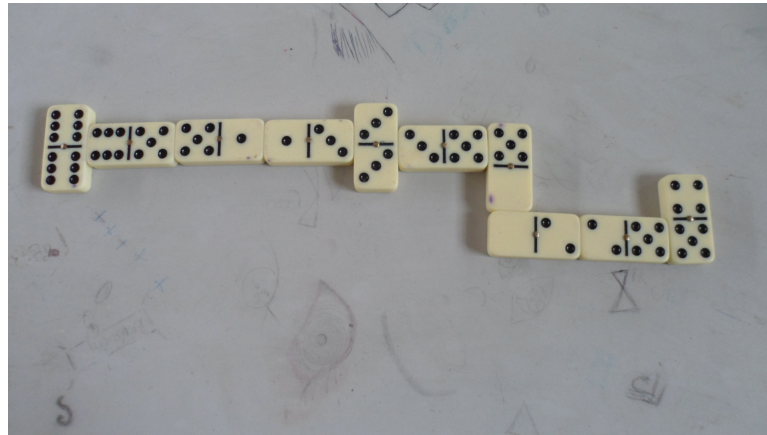
- i. Sair com a carroça de sena dentre suas sete peças iniciais (lembrando que se algum jogador sair com mais de três carroças a partida reinicia): teremos $6 \cdot C_{21}^5 = 122094$ possibilidades, onde o número seis representa as outras peças diferentes da carroça que podem ser escolhidas com o número seis e a combinação representa a escolha das outras cinco peças dentre as 21 que não figuram o número 6.
- ii. Sair exatamente com cinco peças de sena, excluindo a carroça: trata-se do resultado que vimos anteriormente $C_6^5 \cdot C_{21}^2 = 6 \cdot 210 = 1260$.

Como esses casos são mutualmente exclusivos ao realizar a simples soma desses itens temos o total de possibilidades de $122094 + 1260 = 123354$.

4. Matar carroça: neste caso, a penúltima peça do número possível foi jogada antes da

carroça, fechando sua ponta; o jogador fica impossibilitado de jogá-la. Não é uma situação que gera pontos, mas garante garagem, se a dupla que possui a carroça não bater, além de possíveis passadas (20 pontos) dependendo de quantas rodadas ainda restam para o final da partida. Observe a Figura 4.8:

Figura 4.8: Carroça de Quina *Morta*.



Fonte: a autora, 2017

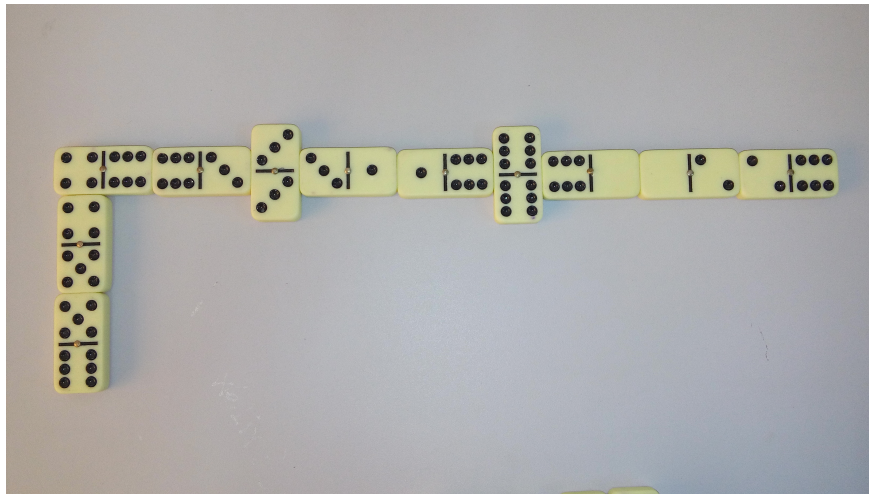
Nessa mesa o jogador que está com a carroça de Quina perdeu sua pedra, então ele fica em situação de depender das suas outras pedras para continuar jogando o que limita suas possibilidades de pontuar e o deixa sensível a passar a vez.

5. Saída com carroça de quina: excluindo-se a primeira jogada da partida as demais podem se iniciar com qualquer carroça. A carroça de quina (5,5) é a única que começa (abre) a partida com pontos, no caso dez pontos.

A chance de um jogador sair com esta peça é a mesma de sair com qualquer outra das vinte e oito peças, ou seja, temos um total de $\frac{1}{28} \approx 0,036$.

6. Jogo fechado: todas as peças das pontas disponíveis já se encontram na mesa. Conta-se a garagem para verificar qual dupla absorve a garagem da outra e garante a saída na próxima partida. Na seção 4.2.1 vimos que nesse fato podemos concluir que a soma das pontas é par, além da soma das peças que estão nas mãos dos jogadores também ser par. A paridade das peças se dá pelo fato que as peças aparecem aos pares durante o jogo, com exceção das pontas. Retornando a figura 4.9:

Figura 4.9: Jogo Fechado.



Fonte: a autora, 2017

O jogador que fecha esse jogo tem a opção de abrir o jogo, pois para as pontas dos números dois e cinco ainda restam peças fora da mesa. Para as pontas do número dois há as peças (2,1), (2,2), (2,3), (2,4) e (2,5) e para as peças do número cinco temos (5,0), (5,1), (5,2), (5,3) e (5,5).

Podemos notar que foi uma opção do jogador fechar o jogo e contar a garagem. As peças que ele tinha na mão deviam ser de pouca pontuação já que ainda restavam 17 peças fora da mesa.

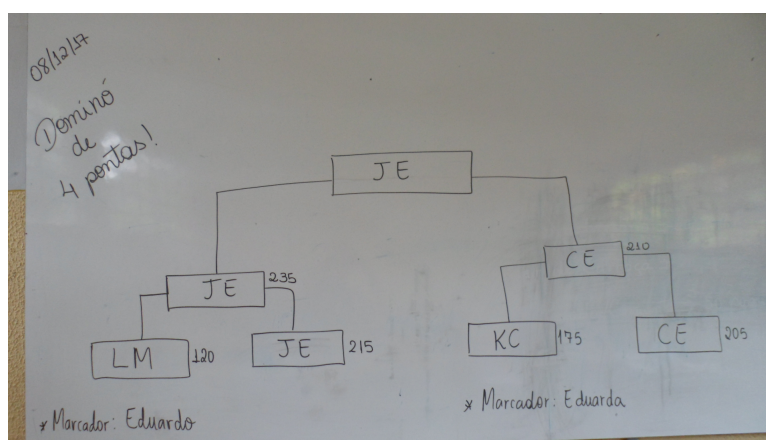
7. Gato: peça de número errado, 20 pontos se for percebido antes de descer a peça seguinte. Para esta situação o ponto não é imediato, os jogadores só pontuam se observarem o “gato” antes de descer a peça imediatamente seguinte à jogada. Se foi observado a peça volta e a partida continua normalmente. Se a situação passar despercebida a pontuação não é feita e embaralha-se a mão, reiniciando a partida. O marcador deve ficar atento para esta situação.

Um gato pode ser facilmente identificado quando se cruza com a situação anterior, jogo fechado, bastando para isso somar as pontas do jogo, quando se verifica um gato a soma diverge, ou seja, encontramos uma soma ímpar nas peças de uma dupla e uma soma par com a outra. Por exemplo, uma dupla tem quinze pontos de garagem e a outra vinte e dois.

4.2.1 Resultados

Chegado o momento do torneio algumas duplas permaneceram em sala no horário do intervalo treinando estratégias e mantendo o raciocínio atento, como uma delas mencionou. Ao adentrar a sala as mesas já estavam preparadas e as duplas e marcadores esperavam ansiosos. Foram no total 4 duplas que participaram em partidas de 200 pontos. Tudo com um clima de competição e concentração. Vejamos o resultado final conforme figura :

Figura 4.10: Torneio Jogo Dominó.



Fonte: a autora, 2017

Ainda foram necessários alguns minutos da aula seguinte para que se concluísse o torneio e então conhecêssemos a dupla campeã. No final, os alunos responderam um questionário composto por cinco breves perguntas acerca do jogo. De acordo com suas respostas, percebemos que entre as estratégias utilizadas estão a de observar as peças que poderiam ajudar sua dupla a permanecer no jogo sem passar e pontuar. Como descreve a aluna Cintia:

Figura 4.11: Resposta 2, aluna Cintia.

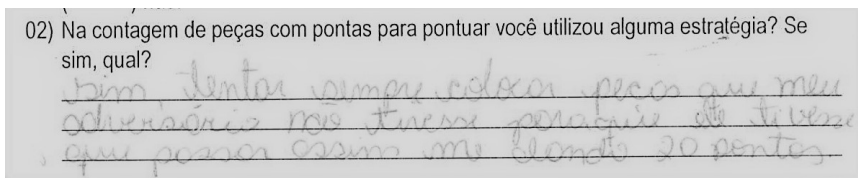
02) Na contagem de peças com pontas para pontuar você utilizou alguma estratégia? Se sim, qual?

Não. Apenas fazia a contagem e verificava qual peça eu tinha para completar um múltiplo de 5.

Fonte: Projeto, 2017

Outros alunos agiram atacando, procurando alternativas para “passar” os adversários. Como responde a aluna Jeniffer:

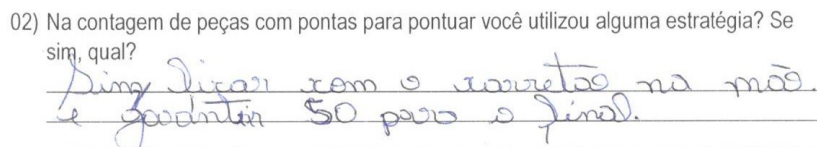
Figura 4.12: Resposta 2, aluna Jeniffer.



Fonte: Projeto, 2017

Tiveram ainda aqueles que adotaram estratégias arriscadas, como a aluno Renata:

Figura 4.13: Resposta 2, aluna Renata.



Fonte: Projeto, 2017

O risco, nesse caso, é de “matarem” sua carroça e por consequência você perder a batida. Além da dupla adversária ganhar os pontos referentes a “passar” a vez.

Após responderem o questionário foi realizado uma roda de conversa sobre a prática de jogos e especificamente o jogo dominó e suas contribuições para melhor compreensão dos conceitos combinatórios. Ficou claro a motivação por esse método que se mostrou válido para a complementação dos conteúdos trabalhados em sala.

Um acontecimento interessante foi em relação ao raciocínio mais imediato. Conforme as partidas se encaminhavam, situações que no início se davam de forma demorada e sem muito sentido de contagem foram melhorando e aos poucos se tornando mais naturais. Desde os primeiros jogos as duplas se mantiveram, mesmo com derrotas e pouca pontuação. E conforme iam se mantendo, a afinidade entre elas melhorava.

A comunicação direta era quase nula, logo, a saída de fato se dava pela observação como dito na estratégia dos três erres (RRR). Ao serem questionadas sobre qual era sua preocupação maior quando se iniciava a partida todas responderam que seria pontuar, deixando as preocupações como garantir a batida ou passar o adversário em segundo plano, o que reflete a pouca prática de jogos de estratégias na vida escolar desses alunos.

Os conceitos de análise combinatória ajudaram na tomada de decisão já que serve de comparativo para pautar suas jogadas, enriquecendo as estratégias adotadas. Devem ser discutidos em momentos específicos para que não sobrecarregue o jogo de pausas e perca sua função de envolvimento e distração. Uma boa hora é discutir as situações após as partidas para que as duplas comparem resultados e situações e tenham noção das oportunidades que tiveram, se aproveitaram ou se poderiam ter escolhido diferentes caminhos.

Quando questionados sobre a utilização dos conceitos matemáticos para vencer no jogo, apenas uma dupla declarou que nem sempre os utilizaram para vencer, ou seja jogaram e pontuaram ao acaso. As demais duplas, mesmo a maioria não dominando a estratégia ótima, consideraram que a matemática auxiliou a vencer as partidas, pois contar as peças que ainda restavam nas mãos dos adversários e as possíveis pedras que resultariam em pontuação era essencial para o bom desempenho da dupla.

Durante as observações realizadas em sala de aula, muitos alunos argumentavam a importância da concentração, do raciocínio lógico, dos cálculos e estratégias para buscar a vitória, e os argumentos eram valorizados e mostravam como a matemática estava presente e poderia ser útil naquele momento.

Cerca de oitenta e cinco por cento dos alunos concordaram que a prática de jogos melhora significativamente a tomada de decisão e concentração, além de contribuir para a aproximação entre os colegas de classe. Ao serem questionados sobre o uso de jogos, como o dominó, em sala de aula como prática pedagógica todos responderam que trata-se de uma prática válida que complementa a teoria, conforme questionário. Reconheceram, no entanto, que dificilmente teremos um jogo para cada conteúdo abordado e que não se pode substituir as aulas expositivas em sua totalidade por prática de jogos.

4.2.2 Outras situações

Além das situações já listadas na seção 4.3 traremos aqui algumas configurações de peças que também podem ser utilizadas para explorar os conceitos matemáticos.

1. Quantas peças tem um jogo usual de dominó duplo 6?

Uma solução: Este é um dos questionamentos iniciais do jogo de dominó, pode não parecer mas, muitas pessoas não sabem quantas são as peças. Existem algumas formas de realizar essa contagem.

No dominó duplo 6 dispomos dos algarismos de 0 a 6 para distribuir nas duas faces das peças do jogo. Podemos dividir o problema em duas partes:

- i) As peças que repetem a mesma face (carroças): 7 peças.
- ii) As peças que são formadas por algarismos distintos: podemos usar o princípio multiplicativo, assim são 7 opções de escolher um algarismo para ocupar a primeira casa e 6 opções de ocupar a segunda casa. Logo, seriam $7 \cdot 6 = 42$ possibilidades de formar as peças. Porém, as peças (2, 3) e (3, 2), por exemplo, são as mesmas. Dessa forma, a contagem duplicada deve ser compensada dividindo o total de 42 maneiras por 2.

Por fim, temos $7 + 21 = 28$ peças em um jogo de dominó usual.

2. Qual a maior pontuação possível no jogo dominó de quatro pontas?

Uma solução: Considerando que não seja a primeira jogada, podemos verificar as maiores somas possíveis utilizando as quatro pontas disponíveis. Teríamos então as peças (6, 6), (5, 5) e (4, 4) ocupando três pontas, nenhuma peça simples somaria mais do que essas. A outra ponta teria que somar o máximo que uma ponta simples pode, ou seja, as peças (3, 3) ou alguma das seis peças que restam do número seis. Logo, a maior soma é $12 + 10 + 8 + 6 = 36$ gerando pontuação 35.

3. Todas as 28 peças de um dominó foram colocadas em fila, de modo que o número de círculos nas extremidades adjacentes de dois dominós consecutivos seja igual. Veja o exemplo abaixo:



Se uma das extremidades da fila contém quatro círculos, qual o número de círculos na outra extremidade? OBMEP (2013)

Uma solução: Cada um dos números 0,1,2,3,4,5,6 é representado oito vezes no dominó. Note que, no meio da fila, os números ocorrem em pares (nas extremidades adjacentes). Assim, contando apenas o início da fila e as ocorrências no meio da fila, o número quatro aparece um número ímpar de vezes. Portanto, como existem oito extremidades com 4 círculos (número par), necessariamente a última peça também possui o número quatro na sua extremidade.

4.3 Proposta para os múltiplos de 3

Absorvendo as regras do dominó de quatro pontas para os múltiplos de cinco trazemos aqui uma proposta para os múltiplos de três.

O início da partida continuaria sendo a carroça de sena, que é múltiplo de três, então a dupla já começa pontuando doze pontos. A primeira jogada após a saída ganha uma possibilidade a mais de pontuar em relação aos múltiplos de cinco. Nos múltiplos de cinco apenas a peça (6,3) pontua na saída de sena, já com os múltiplos de três teremos as peças (6,0) e (6,3) que geram as pontuações 12 ou 15 respectivamente.

As possibilidades de pontuação dos múltiplos de três pertenceriam ao conjunto $M(3) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 27, 30, 33, 36\}$, quatro somas a mais em relação aos múltiplos de cinco $M(5) = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35\}$.

Vejamos algumas situações:

- a) Na seguinte fase do jogo quais chances o jogador da vez tem de pontuar ou passar a vez:

Figura 4.14: Situação de um jogo que gera pontuação 10



Fonte: Silva, 2015

Os eventos favoráveis são análogos aos da seção 6.2 adequado aos múltiplos de três. Temos,

1. Passar a vez: para essa situação devemos observar quais peças não se encaixariam em nenhum dos quatro números da mesa, nesse caso, das vinte e duas peças que estão fora da mesa apenas quatro não jogam, são elas (2, 2), (2, 3), (3, 3) e (6, 2). Assim, o total de combinações possíveis que esse jogador

tem de possuir seis dessas dez peças é dado pela combinação $C_{18}^6 = 18564$ o evento não jogar é vazio já que esse jogador tem seis peças na mão e mesmo na pior situação, que é ele ter todas as quatro peças que não jogam ele ainda teria pelo menos duas para jogar. Assim, sua probabilidade de passar a vez é:

$$P(A) = 0$$

Aqui, estamos assumido que nenhum jogador anteriormente tenha passado a vez.

2. Pontuar: temos dezoito peças que jogam nessa configuração de peças. Para somar múltiplo de três temos as peças (5, 5), (0, 5), (1, 0), (2, 0), (4, 0), (5, 1), (1, 3), (5, 1), (1, 3), (4, 3). Assim, basta ele ter pelo menos uma dessas oito peças dentre suas seis, ou seja, $C_8^1 \cdot C_{10}^5 + C_8^2 \cdot C_{10}^4 + C_8^3 \cdot C_{10}^3 + C_8^4 \cdot C_{10}^2 + C_8^5 \cdot C_{10}^1 + C_8^6 = 18354$ possibilidades.

A probabilidade de pontuar é dada por: $P(B) = \frac{18354}{18564} \approx 0,9886$. Portanto, a chance do jogador pontuar se aproxima de um evento certo.

Vale resaltar que o cálculo para esse evento pode ser facilitado excluindo do total de combinações aquelas que não satisfazem o que queremos garantindo assim a presença de pelo menos uma peça que pontue. Veja, $C_{18}^6 - C_{10}^6 = 18354$.

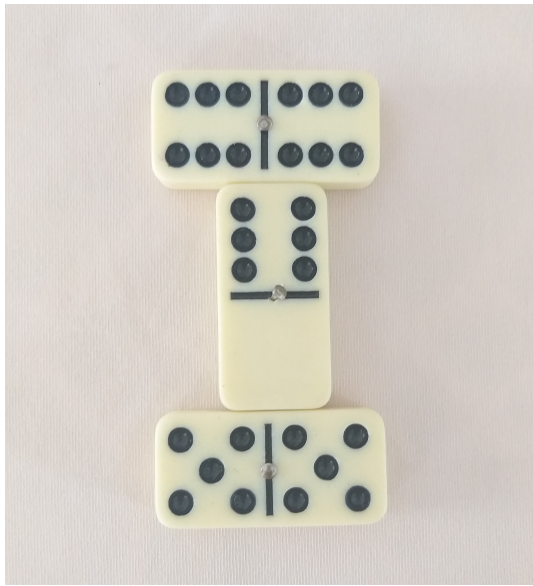
4.4 Proposta para os múltiplos de 11

Mantendo a proposta da seção anterior iremos agora mostrar situações para os múltiplos de 11.

Para esse múltiplo teremos apenas três somas possíveis de pontuar. São elas: 11, 22 e 33. Logo, fica evidente a redução de situações que gerem pontuação na mesa.

Na primeira fase do jogo (saída de sena) não há peças que pontue, já que $12 + 5 = 19$ não é múltiplo de 11. Para pontuar na segunda fase, teríamos que ter a seguinte configuração:

Figura 4.15: Vinte e dois pontos.



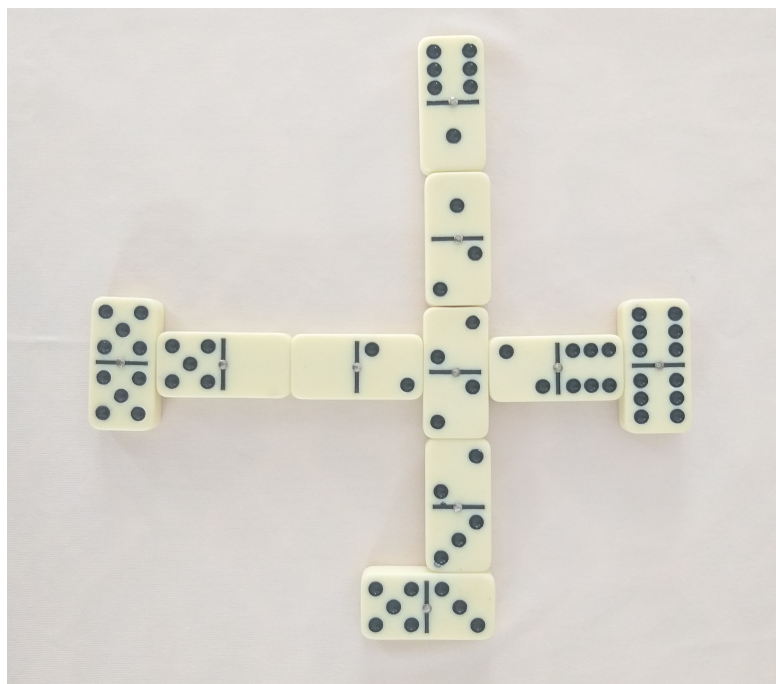
Fonte: A autora, 2019

As chances de pontuar para essa proposta reduzem consideravelmente, já que para obter múltiplos de onze temos apenas três possibilidades. Pontuações em sequência se tornam pouco prováveis também.

Na sequência dessa jogada há apenas a peça (6, 1) que pontua das vinte e cinco que restam fora do jogo. Logo, a probabilidade de marcar pontos será de $P(A) = \frac{1}{25} = 0,04$. Nessa mesma fase do jogo teríamos, para a versão original, as peças (6, 0), (6, 5) e (5, 3) que pontuariam.

A seguir temos uma configuração com pontuação máxima nos múltiplos de onze:

Figura 4.16: Trinta e três pontos.



Fonte: A autora, 2019

Como já observado anteriormente para chegar na pontuação máxima estamos em uma partida distinta da primeira, onde temos saída de sena. Logo, podemos concluir que não teremos pontuação máxima da primeira mão do jogo.

A ideia de ir variando a versão do jogo de dominó de pontas com múltiplos de cinco se esbarra em situações que podem “engessar” as pontuações, reduzindo as possibilidades de pontuar.

Considerações Finais

Durante a realização da pesquisa bibliográfica, logo se percebe a importância de novas práticas de ensino para um aprendizado significativo. A lógica matemática, os conceitos de aritmética básica em foco, os múltiplos e divisores, em geral, são mal construídos nos anos iniciais do ensino fundamental. Muitas vezes, aprende-se algoritmo antes de entender adequadamente o conceito de multiplicar e dividir. Então optamos por unir esses conceitos com a prática de jogo através do jogo dominó, um jogo que pode aliar muito bem esses conceitos.

No jogo dominó, os alunos buscam, em suas experiências, pistas para tomar decisões para as próximas jogadas de acordo com a situação problema a que estão submetidos. Como as pessoas são singulares, cada uma possui conhecimentos, habilidades e competências variadas, de forma que suas contribuições no jogo também são diversas, umas ajudando mais que outras no processo de solução. Aqui surge um diferencial importante dessa metodologia, em relação ao método tradicionalmente utilizado de construção de informações: o aluno com menos conhecimentos dá menor contribuição, mas não fica desprovido de aprendizagem, pois existe o grupo que faz os trabalhos progredirem e ele tem, então, a oportunidade de apropriar-se do processo e dos resultados de uma maneira dinâmica, visto ser ele parte do jogo.

Há muitos jogos disponíveis para complementar teorias ou simplesmente aprimorar o raciocínio lógico dos educandos. Ao escolher uma prática de jogos para levar aos alunos é necessário verificar suas possíveis contribuições, se trará benefícios em sua prática pedagógica, estudar o jogo, e essencialmente praticar o jogo e só então incluí-lo em suas aulas. Se o professor não se sentir motivado com o jogo escolhido levará para seus alunos este mesmo sentimento e, algo que deveria ser prazeroso, se tornará sem sentido. As variações dos jogos também devem ser exploradas e adaptadas, se necessário, tudo em favor de sua prática pedagógica em benefício ao aprendizado significativo.

O estudo de análise combinatória agregado a prática do jogo contribui para identificação dos conceitos explorados nas aulas de matemática, facilitando visualizações através de situações práticas. Os conceitos de análise combinatória e probabilidades levam os estudantes a aplicação de comparativos percentuais. Estendendo para diversas situações possíveis no jogo e posteriormente a problemas de contagem. Oportunizando ao aluno possibilidades para que ele possa desenvolver o raciocínio lógico-matemático, a capacidade de resolver problemas, tomar decisões e de analisar e interpretar informações de forma crítica utilizando-se do instrumental matemático.

Por fim pretendemos ter contribuído para que os educadores interessados possam ter um olhar especial em relação ao aprendizado matemático com a utilização da prática de jogos.

Referências Bibliográficas

- Abramovich, F. (1997). *Por uma arte de contar histórias*. Scipione, São Paulo.
- Aranão, I. V. D. (1996). *A matemática através de brincadeiras e jogos*. Papirus, São Paulo.
- Basso, A. (2012). Avaliação em matemática integrada ao processo de ensino. URL: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/578/74>. Acesso 04 de junho de 2018.
- Bisognin, B. V. M. (2015). Um olhar dos professores sobre as dificuldades de aprendizagem em matemática nos anos finais do ensino fundamental.
- Brasil, M. E. e. C. (2013). Introdução aos parâmetros curriculares nacionais. *Brasília: MEC-Secretaria de Educação Fundamental*.
- Brasil, M. E. e. C. (2017). Base nacional comum curricular. *Brasília: MEC-Secretaria de Educação Fundamental*.
- Da Ponte, J. P. (2000). *Por uma formação inicial de professores de qualidade*. Tese de Doutorado, Universidade do Algarve–UAlg, Faro–Portugal.
- Domingues, H. (1991). *Fundamentos da aritmética*. Atual, São Paulo.
- FEPAD (2013). URL: <https://unidosdomino.wordpress.com/2012/10/17/domino-e-a-estrategia-dos-tres-erres-rrr/>. Acesso 06 de maio de 2018.
- Fialho, N. N. (2007). *Jogos no ensino de Química e Biologia*. IBPEX, Paraná.
- Fiani, R. (2006). *Teoria dos jogos*. Elsevier, Rio do Janeiro.
- Grando, R. C. et al. (2000). *O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

- Granja, Carlos Eduardo e Pastore, J. L. (2012). *Atividades experimentais de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental*. Somos Mestres–SM, São Paulo.
- Hefez, A. (2006). *Elementos de aritmética*. SBM, Rio de Janeiro.
- Hefez, A. (2014). *Aritmética- Coleção Profmat*. SBM, Rio de Janeiro.
- Lorensatti, E. J. C. (2012). Aritmética: um pouco de história. *IX ANPED Sul-Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul*.
- Moreira, Carlos Gustavo T. de A. e Martinez, F. E. B. e. S. N. C. (2012). *Tópicos de teoria de números, - Coleção Profmat*. SBM, Rio de Janeiro.
- Morgado, A. C. (2014). *Matemática Discreta - Coleção Profmat*. SBM, Rio de Janeiro.
- Morgado, A. C. d. O., Carvalho, J. B. P. d., Carvalho, P. C. P., e Fernandez, P. (1991). *Análise combinatória e probabilidade*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.
- Nacionais-PCN, P.-P. C. (1997). Secretaria de educação fundamental. *Brasília: MEC/SEF*.
- Nemitz, V. (2016). *Matemática: ensino médio, vol. 7*. Sistema Positivo de Ensino, Paraná.
- OBMEP (2013). URL: <http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-probabilidade-com-dominos/>. Acesso 10 de junho de 2019.
- Oliveira, C. X. d. (2018). Jogos no ensino de matemática. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul–UFMS, Três Lagoas/MS.
- Piaget, J. (1998). A educação da liberdade. *Sobre a Pedagogia. Tradução de Claudia Berliner*.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1997). *Psicología del niño*, volume 369. Ediciones Morata, Madri.
- Pires, L. (2016). O uso de jogos como instrumento de ensino-aprendizagem de matemática. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista–Unesp, São Paulo.

Silva, E. S. S. d. et al. (2015). Proposta de um agente para o jogo de dominó de 4 pontas utilizando o algoritmo expectiminimax. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Amazonas–UFAM, Manaus/AM.

Smole, K. C. S. e Kiyukawa, R. (1999). *Matemática: ensino médio*. Saraiva, São Paulo.

Torres, T. H. S. (2017). Contribuição dos jogos na compreensão de conceitos matemáticos. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília–UnB, Brasília.