Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional
Dissertação de Mestrado

Uma Caracterização das Frações Contínuas Periódicas

FABRÍCIA DA CONCEIÇÃO LISBOA

Cruz das Almas-Bahia
Julho de 2019

Uma Caracterização das Frações Contínuas Periódicas

FABRÍCIA DA CONCEIÇÃO LISBOA

Orientador : Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Cruz das Almas-Bahia

Julho de 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

L769c Lisboa, Fabrícia da Conceição.
Uma caracterização das frações contínuas periódicas / Fabrícia da Conceição Lisboa._ Cruz das Almas, BA, 2019.
47f.; il.

Orientador: Danilo de Jesus Ferreira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Frações contínuas. 2.Matemática – Números irracionais. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

CDD: 517.52

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas – UFRB.
Responsável pela Elaboração – Antonio Marcos Sarmento das Chagas (Bibliotecário – CRB5 / 1615).
Os dados para catalogação foram enviados pela usuária via formulário eletrônico.

Uma Caracterização das Frações Contínuas Periódicas

FABRÍCIA DA CONCEIÇÃO LISBOA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Danilo de Jesus Ferreira

Prof. Dr. Danilo de Jesus Ferreira (Orientador)
UFRB

João Tiago Assunção Gomes

Prof. Dr. João Tiago Assunção Gomes
UFSB

Andrêssa Lima de Souza da Cruz

Profa. Dra. Andrêssa Lima de Souza da Cruz
UFRB

Agradecimentos

À Deus por me permitir chegar até aqui. Por me encorajar, me capacitar e ser meu alicerce durante todo o curso.

Ao meu esposo pelo incentivo, compreensão e apoio durante todos estes anos.

Aos meus pais e a minha tia Loudes que, no decorrer de todo o curso, me incentivaram a continuar e me deram todo o apoio necessário.

Aos meus amigos pelo incentivo e orações.

Aos meus colegas de jornada, em especial à minha amiga Dilmara, por estar junto comigo nos momentos bons e ruins que o curso nos proporcionou. Sem vocês seria muito mais difícil.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Danilo Ferreira de Jesus, por compartilhar seus conhecimentos e orientar meus estudos neste trabalho. Obrigada pela dedicação e apoio.

E finalmente, ao corpo docente da UFRB, em especial aos que lecionaram disciplinas neste curso, e à SBM pelo programa PROFMAT.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar a teoria das Frações Contínuas caracterizando as frações contínuas periódicas. Para tanto, são apresentados alguns conceitos básicos tais como Divisibilidade, Máximo Divisor Comum e Algoritmo da Divisão Euclidiana, os quais são importantes para a compreensão da teoria. A discussão é centralizada no estudo das frações contínuas finitas e infinitas relacionando-as com os números racionais e irracionais, respectivamente. Além disso, é apresentado algumas aplicações do tema.

Palavras-chave: Algoritmo de Euclides. Frações Contínuas Periódicas. Números Irracionais.

Abstract

The objective of this work is to present the theory of the Continuous Fractions characterizing the periodic continuous fractions. For this purpose, it present some basic concepts, such as Divisibility, Maximum Common Divisor and Algorithm of the Euclidean Division, which are important for the understanding of the study. The discussion is centered on the study of finite and infinite continuous fractions relating them to rational and irrational numbers, respectively. In addition, some applications of the theme are presented.

Keywords: Algorithm of Euclid; Continuous Periodic Fractions; Irrational Numbers.

Sumário

Indrodução

A teoria das frações contínuas é um assunto de grande relevância na Matemática, pois constitui uma ferramenta muito importante para o estudo de vários problemas, em particular, àqueles relacionados aos números reais. As frações contínuas surgiram pela primeira vez nas obras do matemático indiano Aryabhata (sécculo VI d.C.), para resolver equações lineares. O tema ressurgiu na Europa do século XV d.C. por Pietro Antonio Cataldi (século XVI d.C.), de Bolonha, que escreveu algumas raízes quadradas nesta forma, dando um dos primeiros passos para o desenvolvimento da teoria. O termo *fração contínua* apareceu pela primeira vez em 1653 em uma edição do livro Arithmetica Infinitorum do matemático de Oxford, John Wallis. Na mesma época, o famoso físico matemático holandês, Christiaan Huygens, fez uso prático de frações contínuas na construção de instrumentos científicos. Mais tarde, no século XVIII e no início do século XIX, Gauss e Euler exploraram muitas de suas propriedades.

Tal teoria ainda é tema de muitas pesquisas e seu estudo nos permite compreender padrões muito interessantes sobre as representações dos números reais. Suas aplicações vão além da matemática, podendo ser relacionadas com outras áreas do conhecimento como Física, Astronomia e Computação.

Neste sentido, o objetivo deste trabalho é discorrer sobre a teoria das frações contínuas, suas propriedades e algumas aplicações. Apresentaremos as principais características das frações contínuas finitas e infinitas, e sua relação com os números racionais e irracionais, respectivamente. Além disso, será realizado um estudo sobre as frações contínuas periódicas, seus principais teoremas e resultados.

Na elaboração deste trabalho, realizamos uma pesquisa de caráter bibliográfico, buscando elementos para sua fundamentação teórica. O trabalho está desenvolvido para além da introdução, em mais cinco capítulos. O primeiro capítulo contém um breve estudo sobre a teoria necessária para o desenvolvimento e compreensão do tema, partindo de conceitos básicos de Divisibilidade, Máximo Divisor Comum e Algoritmo de Euclides. No segundo capítulo enfatizamos a teoria das frações contínuas simples finitas e infinitas. Além disso, discorremos sobre a expansão de números irracionais em frações contínuas infinitas. O terceiro capítulo apresenta uma caracterização das frações contínuas periódicas. No quarto, apresentamos algumas aplicações das frações contínuas e, no quinto, as conclusões sobre o que foi estudado.

Capítulo 1

Pré-requisitos

O estudo sobre as frações contínuas tem por base o conceito de divisibilidade e divisão Euclidiana. Sendo assim, neste capítulo serão apresentados os principais conceitos e resultados que serão necessários para o desenvolvimento desta teoria. Alguns resultados serão fornecidos sem demonstrações, pois não é o objetivo principal do trabalho, mas deixaremos as referêcias onde podem ser encontradas.

1.1 Divisibilidade

Dados dois números inteiros a e b, diremos que *a divide b*, denotado por $a|b$, quando existir $c \in \mathbb{Z}$, tal que $b = ac$. Se $a|b$, diremos também que a é um *divisor* de b ou que b é *divisível* por a.

Portanto, dizer que a não divide b, significa que não existe nenhum inteiro c tal que $b = ac$. Neste caso, faremos uso da notação $a \nmid b$. Por exemplo, temos que $2|4$, mas $4 \nmid 2$.

A seguir, apresentaremos algumas propriedades importantes de divisibilidade que servirão de base para o desenvolvimento da teoria.

Proposição 1.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Então,*

i) $1|a$, $a|a$ *e* $a|0$.

ii) se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração. i) Isto decorre das igualdades $a = a \cdot 1$, $a = 1 \cdot a$ e $0 = 0 \cdot a$.
ii) Se $a|b$ e $b|c$ então existem $f, g \in \mathbb{Z}$, tais que $b = fa$ e $c = gb$. Substituindo o valor de b da primeira equação na segunda, obtemos

$$c = gb = g(fa) = (gf)a,$$

o que mostra que $a|c$. □

Proposição 1.2. *Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, então*

$$a|b \quad e \quad c|d \Rightarrow ac|bd.$$

Demonstração. Se $a|b$ e $c|d$, então existem $f, g \in \mathbb{Z}$, tais que $b = fa$ e $d = gc$. Portanto, $bd = (fg)(ac)$, logo, $ac|bd$. □

Proposição 1.3. *Se $a, b, c \in \mathbb{Z}$, são tais que $a|b$ e $a|c$, então para todo $x, y \in \mathbb{Z}$*

$$a|(xb + yc).$$

Demonstração. Se $a|b$ e $a|c$ então existem $f, g \in \mathbb{Z}$ tais que $b = fa$ e $c = ga$. Logo,

$$xb + yc = x(fa) + y(ga) = (xf + yg)a,$$

o que prova o resultado. □

Proposição 1.4. *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, onde $b \neq 0$, temos que*

$$a|b \Rightarrow |a| \leq |b|.$$

Demonstração. De fato, se $a|b$, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Tomando módulos, temos que $|b| = |c||a|$. Como $b \neq 0$, temos que $c \neq 0$, logo $1 \leq |c|$ e, consequentemente, $|a| \leq |a||c| = |b|$. □

1.2 Máximo Divisor Comum

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com pelo menos um deles diferente de zero. O Máximo Divisor Comum - MDC de a e b é um inteiro positivo d tal que:

i) $d|a$ e $d|b$;

ii) se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.

Portanto, pelos itens *i* e *ii* temos que se d é o MDC de a e b e c é um divisor comum desses números, então c divide d e, portanto, $c \leq |c| \leq d$. Isto nos mostra que o MDC de dois números é efetivamente o maior dentre todos os divisores comuns desses números.

Assim, podemos afirmar que, se d e d' são dois MDC de um mesmo par de números, então $d|d'$ e $d'|d$, o que juntamente com as condições $d \geq 0$ e $d' \geq 0$, implica que $d = d'$. Isto mostra que, o MDC de dois números, quando existe, é unico.

Usaremos a notação (a, b) para representar o MDC de a e b, quando existir. Como o MDC de a e b não depende da ordem em que a e b são tomados, temos que

$$(a, b) = (b, a).$$

Para provar a existência do Máximo Divisor Comum de dois inteiros não-negativos, utilizaresmos, o resultado abaixo, conhecido como o Lema de Euclides.

Lema 1.1 (Euclides)**.** *Sejam, $a, b, n \in \mathbb{Z}$, tais que o MDC $(a, b-na)$ existe. Então, (a, b) existe e $(a, b) = (a, b-na)$.*

Demonstração. Seja $d = (a, b - na)$. Assim, $d|a$ e $d|(b - na)$ e portanto pela Proposição 1.3, $d|b$ pois, $b = (b - na) + na$. Logo, d é um divisor comum de a e b. Agora, suponha que c seja um divisor comum de a e b. Novamente, pela Proposição 1.3, c será um divisor de a e $b - na$ e, portanto $c|d$. Isso mostra que (a, b) existe e que $d = (a, b)$. □

1.3 Algoritmo de Euclides

O algoritmo de Euclides é um dos algoritmos mais antigos, decorrente da obra *Elementos* (300*a.C*), e consiste em um método essencial no cálculo do Máximo Divisor Comum de dois números inteiros diferentes de zero. Historicamente, Andrade&Bracciali (2005) ressaltam que, embora os gregos conhecessem o algoritmo de Euclides, não há evidências que eles o utilizassem para construir frações contínuas. Apesar disso, o algoritmo não deixa de ser um procedimento consistente e prático na construção da teoria das frações contínuas.

Euclides, na sua obra *Elementos*, faz uso do fato de que sempre é possível efetuar a divisão de dois inteiros a e b, com resto, mesmo que $b \neq 0$ não divida o número a. A demonstração deste resultado fará uso do famoso

Princípio de Arquimedes: *Dados dois inteiros a e b com $b > 0$, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$qb \leq a < (q+1)b.$$

Teorema 1.1. *(Algoritmo Euclidiano da Divisão) Dados dois inteiros a e b, $b \neq 0$, existe um único par de inteiros q e r, tais que:*

$$a = qb + r, \quad 0 \leq r < |b| \quad (r = 0 \Leftrightarrow b|a),$$

(q é chamado de quociente e r de resto da divisão de a por b).

Demonstração. Provaremos, primeiramente a existência. Suporemos, sem perda de generalidade $b > 0$. Pelo Princípio de Arquimedes, existe q satisfazendo:

$$qb \leq a < (q+1)b,$$

o que implica,

$$0 \leq a - qb \quad e \quad a - qb < b.$$

Dessa forma, se definirmos $r = a - qb$, garantimos a existência de q e r.
Para provar a unicidade, iremos supor, por absurdo, a existência de um outro par q_1 e r_1, tal que:

$$a = q_1 b + r_1 \quad \text{com} \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Daí, temos $(qb + r) - (q_1 b + r_1) = 0 \Rightarrow b(q - q_1) = r_1 - r$ o que implica $b|(r_1 - r)$. Mas, como $r_1 < b$ e $r < b$, temos que $|r_1 - r| < b$ e, portanto, como $b|(r_1 - r)$ devemos ter $r_1 - r = 0$ o que implica $r_1 = r$. Logo $q_1 b = qb \Rightarrow q_1 = q$, uma vez que $b \neq 0$. □

Em uma divisão simples entre dois números inteiros a e b, com $a > b$ temos:

$$a = qb + r, \text{com } 0 \leq r \leq b - 1,$$

onde a é chamado de dividendo, b de divisor, q o quociente e r o resto.
Por exemplo, se dividirmos 27 por 6 obtemos:

$$27 = 6 \cdot 4 + 3.$$

A seguir faremos uso do importante
Princípio da Boa Ordenação: *Se S é um subconjunto não vazio de inteiros positivos e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.*

Para a determinação do MDC entre dois números $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \geq b \geq 0$, fazendo uso da divisão euclidiana, é necessário seguir os seguintes passos:

Divisões	Quociente	Resto
a por b	q_1	r_1
b por r_1	q_2	r_2
r_1 por r_2	q_3	r_3
r_2 por r_3	q_4	r_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_{n-2} por r_{n-1}	q_n	r_n

Se equacionarmos o procedimento acima obteremos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 \quad (0 < r_1 < b)\\
b &= q_2 r_1 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)\\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)\\
r_2 &= q_4 r_3 + r_4 \quad (0 < r_4 < r_3)\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \quad (0 < r_n < r_{n-1})\\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n \quad (r_{n+1} = 0).
\end{aligned}$$

Segue que, se $r_{n+1} = 0$ para algum n (garantido pelo Princípio da Boa Ordenação) então $r_{n-1} = q_{n+1} r_n$ e portanto, aplicando o Lema de Euclides sucessivamente teremos que o MDC de a e b será r_n. Logo, o MDC de a e b será o último resto não-nulo na sequência de divisões secessivas.

Dados a e $b \in \mathbb{N}$, podemos supor $b \leq a$. Se $b = 1$ ou $b = a$, ou ainda $b|a$, já vimos que $(a, b) = b$. Suponhamos, então que $1 < b < a$ e que $a \nmid b$. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever

$$a = q_1 b + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b.$$

Temos duas possibilidades:

i) $r_1|b$. Tal caso, $r_1 = (b, r_1)$ e, pelo Lema de Euclides, temos que

$$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1 b) = (b, a) = (a, b),$$

e o algoritmo termina.

ii) $r_1 \nmid b$. Em tal caso, podemos efetuar a divisão de b por r_1, obtendo

$$b = q_2 r_1 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Novamente, temos duas possibilidades:

i) $r_2|r_1$. Nesse caso, $r_2 = (r_1, r_2)$ e novamente, pelo Lema de Euclides,

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, b - q_2 r_1) = (r_1, b) = (a - q_1 b, b) = (a, b),$$

e paramos, pois termina o algoritmo.

ii) $r_2 \nmid r_1$. Neste caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Continuaremos o procedimento acima até que pare. Isto sempre ocorre, pois, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $b > r_1 > r_2 > ...$ que não possui menor elemento, o que não é possível pela Princípio da Boa Ordenação.. Logo, para algum n, temos que $r_n | r_{n-1}$, o que implica que $(a, b) = r_n$, o último resto não-nulo na sequência de divisões sucessivas.

As igualdades acima podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b}; \quad \frac{b}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n + \frac{r_n}{r_{n-1}}; \qquad \frac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n+1}.$$

onde r_n é o MDC dos números a e b.

É possivel perceber que cada uma das igualdades (exceto a última) contém a representação de uma fração imprópria sob a forma da soma de uma fração própria com um número inteiro. Temos que o primeiro membro de cada igualdade, a começar pela segunda, é o inverso da fração própria que figura na igualdade anterior. Assim, é possível excluir sucessivamente, todos os r_i. Substituindo na primeira igualdade a fração $\frac{r_1}{b}$ pela sua expressão, de acordo com a segunda igualdade:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}.$$

Na igualdade obtida, substituiremos a fração $\frac{r_2}{r_1}$ pela sua expressão, dada na terceira igualdade:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}}.$$

Repetindo este processo, expressamos $\frac{a}{b}$ como uma soma de frações parciais. Tais frações serão o objeto de estudo dos capítulos seguintes..

1.4 Sequências

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais, denotada por $\{x_n\}$, é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que a cada número natural n associa um número real $x_n = x(n)$, chamado o n-ésimo termo da sequência.*

Definição 1.2. *Uma sequência $\{x_n\}$ é dita limitada, se existe $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.3. *Uma sequência $\{x_n\}$ é dita crescente (resp. decrescente) se $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Em qualquer um destes casos dizemos que ela é monótona.*

Definição 1.4. *Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ converge para um número real l, e escreve-se $\lim x_n = l$, se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - l| < \epsilon.$$

Finalizaremos esta seção com o importante

Teorema 1.2. *Toda sequência monótona limitada de números reais converge.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ monótona, digamos crescente e limitada. Escrevamos $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ e $\alpha = \sup X =$ menor das constantes $c > 0$ tais que $x_n \leq c$ para todo n. Afirmamos que $\alpha = \lim x_n$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \epsilon < x_{n_0}$. Logo, como $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \cdots$ segue que $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n$ para todo $n \geq n_0$. Assim,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \alpha - \epsilon < x_n < \alpha + \epsilon$$

ou equivalente,

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \alpha| < \epsilon.$$

estabelecendo o resultado. □

Se $\{x_n\}$ fosse decrescente teríamos $\lim x_n = \beta$ sendo $\beta = \inf X =$ maior das constantes $c > 0$ tais que $x_n \geq c$ para todo n.

Capítulo 2

Frações Contínuas

Neste capítulo apresentaremos a teoria das frações contínuas finitas e infinitas, seus principais resultados e relações com os números racionais e irracionais, respectivamnete.

2.1 Frações Contínuas Finitas

Considere o número $\frac{67}{29}$. Utilizando o algoritmo de Euclides podemos calcular o MDC dos números 67 e 29, obtendo a seguinte cadeia de igualdades:

$$
\begin{aligned}
67 &= 2 \cdot 29 + 9 \\
29 &= 3 \cdot 9 + 2 \\
9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1 + 0.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, o (67,29) = 1, uma vez que 1 é o ultimo resto não-nulo da divisão, na sequência de divisões sucessivas acima. A partir destas igualdades, podemos expressar o número racional $\frac{67}{29}$ da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
\frac{67}{29} &= 2 + \frac{9}{29} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{9}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{9}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{9}{2}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Podemos dizer que a ultima expressão do exemplo acima é a fração contínua que representa o número racional $\frac{67}{29}$.

De um modo geral, uma fração contínua simples é uma expressão da forma

$$
a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}} \tag{2.1}
$$

onde os termos $a_1, a_2, a_3, ...$ são inteiros. Estes termos são denominados de *quocientes parciais*. O número de termos de uma fração contínua simples podem ser finitos ou infinitos. Se a quantidade dos números $a_i's$ for finito dizemos que a fração contínua é $finita$ e, caso contrário, dizemos que ela é $infinita$.

A fração contínua representada pela expressão (2.1) também pode ser representada na forma $[a_1, a_2, a_3, ...]$. De maneira análoga, temos que a fração contínua $[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$ representa a expressão

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ... + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

isto é,

$$[a_1, a_2, a_3, ..., a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ... + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Em resumo, dado um número real x podemos dizer que este algoritmo, consiste numa sequência alternada dos dois passos seguintes:

Passo 1. Representa-se o número x com a soma de duas parcelas, sendo a primeira delas a parte inteira do número x definida por $[x] = max\{m \in \mathbb{Z}; m \leq x\}$, e a segunda o resto, inferior à unidade.

Passo 2. O resto é representada como uma fração de numerador 1 e denominador maior do que 1. A este denominador, aplica-se novamente o primeiro passo, e assim sucessivamente.

Vale ressaltar que quando o número é negativo, o primeiro quociente parcial a_1 será negativo. Por exemplo, se tomarmos o número $-\frac{61}{27}$, sua representação em frações contínuas pode ser desenvolvida da seguinte maneira:

aplicando o algoritmo de Euclides para encontrar $(-61, 27)$, obtemos

$$\begin{aligned} -67 &= -3 \cdot 29 + 20 \\ 29 &= 1 \cdot 20 + 9 \\ 20 &= 2 \cdot 9 + 2 \\ 9 &= 4 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever a fração contínua da seguinte forma

$$\begin{aligned} -\frac{67}{29} &= -3 + \frac{20}{29} \\ &= -3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}} \\ &= [-3; 1, 2, 4, 2]. \end{aligned}$$

Outra observação importante a ser feita, é para $a_1 = 0$. Isso ocorre quando na fração $\frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, temos $a < b$. Apresentaremos como exemplo o número $\frac{5}{7}$. Aplicando o algoritmo de Euclides, obtemos

$$\begin{aligned}5 &= 0 \cdot 7 + 5\\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2\\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1\\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0.\end{aligned}$$

Escrevendo a fração contínua, temos

$$\frac{5}{7} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = [0; 1, 2, 2,] = [1, 2, 2].$$

Segue imediatamente destas observações e do algoritmo de Euclides que em qualquer fração contínua $[a_1, a_2, ...]$, o inteiro a_1 poderá ser positivo, negativo ou nulo, enquanto os demais $a_2, a_3, ...$ serão sempre inteiros positivos.

No exemplo a seguir, verificaremos que o procedimento para determinação de uma fração contínua pode ser feito no sentido inverso, isto é, podemos a partir de uma fração contínua finita, encontrar o número racional que a representa.

Exemplo 1. Consideremos a fração contínua

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} = [1; 2, 3, 5].$$

Se efetuarmos os cálculos obtemos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5}}} &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{16}{5}}}\\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{16}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{37}{16}}\\ &= 1 + \frac{16}{37}\\ &= \frac{63}{37}.\end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que o número $\frac{53}{37}$ é igual a fração contínua $[1; 2, 3, 5]$. Mais precisamente, isto significa dizer que $\frac{53}{37}$ e $[1; 2, 3, 5]$ são duas formas diferentes de representar o mesmo número.

Dos exemplos anteriores, é possível verificar que no processo de divisões sucessivas, apenas o primeiro quociente pode ser positivo, negativo ou zero. Além disso, se o número x for racional poderemos representa-lo através de uma fração contínua finita, como mostraremos no teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Toda fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, todo número racional pode ser representado, sob a forma de fração contínua simples finita.*

Demonstração. A primeira parte da demonstração segue a ideia do Exemplo 1. Pelo fato de se tratar de uma fração contínua simples finita, para verificarmos qual número racional ela está representando, basta efetuarmos as somas, até escrevermos o número racional na forma de fração, demonstrando assim a primeira parte do teorema.

Para provar a recíproca consideremos um número racional qualquer $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$. Pelo algoritmo da divisão, temos

$$p = a_1 q + r_1$$

que equivale a

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}$$

onde $0 \leq r_1 < q$.

Se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro, e portanto, $\frac{p}{q} = [a_1]$. No entanto, se $r_1 \neq 0$, fazemos

$$\frac{r_1}{q} = \frac{1}{\frac{q}{r_1}},$$

e fazendo a substituição, temos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \quad 0 < r_1 < q.$$

Aplicando o algoritmo da divisão em $\frac{q}{r_1}$ obtemos

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, a prova termina, pois

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2} = [a_1, a_2].$$

Se $r_2 \neq 0$, temos

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}} \quad 0 < r_2 < r_1,$$

que equivale a

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

Em seguida, repetimos o mesmo procedimento com $\frac{r_1}{r_2}$ e assim sucessivamente. Observamos que o processo termina quando $r_n = 0$ para algum n. O que realmente ocorre, pois caso contrário, obteríamos uma sequência monótona decrescente de inteiros positivos limitada inferiormente $q > r_1 > r_2 > \cdots > r_{n-1} > r_n > \cdots$ o que é absurdo pelo Pincípio da Boa Ordenação. Assim, temos a seguinte cadeia:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= a_1 + \frac{r_1}{q}, \quad 0 \leq r_1 < q,\\
\frac{q}{r_1} &= a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1,\\
\frac{r_1}{r_2} &= a_3 + \frac{r_3}{r_2}, \quad 0 \leq r_3 < r_2,\\
&\vdots\\
\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} &= a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \quad 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2},\\
\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} &= a_n, \quad r_n = 0,
\end{aligned}$$

donde,

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n],$$

estabelecendo o resultado. □

Observação: Se $\frac{p}{q} = [a_1, \ldots, a_n]$ e $a_n > 1$ então, $\frac{p}{q} = [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$ isto é, se $a_n > 1$ a representação do racional é dada de duas formas. Por exemplo, podemos escrever a fração contínua simples

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = [1; 1, 2, 3],$$

como

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}} = [1; 1, 2, 2, 1].$$

2.2 Frações Contínuas Infinitas

Até o momento vimos que toda fração contínua finita representa um racional, e reciprocamente, toda racional pode ser representado por uma fração contínua finita. Nesta seção, trataremos da expansão de números irracionais em frações contínuas simples.

A seguir, descreveremos o método para construir a expansão de um número irracional em fração contínua, e para tanto, faremos uso de divisões sucessivas.

Seja α um irracional e seja $a_1 = \lfloor \alpha \rfloor$, isto é, a_1 é o maior inteiro menor do que α. Então,

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

onde, $x_1 = \frac{1}{\alpha - a_1}$ é irracional e $x_1 > 1$. Podemos então escrever x_1 da forma

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2},$$

onde $a_2 = \lfloor x_1 \rfloor$ e $x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_2}$ é irracional e $x_2 > 1$ irracional. Repetindo este processo, recursivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + \frac{1}{x_1} \\ x_1 &= a_2 + \frac{1}{x_2} \\ x_2 &= a_3 + \frac{1}{x_3} \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} \\ \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde todos os $a_i's$ $(i \geq 2)$ são inteiros maiores ou iguais a 1 e todos os $x_i's$ $(i \geq 1)$ são irracionais maiores que 1.

Assim, segue imediatamente que a fração contínua de qualquer número irracional é infinita, e que para todo n natural temos

$$\begin{aligned} \alpha = a_1 + \frac{1}{x_1} &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_3}}} \\ &= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \frac{1}{x_n}}}}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\alpha = [a_1, a_2, ..., a_n, x_n]. \tag{2.3}$$

Exemplo: Iremos tomar como exemplo a expanção do irracional $\sqrt{3}$.

Sendo $a_1 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ e

$$\sqrt{3} = a_1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_1},$$

temos

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

consequentemente,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3} + 1}{2}}.$$

Como $a_2 = \lfloor \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} \rfloor = 1$, temos

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{x_2},$$

donde obtemos

$$x_2 = \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \sqrt{3} + 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + x_2}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}.\end{aligned}$$

Como $a_3 = \lfloor \sqrt{3} + 1 \rfloor = 2$, temos

$$\sqrt{3} + 1 = x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3} = 2 + \frac{1}{x_3}.$$

Resolvendo a última equação para x_3 obtemos:

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3} + 1 - 2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Como $x_3 = x_1$ comcluímos que x_4 será igual a x_2 e desta forma, continuando com este processo, iremos obter para a sequência $a_1, a_2, a_3, ...$ os valores $1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...$ Logo a fração contínua infinita representando $\sqrt{3}$ será dada por

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...].$$

O exemplo a seguir mostra a expansão em fração contínua simples infinita de um irracional muito interresante, o número π

Exemplo: Temos que $\pi = 3,1415926535897932....$ Logo, $a_1 = \lfloor \pi \rfloor = 3.$
e

$$\pi = a_1 + \frac{1}{x_1} = 3 + \frac{1}{x_1},$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1} &= 0,1415926535897932...\\ x_1 &= \frac{1}{\pi - 3} = \frac{1}{0,1415926535897932...}\\ x_1 &= 7,06251331041...\\ x_1 &= 7 + 0,06251331041...\end{aligned}$$

Logo, $a_2 = 7$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_2} &= 0,06251331041...\\ x_2 &= \frac{1}{0,06251331041...}\\ x_2 &= 15,9965932606...\\ x_2 &= 15 + 0,9965932606...\end{aligned}$$

Logo, $a_3 = 15$. Assim,

$$\frac{1}{x_3} = 0,9965932606...$$
$$x_3 = \frac{1}{0,9965932606...}$$
$$x_3 = 1,00341838495...$$
$$x_3 = 1 + 00341838495...$$

Logo, $a_4 = 1$

Continuando o processo, encontramos

$$a_5 = 292, \quad a_6 = 1, \quad a_7 = 1, \quad a_8 = 1 \quad a_9 = 2, \quad ....$$

Assim,

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}} = [3, 7, 15, 1, 292, 1, ...].$$

Provaremos adiante (Teorema 2.6) que toda fração contínua infinita representa um irracional, mas antes disso, falaremos um pouco sobre os convergentes de uma fração contínua.

2.3 Convergentes

Vimos anteriormente que qualquer número racional pode ser representado sob a forma de uma fração contínua simples finita. Assim, tomemos um racional $\frac{p}{q}$, cuja expansão em fração contínua é da forma

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ... + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, ...a_{n-1}, a_n],$$

onde a_1 é um inteiro positivo, negativo, ou nulo, e $a_2, a_3, ..., a_n$ são inteiros positivos.

Consideremos as frações

$$c_1 = \frac{a_1}{1},$$
$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2},$$
$$c_3 = a_2 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}},$$
$$\vdots$$
$$c_n = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ... + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}},$$

obtidos pelas expansões das frações contínuas

$$[a_1],\ [a_1, a_2],\ [a_1, a_2, a_3],\ ...,\ [a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n].$$

Estas frações são chamadas, respectivamente, de primeiro, segundo, terceiro,... convergentes da fração contínua $[a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n]$. Sendo o *n-ésimo* convergente igual a própria fração contínua.

Definição 2.1. *Chamamos convergente de ordem i da fração contínua* $[a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$*, o número*

$$c_i = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ... + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i}}}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Em particular, o n-ésimo convergente é $c_n = \dfrac{p}{q}$.

Se considerarmos

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad \text{onde} \quad p_1 = a_1 \quad \text{e} \quad q_1 = 1$$

teremos,

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2} \quad \text{onde} \quad p_2 = a_1 a_2 + 1 \quad \text{e} \quad q_2 = a_2.$$

Calculando c_3, c_4, c_5, obtemos, respectivamente:

$$c_3 = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3} \quad \text{onde} \quad p_3 = a_3 p_2 + p_1 \ \text{ e } \ q_3 = a_3 q_2 + q_1$$
$$c_4 = \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \frac{p_4}{q_4} \quad \text{onde} \quad p_4 = a_4 p_3 + p_2 \ \text{ e } \ q_4 = a_4 q_3 + q_2$$
$$c_5 = \frac{a_5 p_4 + p_3}{a_5 q_4 + q_3} = \frac{p_5}{q_5} \quad \text{onde} \quad p_5 = a_5 p_4 + p_3 \ \text{ e } \ q_5 = a_5 q_4 + q_3.$$

Os números p_i e q_i, tais que $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ são chamados, respectivamente, numerador e denominador de *n-ésimo* convergente. Observando as igualdades acima podemos conjecturar que estes satisfazem as seguintes relações:

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$$
$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}.$$

No teorema abaixo provaremos, por indução, que estas relações se verificam para $i = 3, 4, 5, ..., n$.

Teorema 2.2. *Seja* $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ *o i-ésimo convergente da fração contínua* $[a_1, a_2, ..., a_n]$*. Então, o numerador* p_i *e o denominador* q_i *de* c_i *satisfazem as seguintes relações:*

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \tag{2.4}$$
$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \tag{2.5}$$

para $i = 3, 4, 5, ..., n$*, com as condições iniciais:*

$$p_1 = a_1, \qquad q_1 = 1,$$
$$p_2 = a_2 a_1 + 1, \quad q_2 = a_2.$$

Demonstração. Dos cálculos feitos para c_1, c_2 e c_3, segue que o resultado é válido para $i = 3$. Suponhamos agora que as relações (2.4) e (2.5) se verificam para todo $j \leq i$ com $3 \leq i < n$. Isto significa que

$$c_i = [a_1, a_2, ..., a_i] = \frac{p_i}{q_i} = \frac{a_i p_{i-1} + p_{i-2}}{a_i q_{i-1} + q_{i-2}}. \tag{2.6}$$

Observando que,

$$c_i = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i}}}}$$

e que

$$c_{i+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{a_{i+1}}}}}}$$

vemos que c_{i+1} pode ser obtido de c_i simplesmente pela substituição de a_i por $a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}$. Isto nos diz que se pudermos mostrar que os números p_{i-1}, p_{i-2}, q_{i-1} e q_{i-2} dependem somente dos quocientes parciais $a_1, a_2, ..., a_{i-1}$, poderemos usar (2.6) para obtenção de c_{i+1} pois estamos assumindo, como hipótese de indução, a validade de (2.6) para todo $j \leq i$.

Como

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{a_{i-1} p_{i-2} + p_{i-3}}{a_{i-1} q_{i-2} + q_{i-3}},$$

os números p_{i-1} e q_{i-1} dependem somente dos números a_{i-1} e dos números p_{i-2}, q_{i-2}, p_{i-3} e q_{i-3} os quais dependem dos precedentes $a's$, $p's$ e $q's$. Desta forma p_{i-2}, q_{i-2}, p_{i-1} e q_{i-1} dependem somente dos primeiros $i - 1$ quocintes parciais a_1, a_2, ..., a_{i-1} sendo independentes de a_i. Portanto eles não serão alterados com a substitição de a_i por $a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}$. Podemos, portanto, utilizar (2.6) para a obtenção de c_{i+1} bastando, para isto, substituir a_i por $a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}$:

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= \frac{\left(a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}\right) p_{i-1} + p_{i-2}}{\left(a_i + \dfrac{1}{a_{i+1}}\right) q_{i-1} + q_{i-2}} \\ &= \frac{(a_{i+1} a_i + 1) p_{i-1} + a_{i+1} p_{i-2}}{(a_{i+1} a_i + 1) q_{i-1} + a_{i+1} q_{i-2}} \\ &= \frac{a_{i+1}(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{a_{i+1}(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}} \\ &= \frac{a_{i+1} p_i + p_{i-1}}{a_{i+1} q_i + q_{i-1}} \\ &= \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração por indução. □

Corolário 2.1. *A sequência $\{q_i\}$, é uma sequência monótona crescente de termos positivos.*

Demonstração. Basta observar que $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$ e que a_i $(i \geq 2)$ e q_i $(i \geq 1)$ são todos positivos. □

O teorema a seguir, estabelece uma relação que nos permitirá deduzir, que para todo convergente $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ temos que $(p_i, q_i) = 1$.

Teorema 2.3. *Definindo $p_0 = q_{-1} = 1$ e $p_{-1} = q_0 = 0$, a relação*

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i \tag{2.7}$$

se verifica para todo $i \geq 0$ onde p_i e q_i são, respectivamente, o numerador e o denominador do i-ésimo convergente c_i.

Demonstração. Para $i = 0$ temos $p_0 q_{-1} - p_{-1} q_0 = 1 = (-1)^0$ uma vez que $p_0 = q_{-1} = 1$ e $p_{-1} = q_0 = 0$. Vamos assumir, como hipótese de indução, a validade do resultado (2.7) para algum $i \geq 0$ e mostrar que a mesma relação também se verifica para $i + 1$.

Sabemos, do teorema anterior, que

$$p_{i+1} = a_{i+1} p_i + p_{i-1} \quad \text{e} \quad q_{i+1} = a_{i+1} q_i + q_{i-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} &= (a_{i+1} p_i + p_{i-1}) q_i - p_i (a_{i+1} q_i + q_{i-1}) \\ &= a_{i+1} p_i q_i + p_{i-1} q_i - a_{i+1} p_i q_i - p_i q_{i-1} \\ &= p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} \\ &= (-1)(p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, obtemos

$$p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} = (-1)(-1)^i = (-1)^{i+1}$$

o que conclui a demonstração. □

A relação estabelecida pelo teorema anterior, é conhecida como *Fórmula do Determinante*, uma vez que

$$\begin{vmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{vmatrix} = p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i.$$

Corolário 2.2. *Para todo convergente $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ temos que $(p_i, q_i) = 1$.*

Demonstração. Pelo teorema temos que $p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^i$. Assim, temos que qualquer divisor comum de p_i e q_i deve ser um divisor de 1 ou -1. Logo, o Máximo Divisor Comum de p_i e q_i deve ser igual a 1. □

Os convergentes apresentam propriedades muito interessantes. Reunimos as principáis delas no teorema a seguir.

Teorema 2.4. *A sequência $c_1, c_2, c_3, \ldots$ dos convergentes de uma fração contínua satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \ldots < c_{2i+1}$,

(ii) $c_2 > c_4 > c_6 > \ldots > c_{2i}$,

(iii) $c_{2i+1} < c_{2i+2} < c_{2i}$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.3 temos que

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i$$

a qual é válida independentemente da fração contínua ser finita ou não. Dividindo ambos os lados desta igualdade por $q_i q_{i-1}$ obtemos:

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}}.$$

Como $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$, temos que

$$c_i - c_{i-1} = \frac{(-1)^i}{q_i q_{i-1}}. \tag{2.8}$$

Visto que,

$$c_i - c_{i-2} = \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = \frac{p_i q_{i-2} - p_{i-2} q_i}{q_i q_{i-2}}$$

obtemos, usando o fato de $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ e $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$, que:

$$\begin{aligned} c_i - c_{i-2} &= \frac{(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) q_{i-2} - p_{i-2}(a_i q_{i-1} + q_{i-2})}{q_i q_{i-2}} \\ &= \frac{a_i (p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1})}{q_i q_{i-2}} \\ &= \frac{a_i (-1)^{i-1}}{q_i q_{i-2}} \end{aligned}$$

isto é,

$$c_i - c_{i-2} = \frac{a_i (-1)^{i-1}}{q_i q_{i-2}}. \tag{2.9}$$

De (2.9) obtemos

$$c_{2i+3} - c_{2i+1} = \frac{a_{2i+3}(-1)^{2i+2}}{q_{2i+3} q_{2i+1}} = \frac{a_{2i+3}}{q_{2i+3} q_{2i+1}} > 0$$

e

$$c_{2i+2} - c_{2i} = \frac{a_{2i+2}(-1)^{2i+1}}{q_{2i+2} q_{2i}} = -\frac{a_{2i+2}}{q_{2i+2} q_{2i}} < 0$$

pois a_i $(i \geq 2)$, q_i $(i \geq 1)$ são todos positivos. Assim,

$$c_{2i+1} < c_{2i+3}, \quad \forall i \geq 0 \tag{2.10}$$

donde

$$c_1 < c_3 < c_5 < c_7 < \ldots < c_{2i+1}$$

e

$$c_{2i} > c_{2i+2}, \quad \forall i \geq 1 \tag{2.11}$$

donde

$$c_2 > c_4 > c_6 > c_8 > \ldots > c_{2i}.$$

Isto estabelece os itens (*i*) e (*ii*). Quanto a (*iii*) note que a partir de (2.8) segue que

$$c_{2i+2} - c_{2i+1} = \frac{(-1)^{2i+2}}{q_{2i+2} q_{2i+1}} = \frac{1}{q_{2i+2} q_{2i+1}} > 0$$

donde

$$c_{2i+2} > c_{2i+1}, \quad \forall i \geq 0. \tag{2.12}$$

Logo, combinando (2.11) e (2.12), estabelecemos (*iii*):

$$c_{2i+1} < c_{2i+2} < c_{2i}. \qquad \square$$

As propriedades acima mostram que a sequência de convergentes de índice ímpar forma uma sequência crescente que é limitada superiormente e que a sequência de índice par forma uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Além disso, temos que o valor de uma fração contínua estará situado entre os valores de quaisquer dois convergentes adjacentes (Corolário 2.3 e Teorema 2.5). Assim, os convergentes de índice par proporcionarão uma aproximação por falta enquanto os convergentes de índice ímpar proporcionarão uma aproximação por excesso.

Corolário 2.3. *Nas condições do teorema anterior, sejam* $\{c_{2i+1}\}$ *e* $\{c_{2i}\}$ *as sequências de índices ímpares e pares respectivamente. Então ambas convergem e*

$$\lim_{i\to\infty} c_{2i+1} = \lim_{i\to\infty} c_{2i}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.4, $\{c_{2i+1}\}$ é uma sequência crescente e limitada superiormente. Logo, pelo Teorema 1.2 ela é convergente, digamos

$$\lim_{i\to\infty} c_{2i+1} = l_I.$$

Analogamente, $\{c_{2i}\}$ é uma sequência decrescente e limitada inferiormente, e portanto convergente, digamos

$$\lim_{i\to\infty} c_{2i} = l_P.$$

Agora note que, a partir de (2.8) temos

$$c_{2i+1} - c_{2i} = -\frac{1}{q_{2i+1}q_{2i}}$$

e sendo $\{q_i\}$ uma sequência crescente de termos positivos, segue-se que

$$\lim_{i\to\infty}(c_{2i+1} - c_{2i}) = 0.$$

Assim,

$$l_I = \lim_{i\to\infty} c_{2i+1} = \lim_{i\to\infty} c_{2i} = l_P$$ □

Provaremos no Teorema 2.5 a seguir que, se $\alpha = [a_1, a_2, ...]$, os limites $l_p = l_I$ são, na realidade, iguais a α. Isto nos diz que a sequência de convergentes de índice ímpar fornece uma aproximação por falta para α enquanto a sequência de convergentes de índice par fornece uma aproximação por excesso para α.

Lema 2.1. *Para qualquer número real* α *temos:*

$$[a_1, a_2, ..., a_{i-1}, \alpha] = \frac{\alpha p_{i-1} + p_{i-2}}{\alpha q_{i-1} + q_{i-2}} \tag{2.13}$$

onde $a_1, a_2, a_3, ...$ *é uma sequencia infinita de inteiros positivos com a possível excessão de* a_1 *e as sequências dos* $p_i's$ *e* $q_i's$ *são dados por* (2.4) *e* (2.5)*, isto é,*

$$\begin{aligned} &p_0 = 1, \quad p_{-1} = 0, \quad q_0 = 0, \quad q_{-1} = 1 \\ &p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ &q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Demonstração. Para $n = 1$ o resultado deve ser visto como

$$\alpha = \frac{\alpha p_0 - p_{-1}}{\alpha q_0 - q_{-1}}$$

o qual é verdadeiro pelas condições iniciais.
Para $n = 2$ temos

$$[a_1, \alpha] = \frac{\alpha p_1 + p_0}{\alpha q_1 + q_0} = \frac{\alpha a_1 + 1}{\alpha}$$

o que é verdadeiro uma vez que $[a_1, \alpha] = a_1 + \dfrac{1}{\alpha}$.
Estabelecemos, agora, o resultado por indução. Considerando verdadeiro o resultado para $[a_1, a_2, ..., a_{i-1}, \alpha]$ temos

$$\begin{aligned}[a_1, a_2, ..., a_i, \alpha] &= [a_1, a_2, ..., a_{i-1}, a_i + \frac{1}{\alpha}] \\ &= \frac{(a_i + \frac{1}{\alpha})p_{i-1} + p_{i-2}}{(a_i + \frac{1}{\alpha})q_{i-1} + q_{i-2}} \\ &= \frac{\alpha(a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{\alpha(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}} \\ &= \frac{\alpha p_i + p_{i-1}}{\alpha q_i + q_{i-1}},\end{aligned}$$

finalizando a demonstração. □

Teorema 2.5. *Se α é irracinal e $\{c_i\}$ é a sequência dos convergentes da representação de α como fração contínua, então*

$$\lim_{i \to \infty} c_i = \alpha.$$

Demonstração. Com as notações utilizadas no início da seção anterior temos por (2.3)

$$\alpha = [a_1, a_2, ..., a_i, x_i]$$

onde $x_i = a_{i+1} + \dfrac{1}{x_{i+1}}$, para todo $i \geq 1$. Pelo Lema 2.1 segue-se que

$$\alpha = [a_1, a_2, ..., a_i, x_i] = \frac{x_i p_i + p_{i-1}}{x_i q_i + q_{i-1}}$$

e portanto, pelo Teorema 2.3

$$\begin{aligned}\alpha - c_i &= \frac{x_i p_i + p_{i-1}}{x_i q_i + q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} \\ &= \frac{p_{i-1} q_i - q_{i-1} p_i}{q_i(x_i q_i + q_{i-1})} = \frac{-(p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i)}{q_i(x_i q_i + q_{i-1})} = \frac{-(-1)^i}{q_i(x_i q_i + q_{i-1})} \\ &= \frac{(-1)^{i+1}}{q_i(x_i q_i + q_{i-1})}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Mas sendo $\{q_i\}$ e $\{x_i\}$ duas sequências de termos positivos com $\{q_i\}$ crescente, resulta de (2.14) que

$$\lim_{i \to \infty} (\alpha - c_i) = 0$$

e portanto,

$$\lim_{i \to \infty} c_i = \alpha.$$ □

O exemplo a seguir ilustra os fatos estabelecidos acima.

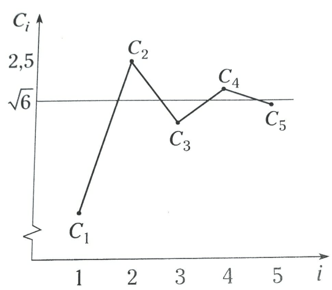
Exemplo: Temos que

$$\sqrt{6} = [2, \overline{2, 4}].$$

Assim, os cinco primeiros convergentes do irracional $\sqrt{6}$ são

$$c_1 = [2] = 2$$
$$c_2 = [2, 2] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$
$$c_3 = [2, 2, 4] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}} = \frac{22}{9} = 2,4444$$
$$c_4 = [2, 2, 4, 2] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{49}{20} = 2,45$$
$$c_5 = [2, 2, 4, 2, 4] = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}}}} = \frac{218}{89} = 2,4494.$$

Neste exemplo é possível notar que o convergente c_2 apresenta melhor aproximação para $\sqrt{6}$ do que o primeiro convergente c_1. O terceiro convergente c_3 apresenta uma melhor aproximação do que o segundo convergente c_2 e assim por diante. Podemos concluir que os convergentes c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 da fração contínua que representa $\sqrt{6}$ formam uma sucessão de números racionais que são aproximações cada vez melhores de $\sqrt{6}$. O gráfico a seguir ilustra os cinco primeiros convergentes da fração contínua simples infinita que representa o irracional $\sqrt{6}$.



Se observa que os convergentes correspondentes aos índices ímpares são menores que $\sqrt{6}$, e os convergentes correspondentes aos índices pares são maiores que $\sqrt{6}$, isto é

$$c_1 < c_3 < c_5 < \sqrt{6} < c_4 < c_2.$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte

Teorema 2.6. *Toda fração contínua simples infinita* $[a_1, a_2, a_3, ...]$ *representa um irracional. Reciprocamente, todo irracional é representado por uma fração contínua simples infinita.*

Demonstração. Escrevendo $\alpha = [a_1, a_2, a_3, ...]$ observamos pelo Teorema 2.4 que α está entre c_i e c_{i+1} e, portanto, $0 <\mid \alpha - c_i \mid<\mid c_{i+1} - c_i \mid$, $\forall i \geq 1$.
Multiplicando por q_i esta desigualdade e utilizando (2.8) temos

$$0 < |\alpha q_i - p_i| < |c_{i+1} q_i - c_i q_i| < \frac{1}{q_{i+1}}.$$

Supondo α racional, isto é, $\alpha = \frac{a}{b}$, a e b inteiros com $b > 0$, a desigualdade acima, após multiplicarmos por b nos fornece

$$| aq_i - bp_i |< \frac{b}{q_{i+1}}.$$

Como a sequência dos q_i é crescente podemos escolher i suficientemente grande de forma que $\frac{b}{q_{i+1}} < 1$. Dessa forma o inteiro $aq_i - bp_i$ estará entre -1 e 1 e portanto $aq_i - bp_i = 0$. Assim, $\alpha = \frac{a}{b} = c_i = [a_1, ..., a_i]$ contrariando o fato de $\alpha = [a_1, a_2, ...]$ ser uma fração contínua infinita. Portanto, α deve ser irracional.

A recíproca segue imediatamente da discussão feita no início da seção anterior. □

O resultado a seguir será utilizado na caracterização das frações periódicas do capítulo seguinte.

Teorema 2.7. *Todo convergente $c_i = \frac{p_i}{q_i}$ de α satisfaz*

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2}.$$

Demonstração. Por (2.2) temos que $a_{n+1} < x_n$. Este fato, juntamente com (2.14), nos fornece

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| = \frac{1}{q_i(x_i q_i + q_{i-1})} < \frac{1}{q_i(a_{i+1}q_i + q_{i-1})}$$

e usando (2.5) substituímos $a_{i+1}q_i + q_{i-1}$ por q_{i+1} obtendo

$$\left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i q_{i+1}} < \frac{1}{q_i^2}$$

pois $q_i < q_{i+1}$ uma vez que a sequência dos $q_i's$ é estritamente crescente. □

Finalizaremos este capítulo apresentando o cálculo de alguns convergentes do número $\sqrt{2}$.

Exemplo 1: Os seis primeiros convergentes de $\sqrt{2}$ são:

$$c_1 = \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 \quad (1^{\underline{o}}\ \textit{convergente})$$

$$c_2 = \sqrt{2} = 1,4142136 = 1 + 0,4142136 = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{0,4142136}} = 1 + \frac{1}{2,4142136}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (2^{\underline{o}}\ \textit{convergente})$$

$$c_3 = 1 + 0,4142136 = 1 + \frac{1}{2,4142136} = 1 + \frac{1}{2 + 0,4142136} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142133}}$$

$$\approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} \quad (3^{\underline{o}}\ \textit{convergente})$$

$$c_4 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142133}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{0,4142133}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,41421151}}}$$

$$\approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}} = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{12} \quad (4^{\underline{o}}\ \textit{convergente})$$

$$c_5 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2,4142151}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,4142151}}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2,4142046}}}} \approx \frac{41}{29} \quad (5^{\underline{o}}\ \textit{convergente})$$

$$c_6 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2,1442046}}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + 0,4142046}}}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2,4142658}}}}}} \approx \frac{99}{70} \quad (6^{\underline{o}}\ \textit{convergente}).$$

Podemos observar que, nos seis convergentes calculados, existe uma repetição do algarismo 2. Isto não é por acaso! No capítulo a seguir iremos verificar, de modo geral, que existe uma caracterização para que este fato ocorra.

Capítulo 3

Frações Contínuas Periódicas

Neste capítulo iremos discorrer sobre a teoria das frações contínuas periódicas demonstrando os principais resultados, os quais nos darão uma caracterização para tais frações.

Definição 3.1. *Uma fração contínua* $[a_1, a_2, a_3, ...]$ *é dita periódica se existirem* $h, k \in \mathbb{N}$, *tais que*

$$a_i = a_{h+i}, \quad \forall i \geqslant k.$$

Neste caso temos,

$$\begin{aligned}
a_k &= a_{h+k} \\
a_{k+1} &= a_{h+(k+1)} \\
a_{k+2} &= a_{h+(k+2)} \\
&\vdots \\
a_{k+(h-1)} &= a_{h+(k+(h-1))} = a_{2h+k-1} \\
a_k = a_{k+h} &= a_{h+(k+h)} = a_{2h+k} \\
a_{k+1} = a_{k+(h+1)} &= a_{h+(k+h+1)} = a_{2h+(k+1)} \\
a_{k+2} = a_{k+(h+2)} &= a_{h+(k+h+2)} = a_{2h+(k+2)} \\
&\vdots \\
a_{k+(h-1)} = a_{k+(2h-1)} &= a_{h+(k+2h-1)} = a_{(2h+k)+(h-1)} \\
a_k = a_{k+(2h)} &= a_{h+(k+2h)} = a_{3h+k} \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

Assim, a fração contínua $[a_1, a_2, a_3, ...]$ pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
&[a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+(h-1)}, a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+(h-1)}, ...] \\
&= [a_1, a_2, ..., a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+(h-1)}}]
\end{aligned}$$

onde a barra sobre $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{k+(h-1)}$ indica que o bloco de inteiros é repetido indefinidamente. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
[\overline{2, 3}] &= [2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, ...] \\
[4, 1, \overline{2, 3}] &= [4, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, ...].
\end{aligned}$$

O lema a seguir será utilizado no Teorema 3.1

Lema 3.1. $\dfrac{q_{k-1}}{q_{k-2}}$ *é uma fração irredutível, isto é,* $(q_{k-1}, q_{k-2}) = 1$, $\forall k \geq 2$.

Demonstração. Com efeito, se $d = (q_{k-1}, q_{k-2})$ então, $d|q_{k-1}$ e $d|q_{k-2}$. Logo, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $q_{k-1} = k_1 d$ e $q_{k-2} = k_2 d$. Por outro lado, como $p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1} = (-1)^{k-1}$,
segue que

$$d(k_2 p_{k-1} - k_1 p_{k-2}) = (-1)^{k-1}$$

e portanto, $d \mid \pm 1$. Assim, sendo $d > 0$ devemos ter $d = 1$. □

Teorema 3.1. *Seja α um irracional e suponha que sua fração contínua $[a_1, a_2, a_3, ...]$ seja periódica. Então, α é raiz de um polinômio de 2º grau com coeficientes inteiros.*

Demonstração. Por hipótese, existem $h, k \in \mathbb{N}$ tais que,

$$a_i = a_{h+i}, \quad \forall i \geq k \tag{3.1}$$

e

$$\alpha = [a_1, a_2, ..., a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, ..., a_{k+(h-1)}}]. \tag{3.2}$$

Como vimos em (2.3) temos para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha = [a_1, a_2, ..., a_n, x_n]$$

onde $x_n = a_{n+1} + \dfrac{1}{x_{n+1}}$, e portanto, pelo Lema 2.1 temos

$$\alpha = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}, \quad (n \geq 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\alpha x_n q_{n-1} + \alpha q_{n-2} = x_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \Leftrightarrow \\ &x_n(\alpha q_{n-1} - p_{n-1}) = p_{n-2} - \alpha q_{n-2} \end{aligned}$$

donde

$$x_n = \frac{p_{n-2} - \alpha q_{n-2}}{\alpha q_{n-1} - p_{n-1}}, \quad (n \geq 1). \tag{3.3}$$

A partir de (3.1) obtemos

$$x_i = x_{h+i}, \quad \forall i \geq k$$

e portanto, de (3.3) segue que

$$\begin{aligned} &\frac{p_{k-2} - \alpha q_{k-2}}{\alpha q_{k-1} - p_{k-1}} = \frac{p_{h+k-2} - \alpha q_{h+k-2}}{\alpha q_{h+k-1} - p_{h+k-1}} \Leftrightarrow \\ &(p_{k-2} - \alpha q_{k-2})(\alpha q_{h+k-1} - p_{h+k-1}) = (\alpha q_{k-1} - p_{k-1})(p_{h+k-2} - \alpha q_{h+k-2}) \Leftrightarrow \\ &p_{k-2}q_{h+k-1}\alpha - p_{k-2}p_{h+k-1} - q_{k-2}q_{h+k-1}\alpha^2 + q_{k-2}p_{h+k-1}\alpha = \\ &q_{k-1}p_{h+k-2}\alpha - q_{k-1}q_{h+k-2}\alpha^2 - p_{k-1}p_{h+k-2} + p_{k-1}q_{h+k-2}\alpha \Leftrightarrow \\ &a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \end{aligned}$$

onde

$a = q_{k-1}p_{h+k-2} - q_{k-2}q_{h+k-1}$,

$b = p_{k-2}q_{h+k-1} + q_{k-2}p_{h+k-1} - q_{k-1}p_{h+k-2} - p_{k-1}q_{h+k-2}$,

$c = p_{k-1}p_{h+k-2} - p_{k-2}q_{h+k-1}$.

Como a, b e c são inteiros, o resultado estará provado se mostramos que $a \neq 0$. Ora, sendo $q_{h+k-2} > q_{k-2}$ pois $\{q_i\}$ é estritítamente crescente, segue do Lema 3.1 que

$$\frac{q_{k-1}}{q_{k-2}} \neq \frac{q_{h+k-1}}{q_{h+k-2}}$$

e consequentemente,

$$q_{k-1}q_{h+k-2} - q_{k-2}q_{h+k-1} \neq 0$$

estabelecendo o resultado. □

Teorema 3.2. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1, α é uma irracionalidade quadrática, isto é, α é um irracional da forma*

$$\alpha = \frac{r + \sqrt{s}}{t} \quad \textit{onde} \quad r, s, t \in \mathbb{Z}, \quad s > 0 \quad \textit{e} \quad t \neq 0.$$

Demonstração. Seja $y = [\overline{a_k, ..., a_{k+(h-1)}}]$ a parte puramente periódica de α. Então,

$$y = [a_k, ..., a_{k+(h-1)}, y]$$

e pelo Lema 2.1

$$[a_k, ..., a_{k+(h-1)}, y] = \frac{yp_{k+(h-1)} + p_{k+(h-2)}}{yq_{k+(h-1)} + q_{k+(h-2)}}$$

donde

$$y = \frac{ym_1 + m_2}{yn_1 + n_2}, \tag{3.4}$$

onde

$$m_1 = p_{k+(h-1)} \quad e \quad n_1 = q_{k+(h-1)} > 0,$$

$$m_2 = p_{k+(h-2)} \quad e \quad n_2 = q_{k+(h-2)} > 0.$$

Assim, segue de (3.4) que

$$y^2 n_1 + yn_2 = ym_1 + m_2 \Leftrightarrow n_1 y^2 + (n_2 - m_1)y - m_2 = 0.$$

Sendo $y > 0$ e irracional (pois sua fração contínua é infinita) o discriminante

$$\Delta = (n_2 - m_1)^2 + 4n_1 m_2$$

deve ser estritamente positivo, e como

$$y = \frac{(m_1 - n_2) \pm \sqrt{(n_2 - m_1)^2 + 4n_1 m_2}}{2n_1}$$

segue que

$$y = \frac{r + \sqrt{s}}{t} \tag{3.5}$$

para alguns inteiros r, s e t, tais que $s > 0$ e $t \neq 0$. Portanto, y é uma irracionalidade quadrática.

Mostraremos a seguir que α é também é uma irracionalidade quadrática.

De fato, temos

$$\alpha = [a_1, a_2, ..., a_{k-1}, y] = \frac{yp_{k-1} + p_{k-2}}{yq_{k-1} + q_{k-2}}$$

pelo Lema 2.1.

Por outro lado, existem $r, s, t \in \mathbb{Z}$ com $s > 0$ e $t \neq 0$, tais que

$$y = \frac{r + \sqrt{s}}{t}.$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(\frac{r+\sqrt{s}}{t})p_{k-1} + p_{k-2}}{(\frac{r+\sqrt{s}}{t})q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{(r+\sqrt{s})p_{k-1} + p_{k-2}t}{(r+\sqrt{s})q_{k-1} + q_{k-2}t} \\
&= \frac{(rp_{k-1} + p_{k-2}t) + p_{k-1}\sqrt{s}}{(rq_{k-1} + q_{k-2}t) + q_{k-1}\sqrt{s}} \\
&= \frac{((rp_{k-1} + p_{k-2}t) + p_{k-1}\sqrt{s})((rq_{k-1} + q_{k-2}t) - q_{k-1}\sqrt{s})}{(rq_{k-1} + q_{k-2}t) - q_{k-1}^2 s} \qquad (3.6) \\
&= \frac{m}{n}
\end{aligned}$$

onde, m é o numerador e n o denominador de (3.6).

A seguir, provaremos algumas afirmações sobre os inteiros m e n.

Afirmação 1. $n \neq 0$.

De fato, se fosse $n = 0$ então, como $q_{k-1} > 0$ teríamos

$$s = \left(\frac{rq_{k-1} + tq_{k-2}}{q_{k-1}}\right)^2$$

e portanto,

$$y = \frac{r + \frac{rq_{k-1} + tq_{k-2}}{q_{k-1}}}{t} = \frac{2rq_{k-1} + tq_{k-2}}{tq_{k-1}}$$

seria um número racional, o que é absurdo pois y é irracional. Concluímos, portanto, que $n \neq 0$.

Afirmação 2. Existem inteiros m_1 e m_2 tais que $m_2 > 0$ e $m = m_1 + (-1)^{k-1}\sqrt{m_2}$ ou $m = m_1 + (-1)^k\sqrt{m_2}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
m &= ((rp_{k-1} + p_{k-2}t) + p_{k-1}\sqrt{s})((rq_{k-1} + q_{k-2}t) - q_{k-1}\sqrt{s}) \\
&= (rp_{k-1} + p_{k-2}t)(rq_{k-1} + q_{k-2}t) - p_{k-1}q_{k-1}s + [p_{k-1}(rq_{k-1} + q_{k-2}t) - q_{k-1}(rp_{k-1} + p_{k-2}t)]\sqrt{s} \\
&= (rp_{k-1} + p_{k-2}t)(rq_{k-1} + q_{k-2}t) - p_{k-1}q_{k-1}s + (p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})t\sqrt{s} \\
&= (rp_{k-1} + p_{k-2}t)(rq_{k-1} + q_{k-2}t) - p_{k-1}q_{k-1}s + (-1)^{k-1}t\sqrt{s}.
\end{aligned}$$

Assim, se $t > 0$ teremos

$$m = m_1 + (-1)^{k-1}\sqrt{t^2 s}$$

e se $t < 0$ teremos

$$m = m_1 + (-1)^k\sqrt{t^2 s}.$$

Definindo $m_2 = t^2 S$, o resultado está provado.

Voltando a demonstração e supondo $t > 0$ (o caso $t < 0$ é análogo) segue imediatamente das Afirmações 1 e 2 acima, que

$$k \quad \text{ímpar} \Rightarrow \alpha = \frac{m}{n} = \frac{m_1 + \sqrt{m_2}}{n},$$

e

$$k \quad \text{par} \Rightarrow \alpha = \frac{m}{n} = \frac{m_1 - \sqrt{m_2}}{n} = \frac{(-m_1) + \sqrt{m_2}}{(-n)}$$

onde m_1, n e $m_2 \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ e $m_2 > 0$. Mostramos portanto, que α é uma irracionalidade quadrática, finalizando a demostração. □

Observação: Na demonstração acima, em (3.5)

$$\text{se} \quad y = \frac{(m_1 - n_2) + \sqrt{\Delta}}{2n_1}, \quad \text{então} \quad y = \frac{r + \sqrt{s}}{t} \quad \text{onde} \quad r = m_1 - n_2, \ s = \Delta > 0, \quad t = 2n_1 > 0$$

$$\text{se} \quad y = \frac{(m_1 - n_2) - \sqrt{\Delta}}{2n_1}, \quad \text{então} \quad y = \frac{r + \sqrt{s}}{t} \quad \text{onde} \quad r = n_2 - m_1, \ s = \Delta > 0, \quad t = -2n_1 > 0.$$

Exemplo: Seja α um irracional, cuja representação em fração contínua é periódica e dada por $\alpha = [5, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, ...] = [5, 2, \overline{1, 2, 2}]$. Segue do teorema acima que α é uma irracionalidade quadrática. Podemos de fato, determiná-la

Seja $y = [\overline{1, 2, 2}]$. Então

$$\alpha = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
y &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{2y+1}{y}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{y}{2y+1}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5y+2}{2y+1}} = 1 + \frac{2y+1}{5y+2} = \frac{7y+3}{5y+2} \\
y &= \frac{7y+3}{5y+2} \Rightarrow 5y^2 - 5y - 3 = 0.
\end{aligned}$$

Assim,

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{10}.$$

Como $y > 0$, temos que $y = \dfrac{5 + \sqrt{37}}{10}$. Portanto,

$$\alpha = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{y}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{5 + \sqrt{37}}{10}}} = \frac{643 + \sqrt{885}}{126}.$$

Estabeleceremos agora, a recíproca dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Teorema 3.3. *Se α é uma irracionalidade quadrática, então a fração contínua de α é periódica.*

Demonstração.
Afirmação 1. Existem inteiros a, b, c tais que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ com $b^2 - 4ac > 0$ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional.

Começamos observando que se α é uma irracionalidade quadrática, então existem inteiros a, b e c tais que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, com $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional (basta tomar $a = t^2$, $b = -2rt$ e $c = r^2 - s$). Por outro lado, como feito na demonstração do Teorema 3.1, temos

$$\alpha = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

e daí,

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(\frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}\right) + c = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x_n p_{n-1} + p_{n-2})^2 + b(x_n p_{n-1} + p_{n-2})(x_n q_{n-1} + q_{n-2}) + c(x_n q_{n-1} + q_{n-2})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow A_n x_n^2 + B_n x_n + C_n = 0 \end{aligned}$$

onde
$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2$,
$B_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}$,
$C_n = ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2$.
Afirmação 2. Existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|A_n| \leq M, \ \ |B_n| \leq M, \ \ \text{e} \ \ |C_n| \leq M,$$

para todo $n \geq 1$.

De fato, como $p_{-1} = q_0 = 0$, $p_0 = q_{-1} = 1$, temos

$$A_1 = a \quad \text{e} \quad C_1 = c \tag{3.7}$$

Para $n \geq 2$ temos $q_{n-1} \geq 1$ portanto,

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ &= q_{n-1}^2\left(a\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + c\right) \\ &= aq_{n-1}^2\left(\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\left(\beta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right) \end{aligned}$$

onde α e β são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$. Além disso, pelo Teorema 2.7, segue que

$$\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2} \leq 1$$

donde

$$\begin{aligned} |A_n| &\leq |a|q_{n-1}^2\left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\left|\beta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \\ &\leq |a|\left|\beta - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \\ &\leq |a|\left\{|\beta - \alpha| + \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|\right\} \\ &\leq |a|\{|\beta - \alpha| + 1\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim, observando que $C_n = A_{n-1}$ para $n \geq 2$, resulta imediatamente de (3.7) e (3.8) que

$$|A_n| \leq M_1 \quad \text{e} \quad |C_n| \leq M_1 \quad (n \geq 1)$$

onde $M_1 = max\{|a|(1 + |\beta - \alpha|), |c|\}$. Quanto a B_n, observe que para $N \geq 1$

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(b^2 - 4ac) = [(-1)^{n-1}]^2(b^2 - 4ac) = b^2 - 4ac.$$

Assim, pelo Teorema 2.3

$$\begin{aligned} B_n^2 &= 4A_nC_n + b^2 - 4ac \\ &\leq 4M_1^2 + b^2 - 4ac \end{aligned}$$

donde

$$|B_n| \leq M_2$$

onde $M_2 = \sqrt{4M_1^2 + b^2 - 4ac}$. Definindo $M = M_2$ (pois $M_2 \geq M_1$) segue que

$$|A_n| \leq M, \quad |B_n| \leq M, \quad \text{e} \quad |C_n| \leq M,$$

para todo $n \geq 1$.

Portanto, existem apenas um número finito de equações

$$A_nx^2 + B_nx + C_n = 0,$$

e consequentemente um númeor finito de valores (distintos) dos x_n. Se $x_1, ..., x_r$ forem tais valores, então $a_1, ..., a_r$ serão os valores distintos dos a_n. Assim, teremos necessariamente $a_i = a_{h+i}$ $(i \geq k)$, para alguma escolha de $h \in \mathbb{N}$ e de $k \in \mathbb{N}$. Isto mostra que a fração contínua de α é periódica, finalizando a demonstração. □

A partir da demonstração acima, obtemos o importante

Corolário 3.1. *Se um número irracional α for raíz de um polinômio de 2º grau com coeficientes inteiros, então sua fração contínua é periódica.*

Os resultados desta seção podem ser resumidos no seguinte teorema.

Teorema 3.4. *A fração contínua (infinita) que representa um irracional α é periódica se, e somente se, α for raiz de um polinômio de 2º grau com coeficientes inteiros. Além disso, α é uma irracionalidade quadrática.*

Exemplo: Todo irracional da forma $\sqrt{d}$ com $d \in \mathbb{Z}$ é uma irracionalidade quadrática, e portanto sua representação em fração contínua é periódica. Alguns deles são $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, e etc.

Exemplo: Solução da equação $x^2 = ax + 1$, $a > 0$.

Se $a > 0$, a equação $x^2 = ax + 1$ possui uma raiz positiva x, a qual satisfaz

$$x = a + \frac{1}{x}.$$

Assim,

$$x = a + \frac{1}{x} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{x}} = \ldots = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ddots}}}$$

de modo que $x = [a, a, a, ...]$ é representada por uma fração contínua puramente periódica. Por exemplo, se $a = 2$, a raiz positiva de $x^2 = 2x + 1$ é $\sqrt{2} + 1$, e portanto $\sqrt{2} + 1 = [2, 2, 2, ...]$, ou seja

$$1 + \sqrt{2} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}.$$

Logo,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

reobtendo o resultado $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, ...]$.

Observe que no exemplo acima a fração contínua do irracional $\sqrt{2} + 1$ é puramente periódica. Um estudo detalhado deste fato pode ser encontrado nas referências [7] e [8].

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações das frações contìnuas, fazendo também uma relação com outros temas da matemática. Com isto, o professor de matemática tem a possibilidade de acrescentar esta teoria em diversos momentos de suas aulas de Matemática.

4.1 A Sequência de Fibonacci

A Sequência de Fibonacci é uma das mais conhecidas na matemática, ela foi descoberta pelo matemático italiano *Leonardo de Pisa (1175 - 1250)* também conhecido como *Fibonacci*. Em 1202, ele escreveu seu famoso livro chamado *Liber Abaci*, no qual aparece, pela primeira vez, a Sequência de Fibonacci, decorrente do resultado de um problema matemático sobre a criação de coelhos.

O problema da reprodução dos coelhos: Suponha que um casal de coelhos demore dois meses para procriar. A partir daí, a cada mês ele produz um novo casal de coelhos. Começando no 1º mês com um único casal, qual é o número de casais de coelhos no mês n?
Resolução:
Um homem colocou um casal de coelhos jovens em um local cercado.
No primeiro mês temos apenas um casal de coelhos jovens.
No segundo mês temos um casal de coelhos adultos, que está no período fértil.
No terceiro mês temos dois casais de coelhos, um adulto e um jovem.
No quarto mês temos três casais de coelhos, dois adultos e um jovem.
No quinto mês temos cinco casais de coelhos, três adultos e dois jovens.
No sexto mês temos oito casais de coelhos, cinco adultos e três jovens.
No sétimo mês temos treze casais de coelhos, oito adultos e cinco jovens.
No oitavo mês temos vinte e um casais de coelhos, treze adultos e oito jovens.
No nono mês temos trinta e quatro casais de coelhos, vinte e um adultos e treze jovens.
No décimo mês temos cinquenta e cinco casais de coelhos, trinta e quatro adultos e vinte e um jovens.
No décimo primeiro mês temos oitenta e nove casais de coelhos, cinquenta e cinco adultos e tinta e quatro jovens.
No décimo segundo mês temos cento e quarenta e quatro casais de coelhos, oitenta e nove adultos e cinquenta e cinco jovens.

Notou-se que, o número de casais de coelhos em determinado mês, é a soma dos casais de coelhos existentes nos dois meses anteriores a este. Temos assim a sequência de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 114, ...$$

De um modo geral, vamos considerar (F_n) a sequência que corresponde a quantidade de casal de coelhos no mês n. Os dois primeiros termos da sequência são $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$, pois o casal não se reproduz até o segundo mês. Assim, em cada mês n, com $n \geq 3$, teremos os casais presentes no mês anterior, mais um número de novos filhotes correspondentes aos casais maduros, mas estes já estavam dois meses antes. Logo, para $n \geq 3$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

onde $F1 = F2 = 1$.

Iremos agora apresentar como os números desta sequência podem estabelecer relações com as frações contínuas.

Agora, vamos considerar as frações $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ a seguir formadas pelos números de Fibonacci. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{F_2}{F_1} &= \frac{1}{1} \\
\frac{F_3}{F_2} &= \frac{2}{1} = 1 + \frac{1}{1} \\
\frac{F_4}{F_3} &= \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} \\
\frac{F_5}{F_4} &= \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}
\end{aligned}$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{1}}}}}$$

Temos assim que o limite dos quocientes $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ pode ser representada por uma fração contínua infinita, puramente periódica, dada por

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{1}}}}} = [1, 1, 1, 1, ...]. \tag{4.1}$$

Portanto, podemos considerar que cada uma das frações $\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_2}, \frac{F_4}{F_3}, \frac{F_5}{F_4}, \frac{F_6}{F_5}, ...$ correspondem aos convergentes da fração contínua (4.1).

Logo, quanto maior tomarmos este convergente, melhor será a aproximação referente ao valor da fração contínua $[1, 1, 1, 1, ...]$. Assim, temos

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$$
$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$$
$$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} = 1,6666...$$
$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$$
$$\vdots$$
$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} = 1,61818..$$
$$\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89} = 1,6179775...$$
$$\frac{F_{13}}{F_{12}} = \frac{233}{144} = 1,6180555...$$
$$\vdots$$

Isto nos indica que as razões formadas pelos números da sequência de Fibonacci se aproximam do número $1,6180339$ o qual representa a *Razão Áurea* denotada pela letra grega Φ (*Phi*).

Observe que a Razão Áurea é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, isto é,

$$\Phi = x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803...$$

Portanto, x é uma irracionalidade quadrática pois vimos que sua fração é (puramente) periódica. Logo

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{1}}}}} = [1, 1, 1, 1, ...].$$

4.2 Construção do Calendário Gregoriano

Quantos dias tem um ano? Uma boa resposta é 365. No entanto, os astrônomos afirmam que a Terra completa sua órbita ao redor do Sol em aproximadamente 365,2422199 dias o que equivale a 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos. Sendo assim, um calendário preciso, não ser organizado com o mesmo número de dias todos os anos, se ele estiver sincronizado com as estações do ano. Se tivéssemos 365 ou 366 dias por ano, as estações acabariam se desequilibrando com a agenda.

Na história, existem vários tipos de calendário que foram incorporados por várias civilizações no decorrer dos tempos. O calendário que usamos hoje é o gregoriano. Este calendário é o mais usado no mundo atualmente, criado na Europa em 1582, por iniciativa do papa Gregório XIII(1502-1585), em substituição ao calendário juliano. O calendário gregoriano tem 365 dias na maior parte dos anos, nos demais ele possui 366 dias, estes são considerados os anos bissextos. A partir daí, podemos perguntar quantas vezes devemos ter estes anos bissextos e como este resultado pode ser obtido. Para entender a solução deste problema faremos uso das frações contínuas, verificando a sua relação com o calendário gregoriano, e a distribução dos anos bissextos.

Como visto ateriormente, um ano consiste de aproximadamente 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos o que equivale a 365,242199 dias, este é chamado de ano trópico, aquele que marca as estações. O calendário Juliano, estabelecido em 45 a.C., considera a aproximação 1 ano = 365 dias 6 horas = 365, 25 dias, ou seja, havendo uma diferença de cerca de 11 minutos. Esta diferença, em cem anos, causava um desvio de 18h, 43min e 20s. Esta aproximação acabou gerando um problema, pois as estações reais haviam retrocedido treze dias em relação ao calendário Juliano. Em 1582, o papa Gregório III convocou sábios para resolver este problema. Desde 45 a.C. até 1582, se passaram 1627 anos. O desvio acumulado desde então era de 12dias, 16h, 36min e 38s. Para tal, principiou-se em se calcular o desvio proporcionado para um dia. Se em 1 ano o desvio é de 11 min e 14s (674 s), então um dia proporciona o desvio dado por 128,19 anos. Assim, ocorre aproximadamente desvio de 128 anos para cada dia, ou seja, de cerca de 3 dias em cada 400 anos. Isto provocou uma pequena alteração na intercalação de três anos de 365 dias e um ano de 366 dias, que já era própria do calendário juliano. A retirada dos três dias seguiu a regra usual: os anos múltiplos de 100 deixariam de ser bissextos, exceto pelos múltiplos de 400. Enquanto a duração média do ano Juliano era de 365 dias e 6h, com a retirada de três dias do calendário gregoriano, o valor passou a ser $365\frac{97}{400}$ dias = 365, 242500 dias = 365 dias, 5 horas, 49 min e 12 s .O que ainda causa uma diferença de cerca de 26 segundos do valor real. A duração média de 1 ano = 365 dias, 5 horas, 48 min e 46 s = 365,242199 dias. Daí, obtemos a fração

$$\frac{5h48min46s}{1dia} = \frac{20926}{86400} = \frac{10463}{43200}.$$

Fazendo uso do algorítmo de Euclides, temos

$$\begin{aligned}
&43200 = 4 \cdot 10463 + 1348\\
&10463 = 7 \cdot 1348 + 1027\\
&1348 = 1 \cdot 1027 + 321\\
&1027 = 3 \cdot 321 + 64\\
&321 = 5 \cdot 64 + 1\\
&64 = 1 \cdot 64.
\end{aligned}$$

A partir daí, obteremos os primeiros convergentes da fração contínua que representa a duração do ano. Para tanto, será omitida a parte inteira, uma vez que já sabemos que no ano há 365 dias inteiros.

a_i	4	7	1	3	5	64
43200	10463	1348	1027	321	64	1
1348	1027	321	64	1	0	

Cada linha produz uma solução para o problema do calendário. Por exemplo, a primeira linha atribui ao ano uma duração aproximada de $365\frac{1}{4}$ dias. Esta duração, na prática, é alcançada se considerarmos um ano em cada 4 bissexto. A terceira linha indica, com regra, a duração do ciclo (ou período) e a segunda linha o número de anos bissextos a incluir durante esse período. Por exemplo,a segunda coluna produz a solução: 7 anos bissextos em um ciclo de 29 anos. Isso corresponde à duração média do ano de $365\frac{7}{29}$ dias. Este resultado, trata-se de uma solução mais exata que $365\frac{1}{4}$ Asssim, podemos estabelecer as seguintes relações:

A fração contínua correspondente a *1 ano = 365 dias, 5 horas, 48 min e 46s* é $[365, 4, 7, 1, 3, 5, 64]$.
O 1º. convergente é 365 dias.
O 2º. convergente é dado por: $365\frac{1}{4}$ dias, própria do calendário Juliano.
O 3º. convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}} = 365\frac{7}{29}$ dias, ou seja, 7 anos bissextos a cada 29 anos.
O 4º. convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1}}} = 365\frac{8}{33}$ dias, ou seja, 8 anos bissextos a cada 33 anos.
O 5º. convergente é dado por: $365\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}} = 365\frac{31}{128}$ dias, ou seja, 31 anos bissextos a cada 128 anos.

Logo, ao total dos 400 anos, existem aproximadamente 97 anos bissextos.

$$\begin{aligned}
&31 \textit{ anos bissextos} \rightarrow 128 \textit{ anos do calendário}\\
&x \qquad\qquad\qquad\quad \rightarrow 400 \textit{ anos do calendário}\\
&\Rightarrow x = 96,875 \approx 97 \textit{ anos bissextos}.
\end{aligned}$$

Apesar de na época do papa Gregoriano III as frações contínuas ainda não serem um assunto estabelecido, podemos perceber que existe uma grande relação desta teoria, tornando este fato uma incrível coincidência.

4.3 Um Método para Calcular Logaritmos

Para calcular o logaritmo $\log_{b_0} b_1$ onde $1 < b_1 < b_0$, determinamos duas sequências

$$b_2,\ b_3,\ b_4,\ ...$$

e

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ ... \quad n_i \text{ inteiros positivos}$$

satisfazendo as seguintes relações:

$$\begin{array}{lll}
b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1} & & b_2 = \dfrac{b_0}{b_1^{n_1}}\\
b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1} & & b_3 = \dfrac{b_1}{b_2^{n_2}}\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \\
b_k^{n_k} < b_{k-1} < b_k^{n_k+1} & & b_{k+1} = \dfrac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}}\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & &
\end{array} \tag{4.2}$$

Tais sequências são construídas da sequinte maneira: como $1 < b_1 < b_0$, existe um inteiro $n_1 > 0$, tal que

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}.$$

Assim,

$$b_0 = b_1^{n_1+\frac{1}{x_1}} \tag{4.3}$$

para algum $x_1 > 1$. Definindo

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}}, \tag{4.4}$$

temos $1 < b_2 < b_1$, de modo que existe um inteiro $n_2 > 0$ tal que

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}.$$

Assim,

$$b_1 = b_2^{n_2+\frac{1}{x_2}} \tag{4.5}$$

para algum $x_2 > 1$. Definindo então

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$$

de modo que $1 < b_3 < b_2$ e existe um inteiro $n_2 > 0$ tal que

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1}$$

donde

$$b_2 = b_3^{n_3+\frac{1}{x_3}}$$

para algun $x_3 > 1$. Repetindo este procedimento, obtemos as sequências $\{b_i\}$ e $\{n_i\}$ satisfazendo (4.2).

Agora note que, a partir de (4.3) e (4.4) obtemos

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}} = b_1^{\frac{1}{x_1}}$$

donde

$$b_1 = b_2^{x_1}. \tag{4.6}$$

Logo, segue de (4.5) e (4.6) que

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2}.$$

Procedendo analogamente obteremos

$$x_2 = n_3 + \frac{1}{x_3}$$

de modo geral,

$$x_k = n_{k+1} + \frac{1}{x_{k+1}} \quad (k \geq 1). \tag{4.7}$$

Portanto, segue de (4.3) e (4.7) que

$$b_1 = b_0^{\left(\frac{1}{n_1 + \frac{1}{x_1}}\right)} = b_0^{\left(\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{x_2}}}\right)}$$

$$= b_0^{\left(\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \ddots}}}}\right)}$$

ou equivalentemente,

$$\log_{b_0} b_1 = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \ddots}}}} = [0, n_1, n_2, n_3, ...].$$

Exemplo: Para o calculo de $\log_{10} 2$ temos $b_0 = 10$ e $b_1 = 2$. Além disso, como

$$2^3 < 10 < 2^4$$

resulta que $n_1 = 3$ e $b_2 = \frac{10}{2^3} = 1,25$. Repetindo o processo, vemos que

$$(1,25)^3 < 2 < (1,25)^4$$

de modo que $n_2 = 3$ e $b_3 = \frac{2}{(1,25)^3} = 1,024$. Com a ajuda de uma calculadora obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{array}{ll} b_1 = 2 & n_1 = 3 \\ b_2 = 1,25 & n_2 = 3 \\ b_3 = 1,024 & n_3 = 9 \\ b_4 = 1,009741958 & n_4 = 2 \\ b_5 = 1,004336279 & n_5 = 2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Isto mostra que

$$log_{10}2 = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}}},$$

ou seja,

$$log_{10}2 = [0, 3, 3, 9, 2, 2, \cdots].$$

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho realizou-se um estudo acerca da teoria das Frações Contínuas, suas principais propriedades e algumas de suas aplicações.

Durante o estudo houve uma grande preocupação em apresentar uma base sólida para introdução do assunto, apresentando e provando os teoremas, proposições e corolários necessários para a compreensão de tema. Apresentamos as principais características das frações contínuas finitas e infinitas, associando-as aos números racionais e irracionais, respectivamente. Além disso, foi realizado um estudo sobre os convergentes e suas propriedades, os quais fornecem excelentes aproximações racionais para um número real qualquer com erro tão pequeno quanto se queira.

O estudo das frações contínuas é de grande relevância e tem muitas relações com outros temas da matemática bem como outras áreas do conhecimento. Seu estudo nos permite compreender padrões muito interessantes sobre as representações dos números reais. No decorrer do trabalho foi apresentado uma importante relação entre as frações contínuas infinitas e os irracionais quadráticos, a partir da qual, caracterizamos as frações contínuas periódicas.

Com esse trabalho esperamos contribuir com aqueles que se interessarem pelo tema, principalmente os professores da Educação Básica, onde o assunto é praticamente desconhecido. Consideramos que outras pesquisas são bem vindas em relação ao tema e como sugestões de pesquisas futuras, propomos a aplicação do tema em sala de aula, com o objetivo de pesquisa de campo. Dessa maneira, os professores da área de matemática irão conferir concretamente o resultado da aplicação, podendo assim, discutir possíveis melhorias e aprimoramentos na prática do ensino de matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BESKIN, N.M; *Frações Contínuas - Iniciação à Matemática*. ed. Mir Moscovo, 1987. Tradução de Pedro Lima.

[2] HEFEZ, Abramo; *Aritmética*. 2ªed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2016.

[3] INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES; *Aritmética, análisis del número y sus aplicaciones*. Editora Lumbreras, 2012.

[4] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise, Vol. 1*. 7ªed. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, 1976.

[5] MOREIRA, Carlos Gustavo T. A.; *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas*.IMPA, 1º Colóquio da Região Sudeste, 2011.

[6] NASCIMENTO, Amanda Melo; *Frações Contínuas e aplicações no Ensino Médio*.Dissertação de Mestrado. Goiânia - GO, Universidade Federal de Goiás, 2013.

[7] NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Herbert S.; MONTGOMERY, Hugh L. *An Introduction to The Theory of Number*. Fifth Edition, 1991.

[8] OLDS, C.D; *Continued Fractions-New Mathematical Library*. Random House.

[9] SANTOS, Flávio Coêlho; *A utilização de frações contínuas na construção do calendário ocidental moderno*. Dissertação de Mestrado. São Luís - MA, Universidade Federal do Maranhão , 2018.

[10] SANTOS, José Plínio de Oliveira; *Introdução à Teoria dos Números*.ed. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, 1997.

[11] SOUZA, Leonardo Barboza; *Aproximações Diofantinas e a Teoria das Frações Contínuas*. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro - RJ, IMPA, 2018.

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia - UFRB
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas / Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rua Rui Barbosa, 710, Centro, Campus Universitário de Cruz das Almas, Cruz das Almas - BA
CEP: 44380 -000
Telefone: (75) 3621-2350
<http://www.ufrb.edu.br/profmat/>