

**Universidade Federal da Grande Dourados**

Dissertação de Mestrado

**UMA RAMPA PARA OS CLÁSSICOS: CURVAS PLANAS E  
TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO**

Rodrigo Macedo da Silva



**Dourados  
2019**



Universidade Federal da Grande Dourados

Rodrigo Macedo da Silva

**UMA RAMPA PARA OS CLÁSSICOS: CURVAS PLANAS E  
TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO**

Dissertação apresentada ao final do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD) como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Edileno de Almeida Santos

**Dourados  
2019**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).

S586r Silva, Rodrigo Macedo Da

Uma rampa para os clássicos: curvas planas e trisseção de um ângulo [recurso eletrônico] /  
Rodrigo Macedo Da Silva. -- 2019.  
Arquivo em formato pdf.

Orientador: Edileno de Almeida Santos.

Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal da Grande Dourados, 2019.

Disponível no Repositório Institucional da UFGD em:

<https://portal.ufgd.edu.br/setor/biblioteca/repositorio>

1. Curvas planas. 2. Concoide de Nicomedes. 3. Trisseção do ângulo. 4. Problema de neusis. I.  
Santos, Edileno De Almeida. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

©Direitos reservados. Permitido a reprodução parcial desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS  
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

---

### Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **“Uma Rampa para os Clássicos: Curvas Planas e Trisseção de um Ângulo”**, de autoria de **Rodrigo Macedo da Silva**, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Edileno de Almeida Santos  
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio Rodrigues  
Membro Examinador (UFGD)

Prof. Dr. Rafael Lucas de Arruda  
Membro Examinador (UFMS)

Dourados/MS, 13 de setembro de 2019

---

## Agradecimentos

---

Foi um trabalho árduo e desgastante, principalmente na reta final, mas nada teria feito se não fosse pela minha esposa, futura mestre e professora de matemática, Beatriz. Obrigado meu amor!

O seu sorriso banguela tem o poder de restaurar qualquer dia cansativo, obrigado meu filho, te amo.

Ao meu orientador, Edileno de Almeida Santos, por ter proposto um problema tão interessante de se trabalhar e pelas contribuições.

Ao corpo docente do PROFMAT, pelos ensinamentos.

---

## Resumo

---

Nesta dissertação descrevemos algebricamente a curva plana que resolve um problema de curvas minimizantes. Deste modo, faremos um estudo sobre curvas planas, para em seguida deduzir a curva que resolve o problema proposto. A resolução do problema recai numa curva clássica, chamada conchoide de Nicomedes, utilizada para solucionar uma construção geométrica de neusis que trissecta um ângulo. Assim, trataremos brevemente sobre a trisseção de um ângulo e problema de neusis. Serão apresentados os métodos de resolução de equações do terceiro e quarto graus, visto que o ponto que define o início da rampa soluciona uma equação quártica.

**Palavras-chave:** Curvas Planas, Conchoide de Nicomedes, Trisseção do Ângulo, Problema de Neusis.

---

## Abstract

---

In this dissertation we describe algebraically the plane curve that solves a problem of minimizing curves. Thus, we will study plane curves, and then deduce the curve that solves the proposed problem. The problem is solved by a classical curve, called conchoid of Nicomedes, used to solve a geometric construction of neusis that crosses an angle. Thus, we will briefly discuss the trisection of an angle and neusis problem. The methods of solving the equations of the third and fourth degrees will be presented, since the point defining the beginning of the ramp solves a quartic equation.

**Keywords:** Flat Curves, Nicomedes Conchoid, Angle Trisection, Neusis Problem.

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Degrau formado entre a garagem e a rua. . . . .	12
1.2	Elementos geométricos presentes no problema. . . . .	13
2.1	Posição dos pontos $\alpha(t_0)$ e $\beta(t_0)$ , considerando que partiram do ponto $A = (1, 2)$ . . . . .	17
2.2	Curva parametrizada diferenciável. . . . .	17
2.3	Curva parametrizada diferenciável com $\alpha'(0) = (0, 0)$ . . . . .	18
2.4	Curva parametrizada diferenciável. . . . .	18
2.5	Lemniscata de Bernoulli. . . . .	19
2.6	Lemniscata de Bernoulli com a orientação descrita. . . . .	20
2.7	Composição da função $\beta$ . . . . .	21
2.8	Circunferências $\alpha$ e $\beta$ com orientações opostas. . . . .	22
2.9	Curva $\beta$ paralela a $\alpha$ , considerando $r = 0,5$ , $r = 1$ e $r = -1$ . . . . .	27
3.1	Trisseção do ângulo de $90^\circ$ . . . . .	29
3.2	Redução da trisseção de um ângulo obtuso para um ângulo agudo. . . . .	30
3.3	Segmento $AB$ de comprimento $s$ ajustado entre as curvas $L_1$ e $L_2$ apontando para o ponto $O$ . . . . .	31
3.4	Problema de neusis considerando duas retas paralelas . . . . .	31
3.5	Dois formas análogas de inserir $\overline{AB}$ entre $L_1$ e $L_2$ . . . . .	32
3.6	Segmento $\overline{OP}$ que soluciona o problema. . . . .	32
3.7	Construção de Pappus para trissectar um ângulo por meio de uma neusis. . . . .	33

3.8	Circunferência de centro $H$ e raio $\overline{HA}$ que contém o triângulo $DAE$ . . . . .	33
3.9	Os pontos $A$ e $B$ descrevem a curva (tracejada) quando $P$ varia sobre $r$ . . . . .	34
3.10	A interseção da concoide com a reta paralela a $BC$ define o ponto $E$ . . . . .	35
3.11	Esboço do dispositivo mecânico idealizado por Nicomedes para desenhar um ramo da Concoide . . . . .	36
4.1	Problema representado no plano cartesiano. . . . .	38
4.2	Concoide de Nicomedes com parâmetros $r = 1$ e $d = 8$ . . . . .	39
4.3	Problema representado no plano cartesiano. . . . .	40
5.1	Curva do centro (preta) e curva da rampa (vermelha), com parâmetros $r = 1$ e $d = 8$ . . . . .	45
5.2	Problema representado no plano cartesiano. . . . .	45
5.3	Orientação da curva do centro. . . . .	47
5.4	Triângulo retângulo com $P = (0, 0)$ . . . . .	48
5.5	Posição do ponto $P$ no início da curva do centro. . . . .	49
5.6	Triângulo retângulo com o ponto inicial da curva do centro $P$ dado. . . . .	55
5.7	Posição da roda dianteira no final da rampa. . . . .	56
5.8	Traço da rampa restrito ao intervalo $[a, b]$ que representam o início e o final da rampa, respectivamente. . . . .	57
5.9	Entre-eixo $\overline{AP}$ intersectando a rampa em dois pontos distintos. . . . .	58
5.10	Segmento $\overline{AP}$ tangenciando a rampa. . . . .	58
5.11	Ponto $P$ onde a derivada da curva do centro em relação a $y$ é zero. . . . .	59
5.12	Curva $\beta$ com parâmetros $r = 1$ e $d = 8$ com segmento $\overline{AP}$ secante a rampa. . . . .	60

---

## Sumário

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Curvas Planas</b>	<b>15</b>
2.1	Curva Parametrizada Diferenciável . . . . .	16
2.2	Vetor Tangente; Curva Regular . . . . .	18
2.3	Reparametrização . . . . .	20
2.4	Comprimento de Arco . . . . .	22
2.5	Curvatura e Fórmulas de Frenet . . . . .	24
2.6	Curvas Paralelas . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Concoide de Nicomedes</b>	<b>28</b>
3.1	Trisseção do Ângulo . . . . .	28
3.2	Problema de Neusis . . . . .	30
3.3	Concoide de Nicomedes e Problema de Neusis . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Curva do Centro</b>	<b>37</b>
4.1	Equação da Curva do Centro . . . . .	38
4.2	Forma Paramétrica . . . . .	39
4.3	A curva do Centro e a Concoide de Nicomedes . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Rampa</b>	<b>43</b>
5.1	Curva da Rampa com Parâmetros Quaisquer . . . . .	45
5.2	Ponto Inicial da Rampa . . . . .	49
5.3	Soluções das Equações de 3 <sup>o</sup> e 4 <sup>o</sup> graus . . . . .	50

5.3.1	O Método de Tartaglia . . . . .	51
5.3.2	Solução de Ferrari . . . . .	52
5.4	Solução da Equação 5.1 . . . . .	53
5.5	Ponto Final da Rampa . . . . .	56
5.5.1	Um Problema a ser Resolvido . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Conclusão</b> . . . . .	<b>61</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b> . . . . .	<b>63</b>

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução

---

Imagine a seguinte situação: Você possui uma casa cujo nível da garagem está acima do nível da rua. Ou seja, existe um degrau entre a rua e a garagem.

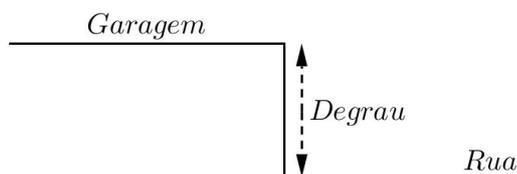


Figura 1.1: Degrau formado entre a garagem e a rua.

Então resolve-se contratar uma pessoa para construir uma rampa. Contudo, como você pretende gastar o mínimo possível com materiais de construção, propõe ao responsável pela obra que construa a menor rampa possível. Considerando o fato de ter um carro na garagem e que você esteja interessado numa rampa que seja suficiente apenas para ele descer em direção à rua, qual a forma algébrica determinada pelos pontos dessa rampa?

Motivados pela resolução desse problema, foi necessário encontrarmos uma condição geométrica que seja satisfeita pelos pontos que pertencem à curva definida pela rampa. Para tal nos restringimos apenas aos objetos matemáticos necessários para a resolução do problema: roda dianteira e traseira (circunferências de raio  $r$  e centros  $P$  e  $A$ , respectivamente); entre-eixos de comprimento  $d$  (segmento  $AP$ ).

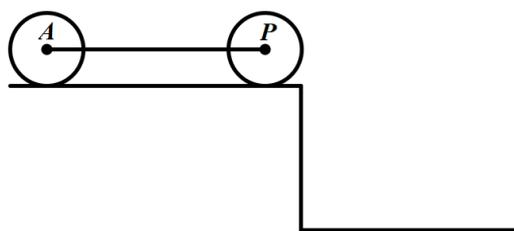


Figura 1.2: Elementos geométricos presentes no problema.

Analisando o comportamento desses objetos geométricos movendo-se sobre a rampa, observamos que a curva descrita pelo ponto  $P$  (que passaremos a chamar de *curva do centro*) está relacionada de maneira simples com a curva descrita pela rampa (que passaremos a chamar de *curva da rampa*). Em resumo, encontrando a curva do centro, foi possível, por meio da relação percebida, encontrar a curva da rampa.

Ao deduzir a forma algébrica da curva do centro e plotar os dados no software *Geogebra*<sup>1</sup> percebemos que ela remonta a uma curva utilizada para resolver um problema de inserção. Tal curva foi definida por Nicomedes e batizada de *Concoide de Nicomedes*.

Neste contexto, este trabalho terá como objetivo: explicitar num sentido algébrico e geométrico as curvas do centro e da rampa; compreender a relação entre a curva do centro e a Concoide de Nicomedes; compreender como a Concoide de Nicomedes é utilizada para trissectar um ângulo; utilizar os conceitos relacionados a curvas parametrizadas e curvas paralelas para encontrar a curva cujo o traço é a rampa, considerando parâmetros quaisquer; utilizar os métodos de resolução de equações algébricas do 3º e 4º grau para encontrar o par ordenado que define o ponto inicial da rampa, considerando parâmetros  $r = 1$  e  $d = 8$ ; encontrar o par ordenado que define o final da rampa.

No capítulo 2 desenvolveremos os assuntos que serão necessários para a resolução do problema da rampa, apresentando definições, teoremas e exemplos sobre: curvas planas, parametrização, vetor tangente, vetor normal, comprimento de arco, referencial de Frenet e curvas paralelas.

No capítulo 3 discutiremos sobre a Concoide de Nicomedes e como tal curva foi utilizada para resolver a construção de Pappus para a trissecção de um ângulo. Definiremos um problema de neusis e resolveremos um exemplo

---

<sup>1</sup>GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI.

de construção geométrica que envolve esse método. Falaremos brevemente sobre o contexto histórico acerca da trissecção de um ângulo e será apresentada uma prova de que a construção de Pappus trissecta um ângulo por meio da neusis.

O capítulo 4 será dedicado ao estudo da curva do centro. Nele apresentaremos o enunciado do problema como uma condição que os pontos  $P$  do centro da circunferência devem satisfazer para descrever a curva. Apresentaremos a dedução do lugar dos pontos  $P$  na forma  $F(x, y) = 0$  e na forma paramétrica, considerando parâmetros  $r = 1$  e  $d$  qualquer. Analisaremos as restrições impostas algebricamente no parâmetro  $d$  e o que isso significa geometricamente. Por fim, justificaremos por que o traço da curva do centro coincide com o traço da conchoide de Nicomedes, mostrando que as definições são equivalentes.

No capítulo 5, com base na propriedade que relaciona a curva do centro com a curva da rampa, deduziremos a forma paramétrica da curva correspondente à rampa considerando parâmetros  $r = 1$  e  $d$  qualquer, em seguida será apresentada a forma geral da curva do centro e da rampa (com parâmetros quaisquer). De acordo com o problema físico, o traço da rampa deve ter um início. Assim, por meio de uma condição geométrica definida sobre um ponto  $P$  da curva do centro, encontraremos o ponto inicial da curva da rampa.

## CAPÍTULO 2

---

### Curvas Planas

---

Na resolução do problema da rampa, utilizamos conceitos de curva parametrizada, vetores tangentes e perpendiculares. Neste capítulo trataremos dos assuntos necessários à compreensão das ferramentas teóricas utilizadas na solução do problema proposto.

Uma curva no plano pode ser definida como uma condição algébrica sobre os pontos  $(x, y)$  que a compõe, ou seja, por meio de uma equação da forma  $F(x, y) = 0$ . É comum nos depararmos com várias equações desse tipo no estudo da Geometria Analítica. Uma das vantagens dessa notação é que é possível atribuir significado geométrico aos parâmetros da curva, enriquecendo a relação entre álgebra e geometria.

Uma outra forma de definir uma curva no plano é por meio de uma função em uma única variável real. Nesse caso, os pares coordenados  $(x, y)$  da curva dependem dessa variável. São curvas definidas dessa forma que são objetos de estudos da Geometria Diferencial. A vantagem de definir uma curva por meio de uma função real é que é possível aplicar os resultados do cálculo diferencial e vetorial em seu estudo. Vamos às definições formais a respeito de curvas no plano.

## 2.1 Curva Parametrizada Diferenciável

Uma função real de uma única variável real será dita *diferenciável* quando possuir em todos os pontos de seu domínio derivadas de todas as ordens.

**Definição 2.1.1.** Uma curva parametrizada diferenciável é uma função diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$ . Adiante, salvo menção contrária, iremos nos referir à curva parametrizada diferenciável apenas por *curva*.

Como o domínio de  $\alpha$  é  $I \subset \mathbb{R}$  e o contradomínio é o  $\mathbb{R}^2$ , temos que  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . As funções reais  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , ditas também *funções coordenadas*, são funções diferenciáveis. A variável  $t$  é o *parâmetro* da função. Podemos imaginar a curva como sendo uma partícula no plano movendo-se a medida que o tempo ( $t$ ) passa.

Um parênteses a respeito de curvas definidas dessa forma: algumas curvas planas como a parábola e a reta podem ser definidas como funções da variável  $x$  naturalmente, bastando isolar o  $y$ . Mas, para outras curvas, como a circunferência, só isolar o  $y$  não define uma função. Nesse caso, para representarmos o traço da circunferência como uma função de parâmetro  $t$  devemos utilizar o conceito de curva parametrizada.

Dizemos que o conjunto imagem  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$  é o *traço* da função  $\alpha$ . É importante termos bem clara a distinção entre a função  $\alpha$  que é a curva parametrizada diferenciável e o traço de  $\alpha$ , já que podemos representar de várias formas distintas o mesmo traço. Por exemplo, a reta da figura abaixo é o traço das funções  $\alpha(t) = (2t + 1, 3t + 2)$  e  $\beta(t) = (4t + 1, 6t + 2)$ , ambas definidas no conjunto dos reais. Note que o ponto  $\beta(t_0)$  percorre o dobro da distância de  $\alpha(t_0)$ . Podemos imaginar os pontos definidos por  $\alpha$  e  $\beta$  como partículas percorrendo o plano ao decorrer do tempo  $t$ , assim, infere-se que a partícula de  $\beta$  tem o dobro da velocidade da partícula de  $\alpha$  (figura 2.1).

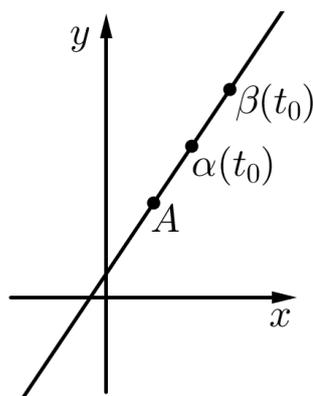


Figura 2.1: Posição dos pontos  $\alpha(t_0)$  e  $\beta(t_0)$ , considerando que partiram do ponto  $A = (1, 2)$ .

**Exemplo 2.1.2.** A função  $\alpha : (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ , com  $t \in (0, 2\pi]$ , é uma curva parametrizada diferenciável, cujo traço é uma circunferência de centro na origem e raio 1 (figura 2.2).

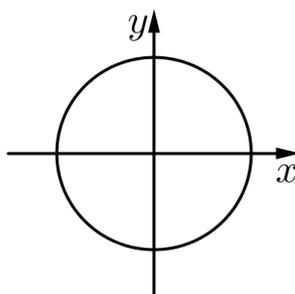


Figura 2.2: Curva parametrizada diferenciável.

**Exemplo 2.1.3.** A função  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva parametrizada diferenciável (figura 2.3). Com efeito, as funções coordenadas  $x$  e  $y$  admitem derivadas de todas as ordens, logo  $\alpha$  também admite derivadas de todas as ordens. Vale notar que  $\alpha'(0) = (0, 0)$ , ou seja, para  $t = 0$  temos um vetor nulo.

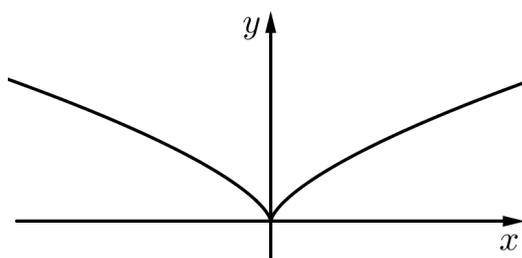


Figura 2.3: Curva parametrizada diferenciável com  $\alpha'(0) = (0, 0)$ .

**Exemplo 2.1.4.** A função  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva parametrizada diferenciável (figura 2.4). Com efeito, as funções coordenadas  $x$  e  $y$  admitem derivadas de todas as ordens, logo  $\alpha$  também admite derivadas de todas as ordens.

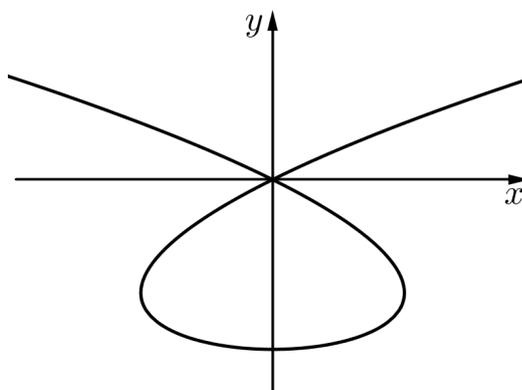


Figura 2.4: Curva parametrizada diferenciável.

Agora que temos uma função que representa uma curva plana, podemos definir o vetor tangente.

## 2.2 Vetor Tangente; Curva Regular

**Definição 2.2.1.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada diferenciável, tal que  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\forall t \in I$ . O vetor  $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$  é chamado *vetor tangente* a  $\alpha$  em  $t_0 \in I$ .

O vetor tangente pode ser interpretado como a velocidade da partícula no ponto  $t_0$ , assim podemos obter sua *velocidade escalar* ou *módulo* fazendo:

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$$

O vetor  $\alpha'(t_0)$  aponta para o sentido de percurso do ponto na curva. O traço da curva tem a sua importância, pois é com o auxílio dele que podemos conjecturar algumas afirmações e observar certas propriedades geométricas, mas existem proposições que são expressas e provadas por meio da função  $\alpha$ .

A *orientação* de uma curva  $\alpha$  é o sentido de percurso do traço de  $\alpha$ .

**Exemplo 2.2.2.** Considere a lemniscata, dada pelo traço da curva  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (\sin t, \sin 2t)$ .

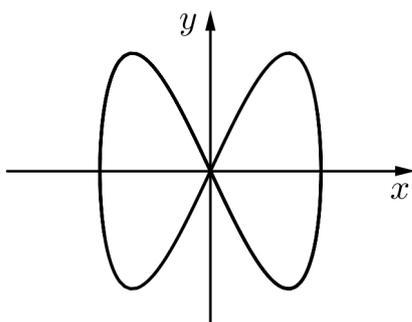


Figura 2.5: Lemniscata de Bernoulli.

**a)** Encontre os valores do domínio,  $t_1$  e  $t_2$ , tais que  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ .

Como a função não é injetiva, então existem  $t_1 \neq t_2$  tais que  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ , com  $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ . Note que a solução é dada por  $\alpha(t) = (0, 0)$ , já que a curva possui auto interseção na origem. Ou seja,  $(\sin t, \sin 2t) = (0, 0) \Rightarrow \sin t = 0$  e  $\sin 2t = 0$ , logo  $t_1 = 0$  e  $t_2 = \pi$ .

**b)** Encontre  $\alpha'(t_1)$  e  $\alpha'(t_2)$  e esboce no gráfico o sentido de percurso do ponto  $\alpha(t)$ .

Como  $\alpha'(t) = (\cos t, 2 \cos 2t)$ , então temos:  $\alpha'(0) = (\cos 0, 2 \cos(2 \cdot 0)) \Rightarrow \alpha'(0) = (1, 2)$  e  $\alpha'(\pi) = (\cos \pi, 2 \cos(2\pi)) \Rightarrow \alpha'(\pi) = (-1, 2)$ .

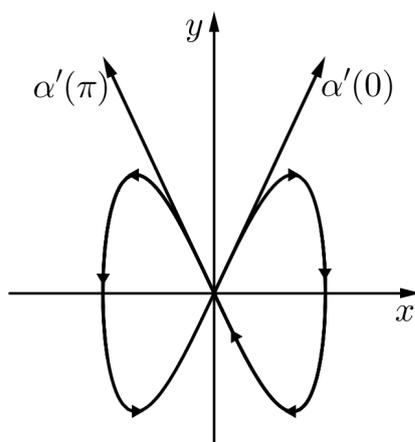


Figura 2.6: Lemniscata de Bernoulli com a orientação descrita.

É necessário, para o estudo da geometria diferencial, que para todo ponto  $\alpha(t)$  de uma curva exista uma reta tangente. Assim devemos ter  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Note no exemplo 2.1.3 que existem curvas parametrizadas que não possuem vetor tangente não nulo em todos os seus pontos, assim vamos definir uma nova classe de curva, que possuem uma reta tangente em todos os pontos de seu traço.

**Definição 2.2.3.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita *regular* se  $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$ . Quando  $\alpha'(t_0) = (0, 0)$  diremos que  $\alpha(t_0)$  é um ponto *singular* de  $\alpha$ .

Nos exemplos da seção 2.1 temos que as curvas parametrizadas de 2.1.2 e 2.1.4 são regulares. Já a curva parametrizada do exemplo 2.1.3 não é regular, visto que  $\alpha'(0) = (0, 0)$ , ou seja  $t_0 = 0$  é um ponto de singularidade dessa curva.

**Definição 2.2.4.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. A *reta tangente* a  $\alpha$  em  $t_0 \in I$  é a reta que passa por  $\alpha(t_0)$  na direção de  $\alpha'(t_0)$ , assim podemos defini-la por meio da função

$$g(r) = \alpha(t_0) + r\alpha'(t_0), \text{ com } r \in \mathbb{R}.$$

## 2.3 Reparametrização

Como já dito, existem curvas diferentes que possuem o mesmo traço (vide figura 2.2). Este conceito pode ser formalizado com a definição de *reparametrização* de uma curva.

**Definição 2.3.1.** Seja a curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  uma função diferenciável. A curva  $\beta = \alpha \circ h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita uma *reparametrização* de  $\alpha$  por  $h$ .

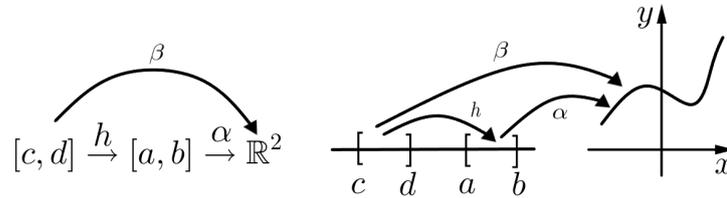


Figura 2.7: Composição da função  $\beta$ .

A função  $\beta$  é uma curva parametrizada diferenciável cujo traço é igual ao da curva  $\alpha$ . Pela regra da cadeia obtemos:

$$\beta'(t) = (\alpha \circ h)'(t) = \alpha'(h(t))h'(t)$$

Assim, o comprimento do vetor  $\beta'(t)$  é dado por:

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \cdot |h'(t)|$$

Note, nessa última igualdade, que para  $\beta$  ser uma curva regular, então  $h'(t) \neq 0$  e  $\alpha'(h(t)) \neq (0, 0)$ , ou seja,  $\alpha$  deve ser regular e  $h$  deve ser estritamente monótona. Como estamos interessados em curvas regulares, trabalharemos sob tais condições.

Quando  $h$  for uma função estritamente crescente,  $\beta$  terá a mesma orientação de  $\alpha$  e quando  $h$  for estritamente decrescente,  $\beta$  e  $\alpha$  terão orientações opostas.

**Exemplo 2.3.2.** Seja  $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ , cujo traço é uma circunferência de centro na origem e raio 1. Vamos encontrar uma função  $h$ , tal que a composta  $\beta = \alpha \circ h$  e  $\alpha$  tenham orientações opostas.

A função  $h$  deve ser estritamente decrescente e  $h : [c, d] \rightarrow [0, 2\pi]$ . Assim podemos definir a função  $h(s) = -2s + 1$ . Para encontrarmos  $c$  e  $d$  basta fazer:

$$\begin{array}{ccc} -2s + 1 = 0 & \text{e} & -2s + 1 = 2\pi \\ s = \frac{1}{2} & & s = \frac{1 - 2\pi}{2} \end{array}$$

Ou seja,  $h : \left[ \frac{1-2\pi}{2}, \frac{1}{2} \right] \rightarrow [0, 2\pi]$  e a composta  $\beta : \left[ \frac{1-2\pi}{2}, \frac{1}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\beta(s) = \alpha(h(s)) \Rightarrow \beta(s) = \alpha(-2s+1) \Rightarrow \beta(s) = (\cos(-2s+1), \sin(-2s+1))$ .

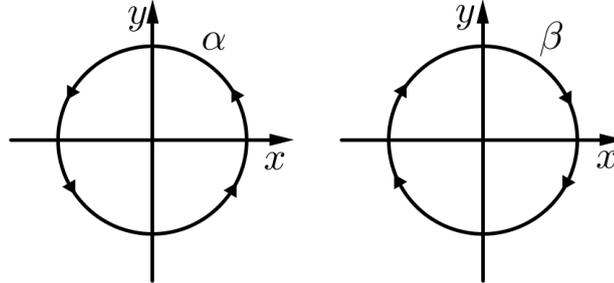


Figura 2.8: Circunferências  $\alpha$  e  $\beta$  com orientações opostas.

## 2.4 Comprimento de Arco

É possível calcular o comprimento de uma curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  por meio da integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt$$

que é dita *comprimento de arco* da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$ . Fixado um  $t_0 \in I$ , definamos a *função comprimento de arco* da curva  $\alpha$  a partir de  $t_0$  como

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

Sabendo que  $\alpha$  é uma curva regular, segue que  $s$  é diferenciável, donde  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ .

**Exemplo 2.4.1.** Consideremos a circunferência  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ . A função comprimento para  $t_0 = 0$  é

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt$$

Como  $\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ , segue que  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = R$ . Assim,  $s(t) = \int_0^t R dt \Rightarrow s(t) = Rt \Big|_0^t$ , tomando  $t = 2\pi$  temos que  $s(2\pi) = 2\pi R$ . Note que se dermos  $k$  voltas em torno da circunferência seu comprimento será dado por:

$$s(2k\pi) = 2k\pi R$$

Ou seja, apesar do traço ser o mesmo para  $k > 1$ , o comprimento será diferente. Neste caso, como  $\alpha$  não é injetiva. Para curvas injetivas de mesmo traço, o comprimento é invariante.

**Definição 2.4.2.** Quando o comprimento de arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$ , com  $t_0 \leq t_1$ , for igual a  $t_1 - t_0$ , ou seja

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0$$

diremos que a curva  $\alpha$  está *parametrizada pelo comprimento de arco*.

**Proposição 2.4.3.** Uma curva regular  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, se, e somente se,  $\forall t \in I$ ,  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .

*Demonstração.* Vamos supor que a curva  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Consideremos a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(r)\| dr$ ,  $\forall t \in I$ . Se  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = t - t_0$  para algum  $t_0 \in I$ , então

$$s'(t) = (t - t_0)' \Rightarrow s'(t) = 1$$

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

portanto

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

Reciprocamente, se  $\|\alpha'(t)\| = 1$ , então

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(r)\| dr = \int_{t_0}^{t_1} 1 dr = t_1 - t_0$$

□

**Exemplo 2.4.4.** A função  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, já que  $\|\alpha'(t)\| = 1$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

A seguir vamos enunciar um teorema que diz que toda curva regular  $\alpha$  admite uma reparametrização  $\beta$ , onde  $\beta$  está parametrizada por comprimento de arco.

**Proposição 2.4.5.** *Sejam  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então existe a função inversa  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$  e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que a função inversa  $h = s^{-1}$  existe. De fato,  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$ , já que, por hipótese,  $s$  é função comprimento de arco de  $\alpha$ . Ou seja, a função  $s$  é estritamente crescente, portanto, possui inversa. Como  $h : J \rightarrow I$ , tem-se que  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$  por  $h$ . Provemos agora que  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Com efeito

$$h(s(t)) = t \Rightarrow \frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} = 1 \Rightarrow \frac{dh}{ds} = \frac{1}{s'(t)}$$

Portanto

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0$$

Como  $\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right\| = \left\| \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\| = 1$ , segue da proposição 2.4.3 que  $\beta$  está parametrizada pelo comprimento de arco.  $\square$

**Exemplo 2.4.6.** Vamos aplicar a proposição acima considerando a curva regular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $\alpha(t) = (at + c, bt + d)$  com  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Como  $\alpha'(t) = (a, b)$ , então  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Assim a função comprimento, para  $t_0 = 0$  é:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt \Rightarrow s(t) = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

A inversa  $h$  de  $s$  é dada por  $h(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , onde  $s \in \mathbb{R}$ . Portanto

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) \Rightarrow \beta(s) = \left( a \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + c, b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} + d \right)$$

é uma parametrização pelo comprimento de arco.

## 2.5 Curvatura e Fórmulas de Frenet

Vamos considerar uma curva regular  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco. Assim  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ . Para cada  $s \in I$ ,  $\alpha'(s)$  é um vetor

unitário que denotamos por  $t(s)$ , isto é

$$t(s) = (x'(s), y'(s))$$

$t(s)$  é chamado *vetor tangente* à curva  $\alpha$  em  $s$ . Observe que podemos fazer uma rotação positiva no vetor  $t(s)$ , obtendo um vetor unitário ortogonal  $n(s)$  a  $t(s)$ . Assim

$$n(s) = (-y'(s), x'(s))$$

**Definição 2.5.1.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O par de vetores  $t(s)$  e  $n(s)$  é dito *referencial de Frenet* da curva  $\alpha$  em  $s$ .

**Proposição 2.5.2.** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O vetor  $t'(s)$  é ortogonal ao vetor  $t(s)$ , isto é

$$\langle t'(s), t(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I$$

*Demonstração.* Note que  $\langle t(s), t(s) \rangle = \|t(s)\|^2 = 1$ , ou seja

$$\langle t(s), t(s) \rangle = 1$$

Derivando, obtemos

$$\langle t'(s), t(s) \rangle + \langle t(s), t'(s) \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle t'(s), t(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle t'(s), t(s) \rangle = 0$$

□

Segue imediatamente de 2.5.2 que os vetores  $n(s)$  e  $t'(s)$  são paralelos, ou seja, existe uma função  $k$  tal que

$$t'(s) = k(s)n(s), \quad s \in I \tag{2.1}$$

**Definição 2.5.3.** A função  $k$  definida na equação 2.1 é chamada *curvatura* de  $\alpha$  em  $s \in I$ .

Considerando a curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , segue da definição que  $k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$ , donde

$$k(s) = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s)$$

Como  $n(s)$  é unitário temos que  $n'(s)$  será ortogonal a  $t(s)$ . Assim, usando raciocínio análogo, concluímos que

$$n'(s) = -k(s)t(s)$$

Assim podemos obter o sistema de equações satisfeito pelo referencial de Frenet  $t(s)$  e  $n(s)$

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s) \\ n'(s) &= -k(s)t(s) \end{aligned}$$

As equações desse sistema são denominadas *Fórmulas de Frenet* da curva  $\alpha$ .

## 2.6 Curvas Paralelas

Antes de iniciarmos o estudo de tais curvas, vamos considerar o referencial de Frenet e a curvatura de uma curva  $\alpha$  definida com uma parametrização arbitrária, ou seja, as curvas deste tópico serão regulares mas não estarão parametrizadas por comprimento de arco, salvo menção contrária.

**Proposição 2.6.1.** *Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ ,  $s \in I$ , uma curva regular. Então*

$$t(s) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad n(s) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \quad e \quad k(s) = \frac{-x''y' + x'y''}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}$$

Para mais detalhes consultar [13].

**Definição 2.6.2.** Considere a curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Seja  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva definida como

$$\beta(s) = \alpha(s) + rn(s) \tag{2.2}$$

onde  $r \neq 0$  e  $n(s)$  é o vetor unitário ortogonal a  $\alpha$ . Chamaremos  $\beta$  de *curva  $r$ -paralela* a  $\alpha$ .

Observe que para cada  $s \in I$  tem-se  $\|\beta(s) - \alpha(s)\| = |r|$ , ou seja,  $\beta$  mantém-se a uma distância constante de  $\alpha$ .

**Exemplo 2.6.3.** Seja a curva regular  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $\alpha(s) = (s, s^2)$ . Encontrar curva  $r$ -paralela a  $\alpha$ .

Como  $\alpha'(s) = (1, 2s)$ , segue que  $t(s) = \frac{(1, 2s)}{\sqrt{1 + 4s^2}}$  e  $n(s) = \frac{(-2s, 1)}{\sqrt{1 + 4s^2}}$ . Assim  $\beta(s) = (s, s^2) + r \frac{(-2s, 1)}{\sqrt{1 + 4s^2}}$ . Abaixo, podemos observar o traço de  $\beta$ , considerando  $r = 0, 5$ ,  $r = 1$  e  $r = -1$ , respectivamente.

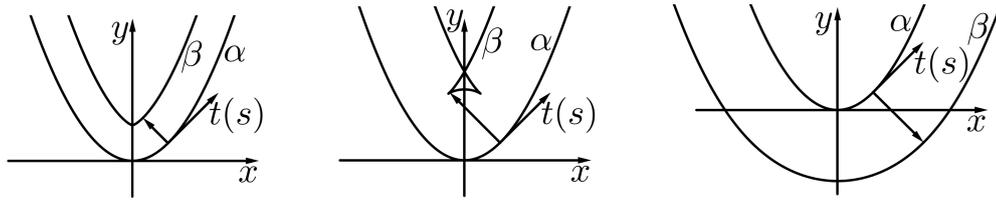


Figura 2.9: Curva  $\beta$  paralela a  $\alpha$ , considerando  $r = 0, 5, r = 1$  e  $r = -1$ .

Vamos encontrar as funções coordenadas de  $\beta$  em termos da curva regular  $\alpha$ . Na equação 2.2 temos que  $\beta(s) = \alpha(s) + rn(s)$ . Como  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  e  $n(s) = \frac{(-y'(s), x'(s))}{\sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2}}$ , segue que

$$\beta(s) = \left( x(s) - r \frac{y'(s)}{\|t(s)\|}, y(s) + r \frac{x'(s)}{\|t(s)\|} \right) \quad (2.3)$$

Podemos obter o vetor tangente  $\beta'(s)$  derivando a função dada por  $\beta(s) = \alpha(s) + rn(s)$ , assim  $\beta'(s) = \alpha'(s) + rn'(s)$ . Das equações de Frenet, sabemos que

$$n'(s) = -k(s)t(s)$$

logo  $\beta'(s) = t(s) + r(-k(s)t(s))$ , ou seja

$$\beta'(s) = t(s)(1 - rk(s)) \quad (2.4)$$

Por meio da equação 2.4 é possível estabelecermos uma condição sobre  $\beta$  para que tenhamos uma curva regular. Como já dito anteriormente a curva  $\beta$  é regular se  $\forall s \in I, \|\beta'(s)\| \neq 0$ . Assim tem-se que  $\|\beta'(s)\| = \|t(s)\|(1 - rk(s))$ . Segue que  $\|\beta'(s)\| \neq 0$  se, e somente se,  $\|t(s)\| \neq 0$  e  $|1 - rk(s)| \neq 0$ . Como  $\|t(s)\| \neq 0$  por hipótese, já que  $\alpha$  é regular, então devemos ter  $1 - rk(s) \neq 0, \forall s \in I$ . Portanto

$$k(s) \neq \frac{1}{r} \quad \forall s \in I$$

Note que para  $\beta$  ser uma curva regular  $\frac{1}{r}$  não pode pertencer ao conjunto imagem da função  $k$ .

## CAPÍTULO 3

---

### Concoide de Nicomedes

---

No período grego compreendido entre os séculos VI a.C e V d.C, o problema da trisseccção foi reduzido a um outro tipo de problema, chamado de problema de neusis<sup>1</sup>. Assim, o matemático que conseguisse resolver o problema da neusis resolveria a trisseccção do ângulo. Uma das curvas mais antigas que solucionam esse problema é a concoide de Nicomedes.

Nesse capítulo falaremos brevemente sobre a trisseccção e como um problema de neusis trissecta um ângulo. Por fim mostraremos como a concoide de Nicomedes pode ser usada para solucionar o problema da trisseccção de um ângulo<sup>2</sup>.

### 3.1 Trisseccção do Ângulo

Os instrumentos de construção euclidiana, compasso e régua não graduada, motivaram matemáticos a elaborarem problemas e desenvolverem teorias desde os primórdios da história da matemática. Devido à simplicidade e elegância desses instrumentos alguns problemas são facilmente enunciados e despertam, até os dias de hoje, o desejo e engajamento na tentativa de

---

<sup>1</sup>A palavra *neusis* pode ser interpretada no sentido de apontar ou de inclinação.

<sup>2</sup>Vale lembrar que já foi provado em 1837 pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel que é impossível trissectar um ângulo apenas com os instrumentos euclidianos (compasso e régua não graduada).

solucioná-los, mesmo que sejam impossíveis de se resolver com tais instrumentos.

A trissecção de um ângulo utilizando apenas régua não graduada e compasso pode ser citada como exemplo de um problema que possui um enunciado simples, porém impossível de se resolver utilizando somente os instrumentos euclidianos. O matemático francês Pierre Laurent Wantzel aluno de Gauss, provou em 1837 a impossibilidade de se resolver o problema da trissecção utilizando compasso e régua não graduada.

Ainda assim, estudantes e pessoas interessadas pela matemática enviam todos os anos possíveis demonstrações da trissecção de um ângulo para professores analisarem. Não precisa ser um especialista na área pra saber que em todas estas demonstrações existem erros, basta confiarmos na demonstração que foi feita há 182 anos e revisada por centenas de matemáticos ao longo de todo esse tempo.

O problema da trissecção de um ângulo pode assim ser enunciado: *dividir um ângulo arbitrário, apenas com régua não graduada e compasso, em três partes iguais*. Podemos restringir o problema considerando apenas ângulos agudos. O matemático grego Pappus (290-350) obteve a seguinte construção para o caso do ângulo ser reto: construir um triângulo equilátero  $COD$  com vértice  $O$  e lado  $OD$  sobre a semirreta  $OB$ . Bissetar o ângulo  $COD$ . O ângulo determinado pela bissetriz do ângulo  $COD$  e a semirreta  $OD$  é a terça parte do  $\angle AOB$  [11].

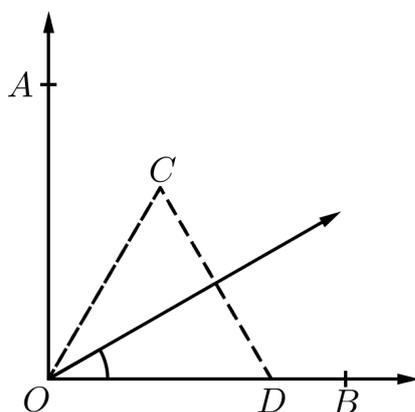


Figura 3.1: Trissecção do ângulo de  $90^\circ$ .

Caso o ângulo seja obtuso é possível decompô-lo na soma de um ângulo reto com um ângulo agudo, reduzindo o problema à trissecção de um ângulo agudo. Com efeito, seja  $x + 90^\circ$  a medida do ângulo a ser trissectado, com

$x \in (0, 90^\circ]$ . Como é possível trissectar um ângulo reto, basta trissectarmos o ângulo de medida  $x$  e adicionarmos o resultado à terça parte de 90. Assim obtemos  $\frac{x}{3} + 30 = \frac{x + 90^\circ}{3}$  que é a terça parte do ângulo obtuso.

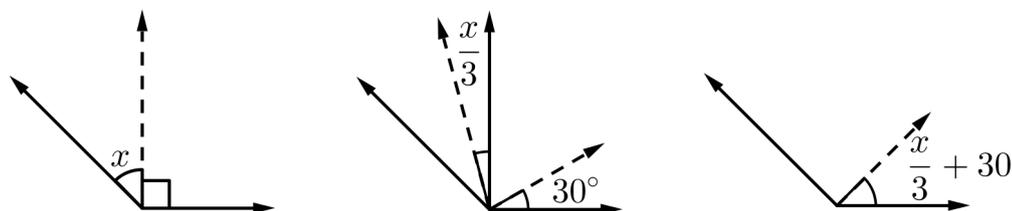


Figura 3.2: Redução da trissecção de um ângulo obtuso para um ângulo agudo.

Alguns historiadores consideram que este problema emergiu, provavelmente, sob um contexto de construções de polígonos utilizando instrumentos euclidianos. Para construir um polígono com nove lados, por exemplo, bastava dividir um ângulo de  $120^\circ$  em três partes iguais [11]. Uma outra possibilidade para o surgimento do problema é lembrar que a bissecção de um ângulo é simples de se construir com régua e compasso, então é natural querermos generalizar para o caso de se dividir em três partes [11].

Se, depois de 2000 anos de sua formulação, existem pessoas curiosas com o problema da trissecção, pode-se imaginar como estavam os ânimos dos matemáticos que viveram numa data próxima à ascensão do problema [4]. Roque [8] cita alguns matemáticos e filósofos que contribuíram nos estudos relacionados ao problema da trissecção do ângulo: Eratóstenes, Nicomedes, Hípias, Diocles, Diony Sodus, Perseus e Zenodorus.

## 3.2 Problema de Neusis

Um problema de neusis ou construção de neusis consiste em inserir um segmento de comprimento pré-definido entre duas curvas, de modo que esse segmento passe por um ponto dado ou seu prolongamento passe por esse ponto. O segmento deve *apontar* para o ponto dado, o que justifica o uso da palavra neusis, derivada do verbo grego *neunin*, que significa apontar [4]. Um outro sentido para neusis é apresentado por Roque [8] como "inclinação", segundo suas palavras: Na figura 3.3 temos um segmento  $AB$  de comprimento  $s$  inserido entre as curvas  $L_1$  e  $L_2$  apontando para o ponto  $O$ .

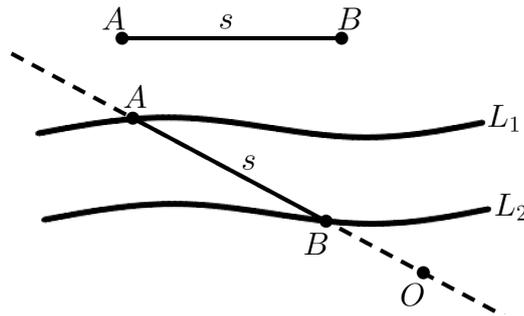


Figura 3.3: Segmento  $AB$  de comprimento  $s$  ajustado entre as curvas  $L_1$  e  $L_2$  apontando para o ponto  $O$

Esse tipo de problema pode ser resolvido com régua graduada, bastando apontá-la para o ponto  $O$ , de modo que o comprimento do segmento  $AB$  fique inserido entre  $L_1$  e  $L_2$  com  $A$  sobre  $L_1$  e  $B$  sobre  $L_2$ . Esse método é funcional e foi utilizado por vários matemáticos na solução de diversos problemas geométricos, porém, se contrapõe às construções com compasso e régua não graduada [8].

O primeiro registro histórico de um problema de neusis é de um trabalho de Hipócrates de Quios que data por volta do século V a. C. Nesse estudo Hipócrates fez uso da neusis para a construção da terceira lúnula, cuja solução pode ser obtida utilizando apenas régua não graduada e compasso. Sim, é possível resolver alguns problemas que usam o método da neusis utilizando apenas os instrumentos euclidianos, mas a maioria dos problemas que fazem seu uso não são resolvidos com estes instrumentos.

Seja o seguinte problema de neusis: Dadas duas retas paralelas  $L_1$  e  $L_2$  cuja distância entre elas seja 4 unidades e um ponto  $O$  que dista 2 unidades de  $L_2$ , inserir o segmento  $AB$  de comprimento 5 entre as retas  $L_1$  e  $L_2$  apontando para o ponto  $O$ , de modo que  $A$  esteja sobre  $L_1$  e  $B$  esteja sobre  $L_2$ . Vamos mostrar que é possível solucionar esse problema de neusis com os instrumentos euclidianos.

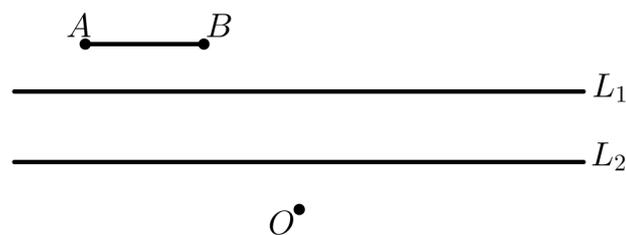


Figura 3.4: Problema de neusis considerando duas retas paralelas

### Solução

Vamos imaginar o problema resolvido. É fácil perceber que existem duas formas diferentes de ajustar  $\overline{AB}$  entre  $L_1$  e  $L_2$ .

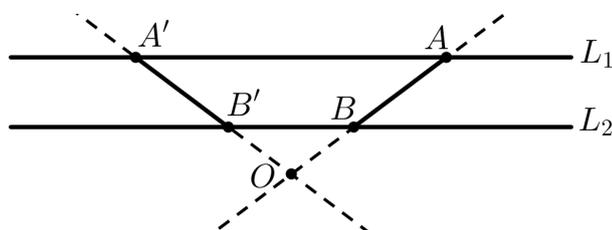


Figura 3.5: Duas formas análogas de inserir  $\overline{AB}$  entre  $L_1$  e  $L_2$ .

Como são construções análogas, focaremos apenas em uma. Observando a figura 3.6 o problema estará solucionado se encontrarmos a medida do segmento  $OP$ .

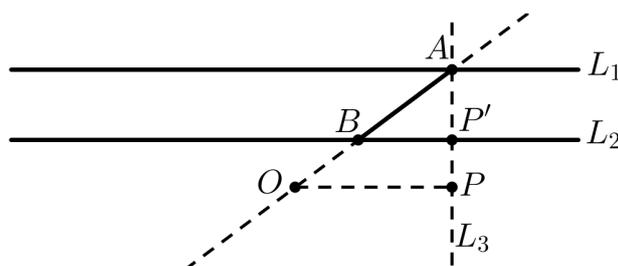
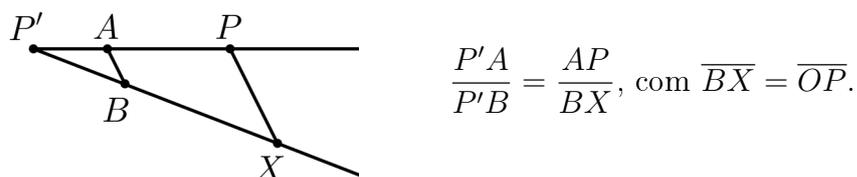


Figura 3.6: Segmento  $\overline{OP}$  que soluciona o problema.

Com efeito, o  $\triangle ABP' \sim \triangle AOP$ , assim  $\frac{P'A}{P'B} = \frac{AP}{OP}$ , ou seja,  $OP$  é a quarta proporcional da razão entre esses segmentos.



Agora traçamos por  $O$  o segmento  $OP$  paralelo a  $L_2$ . Seja  $L_3$  a reta perpendicular a  $L_2$  traçada pelo ponto  $P$ , assim  $L_1 \cap L_3 = A$ . A reta determinada pelos pontos  $A$  e  $O$  ajusta o segmento  $AB$  entre  $L_1$  e  $L_2$  de acordo com as condições propostas (vide 3.6).

Segue agora a construção geométrica proposta por Pappus para a trissecção de um ângulo utilizando o método da neusis. Sejam, de acordo com a figura seguinte,  $BA$  e  $BC$  os lados que determinam o ângulo que pretendemos

trissectar (como já explicado o problema da trissecção se reduz a um ângulo agudo).

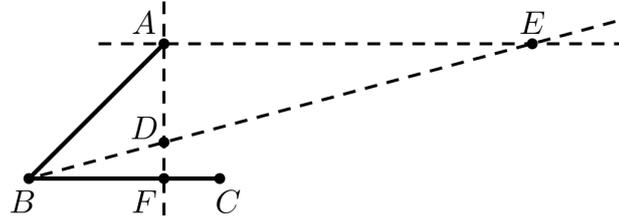


Figura 3.7: Construção de Pappus para trissectar um ângulo por meio de uma neusis.

Pelo ponto  $A$  num dos lados traçamos uma paralela e uma perpendicular ao outro lado. O segmento  $\overline{DE}$  é *inserido* entre estas duas retas de modo que o seu comprimento seja o dobro do comprimento do segmento  $\overline{AB}$  e, ainda, de tal modo que o ponto  $B$ , vértice do ângulo a trissectar, esteja no seu prolongamento. Então o ângulo  $DBC$  é a terça parte do ângulo  $ABC$  [11].

**Lema 3.2.1.** *Dados:  $\overrightarrow{AE} \parallel \overrightarrow{FC}$ ,  $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{FC}$ ,  $DE = 2AB$  (vide 3.7). Demonstre:  $m\angle DBA = 2m\angle FBD$ .*

*Demonstração.* Tome o ponto  $H$  médio de  $\overline{DE}$ , logo  $AB = DH = HE$ . O triângulo  $DAE$  é retângulo por construção, então existe uma circunferência de centro  $H$  e diâmetro  $\overline{DE}$  contendo o  $\triangle DAE$  (vide 3.8), logo  $AH = DH = HE = AB$ .

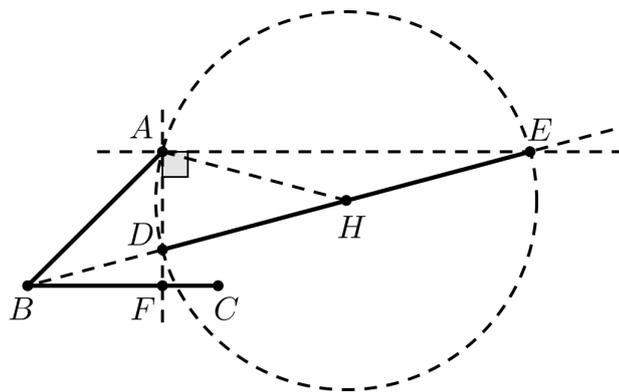


Figura 3.8: Circunferência de centro  $H$  e raio  $\overline{HA}$  que contém o triângulo  $DAE$ .

Como  $AB = AH$ , então o  $\triangle BAH$  é isósceles. Analogamente conclui-se que  $AHE$  é isósceles. A reta  $BE$  é transversal às paralelas  $\overleftrightarrow{AE}$  e  $\overleftrightarrow{FC}$ , logo  $\angle FBD \cong \angle AEH$ . Desse modo conclui-se que  $\angle HAE \cong \angle AEH \cong \angle FBD$ . Pelo teorema do ângulo externo  $m\angle BHA = m\angle HAE + m\angle AEH$ . Como  $\angle BHA \cong \angle DBA$  e  $\angle HAE \cong \angle AEH \cong \angle FBD$ , fazendo a substituição, obtém-se  $m\angle DBA = m\angle FBD + m\angle FBD \Rightarrow m\angle DBA = 2m\angle FBD$ .  $\square$

### 3.3 Concoide de Nicomedes e Problema de Neusis

Como já dito, a construção de Pappus para trissecção do ângulo é impossível de ser executada apenas com os instrumentos euclidianos. Mas, de maneira prática, é possível trissectar um ângulo usando essa construção apenas com uma régua graduada, ajustando-a adequadamente. Nicomedes definiu uma curva com a intenção, puramente teórica, de apresentar uma forma mais sofisticada de se resolver a construção de Pappus. A curva, batizada de Concoide de Nicomedes, é definida como segue: dado uma reta  $r$  e um ponto  $O$  (pólo) fora dela, traça-se uma reta  $s$  por  $O$ , concorrente a  $r$ , definindo um ponto  $P$  sobre  $r$ . Com centro em  $P$  e raio  $k$  fixo constrói-se uma circunferência, definindo os pontos  $A$  e  $B$  sobre a reta  $s$ . A curva descrita por  $A$  e  $B$ , quando  $P$  varia sobre a reta  $r$ , define a Concoide de Nicomedes (vide 3.9).

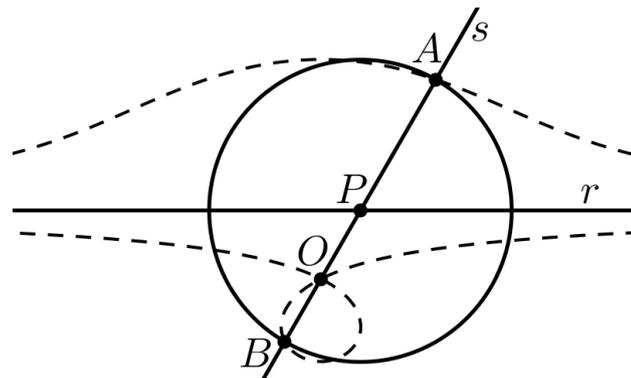


Figura 3.9: Os pontos  $A$  e  $B$  descrevem a curva (tracejada) quando  $P$  varia sobre  $r$ .

Diferentemente da trissectriz de Hípias ou da espiral de Arquimedes que dividem um ângulo em  $n$  partes, a Concoide de Nicomedes pode ser usada apenas para trissectar um ângulo. Para tal, bastava resolver a construção

de Pappus que consistia em inserir um segmento de medida pré definida entre duas retas e apontando para um ponto dado. Segue a solução do problema de Pappus dada por Nicomedes [11].

Na construção de Pappus devemos inserir um segmento  $DE$  duplo de  $AB$  entre as retas perpendicular e paralela ao lado  $BC$ , de modo que  $DE$  aponte para  $B$ . Assim, o pólo da conchoide é o ponto  $B$  e a reta  $AF$  deve ser suporte para o centro  $D$  da circunferência de raio  $DE$  (figura 3.10).

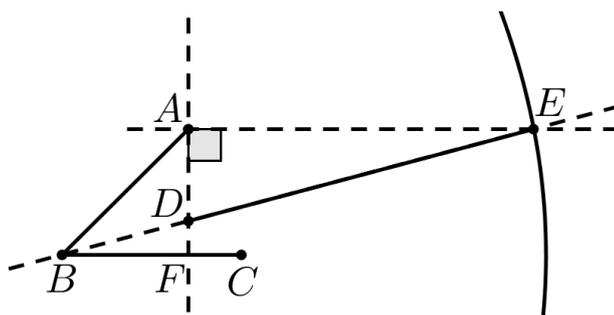


Figura 3.10: A interseção da conchoide com a reta paralela a  $BC$  define o ponto  $E$

Existem dispositivos mecânicos utilizados para construir uma conchoide e com isso trissectar um ângulo. Na figura 3.11 temos um dispositivo mecânico, idealizado por Nicomedes, composto por três réguas, todas com uma fissura no meio. O ponto  $B$  é o pólo,  $D$  é ponto que percorre a reta  $AF$  e o ponto  $E$  descreverá a curva. É possível ajustar o pólo  $B$ , assim como a distância  $DE$ , por meio das fissuras.

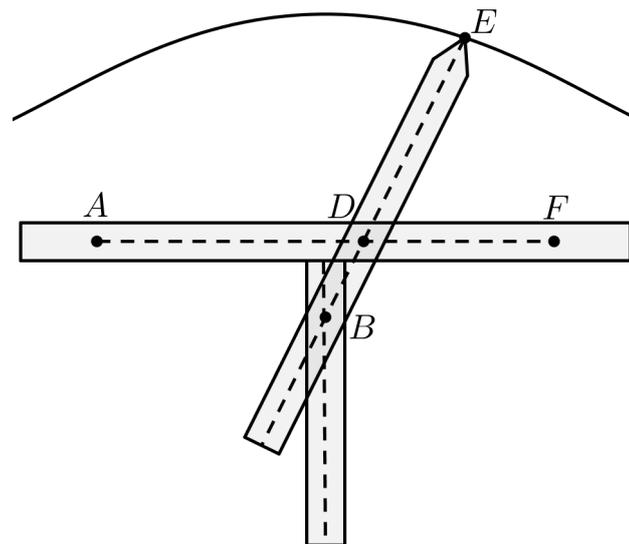


Figura 3.11: Esboço do dispositivo mecânico idealizado por Nicomedes para desenhar um ramo da Conoide

## CAPÍTULO 4

---

### Curva do Centro

---

Esta curva descreve a posição do centro da roda dianteira do carro ao percorrer a rampa, por isso o nome *curva do centro*. Ela é o conjunto de pontos que solucionam o seguinte problema: seja o  $\triangle ABO$  retângulo em  $B$ , com altura  $AB = r$  e ponto  $O$  fixo. Encontrar o lugar dos pontos  $P$  quando o ponto  $B$  varia sobre a reta  $x$ , tais que  $A, O, P$  sejam colineares e  $AP = d$  (figura 4.1).

O estudo dessa curva se faz necessário pelo fato de implicar diretamente na resolução do problema, uma vez que a curva do centro e a curva da rampa estão relacionadas. Imaginemos uma circunferência de raio  $r$  tangente a uma reta e percorrendo-a. Qual a relação entre os pontos de tangência da circunferência com a reta e o caminho descrito pelo centro da circunferência? Os pontos de ambas as curvas desta situação são equidistantes, ou seja, obtemos retas paralelas, cuja distância é  $r$ . Podemos utilizar esse raciocínio para compreender a relação entre a curva da rampa e a curva do centro. A curva do centro é descrita quando o ponto de tangência da circunferência dianteira move-se sobre a rampa. E, como no exemplo anterior, as curvas equidistam. Assim, por meio de resultados já explicitados de curvas planas e paralelas, é possível expressar a equação da curva da rampa utilizando a equação da curva do centro.

Conhecida a condição geométrica imposta sobre os pontos da curva, vamos encontrar a equação  $F(x, y) = 0$  do conjunto dos pontos que a satisfaz,

considerando  $\overline{AB} = r = 1$ .

## 4.1 Equação da Curva do Centro

Vamos considerar que  $\overline{AP} > \overline{AO}$ , pois diante do nosso problema o ponto  $O$  é o vértice do degrau e durante o movimento de descida ele fica entre o ponto  $A$  e o ponto  $P$ . Como o ponto  $O$  representa o vértice do degrau, uma escolha adequada é coincidi-lo com a origem do plano cartesiano, de acordo com a figura 4.1:

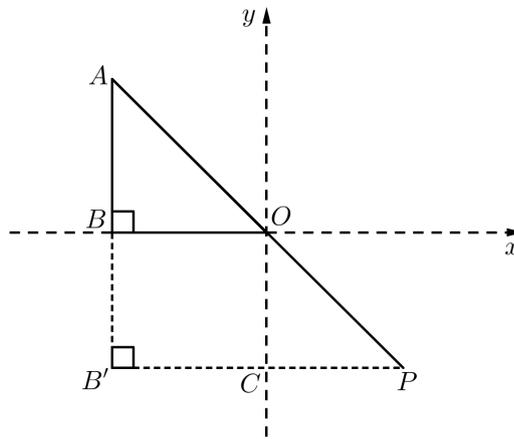


Figura 4.1: Problema representado no plano cartesiano.

Na figura temos que:  $P = (x, -y)$ ,  $\overline{AB'} = 1 - y$  e  $\overline{AP} = d$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no  $\triangle AB'P$ , tem-se  $\overline{B'P} = \sqrt{d^2 - (1 - y)^2}$ , com  $d^2 - (1 - y)^2 \geq 0$ ; essa restrição para o parâmetro  $d$  será analisada mais adiante. Como o  $\triangle AB'P \sim \triangle OCP$  obtemos a seguinte razão:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{B'P}}{\overline{AB'}} \Rightarrow \frac{x}{-y} = \frac{\sqrt{d^2 - (1 - y)^2}}{1 - y} \Rightarrow x = \frac{-y\sqrt{d^2 - (1 - y)^2}}{1 - y}$$

Fazendo as devidas manipulações obtemos:

$$(1 - y)^2(x^2 + y^2) - d^2y^2 = 0$$

Podemos encontrar a equação  $F(x, y) = 0$  que descreve a curva do centro para parâmetros quaisquer  $r$  e  $d$ , com o cuidado de tomar  $d - r \geq -y$ . Utilizando raciocínio análogo obtemos:

$$(r - y)^2(x^2 + y^2) - d^2y^2 = 0 \quad (4.1)$$

Essa equação descreve a Concoide de Nicomedes.

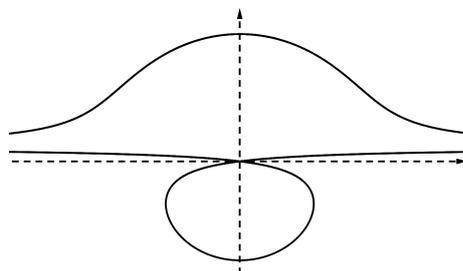


Figura 4.2: Concoide de Nicomedes com parâmetros  $r = 1$  e  $d = 8$ .

Vamos analisar a restrição para o parâmetro  $d$  que surgiu nas manipulações algébricas anteriores:

$$d^2 - (1 - y)^2 \geq 0 \Rightarrow d^2 \geq (1 - y)^2$$

como  $\overline{AP} = d > 0$  e  $\overline{AB'} = 1 - y > 0$ , segue que:

$$d \geq 1 - y \Rightarrow d - 1 \geq -y$$

Podemos concluir geometricamente o fato de que  $d > 1 - y$  observando o triângulo  $AB'P$ , já que  $d$  é a hipotenusa e  $1 - y$  é cateto.

A desigualdade  $-y \leq d - 1$ , fazendo uma interpretação de acordo com o problema da rampa, significa que a altura do degrau  $\overline{OC} = -y$  pode ter no máximo  $d - 1$  unidades. Exemplificando, se o comprimento do entre eixos do veículo for  $d = 8$ , o degrau poderá ter no máximo 7 unidades de altura. O parâmetro  $r$  do raio da circunferência pode ser interpretado como a distância entre a curva da rampa e do centro.

## 4.2 Forma Paramétrica

A função  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , com  $t \in \mathbb{R}$ , é a parametrização do conjunto de pontos da curva procurada. Vamos encontrar as funções coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$ .

Como em nosso problema temos um triângulo retângulo, é natural que um dos ângulos desse triângulo sirva como variável  $t$  da função. A figura 4.3 ilustra o problema inserido adequadamente no sistema de eixos ortogonais.

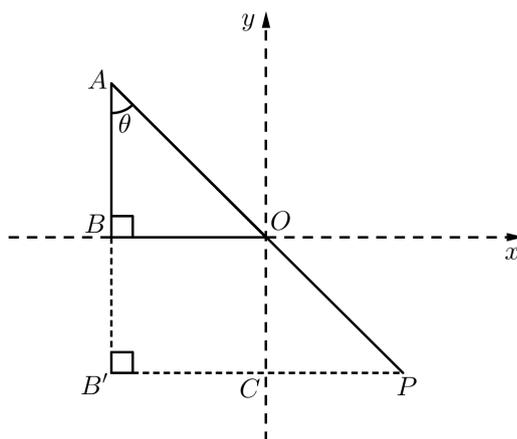


Figura 4.3: Problema representado no plano cartesiano.

Para encontrar a função  $y$ , vamos utilizar a razão seno no triângulo  $AB'P$ :

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{\overline{B'P}}{\overline{AP}} \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{d^2 - (1-y)^2}}{d} \\ d \sin(\theta) &= \sqrt{d^2 - (1-y)^2} \Rightarrow d^2 \sin^2(\theta) = d^2 - (1-y)^2 \\ d^2 \sin^2(\theta) - d^2 &= -(1-y)^2 \Rightarrow (1-y)^2 = d^2(1 - \sin^2(\theta)) \\ (1-y)^2 &= d^2 \cos^2(\theta) \Rightarrow 1-y = d \cos(\theta) \\ -y &= d \cos(\theta) - 1 \Rightarrow y = 1 - d \cos(\theta)\end{aligned}$$

Para escrevermos  $x$  em função de  $\theta$ , vamos primeiro escrever  $x$  em função de  $y$ . Basta utilizarmos a razão de semelhança nos triângulos  $AB'P$  e  $OCP$ . Note que:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{B'P}}{\overline{AB'}} \Rightarrow \frac{x}{-y} = \frac{\sqrt{d^2 - (1-y)^2}}{1-y} \Rightarrow x = \frac{-y\sqrt{d^2 - (1-y)^2}}{1-y}$$

Sabemos que  $d \sin(\theta) = \sqrt{d^2 - (1-y)^2}$ , assim obtemos:

$$x = \frac{-y(d \sin(\theta))}{1-y}$$

Como  $y = 1 - d \cos(\theta)$ , segue que:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(1 - d \cos(\theta))d \sin(\theta)}{1 - (1 - d \cos(\theta))} = \frac{(d \cos(\theta) - 1)d \sin(\theta)}{d \cos(\theta)} = \\ &= \frac{d^2 \sin(\theta) \cos(\theta) - d \sin(\theta)}{d \cos(\theta)} = d \sin(\theta) - \tan(\theta)\end{aligned}$$

Assim, tomando  $\theta = t$ , a curva do centro parametrizada é representada pela função:

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \alpha(t) = (d \sin(t) - \tan(t), 1 - d \cos(t))$$

**Proposição 4.2.1.** *A curva do centro  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $\alpha(t) = (d \sin(t) - \tan(t), 1 - d \cos(t))$  é regular.*

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $\forall t \in \mathbb{R}$  tem-se  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ . A derivada de  $\alpha$  é dada por:

$$\alpha'(t) = (d \cos(t) - r \sec^2(t), d \sin(t))$$

Vamos supor que  $\alpha$  possui um ponto de singularidade, ou seja,  $\exists t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha'(t_0) = (0, 0)$ . Assim

$$d \cos(t_0) - r \sec^2(t_0) = 0 \quad \text{e} \quad d \sin(t_0) = 0$$

Da equação  $d \sin(t_0) = 0$ , obtemos  $t_0 = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Deste modo  $t_0 = k\pi$  deve ser solução da equação  $d \cos(t_0) - r \sec^2(t_0) = 0$ . Contudo,

$$d \cos(k\pi) - r \sec^2(k\pi) = d(\pm 1) - r \frac{1}{\cos^2(k\pi)} = \pm d - r$$

Como  $d \neq r$ , conclui-se que  $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Ou seja,  $\alpha$  é regular.  $\square$

### 4.3 A curva do Centro e a Concoide de Nicomedes

Uma pergunta surgiu naturalmente ao resolver o problema da curva: porque tal curva descreve uma Concoide? A curva do centro satisfaz, implicitamente, as condições que definem uma concoide. Aqui justificaremos porque a curva do centro, da forma como ela é definida, descreve uma concoide, ou seja, mostraremos que as definições são equivalentes. Se a curva do centro é uma concoide, então devemos ter um pólo  $O$ , um ponto  $P$  que varia sobre a reta suporte e dois pontos  $A$  e  $B$  de modo que  $d(A, P) = d(B, P) = r$ . Além disso, os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $O$  e  $P$  devem ser colineares. De acordo com a formulação do problema, os pontos  $A$ ,  $O$  e  $P$  são colineares. O ponto  $O$  é fixo e  $d(A, P) = 8$ . Quando o carro faz o movimento de descida o ponto  $A$  varia sobre a reta suporte  $y = 1$ , ou seja, o ponto  $P$  pertence a um dos ramos

do lugar geométrico definido pela conchoide de Nicomedes. Nesse problema se fez uso apenas de um ramo da conchoide para a sua solução, por isso o ponto  $B$  não é necessário.

Uma vantagem notada nessa equivalência entre definições é que as deduções das formas  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e  $F(x, y) = 0$  ocorreram de forma natural, visto que na definição da curva do centro fazemos uso de um triângulo retângulo, onde foi possível aplicar semelhança de triângulos e razões trigonométricas para tais deduções.

Por meio de uma abordagem indireta, resolvendo outro problema aparentemente sem relação nenhuma com a conchoide de Nicomedes, foi possível deduzir a sua forma algébrica e encontrar uma aplicação em um problema relacionado a curva minimizante.

## CAPÍTULO 5

---

### Rampa

---

Agora que já conhecemos a curva parametrizada que descreve o movimento do ponto  $P$ , definida pela função  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $\alpha(t) = (d \sin(t) - \tan(t), 1 - d \cos(t))$ , podemos encontrar a função que representa a curva descrita pela rampa. O raciocínio se resume em encontrar o vetor de comprimento  $r = 1$  perpendicular à curva do centro, e deslocar o ponto  $P$  por meio deste vetor para o interior da curva, obtendo o ponto  $T$ .

Considerando os parâmetros  $\overline{AB} = r = 1$  e  $\overline{AP} = d$ , vamos de início encontrar o vetor tangente à curva  $\alpha$ . As coordenadas do vetor tangente são dadas por  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ . Assim

$$\begin{aligned}x'(t) &= (d \sin(t) - \tan(t))' \\ &= (d \sin(t))' - (\tan(t))' \\ &= d \cos(t) - \sec^2(t)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}y'(t) &= (1 - d \cos(t))' \\ &= d \sin(t)\end{aligned}$$

Logo

$$\alpha'(t) = (d \cos(t) - \sec^2(t), d \sin(t))$$

Conhecido o vetor tangente  $\alpha'(t)$ , agora vamos rotacioná-lo em  $90^\circ$ , obtendo o vetor perpendicular a  $\alpha$ . A decisão de rotacionar o vetor tangente em  $90^\circ$  foi tomada com base nos resultados observados experimentalmente no software *Geogebra*. Já foi explicado que o vetor tangente aponta para o sentido de percurso do traço da curva. E com base no traço da curva do centro foi possível identificar sua orientação. Sabemos que se um vetor possui coordenadas  $(a, b)$  o resultado de uma rotação positiva de  $90^\circ$  é obtido tomando-se o vetor  $(-b, a)$ . Agora nos resta fazer com que este vetor tenha módulo  $r = 1$ , para isto primeiro vamos normalizá-lo e em seguida multiplicá-lo pelo comprimento que desejamos.

O vetor unitário é dado por  $\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ . Primeiramente vamos encontrar  $\sqrt{a^2 + b^2}$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{(d \sin(t))^2 + (d \cos(t) - \sec^2(t))^2} \\ &= \sqrt{d^2 \sin^2(t) + \sec^4(t) - 2d \sec^2(t) \cos(t) + d^2 \cos^2(t)} \\ &= \sqrt{d^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + \sec^4(t) - 2d \frac{1}{\cos^2(t)} \cos(t)} \\ &= \sqrt{d^2 + \sec^4(t) - 2d \frac{1}{\cos(t)}} \\ &= \sqrt{d^2 + \sec^4(t) - 2d \sec(t)} \\ &= \sqrt{\sec^4(t) - 2d \sec(t) + d^2}\end{aligned}$$

Assim o vetor normalizado é dado por

$$n(t) = \left( \frac{-d \sin(t)}{\sqrt{\sec^4(t) - 2d \sec(t) + d^2}}, \frac{d \cos(t) - \sec^2(t)}{\sqrt{\sec^4(t) - 2d \sec(t) + d^2}} \right)$$

Como estamos interessados no vetor de comprimento  $r = 1$ , basta tomarmos o próprio  $n(t)$ . Desta forma o ponto  $T$  que é o resultado da adição do vetor  $n(t)$  ao ponto  $P$  é dado por:

$$T = n(t) + P$$

$$T = \left( \frac{-d \sin(t)}{\sqrt{\sec^4(t) - 2d \sec(t) + d^2}}, \frac{d \cos(t) - \sec^2(t)}{\sqrt{\sec^4(t) - 2d \sec(t) + d^2}} \right) + (d \sin(t) - \tan(t), 1 - d \cos(t))$$

$$T = \left( \frac{-d \sin(t)}{\sqrt{\sec^4(t) - 2d \sec(t) + d^2}} + d \sin(t) - \tan(t), \frac{d \cos(t) - \sec^2(t)}{\sqrt{\sec^4(t) - 2d \sec(t) + d^2}} + 1 - d \cos(t) \right)$$

Assim a função parametrizada que descreve a curva rampa pode ser definida por:

$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \beta(t) = (i(t), j(t)) = T$$

Na figura 5.1 a curva  $\beta$  é representado pelo traço vermelho e a curva  $\alpha$  é representada pelo traço preto.

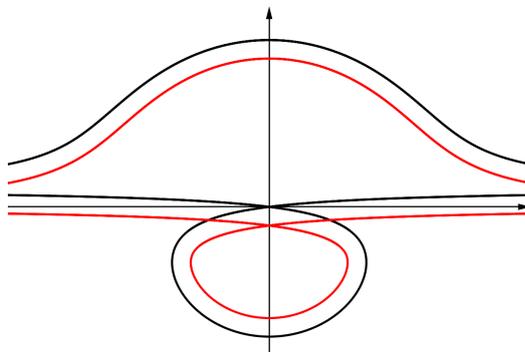


Figura 5.1: Curva do centro (preta) e curva da rampa (vermelha), com parâmetros  $r = 1$  e  $d = 8$ .

## 5.1 Curva da Rampa com Parâmetros Quaisquer

Seja  $\alpha$  a curva do centro. Vamos obter a forma parametrizada de  $\alpha$ .

Seja o  $\triangle ABO$  retângulo em  $B$ , com altura  $AB = r$  e ponto  $O$  fixo. Encontrar o lugar do ponto  $P$  quando o ponto  $B$  varia sobre a reta  $x$ , tais que  $A, O, P$  sejam colineares e  $AP = d$ .

Como  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , vamos tomar como parâmetro o ângulo  $\angle BAO$ . Note na figura que  $AB = r$  e  $AP = d$ .

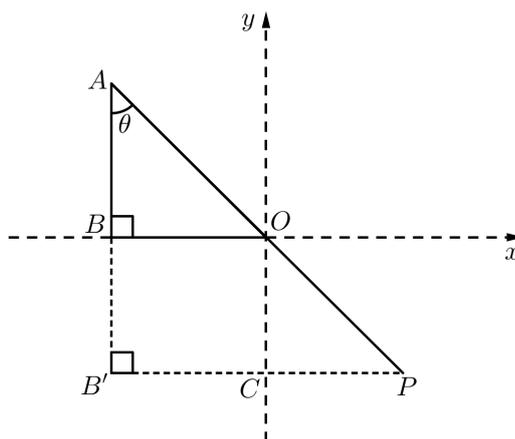


Figura 5.2: Problema representado no plano cartesiano.

Para encontrarmos a função  $y$ , utilizemos a razão seno no triângulo  $AB'P$ :

$$\begin{aligned}
\sin(s) &= \frac{B'P}{AP} \Rightarrow \sin(s) = \frac{\sqrt{d^2 - (r-y)^2}}{d} \Rightarrow \\
&\Rightarrow d \sin(s) = \sqrt{d^2 - (r-y)^2} \Rightarrow d^2 \sin^2(s) = d^2 - (r-y)^2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow d^2 \sin^2(s) - d^2 = -(r-y)^2 \Rightarrow (r-y)^2 = d^2(1 - \sin^2(s)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow (r-y)^2 = d^2 \cos^2(s) \Rightarrow r-y = d \cos(s) \Rightarrow \\
&\Rightarrow y = r - d \cos(s)
\end{aligned}$$

Ou seja

$$y(s) = r - d \cos(s)$$

Para escrevermos  $x$  em função de  $s$ , vamos primeiro colocá-lo em função de  $y$ . Basta utilizarmos a razão de semelhança nos triângulos  $AB'P$  e  $OCP$ . Assim:

$$\frac{CP}{OC} = \frac{B'P}{AB'} \Rightarrow \frac{x}{-y} = \frac{\sqrt{d^2 - (r-y)^2}}{r-y} \Rightarrow x = \frac{-y\sqrt{d^2 - (r-y)^2}}{r-y}$$

Como  $d \sin(s) = \sqrt{d^2 - (r-y)^2}$ , então

$$x = \frac{-y(d \sin(s))}{r-y}$$

Como  $y = r - d \cos(s)$ , segue que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(r - d \cos(s))d \sin(s)}{r - (r - d \cos(s))} = \frac{(d \cos(s) - r)d \sin(s)}{d \cos(s)} \\
&= \frac{d^2 \sin(s) \cos(s) - rd \sin(s)}{d \cos(s)} = d \sin(s) - r \tan(s)
\end{aligned}$$

Assim

$$x(s) = d \sin(s) - r \tan(s)$$

Portanto, conclui-se que

$$\alpha(s) = (d \sin(s) - r \tan(s), r - d \cos(s)), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

É importante observar que o radical  $\sqrt{d^2 - (r-y)^2}$  implica a seguinte restrição:

$$d - r \geq -y$$

Agora vamos obter a curva da rampa. Seja  $\beta$  a curva da rampa. Como  $\beta$  é paralela a  $\alpha$ , então

$$\beta(s) = \alpha(s) + rn(s)$$

Note que, como  $\|\beta(s) - \alpha(s)\| = r, \forall s \in \mathbb{R}$ , podemos interpretar o valor de  $r$  como o raio da circunferência. Assim, o parâmetro  $r$  da curva do centro é o mesmo que define a distância entre  $\alpha$  e  $\beta$ .

O vetor  $t(s)$  unitário e tangente à curva  $\alpha$  é dado por  $t(s) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$ , como

$$\alpha'(s) = (d \sin(s) - r \tan(s), r - d \cos(s))' \Rightarrow \alpha'(s) = (d \cos(s) - r \sec^2(s), d \sin(s))$$

Segue que

$$t(s) = \frac{(d \cos(s) - r \sec^2(s), d \sin(s))}{\|\alpha'(s)\|}$$

Para encontrarmos  $n(s)$  devemos rotacionar  $t(s)$  perpendicularmente. Contudo,  $n(s)$  deve apontar para a direção certa, que de acordo com o problema é o interior da curva. Para descobrir a orientação da curva do centro, plotamos a função com parâmetro  $s$  no *Geogebra* e analisamos o comportamento do ponto  $\alpha(s)$  quando o parâmetro  $s$  variava no conjunto dos reais. Assim, concluímos que a orientação da curva é dada de acordo com o traço abaixo:

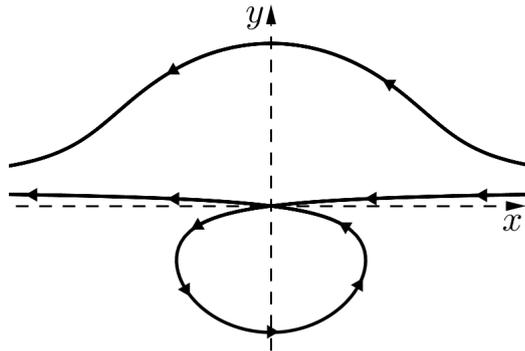


Figura 5.3: Orientação da curva do centro.

Conclui-se com base nesses argumentos, que devemos rotacionar  $t(s)$  num ângulo de  $90^\circ$ , ou seja

$$n(t) = \frac{(-d \sin(s), d \cos(s) - r \sec^2(s))}{\|\alpha'(s)\|}$$

Podemos encontrar o vetor normal à curva  $\alpha$ , utilizando argumentos algébricos, sem depender do software *Geogebra*. A curva do centro, da forma como ela é definida, sempre vai passar pelo ponto  $(0, 0)$ , já que o ponto  $O$  pertence a origem do plano cartesiano. Além disso, os valores de  $y$  no intervalo em que o ponto  $P$  (centro da roda dianteira) percorre, são negativos. Assim, podemos tomar um vetor normal a curva  $\alpha$  no ponto  $O$  e analisar o valor do  $y$ . Se  $y < 0$ , então esse é o vetor que estamos interessados.

Considerando parâmetros dados tal que  $r = 1$  e  $d = 8$ , vamos encontrar  $s$  de modo que  $\alpha(s) = (0, 0)$ . Note no triângulo retângulo  $AB'P$  que  $P = (0, 0)$ , assim

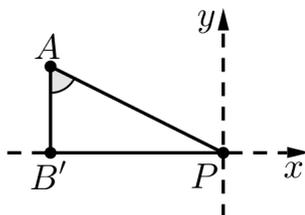


Figura 5.4: Triângulo retângulo com  $P = (0, 0)$

Usando a razão cosseno no ângulo  $A$ , obtemos

$$\cos(s) = \frac{AB'}{AP} \Rightarrow \cos(s) = \frac{1}{8}$$

ou seja

$$s = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$$

Vamos supor que o vetor normal seja dado por

$$n(t) = \frac{(-d \sin(s), d \cos(s) - r \sec^2(s))}{\|\alpha'(s)\|}$$

Assim, basta substituir  $s = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$  na função coordenada  $y$  e verificar se  $y < 0$ .

$$\begin{aligned} y(s) &= 8 \cos(s) - \sec^2(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow y\left(\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right) &= 8 \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right) - \sec^2\left(\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y\left(\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right) &= 8 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{\cos^2\left(\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow y\left(\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right) &= 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow y\left(\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right) &= 1 - 64 \Rightarrow \\ \Rightarrow y\left(\arccos\left(\frac{1}{8}\right)\right) &= -63 \end{aligned}$$

Como  $y < 0$ , segue que o vetor normal é dado por

$$n(t) = \frac{(-d \sin(s), d \cos(s) - r \sec^2(s))}{\|\alpha'(s)\|}$$

Logo, podemos concluir que a curva paralela a  $\alpha$  que aponta para o seu interior é dada por  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que:

$$\beta(s) = (d \sin(s) - r \tan(s), r - d \cos(s)) + r \left( \frac{-d \sin(s), d \cos(s) - r \sec^2(s)}{\sqrt{r^2 \sec^4(s) - 2dr \sec(s) + d^2}} \right)$$

## 5.2 Ponto Inicial da Rampa

O traço de  $\beta$  é uma curva paralela a conchoide de Nicomedes. A rampa é um subconjunto do traço de  $\beta$ . Assim, devemos ter um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , tal que  $\beta(a)$  é o ponto inicial da rampa e  $\beta(b)$  é o ponto final. Como  $\beta$  é paralela a  $\alpha$ , então  $\alpha(a)$  define o início da rampa e  $\alpha(b)$  o final.

Para encontrarmos o valor de  $a \in \mathbb{R}$ , devemos imprimir uma condição geométrica sobre o ponto  $\alpha(a)$ . Vamos analisar a figura 5.5 que ilustra a posição do centro da roda dianteira ao iniciar o movimento de descida da rampa.

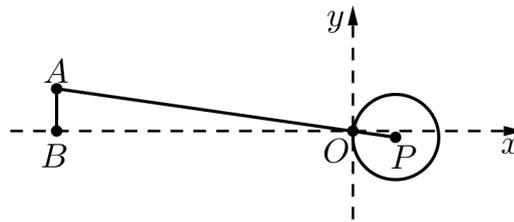


Figura 5.5: Posição do ponto  $P$  no início da curva do centro.

Como a circunferência dianteira, no início do movimento de descida, tangencia o eixo  $y$ , logo  $x = r$ . Assim, basta substituímos na equação 4.1 para descobrirmos o valor do  $y$ . Note que com essa condição nós vamos descobrir a imagem da função  $\alpha$  no ponto  $a$ , ou seja, os valores de  $x(a)$  e  $y(a)$ . Para fins mais práticos, podemos tomar como parâmetros  $r = 1$  e  $d = 8$ . Assim, a equação 4.1 fica

$$(1 - y)^2(x^2 + y^2) - 64y^2 = 0$$

Substituindo  $x = 1$ , temos

$$(y - 1)^2(1 + y^2) - 64y^2 = 0$$

Fazendo as devidas manipulações, chegamos a equação de quarto grau

$$y^4 - 2y^3 - 62y^2 - 2y + 1 = 0 \quad (5.1)$$

Em seguida, discorreremos sobre os métodos de resolução de equações do terceiro e quarto graus, para, na seção 5.4, retornarmos a resolução desta equação.

### 5.3 Soluções das Equações de 3º e 4º graus

Numa época em que a álgebra era sincopada, os matemáticos faziam uso da retórica para resolver equações e demonstrar propriedades algébricas. Uma equação do tipo  $ax^3 + ax = b$  era referenciada como "cubo e coisa igual a número". É realmente de se admirar como alguns matemáticos com tão poucos símbolos algébricos disponíveis conseguiram desenvolver métodos gerais de resoluções de equações algébricas.

O grande responsável por divulgar no ano de 1545 para a comunidade científica os métodos de resolução de equações de 3º e 4º grau foi Gerônimo Cardano (1501-1576). Dentre os matemáticos envolvidos com essa descoberta, Cardano foi o mais conhecido, além de ter uma vasta gama de conhecimento era reconhecido amplamente pelos seus trabalhos como médico. Em sua obra, intitulada *Ars Magna*, explanou os dois métodos gerais de resolução de equação do 3º e 4º grau, fazendo referência aos seus descobridores: Niccolò Tartaglia (1500-1557) e Ludovico Ferrari (1552-1565).

O apelido Tartaglia (gago) decorre de uma gagueira ocorrida por um trauma na infância. Em 1512, durante o saqueamento da cidade de Brescia, onde nasceu, Niccolò Fontana (Tartaglia) escondeu-se em uma catedral. Contudo, os soldados franceses o encontraram em um deles, num gesto de crueldade, desferiu um golpe que lhe cortou a mandíbula e palato. Esse ferimento provocou-lhe uma grave seqüela física na face e na fala.

No ano de 1541, Tartaglia desenvolveu seu método. Por meio da substituição  $y = x - \frac{a_2}{3a_1}$  na equação  $a_1y^3 + a_2y^2 + a_3x + a_4 = 0$ , eliminou o termo do  $x^2$ , ficando com uma equação do tipo:  $x^3 + ax = b$ . Vale lembrar que Tartaglia, Cardano e Ferrari, não trabalhavam com coeficientes negativos, então uma equação desse tipo devia ser analisada em três casos:

$$x^3 + ax = b$$

$$x^3 = ax + b$$

$$x^3 + b = ax$$

Tartaglia chamava cada um desses casos de *operações*.

Um fato que geralmente passa despercebido, apesar de constar nos registros históricos, é que muito antes de Tartaglia, cerca de 30 anos antes, um professor de matemática na Universidade de Bolonha cujo nome é Scipione del Ferro (1465-1562), já havia elaborado um método de resolução de uma cúbica qualquer. Antes de morrer del Ferro ensinou seu método a dois discípulos, que futuramente passariam essa informação para Cardano [6].

### 5.3.1 O Método de Tartaglia

Partindo da hipótese de que a equação a ser resolvida está na forma:  $x^3 + ax = b$ , onde  $a = \frac{a_3}{a_1} - \frac{(a_2)^2}{3(a_1)^2}$  e  $b = \frac{2(a_2)^3}{27(a_1)^3} - \frac{a_2 a_3}{3(a_1)^2} + \frac{a_4}{a_1}$  vamos comparar com o desenvolvimento do seguinte binômio:

$$\begin{aligned}(u - v)^3 &= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 \\(u - v)^3 &= uv(-3u + 3v) + u^3 - v^3 \\(u - v)^3 &= 3uv(-u + v) + u^3 - v^3 \\(u - v)^3 &= -3uv(u - v) + u^3 - v^3 \\u^3 - v^3 &= (u - v)^3 + 3uv(u - v)\end{aligned}$$

ou seja, se  $a = 3uv$  e  $b = u^3 - v^3$ , então uma das soluções da equação será dada por  $x = u - v$ . Agora vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}3uv &= a \Leftrightarrow uv = \frac{a}{3} \\u^3 - v^3 &= b\end{aligned}$$

Elevando ao cubo a primeira equação, obtemos:  $u^3v^3 = \left(\frac{a}{3}\right)^3$ , assim podemos fazer a troca de incógnita:

$$U = u^3 \quad \text{e} \quad V = v^3$$

Logo teremos um novo sistema:

$$\begin{aligned}UV &= \left(\frac{a}{3}\right)^3 \\U - V &= b \Leftrightarrow U + (-V) = b\end{aligned}$$

Da propriedade de soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau temos que, se  $x_1$  e  $x_2$  são raízes de uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad \text{com } a \neq 0$$

então  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$  e  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ , segue que  $U$  e  $-V$  são as raízes da equação

$$X^2 - bX + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

cujas soluções são:

$$\begin{aligned}X &= \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \Rightarrow \\U &= \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad -V = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}\end{aligned}$$

Como  $u = \sqrt[3]{U}$  e  $v = -\sqrt[3]{V}$ , segue que

$$x = u - v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

### 5.3.2 Solução de Ferrari

Pouco tempo depois de Tartaglia ter escrito um método de resolução de uma cúbica, Cardano se deparou com um problema que recaía em uma equação de 4º grau, apesar da fama de gênio, este não foi capaz de resolver tal problema. Contudo, Cardano tinha um discípulo, Lodovico Ferrari (1552-1565), que conseguiu encontrar um método de resolução para equações de 4º grau.

Resumidamente, seu método consiste em reduzir por meio da substituição  $y = x - \frac{b}{4a}$ , uma equação geral da forma

$$ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + e = 0$$

para uma equação do tipo

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Onde,

$$p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}, \quad q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3} \quad \text{e} \quad r = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}$$

Vamos acrescentar uma incógnita  $s$  à última equação de modo que adicionando e subtraindo  $2sx^2 + s^2$  no primeiro membro da igualdade obtemos:

$$\begin{aligned} x^4 + 2sx^2 + s^2 - [(2s - p)x^2 - qx + s^2 - r] &= 0 \\ (x^2 + s)^2 &= (2s - p)x^2 - qx + s^2 - r \end{aligned}$$

No 2º membro da última igualdade, vamos impor uma condição sobre os coeficientes de  $x$ , de modo que a equação do 2º grau possua duas raízes idênticas, assim poderemos escrever a equação como

$$(x^2 + s)^2 = (2s - p)(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{onde } x_1 = x_2$$

Ou ainda

$$(x^2 + s)^2 = (2s - p)(x - x_1)^2 \tag{5.2}$$

Para que isso ocorra o discriminante da equação

$$(2s - p)x^2 - qx + (s^2 - r) = 0$$

deve ser nulo. Logo

$$q^2 - 4(2s - p)(s^2 - r) = 0 \quad (5.3)$$

Assim, as soluções  $x_1$  e  $x_2$ , serão dadas por:

$$x_1 = x_2 = \frac{q}{2(2s - p)}$$

Manipulando adequadamente a equação 5.3 obtemos

$$8s^3 - 4ps^2 - 8rs + (4pr - q^2) = 0$$

Mas, esta última equação, conhecida como *cúbica resolvente*, pode ser resolvida pelos métodos de Tartaglia. Assim, encontrando o valor de  $s$ , bastará substituir na equação 5.2 e encontrar o valor de  $x$  extraindo raízes quadradas. Obtendo a seguinte equação:

$$\left(x^2 + s + \sqrt{2s - px} - \frac{q}{2\sqrt{2s - p}}\right) \left(x^2 + s - \sqrt{2s - px} + \frac{q}{2\sqrt{2s - p}}\right) = 0 \quad (5.4)$$

De cada um dos fatores desta equação obteremos duas raízes, totalizando as quatro soluções da equação quártica. Restando apenas substituir as raízes,  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ , na equação  $y = x - \frac{b}{4a}$  [12, 6].

## 5.4 Solução da Equação 5.1

A equação 5.1 é uma quártica dada por

$$y^4 - 2y^3 - 62y^2 - 2y + 1 = 0$$

Como  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = -62$ ,  $d = -2$  e  $e = 1$ , vamos encontrar os valores de  $p$ ,  $q$  e  $r$  da equação sem o termo cúbico dada por

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

onde

$$y = x - \frac{b}{4a} \quad (5.5)$$

Assim

$$\begin{aligned} p &= \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2} = \frac{-127}{2} \\ q &= \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3} = -65 \\ r &= \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4} = \frac{-251}{16} \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$x^4 - \frac{127}{2}x^2 - 65x - \frac{251}{16} = 0$$

Fazendo as devidas manipulações algébricas obtemos a seguinte equação:

$$\left(x^2 + s + \sqrt{2s - p}x - \frac{q}{2\sqrt{2s - p}}\right) \left(x^2 + s - \sqrt{2s - p}x + \frac{q}{2\sqrt{2s - p}}\right) = 0$$

Cujas soluções são dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2s - p} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s - p + \frac{2q}{\sqrt{2s - p}}} \\ x_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2s - p} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s - p + \frac{2q}{\sqrt{2s - p}}} \\ x_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{2s - p} + \frac{1}{2}\sqrt{-2s - p - \frac{2q}{\sqrt{2s - p}}} \\ x_4 &= \frac{1}{2}\sqrt{2s - p} - \frac{1}{2}\sqrt{-2s - p - \frac{2q}{\sqrt{2s - p}}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

O valor de  $s$  pode ser encontrado por meio da cúbica resolvente

$$8s^3 + 254s^2 + \frac{251}{2}s - \frac{1923}{8} = 0$$

onde  $a_1 = 8$ ,  $a_2 = 254$ ,  $a_3 = \frac{251}{2}$  e  $a_4 = -\frac{1923}{8}$ .

Assim, teremos que encontrar o valor de  $s$ , que utilizando as soluções 5.6, nos permitirá encontrar os valores de  $x$ . Por fim, substituiremos em 5.5 para encontrar os valores de  $y$ .

Na cúbica resolvente vamos fazer a seguinte substituição

$$s = t - \frac{127}{12} \quad (5.7)$$

obtendo

$$t^3 - \frac{961}{3}t = \frac{58718}{27}$$

Por meio do método de Tartaglia é possível resolver essa equação. Deste modo, fazendo as devidas substituições, obtemos as seguintes soluções<sup>1</sup> para

<sup>1</sup>Para evitar erros de cálculos, as soluções foram encontradas com auxílio do software WolframAlpha.

a equação 5.1:

$$y_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{65} - \sqrt{62 - 2\sqrt{65}} \right) \approx -6,9177$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{65} + \sqrt{62 - 2\sqrt{65}} \right) \approx -0,14456$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{65} - \sqrt{2(31 + \sqrt{65})} \right) \approx 0,11173$$

$$y_4 = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{65} + \sqrt{2(31 + \sqrt{65})} \right) \approx 8,9505$$

Agora que encontramos as soluções da equação, devemos decidir qual delas servirá para o nosso problema. Para tal, devemos usar a seguinte condição:

$$d - r \geq -y$$

Para  $y_1 \approx -6,9177$  temos

$$8 - 1 \geq -(-6,9177)$$

$$7 \geq 6,9177$$

Para  $y_2 \approx -0,14456$  temos

$$8 - 1 \geq -(-0,14456)$$

$$7 \geq 0,14456$$

Não é necessário fazer a verificação de  $y_3$  e  $y_4$ , já que as possíveis soluções são negativas. Note pela figura 5.5 que dentre as duas soluções negativas, devemos tomar a maior, assim a solução que satisfaz a condição proposta no problema é  $y_2$ . Ou seja, o par ordenado que representa o ponto de início da rampa é

$$\alpha(a) = \left( 1, \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{65} + \sqrt{62 - 2\sqrt{65}} \right) \right), \quad \text{para algum } a \in \mathbb{R}.$$

Agora vamos determinar o valor do parâmetro  $a$ . Basta utilizarmos o triângulo retângulo:

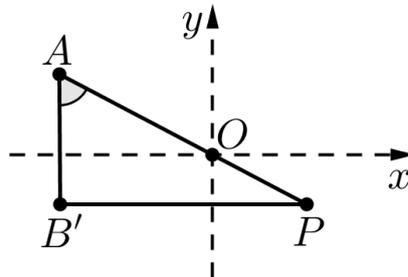


Figura 5.6: Triângulo retângulo com o ponto inicial da curva do centro  $P$  dado.

Onde  $P = (1, y_2)$ , com  $y_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{65} + \sqrt{62 - 2\sqrt{65}} \right)$ . Assim,  $m\angle A = a$ ,  $AB' = 1 - y_2$  e  $AP = 8$ . Utilizando a razão cosseno no ângulo  $A$  obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \frac{AB'}{AP} \Rightarrow \cos(a) = \frac{1 - y_2}{8} \Rightarrow a = \arccos \left( \frac{1 - y_2}{8} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = \arccos \left( \frac{1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{65} + \sqrt{62 - 2\sqrt{65}} \right)}{8} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a = \arccos \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \left( 1 - \sqrt{65} + \sqrt{62 - 2\sqrt{65}} \right) \right) \end{aligned}$$

## 5.5 Ponto Final da Rampa

O ponto  $\beta = (x(b), y(b))$ , depende da altura do degrau, assim, antes de partirmos para a dedução do valor do parâmetro  $b$  correspondente a coordenada que representa o final da curva da rampa, vamos admitir que o rampa tenha 3 unidades de altura. Com base na figura 5.7 podemos concluir que o ponto  $\alpha(b) = (x(b), y(b))$  é tal que  $y(b) = -2$ , já que a circunferência dianteira tangencia a reta  $y = -3$  (com base no problema, essa parte representa a rua).

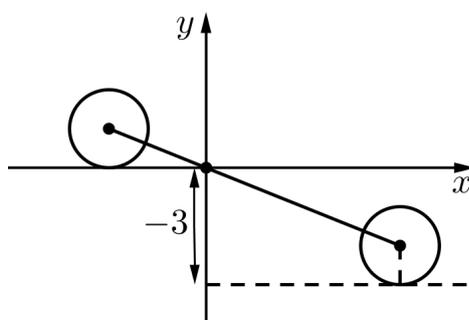


Figura 5.7: Posição da roda dianteira no final da rampa.

Como  $y(b) = r - d \cos(b)$ , tem-se  $r - d \cos(b) = -2$ . Como estamos trabalhando com um caso particular, onde  $r = 1$  e  $d = 8$ , temos:

$$1 - 8 \cos(b) = -2 \Rightarrow b = \arccos \left( \frac{3}{8} \right)$$

Agora, basta substituímos  $b = \arccos \left( \frac{3}{8} \right)$  na função  $\beta$ , para encontrarmos o par ordenado  $(x, y)$  que representa o final da rampa quando a altura do

degrau é 3 e os parâmetros são  $r = 1$  e  $d = 8$ . Como

$$\beta(s) = (d \sin(s) - r \tan(s), r - d \cos(s)) + r \left( \frac{-d \sin(s), d \cos(s) - r \sec^2(s)}{\sqrt{r^2 \sec^4(s) - 2dr \sec(s) + d^2}} \right)$$

Substituindo  $r = 1$ ,  $d = 8$  e  $b = \arccos\left(\frac{3}{8}\right)$ , obtemos:

$$\beta\left(\arccos\left(\frac{3}{8}\right)\right) = \left(x\left(\arccos\left(\frac{3}{8}\right)\right), y\left(\arccos\left(\frac{3}{8}\right)\right)\right)$$

Observe o resultado da curva da rampa, considerando o ponto inicial e o ponto final encontrado:

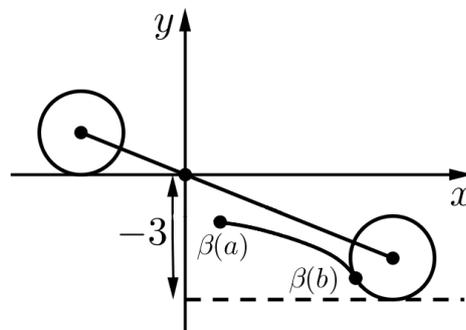


Figura 5.8: Traço da rampa restrito ao intervalo  $[a, b]$  que representam o início e o final da rampa, respectivamente.

### 5.5.1 Um Problema a ser Resolvido

De acordo com a forma em que problema foi elaborado e resolvido, é possível encontrar a curva  $\beta$  (rampa), considerando parâmetros  $r$  e  $d$ . Ou seja, conhecendo-se os valores do raio e da roda dianteira, é possível encontrar o traço da rampa. Assim, se quisermos identificar o ponto final da rampa precisaríamos ter como informação a altura do degrau onde essa rampa será construída. No ponto final  $\beta(b)$  encontrado no exemplo anterior, consideramos que a altura do degrau era de 3 unidades. Nesse contexto, surgiu o seguinte problema:

**Questão 5.5.1.** Considerando parâmetros  $r$  e  $d$  dados, encontre o maior valor da altura do degrau que podemos tomar, de modo que seja possível traçar a rampa.

Podemos compreender melhor essa situação analisando a figura 5.9 abaixo:

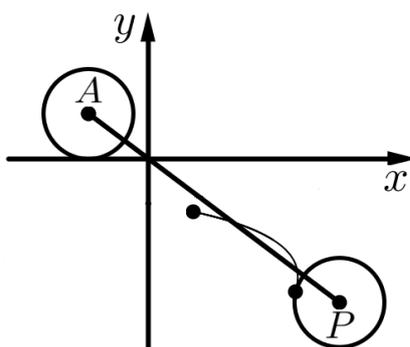


Figura 5.9: Entre-eixo  $\overline{AP}$  intersectando a rampa em dois pontos distintos.

Note na figura acima que a altura do degrau deve ter um valor máximo, já que o entre-eixo (segmento  $\overline{AP}$ ) intercepta a rampa em dois pontos diferentes, o que é impossível fisicamente. Assim, algo que pode-se concluir, é que o valor máximo para a altura do degrau ocorrerá quando  $\overline{AP}$  tangenciar a rampa.

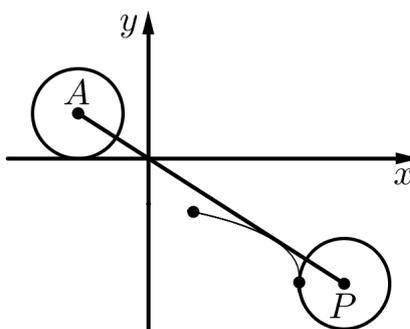


Figura 5.10: Segmento  $\overline{AP}$  tangenciando a rampa.

A questão a ser resolvida com base nisso, é de encontrar a condição que o ponto final da rampa deva satisfazer, de modo que  $\overline{AP}$  tangencie a rampa. Suspeitamos que a seguinte afirmação seja verdadeira:

**Proposição 5.5.2.** *Seja a curva do centro dada na forma  $F(x, y) = (r - y)^2(x^2 + y^2) - d^2y^2$ . Se  $\frac{dF}{dy} = 0$ , então  $\overline{AP}$  tangenciará a rampa.*

Podemos compreender melhor essa afirmação com base na figura abaixo

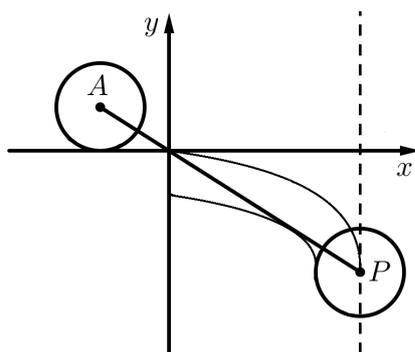


Figura 5.11: Ponto  $P$  onde a derivada da curva do centro em relação a  $y$  é zero.

Assim, se resolvermos a equação  $\frac{dF}{dy} = 0$  então encontraremos o ponto  $P$  e poderemos verificar, como o auxílio do software *Geogebra* se o segmento  $\overline{AP}$  tangenciará a rampa.

Seja  $F(x, y) = (r - y)^2(x^2 + y^2) - d^2y^2 = 0$ , fazendo as devidas manipulações obtemos a seguinte igualdade, que será usada, posteriormente:

$$r^2 + y^2 = \frac{d^2y^2}{(y - r)^2} \quad (5.8)$$

Fazendo  $\frac{dF}{dy} = 0$  temos que:

$2(y - r)(r^2 + y^2) + (y - r)^2 2y - 2d^2y = 0$  usando a equação 5.8, obtemos:

$$\begin{aligned} 2(y - r) \frac{d^2y^2}{(y - r)^2} + (y - r)^2 2y - 2d^2y &= 0 \\ \frac{2d^2y^2}{(y - r)} + 2y(y - r)^2 - 2d^2y &= 0 \\ \frac{2d^2y^2 + 2y(y - r)^3 - 2d^2y(y - r)}{(y - r)} &= 0 \\ 2d^2y^2 + 2y(y - r)^3 - 2d^2y(y - r) &= 0 \\ d^2y + (y - r)^3 - d^2(y - r) &= 0 \end{aligned}$$

Seja  $\bar{y} = y - r \Rightarrow y = \bar{y} + r$ , assim

$$\begin{aligned} d^2(\bar{y} + r) + \bar{y}^3 - d^2\bar{y} &= 0 \\ d^2\bar{y} + rd^2 + \bar{y}^3 - d^2\bar{y} &= 0 \\ \bar{y}^3 &= -rd^2, \quad \text{como } r = 1 \text{ e } d = 8 \\ \bar{y}^3 &= -64 \\ \bar{y} &= -4, \quad \text{logo } y = -3 \end{aligned}$$

Para acharmos o valor do  $x$  basta substituímos  $y = -3$  na equação 4.1:

$$\begin{aligned}(1 - y)^2(x^2 + y^2) - 64y^2 &= 0 \\ (1 - (-3)^2)(x^2 + (-3)^2) - 64(-3)^2 &= 0 \\ x &= \sqrt{27}\end{aligned}$$

Assim o ponto  $P$  que deve satisfazer a condição que suspeitamos ser verdadeira, deve ser

$$P = (\sqrt{27}, -3)$$

Plotando a curva  $\beta$  e o ponto  $P$  no *Geogebra*, obtivemos o gráfico da figura abaixo:

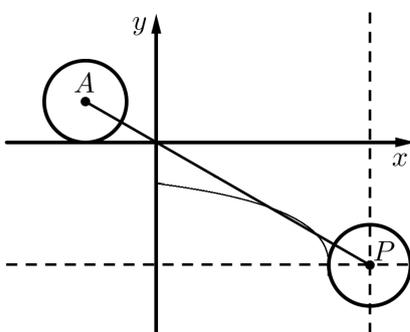


Figura 5.12: Curva  $\beta$  com parâmetros  $r = 1$  e  $d = 8$  com segmento  $\overline{AP}$  secante a rampa.

Note na figura acima que de acordo com as condições dadas, ainda assim o segmento  $\overline{AP}$  é secante a rampa. Ou seja, essa afirmação não é verdadeira para qualquer valor de  $r$  e  $d$ . O que podemos afirmar com certeza, é que o ponto  $P = (x, y)$ , tal que  $y = r - \sqrt[3]{rd^2}$  garantirá que para valores de  $y < r - \sqrt[3]{rd^2}$  o segmento  $\overline{AP}$  tocará a rampa em dois pontos diferentes.

---

### Conclusão

---

Ao nos debruçarmos sobre o problema de encontrar a forma algébrica da rampa, sequer imaginamos que precisaríamos utilizar métodos de resolução de equações do terceiro e quarto graus, falar sobre trisseção e neusis. A condição principal, ao discutir os possíveis temas dessa dissertação foi que fosse trabalhado um assunto novo para mim, algo que somasse a minha bagagem e experiência na área. Com certeza, os estudos feitos para a conclusão deste trabalho me tornou um professor mais capacitado.

Partimos inicialmente, apenas com a intenção de resolver o problema de encontrar a curva da rampa. Ao plotar a forma algébrica da curva do centro no *Geogebra* percebemos que seu traço coincidia com o traço da concoide de Nicomedes. Assim, naturalmente, o trabalho foi inclinando-se para alguns problemas clássicos, como trisseção e problema de neusis, já que a concoide está relacionada com tais problemas. Por meio de uma abordagem indireta, resolvendo outro problema aparentemente sem relação nenhuma com a concoide de Nicomedes, foi possível deduzir a forma algébrica da concoide e encontrar uma aplicação em um problema relacionado a curva minimizante.

Ao utilizarmos os conceitos apresentados sobre curvas paralelas, foi possível encontrar a curva da rampa para parâmetros quaisquer. A definição de curva paralela, tem como hipótese de que  $\alpha$  deve ser regular, deste modo foi necessário demonstrar que a curva do centro é regular. A curva do centro é dada por:

$$\alpha(s) = (d \sin(s) - r \tan(s), r - d \cos(s)), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

E a curva da rampa é dada por  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que:

$$\beta(s) = (d \sin(s) - r \tan(s), r - d \cos(s)) + r \left( \frac{-d \sin(s), d \cos(s) - r \sec^2(s)}{\sqrt{r^2 \sec^4(s) - 2dr \sec(s) + d^2}} \right)$$

Vale ressaltar a importância do uso do software *Geogebra* neste trabalho. Além de ter servido como ferramenta para a construção de todas as figuras dessa dissertação, foi útil no momento de verificarmos os cálculos e analisarmos o comportamento das curvas quando os parâmetros variavam. Outro software que foi utilizado e que desempenhou papel importante foi o *WolframAlpha*<sup>1</sup>. Com este software podemos verificar os cálculos na resolução da equação quártica.

Foi definido, neste trabalho o comprimento de uma curva num intervalo de seu domínio. Algo que nos surgiu, foi de calcular o comprimento da curva da rampa. Uma possibilidade para encontrar essa medida, é resolvendo a integral

$$\int_{s_0}^{s_1} \|\beta'(t)\| dt$$

onde  $s_0$  é o início da rampa e  $s_1$  é o parâmetro que define o final da rampa. Uma outra forma é provar que a roda traseira percorre o mesmo comprimento que a roda dianteira, a medida que o carro desce a rampa. Como a roda traseira percorre um segmento de reta, para encontrarmos o comprimento da rampa, restaria encontrar o comprimento percorrido pela roda traseira quando o ponto  $B$  varia sobre o eixo  $x$ . Tal afirmação não foi provada, porém, de modo empírico, utilizando o software *Geogebra*, verificamos que o comprimento da rampa pode ser obtido por meio de uma aproximação.

---

<sup>1</sup>WolframAlpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido pela Wolfram Research. É um serviço on-line que responde às perguntas diretamente, mediante o processamento da resposta extraída de base de dados estruturados, em lugar de proporcionar uma lista dos documentos ou páginas web que poderiam conter a resposta, tal como faziam os mecanismos de busca.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ALENCAR, H.; SANTOS, W. *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. IMPA, 2003.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3 ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- [3] CARMO, M. P. *Geometría Diferencial de Curvas y superficies*. 1 ed. Madrid: Alianza Editorial, 1990.
- [4] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas-SP: UNICAMP, 2004.
- [5] HOFFMANN, A. R. K. *Curvas Mecânicas: A Conchóide*. 88f. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2008.
- [6] MILIES, C. P. *A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau*. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n° 25, p. 16-22, SBM, 1987.
- [7] RODRIGUEZ, L. *Introdução à Geometria Diferencial*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [8] ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar, 2012.
- [9] RUIZ, C. P. *Curvas Paralelas*. Miscelânea Matemática, México, n° 21, p. 29-52, Univerdidad Panamericana, 1994.
- [10] SANTOS, J. C.; OLIVEIRA, A. C. *Implementação e Análise de Curvas e suas Propriedades em Software de Geometria Dinâmica*. Revista de Sistemas de Informação da FSMA, Macaé- RJ, n° 21, p. 35-50, FSMA, 2018.

- [11] SOUZA, J. M. R. *Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia*. 114f. Dissertação de Mestrado - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2001.
- [12] TAVARES, A. *Resolução da equação de 4º grau*. 2010. Disponível em: <<https://problemasteoremas.wordpress.com/2010/05/20/resolucao-da-equacao-do-4-C2%BA-grau-ou-quartica/>>. Acesso em: 28 ago. 2019.
- [13] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1990.