Wagner Luiz Moreira dos Santos

A Integral de Riemann Generalizada

Ouro Preto - Minas Gerais - Brasil

Abril de 2019

Wagner Luiz Moreira dos Santos

A Integral de Riemann Generalizada

Universidade Federal de Ouro Preto

Orientador: Prof. Dr.Sebastião Martins Xavier

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Fontes Santos

Ouro Preto - Minas Gerais - Brasil

Abril de 2019

S237i
Santos, Wagner Luiz Moreira.
A Integral de Riemann Generalizada [manuscrito]/ Wagner Luiz Moreira dos Santos. - 2019
70f.: il.: grafs.

Orientador: Prof. Dr.Sebastião Martins Xavier
Coorientador: Prof. Dr. Thiago Fontes Santos

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.
Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. Riemann, Integrais de. 2. Integrais Generalizadas. 3. Lebesgue, Integral de I. Xavier, Sebastião Martins. II. Santos, Thiago Fontes III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Integral Generalizada de Riemann.

CDU: 517.987.1

Catalogação: www.sisbin.ufop.br

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT

A integral de Riemann Generalizada

Autor(a): Wagner Luiz Moreira dos Santos

Dissertação defendida e aprovada, em **26 de Abril de 2019**, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Sebastião Martins Xavier - Orientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Thiago Fontes Santos - Coorientador
Universidade Federal de Ouro Preto

Jussara de Matos Moreira
Universidade Federal de Minas Gerais

Rodrigo Geraldo do Couto
Universidade Federal de Ouro Preto

Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas do meu convívio que acreditaram e contribuíram, mesmo que indiretamente, para a conclusão desta etapa. À minha mãe Maria José da Silva, por me mostrar a importância do estudo em nossas vidas. À minha esposa Luana Macedo, por ter sentido junto comigo, todas as angústias, lutas e felicidades, acompanhando cada passo de perto.

Aos amigos da turma de 2016 pelas ótimas histórias vividas e longos papos durante a exaustiva viagem semanal à UFOP. Obrigado pelas agradáveis lembranças que serão eternamente guardadas no coração e principlpamente ao meu orientador Sebastião Xavier, pelo empenho, paciência e credibilidade, pois sem seu apoio este trabalho não teria finalizado.

A todos os familiares e amigos que torceram e acreditaram na conclusão desta etapa, fico muito grato.

Ainda que eu caminhe pelo vale das sombras,
nenhum mal eu temerei, pois junto a mim estás.
(Bíblia Sagrada, Salmo 21)

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma breve introdução sobre a história da evolução no conceito de integral e resultados importantes sobre a Teoria de Integração.
Introduziremos a definição formal do conceito de Integral, segundo Riemann e suas propriedades, além da definição de funções Riemann Integráveis. Posteriormente, mostraremos a definição e propriedades da integral de Darboux, extendendo, essa ideia ao critério de integrabilidade de Lebesgue e finalizando com o conceito de de integral generalizada de Riemann.
Neste trabalho apresentaremos integral de Riemann generalizada que nos permitirá, de forma alternativa a usual, abordar o conceito de integral de Lebesgue. Nesta apresentação não necessitamos da construção da teoria de medida, ou seja, trata-se de uma abordagem diferente daquela que se estuda nos cursos de cálculo e análise.

Palavras-chave: Integrais de Riemann, Integrais Generalizadas, Análise, integrla de Lebesgue.

Abstract

In this work we will present a brief introduction about the history of evolution in the concept of integral and important results on the Theory of Integration.
We will introduce the formal definition of the Integral concept, according to Riemann and its properties, in addition to the definition of integrable Riemann functions. Later, we will present the definition and properties of the Darboux's integral, extending this idea to the Lebesgue integrability criterion and ending with the concept of generalized Riemann integral; the latter allows an alternative approach to the concept of Lebesgue integral without requering knowledge of Measure theory.

Keywords: Riemann integrals, generalized integrals, Lebesgue integral, Analysis.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

A ideia de integração surgiu através de processos somatórios de áreas, volumes e comprimentos, enquanto a diferenciação foi criada bem mais tarde através de problemas de máximos, mínimos e tangentes em curvas. Muito posteriormente foi verificado que integração e a diferenciação, através do teorema fundamental do cálculo, são processos interligados entre si.

O Século XVII trouxe grandes avanços para a matemática, principalmente devido ao descobrimento do cálculo diferencial e integral, ou cálculo infinitesimal, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, de maneira independente, na segunda metade daquele século. Durante muito tempo os matemáticos da época tiveram problemas em fundamentar o uso de quantidades infinitamente pequenas, os “elementos infinitesimais", também chamados por Leibniz de diferenciais dx e dy que futuramente seriam definidos como funções. Já Newton começou a trabalhar no cálculo infinitesimal estudando taxas de variação ou fluxo, ou seja, dada a relação entre quantidades fluentes, encontrar a relação entre seus fluxões.

As ideias de Leibniz ficaram estáticas até no final do século XVII, quando Cauchy iniciou o estudo do conceito de integral na classe das funções reais, contínuas e no intervalo $[a, b]$; definindo a noção de integral para uma função contínua u em $[a, b]$ representada por $\int_a^b u(x)\ dx$. Através deste conceito, Cauchy mostrou que as definições de Newton e Leibniz eram equivalentes, ou seja, se u for uma função real, contínua em $[a, b]$ e $a < x < b$, então:

$$u(x) = \int_a^x u(s)\ ds \quad e \quad v(a) - v(b) = \int_a^b u(s)\ ds.$$

Onde $v' = u$, ou seja, v' é uma primitiva de u em $[a, b]$. Atualmente, este resultado é conhecido como teorema fundamental do cálculo, que será visto e demonstrado neste trabalho.

Cauchy estendeu este conceito para uma semireta, ao invés de um intervalo compacto, denominando este novo conceito como *integrais impróprias*. Desejando estender este conceito para uma classe mais ampla que as funções contínuas, Riemann e Darboux idealizaram um processo que define a integral da função u em $[a, b]$, sendo apenas limitada, definidas como funções *Riemann Integráveis*.

Observando que a integral de Riemann não atendia algumas questões fundamentais, como por exemplo em convegência de séries de funções, Lebesgue idealizou um conceito de integral mais eficiente, porém mais abstrato, baseado na análise das partições a partir da imagem da função. Este método mostrou-se muito eficiente, sendo utilizado até os dias atuais. Lebesgue conclui também que o problema da procura de funções primitivas não era resolvido pela integração.

Denjoy em 1912 e Perron 1914, desenvolveram processos semelhantes para a reconstrução de uma função a partir de sua derivada. Estes dois processos eram baseados na construção de Lebesgue, sendo o de Perron o mais simples.

Em 1960 R. Henstok definiu um processo, para reconstrução da função, porém baseado nas ideias de Riemann, denominando-o como Integral Generalizada de Riemann ou Integral de Kurzweil -Henstock. Este processo destaca-se pela simplicidade e eficiência em relação aos métodos anteriores.

Neste trabalho analisaremos as ideias principais destes processos analisando seus fundamentos, vantagens e limitações, tendo como objetivo a mínima utilização do conceito de teoria da medida.

Com o objetivo de estudar esse conceito de integral a partir dos trabalhos de Riemann, estruturamos essa dissertação da seguinte maneira: no capítulo inicial fazemos a construção da integral do ponto de vista de Riemann e estudamos os principais teoremas dessa teoria. No capítulo seguinte, revisitamos a integral de Riemann do ponto de vista de Darboux, ou seja, agora utilizamos os conceitos de supremo e ínfimo de uma função. Mostramos que os métodos de Riemann e Darboux são equivalentes para os cálculos das integrais. No terceiro capítulo aparece o objeto principal de nosso trabalho que é o estudo da integral de Riemann generalizada. Mostramos que toda função Riemann integrável generalizada é também Lebesgue integrável, mas a recíproca não é verdadeira. No quarto capítulo fazemos uma breve conclusão do nosso estudo.

1 A Integral de Riemann

Neste capítulo faremos o estudo da integral de Riemann. Na década de 1850, Bernhard Riemann adotou um novo e diferente ponto de vista sobre o cálculo. Ele separou o conceito de integração do conceito de diferenciação, utilizando limites e somatórios. Considerando todas as funções num intervalo para o qual este processo de integração poderia ser definido; a classe de funções "integráveis". O Teorema Fundamental do Cálculo tornou-se um resultado que se manteve apenas para um conjunto restrito de funções integráveis, ou seja, aquelas que possuem uma primitiva.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Riemann(1826–1866) nasceu perto de Hanover, na Alemanha, filho de um Ministro luterano. Para agradar o seu pai, ele se matriculou (1846) na Universidade de Göttingen como estudante de teologia e filosofia, mas logo mudou para a matemática. Ele interrompeu seus estudos em Goottingen para estudar em Berlim com Jacobi, Dirichlet e Eisenstein, mas retornou a Göttingen em 1849 para completar sua tese. Doutourou-se em Gottingen com uma tese sobre funções de variáveis complexas supervisionada por Gauss. Em seu trabalho Riemann estabeleceu o conceito de superfície de Riemann que, na época desempenhou papel fundamental no campo da Análise.

Ainda sem emprego, ele preparava-se para a chamada "habilitação", processo que lhe permitiria ministrar aulas na universidade de Privatdozent. Embora ainda isto não fosse uma atividade remunerada, ele a aspirava devido ao imenso prestígio que este cargo representava no meio acadêmico. Nesta época, Dirichlet, famoso professor de Berlin, esteve em Gottingen e Riemann teve a oportunidade de discutir vários problemas de seu projeto com ele, que além de o ajudar na resolução, ficou encantado com a genialidade e modéstia do jovem pesquisador. Apresentando uma palestra sobre as hipóteses que fundamentam a geometria, que posteriormente posteriormente foi publicado, Riemann conseguiu a aprovado na habiliatção e após esta publicação, este trabalho teve um profundo efeito na geometria moderna.

Um de seus brilhantes resultados foi perceber que a integral exigia uma definição mais cuidadosa do que a de Cauchy e baseado em seus conceitos geométricos, concluiu que funções limitadas, definidas por Cauchy, nem sempre são integráveis. Em 1859, Riemann foi nomeado sucessor de Dirichlet na cadeira de Gottingen já ocupada por Euler. Com seu estado de saúde precário, Riemann acabou morrendo em 1866 por consequência de uma tuberculose. Apesar do fato de Riemann ter morrido muito cedo aos 39 anos, ele fez *grandes contribuições em muitas áreas: os fundamentos da geometria, teoria dos números, análise, topologia e física matemática.*

1.1 A Integral de Riemann

Aqui seguiremos o procedimento comumente usado em cursos de cálculo para definir a integral Riemann.

Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado em $\mathbb{R}$. Uma **partição** de I é um conjunto ordenado e finito $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de pontos em I, sem sobreposição, tais que:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

A norma da partição P, denotada por $||P||$, é definida como sendo o comprimento do maior subintervalo de $[a, b]$, definido pelos pontos $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ ou seja:

$$||P|| = max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Em cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ selecionamos um ponto t_i.

Estes pontos t_i serão chamados de **rótulos** do subintervalo I_i. Assim, temos um conjunto de pares ordenados correspondendo à norma e ao rótulo de cada subintervalo, no qual chamaremos de **partição rotulada** sendo denotada por :

$$\hat{\mathcal{P}} = \{(|[x_{i-1}, x_i]|, t_i)\}_{i=1}^{n}.$$

Observemos que temos infinitas maneiras de escolher esta partição rotulada, já que a escolha do t_i é aleatória no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A norma da partição rotulada é definida da mesma forma que a norma da partição ordinária e ela não depende da escolha dos rótulos.

Assim, sendo $\hat{\mathcal{P}}$ uma partição rotulada, definimos a **Soma de Riemann** de uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ correspondente a $\hat{\mathcal{P}}$ como sendo o valor:

$$S(f, \hat{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1.1}$$

Podemos notar que se $f > 0$ em [a,b], então a soma de Riemann é a soma da área dos retângulos cuja base é dada por $|x_i - x_{i-1}|$ e sua altura é $f(t_i)$.

Definiremos agora a integral de Riemann de uma função f em um intervalo $[a, b]$.

Definição 1. *Uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita* ***Riemann Integrável*** *se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_\varepsilon > 0$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}$ é qualquer partição rotulada de [a,b] com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta_\varepsilon$, então:*

$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon.$$

NOTAÇÃO: O conjunto de todas as funções Riemann integráveis no intervalo $[a, b]$ será denotado por $\mathcal{R}_{[a,b]}$.

Observação 1. *Às vezes dizemos que a integral L é "o limite" da soma de Riemann $S(f, \hat{\mathcal{P}})$ quando a norma da partição tende a zero, isto é, $||\hat{\mathcal{P}}|| \longrightarrow 0$.*

Mostraremos que se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ então o número L é único e poderá ser chamado de integral de Riemann de f sobre [a,b]. Usualmente escrevemos:

$$L = \int_a^b f \quad ou \quad \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 1. *Se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, então a integral terá valor único.*

Demonstração. Dados L' e L" ambos satisfazendo a Definição 1 e $\varepsilon > 0$, temos que existem $\delta'_{\varepsilon/2} > 0$ e $\delta''_{\varepsilon/2} > 0$ tais que, para quaisquer partições rotuladas $\hat{\mathcal{P}}_1$ e $\hat{\mathcal{P}}_2$ com $||\hat{\mathcal{P}}_1|| < \delta'_{\varepsilon/2}$ e $||\hat{\mathcal{P}}_2|| < \delta''_{\varepsilon/2}$ tem-se:

$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}_1) - L'| < \varepsilon/2 \quad \text{e}$$
$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}_2) - L''| < \varepsilon/2.$$

Tomemos $\delta_\varepsilon = min\{\delta'_{\varepsilon/2}, \delta''_{\varepsilon/2}\} > 0$ e $\hat{\mathcal{P}}$ como sendo uma partição rotulada com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta_\varepsilon$. Assim, temos que:

$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L'| < \varepsilon/2 \quad e \quad S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L''| < \varepsilon/2.$$

Pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |L' - L''| &= |L' - S(f, \hat{\mathcal{P}}) + S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L''| \\ &\leq |L' - S(f, \hat{\mathcal{P}})| + |S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L''| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Portanto, para um $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que $L' = L''$.

□

O próximo teorema mostra que funções que diferem em um número finito de pontos possuem a mesma integral.

Teorema 2. *Seja g uma função Riemann integrável em $[a,b]$. Se $f(x) = g(x)$, exceto em um número finito de pontos em $[a,b]$, então f é Riemann integrável e $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.*

Demonstração. Faremos a prova para o caso em que o conjunto em que f e g se diferem contém apenas um ponto. Para o caso geral basta utilizar o princípio de indução finita. Sejam c um ponto no intervalo $[a,b]$ e $L = \int_a^b g(x)dx$. Assumimos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$. Para qualquer partição rotulada os termos das duas somas $S(f,\hat{\mathcal{P}})$ e $S(g,\hat{\mathcal{P}})$ são idênticos.Temos que:

$$\begin{aligned} |S(f,\hat{\mathcal{P}}) - S(g,\hat{\mathcal{P}})| &= |\sum(f(x_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum g(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &= |\sum(f(x_i) - g(x_i))(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq 2(|g(c)| + |f(c)|)||\hat{\mathcal{P}}||. \end{aligned}$$

Agora dado $\varepsilon > 0$, temos que existem $\delta_1 > 0$ satisfazendo $\delta_1 < \dfrac{\varepsilon}{4(|f(c)| + |g(c)|)}$ e ainda $\delta_2 > 0$ tal que $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta_2$ implica em $|S(g,\hat{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2$. Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, então se $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta$, temos:

$$|S(f,\hat{\mathcal{P}}) - L| \leq |S(f,\hat{\mathcal{P}}) - S(g,\hat{\mathcal{P}})| + |S(g,\hat{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto, a função f é integrável com integral L.

□

Exemplo 1. *Toda função constante em [a,b] é Riemann integrável.*

Demonstração. Sejam $f(x) = k$, para todo $x \in [a,b]$ e $\hat{\mathcal{P}} = \{([x_i - x_{i-1}], t_i\}_{i=1}^n$ uma partição rotulada de [a,b], então:

$$S(f,\hat{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) = k(b-a).$$

Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta_\varepsilon = 1$, tal que, se $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta_\varepsilon$, então temos:

$$|S(f,\hat{\mathcal{P}}) - k(b-a)| = 0 < \varepsilon.$$

Logo, $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e $\int_a^b f(x)dx = k(b-a)$. □

Exemplo 2. *Seja $g(x) : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$g(x) = \begin{cases} 2 & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & se \quad 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Observando o gráfico na figura 1, podemos verificar que $\int_0^3 g(x)dx = 8$.

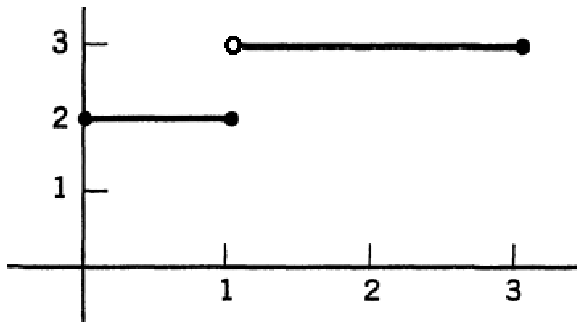

Figura 1 – Gráfico da função g(x)

Agora dados $\varepsilon > 0$ e $\hat{\mathcal{P}}$ uma partição rotulada de [0,3], desejamos encontrar δ com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta$, garantindo que $|S(g, \hat{\mathcal{P}}) - 8| < \varepsilon$. Sendo $\hat{\mathcal{P}}_1$ um subconjunto de $\hat{\mathcal{P}}$ em [0,1], onde $g(x) = 2$ e sendo $\hat{\mathcal{P}}_2$ um subconjunto de $\hat{\mathcal{P}}$ em [1,3], onde $g(x) = 3$, temos que:

$$S(g, \hat{\mathcal{P}}) = S(g, \hat{\mathcal{P}}_1) + S(g, \hat{\mathcal{P}}_2).$$

Se U_1 denota a união dos subintervalos de $\hat{\mathcal{P}}_1$, então podemos mostrar que existe um $\delta > 0$ tal que:

$$[0, 1 - \delta] \subset U_1 \subset [0, 1 + \delta].$$

Para partição $\hat{\mathcal{P}}_1$ temos que $g(t_k) = 2$, e como os intervalos $[0, 1 - \delta]$, $[0, 1 + \delta]$ tem comprimentos $1 - \delta$ e $1 + \delta$, respectivamente, então:

$$2(1 - \delta) \leq S(g, \hat{\mathcal{P}}_1) \leq 2(1 + \delta). \tag{1.3}$$

Para o intervalo [1,3] temos que $g(t_k) = 3$ e de forma análoga à anterior, denotando por U_2 a união de todos os subintervalos de $\hat{\mathcal{P}}_2$, temos que $(1 + \delta, 3] \subset U_2 \subset [1 - \delta, 3]$. Portanto,

$$3(2 - \delta) \leq S(g, \hat{\mathcal{P}}_2) \leq 3(2 + \delta). \tag{1.4}$$

Somando as desigualdades (1.3) e (1.4), temos:

$$8 - 5\delta \leq S(g, \hat{\mathcal{P}}_1) + S(g, \hat{\mathcal{P}}_2) \leq 8 + 5\delta,$$

implicando que $|S(g, \hat{\mathcal{P}}) - 8| \leq 5\delta$. Fazendo e escolha, por exemplo $\delta = \varepsilon/10$, podemos ver que $|S(f, \hat{\mathcal{P}}) - 8| < \varepsilon$. Assim, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, provamos que $g \in \mathcal{R}_{[0,3]}$ e $\int_0^3 g(x)dx = 8$.

Algumas Propriedades da Integral

Neste paragráfo utilizaremos combinações algébricas para para demonstrar algumas propriedades das funções integráveis.

Teorema 3. *Sejam f e g funções em $\mathcal{R}_{[a,b]}$, então:*

1. *Se $k \in \mathbb{R}$, então a função $kf \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e*
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

2. *A função $(f+g) \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3. *Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Demonstração. Seja $\hat{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição rotulada de $[a,b]$. Para a multiplicação por escalar temos que

$$S(kf, \hat{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n kf(t_i).(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^n f(t_i).(x_i - x_{i-1}) = kS(f, \hat{\mathcal{P}}).$$

Agora, Dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição $\hat{\mathcal{P}}$ com norma $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta$ temos que
$$\left|S(f, \hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{|k|+1}.$$
Assim, segue

$$\begin{aligned}
\left|S(kf, \hat{\mathcal{P}}) - k\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|kS(f, \hat{\mathcal{P}}) - k\int_a^b f(x)dx\right| \\
&= |k|\left|(S(f, \hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f(x)dx)\right| \\
&\leq |k|\frac{\epsilon}{|k|+1} \\
&\leq \left(\frac{|k|}{|k|+1}\right)\epsilon \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $kf \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$. Analogamente, para o ítem da soma temos

$$S(f+g, \hat{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n (f+g)(t_i).(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \{f(t_i) + g(t_i)\}.(x_i - x_{i-1}) = S(f, \hat{\mathcal{P}}) + S(g, \hat{\mathcal{P}}).$$

Além disto, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que, para toda partição $\hat{\mathcal{P}}_1$ com norma $||\hat{\mathcal{P}}_1|| < \delta_1$, temos

$$\left|S(f,\hat{\mathcal{P}}_1) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Da mesma forma, existe um δ_2 tal que, para toda partição $\hat{\mathcal{P}}_2$ com norma $||\hat{\mathcal{P}}_2|| < \delta_1$, temos

$$\left|S(g,\hat{\mathcal{P}}_2) - \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, para toda partição $\hat{\mathcal{P}}$ com norma $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta$ temos que $\left|S(f,\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$ e $\left|S(g,\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Portanto

$$\begin{aligned}
\left|S(f+g,\hat{\mathcal{P}}) - (\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx)\right| &= \left|S(f,\hat{\mathcal{P}}) + S(g,\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right| \\
&\leq \left|S(f,\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f(x)dx\right| + \left|S(g,\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b g(x)dx\right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, seque que a integral da soma é a soma das integrais.

Para o terceiro ítem temos que

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(t_i).(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_i).(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow S(f,\hat{\mathcal{P}}) \leq S(g,\hat{\mathcal{P}}).$$

Dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta > 0$, tal como no ítem anterior, de forma que para toda partição $\hat{\mathcal{P}}$ com norma $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta$ temos que

$$\left|S(f,\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left|S(g,\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

portanto,

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < S(f,\hat{\mathcal{P}}) \quad \text{e} \quad S(g,\hat{\mathcal{P}}) < \int_a^b g(x)dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $S(f,\hat{\mathcal{P}}) \leq S(g,\hat{\mathcal{P}})$, então

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\epsilon}{2} < S(f,\hat{\mathcal{P}}) \leq S(g,\hat{\mathcal{P}}) < \int_a^b g(x)dx + \frac{\epsilon}{2}, \text{ou seja,}$$

$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx + \epsilon$. Assim, segue o resultado. □

O teorema a seguir mostra que funções ilimitadas não podem ser Riemann integráveis.

Teorema 4. *Seja $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ então f é uma função limitada em $[a,b]$.*

Demonstração. Assuma que f seja uma função ilimitada em $\mathcal{R}_{[a,b]}$ com integral L. Então, pela definição, existe um $\delta > 0$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}$ for qualquer partição rotulada de $[a,b]$ com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta$, então teremos $|S(f,\hat{\mathcal{P}}) - L| < 1$, implicando que:

$$|S(f,\hat{\mathcal{P}})| < |L| + 1. \tag{1.5}$$

Suponha que $\wp = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{n=1}^{n}$ é uma partição de $[a,b]$ com $||\wp|| < \delta$. Como $|f|$ não é limitada em $[a,b]$, então existe ao menos um subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ em $\wp$, no qual $|f|$ é ilimitada. De fato, se $|f|$ fosse limitada por M_i em cada subintervalo, $[x_{i_1}, x_i]$, então $|f|$ seria limitada em $[a,b]$ por $max\{M_1, \cdots, M_n\}$.

Agora vamos escolher um rótulo para $\wp$ no qual haverá uma contradição. Definindo $t_i = x_i$ para $i \neq k$ e escolhendo $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, tal que:

$$|f(t_k)(x_k - x_{k-1})| > L + 1 + |\sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})|.$$

Da desigualdade triângular da forma $|A+B| \geq |A| - |B|$, temos que:

$$|S(f,\hat{\wp})| \geq |f(t_k)(x_k - x_{k-1})| - |\sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1})| > |L| + 1,$$

o que contradiz (1.5), completando assim a demonstração. □

1.2 Funções Riemann Integráveis

Iniciaremos esta seção provando o Critério de Cauchy, provaremos o teorema do Confronto no qual poderemos ver a integrabilidade de Riemann para várias classes de funções, e terminaremos com o Teorema da Aditividade.

Até o momento, para mostrarmos que uma função é Riemann integrável usando direto a definição, era necessário sabermos o valor L da integral. A seguir mostraremos o critério de Cauchy que elimina esta necessidade, porém utiliza-se de duas somas de Riemann ao invés de uma.

Teorema 5 (Critério de Cauchy)**.** *Uma função $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é Riemann integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\eta_\varepsilon > 0$ tal que, se $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\wp}$ são partições rotuladas de $[a,b]$ com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \eta_\varepsilon$ e $||\hat{\wp}|| < \eta_\varepsilon$, então:*

$$|S(f,\hat{\mathcal{P}}) - S(f,\hat{\wp})| < \varepsilon$$

.

Demonstração. Se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ com integral L, então seja $\eta_\varepsilon = \delta_{\varepsilon/2} > 0$ de tal forma que se $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\wp}$ são partições rotuladas com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \eta_\varepsilon$ e $||\hat{\wp}|| < \eta_\varepsilon$, então:

$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2 \quad e \quad |S(f, \hat{\wp}) - L| < \varepsilon/2.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} |S(f, \hat{\mathcal{P}}) - S(f, \hat{\wp})| &\leq |S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L + L - S(f, \hat{\wp})| \\ &\leq |S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L| + |L - S(f, \hat{\wp})| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Para provar a reciproca, suponha que, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\delta_n > 0$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\mathcal{Q}}$ são partições rotuladas com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta_n$ e $||\hat{\mathcal{Q}}|| < \delta_n$ então

$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}) - S(f, \hat{\mathcal{Q}})| < \frac{1}{n}.$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não crescente. Considere a sequência $X = \{\hat{\mathcal{P}}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de partições rotuladas tais que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $||\hat{\mathcal{P}}_n|| < \delta_n$. Se $\hat{\mathcal{P}}_n$ e $\hat{\mathcal{P}}_m$ são partições em X, então para $m > n$,

$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}_n) - S(f, \hat{\mathcal{P}_m})| < \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

Isto mostra que a sequência das somas $\{S(f, \hat{\mathcal{P}}_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e portanto convergente em $\mathbb{R}$. Seja $L := lim_{m\to\infty} S(f, \hat{\mathcal{P}}_m)$. Passando ao limite na desigualdade (1.6) quando $m \to \infty$, temos que $|S(f, \hat{\mathcal{P}}_n) - L| \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora basta mostrar que L é a integral de Riemann da função f. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $K \in \mathbb{N}$ tal que $K > \frac{2}{\epsilon}$. Se $\hat{\mathcal{Q}}$ é qualquer partição rotulada com $||\hat{\mathcal{Q}}|| < \delta_K$, então

$$\begin{aligned} |S(f, \hat{\mathcal{Q}}) - L| &\leq |S(f, \hat{\mathcal{Q}}) - S(f, \hat{\mathcal{P}}_K)| + |S(f, \hat{\mathcal{P}}_K) - L| \\ &\leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \epsilon. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Isto mostra que $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e possui integral L. □

Exemplo 3. *Seja $g(x) : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função do exemplo 2.*

Tínhamos que se $\hat{\mathcal{P}}$ é uma partição rotulada de [0,3] com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta$, então:

$$8 - 5\delta \leq S(g, \hat{\mathcal{P}}) \leq 8 + 5\delta.$$

Se $\hat{\wp}$ é outra partição rotulada, com $||\hat{\wp}|| < \delta$, temos:

$$8 - 5\delta \leq S(g, \hat{\wp}) \leq 8 + 5\delta.$$

Subtraindo estas desigualdades, temos:

$$-10\delta \leq S(g, \hat{\mathcal{P}}) - S(g, \hat{\wp}) \leq 10\delta \Longrightarrow |S(g, \hat{\mathcal{P}}) - S(g, \hat{\wp})| \leq 10\delta.$$

Assim, para fazer este termo final menor que ε empregamos o critério de Cauchy com $\eta_\varepsilon = \varepsilon/20$.

Quando trabalhamos com a integral de Riemann podemos encontrar duas dificuldades: A primeira é que para cada partição temos infinitas maneiras de escolher o rótulo, e a segunda é que existem infinitas partições com norma menor que o valor especificado. O teorema do confronto é uma ferramenta que ajuda a contornar essas dificuldades. Este teorema afirma que se uma dada função pode ser "confrontada" entre duas funções que são Riemann integráveis, então esta função também é Riemann integrável.

Teorema 6. ***[Teorema do confronto]*** *Dada uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, dizemos que $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem funções $\alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ com:*

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) \quad \forall \quad x \in [a, b]$$

e ainda

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon)(x)dx < \varepsilon.$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $\alpha_\varepsilon = \omega_\varepsilon = f$ para todo $\varepsilon > 0$.
($\Longleftarrow$) Dado $\varepsilon > 0$ e $\alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ então existe um $\delta > 0$ tal que, se $\hat{\mathcal{P}}$ é qualquer partição rotulada com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta$, temos:

$$|S(\alpha_\varepsilon; \hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b \alpha_\varepsilon(x)dx| < \varepsilon \quad e \quad |S(\omega_\varepsilon; \hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b \omega_\varepsilon(x)dx| < \varepsilon.$$

Segue destas inequações que

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x)dx - \varepsilon < S(\alpha_\varepsilon; \hat{\mathcal{P}}) \quad e \quad S(\omega_\varepsilon; \hat{\mathcal{P}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon(x)dx + \varepsilon.$$

Temos por hipótese, que $S(\alpha_\varepsilon; \hat{\mathcal{P}}) \leq S(f, \hat{\mathcal{P}}) \leq S(\omega_\varepsilon; \hat{\mathcal{P}})$, daí:

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x)dx - \varepsilon < S(f, \hat{\mathcal{P}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon(x)dx + \varepsilon.$$

Se $\hat{\wp}$ é outra partição rotulada com $||\hat{\wp}|| < \delta$, então temos:

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x)dx - \varepsilon < S(f, \hat{\wp}) < \int_a^b \omega_\varepsilon(x)dx + \varepsilon$$

Subtraindo estas duas desigualdades e usando que $\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon)(x)dx < \varepsilon$, concluimos que:

$$\begin{aligned} |S(f, \hat{\mathcal{P}}) - S(f, \wp)| &< \int_a^b \omega_\varepsilon(x)dx - \int_a^b \alpha_\varepsilon(x)dx + 2\varepsilon \\ &= \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon)(x)dx + 2\varepsilon < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Desde que $\varepsilon > 0$ seja arbitrário, o critério de Cauchy mostra que $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

□

Definiremos a seguir **funções escada**.

Definição 2. *Chamamos $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de função escada quando existe uma decomposição de $[a, b]$ em que φ assume valores constantes em cada subintervalo $(x_k, x_{k+1}) \subset [a, b]$.*

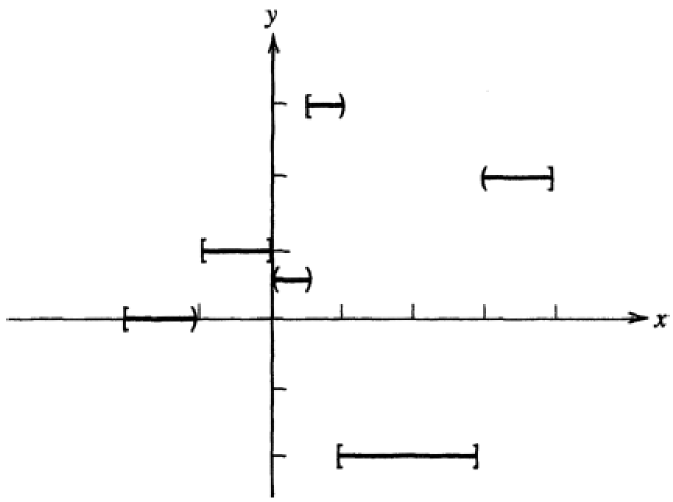

Figura 2 – Gráfico de uma função escada

Lema 1. *Seja $J = [c, d]$ um subintervalo de $[a, b]$ em que $\varphi_J(x) = 1$ para $x \in J$ e $\varphi_J(x) = 0$ caso contrário. Então $\varphi_J(x) \in \mathcal{R}_{a,b}$ e $\int_a^b \varphi_J(x)dx = d - c$.*

Demonstração. Como $J = [c, d]$, com $c \leq d$, observe que podemos representar J, com mesmo limite, de outras três formas, dado pelos subintervalos $[c, d), (c, d]$ e (c, d). Então, pelo teorema (2), podemos trocar o valor da imagem para uma quantidade finita de pontos, sem mudar o valor de L. Assim, pelo teorema, temos o mesmo resultado para os três subintervalos, concluindo que para as quatro funções φ_J são integráveis com integral igual a $d - c$.

□

Teorema 7. *Se $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função escada, então $\varphi \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*

Demonstração. Funções escada, mostradas no Lema (1) são denominadas *funções escada elementares*. Uma função escada φ pode ser expressa através de combinações lineares de funções escada elementares, então a função escada pode ser expressa como:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} k_j \varphi_{J_j}$$

onde $k_j \in \mathbb{R}$ e J_j é intervalo de extremos $c_j < d_j$. O teorema (3) mostra que $\varphi \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e que:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^{m} k_j(d_j - cj)$$

finalizando assim a prova. □

Teorema 8. *Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*

Demonstração. Como f é uma função contínua definida num conjunto compacto então f é uniformente contínua em [a,b]. Dado um $\varepsilon > 0$, então existe um $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $u, v \in [a, b]$ e $|u - v| < \delta_\varepsilon$, assim temos que $|f(u) - f(v)| < \varepsilon/(b - a)$.

Seja $P = \{I_i\}_{i=1}^{n}$ uma partição tal que $||\mathcal{P}|| < \delta_\varepsilon$. Considere os pontos $u_i, v_j \in I_i$ em que f assume o seu valor mínimo e o máximo, respectivamente.

Seja α_ε uma função escada definida por $\alpha_\varepsilon(x) = f(u_i)$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$ com $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ e $\alpha_\varepsilon(x) = f(u_n)$ para $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Da mesma forma definimos ω_ε usando os pontos v_i ao invés de u_i. Então, temos:

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) \quad \forall \quad x \in [a, b].$$

Assim, podemos afirmar que:

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon)(x)dx &= \sum_{i=1}^{n} (f(v_i) - f(u_i))(x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Assim, segue do teorema do confronto que $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. □

Teorema 9. *Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona $[a,b]$ então $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*

Demonstração. Seja f uma função crescente em $I = [a,b]$. Particionando o intervalo [a,b] em n subintervalos iguais, temos que $x_k - x_{k-1} = (b-a)/n, k = 1, 2, \cdots, n$. Como f é crescente, então o valor mínimo obtido pela função no subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ é dado por $f(x_{k-1})$ e o maior valor da função, obtido no mesmo intervalo, é dado por $f(x_k)$. Entretanto, definimos as funções escada sendo $\alpha(x) = f(x_{k-1})$ e $\omega(x) = f(x_k)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k), k = 1, 2, \cdots, n-1$. Então temos que $\alpha(x) \leq f(x) \leq \omega(x) \forall x \in I$ e:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \alpha(x)dx &= \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) \\
\int_a^b \omega(x)dx &= \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n))
\end{aligned}
$$

Subtraindo as integrais e cancelando os termos, temos:

$$
\int_a^b (\omega - \alpha)(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))
$$

Dado um $\varepsilon > 0$, e escolhendo n tal que $n > \dfrac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon}$, temos que $\int_a^b (\omega - \alpha)(x)dx < \varepsilon$, implicando, pelo teorema do confronto, que f é integrável em I. □

O teorema a seguir mostra que a integral é uma "função aditiva" do intervalo sobre o qual a função é integrada.

Teorema 10. ***(Teorema da Aditividade)***. *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c \in (a,b)$. Então $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ se e somente se suas restrições $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são ambas Riemann integráveis. Neste caso:*

$$
\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx
$$

Demonstração. Sejam $f_1 = f|_{[a,c]}$ e $f_2 = f|_{[c,b]}$ as restrições de f aos subintervalos $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente. Suponha que f_1 e f_2 são Riemann integráveis com integrais L_1 e

L_2 respectivamente. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}_1$ é uma partição rotulada de $[a, c]$ com $||\hat{\mathcal{P}}_1|| < \delta'$, então:

$$|S(f_1, \hat{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/3$$

Existe também um $\delta'' > 0$, tal que se $\hat{\mathcal{P}}_2$ for partição rotulada de $[c, b]$,então:

$$|S(f_2, \hat{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/3.$$

Se M for uma cota para $|f|$ definimos $\delta_c = min\{\delta', \delta'', \varepsilon/6M\}$. Seja $\hat{\mathcal{Q}}$ uma partição rotulada de [a,b] com $||\hat{\mathcal{Q}}|| < \delta$. Provaremos que

$$|S(f, \hat{\mathcal{Q}}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon. \tag{1.9}$$

Temos que:

(i) Se c é um ponto da partição $\hat{\mathcal{Q}}$, dividimos $\hat{\mathcal{Q}}$ nas partições $\hat{\mathcal{Q}}_1$ de [a,c] e $\hat{\mathcal{Q}}_2$ de [c,b], sendo $S(f, \hat{\mathcal{Q}}) = S(f, \hat{\mathcal{Q}}_1) + S(f, \hat{\mathcal{Q}}_2)$ e ainda $||\hat{\mathcal{Q}}_1|| < \delta'$ e $||\hat{\mathcal{Q}}_2|| < \delta''$, e obtemos $|S(f, \hat{\mathcal{Q}}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$.

(ii) Se c não é um ponto da partição de $\hat{\mathcal{Q}} = \{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{m}$, existe um $k \leq m$ tal que $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Definimos a partição rotulada de [a,c] por:

$$\hat{\mathcal{Q}}_1 = \{(I_1, t_1), \cdots, (I_{k-1}, t_{k-1}), ([x_{k-1}, c], c)\}$$

e a partição rotulada de [c,b] por:

$$\hat{\mathcal{Q}}_2 = \{([c, x_k], c), (I_{k+1}, t_{k+1}), \cdots, (I_m, t_m)\}$$

Calculando diretamente mostramos que:

$$\begin{aligned} S(f, \hat{\mathcal{Q}}) - S(f, \hat{\mathcal{Q}}_1) - S(f, \hat{\mathcal{Q}}_2) &= f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - f(c)(x_k - x_{k-1}) \\ &= (f(t_k) - f(c)).(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

segue que:

$$|S(f, \hat{\mathcal{Q}}) - S(f, \hat{\mathcal{Q}}_1) - S(f, \hat{\mathcal{Q}}_2)| \leq 2M(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon/3$$

desde que $||\hat{\mathcal{Q}}_1|| < \delta \leq \delta'$ e $||\hat{\mathcal{Q}}_2|| < \delta \leq \delta''$ segue que:

$$|S(f, \hat{\mathcal{Q}}_1) - L_1| < \varepsilon/3 \quad e \quad |S(f, \hat{\mathcal{Q}}_2) - L_2| < \varepsilon/3$$

obtendo $|S(f, \hat{\mathcal{Q}}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Agora suponhamos que $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\eta_\epsilon > 0$ satisfazendo o critério de Cauchy 5. Sejam $f_1 = f|_{[a,c]}$ a restrição de f ao subintervalo $[a,c]$ e $\hat{\mathcal{P}}_1$ e $\hat{\mathcal{Q}}_1$ partições rotuladas de $[a,c]$ com $||\hat{\mathcal{P}}_1|| < \eta_\epsilon$ e $||\hat{\mathcal{Q}}_1|| < \eta_\epsilon$. Podemos extender as partições rotuladas $\hat{\mathcal{P}}_1$ e $\hat{\mathcal{Q}}_1$ de $[a,c]$ às partições rotuladas $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\mathcal{Q}}$ de $[a,b]$, adicionando àquelas pontos e rótulos de $[c,b]$ de forma que $||\hat{\mathcal{P}}|| < \eta_\epsilon$ e $||\hat{\mathcal{Q}}|| < \eta_\epsilon$. Usando os mesmos pontos e rótulos adicionais para $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\mathcal{Q}}$ teremos que

$$S(f, \hat{\mathcal{P}}_1) - S(f, \hat{\mathcal{Q}}_1) = S(f, \hat{\mathcal{P}}) - S(f, \hat{\mathcal{Q}}).$$

Assim, $|S(f, \hat{\mathcal{P}}_1) - S(f, \hat{\mathcal{Q}}_1)| < \epsilon$, pois $||\hat{\mathcal{P}}_1|| < \eta_\epsilon$ e $||\hat{\mathcal{Q}}_1|| < \eta_\epsilon$. Isto mostra que $f_1 \in \mathcal{R}_{[a,c]}$. Analogamente mostra-se que $f_2 \in \mathcal{R}_{[c,b]}$.

□

1.3 O Teorema Fundamental

Nesta seção mostraremos a relação entre a noção de derivada e integral. Existem dois teoremas mostrando esta relação, o primeiro mostra relação da integração com a derivada e o segundo mostra a relação contrária. Estes teoremas, juntos, implicam no **teorema fundamental do cálculo**. Basicamente este teorema mostra que as operações de integração e diferenciação são operações inversas.

A primeira forma do teorema é aquela que se ensina nos primeiros cursos de cálculo diferencial e integral, mostrando que a função "f " é a derivada de uma função "F", e que se "f" for Riemann integrável então $\int_a^b f(x)dx$ pode se calculada por $F|_a^b = F(b) - F(a)$. Uma função F em que $F'(x) = f(x), \forall x \in [a,b]$ é chamada **antiderivada** ou **primitiva** de "f" em $[a,b]$. Assim quando a função "f" possui uma antiderivada fica muito simples calcular sua integral.

Na prática, podemos permitir alguns pontos excepcionais c onde $F'(c)$ não existe em $\mathbb{R}$ ou onde o valor da função no ponto "c" seja diferente de $f(c)$, ou seja, podemos permitir um número **finito** de pontos excepcionais.

Teorema 11 (**Teorema Fundamental - Primeira Forma**). *Suponha que existam um conjunto finito $E \subset [a,b]$ e funções $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que:*

(a) F é contínua em $[a,b]$.

(b) $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b] \setminus E$

(c) $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Então temos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demonstração. Provaremos o caso onde $E = \{a, b\}$. O caso geral pode ser obtido ao fazer [a,b] como uma união finita de subintervalos.

Dado $\varepsilon > 0$ e $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, por definição existe um $\delta_\varepsilon > 0$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}$ é qualquer partição rotulada com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta_\varepsilon$, temos:

$$|S(f;\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

Se os subintervalos em $\hat{\mathcal{P}}$ são $[x_{i-1}, x_i]$, então pelo **Teorema do Valor Médio** aplicado para F em $[x_{i-1}, x_i]$ implica que existe $u_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tal que:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(u_i).(x_i - x_{i-1}) \quad para \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Somando estes termos e usando o fato que $F'(u_i) = f(u_i)$, temos:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1})$$

Seja $\hat{\mathcal{P}}_u = \{([x_{i-1}; u_i])\}_{i=1}^n$. Observamos que à soma a direita da igualdade acima é igual a $S(f;\hat{\mathcal{P}})$. Assim, quando substituímos $F(b) - F(a) = S(f, \hat{\mathcal{P}})$ em $|S(f;\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$, obtemos:

$$|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon.$$

Mas como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ é válida. □

Exemplo 4. *Se* $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ *para* $x \in [a, b]$, *temos que* $F'(x) = x$ *para* $x \in [a, b]$. *Além disso,* $f = F'$ *é contínua e por isto pertence a* $\mathcal{R}_{[a,b]}$. *Pelo teorema fundamental (com* $E = \emptyset$*) temos que:*

$$\int_a^b xdx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Exemplo 5. *Se* $G(x) = \arctan(x)$ *para* $x \in [a, b]$ *temos que* $G'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ *para* $x \in [a, b]$, *mas* G' *é contínua e* $G \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. *Pelo Teorema Fundamental (com* $E = \emptyset$*) implica que:* $\int_a^b \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(b) - \arctan(a)$.

Exemplo 6. *Se* $H(x) = 2\sqrt{x}$ *para* $x \in [0, b]$, *então* $H(x)$ *é contínua entre em [0,b] e* $H'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *para* $x \in (0, b]$. *Como* $h = H'$ *não é limitada em* $(0, b]$, *ela não pertence a* $R_{[0,b]}$ *não importa como definimos* $h(0)$, *assim, o Teorema Fundamental não se aplica.*

Definição 3 (Integral Indefinida)**.** *Se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, então a função definida por:*

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx \quad para \quad z \in [a,b]$$

*é chamada de **integral indefinida** de f com limite inferior "a".*

A seguir mostraremos que se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, então sua integral indefinida F satisfaz a condição de Lipschitz implicando na continuidade de F em $[a,b]$.

Teorema 12. *A integral indefinida $F(z) = \int_a^z f(x)dx$ é contínua em [a,b]. De fato, se $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, então $|F(z) - F(w)| \leq M|z-w|$ para todo $z, w \in [a,b]$.*

Demonstração. O teorema da aditividade implica que se $z, w \in [a,b]$ e $w < z$, então:

$$F(z) = \int_a^z f(x)dx = \int_a^w f(x)dx + \int_w^z f(x)dx = F(w) + \int_w^z f(x)dx.$$

temos então:

$$F(z) - F(w) = \int_w^z f(x)dx.$$

mas se $-M \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ e utilizando o ítem 3 do teorema 3, temos que:

$$-M(z-w) \leq \int_w^z f(x)dx \leq M(z-w)$$

Portanto,

$$|F(z) - F(w)| = \left| \int_w^z f(x)dx \right| \leq M|z-w|$$

como afirmado. □

Agora mostraremos que uma integral indefinida F é diferenciável em qualquer ponto onde f é contínua.

Teorema 13 (**O Teorema Fundamental - Segunda Forma**)**.** *Seja f contínua em um ponto $c \in [a,b]$ e $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Então a integral indefinida é diferenciável em "c" e $F'(c) = f(c)$.*

Demonstração. Supondo que que $c \in [a,b)$ e considerando a derivada à direita de F em c. Sendo f contínua em c e dado $\varepsilon > 0$ então existe um $\eta_\varepsilon > 0$ tal que, se $c \leq x < c + \eta_\varepsilon$,

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

Dado h que satisfaça $0 < h < \eta_\varepsilon$, o teorema da aditividade implica que f é integrável nos intervalos $[a,c], [a,c+h]$ e $[c,c+h]$, então:

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x)dx.$$

No intervalo $[c, c+h]$ a função f satisfaz $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$, então temos:

$$(f(c) - \varepsilon).h \leq F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(x)dx \leq (f(c) + \varepsilon).h.$$

Dividindo por $h > 0$ e subtraindo por $f(c)$, temos:

$$\left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que o limite à direita é dado por:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

O limite à esquerda é provado da mesma forma, concluindo assim a prova.

$\square$

Teorema 14. *Se f é contínua em [a,b], então a integral indefinida* $F(z) = \displaystyle\int_a^z f(x)dx$ *é diferenciável em [a,b] e* $F'(x) = f(x)$, *para todo* $x \in [a, b]$.

O teorema acima mostra que se f é contínua em $[a, b]$, então sua integral indefinida é uma antiderivada de f. Mas, em geral, as integrais indefinidas $F(x)$ não precisam ser uma antiderivada de $f(x)$, pois elas podem não ser diferenciáveis como também podem ter derivadas diferentes de $f(x)$. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 7. *Seja* $f(x) : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & se \quad 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Tomando a função $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, temos que:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \leq x < 1, \\ x - 1 & se \quad 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

A função F é contínua em $[0, 2]$ mas não é derivável em $x = 1$. Portanto, não é uma antiderivada de f.

O teorema da substituição fornece uma justificativa para o método da **mudança de variáveis**, que é frequentemente usado em procedimentos que envolvem a manipulação dos "diferenciais" para o cálculo da integral.

Teorema 15. ***(Teorema da Substituição)*** *Sejam* $J = [\alpha, \beta]$ *e* $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$, *uma função com derivada contínua em* J. *Se* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em um intervalo* I *contendo* $\varphi(J)$, *temos:*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Demonstração. Pelas hipóteses temos que f, φ e φ' são funções contínuas, o que implica que as integrais $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)).\varphi'(t)dt$ e $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$ existem. Além disso, f tem uma primitiva F. Pelo Teorema Fundamental (primeira forma) temos que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Pela regra da cadeia

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt &= (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) \\
&= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx
\end{aligned}$$

□

Teorema 16. ***Teorema da Composição:*** *Dado $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ com $f([a,b]) \subseteq [c,d]$ e $\varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, então a função composta $\varphi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.*

Demonstração. Sendo f contínua em um ponto $u \in [a,b]$, então $\varphi \circ f$ também é contínua em u. Onde D, seja o conjunto de pontos de descontinuidade de f, seja um conjunto nulo. Segue que o conjunto de pontos de descontinuidade $D_1 \subseteq D$ de $\varphi \circ f$ também torna-se também um conjunto nulo. Então a composição $\varphi \circ f$ também torna-se $\mathcal{R}_{[a,b]}$. □

Corolário 1. *Suponha que $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Então $|f|$ é Riemann integrável em [a,b], e:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M.(b-a)$$

onde $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

Demonstração. Como já visto no teorema da limitação, se f é integrável, então existe M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Então se $\varphi(t) = |t|$ para $t \in [-M, M]$, o teorema da composição mostra que $|f| = \varphi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Da primeira inequação segue que $-|f| \leq f \leq |f|$ e do teorema "se $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b \leq \int_a^b g$", então podemos concluir a desigualdade. □

Teorema 17. ***(O Teorema do Produto):*** *Se f e g são Riemann integráveis em [a,b], então o produto f.g também é Riemann integrável em [a,b].*

Demonstração. Sejas $\varphi(t) = t^2$ para $t \in [-M, M]$. Segue do Teorema da Composição que $f^2 = \varphi \circ f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. De maneira similar $(f+g)^2$ e g^2 pertencem ao conjunto $\mathcal{R}_{[a,b]}$. Assim, podemos escrever o produto como:

$$fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

concluindo assim que $f.g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. □

1.4 Integração por Partes

Teorema 18. ***(Integração por Partes):*** *Dadas F, G diferenciáveis em $[a,b]$ sendo $f = F'$ e $g = G' \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. Então:*

$$\int_a^b fG\ dx = FG\Big|_a^b - \int_a^b Fg\ dx.$$

Demonstração. A regra do produto mostra que, se $(FG)'$ é diferenciável em um ponto, então, neste ponto temos:

$$(FG)' = F'.G + F.G' = f.G + F.g$$

desde que F e G são contínuas e $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, assim, pelo teorema fundamental temos:

$$FG\Big|_a^b = \int_a^b (FG)' = \int_a^b fG + \int_a^b Fg$$

concluindo assim a prova. □

Um caso especial deste teorema é dado por uma versão do **Teorema de Taylor**, quando f e g são contínuas em $[a,b]$, sendo F, G suas integrais indefinidas, tais que $F(x) = \int_a^x f$ e $G(x) = \int_a^x g$.

Teorema 19. ***(Teorema de Taylor com resto de Lagrange)****: Suponha que $f', \cdots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ existe em $[a,b]$ e que $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, então temos:*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n$$

onde o resto de Lagrange é dado por:

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t).(b-t)^n dt$$

Demonstração. Aplicando a integração por partes para R_n, com $F(t) = f^{(n)}(t)$ e $G(t) = (b-t)^n/n!$, de modo que $g(t) = -(b-t)^{n-1}/(n-1)!$, temos:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!}f^{(n)}(t).(b-t)^n\Big|_{t=a}^{t=b} + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t).(b-a)^{n-1}dt \\ &= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^n(t).(b-t)^{n-1}dt \end{aligned}$$

assim, continuando a integração por partes, obtemos a conclusão da prova. □

2 A integral de Darboux

Uma nova abordagem ao conceito de integral é dado pelo Matemático francês *Gaston Darboux* (1842-1917). Darboux traduziu o trabalho de integração de Riemann para sua publicação em uma revista francesa. Inspirado em uma observação de Riemann, ele desenvolveu uma definição para esta integral utilizando os conceitos de integrais superiores e inferiores, sendo publicado em 1875.

As somas aproximadas, nesta nova abordagem, são obtidas das partições utilizando conceitos de ínfimo e supremo dos valores da função nos subintervalos. Assim, estas somas não precisam ser somas de Riemann.

Esta abordagem evita a complicação das somas infinitesimais, o que torna possível muitas escolhas para a partição rótulo.

2.1 A Integral de Darboux

Nesta seção, mostraremos o conceito sobre integrais superiores e inferiores de uma função limitada em um intervalo, definiremos quando uma função é *Darboux Integrável*, e finalmente, concluiremos que as abordagens de Darboux e Riemann são equivalentes, ou seja, uma função limitadada em um intervalo é Riemann Integrável, se e somente se, ela é Darboux integrável.

Definição 4 (Ínfimo e Supremo)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in X$ chama-se supremo do subconjunto X se:*

i. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$.

ii. Se $c \in X$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

Em outras palavras, temos que o supremo de um conjunto é a menor de suas cotas superiores.

Analogamente, um elemento $a \in X$ chama-se ínfimo do conjunto X se:

i. Para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$.

ii. Se $c \in X$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$, então $c \leq a$.

Portanto o ínfimo é a maior das cotas inferiores do conjunto. Adotaremos a notação $infX$ e $supX$ para representar o ínfimo e o supremo de um conjunto X, respectivamente.

Definição 5 (Somas Superiores e Inferiores de Darboux)**.** *Dadas $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $I = [a, b]$ e $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ uma partição de I, para $k = 1, 2, \cdots, n$, temos:*

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad e \quad M_k = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

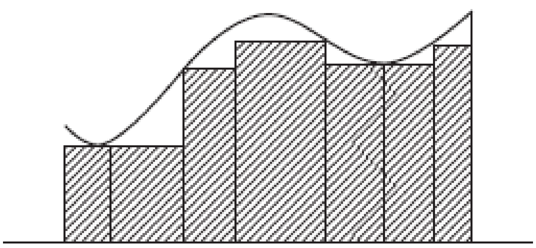

Figura 3 – $L(f, \mathcal{P})$ uma soma inferior de Darboux

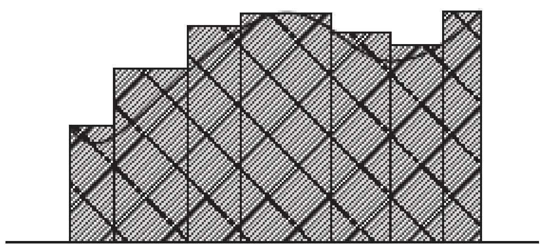

Figura 4 – $U(f, \mathcal{P})$ uma soma superior de Darboux

*A **soma inferior de Darboux** de f, correspondente à partição $\mathcal{P}$ é definida como:*

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

*e a **soma superior de Darboux** de f, correspondente à partição $\mathcal{P}$ é definida como:*

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Lema 2. *Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada e $\mathcal{P}$ é qualquer partição de I, então $L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P})$.*

Demonstração. Dado $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$. Desde que $m_k \leq M_k$ para $k = 1, 2, \cdots, n$ e $x_k - x_{k-1} > 0$ para $k = 1, 2, \cdots, n$; segue que:

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k.(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k.(x_k - x_{k-1}) = U(f, \mathcal{P})$$

concluindo a prova. □

Se $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ e $\mathcal{Q} = (y_0, y_1, \cdots, y_n)$ são partições de I, dizemos que $\mathcal{Q}$ é um **refinamento** de $\mathcal{P}$ se para cada $x_k \in \mathcal{P}$ então $x_k \in \mathcal{Q}$, ou seja ($\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$). Um refinamento $\mathcal{Q}$ de uma partição $\mathcal{P}$ pode ser obtido adicionando um número finito de pontos em $\mathcal{P}$. Neste caso, cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ em $\mathcal{P}$ que divide I, pode ser escrito como a união de subintervalos de $\mathcal{Q}$, ou seja:

$$[x_{k-1}, x_k] = [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}] \cup \cdots \cup [y_{h-1}, y_h]$$

Agora, mostraremos que o refinamento aumenta a soma inferior e diminui a soma superior.

Lema 3. *Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, $\mathcal{P}$ é uma partição de I e $\mathcal{Q}$ é um refinamento de $\mathcal{P}$, então:*

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{Q}) \quad e \quad U(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P})$$

Demonstração. Seja $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$. Primeiramente analisaremos a adição de um ponto em $\mathcal{P}$.
Dado $z \in I$ satisfazendo $x_{k-1} < z < x_k$, então $\mathcal{P}'$ é dado por:

$$\mathcal{P}' = \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, z, x_k, \cdots, x_n\}$$

que foi obtido adicionando z a $\mathcal{P}$. Dados:

$$m'_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, z]\} \quad e \quad m''_k = inf\{f(x) : x \in [z, x_k]\},$$

assim, $m_k \leq m'_k$ e $m_k \leq m''_k$, então:

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(z - x_{k-1}) + m_k(x_k - z) \leq m'_k(z - x_{k-1}) + m''_k(x_k - x_z)$$

Se adicionarmos os termos $m_j(x_j - x_{j-1})$, para $j \neq k$, na inequação acima, temos:

$$L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{P}')$$

Então, se $\mathcal{Q}$ é qualquer refinamento de $\mathcal{P}$, $(\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q})$, então $\mathcal{Q}$ pode ser obtido de $\mathcal{P}$ adicionando um número finito de pontos em $\mathcal{P}$. Assim, repetindo o processo acima para mais pontos, concluímos que $L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{Q})$.

A prova para somas superiores é realizada de forma similar. □

Estes dois resultados combinados mostram que: "*as somas inferiores são sempre menores que as somas superiores, mesmo correspondendo a diferentes partições.*"

Lema 4. *Sendo $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ limitada. Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são quaisquer duas partições de I, então: $L(f, \mathcal{P}_1) \leq U(f, \mathcal{P}_2)$*

Demonstração. Definindo $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ então $\mathcal{Q}$ é um refinamento de ambas, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, então pelos lemas: $L(f, \mathcal{P}) \leq U(f, \mathcal{P})$ e $L(f, \mathcal{P}) \leq L(f, \mathcal{Q}); U(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P})$, concluimos que:

$$L(f, \mathcal{P}_1) \leq L(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P}_2)$$

□

2.1.1 Integrais Superiores e Inferiores

Denotaremos a coleção de todas as partições do intervalo I por $\mathscr{P}(I)$. Se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada, então cada $\mathcal{P}$ em $\mathscr{P}(I)$ determina dois valores: $L(f, \mathcal{P})$ e $U(f, \mathcal{P})$. Assim, a coleção $\mathscr{P}$ determina dois conjuntos: O conjunto das somas inferiores $L(f, \mathcal{P})$ e o conjunto das somas superiores $U(f, \mathcal{P})$; ambos para $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)$.

Definição 6. *Dado $I \in [a, b]$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ com uma função limitada.*
Então a ***integral inferior de Darboux*** *de f é o número:*

$$L(f) = sup\{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\} = \underline{\int_I} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

ou seja, o supremo do conjunto das somas inferiores de f relativas a todas as decomposições de I, e a ***integral superior de Darboux*** *é o número*

$$U(f) = inf\{U(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\} = \overline{\int_I} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

ou seja, o ínfímo do conjunto das somas superiores de f relativas a todas as decomposições de I.

Como f uma função limitada, podemos garantir a existência dos números:

$$m_I = inf\{f(x) : x \in I\} \quad e \quad M_I = sup\{f(x) : x \in I\}$$

então, segue que:

$$m_I(b - a) \leq L(f) \quad e \quad U(f) \leq M_I(b - a).$$

Teorema 20. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ com $I \in [a, b]$ uma função limitada. Então a integral inferior $L(f)$ e a integral superior $U(f)$ existem, e:*

$$L(f) \leq U(f) \qquad ou \qquad \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Demonstração. Se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são quaisquer partições de I, então segue da desigualdade $L(f, \mathcal{P}_1) \leq L(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{Q}) \leq U(f, \mathcal{P}_2)$, que $L(f, \mathcal{P}_1) \leq U(f, \mathcal{P}_2)$. Mas o número $U(f, \mathcal{P}_2)$ é uma limitação superior do conjunto $\{L(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}$. Consequentemente $L(f)$ sendo o supremo deste conjunto, satisfaz $L(f) \leq U(f, \mathcal{P}_2)$. Como $\mathcal{P}_2$ é uma partição arbitrária de I então $L(f)$ é uma cota inferior do conjunto $\{U(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}(I)\}$. Consequentemente, o infímo $U(f)$ deste conjunto satisfaz a desigualdade acima.

□

Dada $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em um intervalo fechado $I = [a, b]$, provamos que a integral inferior $L(f)$ e a integral superior $U(f)$, sempre existem e que $L(f) \leq U(f)$. Existem funções em que a desigualdade é estrita, ou seja, $L(f) < U(f)$. O nosso interesse é a classe das funções onde ocorre a igualdade, i.e, $L(f) = U(f)$.

Definição 7. *Dado o intervalo $I = [a, b]$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Esta função f é dita **Darboux Integrável** em I se $L(f) = U(f)$. Neste caso, a **integral de Darboux** de f sobre I é difinida como sendo o valor $L(f) = U(f)$.*

Estabeleceremos a equivalência das integrais de Darboux e Riemann. Usaremos a notação padrão $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$ para indicar a integral de Darboux de uma funçãof em $[a, b]$.

Exemplo 8. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = C$, constante. Verifique se esta função f é Darboux integrável em $[a, b]$.*
Qualquer que seja a decomposição de $[a, b]$, temos que $m_I = M_I = C$, então temos:

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = C \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = C.(b - a),$$

$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = C \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = C.(b - a).$$

Assim, temos que $L(f, \mathcal{P}) = U(f, \mathcal{P})$, ou seja:

$$\underline{\int_a^b} Cdx = \overline{\int_a^b} Cdx = \int_a^b f(x)dx = C(b - a)$$

Exemplo 9. *Seja g a função definida em $[0, 3]$ por :*

$$g(x) = \begin{cases} 2 & se \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 3 & se \quad 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Dado $\varepsilon > 0$, definimos a partição $\mathcal{P}_\varepsilon = \{0, 1, 1+\varepsilon, 3\}$. A soma superior é dada por:

$$U(g, \mathcal{P}_\varepsilon) = 2(1-0) + 3(1+\varepsilon-1) + 3(2-\varepsilon) = 2 + 3\varepsilon + 6 - 3\varepsilon = 8.$$

Assim, a integral superior satisfaz $U(g) \leq 8$. Similarmente fazendo a soma inferior, temos:

$$L(g, \mathcal{P}_\varepsilon) = 2(1-0) + 3(1+\varepsilon-1) + 3(2-\varepsilon) = 2 + 3\varepsilon + 6 - 3\varepsilon = 8.$$

Portanto, a integral inferior satisfaz $L(g) \geq 8$, isto é, $8 \leq L(g) \leq U(g) \leq 8$, que ocorre, se e somente se $L(g) = U(g) = 8$. Então, a integral de Darboux de g é dada por $\displaystyle\int_0^3 g(x)dx = 8$.

Daremos agora um exemplo de uma função que não é Darboux integrável.

Exemplo 10. *Seja a função de Dirichlet $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Verifiquemos que D não é integrável em $[a, b]$.

De fato, qualquer que seja a decomposição de $[a, b]$ e qualquer que seja o intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, temos números racionais e irracionais neste intervalo. Assim teremos $m_k = 0$ e $M_k = 1$, então:

$$L(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = 0 \Rightarrow S(f, \mathcal{P}) = 0,$$
$$U(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = b - a \Rightarrow U(f, \mathcal{P}) = b - a,$$

concluindo que a função não é integrável, pois:

$$b - a = \overline{\int_a^b} D(x)dx \neq \underline{\int_a^b} D(x)dx = 0$$

Agora estabeleceremos algumas condições para a existência da integral de Darboux.

Teorema 21. ***Critério de Integrabilidade*** *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, limitada, onde $I = [a, b]$. Então f é Darboux integrável em I, se e somente se para cada $\varepsilon > 0$ existe uma partição $\mathcal{P}_\varepsilon$ de I tal que:*

$$U(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon \tag{2.1}$$

Demonstração. Se f é Darboux integrável, temos que $L(f) = U(f)$. Dado $\varepsilon > 0$, pela definição de supremo, existe uma partição $\mathcal{P}_1 \in I$ tal que $L(f) - \varepsilon/2 < L(f, \mathcal{P}_1)$. Similarmente, pela definição de ínfimo, existe uma partição $\mathcal{P}_2 \in I$ tal que $U(f, \mathcal{P}_2) < U(f) + \varepsilon/2$. Se definirmos $\mathcal{P}_\varepsilon = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, então $\mathcal{P}_\varepsilon$ é um refinamento de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$. Então, pelos Lemas (2) e (3), temos:

$$\begin{aligned} L(f) - \varepsilon/2 \quad &< \quad L(f, \mathcal{P}_1) \leq L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \\ &\leq \quad U(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \leq U(f, \mathcal{P}_2) < U(f) + \varepsilon/2 \\ & \quad\quad L(f, \mathcal{P}) < -L(f) + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Como $L(f) = U(f)$, concluímos a desigualdade 2.1.
Para fazer o inverso, observamos que para qualquer partição $\mathcal{P}$, temos $L(f, \mathcal{P}) \leq L(f)$ e $U(f) \leq U(f, \mathcal{P})$, Assim:

$$U(f) - L(f) \leq U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}).$$

Suponha que para cada $\varepsilon > 0$ exista uma partição $\mathcal{P}_\varepsilon$ tal que a desigualdade 2.1 aconteça. Temos que

$$U(f) - L(f) \leq U(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $U(f) \leq L(f)$. Mas pelo teorema (20), $L(f) \leq U(f)$. Logo, $L(f) = U(f)$, e concluimos que f é Darboux integrável. $\square$

Corolário 2. *Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em $I = [a, b]$. Se $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de partições de I tal que:*

$$\lim_n (U(f, P_n) - L(f, P_n)) = 0,$$

então f é integrável e $\lim_n L(f, \mathcal{P}_n) = \int_a^b f(x)dx = \lim_n U(f, \mathcal{P}_n)$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, segue da hipótese que existe um K tal que se $n \geq K$ então $U(f, \mathcal{P}_n) - L(f, \mathcal{P}_n) < \varepsilon$, daí a integrabilidade de f segue do Critério de Integrabilidade. $\square$

2.1.2 Integrabilidade de Funções Monótonas e Contínuas

Como visto, funções contínuas e/ou monótónas em um intervalo fechado são Riemann Integráveis, veja teoremas (8) e (9). Nas provas são aplicadas aproximação pela função escada e o teorema do confronto como ferramentas. Ambas provas usam o fato de que as funções contínuas e monótonas atingem um valor máximo e um valor mínimo em um intervalo fechado.

Observamos que se f é monótona em $[a, b]$, para uma partição $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$, os valores de $M_k = sup\{f(x) : x \in I_k\}$ e $m_k = inf\{f(x) :\in I_k\}$ para $k = 1, 2, \cdots, n$, são obtidos calculando o valor da função no ponto inicial e final do intervalo.

Se definirmos a função escada ω em $[a, b]$ por $\omega(x) = M_k$ para $x \in [x_{k-1}, x_k)$ para $k = 1, 2, \cdots, n-1$ e $\omega(x) = M_n$ para $x \in [x_{n-1}, x_n]$, teremos que a integral de Riemann de ω será dada por $\int_a^b \omega dx = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$. Agora, nomearemos o somatório acima como *soma superior de Darboux* $U(f, \mathcal{P})$, assim:

$$\int_a^b \omega dx = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f, \mathcal{P})$$

Similarmente, se a função escada α for definida por $\alpha(x) = m_k$ para $x \in [x_{k-1}, x_k)$ para $k = 1, 2, \cdots, n-1$ e $\alpha(x) = m_n$ para $x \in [x_{n-1}, x_n]$ então temos a integral de Riemann:

$$\int_a^b \alpha dx = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = L(f, \mathcal{P})$$

subtraindo as duas integrais, temos:

$$\int_a^b (\omega - \alpha) dx = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P})$$

Assim, pelos teoremas (9) e (21) concluímos que a diferença acima é Darboux integrável e pelo teorema do confronto, teorema 6, concluímos que também é Riemann integrável.

Examinando a prova dos teoremas (8) e (9), nos quais estabelecemos a integrabilidade de Riemann para funções contínuas e monótonas e substituindo as integrais da função escada por suas somas inferiores e superiores, obtemos a prova do teorema para a integral de Darboux.

Teorema 22. *Se uma função f no intervalo $[a, b]$ é contínua ou monótona em I, então f é Darboux integrável em I.*

O teorema anterior conecta as integrais de Riemann e Darboux e desempenha um papel importante na prova da equivalência destas duas abordagens.

Equivalência

Mostraremos que as definições da integral de Riemann e Darboux são equivalentes, ou seja, uma função limitada, em um intervalo fechado é Riemann integrável se e somente se é Darboux integrável e suas integrais são iguais. Esta definição não é imediatamente observada, já que a integral de Riemann é definida a partir das somas que usam os valores (rótulos) da função com o comprimento (limite) dos subintervalos de uma partição. Por outro lado, a integral de Darboux é definida no somatório usando o conceito de infímo e supremo dos valores da função, que não utiliza o processo de limite nem o comprimento dos subintervalos da partição.

O conceito necessário para a prova desta equivalência já foi visto. Se uma função é Darboux integrável, sabemos que as somas superiores e inferiores de Darboux são integrais de Riemann de uma função escada. Assim, o Critério de Integrabilidade, Teorema (21), para a integral de Darboux, corresponde ao Teorema do Confronto (6), para a integral de Riemann neste caso. Por outro lado, se uma função é Riemann integrável, as definicões de ínfimo e supremo permitem escolhermos as partições rotuladas de modo a obter somas de Riemann que sejam tão próximas das somas inferiores e superiores de Darboux quanto desejarmos. Desta forma, conectamos a integral de Riemann com as integrais superiores e inferiores de Darboux.

Teorema 23. ***(Teorema da Equivalência)*** *Uma função f é Darboux integrável em [a,b], se e somente se, f é Riemann integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Suponha que f seja Darboux integrável. Para $\varepsilon > 0$, temos que $\mathcal{P}_\varepsilon$ é uma partição de $[a, b]$, tal que $U(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$. Para esta partição, definimos as funções escada α_ε e ω_ε em $[a, b]$ por $\alpha_\varepsilon(x) = m_k$ e $\omega_\varepsilon(x) = M_k$ para $x \in [x_{k-1}, x_k), k = 1, 2, \cdots, n-1$ e $\alpha_\varepsilon(x) = m_n, \omega_\varepsilon(x) = M_n$ para $x \in [x_{n-1}, x_n]$, sendo m_k o ínfimo e M_k o supremo de f em cada subintervalo, assim temos:

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x), \qquad \text{para} \quad \text{todo} \qquad x \in [a, b]. \tag{2.2}$$

Entretanto, pelo Teorema (7), estas funções são Riemann integráveis, e suas integrais são dadas por:

$$\int_a^b \omega_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = U(f, \mathcal{P}_\varepsilon), \quad \int_a^b \alpha_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) \tag{2.3}$$

mas, como

$$\int_a^b (\omega - \alpha) = U(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon,$$

mas pelo Teorema do Confronto (6), temos que $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ e assim, (2.2) e (2.3) são válidos para qualquer partição $\mathcal{P}$ e a integral de Riemann é igual a integral de Darboux.

Agora assuma f Riemann integrável com integral $A = \int_a^b f$. Assim, pelo Teorema (4), f é limitada e dado um $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer partição alvo $||\hat{\mathcal{P}}||$, temos $|S(f, \hat{\mathcal{P}}) - A| < \varepsilon$, ou seja:

$$A - \varepsilon < S(f, \hat{\mathcal{P}}) < A + \varepsilon. \tag{2.4}$$

Se $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e $M_k = sup\{f(x) : x \in I_k\}$, podemos escolher um rótulo $t_k \in I_k$ tal que $f(t_k) > M_k - \varepsilon/(b-a)$. Mas, como:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a,$$

Obtemos

$$S(f, \hat{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) > \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \varepsilon = U(f, \mathcal{P}) - \varepsilon \geq U(f) - \varepsilon \tag{2.5}$$

Combinando as desigualdades (2.4) e (2.5), temos:

$$A + \varepsilon > S(f, \hat{\mathcal{P}}) \geq U(f) - \varepsilon$$

Assim, temos $U(f) < A + 2\varepsilon$. Sendo $\varepsilon > 0$ e arbitrário, implicando que $U(f) \leq A$.

Da mesma forma, podemos aproximar as somas inferiores pela soma de Riemann, mostrando que $L(f) > A - 2\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ arbitrário, obtemos $L(f) \geq A$. Assim, obtemos $A \leq L(f) \leq U(f) \leq A$, implicando que $L(f) = U(f) = A = \int_a^b f$. Portanto que a função f é Darboux integrável com valor igual a integral de Riemann. $\square$

2.2 Critério de Integrabilidade de Lebesgue

Nesta seção gostaríamos de estender a noção de integração à uma classe de funções que não sejam necessariamente contínuas. Esta extensão é dada pelo Critério de Integrabilidade de Lebesgue que fornece condição necessária e suficiente para que uma função seja Riemann integrável. Para isto necessitamos do conceito de **conjunto de medida nula**.

Definição 8. *Dizemos que um conjunto E tem medida nula quando para todo $\epsilon > 0$, existe uma família enumerável de intervalos abertos $\{I_k = (a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisfazendo às seguintes condições:*

i) $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$, *isto significa que a família de intervalos $\{I_k = (a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura (ou um recobrimento) para E.*

ii) $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \leq \varepsilon.$

Notação: Sempre que necessário usaremos $m(I_k)$ para denotar a medida do comprimento (diâmetro) do intervalo I_k.

Definição 9. *Se $Q(x)$ for uma afirmação sobre o ponto $x \in I$, dizemos que $Q(x)$ é válida em **quase todos os pontos** de I (ou para **quase todos** $x \in I$), se existe um conjunto de medida nula $E \subset I$ tal que $Q(x)$ é válido para todo $x \in I \setminus E$. Neste caso podemos escrever:*

$$Q(x) \text{ para quase todo } x \in I$$

Proposição 1. *Todo conjunto formado por apenas um elemento tem medida nula.*

Demonstração. Seja $E = \{x_0\}$, então para todo $\epsilon > 0$, temos que $E \subset \left(x_0 - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, x_0 + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right)$ para todo $n \geq 1$. É claro que a soma de todos os diâmetros dos intervalos $I_n = \left(x_0 - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, x_0 + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right)$ é menor do que ϵ. □

Proposição 2. *Sejam X um conjunto de medida nula e $Y \subset X$, então Y também tem medida nula.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, considere a sequência $\{I_n\}$ de intervalos que satisfazem a condição de X possuir medida nula. Temos que $Y \subset X$ implica que $Y \subset \cup_n I_n$. Portanto, Y tem medida nula. □

Exemplo 11. *O conjunto $Q_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ é um conjunto de medida nula.*

Demonstração. Enumerando os números racionais $Q_1 = \{r_1, r_2, \cdots\}$, dado um $\varepsilon > 0$, note que o intervalo aberto $J_1 = (r_1 - \varepsilon/4, r_1 + \varepsilon/4)$ contém r_1 tendo comprimento $\varepsilon/2$. Também o intervalo $J_1 = (r_2 - \varepsilon/8, r_2 + \varepsilon/8)$ contém r_2 e tem comprimento $\varepsilon/4$. Em geral, o intervalo aberto:

$$J_k = \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$$

contém o ponto r_k e tem comprimento $\frac{\varepsilon}{2^k}$. Entretanto a união $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ destes intervalos abertos contém todos os pontos de Q_1 e a soma do comprimento destes intervalos $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitário, implica que Q_1 é uma conjunto de medida nula. □

Proposição 3. *A união de uma família enumerável de conjuntos de medida nula possui medida nula.*

Demonstração. Seja $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma família de conjuntos de medida nula. Logo, para cada $\epsilon > 0$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um recobrimento enumerável de E_k por intervalos abertos $\{I_{k_n} = (a_{k_n}, b_{k_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{k_n} - a_{k_n}) < \frac{\epsilon}{2^k}$. Seja $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. É claro que E é recoberto pelos intervalos abertos $\{I_{k_n}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$, que é enumerável. Dessa forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(b_{k_n} - a_{k_n}) < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

Portanto, o conjunto E tem medida nula. □

Corolário 3. *Todo conjunto enumerável tem medida nula.*

Demonstração. Seja X um conjunto enumerável. Como todo conjunto é a união de seus elementos, então $X = \cup_n\{x_n\}$ com $x_n \in X$. Pela Proposição (1), cada $\{x_n\}$ tem medida nula. Pela proposição (3), X tem medida nula. □

O exemplo abaixo é de um conjunto não enumerável que possui medida nula. Este conjunto é o conjunto de Cantor.

Exemplo 12. ***(O Conjunto de Cantor):*** *Considere o intervalo $l = [0, 1]$ na reta real. No primeiro passo, trisseccionamos o intervalo l, ou seja, particionamos este intervalo nos pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, removendo o intervalo médio $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Definimos C_1 como sendo o conjunto dos pontos restantes de l.*

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

No segundo passo, trisseccionamos cada um dos dois intervalos fechados de C_1, nos pontos $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}e\frac{8}{9}$ e removemos os terços médios abertos $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ destes intervalos fechados. Denotaremos por C_2 o conjunto formado pelos pontos restantes de C_1, ou seja,

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Repetindo este processo, temos:

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$$

A figura abaixo mostra os três primeiros passos do processo

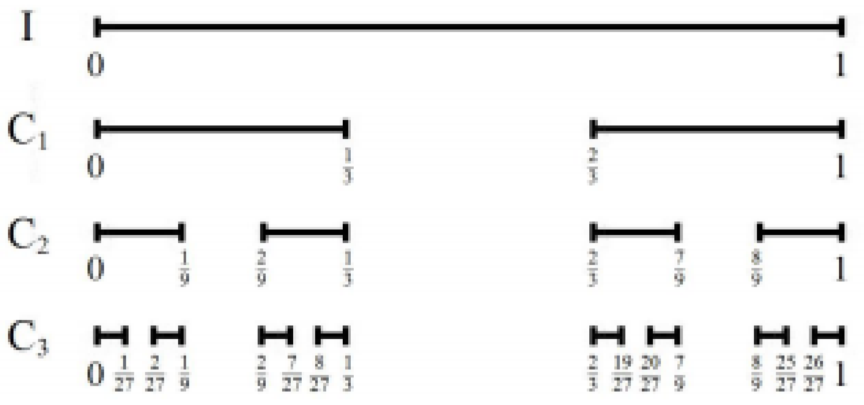

Figura 5 – O Conjunto de Cantor

Prosseguindo com este processo, obtemos a sequência de conjuntos $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, \cdots$ *de modo que:*

$$I \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots \supset C_{n-1} \supset C_n \supset \cdots$$

Em que C_n *é constituido dos pontos do conjunto* C_{n-1} *excluindo os terços médios abertos. Observamos que cada* C_n *consiste em* 2^n *intervalos fechados e disjutos dois a dois.*

O conjunto de Cantor é o que resta após aplicarmos esse procedimento para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo abaixo damos uma definição mais formal para o conjunto de Cantor.

Definição 10. *O conjunto de Cantor* C *é a interseção dos conjuntos* C_n *definidos acima, ou seja,* $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Observando a construção do conjunto de Cantor, poderíamos imaginar a princípio que ele fosse vazio, mas isto não ocorre, pois os pontos $0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$ e 1 permanecem em todos os conjuntos de C_n. O conjunto de Cantor possui várias propriedades interessantes. Mostraremos duas dessas propriedades:

1. *O conjunto de Cantor é não enumerável.*

   De fato, suponha por absurdo, que o conjunto de Cantor seja enumerável. Usando as representações ternárias, podemos escrever todos seus elementos da forma:

$$0, a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\cdots$$
$$0, a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\cdots$$

   Usando apenas os dígitos 0 e 2, construiremos o seguinte elemento do conjunto de Cantor

$$0, b_1b_2b_3b_4\cdots$$

Onde b_j é um algarismo diferente de $a_{j,j}$ e de 1. Podemos verificar que este é um elemento que não está na lista anterior. Logo o conjunto de Cantor não é enumerável.

2. *O conjunto de Cantor tem medida de Lebesgue nula.*
Observamos que C é obtido removendo-se do intervalo $I = [0,1]$ um intervalo de comprimento 1/3, dois intervalos de comprimento 1/9, quatro de comprimento 1/27 e assim sucessivamente. Sendo $\mu(C)$ a medida do conjunto de Cantor, temos

$$\mu(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right) = 0$$

A seguir mostraremos o *Critério de Integrabilidade de Lebesgue* que mostra que uma função limitada em um intervalo é Riemann integrável se e somente se seus pontos de descontinuidade formam um conjunto de medida nula. Antes descreveremos alguns tipos de descontinuidade que uma função pode possuir.

Definição 11. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função.*

1. *Dizemos que f possui uma descontinuidade do tipo **removível** em x_0 se existe o limite de $f(x)$ quando x tende x_0, mas este limite é diferente de $f(x_0)$, ou seja, $lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$*

2. *Dizemos que f possui uma descontinuidade do tipo **salto** em x_0 se $lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq lim_{x\to x_0^+} f(x)$.*

3. *Dizemos que f possui uma descontinuidade **essencial** em x_0 se o limite lateral à esquerda ou o limite lateral à direita não existe, ou seja $lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ou $lim_{x\to x_0^+} f(x)$ não existem.*

NOTAÇÃO: Denotaremos por D_r,D_s e D_e os conjuntos de pontos onde f possui descontinuidade do tipo removível, salto e essencial, respectivamente.

Exemplo 13. *A função abaixo possui uma descontinuidade do tipo **removível** (D_r) em $x = x_0$.*

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \neq x_0 \\ b & se \quad x = x_0; \end{cases}$$

Com $b \neq x_0$, então temos $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Exemplo 14. *A função $g(x) = \begin{cases} 2 & se \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3 & se \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$ possui uma descontinuidade do tipo **salto** (D_s) em $x_0 = 1$, pois seus limites laterais são distintos.*

Exemplo 15. *A função* $f(x) = \dfrac{1}{x - x_0}$ *possui uma descontinuidade do tipo* ***essencial*** *(*D_e*) em* x_0*, já que seus limites laterais* $lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *e* $lim_{x \to x_0^+} f(x)$ *não existem.*

Definição 12. *Sejam* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função e* $D = D_r \cup D_s \cup D_e$*. Dizemos que* f *é descontínua em* x_0 *se e somente se,* $x_0 \in D$*.*

Um conceito importante e que nos permite caracterizar a descontinuidade de uma função f é o conceito de oscilação. Vejamos:

Definição 13. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada. A oscilação de* f *em* $S \subset [a, b]$ *é definida por*

$$W(f, S) = sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in S\}.$$

Definição 14. *A oscilação de* f *em um ponto* x_0 *é dada por*

$$w(f, x_0) = inf\{W(f, (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0\}.$$

Teorema 24. *Sejam* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e* $x_0 \in [a, b]$*.* f *é contínua em* x_0 *se e somente se a oscilação* $w(f, x_0) = 0$*.*

Demonstração. Se f é contínua em x_0, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ então $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Logo, dados $x, y \in V$, então $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Dai $0 \leq w(f, x_0) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$. Isto implica que $w(f, x_0) = 0$.

Agora suponha que $w(f, x_0) = 0$ e $\epsilon > 0$. Existe um $\delta > 0$ com $W(f, (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) < \epsilon$. Portanto, se $|x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Isto implica que f é contínua em x_0. $\square$

Teorema 25. *:* ***Critério de Integrabilidade de Lebesgue*** *Uma função limitada* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é Riemann integrável, se e somente se ela é contínua em quase todo ponto de* $[a, b]$*, ou seja, o conjunto onde* f *é descontínua tem medida nula.*

Demonstração. Como f é Riemann integrável, então para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição $\mathcal{P}_\epsilon = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ de $[a, b]$, tal que $U(f, \mathcal{P}_\varepsilon) - L(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < \varepsilon$. Denotando por $f(\xi_k) = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ e $f(\eta_k) = sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ o ínfimo e o supremo de f, respectivamente, em cada subintervalo da partição, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} [f(\eta_k) - f(\xi_k)] (x_k - x_{k-1}) < \epsilon.$$

Mas para cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, se $s_k, t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, temos que $f(s_k) - f(t_k) < f(\eta_k) - f(\xi_k)$. Logo

$$\sum_{k=1}^{n} [f(s_k) - f(t_k)] (x_k - x_{k-1}) < \epsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = \left\{ x \in [a, b] | w(f, x) > \frac{1}{n} \right\}$. Dado $\epsilon > 0$, tomamos $\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{2n}$. Consideremos a partição $\mathcal{P}_{\epsilon_0}$ tal que $s_k, t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ para cada $k \leq n$ então $\sum_{k=1}^{n} [f(s_k) - f(t_k)] (x_k - x_{k-1}) < \epsilon_0$.

Temos que se $x \in S_n$, então $\frac{1}{n} < w(f, x)$. Portanto, se existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que $r_k \in (x_{k-1}, x_k)$, então

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) < \sum_{k=1}^{n} w(f, r_k)(x_k - x_{k-1}) < \epsilon_0.$$

Isto implica que $\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) < \frac{\epsilon}{2}$.

Consideremos a sequência de intervalos abertos $\{I_k\} = \{(x_{k-1}, x_k)\}$ que contenha os pontos de S_n e tenha $m(I_k) < \frac{\epsilon}{2}$. É claro que se não existir j tal que $x_j \in (x_{k-1}, x_k)$, então x_j será um dos pontos extremos dos subintervalos da partição $\mathcal{P}_{\epsilon_0}$. Como A partição é enumerável, ela tem medida nula. Assim podemos encontrar uma sequência de intervalos abertos que cobre os pontos de $\mathcal{P}_{\epsilon_0}$ e tenha medida total menor do que $\frac{\epsilon}{2}$. Portanto, S_n tem medida nula. Isto mostra que o conjunto dos pontos onde f é descontínua tem medida nula, pois o conjunto de descontinuidade de f é dado pela união dos S_n.

Para mostrar a volta suponhamos que o conjunto D dos pontos de descontinuidade de f tenha medida nula. Fixando $\epsilon_1 > 0$, seja $\epsilon = min \left\{ \frac{\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_1}{2(b-a)} \right\}$. Tomamos $S = \{x \in [a, b] | w(f, x) \geq \epsilon\}$. É claro que $S \subset D$. Logo, pela Proposição (2), S tem medida nula. É fácil ver que S é fechado. Por ser fechado com medida nula então podemos obter uma partição de $[a, b]$ que contenha os elementos de S e a soma dos comprimentos dos seus subintervalos não exceda ϵ. Sejam

$$||f|| = max\{sup\{f(x), x \in [a, b]\}, -inf\{f(x), x \in [a, b]\}\},$$

e P' e P'' os intervalos que não contém e os que contém os pontos de S, respectivamente. Então:

$$U(f, \mathcal{P}) - L(f, \mathcal{P}) = U(f, P') - L(f, P') + U(f, P'') - L(f, P'').$$

Para P' temos que

$$U(f,P') - L(f,P') < \sum_{k=1}^{n}[f(\eta_k) - f(\xi_k)](x_k - x_{k-1}) < \epsilon\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) < \epsilon(b-a) \leq \frac{\epsilon_1}{2}.$$

Para os pontos de P'' temos que

$$U(f,P'') - L(f,P'') = \sum_{k=1}^{n}[f(\eta_k) - f(\xi_k)](x_k - x_{k-1}) < 2||f||\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) < \epsilon \leq \frac{\epsilon_1}{2}.$$

Portanto, $U(f,\mathcal{P}) - L(f,\mathcal{P}) < \epsilon_1$. Isto implica que f é integrável. $\square$

Exemplo 16. *Seja a função $g(x) : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, já estudada anteriormente, definida por:*

$$g(x) = \begin{cases} 2 & se \quad 0 \leq x, \leq 1 \\ 3 & se \quad 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

esta função é contínua em todos os pontos, exceto no ponto $x = 1$. Então pelo Critério de Integração de Lebesgue, concluímos que $g(x) \in R_{[0,3]}$.

Como já vimos, toda função escada com um número finito de pontos de descontinuidade é Riemann integrável.

Exemplo 17. *Dada a função $G : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$G(x) = \begin{cases} 1/n, & se \qquad x = 1/n (n \in \mathbb{N}), \\ 0, & caso \quad contrário. \end{cases}$$

Esta função é monótona e possui um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade. Como todo conjunto enumerável tem medida nula, então o conjunto de descontinuidade dessa função tem medida nula. Portanto, pelo critério de Cauchy, a função $G(x) \in R_{[0,1]}$ é Riemann integrável.

Exemplo 18. *A função de Dirichlet $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \qquad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & caso \quad contrário \quad . \end{cases}$$

Observe que esta função é descontínua em todo ponto de $[0,1]$. Como o intervalo não é um conjunto de medida nula, temos que a função não é Riemann integrável.

3 A integral de Riemann Generalizada

Nos capítulos anteriores vimos o conceito de integral dado por Riemann e reformulado por Darboux. Provamos que toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ é Riemann integrável e as integrais de Riennann e Darboux dessas funções são iguais. O critério de Lebesgue nos mostra que as funções que são Riemann integráveis são aquelas que são contínuas em quase todo ponto.

No início do século XX Lebesgue propõe um novo conceito de integral contendo o caso da integral de Riemann-Darboux como caso particular de seu conceito de integral. Com a definição de Lebesgue várias "deficiências" relativas às integrais foram resolvidas. Em especial, o problema da validade do Teorema Fundamental do Cálculo. No conceito de integral proposto por Lebesgue, para a validade do teorema fundamental, é necessário que a função possua derivada limitada. Então foi natural perguntar se era possível um conceito de integral no qual se f for integrável segundo esse conceito e for derivável, então sua derivada f' também é integrável e é válido o Teorema Fundamental. Esse problema foi primeiro resolvido por A. Denjoy em 1912. Denjoy obteve um conceito de integral que continha o conceito da integral de Lebesgue. Na mesma época, Perron em 1914, também propôs um processo de integração contendo o de Lebesgue. Foi demonstrado que o conceito dado por Perron era equivalente ao dado por Denjoy, porém mais simples. Ambas propostas faziam a reconstrução de uma função por meio de sua derivada e tinham por motivação a integral de Lebesgue. Em 1960, R. Henstock investigou um processo de integração com o objetivo da reconstrução de uma função por meio de sua derivada porém baseado nos conceitos de Riemann e Darboux. O conceito de R. Henstock foi denominado integral de Riemann generalizada.

Neste capítulo faremos a descrição do processo da integral de Riemann generalizada.

3.1 Integral de Riemann Generalizada

Esse processo de integração foi construído permitindo que o $\delta_\epsilon > 0$ que existe na Definição (1) da integral de Riemann fosse uma função definida no intervalo $[a, b]$. Isto forneceu um conceito mais geral dessa teoria. Esse $\delta_\epsilon > 0$ foi chamado de Calibre, e é definido por:

3.1.1 Calibre Sobre o Intervalo [a,b].

Definição 15. *Chamamos de Calibre sobre* $[a, b]$ *qualquer função estritamente positiva* $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$.

Definição 16. *Considere um calibre* $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ *e seja* $\hat{\mathcal{P}} = \{(|x_{i-1}, x_i|, t_i)\}_{i=1}^{n}$ *uma partição indexada de* $[a, b]$*. Dizemos que* $\hat{\mathcal{P}}$ *é* δ*-fina quando*

$$t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \quad para \quad i = 1, \cdots, n \tag{3.1}$$

Observe que a noção de "δ-fina" requer que a partição seja indexada. Além disso, o quão δ-fino será a partição dependerá da escolha dos rótulos t_i e dos valores $\delta(t_i)$ do calibre sobre esses rótulos. Na figura abaixo podemos verificar que o comprimento dos subintervalos é controlado por δ e pelos rótulos.

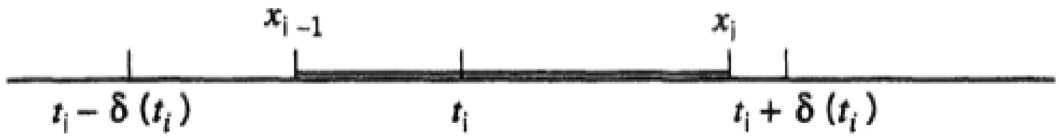

Figura 6 – Ilustração

Lema 5. *Se uma partição* $\hat{\mathcal{P}}$ *de* $I = [a, b]$ *é* δ*-fina e* $x \in I$*, então existe um rótulo* t_i *em* $\hat{\mathcal{P}}$ *tal que* $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$.

Demonstração. Se $x \in I$ então existe um subintervalo $[x_{i-1}, x_1]$ de $\hat{\mathcal{P}}$ que contém x. Sendo x δ-fina, então:

$$t_i - \delta(t_i) \leq x_{i-1} \leq x \leq x_i \leq t_i + \delta(t_i), \tag{3.2}$$

seguindo que $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$. □

Na integração de Riemann, observe que os calibres δ são funções constantes que controlavam a "finura" da partição. Já na teoria da integral de Riemann *generalizada* é essencial a utilização de calibres não-constantes. Mas a noção de calibres não-constantes surge naturalmente na conecção com funções contínuas. De fato, dados $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I e $\varepsilon > 0$, para cada ponto $t \in I$ existe $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tal que, se $|x - t| < \delta_\varepsilon(t)$ e $x \in I$ então $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Sendo δ_ε definido e extritamente positivo em I, a função δ_ε é um calibre em I.

Exemplo 19. *Sejam δ e γ calibres em $I = [a,b]$. Se $0 \leq \delta(x) \leq \gamma(x)$ para todo $x \in I$, então toda partição $\hat{\mathcal{P}}$ que é δ-fina é também γ-fina. de fato, temos:*

$$t_i - \gamma(t_i) \leq t_i - \delta(t_i) \quad e \quad t_i + \delta(t_i) \leq t_i + \gamma(t_i)$$

e portanto

$$t_i \in [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \subseteq [t_i - \gamma(t_i), t_i + \gamma(t_i)] \quad para \quad i = 1, 2, \cdots n$$

Exemplo 20. *Sejam δ_1 e δ_2 calibres em $I = [a,b]$. Se $\delta(x) = min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ para $x \in I$, então δ é um calibre em I. Entretanto, sendo $\delta(x) \leq \delta_1(x)$ então toda partição δ-fina é δ_1-fina e similarmente toda partição δ-fina é também δ_2-fina.*

Exemplo 21. *Suponha que δ seja definida em $I = [0,1]$ por:*

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}, & se \quad x = 0, \\ \\ \dfrac{x}{2}, & se \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Temos que δ é um calibre em $[0,1]$. Se $0 < t \leq 1$, então $[t - \delta(t), t + \delta(t)] = \left[\dfrac{t}{2}, \dfrac{3}{2}t\right]$ o qual não contém o ponto 0. Assim, se $\hat{\mathcal{P}}$ é uma partição δ-fina de I.

Exemplo 22. *Seja γ definida em $I = [0,1]$ por:*

$$\gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}, & se \quad x = 0 \quad ou \quad x = 1, \\ \\ \dfrac{x}{2}, & se \quad 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{2}(1-x) & se \quad \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Então γ é um calibre sobre I.

Nos exemplos anteriores, vimos (não obviamente) que um calibre arbitrário δ admite uma partição δ-fina. Agora usaremos a *Propriedade do Supremo de* $\mathbb{R}$ para estabelecer a existência de partições δ-finas.

Teorema 26. *Se δ é um calibre definido no intervalo $[a,b]$ então existe uma partição δ-fina de $[a,b]$.*

Demonstração. Seja E o conjunto de todos os pontos de $x \in [a, b]$ tal que exista um partição δ-fina do sub-inbtervalo $[a, x]$. O conjunto E não será vazio desde que o par ordenado $([a, x], a)$ seja uma partição δ-fina do intervalo $[a, x]$ quando $x \in [a, a + \delta(a)]$ e $x \leq b$. Assim, se $E \subseteq [a, b]$ o conjunto E também é limitado. Dado $u = supE$ de modo que $a < u \leq b$. Mostraremos que $u \in E$ e que $u = b$.

Afirmando que $u \in E$ e que $u - \delta(u) < supE$, de fato existe um $v \in E$ tal que $u - \delta(u) < v < u$. Seja $\hat{\mathcal{P}}_1$ uma partição δ-fina de $[a, v]$ e $\hat{\mathcal{P}}_2 = \hat{\mathcal{P}}_1 \cup ([v, u], u)$. Então $\hat{\mathcal{P}}_2$ é uma partição δ - fina de $[a, u]$, logo $u \in E$.

Sendo $u < b$ e $w \in [a, b]$ tal que $u < w < u + \delta(u)$. Se $\hat{\wp}$ é uma partição δ-fina de $[a, u]$, temos que $\hat{\wp}_2 = \hat{\wp}_1 \cup ([u, w], u)$. Então $\hat{\wp}_2$ é uma partição δ-fina de $[a, w]$ com $w \in E$. Mas essa afirmação contradiz a suposição de que u é um limite superior de E, assim concluímos que $u = b$. □

3.1.2 Integral de Riemann Generalizada

Nesta seção definiremos a integral de Riemann generalizada. Mostraremos que este conceito, de certa forma, generaliza o conceito de integral dado por Riemann, dando exemplos de funções que são Riemann integráveis generalizadas mas não são Riemann integráveis.

Definição 17. *Uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **Riemann integrável generalizada** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um calibre δ_ε em $[a, b]$, tal que se $\hat{\mathcal{P}}$ é qualquer partição δ_ε-fina em $[a, b]$, então:*

$$|S(f; \hat{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon.$$

As funções Riemann integráveis generalizadas serão denotadas por $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$.
Assim, se a função for Riemann integrável generalizada, existe um único número L determinado, que será chamado de **integral de Riemann generalizada** de f sobre $[a, b]$. Entretanto, podemos mostrar que se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$, então $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ com o mesmo valor da integral.

Denotaremos a integral generalizada de Riemann de $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ por:

$$\int_a^b f \quad ou \quad \int_a^b f(x)dx$$

Teorema 27. ***(Teorema da Unicidade)*** *Sendo $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$, então o valor determinado na integral é único.*

Demonstração. Supondo que L e L' ambos satisfazem a definição e $\varepsilon > 0$, existe um calibre $\delta'_{\varepsilon/2}$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}_1$ é qualquer partição $\delta'_{\varepsilon/2}$-fina, então:

$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}_1) - L'| < \varepsilon/2$$

Também existe um calibre $\delta''_{\varepsilon/2}$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}_2$ é qualquer partição $\delta''_{\varepsilon/2}$-fina, então:

$$|S(f, \hat{\mathcal{P}}_2) - L''| < \varepsilon/2.$$

Definindo δ_ε por $\delta_\varepsilon(t) = min\{\delta'_{\varepsilon/2}(t), \delta''_{\varepsilon/2}(t)\}$ para $t \in [a, b]$, então δ_ε é um calibre de $[a, b]$. Se $\hat{\mathcal{P}}$ é uma partição δ_ε-fina, então a partição $\hat{\mathcal{P}}$ são ambas $\delta'_{\varepsilon/2}$ e $\delta''_{\varepsilon/2}$ tais que:

$$|S(f; \hat{\mathcal{P}}) - L'| < \varepsilon/2 \quad e \quad |S(f; \hat{\mathcal{P}}) - L''| < \varepsilon/2$$

assim

$$\begin{aligned} |L' - L''| &\leq |L' - S(f, \hat{\mathcal{P}})| + |S(f, \hat{\mathcal{P}}) - L''| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, concluímos que $L' = L''$. □

No teorema abaixo mostraremos que toda função $\mathcal{R}_{[a,b]}$ é também $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$ com o mesmo valor de integral. Mostraremos usando uma função constante como calibre.

Teorema 28. *Se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ com integral L, então $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ com integral L.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ precisamos construir um calibre apropriado em $[a, b]$. Por hipótese f tem domínio o intervalo $[a, b]$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}$ é qualquer partição rotulada com $||\hat{\mathcal{P}}|| < \delta_\varepsilon$, então $|S(f; \hat{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon$. Segue que f é uma integral de Riemann para Generalizada. □

Exemplo 23. *Lembramos que a função de Dirichlet*

$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & caso \quad contrário. \end{cases}$$

Afirmamos que esta função é Riemann integrável generalizada e sua integral é 0. Vale lembrar que mostramos no Exemplo 18 que f não é Riemann integrável.

Demonstração. De fato, enumerando os números racionais entre $[0,1]$ como $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, dado $\varepsilon > 0$ definiremos $\delta_\varepsilon(r_k) = \varepsilon/2^{k+2}$ e $\delta_\varepsilon(x) = 1$ quando x for irracional. Assim δ_ε é um calibre em $[0,1]$ e se a partição $\hat{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ é δ-fina, então temos $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta_\varepsilon(t_i)$. Observando que as contribuições não nulas para $S(f;\hat{\mathcal{P}})$ vem de números racionais $t_i = r_k$, onde:

$$0 < f(r_k)(x_i - x_{i-1}) = 1.(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Como cada rótulo pode ocorrer em no máximo 2 subintervalos, temos:

$$0 < S(f, \hat{\mathcal{P}}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon,$$

ou seja, $|0 - S(f, \hat{\mathcal{P}})| < \epsilon$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, então $f \in \mathcal{R}^*_{[0,1]}$ e sua integral é zero.

$\square$

Exemplo 24. *Seja $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $H(1/k) = k$ para $k \in \mathbb{N}$ e $H(x) = 0$ caso contrário.*

Como H é uma fução não limitada em $[0,1]$ segue do Teorema da Limitação, (teorema 4), que esta função não é Riemann integrável em $[0,1]$. Mostraremos que H é Riemann integrável generalizada.

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$, definimos $\delta_\varepsilon(1/k) = \varepsilon/(k2^{k+2})$ e $\delta_\varepsilon(x) = 1$ caso contrário. δ_ε é um calibre em $[0,1]$. Se $\hat{\mathcal{P}}$ é uma partição δ-fina em $[0,1]$, então $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta_\varepsilon(t_i)$. Já que as contribuições nulas para $S(H, \hat{\mathcal{P}})$ vem dos rótulos $t_i = 1/k$, onde:

$$0 \leq H(1/k)(x_i - x_{i-1}) = k.(x_i - x_{i-1}) \leq k.\frac{2\varepsilon}{k2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$

Como cada rótulo pode ocorrer em no máximo dois subintervalos, temos:

$$0 \leq S(H, \hat{\mathcal{P}}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Então, sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos $H \in \mathcal{R}^*_{[0,1]}$ e $\displaystyle\int_0^1 H = 0.$ $\square$

O próximo resultado é similar ao Teorema (3).

Teorema 29. *Suponha que as funções f e g são $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$, então:*

(a) Se $k \in \mathbb{R}$ então, a função kf é $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$ e

$$\int_a^b kf = k \int_a^b f.$$

(b) A funçãof $f+g$ *é* $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$ *e*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(c) Se $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$*, temos*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demonstração. As provas de (a) e (c) são análogas às provas feitas no Teorema (3). Para provar (b), dado $\varepsilon > 0$ podemos usar o argumento usado na prova do Teorema (27) (teorema da Unicidade) para construir um calibre δ_ε em $[a,b]$ tal que, se $\hat{\mathcal{P}}$ é qualquer partição δ_ε-fina de $[a,b]$, então

$$\left|S(f;\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| < \varepsilon/2 \quad e \quad \left|S(g;\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b g\right| < \varepsilon/2.$$

Como $S(f+g;\hat{\mathcal{P}}) = S(f;\hat{\mathcal{P}}) + S(g;\hat{\mathcal{P}})$, segue do teorema 3 (b) que

$$\begin{aligned} \left|S(f+g;\hat{\mathcal{P}}) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g\right)\right| &\leq \left|S(f;\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| + \left|S(g,\hat{\mathcal{P}}) - \int_a^b g\right| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Desde que $\varepsilon > 0$ seja arbitrário, temos que $f+g \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ e essa integral é a soma das integrais de f e g. □

A seguir enunciaremos e provaremos o Critério de Cauchy para funções $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$. A prova é essencialmente a mesma a mesma do Teorema (5).

Teorema 30. ***(O Critério de Cauchy)*** *Uma função* $f : [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ *se e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe um calibre* $\eta_\varepsilon \in [a,b]$ *tal que, se* $\hat{\mathcal{P}}$ *e* $\hat{\wp}$ *são quaisquer partições de* $[a,b]$ *que são* η_ε*-finas, então*

$$|S(f;\hat{\mathcal{P}}) - S(f;\hat{\wp})| < \varepsilon.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ com integral L e $\delta_{\varepsilon/2}$ um calibre em $[a,b]$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\wp}$ são partições $\delta_{\varepsilon/2}$-fina em $[a,b]$ então:

$$|S(f;\hat{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2 \quad e \quad |S(f;\hat{\wp}) - L| < \varepsilon/2.$$

Montando $\eta_\varepsilon(t) = \delta_{\varepsilon/2}(t)$ para $t \in [a,b]$, então se $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\wp}$ são η_ε- finas, temos

$$\begin{aligned} |S(f;\hat{\mathcal{P}}) - S(f;\hat{\wp})| &\leq |S(f;\hat{\mathcal{P}}) - L| + |L - S(f;\hat{\wp})| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja δ_n um calibre em $[a,b]$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\wp}$ são partições δ_n-fina,

$$|S(f;\hat{\mathcal{P}}) - S(f;\hat{\wp})| \leq 1/n.$$

Podemos assumir que $\delta_n(t) \geq \delta_{n-1}(t)$ para todo $t \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$; caso contrário substituímos δ_n por $\delta'_n(t) = min\{\delta_1(t), \cdots, \delta_n(t)\}$ para todo $t \in [a,b]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\hat{\mathcal{P}}_n$ uma partição δ_n-fina. Assim, se $m > n$, ambos $\hat{\mathcal{P}}_m$ e $\hat{\mathcal{P}}_n$ são δ_n-finas, temos:

$$|S(f;\hat{\mathcal{P}}_n) - S(f;\hat{\mathcal{P}}_m)| < 1/n \quad para \quad m > n. \tag{3.5}$$

Consequentemente, a sequência $(S(f;\hat{\mathcal{P}}_m))_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ que converge para algum número A. Passando o limite na desigualdade (3.5), com $m \to \infty$, temos

$$|S(f;\hat{\mathcal{P}}_n) - A| < 1/n \quad para \quad n \in \mathbb{N}$$

Verificamos também que A é a integral Generalizada de Riemann de f. Dado $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $k \geq 2/\varepsilon$, se $\hat{\wp}$ é uma partição δ_k-fina, então:

$$\begin{aligned} |S(f;\hat{\wp}) - A| &\leq |S(f;\hat{\wp}) - S(f;\hat{\mathcal{P}}_k)| + |S(f;\hat{\mathcal{P}}_k) - A| \\ &\leq 1/k + 1/k < \varepsilon \end{aligned}$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, então $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ com integral A. □

Teorema 31. ***(Teorema do Confronto)*** *Considere a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$, se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem funções α_ε e ω_ε em $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$, tais que:*

$$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) \quad para\ todo \quad x \in [a,b]$$

e tal que

$$\int_a^b (\omega_k - \alpha_k) \leq \varepsilon$$

Prova: A prova deste teorema é exatamente igual à prova feita no Teorema (6).

Teorema 32. ***(Teorema da Aditividade)***. *Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $c \in (a,b)$. Então $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ se e somente se suas restrições para $[a,c]$ e $[c,b]$ são ambas Riemann integráveis generalizadas. Neste caso:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{3.6}$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponha que a restrição f_1 de f para $[a,c]$ e a restrição f_2 de f para $[c,b]$ são Riemann integráveis generalizadas para L_1 e L_2, respectivamente. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe um calibre δ' em $[a,c]$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}_1$ for uma partição δ'-fina de $[a,c]$ então $|S(f_1;\hat{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/2$. Também existe um calibre δ'' em $[c,b]$ tal que se $\hat{\mathcal{P}}_2$ é uma partição δ''-fina de $[c,b]$ então $|S(f_2;\hat{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/2$. Assim, definiremos um calibre δ_ε em $[a,b]$ por

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} min\{\delta'(t), \frac{1}{2}(c-t)\}, & para \quad t \in [a,c), \\ \\ min\{\delta'(c), \delta''(c)\}, & para \quad t = c, \\ \\ min\{\delta''(t), \frac{1}{2}(c-t)\}, & para \quad t \in (c,b]. \end{cases}$$

Mostraremos que se $\hat{\wp}$ é qualquer partição δ_ε-fina de $[a,b]$, então existe uma partição δ'-fina $\hat{\wp}_1$ de $[a,c]$ e uma partição δ''fina $\hat{\wp}$ de $[c,b]$ tal que

$$S(f,\hat{\wp}) = S(f_1,\hat{\wp}_1) + S(f_2,\hat{\wp}_2). \tag{3.7}$$

Caso(i): Se c for uma ponto da partição $\hat{\wp}$ então ele pertence a dois subintervalos de $\hat{\wp}$ sendo o rótulo de ambos estes subintervalos em $[a,c]$, então $\hat{\wp}_1$ é δ'-fina. Da mesma forma se $\hat{\wp}_2$ é uma parte de $\hat{\wp}$ tendo subintervalos em $[c,b]$, então $\hat{\wp}_2$ é δ''-fina, tornando clara a relação (3.7).

Caso(ii): Se c não é um ponto da partição $\hat{\wp}$ então ele é o rótulo para algum subintervalo, digamos $[x_{k-1,}, x_k]$. Assim substituímos o par $([x_{k-1}, x_k], c)$ por dois pares $([x_{k-1}, c], c)$ e $([c, x_k], c)$, e sejam $\hat{\wp}_1$ e $\hat{\wp}_2$ como partições rotuladas de $[a,c]$ e $[c,b]$ como resultado. Assim, o resultado $f(c).(x_k - x_{k-1}) = f(c)(c - x_{k-1}) + f(c)(x_k - c)$ é visto na equação (3.7).

Tomando a equação (3.7) e a desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} |S(f;\hat{\wp}) - (L_1 + L_2)| &= |S(f;\hat{\wp}_1) + S(f;\hat{\wp}_2) - (L_1 + L_2)| \\ &\leq |S(f;\hat{\wp}_1) - L_1| + |S(f;\hat{\wp}_2) - L_2|. \end{aligned}$$

Como $\hat{\wp}_1$ seja δ'-finas e $\hat{\wp}_2$ é δ_2-fina, concluímos que

$$|S(f;\hat{\wp}) - (L1 + L2)| < \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ e que a igualdade (3.6) é válida.

($\Rightarrow$) Suponha que $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ e dado $\varepsilon > 0$, seja η_ε um calibre que satisfaz o Critério de Cauchy. Seja f_1 a restrição de f para $[a,c]$, e sejam $\hat{\mathcal{P}}_1$ e $\hat{\wp}_1$ partições η_ε-finas de $[a,c]$. Adicionando pontos à partição adicional e rótulos de $[c,b]$ podemos estender $\hat{\mathcal{P}}_1$ e $\hat{\wp}_1$ para partições η_ε-fina $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\wp}$ de $[a,b]$. Usando os mesmos pontos adicionais e os rótulos em $[c,b]$ para ambos $\hat{\mathcal{P}}$ e $\hat{\wp}$, então

$$S(f;\hat{\mathcal{P}}) - S(f;\hat{\wp}) = S(f;\hat{\mathcal{P}}_1) - S(f;\hat{\wp}_1).$$

Como $\hat{\mathcal{P}}_1$ e $\hat{\wp}_1$ são η_ε-finas, então $|S(f_1;\hat{\mathcal{P}}_1) - S(f_1;\hat{\wp}_1)| < \varepsilon$e, pela condição de Cauchy f_1 $\mathcal{R}^*_{[a,c]}$. Similarmente, a restrição de f_2 de f para $[c,d]$ é $\mathcal{R}^*_{[c,d]}$. □

3.1.3 O Teorema Fundamental

Nesta seção mostraremos versões do Teorema Fundamental do Cálculo para a integral generalizada de Riemann. Mostraremos que a Primeira Forma é significativamente *mais forte* comparada a integral de Riemann (clássica). Veremos também que a derivada de qualquer função automaticamente pertence a $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$, então a integrabilidade da função se torna uma conclusão, ao invés de uma hipótese.

Teorema 33. *Suponha que exista um conjunto enumerável $E \in [a,b]$ e funções $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que:*

(a) F seja contínua em $[a,b]$.

(b) $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b] \setminus E$.

Então $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ e

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{3.8}$$

Prova: Provaremos o teorema no caso onde $E = \emptyset$. Já a prova onde E é um número finito de pontos de descontinuidade poderá ser encontrado na Referência *[2]*.

Demonstração. Queremos mostrar que $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$. Dado $\varepsilon > 0$, precisamos construir um calibre; isto será feito utilizando a diferenciabilidade de F em $[a,b]$. Se $t \in I$ e se a derivada

$f(t) = F'(t)$ existe, então também existe um $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tal que se $0 < |z - t| \leq \delta_\varepsilon(t), z \in [a, b]$, então

$$\left|\frac{F(z) - F(t)}{z - t} - f(t)\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Multiplicando esta inequação por $|z - t|$, obtemos

$$|F(z) - F(t) - f(t)(z - t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|z - t|,$$

sempre que $z \in [t - \delta_\varepsilon(t), t + \delta_\varepsilon(t)] \cap [a, b]$. A função δ_ε será o calibre desejado.

Agora, sendo $u, v \in [a, b]$ com $u < v$ satisfazendo $t \in [u, v] \subseteq [t - \delta_\varepsilon(t), t + \delta_\varepsilon(t)]$, quando subtraímos e adicionamos o termo $F(t) - f(t).t$, usando a desigualdade triangular e o fato de que $v - t \geq 0$ e $t - u \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} |F(v) - F(u) - f(t)(v - u)| &\leq |F(v) - F(t) - f(t)(v - t)| + |F(t) - F(u) - f(t)(t - u)| \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon(v - t) + \frac{1}{2}\varepsilon(t - u) = \frac{1}{2}\varepsilon(v - u). \end{aligned}$$

Assim sendo, se $t \in [u, v] \subseteq [t - \delta_\varepsilon(t), t + \delta_\varepsilon(t)]$, então temos

$$|F(v) - F(u) - f(t)(v - u)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon(v - u). \tag{3.9}$$

Agora mostraremos que $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$, com a integral dada pela soma telescópica

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}\{F(x_i) - F(x_{i-1})\}. \tag{3.10}$$

Se a partição $\hat{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ for δ-fina, então

$$t_i \in [x_{i-1}, x_i] \subseteq [t_i - \delta_\varepsilon(t_i), t_i + \delta_\varepsilon(t_i)] \quad para \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Assim, utilizando (3.9), (3.10) e a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} |F(b) - F(a) - S(f, P)| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\{F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})\}\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\varepsilon(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(b - a) \end{aligned}$$

sendo $\delta > 0$ e arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$. □

Exemplo 25. *Vimos no Exemplo (6) que o teorema fundamental do cálculo não se aplicava à função $H(x) = 2\sqrt{x}$ para $x \in [0, b]$. Observe que como x é contínua em $[0, b]$ e*

$H'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ para $x \in (0, b]$, podemos definir $h(x) = H'(x)$ para $x \in (0, b]$ e $h(0) = 0$. Segue do Teorema Fundamental (33) com $E = \{0\}$ que h torna-se $\mathcal{R}^*_{[0,b]}$ e que $\int_0^b h = H(b) - H(0)$, que podemos escrever como

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{b}.$$

Exemplo 26. *Seja $L(x) = x \ln x - x$ para $x \in (0, b]$ e $L(0) = 0$. Então L é contínua em [0,b] (usando a regra de l'Hopital quando x=0) e $L'(x) = \ln x$ para $x \in (0, b]$.*

Segue do Teorema (33) com $E = \{0\}$ que a função $f(x) = \ln x$ para $x \in (0, b]$ e $f(0) = 0$ sendo $\mathcal{R}^*_{[0,b]}$ e que $\int_0^b f = L(b) - L(0)$, que podemos escrever como

$$\int_0^b \ln x \ dx = b \ \ln b - b.$$

Exemplo 27. *Seja $A(x) = \arcsin x$ para $x \in [-1, 1]$, então A é contínua em $[-1, 1]$ e $A'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ para $x \in (-1, 1)$. Definindo $s(x) = A'(x)$ para $x \in (-1, 1)$ e $s(-1) = s(1) = 0$, então, pelo Teorema (33) com $E = \{-1, 1\}$, $s \in \mathcal{R}^*_{[-1,1]}$ e $\int_{-1}^1 s = A(1) - A(-1) = \pi$, podendo ser escrito como*

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi.$$

Enunciaremos agora a Segunda Forma do Teorema Fundamental.

Teorema 34. ***O Teorema Fundamental (Segunda Forma)*** *Dada uma função $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$, seja F a integral indefinida de f. Então, temos:*

(a) F é contínua em $[a, b]$.

(b) Existe um conjunto de medida nula Z tal que se $x \in [a, b] \setminus Z$, então F é diferenciável em x e $F'(x) = f(x)$.

(C) Se f é contínua em $c \in [a, b]$, então $F'(c) = f(c)$.

A prova dos itens (a) e (b) pode ser encontrada na referência [*2*]. Já a prova do item (c) é exatamente igual à prova do Teorema 13, com excessão do uso dos teoremas 29 e 32.

3.1.4 O Teorema da Multiplicação

No Teorema 17 vimos que o produto de duas funções Riemann Integráveis são Riemann Integráveis. Este resultado não é verdadeiro para funções Riemann Integráveis Generalizadas. Sua prova pode ser encontrada em [*2*].

Teorema 35. ***(O Teorema da Multiplicação):*** *Se* $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ *e* g *é uma função monótona em* $[a,b]$*, então o produto de* $f.g \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$*.*

3.1.5 Integração por Partes

A versão abaixo da integração por partes é muito utilizada.

Teorema 36. ***(Teorema da Integração por Partes)*** *Sejam* F *e* G *funções diferenciáveis em* $[a,b]$*, então* $F'.G \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ *e* $F.G' \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$*, neste caso temos*

$$\int_a^b F'G = F.G\Big|_a^b - \int_a^b F.G'.$$

A prova deste teorema encontra-se em *[4]*, pag 299.

Teorema 37. ***(Teorema de Thaylor)*** *Suponha que* $f, f', f'', \cdots, f^{(n)}$ *e* $f^{(n+1)}$ *exista em* $[a,b]$*. então temos*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + R_n \tag{3.11}$$

onde o resto é dado por

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t).(b-t)^n\ dt. \tag{3.12}$$

Demonstração. Como $f^{(n+1)}$ é uma derivada, temos que $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$. Como $t \to (b-t)^n$ é monótona em $[a,b]$, o Teorema da Multiplicação (35) implica que a integral em (3.12) existe. Através da Integração por Partes repetidamente, obtemos (37). □

3.2 Integrais Impróprias e Integrais de Lebesgue

Vimos no Teorema 4 que funções em $\mathcal{R}_{[a,b]}$ são limitadas em $[a,b]$. Para integrar certas funções que tem limites infinitos em um ponto $c \in [a,b]$, ou que são altamente oscilatórias neste ponto, aprendemos em cursos de cálculo a integrar funções com limites em subintervalos, onde os pontos finais deste intervalo tendem ao ponto c.

Por exemplo a função $h(x) = 1/\sqrt{x}$ para $x \in (0,1]$ e $h(0) = 0$ é ilimitada em um vizinho à esquerda do zero. Entretanto, ela pertence a $\mathcal{R}_{[\gamma,1]}$ para todo $\gamma \in (0,1]$ e definimos a "Integral Imprópria de Riemann" de h em $[0,1]$ como sendo o limite

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\gamma\to 0^+} \int_\gamma^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Podemos utilizar o mesmo método para funções oscilatórias da forma $k(x) = \sin(1/x)$ para $x \in (0,1]$ e $k(0) = 0$.

Ao analisar funções ilimitadas ou altamente oscilatórias, à direita de um ponto, manipularemos a mesma de forma similar. Entretanto se esta função é ilimitada ou altamente oscilatória em um ponto $c \in (a,b)$, então definimos a "integral imprópria de Riemann" como sendo

$$\int_a^b g = \lim_{a\to c^-} \int_a^\alpha g + \lim_{\beta\to c^+} \int_\beta^b g. \tag{3.13}$$

Por exemplo, vimos no Exemplo 25 que se $H(x) = 2\sqrt{x}$ para $x \in [0,1]$ então $H'(x) = 1/\sqrt{x} = h(x)$ para $x \in (0,1]$ e o Teorema Fundamental 33 afirma que $h \in \mathcal{R}^*_{[0,1]}$ e que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = H(1) - H(0) = 2.$$

Este é um exemplo notável do teorema de Heinrich Hake, o qual enunciamos a seguir.

Teorema 38. ***(Teorema de Hake)*** *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, então $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ se e somente se para todo $\gamma \in (a,b)$, a restrição de f em $[a,\gamma] \in \mathcal{R}^*_{[a,\gamma]}$ e*

$$\lim_{\gamma\to b^-} \int_a^\gamma f = A \in \mathbb{R}, \tag{3.14}$$

e, neste caso $\int_a^b f = A$.

A ideia da prova deste resultado é tomar uma sequência crescente (γ_n) convergindo para b, então $f \in \mathcal{R}_{[a,\gamma_n]}$ e $\lim_n \int_a^{\gamma_n} f = A$. Para mostrar que $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ precisamos construir calibres em $[a,b]$. Isso é feito com cuidado "recompondo" calibres que funcionam nos intervalos $[\gamma_{i-1}, \gamma_i]$ para obter um calibre em $[a,b]$. A demonstração encontra se em *[2]*.

Nos itens abaixo, mostraremos o entendimento da importância do Teorema de Hake.

- O teorema implica que a integral generalizada de Riemann *"não pode ser estendida tomando os limites como em (3.14)*. De fato, se a função f tem a propriedade que sua restrição para cada subintervalo $[a, \gamma]$, onde $\gamma \in (a, b)$ é Riemann integrável generalizada e tal que (3.14) assegura, então f pertence a classe $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$. Uma maneira alternativa de expressar este fato é que a integral de Riemann generalizada *não precisa ser estendida* tomando tais limites.

- Podemos testar a integrabilidade em $[a, b]$ de uma função, analizando seu comportamento em subintervalos $[a, \gamma]$ com $\gamma < b$. Como geralmente é bem difícil verificar que uma função $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ usando a Definição 17, este fato nos mostra outro método para mostrar que uma função é Riemann integrável generalizada em $[a, b]$.

- É muito útil avaliar a integrabilidade da função usando (3.14)

Usaremos estas observações para dar um exemplo que fornece informações importantes sobre funções Riemann integráveis generalizadas.

Exemplo 28. *(a) Seja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série qualquer de números reais convergindo para* $A \in \mathbb{R}$. *Construiremos uma função* $\varphi \in \mathcal{R}^*_{[0,1]}$ *tal que*

$$\int_0^1 \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A.$$

Definimos $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função que toma valores* $2a_1, 2^2a_2, 2^3a_3, \cdots$ *em intervalos* $\left[0, \frac{1}{2}\right); \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right), \cdots$. *Por conveniência, definimos* $c_k = 1 - 1/2^k$ *para* $k = 0, 1, \cdots$, *então:*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2^k a_k & para \quad c_{k-1} \leq x < c_k (k \in \mathbb{N}) \\ 0 & para \qquad\qquad x = 1 \end{cases}$$

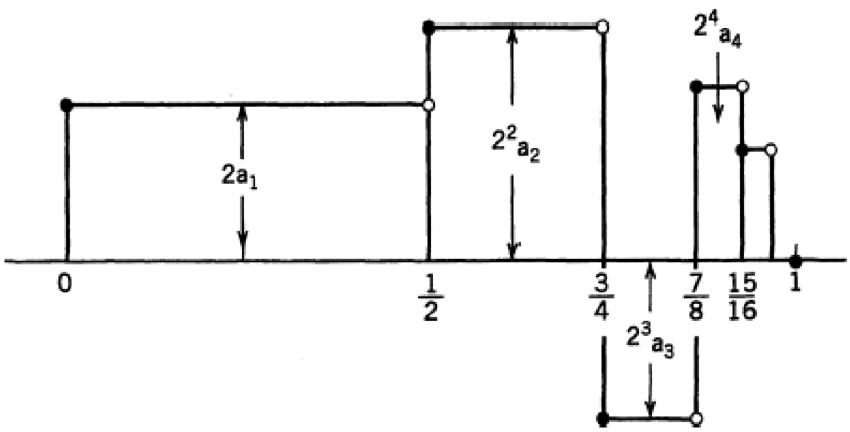

Figura 7 – Gráfico da função $\varphi(x)$

Sendo γ uma função escada e integrável. De fato, se $\gamma \in [c_{n-1}, c_n)$ então

$$\begin{aligned} \int_0^{\gamma} \varphi &= (2a_1).\left(\frac{1}{2}\right) + (2^2 a_2).\left(\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + (2^n a_n).\left(\frac{1}{2^n}\right) + r_\gamma \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + r_\gamma \end{aligned} \tag{3.15}$$

Onde $|r_\gamma| \leq |a_{n+1}|$. Mas, como a série é convergente e $r_\gamma \to 0$ temos:

$$\lim_{\gamma \to 1^-} \int_0^{\gamma} \varphi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = A.$$

(b) Dizemos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é absolutamente convergente, se $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ for convergente em $\mathbb{R}$. Então, temos do item (a) que a função $|\varphi| \in \mathcal{R}^*_{[0,1]}$ e que

$$\int_0^1 |\varphi| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Entretanto, se a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ não for convergente, então a função $|\varphi| \notin \mathcal{R}^*_{[0,1]}$.

Sabendo que muitas séries são convergentes mas não são absolutamente convergentes (por exemplo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$), temos exemplos de funções que são $\mathcal{R}^*_{[0,1]}$, mas tais que seu valor absoluto não pertence a $\mathcal{R}^*_{[0,1]}$).

De fato, existem funções Riemann integráveis generalizadas, no qual seu valor absoluto não é Riemann integrável generalizada. Podemos resumir esta informação dizendo que a integral generalizada de Riemann não é uma "integral absoluta". Assim, ao passarmos da Integral de Riemann para a integral generalizada de Riemann, verificamos a perda de uma importante propriedade da integral. Mas esse é o preço que pagarmos para conseguirmos integrar uma classe muito maior de funções.

3.2.1 Funções Lebesgue Integráveis

Tendo em vista a importância dos subconjuntos das funções $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$, das quais seu valor absoluto também pertencem a $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$, apresentaremos a seguinte definição:

Definição 18. *Uma função $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ tal que $|f| \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ é chamada de* ***Lebesgue Integrável*** *em $[a, b]$. A coleção de todas funções Lebesgue integráveis em $[a, b]$ é denotada por $\mathcal{L}_{[a,b]}$.*

Observação: A coleção de todas as funções Lebesgue integráveis é geralmente introduzida de uma maneira diferente. Uma das vantagens da integral generalizada de Riemann é que ela inclui a coleção de funções Lebesgue integráveis.

Trivialmente se $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ e $f \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então temos $|f| = f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$, e portanto, $f \in \mathcal{L}_{[a,b]}$. Ou seja, uma função $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$, não negativa, pertence ao conjunto $\mathcal{L}_{[a,b]}$. O próximo resultado mostra um teste mais forte para uma função $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$ para pertencer a ao conjunto das funções $\mathcal{L}_{[a,b]}$.

Teorema 39. ***(Teste da Comparação)*** *Se f e $\omega \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ e $|f(x)| \leq \omega(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $f \in \mathcal{L}_{[a,b]}$ e*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \omega. \tag{3.16}$$

Demonstração. A ideia da prova é a seguinte: O fato de $|f| \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ é provado em *[2]*, implicando que $f \in \mathcal{L}_{[a,b]}$.

Para (3.16), observe que $-|f| \leq f \leq |f|$ e do Teorema 29(c), temos que

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Como $|f(x)| \leq \omega(x)$, então (3.16) segue novamente do Teorema 29(c). □

O próximo teorema mostra que múltiplos e somas de funções constantes em $\mathcal{L}_{[a,b]}$ também são $\mathcal{L}_{[a,b]}$.

Teorema 40. *Se f e $g \in \mathcal{L}_{[a,b]}$ e se $c \in \mathbb{R}$, então $c.f$ e $f+g$ também tornam-se $\mathcal{L}_{[a,b]}$e temos:*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b \quad e \quad \int_a^b |f+g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|. \tag{3.17}$$

Demonstração. Sendo $|c.f(x)| = |c||f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$, a hipótese que $|f|$ pertence a $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$ implica que cf e $|cf|$ também pertence a $\mathcal{R}^*_{[a,b]}$, assim $cf \in \mathcal{L}_{[a,b]}$.

A desigualdade triangular implica que $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ para todo $x \in [a,b]$. Mas se $\omega = |f| + |g|, \omega \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$. O Teste da Comparação (39) mostra que $(f+g) \in \mathcal{L}_{[a,b]}$ e que

$$\int_a^b |f+g| \leq \int_a^b (|f| + |g|) = \int_a^b |f| + \int_a^b |g|.$$

□

O próximo resultado afirma que só é necessário estabelecer uma desigualdade unilateral para mostrar que uma função $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ pertence a $\mathcal{L}_{[a,b]}$.

Teorema 41. *Se $f \in \mathcal{R}^*_{[a,b]}$ as seguintes afirmações são equvalentes:*

(a) $f \in \mathcal{L}_{[a,b]}$

(b) Existe $\omega \in \mathcal{L}_{[a,b]}$ *tal que* $f(x) \leq \omega(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$.

(c) Existe $\alpha \in \mathcal{L}_{[a,b]}$ *tal que* $\alpha(x) \leq f(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$.

Demonstração. Para vermos que $(a) \Rightarrow (b)$ basta tomarmos $\omega = f$.

Observermos que $f = \omega - (\omega - f)$. Temos que $\omega - f \geq 0$ e $(\omega - f) \in R^*_{[a,b]}$. Aplicando o Teorema 40 temos que a soma $\omega - (\omega - f)$ é Lebesgue integrável, ou seja, $f \in \mathcal{L}_{[a,b]}$. Portanto $(b) \Rightarrow (a)$. Por fim, a prova de que $(c) \iff (a)$ é análoga à prova de que $(b) \Rightarrow (a)$, escrevendo $f = \alpha + (f - \alpha)$. Dado um $\epsilon > 0$, tomamos $\alpha(x) = f(x) - \epsilon$ e garantimos que $(a) \Rightarrow (c)$. $\square$

Finalizaremos o trabalho dando um exemplo de uma função que é Riemann integrável generalizada e não é Lebesgue integrável. Portanto, o conceito de integação generalizada é mais abrangente quando comparado ao conceito de integral de Lebesgue.

Exemplo 29. *Seja* $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & se \quad x \neq 0, \\ 0, & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Observamos que esta função é derivável em todo intervalo $[0,1]$. Seja $f = F'$. Aplicando o Teorema 33 temos que $f \in \mathcal{R}^*_{[0,1]}$ e $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = Sen(1)$. Porém, f não é Lebesgue integrável em $[0,1]$, pois $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx = \infty$, já que a integral do módulo de f não é limitado, implicando assim que a função não é Lebesgue integrável.

4 Conclusão

Do ponto de vista da evolução histórica do conceito de integral, sabemos que esse já aparece com Arquimedes e o método de exaustão, porém são Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz que são normalmente apresentados como os mentores intelectuais dessa teoria.

Newton utilizou a ideia da primitiva de uma função para tratar questões relacionadas à movimento de objetos, tais como velocidade e aceleração. Já Leibniz utiliza o conceito da integral nos cálculos de áreas que existem embaixo de uma curva, gráfico de função. Esse conceito foi formalizado a partir da noção de limites, que ainda não era muito claro.

Na sequência, Cauchy define precisamente os conceitos de limites, derivadas e integrais. Vale ressaltar que o foco neste momento era sobre as funções contínuas definidas em intervalos limitados e fechados da reta. Já no século XIX, Riemann estende o conceito de integral, dado por Cauchy, às funções que eram limitadas e não necesssariamente contínuas, utilizando o método da partição do intervalo. Darboux reformula o conceito de integral dado por Riemann utilizando o supremo e o ínfimo de uma função nos intervalos de uma partição Riemanniana, definindo assim as integrais superiores e inferiores de uma função. Até a esta altura, uma condição necessária para que valha o teorema fundamental do cálculo é que a função tenha derivada integrável no sentido de Riemann-Darboux.

No que segue, Lebesgue mostra que a classe de funções que são integráveis no sentido de Riemann-Darboux não era tão grande quando comparado à classe das funções contínuas, mostrando que uma função era Riemann integrável se e somente se seu conjunto de descontinuidade tinha medida nula. Então, Lebesgue propõe um novo conceito de integral contendo o caso da integral de Riemann-Darboux como caso particular de seu conceito. Aqui, para valer o teorema fundamental, a função deve possuir derivada limitada.

Várias tentativas de generalizar o conceito de integral dados por Riemann e Lebesgue foram feitas, devendo destaque para os métodos de A. Denjoy em 1912 e o de Perron em 1914. Ambos métodos contém o conceito da integral de Lebesgue, como caso particular, e faz a reconstrução de uma função por meio de sua derivada tendo por motivação a integral de Lebesgue.

No entanto, em 1960, R. Henstock investigou um processo de integração com o objetivo da reconstrução de uma função por meio de sua derivada, porém baseado nos conceitos de Riemann e Darboux. O conceito de R. Henstock foi denominado integral de Riemann generalizada.

Vimos que a integral de Riemann generalizada abrange uma classe de funções mais ampla que as integrais de Riemann e de Lebesgue. Porém, o mais interessante nesse conceito é o fato de não precisarmos de uma teoria de medida tal como aquela necessária à construção da integral de Lebesgue.

O desenvolvimento deste trabalho me possibilitou uma visão mais ampla e abrangente acerca da teoria de integração.

Referências

[1] ALMAY, Peter.; *Elementos do Cálculo Diferencial e Integral* , 1 ed: Kronos, Inc, 1980.

[2] BARTLE, Robert G.; *A Modern Theory of Integration*, 2 ed: John Wiley University of Illinois Sons, Inc, 2000.

[3] BARTLE, Robert G.; . *The Elements of Integration* , 4 ed: John Wiley University of Illinois Sons, Inc, 1966.

[4] BARTLE, Robert G.; SHERBERT, Donald R.. *Introduction to Real Analysis* , 4 ed: John Wiley University of Illinois Sons, Inc, 2011.

[5] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* 4 ed: Unicamp. 1995.

[6] LIFTON, Joshua H.; *Measure Theory and Lebesgue Integration*, Março 1999.

[7] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise Vol. 1.* 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2010.

[8] SPIVAK, Michael.; *O Cálculo em Variedades*, 2 ed: Ciência Moderna, Inc, 2003.

[9] MEDEIROS, Luis A.; *A Integral de Lebesgue*, 6 ed: Instituto de Matemática UFRJ, 2008.