UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB

PROFMAT

A Construção do Pentágono Regular segundo Euclides

†

por

Alex Cristophe Cruz da Silva

sob orientação do

Prof. Doutor Pedro Antonio Hinojosa Vera

e co-orientação do

Prof. Doutor Fernando Antonio Xavier de Souza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

A Construção do Pentágono Regular segundo Euclides

por

Alex Cristophe Cruz da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Geometria Plana.

Aprovada por:

Prof. Dr. Pedro Antonio Hinojosa Vera -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Fernando Antonio Xavier de Souza - UFPB (Co-orientador)

Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE

Julho/2013

Agradecimentos

Quero agradecer a CAPES, SBM, PROFMAT, UFPB, CCEN-UFPB, DM;

também ao Professor Doutor João Marcos do Ó, ao meu orientador Professor Doutor Pedro Antonio Hinojosa Vera, ao meu co-orientador Professor Doutor Fernando Antonio Xavier de Souza, ao professor externo à banca o Professor Doutor Jorge Antonio Hinojosa Vera (UFRPE);

à Secretária de Educação Arleide Albuquerque Guerra, a Prefeitura Municipal de Timbaúba, ao Gestor da Escola de Referência em Ensino Médio de Timbaúba o Professor Mestre Antonio Barboza;

aos colegas de caminhada Leonardo Rodrigues de Araújo, Salatiel Dias da Silva, Márcio Alves Marinho e Gildeci José Justino;

ao grande amigo Gutemberg pelo incentivo, e ao Pe.Marisaldo Barbosa de Lima pelo apoio espiritual;

demais professores do polo UFPB;

e principalmente a Deus, pois sem Ele não haveria de chegar neste momento ímpar de crescimento pessoal e acadêmico.

Dedicatória

Ao meu pai José Cassimiro, à minha mãe Betânia Cristina (in memorian),à minha esposa Emetéria (Telma),à meus filhos Alex Júnior e Alexia, à minha madrinha Tereza.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos algumas construções do pentágono regular, sendo a principal delas uma construção de Euclides encontrada no seu livro *Os Elementos*. Apresentamos, também, algumas aplicações desta contrução.

Palavras-chave: Polígonos regulares, Pentágono, Euclides, Segmento Áureo.

Abstract

In this work we present some constructions of the regular pentagon, the main one is a construction of Euclid found in his book *The Elements*. We also present some applications of this construction.

Keywords: Regular Polygons, Pentagon, Euclid, Golden Mean.

Sumário

Introdução

A matemática é uma ciência de aspecto único do pensamento humano e se difere de todas as outras ciências, ela possui inúmeros ramos para todos os possíveis estudantes dessa magnífica ciência exata. De seus ramos, a geometria é um desses que tem as mais diversas aplicações, que são utilizadas dos primórdios da civilização humana até o momento atual.

A geometria, em especial, tem grande aplicabilidade e a falta de um manual dessa área da matemática fez com que alguns matemáticos produzissem os seus primeiros manuais de ensino (primórdios dos livros). Dentre esses autores destaca-se Euclides de Alexandria o qual escreveu vários livros, entre estes Os Elementos.

Esta dissertação faz um apanhando histórico do pouco do que se sabe sobre Euclides. No capítulo I, será dada informações sobre: Alexandria, os livros perdidos de Euclides, o livro Os Elementos do qual faremos uma abordagem sintética de cada capítulo, informando o seu conteúdo para que o leitor, que queira mais informações sobre o mesmo, tenha uma referência.

No capítulo II, serão desenvolvidos os conceitos de polígonos regulares, com demonstrações de inscrição e circunscrição destes polígonos na circunferência; logo após é feita uma sequência lógica de teoremas e construções usadas por Euclides, do teorema de Pitágoras, inscrição de quadriláteros em uma circunferência, incluindo a construção do segmento áureo, dado um segmento qualquer, construção de um triângulo isósceles em que os ângulos da base é o dobro do ângulo do vértice, dado um segmento qualquer, as demonstrações feitas todas são com equivalência de áreas. Elas justificam, matematicamente, a construção do pentágono regular feita com régua e compasso, depois apresentamos mais três construções diferentes. O capítulo é finalizado com a demonstração que o segmento áureo da diagonal do pentágono regular é congruente com o lado desse polígono.

No capítulo III, utilizando os conceitos, construções e demonstrações apresentados no capítulo anterior, definimos os elementos notáveis de um polígono regular, com resolução de quatro problemas que são: calcular a apótema e o lado dos polígonos hexágono, decágono, pentágono e de um polígono regular de n lados.

O segmento áureo é comentado várias vezes neste trabalho, por isso incluímos um apêndice falando sobre o mesmo, demonstrando o valor dele, a sua incomensurabilidade e onde é encontrado em várias situações na natureza.

Capítulo 1

Euclides de Alexandria - Um pouco de História

1.1 Introdução

Neste capítulo falaremos sinteticamente o que ocorria na época de Euclides. Dissertaremos um pouco deste matemático fascinante e sobre o seu livro que serve de base para o estudo de uma área da matemática que provoca fascínio em vários estudiosos - a geometria.

1.2 Alexandria e Euclides

A morte de Alexandre, o Grande, levou a conflitos mortais entre os generais do exército grego. O controle da parte egípcia estava nas mãos dos Ptolomeus, os governantes macedônicos do Egito. Ptolomeu I assentou o alicerce da Universidade de Alexandria - Museu e Biblioteca - ela foi financiada tanto por Ptolomeu I como pelo seu filho Ptolomeu II. Deste centro acadêmico ele recrutou um grupo de sábios, os de primeira linha e em diversas áreas. Entre esses sábios se encontra Euclides - o autor de um dos livros mais estudado depois da Bíblia, Os Elementos (Stoichia). É interessante frisar que a Universidade de Alexandria, após uns 40 anos, ostentava mais de 600.000 rolos de papiro e em 300 a.C. a universidade abriu as portas e, com isso, a cidade de Alexandria se tornou a metrópole de amplo conhecimento

intelectual grego (veja [1]).
Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, apenas que, sem dúvida, ele foi professor da primeira universidade que já se ouviu falar, a famosa Universidade de Alexandria. Trata-se da primeira instituição em que sua organização tem semelhança com as que existem atualmente. É uma infelicidade que não existem registros históricos da data e do local do nascimento de Euclides, mas sabe-se que, provavelmente, sua formação foi na escola platônica de Atenas. As obras que sobreviveram do destino trágico do esquecimento são: *Os elementos, Os dados, Divisão de figuras, Os Fenômenos e Óptica.* segundo [1] aparece um retrato de Euclides em vários livros de história da matemática, essa imagem é de Euclides de Samara (veja [1], [2], [3]).

1.3 Obras Perdidas e Os Elementos

Do que Euclides produziu, mais da metade foi perdido, bem como uma obra sobre cônicas de quatro volumes [1], também um tratado sobre Lugares Geométricos Sólidos(nome grego para as secções cônicas), de Aristeu, a obra dele foi superada pela a de Apolônio. Entre as obras que também foram perdidas temos uma sobre Lugares Geométricos de Superfície, outra sobre Pseudaria (ou falácias) e uma terceira sobre Porisma, segundo Papus um porisma é algo intermediário entre um teorema, uma proposta de demonstração, ou uma construção para resolver um problema; outros descrevem como uma proposição em que se determina uma relação entre as quantidades conhecidas e variáveis ou indeterminadas, talvez a melhor proximidade de uma ideia de função (veja [1], [2]).
Os Elementos de Euclides é, sem dúvida, um dos livros mais citado e estudado. Nenhum livro, com exceção da bíblia exerceu uma grande influência no pensamento científico; segundo as informações descritas em [1] e [2], ambos afirmam que antes deste Elementos, existiram outros como a versão de Hipócatres de Chios, mas não é encontrada nenhuma versão anterior a de Euclides, pois de tão bem elaborada foi a que sobreviveu derrubando os seus concorrentes da época. Uma visão geral de alguns professores que acreditam que esse livro é um compêndio de geometria, entretanto esse achado fala de um texto introdutório cobrindo toda a matemática elementar. Ele aborda os seguintes conteúdos: *aritmética* (teoria dos números), *geometria sintética* (pontos, retas, planos, círculos e esferas) e álgebra. Todo esse

conteúdo foi distribuído ao longo de 13 livros ou capítulos; onde se desenvolvem 465 proposições. Serão feitos alguns comentários a respeito dos treze livros indicando-os por algarismos romanos.

O Livro I possui o seguinte conteúdo: 23 definições, 5 postulados, 9 noções comuns necessárias para as demonstrações e 48 proposições. As primeiras 23 proposições tratam principalmente das propriedades do triângulo e incluem os três teoremas de congruência. As proposições I 27 a I 32 estabelecem a teoria das paralelas e provam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a soma de dois ângulos retos. As outras proposições falam sobre paralelogramos, triângulos, quadrados, relação entre áreas e a demonstração euclidiana do teorema de Pitágoras com também a sua recíproca. O material desse livro foi desenvolvido pelos pitagóricos antigos [2].

O Livro II é pequeno comparado com o livro I. Este possui 14 proposições que lidam com a transformação de áreas (equivalência de áreas) e com a álgebra geométrica.

O Livro III possui trinta e nove proposições. Contém muito dos teoremas sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos associados que fazem parte dos textos de geometria elementar.

O Livro IV tem exatamente dezesseis proposições, que mostram a construção com régua e compasso, de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e quinze lados, bem como a inscrição e a circunscrição desses polígonos num círculo dado.

O Livro V é uma exposição da teoria das proporções de Eudoxo, aplicável a grandezas comensuráveis e incomensuráveis; além disso, faz uma definição de proporção.

O Livro VI aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Encontram-se nesse livro os teoremas fundamentais de semelhança de triângulos; construções de terceira, quarta e médias proporcionais; as resolução geométrica de equações quadráticas; o teorema da bissetriz interna; a generalização do Teorema Pitágoras, entre outros.

Os Livros VII, VIII e IX tratam da teoria elementar dos números, nesses capítulos desenvolvem o *algoritmo euclidiano* para achar o *mdc e o mmc*; as proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas; o *teorema fundamental da aritmética*; a prova de que os números primos são infinitos com uso da *redução ao absurdo*.

O Livro X estuda os irracionais, segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado, nele existe uma fórmula para calcular cem ternos pitagóricos.

Os livros XI, XII e XII falam sobre a geometria sólida (espacial), com exceção da esfera e o último a inscrição dos cinco poliedros de Platão em uma esfera.

Com esse riquíssimo material, Os Elementos torna-se o livro mais completo da época em preparar o estudante à iniciação dos estudos matemáticos onde é comparado como o necessário para aprender matemática, assim como são as letras do alfabeto são para aprender a ler (para maiores descrições destes livros veja [1], [2]).

Capítulo 2

A construção do pentágono regular

2.1 Introdução

Neste capítulo, mostraremos a construção do pentágono regular inscrito em uma circunferência, que é ponto alto do Livro IV de Os Elementos. Essa construção não usa semelhança, se baseia apenas na equivalência de áreas [8]. Para sua construção ele utiliza uma sequência lógica de proposições que são estudadas ao longo dos Livros I, II, III e IV, são as proposições IV.10 e IV.11 onde é feita essa construção. A sequência lógica, neste trabalho, será a mesma desenvolvida por Euclides como o fez em seu livro. Ao leitor, muitas vezes, pergunta-se de onde vem certas afirmações. Euclides, em cada livro, escreve definições, postulados e noções comuns que são utilizados em suas demonstrações e construções sem a necessidade de informá-la na mesma, já que está sendo aplicada sem a necessidade de demonstrá-la, apenas como aceitável. Todas essas definições, postulados podem ser encontrados em [4].

2.2 Os Polígonos regulares

Definição 2.1 *Um polígono é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes.*

Ou seja, um polígono regular é equilátero e equiângulo.

Definição 2.2 *Denomina-se arco de circunferência a cada uma das partes em que ela é dividida por um par de seus pontos (veja figura 2.1).*

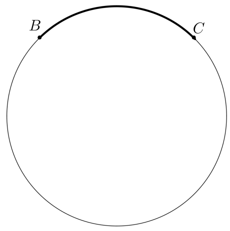

Figura 2.1:

Definição 2.3 *Denomina-se corda de circunferência a qualquer segmento de reta que tenha suas extremidades sobre ela.*

Quando uma reta corta uma circunferência formando uma corda ela é chamada de secante (veja figura 2.2).

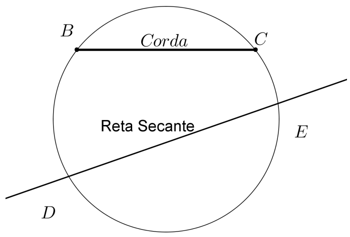

Figura 2.2:

Definição 2.4 *Denomina-se segmento de um círculo a região delimitada por um arco e uma corda de sua circunferência (veja figura 2.3).*

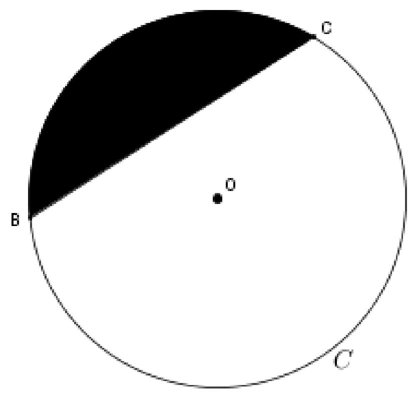

Figura 2.3:

Teorema 2.5 *Dividindo-se uma circunferência em n ($n \geqslant 3$) arcos congruentes, temos:*
1- todas as cordas determinadas por dois pontos de divisão consecutivos, reunidas, formam um polígono regular de n lados inscrito na circunferência;
2- as tangentes traçadas pelos pontos de divisão determinam um polígono regular de n lados circunscritos à circunferência.

Demonstração: Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ os n pontos de divisão da circunferência C (veja figura 2.4). O polígono $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ é de n lados é inscrito, pois

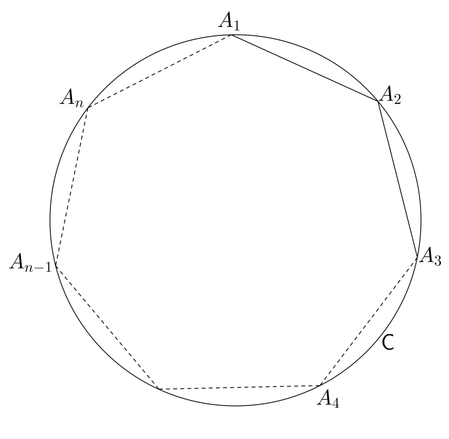

Figura 2.4:

todos os vértices pertencem à circunferência C. Sendo

$$\text{arco}A_1A_2 \equiv \text{arco}A_2A_3 \equiv \cdots \equiv \text{arco}A_{n-1}A_n \equiv \text{arco}A_nA_1 \tag{2.1}$$

então

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \cdots \equiv \overline{A_{n-1}A_n} \equiv \overline{A_nA_1} \tag{2.2}$$

Pois, numa mesma circunferência, arcos congruentes subtendem cordas congruentes. Os ângulos$A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots, A_{n-1}, A_n$ são congruentes, pois cada um deles é ângulo inscrito em C e tem por medida metade da soma de $(n-2)$ dos arcos congruentes em que C ficou dividida. De (2.1) e (2.2) concluímos que $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ é um polígono regular de n lados inscrito na circunferência C, isto prova a primeira parte do teorema.

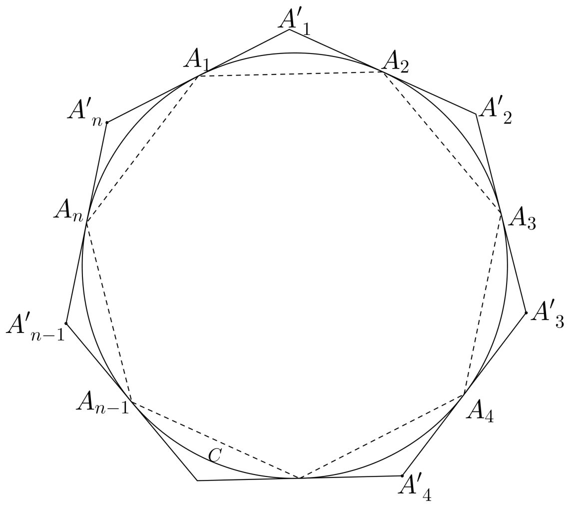

Figura 2.5:

Pelos pontos da divisão, que também são vértices de um polígono regular qualquer inscrito na circunferência C, $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots, A_{n-1}, A_n$ conduzimos tangentes a C nesses vértices e obtemos o polígono $A'_1A'_2A'_3A'_4\cdots A'_{n-1}A'_n$ de n lados circunscrito a C (veja figura 2.5).

Os triângulos $\Delta A'_1A_1A_2$, $\Delta A'_2A_2A_3$, $\Delta A'_3A_3A_4$, $\Delta A'_4A_4A_5$, $\cdots$, $\Delta A'_{n-1}A_{n-1}A_n$ e $\Delta A'_nA_nA_1$ são triângulos isósceles, pois cada um dos ângulos $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots, A_{n-1}$ e A_n destes triângulos, tem medida igual a metade da medida de uma das partes congruentes arco A_1A_2, arco A_2A_3, arco A_3A_4, arco A_4A_5, $\cdots$, arco $A_{n-1}A_n$, arco A_nA_1 em que foi dividida a circunferência (são ângulos do segmento ou semi-inscritos) e congruentes pelo caso ALA, visto que sendo $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$ um polígono regular (já demonstrado), e os lados $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \overline{A_4A_5}, \cdots, \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$ destes triângulos são congruentes. Da congruência dos triângulos decorre que $\hat{A}'_1 \equiv \hat{A}'_2 \equiv \hat{A}'_3 \equiv \hat{A}'_3 \equiv \cdots \equiv \hat{A'_{n-1}} \equiv \hat{A}'_n$ (1) ; e, por soma conveniente, temos: $\overline{A'_1A'_2} \equiv \overline{A'_2A'_3} \equiv \overline{A'_3A'_4} \equiv \overline{A'_4A'_5} \equiv \cdots \equiv \overline{A'_{n-1}A'_n} \equiv \overline{A'_nA'_1}$ (2). De (1) e (2) concluímos que $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$ é um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência C (veja [6]).

$\square$

Teorema 2.6 *Todo polígono regular é inscritível numa circunferência.*

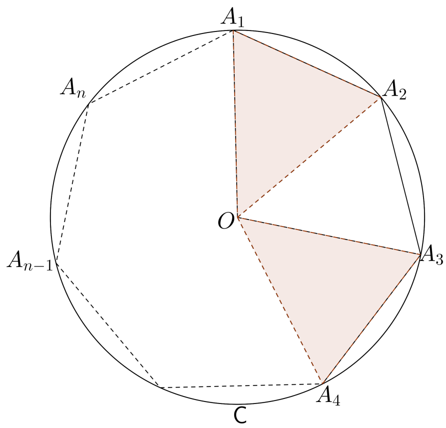

Figura 2.6:

Demonstração: Seja $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$ o polígono regular (veja figura 2.6), pelos pontos $A_1A_2A_3$ tracemos a circunferência C e seja O o seu centro; provemos que C passa pelos demais vértices $A_4, A_5, \cdots, A_{n-1}, A_n$ do polígono. Comecemos provando que $A_4 \in C$. Consideremos os triângulos $\Delta\ OA_2A_1$ e $\Delta\ OA_3A_4$. Estes triângulos são congruentes pelo caso LAL, pois $\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_3A_4}$ (lados do polígono regular), $\overline{OA_2} \equiv \overline{OA_3}$ (raios da circunferência) e considerando o triângulo isósceles $\Delta\ A_2OA_3$ (ângulos da base congruentes), e ainda, que os ângulos $\hat{A}_2$ e $\hat{A}_3$ do polígono são congruentes, por diferença decorre que $O\hat{A}_2A_1 \equiv O\hat{A}_3A_4$.
$\Delta OA_2A_1 \equiv \Delta OA_3A_4 \Longrightarrow \overline{OA_1} \equiv \overline{OA_4} \Longrightarrow A_4 \in C$.

De modo análogo temos que $A_5 \in C$ (basta considerar ΔOA_3A_2 e ΔOA_4A_5), $\cdots$, $A_{n-1} \in C$ e $A_n \in C$, e o polígono $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}$ (basta considerar $\Delta OA_{n-3}A_{n-4}$ e $\Delta OA_{n-2}A_{n-1}$) A_n (basta considerar $\Delta OA_{n-1}A_{n-2}$ e ΔOA_nA_1) inscrito na circunferência C(veja [6]).

□

Da unicidade da circunferência que passa por $A_1A_2A_3$ sai a unicidade de C por $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n$.

Teorema 2.7 *Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.*

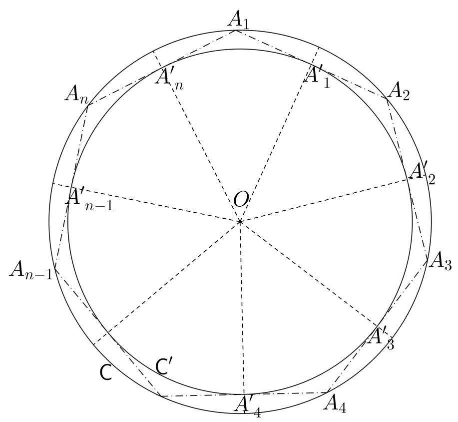

Figura 2.7:

Demonstração: Seja $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ o polígono regular. Em vista do Teorema 2.6, ele é inscrito numa circunferência C (veja figura 2.7). Seja O o centro dessa circunferência. Os lados $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,$\cdots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$ são cordas congruentes de C, por isso distam igualmente do centro O. Sendo A'_1, A'_2, $\cdots$, A'_{n-1}, A'_n os respectivos pontos médios dos lados $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$,$\cdots$, $\overline{A_{n-1}A_n}$, $\overline{A_nA_1}$, temos $\overline{OA'_1} \equiv \overline{OA'_2} \equiv \cdots \equiv \overline{OA'_{n-1}} \equiv \overline{OA'_n}$ (distância do centro a cordas congruentes) donde se conclui que O é o centro de uma circunferência C' que passa pelos pontos A'_1, A'_2, $\cdots$, A'_{n-1}, A'_n. E ainda sendo $\overline{OA'_1}\perp\overline{A_1A_2}$, $\overline{OA'_2}\perp\overline{A_2A_3}$, $\cdots$, $\overline{OA'_{n-1}}\perp\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{OA'_n}\perp\overline{A_nA_1}$, temos que $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$ tem lados tangentes a C'. Conluímos que o polígono regular $A_1A_2A_3A_4\cdots A_{n-1}A_n$ é circunscrito à circunferência C'.

□

Unicidade de C', se existisse outra circunferência inscrita no polígono $A_1A_2A_3A_4 \cdots A_{n-1}A_n$, ela passaria pelos pontosA'_1, A'_2,A'_3 $\cdots$, e seria, então coincidente com C'(veja [6]).

2.3 Construções do Pentágono Regular

Teorema 2.8 *Se um quadrilátero tem dois lados paralelos e congruentes entre si ele é um paralelogramo.*

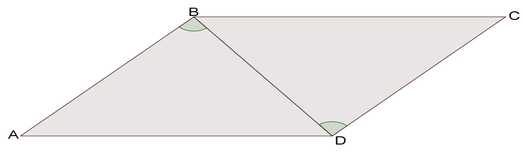

Figura 2.8:

Demonstração: Seja o quadrilátero ABCD, com AB = CD e AB//CD (veja figura 2.3). Queremos mostrar que AD = BC e BC//AD. Unindo-se B a D, ficam formados os triângulos ABD e BCD. Tais triângulos são congruentes pelo critério LAL, pois BD é um lado comum, o $\angle$ABD = $\angle$BCD (alternos-internos) e AB = CD. Logo, BC = AD e o $\angle$ADB = $\angle$CBD. Logo, BC//AD ([5]).

□

Teorema 2.9 *Se pelo ponto médio de um lado de um triângulo for traçada a paralela a outro lado, essa paralela cortará o terceiro lado em seu ponto médio. Reciprocamente, a reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado.*

Demonstração: Seja o triângulo ABC e o ponto M, médio de AB (veja figura 2.9) Por M traçamos uma paralela a BC, cortando o lado AC no ponto N. Queremos, inicialmente, provar que N é ponto médio de AC, ou seja, NA = NC. Por C tracemos a paralela a AB, cortando a reta MN no ponto D.

O quadrilátero BCDM é um paralelogramo (lados opostos paralelos, por construção). Logo, BM = CD e MD = BC. Como BM = CD e BM = AM (M é o ponto

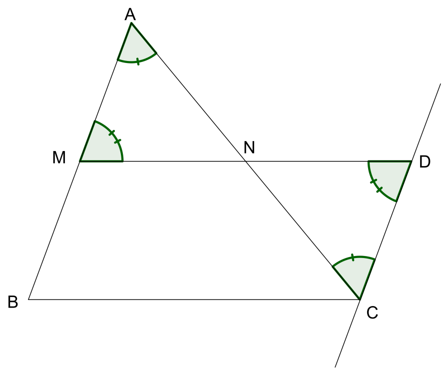

Figura 2.9:

médio de AB), AM = CD. Os triângulos AMN e CDN são congruentes (ALA) pois AM = CD, ∠AMN = ∠CDN (alternos internos) e ∠MAN = ∠DCN (alternos internos). Logo NA = NC.

Provemos agora o recíproco, ou seja, a reta que passa pelos pontos médios M e N de AB e AC é paralela a BC. As hipóteses agora são AM = BM e NA = NC. Queremos provar que MN//BC. Por C tracemos a paralela a AB, cortando MN no ponto D. Novamente os triângulos AMN e CND são congruentes (ALA), pois ∠MAN = ∠DCN (alternos internos), NA = NC e ∠ANM = ∠CND (opostos pelo vértice). Logo, CD = AM. Mas AM =BM (por hipótese). Logo BM = CD. Pelo Teorema 2.8, o quadrilátero BCDM é um paralelogramo, porque tem dois lados congruentes (BM e CD). Logo MD//BC, ou seja, MN//BC. Ainda da congruência dos triângulos AMN e CND tem-se MN = CD e, como MN + ND = MD, tem-se MD = 2MN. Mas MD = BC. Logo, BC = 2MN, ou seja, o segmento que une os pontos médios dos lados de um triângulo é congruente com a metade do terceiro lado paralelo a ele.

□

Teorema 2.10 *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de mesma base e altura congruente com a metade da altura do triângulo.*

Equivalente, neste contexto, significa que as figuras possuem a mesma área.
Demonstração: Seja o triângulo ABC qualquer (veja figura 2.10). Tomemos como base um dos lados, por exemplo, o lado BC e sobre um dos outros, por exemplo, lado AB, considere o ponto médio M. Por M tracemos a paralela a BC, que cortará o lado

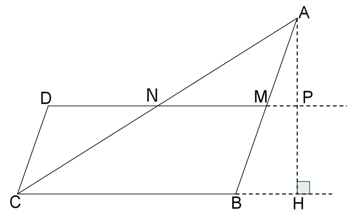

Figura 2.10:

AC no seu ponto médio N, (Teorema 2.9). Seja D o ponto de intersecção entre a reta que passa nos pontos M e N e a reta paralela a AB porque passa no ponto C. Os triângulos AMN e CDN são congruentes. Assim, o triângulo ABC foi decomposto no quadrilátero BCNM e no triângulo AMN, o paralelogramo BCDM foi decomposto no quadrilátero BCNM e no triângulo CDN que é congruente com o triângulo AMN. Logo, o triângulo ABC é equivalente ao paralelogramo BCDM. Resta provar que a altura do paralelogramo BCDM é a metade da altura do triângulo ABC. Pelo ponto A tracemos a perpendicular AH ao lado BC, cortando a reta MD no ponto P. Note que AH é altura do triângulo ABC e PH é a altura do paralelogramo BCDM, no triângulo ABH a reta MP é paralela a reta BH e M é ponto médio do lado AB. Logo, pelo Teorema 2.9, P é o ponto médio de AH. Assim, a altura do paralelogramo BCDM é a metade da altura do triângulo ABC(veja [5]).

□

De posse destes três teoremas, agora podemos demonstrar o teorema de Pitágoras. Essa demonstração foi feita por Euclides.

Teorema 2.11 *Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados construídos sobre os catetos é equivalente ao quadrado construído sobre a hipotenusa.*

Demonstração: Sejam, então um triângulo ABC e os quadrados BCED, ABFG e ACKH, construídos sobre a hipotenusa e seus catetos (veja figura 2.11). **Queremos provar que, somados, os quadrados ABFG e ACKH, sobre os catetos, são equivalentes ao quadrado BCED, sobre a hipotenusa**.

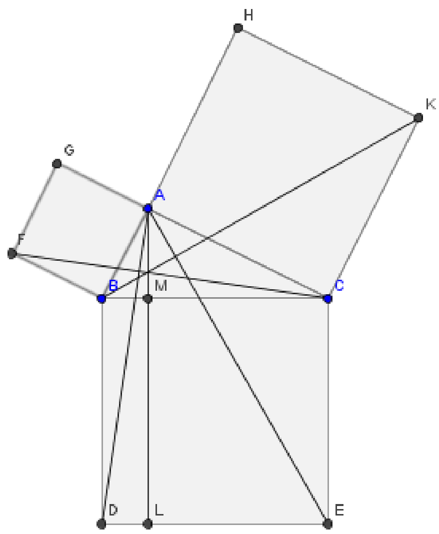

Figura 2.11:

Seja AL perpendicular a hipotenusa (portanto paralela a BD e CE), cortando-a no ponto M. Unindo F a C e A a D, ficam formados os triângulos BCF e ABD. Eles são congruentes (LAL) porque BF = AB (lados de um quadrado), BC = BD (lados de outro quadrado) e $\angle$FBC = $\angle$ABD, pois ambos são a soma de um reto com o $\angle$ABC. A altura do triângulo BCF em relação à base BF é o lado FG do quadrado ABFG. Pelo Teorema 2.10, **o triângulo BCF é equivalente** à metade do paralelogramo de base BF e altura AB, ou seja, **à metade do quadrado ABFG.** A altura do triângulo ABD, em relação à base BD, é o segmento BM. Logo, pelo Teorema 2.10, **o triângulo ABD é equivalente** à metade do paralelogramo de base BD e altura BM, ou seja, **à metade do paralelogramo BDLM.** Então, como os triângulos BCF e ABD são congruentes, **a metade do quadrado ABFG é equivalente à metade do paalelogramo BDLM.** Ou seja, **o quadrado ABFG é equivalente ao paralelogramo** (que também é um retângulo) **BDLM**.

Una-se, agora, o vértice B ao vértice K e o vértice A ao vértice E. Ficam formados os triângulos BCK e ACE. Com raciocínio análogo ao empregado com os triângulos BCF e ABD, prova-se que os triângulos BCK e ACE são congruentes e que o quadrado ACKH é equivalente ao retângulo CELM.

Significa que os quadrados ABFG e ACKH, somados, são equivalentes aos retângulos BDLM e CELM somados. Logo, a soma dos quadrados construídos sobre os catetos é equivalente ao quadrado construído sobre a hipotenusa([4], [5].

□

Essa demonstração é necessária pois ela serve de embasamento para as próximas demonstrações, construções e aplicações necessárias para a construção do pentágono regular.

Teorema 2.12 *Seja o segmento de reta* $\overline{AB}$ *dividido pelo ponto médio* C *e prologanda até o ponto* D*, então* $\overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$.

Esse teorema foi escrito da seguinte forma no livro de Euclides - *Se uma linha reta for dividida em duas partes iguais e for prolongada, o retângulo compreendido pela reta toda e mais a adjunta, e pela mesma adjunta, juntamente com o quadrado sobre a metade da primeira reta é igual ao quadrado sobre a reta formada por metade da reta mais a adjunta.*
Demonstração: Sejam C o ponto médio de AB e D, sobre o prolongamento de AB (veja figura 2.12)

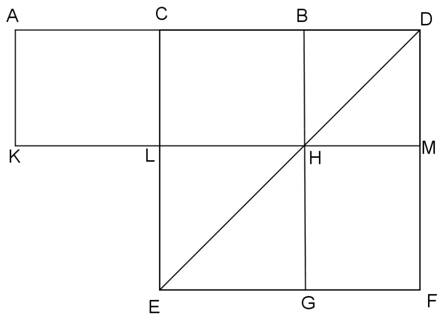

Figura 2.12:

Com o lado CD construa o quadrado CEFD. Una D a E. Por B trace GHB paralela a CE ou a DF. Pelo ponto H, trace KLM paralela a AD ou a EF e por A trace AK paralela a CL ou a DM. Então, como AC é igual a CB, o retângulo AKLC é igual ao retângulo CLHB. Mas CLHB é igual a HGFM, e portanto também AKCL é igual a HGFM. A cada um desses retângulos adicione CLMD. Assim, AKMD será igual a CLHGFD. Mas AKMD é o retângulo formado por AD e DB, pois DM é igual a DB.

Então, o retângulo de lados AD e DB é igual a CLHGFD. A cada um, adicione LEGH, que é igual ao quadrado sobre CB. Portanto o retângulo de lados AD e

DB, juntamente com o quadrado sobre CB, é igual a CLHGFD e a LEGH. Mas CLHGFD, juntamente com LEGH, formam CEFD, que é o quadrado sobre CD. Portanto, o retângulo de lados AD e DB, juntamente com o quadrado sobre CB, é igual ao quadrado sobre CD ([8]).

□

Bem, para uma melhor compreensão, mostraremos essa demonstração algebricamente.

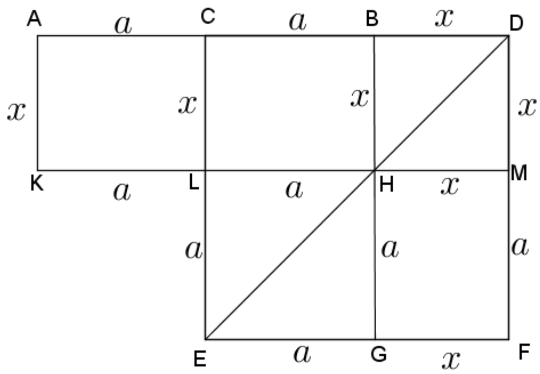

Figura 2.13:

Pela figura 2.13, temos $AC = CB$ medida de $AC = CB = a$ e o prolongamento de $AB, BD = x$. Então $AD = (2a + x), BC = a$ e $CD = (a + x)$.

$$\overline{AD} \cdot \overline{DB} + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(2a + x) \cdot x + a^2 = \overline{CD}^2$$

$$2ax + x^2 + a^2 = \overline{CD}^2$$

$$a^2 + 2ax + x^2 = \overline{CD}^2$$

$$(a + x)^2 = \overline{CD}^2$$

$$CD = (a + x)$$

□

Utilizaremos a seguinte construção que será necessária para o desenvolvimento da construção do pentágono regular; que é dividir uma reta dada de maneira que o retângulo formado pelo todo e por uma das partes seja igual ao quadrado sobre a outra parte. Essa construção dará origem ao segmento áureo([8]).

Queremos determinar um ponto H sobre AB tal que o retângulo de lados AB e HB seja igual ao quadrado sobre AH (veja figura 2.14).

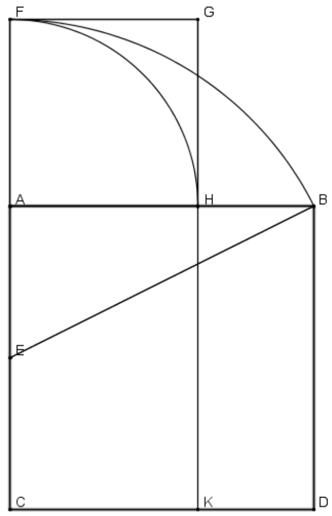

Figura 2.14:

Construa o quadrado ABCD e seja E o ponto médio de AC. Com centro em E e raio EB, descreva o arco de círculo que corta o prolongamento de CA em F. Com centro em E e raio EB, descreva o arco de círculo que corta o prolongamento de CA em F. Com centro de A e raio AF, descreva o arco de circunferência que corta AB em H. Afirmamos que o ponto H é solução do problema. Queremos provar que $AH^2 = HB \cdot AB$.
Aplicando o teorema 2.12 à reta AC, dividida ao meio por C, prolongada com AF temos que

$$FC \cdot FG + AE^2 = EF^2$$

mas

$$EF = EB$$

então
$$FC \cdot FG + AE^2 = EB^2 \Rightarrow FC \cdot FG = EB^2 - AE^2(1)$$

pelo teorema 2.11
$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

logo,
$$EB^2 - AE^2 = AB^2(2)$$

De (1) e (2) temos que $FC \cdot FG = AB^2$, subtraindo de cada lado da igualdade $AC \cdot AH$,
$$FC \cdot FG - AC \cdot AH = AB^2 - AC \cdot AH$$
$$FG^2 = HB \cdot BD$$

mas
$$FG = AH$$

e
$$BD = AB$$

logo,
$$AH^2 = HB \cdot AB$$

□

Com isso temos que o quadrado de lado AH é igual ao retângulo de lados HB e AB.

Teorema 2.13 *Seja P um ponto exterior a um círculo C, seja r uma reta tangente a C no ponto $T \in C$, passando por P e seja s uma reta arbritária que passa por P e corta C nos pontos R e S. Então $\overline{PR} \cdot \overline{PS} = \overline{PT}^2$.*

Existem dois casos para demonstrar, **um em que a reta passa pelo centro do círculo** e **outra em que ela não passa pelo centro**.
Demonstração: (A reta que passa por P, passa pelo centro do círculo (veja figura 2.15).

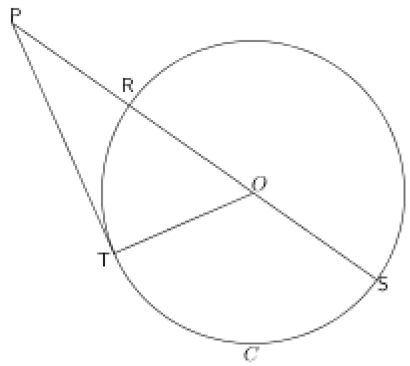

Figura 2.15:

Aplicando o Teorema 2.12 à reta RS, divida ao meio por O e prolongada com PR. Temos então que o retângulo de lados PR e PS, juntamente com o quadrado sobre RO, é igual ao quadrado sobre PO. Como RO e TO são raios do mesmo círculo, retirando do retângulo de lados PR e PS, juntamente com o quadrado sobre RO e do quadrado sobre PO o quadrado sobre RO e sobre TO, temos que o quadrado sobre RO é igual ao quadrado sobre TO. Segue-se então que o retângulo de lados PR e PS é igual ao quadrado sobre PO menos o quadrado sobre TO. O Teorema 2.12 mostra que o quadrado sobre PO menos o quadrado sobre TO é igual ao quadrado sobre PT. Assim, o retângulo de lados PR e PS é igual ao quadrado sobre PT, desta forma provamos o caso em que a reta passa pelo centro do círculo.

Provaremos agora o caso onde, a reta que passa por P, não passa pelo centro do círculo (veja figura 2.16).

Seja M o pé da perpendicular baixada de O sobre PS. Aplicando o Teorema 2.12 a RS prolongada por PR, temos que o retângulo de lados PR e PS, juntamente com o quadrado sobre RM, é igual ao quadrado sobre PM. Adicionando o quadrado sobre OM ao retângulo de lados PR e PS, juntamente com o quadrado sobre RM e ao quadrado sobre PM, temos que o retângulo de lados PR e PS, juntamente com os quadrados sobre RM e OM, é igual aos quadrados sobre PM e OM. Mas, pelo Teorema 2.12, o quadrado sobre RM, juntamente com o quadrado sobre OM, é igual ao quadrado sobre RO e o quadrado sobre PM, juntamente com o quadrado OM, é igual ao quadrado sobre PO. Mas estamos na situação do primeiro caso. Como o quadrado sobre RO é igual ao quadrado sobre TO, temos que o retângulo de lados

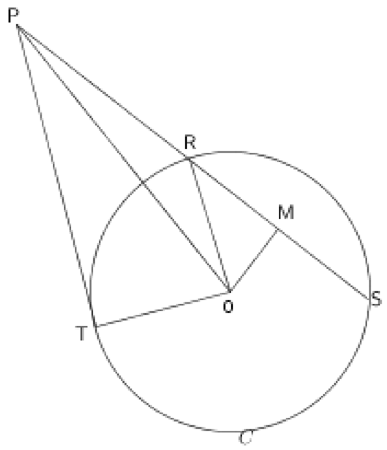

Figura 2.16:

PR e PS é igual ao quadrado de lado PO menos o quadrado de lado TO, ou seja, o quadrado de lado PT ([8]).

□

Teorema 2.14 *Seja um ponto A fora do círculo, forem traçadas duas retas passando pelo ponto A, uma delas interceptando o círculo em B e F, e a outra interceptando o círculo em D, então se* $\overline{AB} \cdot \overline{AF} = \overline{AD}^2$*, então* $\overline{AD}$ *é tangente no ponto D.*

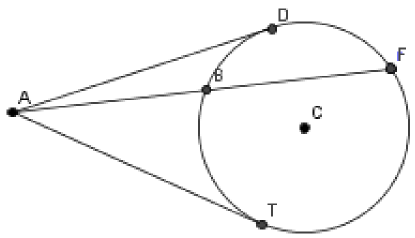

Figura 2.17:

Demonstração: por A traçamos $\overline{AT}$ (veja figura 2.17) tangente ao círculo no ponto T. Então, pelo Teorema 2.13, sabemos que o retângulo de lados $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$ é igual ao quadrado sobre $\overline{AD}$. Se dois quadrados são iguais, seus lados serão iguais, ou seja, $\overline{AT} = \overline{AD}$. Mas com T e D são simétricos em relação à reta que passa por A e T, D será ponto de tangência, ou seja, $\overline{AD}$ é tangente ao círculo([8]).

□

Teorema 2.15 *Os ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em um círculo são iguais, conjuntamente, a dois retos.*

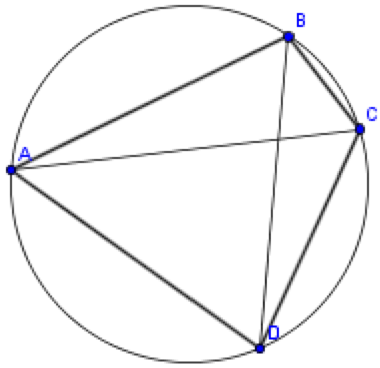

Figura 2.18:

Demonstração: Seja o círculo (veja figura 2.18) e nele esteja o quadrilátero, ABCD queremos demonstrar que os ângulos opostos são iguais a dois retos. Trace os segmentos AC, BD. Como se sabe, os três ângulos de todo triângulo são iguais a dois retos, portanto, os três ângulos ∠CAB, ∠ABC e ∠BCA do triângulo ABC são iguais a dois retos. Mas, por um lado, o ∠CAB é igual ao ∠BDC, pois estão no mesmo arco BADC, e por outro lado, o ∠ACB é igual ao ∠ADB, pois estão no mesmo arco ADCB, portanto, o ∠ADC é igual a soma dos ∠BAC e ∠ACB. Adicione o ∠ABC ao ângulo ∠ADC e aos ângulos ∠BAC e ∠ACB, temos então que ∠ADC e ∠ABC são iguais a ∠ABC, ∠BAC e ∠ACB, que são iguais a dois retos. Logo, ∠ADC e ∠ABC são iguais a dois retos. Do mesmo modo, prova-se que ∠BAD e ∠DCB são iguais a dois retos. Portanto, um quadrilátero inscrito no círculo, os ângulos opostos são iguais a dois retos([5]).

□

Teorema 2.16 *Em um círculo, o ângulo subtendido por um diâmetro é reto; o contido em um segmento de círculo menor do que um semi-círculo será maior do que um reto; e o contido em um segmento de círculo maior que um semi-círculo será menor que um reto.*

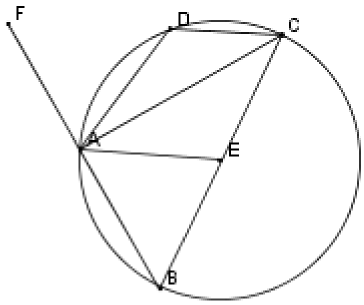

Figura 2.19:

Demonstração: Seja o círculo ABCD (veja figura 2.19) e sejam o BC um diâmetro dele e E o centro, e fiquem formados os segmentos BA, AC, AD, DC. Digo que $\angle BAC$ no semicírculo BAC é reto, o $\angle ABC$ que está no arco ABC é maior que o semicírculo BAC é menor que um reto, enquanto $angleADC$ no arco ADC é menor que o semicírculo BAC é maior que um reto. Ligue AE e trace BA até F.

$$\overline{BE} = \overline{EA} \Rightarrow \angle ABE = \angle BAE$$

do $\triangle AEB$ e

$$\overline{CE} = \overline{EA} \Rightarrow \angle ACE = \angle CAE$$

do $\triangle CEA$, portanto

$$\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB$$

mas

$$\angle FAC = \angle ABC + \angle ACB$$

ângulo externo do $\triangle ABC$. Portanto $\angle FAC = \angle BAC$, cada um é um ângulo reto. E como os ângulos $\angle ACB, \angle BAC$ do $\triangle ABC$ são menores que dois retos, e o $\angle BAC$

é reto, logo $\angle ABC$ é menor que um reto e está no arco ABC, que é maior que o semicírculo.
Como ABCD é quadrilátero inscrito em um círculo, logo pelo Teorema 2.15, os $\angle ABC$ e $\angle ADC$ = dois retos e $\angle ABC$ é menor que um reto, portanto $\angle ADC$ é maior que um reto e está no arco ADC que é menor do que o semicírculo. Observando a figura 2.19 o $\angle ADC$ subtendido pelo arco ABC é maior que um ângulo reto, por outro lado, o $\angle ABC$ subtendido pelo arco ADC é menor que um reto. O ângulo formado pelos segmentos BA e AC é reto. Portanto, o ângulo subtendido pelo arco ABC é maior que um reto. De novo, como pelos segmentos AC e AF é reto, o ângulo subtendido pelo arco ADC é menor que um reto.

Logo, em um círculo, o ângulo no semicírculo é reto, o ângulo que se encontra no arco menor é maior que um reto, e o ângulo que se encontra no arco menor é maior que um reto, por outro lado, o ângulo do arco maior é maior que um reto, e o ângulo do arco menor é menor que um reto([4]).

□

Teorema 2.17 *O ângulo entre uma tangente e uma corda de um círculo é igual ao ângulo subtendido pela corda, do lado oposto a tangente.*

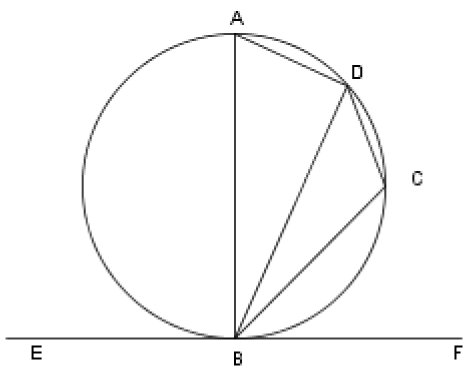

Figura 2.20:

Demonstração: Com efeito, sejam EF a reta tangente BD a corda. Trace o diâmetro AB do círculo, por B (veja figura 2.20); escolha C qualquer pertencente a circunferência, trace os segmentos AD, DC e BC; o ∠ADB, que se encontra sobre uma semicircunferência é reto, disso decorre que os ∠BAD e ∠ABD, juntos, são iguais a um reto, pois são ângulos internos no triângulo BAD. Como ABF é um ângulo reto, ele será igual a ∠BAD e ∠ABD, juntos; subtraia de ambos o ∠ABD; segue-se que o ∠ DBF = ∠BAD ([8]).

□

Bem, para a construção do pentágono regular, segundo Euclides, devemos construir um triângulo isósceles em que cada ângulo da base é o dobro do ângulo no vértice.

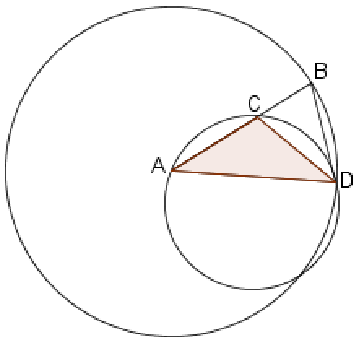

Figura 2.21:

Sejam dados o segmento de reta AB (veja figura 2.21). Determine o ponto C tal que o retângulo de lados AB, BC seja igual ao quadrado sobre CA. (Utilize a construção do segmento áureo para essa parte a seguir). Trace o círculo com centro A e raio AB; a partir de B, trace BD (com D sobre o círculo) igual a AC; trace AD e DC e construa o círculo ACD circunscrito ao triângulo ACD; como o retângulo de lados AB e BC é igual ao quadrado sobre AC e AC é igual a BD, o retângulo de lados AB e BC é igual ao quadrado sobre BD; como o ponto B é exterior ao círculo ACD, BA corta o círculo em C e A, e o retângulo de lados AB, BC é igual ao quadrado sobre BD, temos pelo Teorema 2.14, BD é tangente ao círculo ACD no ponto D. Então, teorema 2.17

$$\widehat{BDC} = \widehat{DAC}$$

$$\widehat{BDC} + \widehat{CDA} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA} \Rightarrow \widehat{BDA} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA}$$

Observe $\triangle ACD$ e o ângulo externo $\widehat{BCD}$

$$\widehat{BCD} = \widehat{DAC} + \widehat{CDA} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{BDA}(1)$$

Ora $\widehat{BDA} = \widehat{DBA}$, temos que

$$\widehat{BCD} = \widehat{BDA} = \widehat{DBA} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{DBC} \Rightarrow DB = DC$$

Como

$$DB = CA$$

(por construção), segue-se que

$$AC = CD$$

portanto,

$$\widehat{CAD} = \widehat{CDA}$$

de (1)

$$\widehat{BCD} = 2 \times \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{BDA} = 2 \times \widehat{DAC}.$$

Desta forma, o triângulo isósceles foi construído com cada um dos ângulos da base BD é igual ao dobro do terceiro ([8]).

Vamos, agora inscrever, em um círculo com triângulo com ângulos iguais, respectivamente, aos ângulos de um triângulo dado.

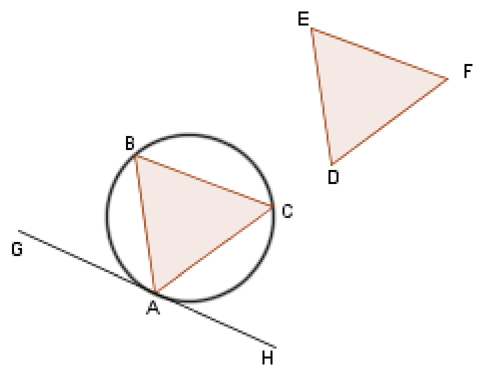

Figura 2.22:

Sejam dados o círculo e o triângulo DEF. Seja GH a tangente ao círculo, passando pelo ponto A (veja figura 2.22). Construa o ângulo HAC igual ao ângulo DEF e o ângulo GAB igual ao ângulo DFE. Trace BC, então, pelo Teorema 2.17, o ângulo HAC é igual ao ângulo ABC, portanto o ângulo ABC é igual ao ângulo DEF.

Analogamente, mostra-se que o ângulo ACB é igual ao ângulo DFE. Portanto, o ângulo BAC será igual ao ângulo EDF. Assim, foi inscrito um triângulo no círculo, com ângulos respectivamente iguais aos ângulos de um triângulo dado.

E agora, a última construção que é inscrever em um círculo um pentágono regular.

Contrua o triângulo EGH no qual cada ângulo da base é o dobro do ângulo do vértice (construção anterior). Inscreva, no círculo, o triângulo ACD com o ângulo CAD igual ao ângulo E, e os ângulos em G e H iguais, respectivamente, aos ângulos ACD e CDA. Assim, cada um dos ângulos ACD e CDA é o dobro do ângulo CAD (veja figura 2.23).

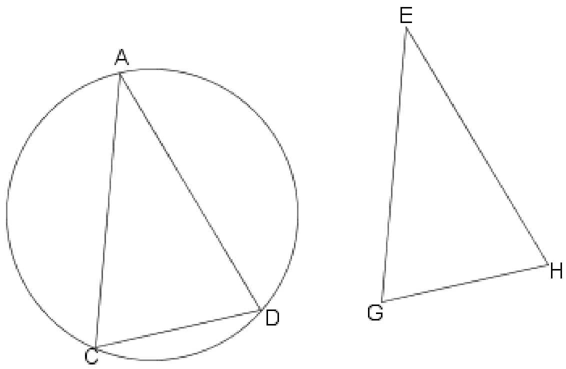

Figura 2.23:

Trace as bissetrizes dos ângulos ACD e CDA, respectivamente por CE, DB (veja figura 2.24).

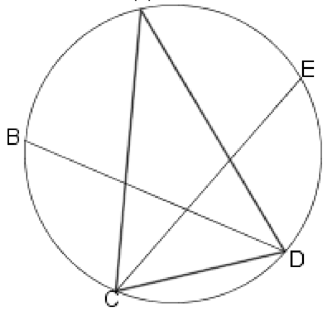

Figura 2.24:

Trace as retas AB, BC, DE, EA e BE (veja figura 2.25)

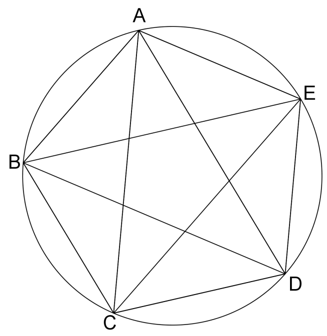

Figura 2.25:

Então, como cada um dos ângulos ACD, CDA é o dobro do ângulo CAD, e foram divididos ao meio pelas retas CE e DB, os cinco ângulos DAC, ACE, ECD, CDB, BDA são iguais entre si. Mas ângulos iguais subtendem arcos iguais, assim os arcos AB, BC, CD, DE, EA são iguais entre si. Assim o pentágono ABCDE é equilátero. Além disso, ele tem seus ângulos internos iguais entre si.

Com efeito, (veja figura 2.25) como o arco AB é igual ao arco DE, adicione o arco BCD a cada um deles; portanto, o arco ABCD é igual ao arco EDCB. Assim, o ângulo BAE é igual ao ângulo AED. Pela mesma razão, cada um dos ângulos ABC, BCD, CDE é também igual a cada um dos ângulos BAE, AED. Assim, o pentágono ABCDE tem todos seus ângulos internos iguais entre si. Como já mostramos que ele tem seu lados iguais entre si, foi demonstrado que ele é regular. Desta forma inscrevemos um pentágono regular em um círculo dado (veja [4] e [8]).

□

2.4 Outras Construções

Bem, existem outras contruções do pentágono regular, uma muito boa é construí-lo a partir da construção do decágono regular que é feita na proposição VI-10 do livro Elementos. Observemos que, nessa construção e nas demais, utiliza-se o segmento áureo já construído anteriormente.

Em uma circunferência, inscrever um decágono regular. A uma circunferência qualquer de centro O e raio R. Trace um diâmetro qualquer AOB (veja figura 2.26).

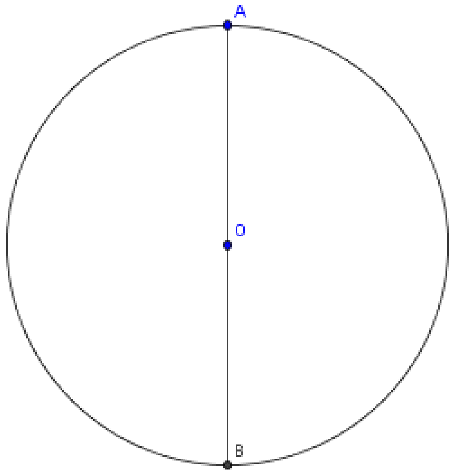

Figura 2.26:

Por O trace o raio OE perpendicular a AOB. Seja F o ponto médio de OE (veja figura 2.27).

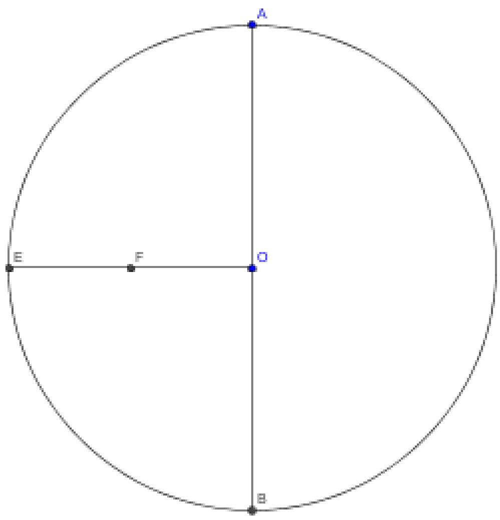

Figura 2.27:

Una-se F a B e trace a circunferência de centro F e raio FO. Ela cruza em FB no ponto G; e GB é o segmento áureo do raio OB (veja figura 2.28).

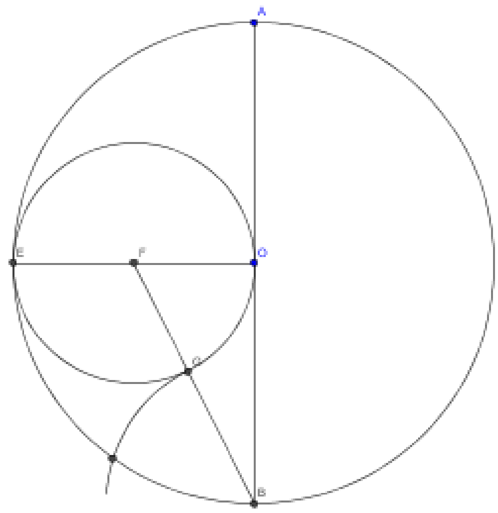

Figura 2.28:

Logo, ele é o lado do decágono regular inscrito na circunferência dada. Tomando-se B como um dos seus vértices, os outros nove são sucessivamente encontrados com o compasso, onde A é um deles (veja figura 2.29).

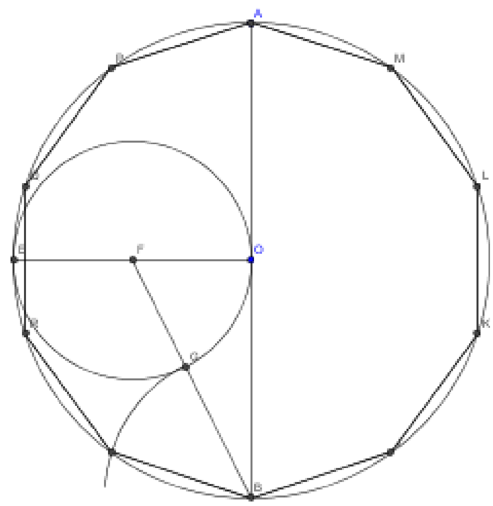

Figura 2.29:

Interligando alternadamente os vértices do decágono regular (veja figura 2.30)

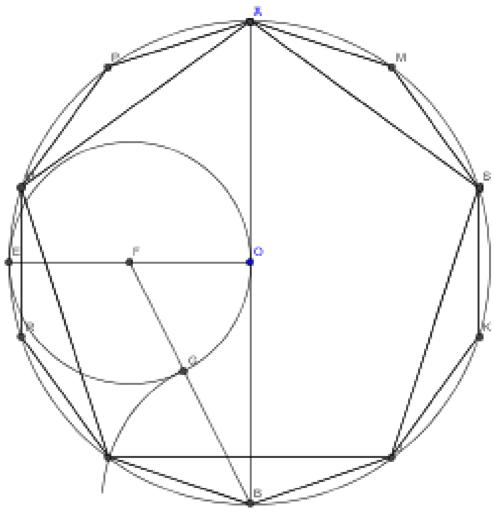

Figura 2.30:

encontramos o pentágono regular (veja [4] e [5]).
Vamos agora mostrar duas construções do pentágono regular utilizando também o segmento áureo, logo após, demonstraremos que o lado do pentágono regular é o segmento áureo de sua diagonal.

Primeiro tracemos uma circunferência qualquer de centro A (veja figura 2.31).

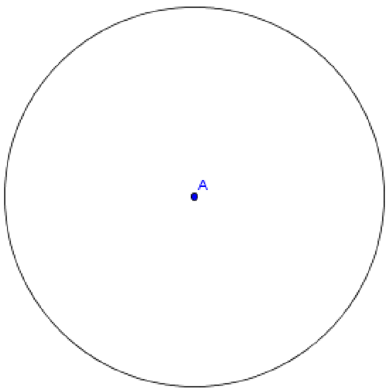

Figura 2.31:

Logo após, trace dois diâmetros perpendiculares e na intersecção dos dois diâmetros com a circunferência determine os quatro pontos B E F D, seja G o ponto médio do segmento $\overline{AE}$ (veja figura 2.32).

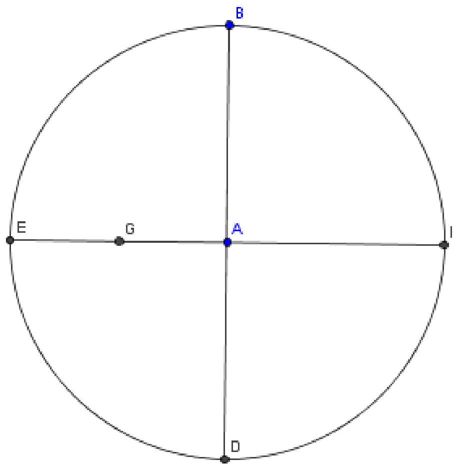

Figura 2.32:

Trace outra circunferência com centro em G e raio GB, com a intersecção desta circunferência com o raio AF determinamos o ponto H (veja figura 2.33).

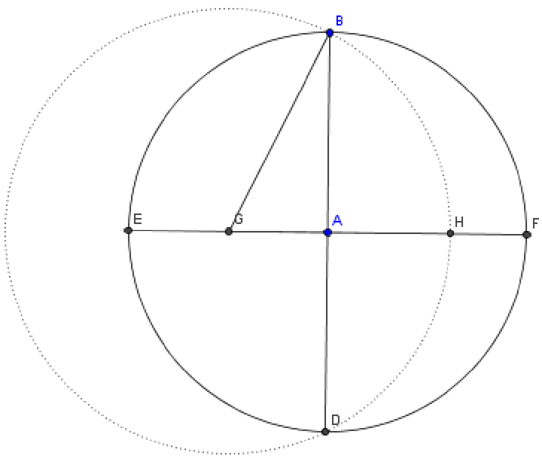

Figura 2.33:

Trace o segmento BH, ele será a medida do lado do pentágono regular que é um segmento áureo, o segmento AH é um segmento áureo que já foi construído anteriormente neste trabalho. Com essa medida BH, trace um arco que intersecta com a linha da circunferência inicial, determinamos o ponto J, com isso encontramos dois vértices do pentágono regular J e B, a partir dessa medida traçamos arcos para encontrar os demais vértices do pentágono. Traçando, encontramos sucessivamente os pontos L Q U que são vértices do pentágono fechando novamente em B (veja figura 2.34).

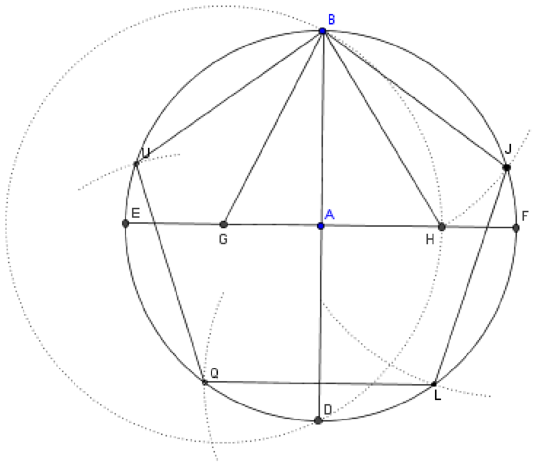

Figura 2.34:

Desta maneira, terminamos mais uma construção.

Vamos agora citar essa construção de um modo mais rápido seguindo o mesmo raciocínio da construção anterior, usando o segmento áureo.

Com uma circunferência qualquer traçamos dois diâmetros perpendiculares e determinemos o raio AB e AD e queremos encontrar um ponto H tal que AH seja o segmento áureo de AB. Com isso, vamos traçar um ponto médio G do raio AD e assim traçamos um segmento de BG, com a medida esse segmento tracemos um arco com essa medida determinemos um ponto I do raio AC. Desta maneira, encontramos um segmento de medida AI; e com ele tracemos um arco com medida desse segmento e determinamos o ponto H. AH é segmento áureo de AB. Com isso traçamos o segmento BH que também é segmento áureo e lado do pentágono regular (veja 2.35).

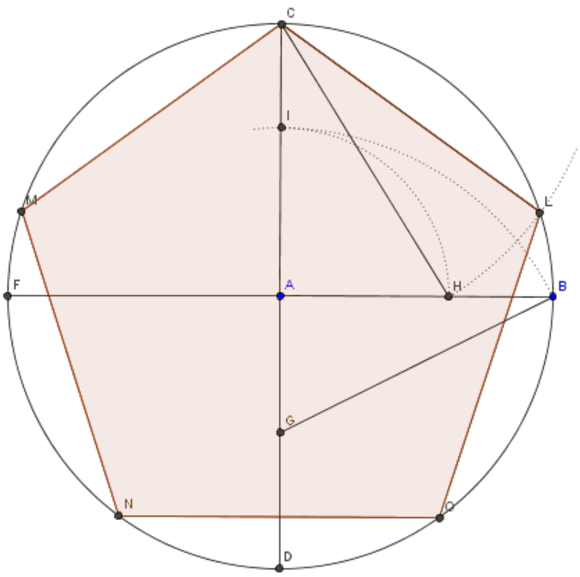

Figura 2.35:

Compare essa construção com a construção abaixo do segmento áureo já feito anteriormente (veja 2.36).

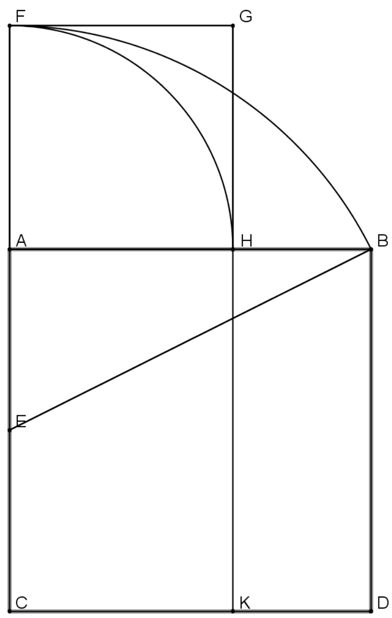

Figura 2.36:

Continuando as outras construções, faremos uma utilizando várias circunferências e verificaremos qual a ideia da mesma, e que esta construção está correta. Comece com um segmento de reta AB que será o lado do pentágono(veja 2.37):

Figura 2.37:

Com centro em A, faça uma circunferência de raio AB (veja 2.38):

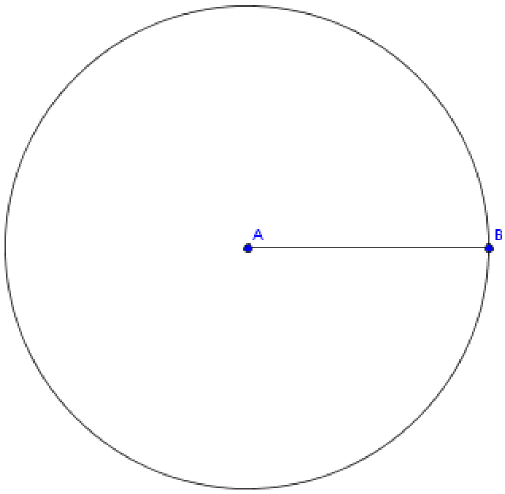

Figura 2.38:

Com centro em B, faça uma circunferência de raio BA. Marque os pontos de intersecção entre as duas circunferências como C e D (veja 2.39):

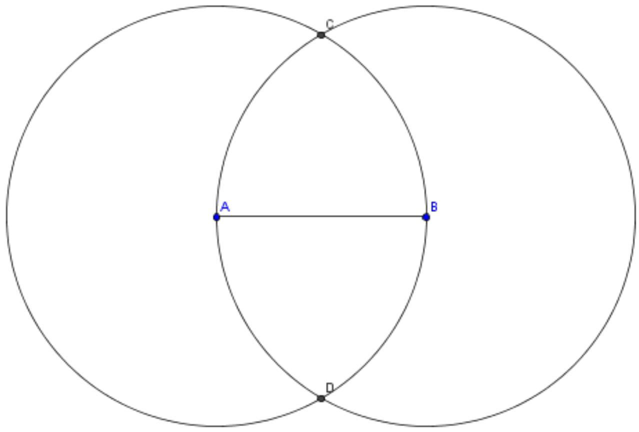

Figura 2.39:

Com centro em D, faça uma terceira circunferência de raio DA. Note que o raio DA = DB = AB. Marque os pontos de intersecção com as outras duas circunferências como E e H (veja 2.40):

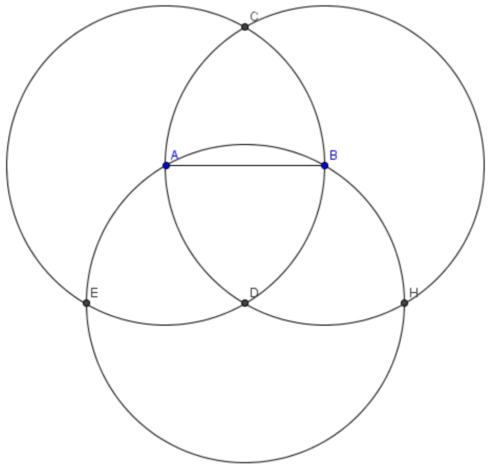

Figura 2.40:

Pelos pontos C e D trace uma reta, marcando o ponto I na intersecção com a terceira circunferência. Essa reta será a mediatriz do lado AB do pentágono (veja 2.41):

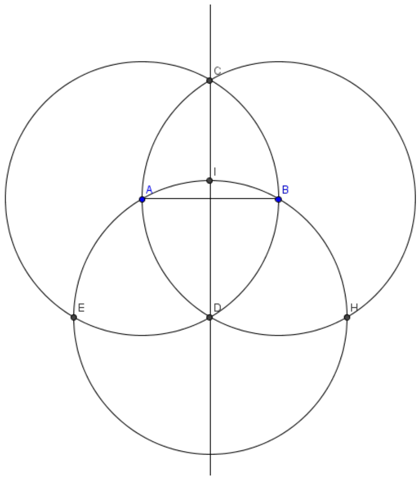

Figura 2.41:

Trace uma reta passando pelos pontos E e I, definindo o ponto L na intersecção com a segunda circunferência (veja 2.42):

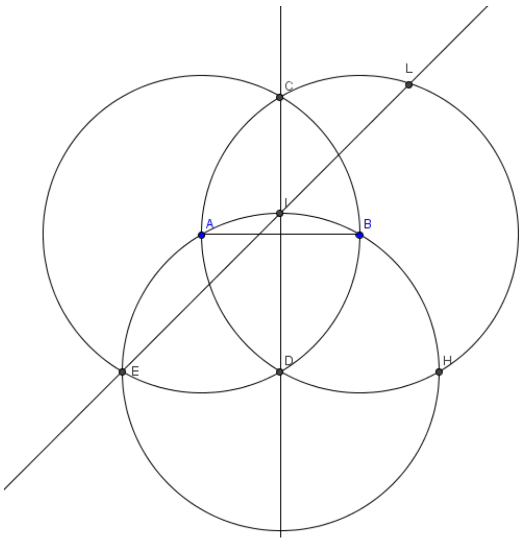

Figura 2.42:

Agora, trace uma reta passando pelos pontos H e I, definindo o ponto N na intersecção com a primeira circunferência (veja 2.43):

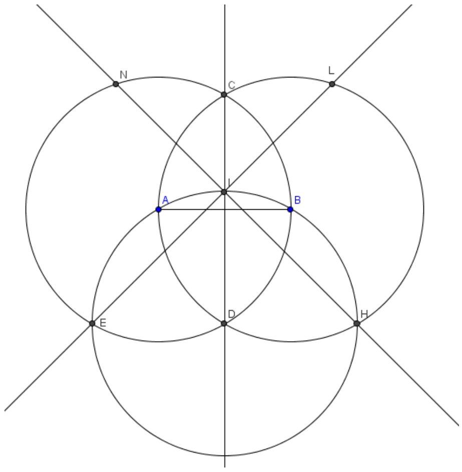

Figura 2.43:

Com centro em N faça uma nova circunferência de raio AB = NA. Agora, faça outra circunferência com centro em L e raio AB = LB. O ponto de intersecção dessas duas circunferências com a mediatriz define o ponto O (veja 2.44):

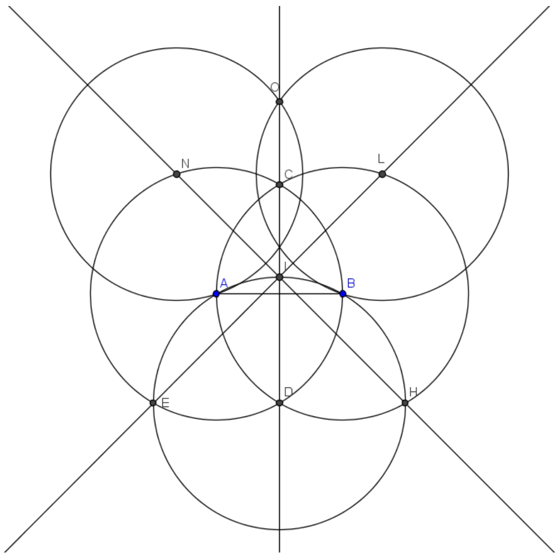

Figura 2.44:

Os pontos A, N, O, L e B, são os vértices do pentágono. Unindo estes pontos, formamos o pentágono regular (veja 2.45):

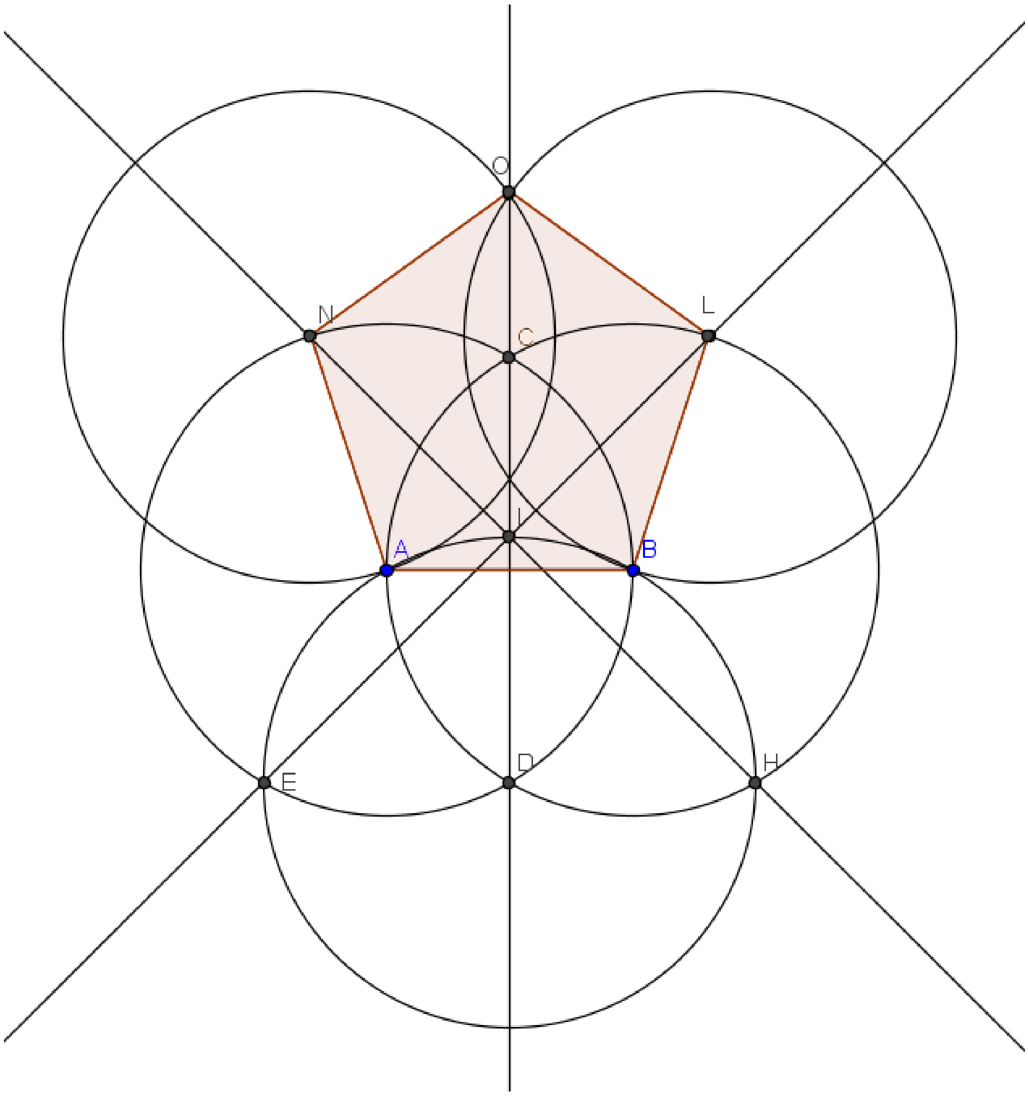

Figura 2.45:

Bom, vemos que essas construções são possíveis por causa do seguinte teorema que se encontra no livro Os Elementos é o Livro XIII proposição oito (veja em [4] e [5]).

Teorema 2.18 *O segmento áureo da diagonal do pentágono regular é congruente com o lado daquele polígono.*

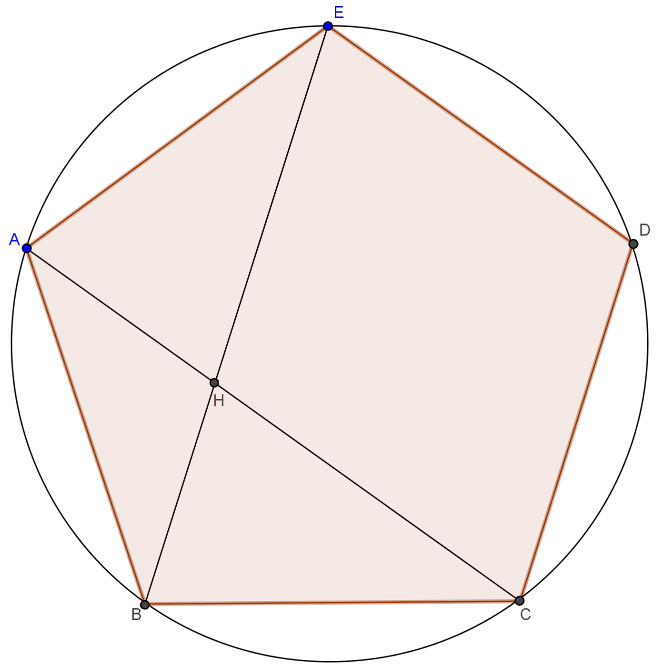

Figura 2.46:

),um pentágono regular ABCDE e as diagonais consecutivas AC e BE. Seja H o ponto que elas se cruzam. Provaremos que AB (lado do pentágono) é o segmento áureo da diagonal AC. No quadrilátero inscritível ACDE os ângulos $\angle EACe\angle EDC$ são suplementares. Como $\angle EAC = \angle DCA$ subtendem arcos congruentes, então $\angle EDCe\angle DCA$ são suplementares. Logo ED e AC são paralelas. Da mesma forma BE e CD são paralelas. Logo o quadrilátero CDEH é um paralelogramo e DE = CH, DC = EH e $\angle EDC = \angle EHC$ - o ângulo do pentágono regular; mas CD = DE. Logo, os quatro lados do paralelogramo CDEH são congruentes com os lados do pentágono. Os triângulos ΔABH e ΔABC são semelhantes porque o $\angle AHB = \angle ABC = \angle AHD = \angle EDC$, $\angle CAB = \angle HAB$. Logo, os lados homólogos desses triângulos são proporcionais e

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AH}$$

mas

$$AH = AC - HC$$

e

$$HC = AB$$

Logo

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AC - AB}$$

ou seja, AB é segmento áureo de AC.

□

Os pitagóricos tinham uma predileção pelo pentágono regular, a ponto de usá-lo como símbolo de sua sociedade. Tal polígono foi extremamente estudado e, devido a isso alguns historiadores conjecturam que a descoberta da incomensurabilidade feita por Hipasus possa ter envolvido o lado e a diagonal do pentágono e não a diagonal do quadrado (veja [5]).

Com o teorema anteriormente demonstrado, verificasse imediatamente a construção do ângulo do pentágono, toma-se um segmento de reta AC qualquer e encontra-se o seu segmento áureo HC e constrói-se o triângulo ABC inscrito em uma circunferência, pois AB = BC = HC. Isso significa que, dada uma circunferência qualquer, pode-se inscrever um pentágono regular tomando-se um diâmetro e com vértice em uma da extremidades construir, em semiplanos opostos de tal diâmetro, dois ângulos congruentes com metade do ângulo do pentágono. Com isso, acham-se três vértices do pentágono regular e seu lado, o que permite concluir a sua construção (veja [5]). Para mais informações do segmento áureo consulte o apêndice.

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Introdução

Nesta parte utilizaremos as informações até agora estudadas para resolver alguns problemas de geometria, utilizando sempre qualquer um dos teoremas e construções estudadas até este momento.

3.2 Elementos Notáveis do Polígono

Vamos definir os elementos notáveis de um polígono regular (veja 3.2).

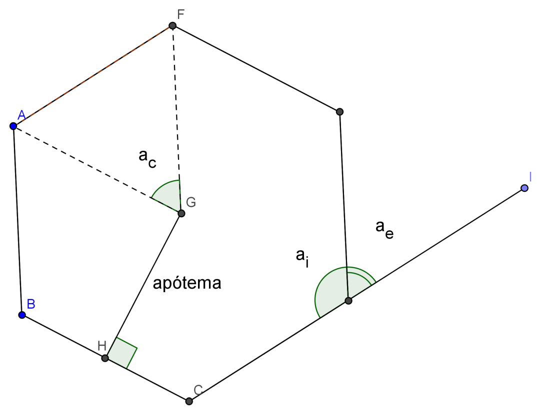

Figura 3.1:

Centro de um polígono regular é o centro comum das circunferências circunscrita e incrita (ponto G).
Apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado; o apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.
Ângulo Cêntrico de um polígono regular (vértices no centro e lados passando por vértices consecutivos do polígono) são congruentes; então a medida de cada um deles é dada por:

$$a_c = \frac{360^o}{n} \text{ ou } a_c = \frac{4\,retos}{n}$$

onde n é o número de lados do polígono.

Além disso, podemos calcular o lado e o apótema de qualquer polígono regular; faremos aqui o cálculo do pentágono (veja [6]).

3.3 Cálculo do Lado e Apótema do Polígono

Indicaremos por l_n a medida do lado do polígono regular e a_n a medida do apótema do polígono regular de n lados. No nosso caso l_5 medida do lado do pentágono regular e a_5 medida da ápotema do pentágono regular, e l_{10} medida do lado do decágono regular e a_{10} medida do ápotema do decágono regular,l_6 medida do lado do hexágono regular e a_6 medida da ápotema do hexágono regular.

Problema 1 Calcular o lado e o apótema do decágono regular em função do raio do círculo circunscrito.

Resolução Chamemos o raio da circunferência de R e calcularemos o l_{10} (veja figura 3.2).

Sendo

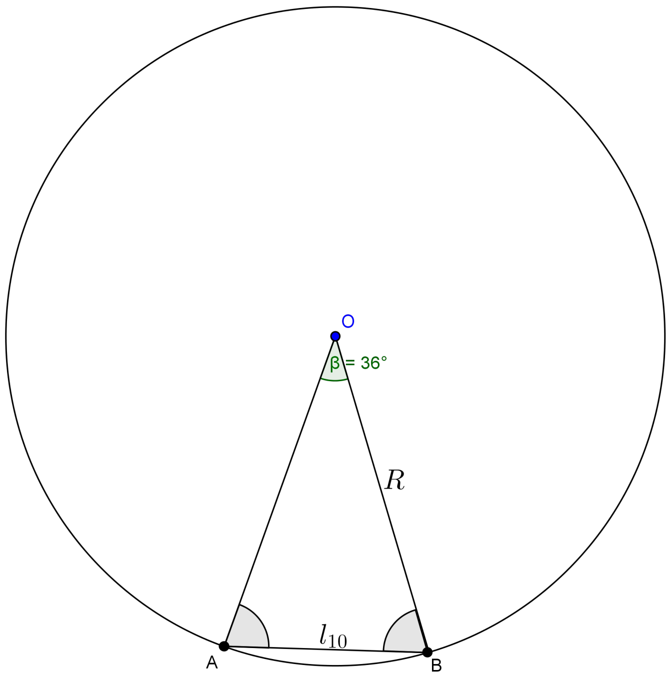

Figura 3.2:

$$\overline{AB} = l_{10},$$

então

$$\angle AOB = \frac{1}{10} \cdot 360^\circ = 36^\circ \Longrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 72^\circ$$

.

Conduzindo $\overline{BC}$, bissetriz de $\widehat{B}$, (veja figura 3.3) vem :

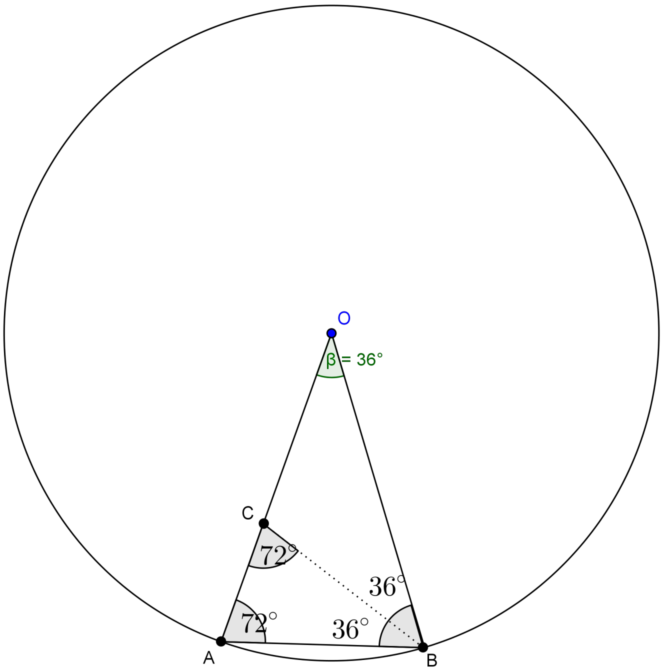

Figura 3.3:

ΔBAC é isósceles, então

$$(\widehat{A} = \widehat{C} = 72^\circ) \Longrightarrow \overline{BC} = l_{10}$$

ΔCOB é isósceles, então

$$(\widehat{O} = \widehat{B} = 36^\circ) \Longrightarrow \overline{OC} = \overline{BC} = l_{10}$$

Então:

$$\overline{OC} = l_{10}$$

e

$$\overline{CA} = R - l_{10}$$

Aplicando o teorema da bissetriz interna ($\overline{BC}$ é bissetriz no ΔAOB), vem (veja figura 3.4):

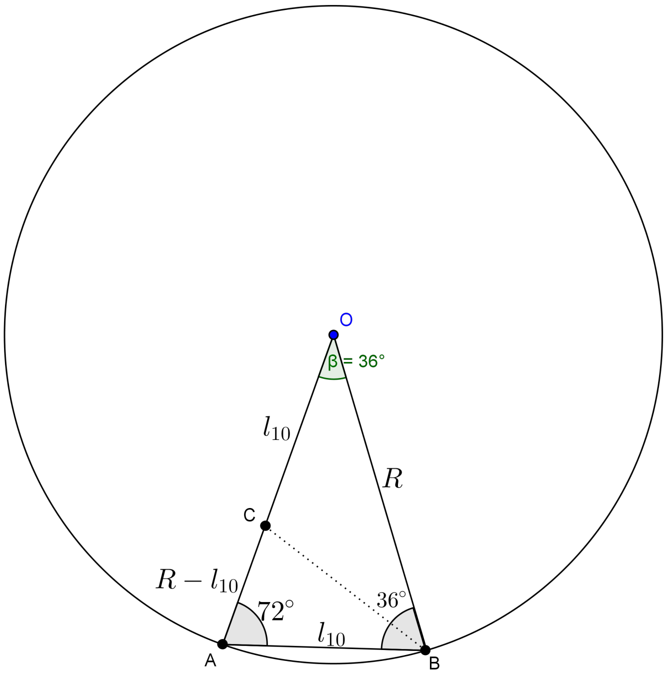

Figura 3.4:

$$\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}} \Longrightarrow$$

$$l_{10}^{\;2} = R(R - l_{10}) \Longrightarrow l_{10}^{\;2} + Rl_{10} - R^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$l_{10} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R}}{2} = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}.$$

Desprezando a solução negativa que não faz sentido na medida de um segmento, temos:

$$l_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R$$

Bom, para o cálculo do ápotema a_{10} que é a altura relativa ao lado $\overline{AB} = l_{10}$ do ΔODB como sabemos o valor de l_{10} temos:

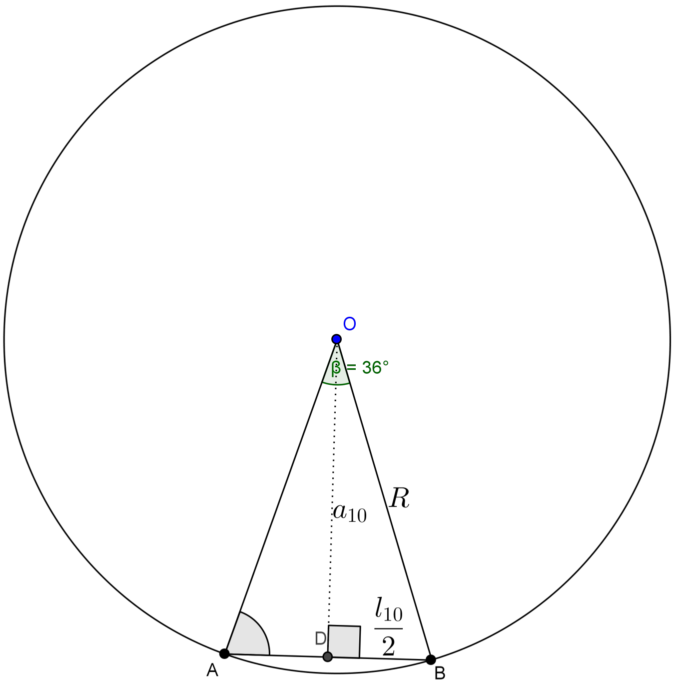

Figura 3.5:

Como o ΔODB é retângulo em D, podemos utilizar o teorema de pitágoras já que a_{10} e $\overline{DB} = \frac{l_{10}}{2}$ são catetos e $\overline{OB} = R$ é a hipotenusa desse triângulo, temos:

$$\overline{OD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{OB}^2 \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 + \left(\frac{l_{10}}{2}\right)^2 = R^2 \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 + \left(\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}R}{2}\right)^2 = R^2 \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 R^2 = R^2 \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 = R^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 R^2 \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 = R^2 \left(1 - \left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2\right) \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 = R^2 \left(1 - \left[\frac{5-2\sqrt{5}+1}{16}\right]\right) \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 = R^2 \left(1 - \left[\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right]\right) \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 = R^2 \left(\frac{16-6+2\sqrt{5}}{16}\right) \Longrightarrow$$

$$a_{10}^2 = R^2 \left(\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right) \Longrightarrow$$

$$a_{10} = R\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

Com isso chegamos as expressões do lado do decágono regular e o ápotema do decágono regular.

Problema 2 Calcular o lado e a apótema do hexágono regular em função do raio do círculo circunscrito.

Resolução Chamemos o raio da circunferência de R e calcularemos o l_6 e a ápotema a_6 (veja figura 3.6).

No ΔAOB, vamos encontrar o ângulo central $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ e bem como o $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \Longrightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$ então $\widehat{O} = \widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ \Longrightarrow \Delta AOB$ é equilátero, logo

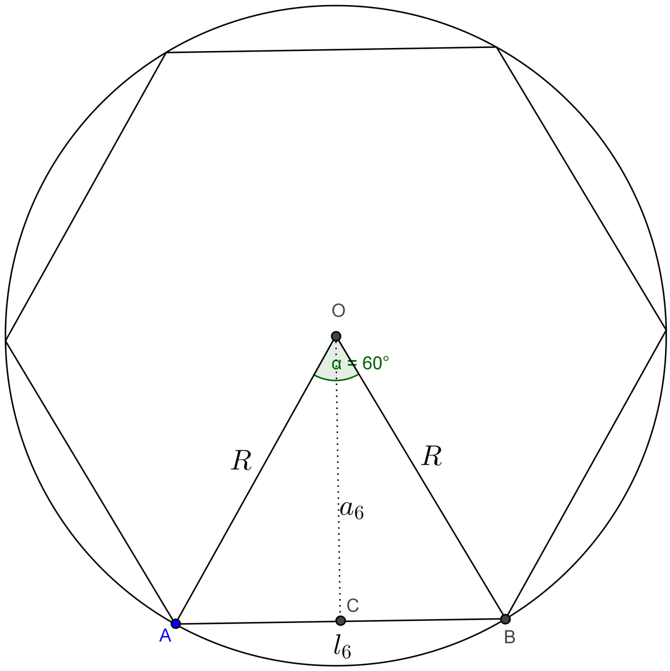

Figura 3.6:

$l_6 = R$. Sabendo que a_6 é a altura do triângulo equilátero de lado R $\Longrightarrow a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Problema 3 Calcular o lado e o apótema do pentágono regular em função do raio do círculo circunscrito.

Resolução Chamemos o raio da circunferência de R e calcularemos o l_5 e a ápotema a_5.

Inicialmente provaremos a seguinte propriedade:

O l_5 é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujo os catetos são o l_{10} e o l_6 (l_5, l_6 e l_{10} relativos a um mesmo raio R). Seja $\overline{AB} = l_{10}$ e na reta AB um ponto C tal que $\overline{AC} = R$. Considerando a circunferência de centro A e raio R (circunferência λ'), o ângulo central $\widehat{A} = 72^o$ faz corresponder $\overline{OC} = l_5$ basta observar que $72^o = \frac{1}{5} \cdot 360^o$. Conduzindo por C a tangente $\overline{CD} circunfernci a \lambda$ de centro O e raio R, sabendo que $\overline{CA} = R$ e $\overline{CB} = R - l_{10}$ temos:

Potência de C em relação a λ:

$$(\overline{CD})^2 = (\overline{CA})X(\overline{CB}) \Longrightarrow$$

$$(\overline{CD})^2 = R(R - l_{10}) \Longrightarrow$$

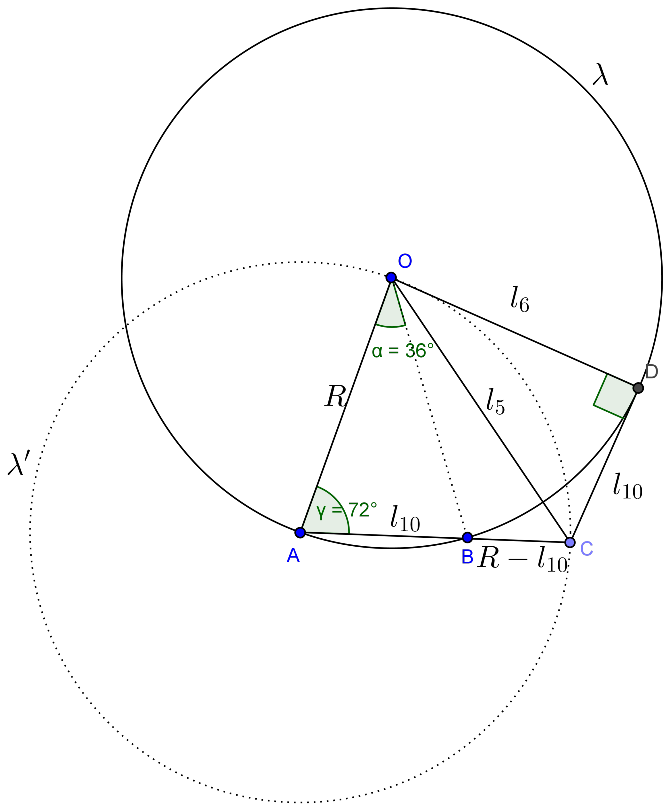

Figura 3.7:

onde pelo problema 1 vimos que

$$\frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$$

o que implica em

$$\overline{CD} = l_{10}$$

Isso mostra que l_{10} é segmento áureo do raio R; a potência de um ponto foi demonstrada na construção do pentágono regular deste trabalho. Considerando o ΔODC retângulo em D, temos: $\overline{OC} = l_5 =$ hipotenusa, $\overline{CD} = l_{10} =$ cateto e $\overline{OD} = R = l_6 =$ cateto. Calcularemos então o l_5, aplicando o teorema de Pitágoras, vemos que:

$$l_5{}^2 = l_6{}^2 + l_{10}{}^2 \Longrightarrow$$

$$
{l_5}^2 = R^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot R\right)^2 \Longrightarrow
$$

$$
{l_5}^2 = \frac{R^2}{4}\left(10 - 2\sqrt{5}\right) \Longrightarrow
$$

$$
l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}
$$

.

O cálculo do ápotema do pentágono regular fica como exercício ao leitor que, após os devidos cálculos, chegará na seguinte expressão:

$$
a_5 = \frac{R}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)
$$

Problema 4 Deduzir a fórmula geral do apótema de um polígono regular.
Vamos agora, neste momento, deduzir uma fórmula geral de a_n dados R e l_n.

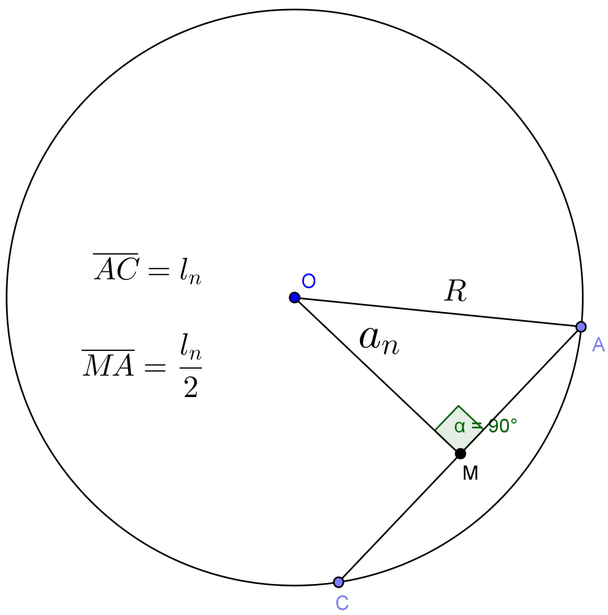

Figura 3.8:

Bem como o ΔAMO é retângulo em M e também ponto médio de $\overline{CA}$ temos:

$\overline{CA} = l_n$, $\overline{MA} = \frac{l_n}{2}$ e $\overline{OA} = R$. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\overline{OA}\right)^2 = \left(\overline{MA}\right)^2 + \left(\overline{OM}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$(R)^2 = (a_n)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$a_n^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4} \Longrightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

Para os demais polígonos consulte [6].

Apêndice A

O Segmento Áureo

Quando um ponto P, entre A e B, é tal que $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$, diz que AP é o segmento áureo de AB e que P dividiu AB em média e extrema razão.
É fácil ver que AP $>$ PB por que $\frac{AB}{PB} > 1$ (veja figura A.1).

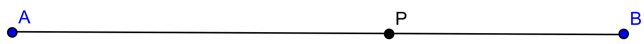

Figura A.1:

A proporção áurea, número de ouro, número áureo, proporção de ouro ou segmento áureo é uma constante real algébrica irracional, com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618. Mostraremos o cálculo do mesmo, primeiro chamemos de a a medida do segmento AB e de x a medida do segmento AP, logo a medida do segmento PB será $a - x$. Bom, pela definição dada acima

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{x} = \frac{a-x}{x} \Rightarrow$$

$$x^2 = a(a-x) \Rightarrow$$

$$x^2 + ax - a^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot a$$

Desde a Antiguidade, a proporção áurea é usada na arte, é frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, como as do mestre Giotto. Este número está envolvido com a natureza do crescimento. O número de ouro, pode ser encontrado na proporção das conchas (o nautilus, por exemplo), nos seres humanos (o tamanho das falanges, ossos dos dedos, por exemplo) e nas colméias, entre inúmeros outros exemplos que envolvem a ordem do crescimento. Justamente por estar envolvido no crescimento, este número se torna tão frequente. E justamente por haver essa frequência, o número de ouro ganhou um status de "quase mágico", sendo alvo de pesquisadores, artistas e escritores. Apesar desse status, o número de ouro é apenas o que é devido aos contextos em que está inserido: está envolvido em crescimentos biológicos, por exemplo. O fato de ser encontrado através de desenvolvimento matemático é que o torna fascinante. Figuras geométricas, por exemplo, um decágono regular, inscrito numa circunferência, tem os lados em proporção áurea com o raio da circunferência.

Segmentos do pentagrama estão na proporção áurea, como mostra a figura (veja figura A.2).

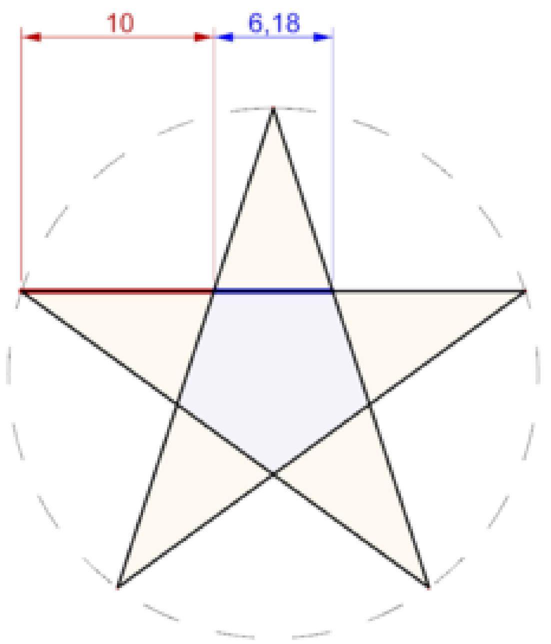

Figura A.2:

O pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. A razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual a quarta potência da razão áurea. Chamando os vértices de um pentagrama de A, B, C, D e E, o triângulo isósceles formado por A, C e D tem seus lados em relação dourada com a base, e o triângulo isósceles A, B e C tem sua base em relação dourada com os lados. Quando Pitágoras descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou esse símbolo estrelado como a representação da Irmandade Pitagórica. Esse era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que "tudo é número", ou seja, que a natureza segue padrões matemáticos. A Maçonaria também tomou emprestado o simbolismo da Proporção Dourada em seus ensinamentos, com a utilização de seu método para obtenção do Pentagrama e do Quadrado Oblongo, existentes em algumas Lojas Maçônicas, para mais artigos interessantes sobre o segmento aúreo (veja [9]).

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. and MERZBACH, Uta C., *História da Matemática*. Tradução da Terceira Edição Americana, Editora Blucher. (2012).

[2] EVES, H., *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues, Editora UNICAMP(2008).

[3] ROONET, A., *A História da Matemática*. Tradução de Mario Fecchio, Editora M.Books, (2012).

[4] EUCLIDES, de Alexandria, *Os Elementos*. Tradução de Ireneu Bicudo, Editora UNESP, (2009).

[5] GARBI, Gilberto G., *C. Q. D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria*, Editora Livraria da Física,(2010).

[6] DOLCE, O., and POMPEO. José N., *Coleção Fundamentos da Matemática Elementar Volume 9 - Geometria Plana*, Editora Atual, (2011).

[7] WAGNER, E.,*Coleção do Professor de Matemática - SBM - Construções Geométricas*, Editora SBM, (2007).

[8] CARVALHO, João B. P. de, *A construção, por Euclides, do Pentágono Regular*. Artigo apresentado na V Bienal da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) na UFPB (Universidade Federal Da Paraíba), (2010).

[9] *http://pt.wikipedia.org/wiki/Proporçãoáurea* acessado em 21/04/2013 as 13:12.