Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

June Cristien Braz

Funções estudadas no primeiro ano do Ensino Médio e suas aplicações

Uberaba
2019

June Cristien Braz

Funções estudadas no primeiro ano do Ensino Médio e suas aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Danilo Adrian Marques

Uberaba

2019

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

B839f

Braz, June Cristien
Funções estudadas no primeiro ano do Ensino Médio e suas aplicações / June Cristien Braz. -- 2019.
112 f. : il., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2019
Orientador: Prof. Me. Danilo Adrian Marques

1. Funções (Matemática). 2. Matemática (Ensino médio). 3. Modelagem I. Marques, Danilo Adrian. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 517.5:373.5

JUNE CRISTIEN BRAZ

Funções estudadas no primeiro ano do Ensino Médio e suas aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Uberaba, 20 de setembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Danilo A. Marques
Prof. Me. Danilo Adrián Marques
Orientador
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Lidiane Sartini Oliveira
Prof. Dra. Lidiane Sartini de Oliveira
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Douglas Marin
Prof. Dr. Douglas Marin
Universidade Federal de Uberlândia

A Deus e minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por abrir as portas para mais esta jornada acadêmica, por caminhar comigo até o fim.

À minha família, por entender os muitos momentos de ausência, me apoiar e incentivar ao longo de todo o curso.

Aos amigos, colegas e chefias do trabalho, igualmente pela paciência, apoio, e compreensão durante este período, principalmente nos momentos do afastamento do trabalho.

Aos colegas do curso, pelo auxílio e amizade.

Ao professor Me. Danilo Adrian Marques por ser meu orientador e por seguir neste projeto comigo, sempre pronto a me auxiliar.

A todos os professores do mestrado que contribuíram para enriquecer minha formação acadêmica.

E a todos que, direta ou indiretamente, de alguma forma, contribuíram para que a ideia de fazer e finalizar o mestrado não ficasse apenas no pensamento.

"A mente que se abre
a uma nova ideia jamais
voltará ao seu tamanho
original."
Albert Einstein

RESUMO

Apesar da evolução das tecnologias da informação, que mudou o modo de acesso a todo e qualquer tipo de conteúdo e também o comportamento das pessoas, tornando-as mais autônomas em suas pesquisas e atividades cotidianas, é comum a dificuldade com o raciocínio matemático. Um exemplo disso se verifica no estudo das funções. Este conteúdo aparece no decorrer de praticamente todo o Ensino Médio. O que se percebe no contato com os alunos, é que a frustração aparece claramente quando ecoam no ar as perguntas "*para que serve isto professor?*" ou então "*por que estudar sendo que nunca vou usar isto?*". Muito embora as ferramentas matemáticas estejam disponíveis para solucionar diversas circunstâncias da vida, a percepção e uso destes instrumentos não é tão óbvio na prática. Neste sentido, o objetivo deste trabalho é estudar o conceito geral de função, bem como as funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, estudadas no primeiro ano do Ensino Médio, para então verificar a aplicação destas funções a situações do cotidiano, desde as mais evidentes como no cálculo do preço a pagar por um bem ou serviço, empréstimos ou medições na construção civil, ou mesmo em receitas culinárias.

Palavras-chave: Funções. Aplicações. Modelagem Matemática.

ABSTRACT

Despite the evolution of information technology, which has changed the mode of access to all types of content and also the behavior of people, making them more autonomous in their daily research and activities, the difficulty with mathematical reasoning is common. An example of this is found in the study of functions. This content appears throughout most of high school. What can be seen from the contact with the students is that frustration clearly appears when the questions " *what is this teacher for?*" or " *why study it if I will never use this?*" echo the air. Although mathematical tools are available to solve various life circumstances, the perception and use of these instruments is not so obvious in practice. In this sense, the objective of this work is to study the general concept of function, and the linear, quadratic, exponential and logarithmic functions, studied in the first year of high school, to verify the application of these functions to everyday situations, since the most evident in calculating the price to pay for a stuff or a service, loans or measurements in construction, or even in cooking recipes.

Keywords: Functions. Application. Mathematical Modeling.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Graduada em licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia - UFU, no ano seguinte à minha formatura participei do concurso público para área administrativa da UFU, e, desde então, há quase 15 anos, sou servidora pública federal nesta instituição.

Durante estes anos de trabalho na UFU tive a oportunidade de aplicar os conhecimentos matemáticos em relatórios para consumo interno do setor. Como exemplo, posso citar o uso de planilhas em Excel, após a conclusão do processo de matrícula de determinado processo seletivo, para levantamento do número de ingressantes em situação de matrícula, a partir da diferença entre o total de candidatos que solicitaram matrícula a, que nesse caso é fixo, pois o processo já se encerrou, e o número x de candidatos que evadiram. Tal exemplo pode ser visto como uma função afim $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $f(x) = a - x$.

Apesar de não atuar diretamente na área da educação, o entusiamo e paixão pela Matemática sempre foram constantes na minha vida de estudante. E desde o Ensino Médio, sempre questionei onde seria possível aplicarmos o conteúdo de Matemática que era transmitido na escola. Não houve nessa época, ou mesmo na graduação, uma preocupação constante em apresentar situações-problemas modeladas ou descritas por algum conceito matemático. Prevaleceu em grande parte do tempo, apenas o conteúdo transmitido de modo puro, repetido e mecânico através de exercícios que em nada representavam situações que pudessem ser vivenciadas no cotidiano.

Durante as viagens de sexta-feira para as aulas do PROFMAT, tive a oportunidade de conversar com os colegas professores de Matemática de rede pública, e que comigo fazem parte deste programa de mestrado, e ouvir deles que ainda hoje, há esse interesse por parte dos estudante, em saber onde e como podem ser aplicados os conteúdos de Matemática, ensinados na escola.

Por outro lado, as diretrizes para o ensino, estabelecidas pela legislação educacional brasileira, quase que como uma resposta aos questionamentos destes estudantes, elas colocam como eixo central do ensino a formação do estudante de modo a prepará-lo para a vida de uma forma geral, através da aplicação da Matemática à realidade do estudante. Nesse contexto, destacamos a Lei de Diretrizes e Bases de Educação Nacional - LDB, Base Nacional Comum Curricular - BNCC, Matrizes de Referência, e Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM.

A Lei nº 9.394/96, conhecida como **Lei de Diretrizes e Bases de Educação Nacional - LDB**, BRASIL (1996), estabelece que o Ensino Médio tem dentre suas várias finalidades, a de realizar a preparação do aluno para o trabalho, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivo.

O **Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM**, principal ferramenta governamental desenvolvida e aplicada pelo *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira* – INEP – desde 1998 para medir o desempenho acadêmico dos estudantes secundaristas, considerando as orientações das matrizes de referência, tem na sua estrutura, questões que vinculam o conteúdo teórico às situações práticas.

De acordo com o INEP (2015a), a matriz de referência é utilizada para indicar, avaliar e medir as habilidades desenvolvidas pelos alunos em cada etapa da escolarização. Nesse contexto, segundo a **Matriz de Referência de Matemática e Tecnologias** são 7 competências gerais que devem ser atingidas pelo aluno ao resolver as questões do ENEM:

> [...] Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais - H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações naturais, inteiros, racionais ou reais; [...] Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela - H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional; [...] Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano; [...] Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano - H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas; [...] Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas - H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos; [...] Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação; [...] Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório

> e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística - H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade [...] (INEP, ([20–?]))

A **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**, MEC ([20–?], p.7), "[...] define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica [...]". Este documento, em concordância com as legislações mencionadas acima, propõe que o ensino da Matemática seja aplicado à realidade, em diferentes contextos, e para tal, considere as experiências vividas pelos estudantes em seu cotidiano de modo que seja possível a eles desenvolverem habilidades relativas aos processos de investigação, construção de modelos e resolução de problemas.

Após a realização do Exame de Qualificação - ENQ - em conversa informal com o professor Danilo, hoje meu orientador neste trabalho, sobre qual seria sua proposta para tema de dissertação para seu futuro orientando, tal foi a minha surpresa quando a resposta foi "função". Mais especificamente, aplicações, no cotidiano, de funções estudadas no ensino médio.

Fiquei alguns dias pensativa sobre a conversa com o professor Danilo. Após o resultado da aprovação no Exame de Qualificação, chegou o momento da escolha orientador e, consequentemente, do tema da dissertação. Uma vez que o tema proposto pelo professor Danilo veio de encontro aos meus anseios de outrora e a proposta atual de diretrizes do governo brasileiro para a educação, não tive dúvidas quanto ao que gostaria de desenvolver como trabalho de conclusão do mestrado PROFMAT.

Assim, o tema deste trabalho é a aplicação das funções estudadas no primeiro ano do Ensino Médio. Nosso entendimento sobre essa questão é que o conhecimento dos estudantes sobre funções, uma vez relacionado a situações próximas de seu cotidiano permite um novo ressignificado desse conteúdo. Como afirma Pires (2016, p.2), ao comentar *Sierpinska*:

> (...) só podemos dizer que compreendemos algo em Matemática quando conseguimos discernir se alguns casos isolados pertencem ou não ao objeto definido, quando reconhecemos tal objeto matemático independente da maneira que está representado, quando conseguimos relacioná-lo com outros objetos quando

> aprendemos que ele faz parte de uma teoria e quando conseguimos aplicar o que aprendemos.

Propomos o pensar em maneiras de transmitir o conteúdo de funções de modo que o estudante identifique, por si próprio, as possibilidades de aplicações deste conceito em seu cotidiano ou no exercício de algumas profissões.

Nesse sentido, o caderno **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, BRASIL (2006, p.72), recomenda que o estudo de funções seja aplicado à diferentes áreas do conhecimento, através de situações reais de aplicação tais como a "queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia, etc".

Mas para alcançar este ponto, é preciso primeiro estudar o conceito de função.

Desde a pré-história, a matemática evolui seus instrumentos a partir da capacidade do homem em estabelecer relação entre coisas, objetos e símbolos entre si, muito antes da escrita.

Dos nós em cordas a riscos em pedras e outras "invencionices" para realizar contagens de gado ou de alimentos, até o desenvolvimento da álgebra e do cálculo infinitesimal, há uma série de interações que a seu tempo, podem ser denominadas *funções*.

Portanto, função é a noção mais fundamental do raciocínio lógico e matemático: num sentido geral é todo tipo de relação entre dois ou mais objetos, números ou símbolos.

Para Russell (2007) há dois tipos primordiais de função: a que ele denomina do tipo *descritiva*, que é um tipo de relação um-um ou um-muitos, que relaciona termos particulares entre si; e a do tipo *proposicional*, argumentativa, na qual um termo da relação é predicado e diz sobre o outro. O autor esclarece este ponto ao afirmar:

> Convém observar que todas as funções matemáticas resultam de relações um-muitos: o logaritmo de x, o co-seno de x etc., são, como o pai de x, termos descritos por meio de uma relação um-muitos (logaritmo, co-seno etc.) com um termo dado (x). A noção de função não precisa ser limitada a números ou aos usos a que os matemáticos nos acostumaram; pode ser estendida a todos os casos de relações um-muitos, e 'o pai de x' é uma função de que x é o argumento de maneira tão legítima quanto 'o logaritmo de x'. Nesse sentido, funções são funções descritivas. [...] há funções de uma espécie ainda mais geral e mais fundamental, a saber, funções proposicionais; mas por enquanto limitaremos nossa atenção a funções descritivas, isto é, 'o termo que tem a relação R com x',

> ou, para abreviar, 'a R de x', onde R é qualquer relação um-muitos. (RUSSELL, 2007, p.34)

Não é necessário o aprofundamento sobre o estudo de Russel acerca das funções. O que importa, no contexto da pesquisa, é delimitar que função é um tipo de relação.

Portanto, reconhecida a importância do conceito de função na Matemática e na vida prática, reiteramos como principal objetivo da presente pesquisa demonstrar como as funções podem ser aplicadas a situações cotidianas, analisando, inclusive, exemplos de modelagens aplicadas em algumas profissões, amenizando assim, o aspecto mecânico que acompanha a maioria das dificuldades apresentadas em sala de aula.

Em Dante (2013, p.95) a função modular é tratada como um tipo particular de *função poligonal ou afim por partes.* Lima (2013, 106) chega a conjecturar "toda função poligonal pode ser definida combinando valores absolutos de funções afins", ao que ele informa ser verdadeira tal conjectura. Desta forma, apesar de função modular integrar os conteúdos do primeiro ano do Ensino Médio, optamos por restringir este estudo das aplicações das funções às funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica.

Tendo em vista o objetivo deste trabalho, esta dissertação se desenvolveu como uma pesquisa qualitativa, bibliográfica. Foram realizadas consultas em livros de história da Matemática, livros de Matemática, Física, Química, dentre outros, do ensino de nível médio e superior. A pesquisa considerou ainda artigos, trabalhos publicados, legislação, provas do ENEM e outras informações relevantes a este trabalho, disponíveis em meio eletrônico.

Os exemplos utilizados como aplicação das funções foram em sua grande maioria, retirados ou adaptados do material consultado, mas há também exemplos elaborados pela autora deste trabalho.

É importante destacar que este trabalho não se encaixa, ou não coloca uma proposta pedagógica a ser utilizada. Isso modificaria profundamente o objeto da pesquisa. Muito embora esteja relacionada ao processo de aprendizagem, não houve, durante o desenvolvimento dos trabalhos, qualquer iniciativa no sentido de verificar os possíveis recursos didáticos aplicáveis no contexto da sala de aula.

Esta dissertação compõe-se de três capítulos, as considerações finais e a bibliografia.

O primeiro capítulo é a introdução deste trabalho e apresenta a motivações para escolha do tema deste trabalho, objetivo, relevância do tema e metodologia adotada.

No capítulo dois, remonta-se o desenvolvimento do conceito de função ao longo da história do pensamento matemático. Com efeito, analisa-se a evolução da teoria matemática e qual o papel das funções num plano cronológico.

No capítulo três, são estudadas as funções tema deste trabalho, primeiramente através de uma breve revisão teórica para apresentar suas definições formais, representações gráficas e principais características, seguida por suas respectivas aplicações a partir de problemas extraídos de modelagens matemáticas do cotidiano.

Ao final da dissertação são apresentadas as considerações finais, e por fim, as referências bibliográficas.

2 UMA HISTÓRIA SOBRE FUNÇÃO

Não se sabe ao certo quando começou a Matemática, mas vemos, através da sua história, que se trata de uma ciência viva, construída coletivamente ao longo de muitos anos e que segue em constante evolução. Roque e Carvalho (2012) afirmam que o desenvolvimento da Matemática sempre se deu através de problemas.

Aragão (2009) parece concordar com Roque e Carvalho (2012) ao dizer que "efetivamente algumas áreas da Matemática foram descobertas basicamente para a atividade do dia-a-dia [...]".

Pode ser visto em Guelli (1998) que, no período da pré-história, o homem, ainda que de modo rudimentar, já realizava algumas "operações" para compreender suas necessidades, estabelecendo relação entre objetos.

Neste contexto de relações entre grupos de objetos e/ou símbolos entre si é que encontra-se um conceito primitivo de função, a correspondência biunívoca, um dos mais importantes da Matemática, e que pode ser observado desde o período da Pré-História, em todas as civilizações que desenvolveram a Matemática para solução de suas necessidades. É através dele que podemos expressar a relação entre grandezas variáveis, aplicáveis por exemplo, às situações diárias, como no comércio, onde o valor a ser pago está relacionado (ou varia) de acordo com o total de mercadorias, e ainda, a fenômenos físicos, biológicos, sociais, dentre outros, através de fórmulas ou modelos matemáticos, neste caso, sendo capaz de nos fornecer uma previsão de resultados.

De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008), muito do que aprendemos sobre Matemática nos dias atuais remonta a tradições de origem no antigo Oriente Próximo, tendo se transformado na Matemática que conhecemos a partir do desenvolvimento de novas tradições no fim da Idade Média e Renascimento europeu.

Lima (2013) afirma acerca da definição que utilizamos atualmente para função que, o termo função é estabelecido pelo conhecimento dos elementos domínio, contradomínio e a lei de associação ou correspondência que associa os elementos do domínio aos elementos do contradomínio. Esses elementos (grandezas variáveis) podem ser quaisquer objetos matemáticos, como números, vetores, conjuntos, dentre outros. Este conceito de função não está condicionada à existência de uma fórmula algébrica para representá-la, e para chegar ao que conhecemos hoje, este conceito passou por algumas transformações.

No decorrer deste capítulo serão abordadas ao longo da história as ideias e conceitos primitivos de funções, e as contribuições de muitos estudiosos para o desenvolvimento deste conceito que, formalmente, só foi introduzido no século XIX.

2.1 PRÉ-HISTÓRIA

Há consenso entre muitos historiadores de que, a Matemática surgiu, em grande parte, mas não só, de necessidades da vida prática. De acordo com Aragão (2009, p.3), "a Matemática começou como uma técnica do dedo polegar, para manipulação de quantidades espaciais".

Antes da invenção da escrita e de aprender a contar, o homem pré-histórico desenvolveu um relação direta entre objetos e/ou símbolos entre si, mecanismo este que o permitiu saber as quantidades de determinados objetos, como por exemplo, a quantidade de peixes retirados da água, em uma pescaria, ou de animais abatidos em uma caçada.

De acordo com Guelli (1998), a relação era estabelecida da seguinte maneira: para cada animal capturado ou pescado, um risco era marcado em um pedaço de vara ou osso. Desse modo, há cerca de 30 mil anos, o homem começou a desenvolver a primeira técnica de medição quantitativa de objetos: a contagem.

Ainda segundo o autor, com o desenvolvimento das primeiras civilizações, há cerca de 10 mil anos, os pastores tinham conhecimento da quantidade de animais do seu rebanho usando pedrinhas para cada ovelha que saía a pastar, colocando-as em um saco. À noite, retirava do saco uma pedra para cada ovelha que retornava ao cercado.

> Tudo começou com este artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, sem ter de recorrer à contagem abstrata. (IFRAH, 2005, p.25)

Essa ideia de *correspondência biunívoca* ou *bijeção* desenvolvida na pré-história, a que Ifrah (2005) denominou *correspondência um a um*, representa uma das primeiras ideias que nos vem à mente quando se fala hoje de função, ou ainda, pode-se dizer que representa um modo primitivo de conceituar o que nossa linguagem moderna denomina função.

Esta forma de correlação que visava definir quantidades, a partir de elementos simples como um determinado número de entalhes padrão em ossos ou madeiras, nós em cordas, pedras em sacos, por exemplo, poderia ser utilizada para qualquer espécie de grupamento, como homens, animais e grãos.

Para Caraça (1951), a contagem, ou seja, a capacidade de *fazer corresponder* (relacionar) grupos distintos de objetos ou símbolos é fundamental para o desenvolvimento da matemática. É a partir dela que se originam os principais conceitos (números, função, conjuntos, etc...); entendimento com o qual concordamos.

2.2 IDADE ANTIGA (OU ANTIGUIDADE)

Segundo Guelli (1998) e Berlingoff e Gouvêa (2008), o fim da Pré-História e o início da História, ou Idade Antiga, ocorreu por volta do ano 4000 a.C., período em que a Matemática se renovou pela necessidade de novos métodos de contagem e cálculos, para a solução de novos problemas do cotidiano que surgiram com o desenvolvimento do comércio, da agricultura, com a invenção da escrita e de novas atividades profissionais como comerciantes, artesãos, administradores, sacerdotes e escribas por exemplo. Lidar com os problemas matemáticos da vida prática era o trabalho dos escribas, uma espécie de funcionários públicos profissionais.

A noção de função não estava sendo proposta nesta época, mas podemos verificar que há elementos que podem ser considerados como precursores da ideia de função. Neste contexto, destacaram-se quatro civilizações: babilônica, egípcia, chinesa e grega.

Para Aragão (2009), o vale entre os rios Tigre e Eufrates, hoje Turquia e Síria, habitado pelos sumérios por volta de 8500 a.C., e, posteriormente pelos babilônios, sucessores dos sumérios na Mesopotâmia, de 2000 a 600 a.C., foi provavelmente, o lugar de origem da Matemática. Considerada uma das civilizações mais avançadas, em 1950 a.C., a Babilônia já era um grande centro comercial, e sua matemática consistia num conjunto de métodos para resoluções de problemas.

Ainda segundo o autor, eles também demonstravam ter conhecimento das séries geométricas e aritméticas, e algum conhecimento de proporções e seu conhecimento de Geometria, dedicado a medições era voltado à construção e astronomia.

Os babilônios se destacaram pelo desejo de ir além deste uso comum. Os escribas se interessavam pela Matemática em si, cujo objetivo, afirma Berlingoff e Gouvêa (2008, p.10), "era ser um virtuoso da matemática, capaz de tratar problemas complexos e que impressionassem".

De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008), muito do que se sabe sobre a Matemática babilônica vem de tábuas de argilas produzidas aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C. onde eram registrados os seus conhecimentos matemáticos. Essas tábuas possuem tabelas de cálculos, quadrados, cubos, raízes quadradas, além de problemas, nem todos voltados para questões cotidianas, para treinar jovens escribas, algumas contendo respostas e soluções completas.

Os babilônios, inventores da escrita cuneiforme, possuíam dois sistemas de numeração posicionais: um de base 10, com origem na observação dos dedos das mãos, e outro de base 60, relacionado a observações astronômica, usado em seus cálculos para representar números e até mesmo frações.

Muitas tabelas de multiplicação e divisão em caracteres cuneiformes foram encontradas.

A tábua mais antiga conhecida é a Plimpton 322, Figura 2.1, descoberta no início do século XX, atual sul do Iraque, e que remete a trigonometria babilônica entre os séculos XIX a.C. e XVI a.C., escrita segundo o sistema de numeração sexagesimal. Para Mansfield e Wildberger (2017) esta é a primeira tabela trigonométrica de cálculos exatos, baseada em razões entre lados de triângulos retângulos, e não em seus ângulos, como usualmente aprendemos.

De acordo com o autor, para os babilônios o triângulo retângulo era a metade do retângulo. Até o aparecimento da Plimpton, a tábua de cordas de Hiparco de Nicea (190-120 a.C.) era reconhecida como a mais antiga tabela trigonométrica existente, sendo seu criador considerado o pai da trigonometria.

Figura 2.1: Plimpton 322

Fonte: Vinciguerra (2017)

De acordo com Dante (2011) tabelas de multiplicação eram feitas em duas colunas, onde se colocava na primeira coluna alguns números, e o produto desses números por um valor constante na segunda coluna.

Em linguagem atual seria o mesmo que escrever

$$y = a.x,$$

em que x é o número colocado na primeira coluna, a é o valor da constante e y é o número da segunda coluna, resultado da multiplicação do número x por a.

As tábuas encontradas mostram ainda que, os babilônios sabiam resolver não só equações lineares, mas também equações quadráticas, algumas cúbicas (grau três) e biquadradas (grau quatro).

> [...] segundo o historiador da Matemática E.T. Bell, 'não seria nenhum ato de generosidade creditar a eles [os babilônios antigos] uma certa intuição da funcionalidade, considerando a definição sucinta de função como uma tábua ou uma correspondência'. (IEZZI *et al.*, 2001, p.66)

Ainda segundo Iezzi *et al.* (2001), em uma das tábuas encontram-se os valores $n^3 + n^2$ para n = 1, 2, 3, ..., 20, 30, 40 e 50, muito provavelmente construída para resolver equações do tipo $n^3 + n^2 = c$, em que c era um número na base sexagesimal. E que, seguindo a interpretação de Bell, esta tabela pode ser associada à uma função f, de domínio 1, 2, 3, ..., 20, 30, 40 e 50, definida por $f(x) = x^3 + x^2$.

Iezzi *et al.* (2001, p.66) chama a atenção para um vislumbre do conceito de função inversa ao se procurar o número n de modo que $f(n) = c$, "número esse que é a imagem de c pela função inversa de f".

Para Aristóteles, filósofo grego, a Matemática nasceu no Egito, porque lá "a classe dos sacerdotes tinha tempo livre para poder se dedicar ao estudo e à investigação" (ARAGÃO, 2009, p.12).

Os egípcios viviam às margens do rio Nilo, e de acordo com Eves (2011), sua matemática se originou, primordialmente, para atender questões relacionadas a construções e à agricultura. Usando símbolos, os egípcios criaram seu sistema de numeração decimal e não posicional, para representar quantidades de objetos através de desenhos.

Os sacerdotes egípcios detinham todo o conhecimento matemático da época, e os registravam em papiros através de problemas, que deveriam ser exemplos a serem imitados.

Um dos documentos mais antigos sobre a Matemática egípcia é o Papiro Ahmes (ou Papiro de Rhind), com aproximadamente 5,5 m de comprimento e 32 cm de largura, segundo Guelli (1998). De acordo com Roque e Carvalho (2012) ele foi copiado pelo escriba Ahmes por volta do ano 1650 a.C. e comprado por um antiquário escocês Alexander Henry Rhind, em 1850, e hoje encontra-se no British Museum de Londres (Museu Britânico de Londres).

Guelli (1998) afirma que o papiro Ahmes possui 80 problemas, em sua maioria sobre assuntos do cotidiano, todos resolvidos. Aragão (2009) e Berlingoff e Gouvêa (2008) dizem que este documento demonstra que os egípcios tinham algum conhecimento sobre construção de figuras planas e a determinação de suas áreas, sabiam calcular ou aproximar volumes de várias formas geométricas, conseguiram melhor aproximação que os babilônios para a razão entre a circunferência e seu diâmetro (π), conheciam o fato de que triângulos cujos lados de razões de 3, 4 e 5 formam ângulos retos, e ainda, mostram que eles já conseguiam resolver equações lineares simples.

Berlingoff e Gouvêa (2008, p.125-126) dizem ainda que no papiro Ahmes encontram-se extensas tabelas de multiplicação, problemas que se resumem a resolver, fazendo um paralelo com a Matemática atual, equações de primeiro grau do tipo $ax = b$, pelo método da falsa posição[1], e equações do tipo $ax + b = c$ pelo método de falsa posição dupla[2], métodos esses ensinados nos livros de Aritmética até o século XIX.

[1]Para informações sobre o método falsa posição veja Roque e Carvalho (2012, p.39-42).
[2]Veja mais sobre o método da falsa posição e falsa posição dupla em Guelli (1989).

Ainda para o autor, esta é talvez a equação que mais se apresenta na vida real, em termos de aplicação, razão pela qual, segundo ele, quase todas as civilizações antigas desenvolveram técnicas para as resolverem. Convem neste momento observar que, a equação do tipo $ax+b=c$ pode ser reconhecida como um caso particular da **função afim** $f(x) = ax + b$, bastando tomar $f(x) = c$.

Para Dante (2011, p.212), a base exponencial como a conhecemos hoje, através do conceito de potência, pode ser observada no problema 79 do Papiro de Rhind, ao citar "'7 casas, 49 gatos, 343 ratos, 2.401 grãos de trigo', que remete a potência de base 7".

Em Galvão (2008, p.86), o problema "Há 7 casas, em cada casa temos 7 gatos, cada gato mata 7 ratos, cada rato comeu 7 grãos de cevada, cada grão teria produzido 7 hekats de cevada. Qual a soma das coisas enumeradas?" representa uma outra versão do problema 79 do Papiro de Rhind.

De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008) são poucos os textos sobre a Matemática produzida pelos chineses e que mostram a existência de problemas simples e suas soluções, que ao que tudo indica, surgiram de situações práticas, embora existam alguns de cunho recreativo. O texto antigo mais importante é o *Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática* (em chinês, *Jiuzhang Suanshu*) onde pode ser percebida a proporcionalidade como ideia central. Muitos problemas geométricos são resolvidos pelo método "corta e cola", enquanto outros são resoluções de equações de primeiro grau, resolvidas usando proporções.

Segundo Aragão (2009), por volta do ano 100 a.C. os chineses usavam o triângulo aritmético (ou triângulo de Pascal) para o cálculo aproximado de raízes quadradas, cúbicas, etc, e o chamavam de sistema de tabulação que servia para descobrir coeficientes binomiais. Ainda de acordo autor, o procedimento da extração de raízes quadradas e cúbicas é ensinado no quarto capítulo do texto *Jiuzhang Suanshu*.

Apesar de terem tido contato com a matemática egípcia e babilônica, vista como marcada por cálculos e algoritmos, para Roque e Carvalho (2012), por volta do século VI a.C., a Matemática grega, predominantemente voltada para a geometria e seus problemas geométricos, destacou-se das demais civilizações, por terem sido os primeiros, se não os únicos, a investir no rigor lógico da formulação e demonstração de teoremas geométricos, dando à Matemática um caráter analítico.

Destaca-se também a importância da teoria das razões e proporções, utilizadas em problemas geométricos, pois os gregos não atribuíam diretamente números a objetos estudados, contribuindo para a descoberta, pelos pitagóricos, dos incomensuráveis.

Tales de Mileto, filósofo grego (cerca de 625 a.C.–558 a.C. - por Dante (2013)), tendo adquirido conhecimentos matemáticos de hititas, assírios, babilônios e egípcios, conhecia muitas propriedades dos triângulos e do círculo, e proporções, segundo Aragão (2009). Berlingoff e Gouvêa (2008, 15) dizem que a ele é atribuído a primeira tentativa de demonstração de um teorema geométrico e também de que “a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que um círculo é cortado ao meio por qualquer de seus diâmetros”.

Segundo Dante (2011), foi Tales quem melhor definiu a **função afim**, utilizando proporções. “‘Um feixe de paralelas determina, sobre duas transversais, segmentos proporcionais’. Hoje, expressa por uma função linear, caso particular da função afim, a proporcionalidade associa duas variáveis, direta ou inversamente.” (DANTE, 2011, p.110)

De acordo com Aragão (2009), Pitágoras, filósofo e matemático grego, viveu no século VI e V a.C, conheceu a Matemática babilônica e egípcia, e tendo fundado a Escola Pitagórica em Crotona, ensinava lições onde aplicava a racionalidade grega, tendo se preocupado também com o estudo de razões (segundo Berlingoff e Gouvêa (2008)), que eles relacionavam com a música. Ele dividiu a Matemática em quatro ramos: a Aritmética, a Música, a Geometria e a Astronomia. Essa divisão permaneceu até depois da Idade Média, sendo sua contribuição mais conhecida, o teorema que leva o seu nome, o Teorema de Pitágoras, por ter sido atribuído a ele o enunciado e a demonstração do teorema.

Acredita-se que os babilônios, os egípcios e os hindus conheciam as características de triângulos análogos aos do Teorema de Pitágoras, justificados pelos textos babilônicos encontrados da época da dinastia Hamurabi, as proporções 3-4-5 presentes no interior da Pirâmide de Quéops, e no triângulo dos hindus, de lados 5-12-13.

Segundo Aragão (2009), Eudoxo de Cnidos (408-355 a.C.), matemático e astrônomo, inventou o método da exaustão, baseado na noção de limite, que o permitia medir e comparar as áreas de figuras planas, curvilíneas e volumes de sólidos, tendo destacado-se ainda, pela teoria geral das proporções, aplicável a grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Os *Elementos*[3] de Euclides é considerada a obra grega mais importante, publicada por volta de 300 a.C. e composta de 13 livros que versam sobre os principais estudos

[3] Há edição completa dos *Elementos* traduzida diretamente do grego por Irineu Bicudo. Ver Bicudo (2009)

da Matemática grega, nas áreas da geometria plana e espacial, teoria dos números, e os incomensuráveis, tendo sido considerado modelo a ser imitado pelos que buscavam o mesmo rigor e precisão, de acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008).

2.3 IDADE MÉDIA

Para Aragão (2009, p.35-37), a Idade Média iniciou-se por volta dos anos 313 d.C e 357 d.C. Neste período o Cristianismo passou a dominar sobre as outras religiões. A Matemática não era vista com bons olhos, tendo ganhado um "significado mágico, oculto", sendo seus estudiosos, muitas vezes também astrônomos, alquimistas e astrólogos, perseguidos pelos representantes da igreja como o Bispo Cirilo e Santo Agostinho. Situação que somente se modificou, segundo o autor, entre o final do primeiro milênio e início do segundo.

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008), no século VI d.C, destaca-se o matemático indiano Aryabata (talvez no séc. IV e V). De acordo com Aragão (2009), ele trabalhou com equações de 1º e 2º graus tendo aplicado processos algébricos nos estudos de Astronomia e Geometria.

No século XII, destacam-se os trabalhos do astrônomo, matemático e diretor do Observatório de Ujjain, Acharya Baskara (1114–1185). De acordo com Aragão (2009) Seu livro mais famoso é o *Lilavati*, sobre Aritmética e Geometria Plana. Escreveu ainda um livro sobre Álgebra, o Bijaganita, onde parte do livro é dedicado à resolução de equações indeterminadas. Nessa época, os indianos não utilizavam fórmulas matemáticas na resolução de equações.

Considerado o maior matemático do século XIV, segundo Iezzi *et al.* (2001), Nicole Oresme (1325–1382), trabalhou sobre a teoria das razões e publicou em 1350 seu método para representar graficamente quantidades variáveis, ideia esta que, segundo Berlingoff e Gouvêa (2008), contribuiu para a "ideia moderna de fazer o gráfico de uma função".

Tem-se aqui, muito provavelmente, a primeira tentativa de construção de gráficos, uma vez que, não sabe-se ao certo se a história contada sobre o descobrimento da parábola é de fato, verídica, segundo Iezzi *et al.* (2001).

Iezzi *et al.* (2001) conta que a parábola, gráfico da função do segundo grau, teria surgido através do matemático Menaecmo (cerca de IV a.C.), após o mesmo resolver o chamado "problema deliano", que consistia em construir um altar cúbico cujo volume fosse o dobro do volume do altar cúbico do deus Apolo, já existente, para que os delianos fossem curados da peste que os atingiu, cuja solução provém da interseção de duas parábolas.

2.4 IDADE MODERNA

Segundo Ramos (2019), a Idade Moderna compreende o período entre os anos de 1453 d.C e 1789 d.C. (ou apenas entre os anos 1453 - 1789), apresentando como uma de suas características, o amplo desenvolvimento não só científico, com o Renascimento Científico, como também no ramo das artes, com o humanismo.

Nos séculos XV e XVI, Berlingoff e Gouvêa (2008) afirmam que a Matemática começou a diversificar seus interesses de estudos, havendo um grande interesse sobre navegação, Astronomia e Trigonometria, em razão das grandes navegações européias, além de Astrologia, Aritmética e Álgebra. Álgebra, que segundo o autor, ocupará espaço central no século XVI e início do XVII.

Nos próximos parágrafos pode-se observar que este período foi marcado pelo surgimento da Álgebra moderna ou literal e da Geometria Analítica, isto é, como representar formas por equações, a criação da notação simbólica, a invenção dos logaritmos, a representação gráfica e o cálculo infinitesimal.

De modo que, na primeira metade do século XVII, o objeto de estudos eram fenômenos e curvas, e suas tangentes, que pudessem ser representadas algebricamente por meio de equações, destacando-se neste campo, os matemáticos Descartes e Fermat. E na segunda metade do século XVII, o foco estava em desenvolver e aplicar técnicas infinitesimais no cálculo de tangentes, áreas e volumes, de curvas. Técnicas estas que começaram a ser sistematizadas por Leibniz e Newton, conhecidos como fundadores do cálculo infinitesimal.

Aragão (2009) diz que Arquimedes, de Siracusa, (287–212 a.C.) propôs a seguinte notação para potências: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$. No entanto, foi Michael Stifel (1487–1567), alemão, que introduziu o termo "expoente".

Por volta do ano 1600, com François Viète (1540-1603), se iniciaram as tentativas de resolver as equações do 2º grau com um único procedimento. De acordo com Aragão (2009), ele introduziu no cálculo a notação simbólica, usando consoantes para quantidades conhecidas e vogais para desconhecidas, resolvendo ainda, equações acima do 4º grau, e com isso tornou-se o iniciador da Álgebra moderna.

Segundo Roque e Carvalho (2012), desde Viète, a representação simbólica de uma quantidade desconhecida permitia exprimir as relações entre variáveis que estão sobre uma curva, por fórmulas algébricas.

Em 1638, Galileu Galilei (1564–1642), cientista italiano, publicou a obra *Diálogos sobre duas novas ciências* em que, utilizando de proporções, escreveu sua teoria das trajetórias parabólicas, descrevendo uma lei de relação entre distância e tempo para um objeto em movimento.

> Em *Diálogos sobre duas novas ciências* (1638), por exemplo, encontra-se a seguinte lei: 'Os espaços percorridos por um corpo que sai do repouso em movimento uniformemente acelerado estão entre si como os quadrados dos tempos gastos para percorrê-los.' Ou seja, se para percorrer um determinado espaço s_1 o tempo gasto é t_1 e para percorrer um espaço s o tempo gasto é t, então $\frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2}$. (IEZZI *et al.*, 2001, p.67)

Em linguagem moderna podemos escrever a lei de Galileu como $s(t) = v \cdot t^2$, onde $s(t)$ seria o cálculo da distância s após decorridos t minutos, e v é a constante determinada pela razão entre a distância s_1 e o tempo t_1 no momento em que o corpo entra em movimento. Ou seja, o cálculo da distância está em função do tempo da distância percorrida.

Por esta razão, Iezzi *et al.* (2001) afirma que alguns historiadores atribuíram a Galileu, a criação do conceito de função, ao que Dante (2011, p.144) parece concordar ao dizer que, "agrupando esses elementos, ele criou o conceito de função quadrática para descrever o movimento dos corpos em queda livre".

Roque e Carvalho (2012) discordam ao registrar que o conceito de função surgiu depois dos trabalhos de Leibniz e Newton sobre derivada.

Segundo Lima (1985), mesmo com a invenção das frações decimais, os cálculos exigidos na Astronomia e no período das Grandes Navegações eram longos e trabalhosos. Era preciso então, que fossem mais rápidos e precisos.

O matemático e clérigo escocês John Napier (1550–1617), mais conhecido como Neper, comparando duas progressões, criou uma ferramenta para simplificar cálculos comuns na Astronomia, na época feitos manualmente. Era o logaritmo natural, que transforma multiplicações em adições, e divisões em subtrações.

Neper foi o inventor da palavra logaritmo, e o apresentou pela primeira vez em suas tábuas, publicadas em 1614, intituladas de *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, que significa *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*, de acordo com Lima (1985).

Jobst Bürgi (1552-1632), em Praga, publicou em 1620 sua tábua de logaritmos, criada independente de Neper, segundo Aragão (2009).

Neper e Bürgi não associam o logaritmo ao conceito de expoente, nem usam a ideia de base, concebendo as suas tábuas através de progressões, ao que parece concordar Jean le Rond D'Alembert (1717-1783).

Lima (1985) diz que uma tábua de logaritmos é composta de duas colunas de números. A cada número da coluna à esquerda faz-se corresponder um número à sua direita, chamado o seu logaritmo. Para multiplicar dois números, basta somar seus logaritmos e consultar na tábua, da direita para a esquerda, qual o número tem aquele logaritmo. Assim, a soma dos logaritmos de dois números é o resultado do logaritmo do produto. Para dividir dois números, basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência basta multiplicar o logaritmo do número pelo expoente. E, para extrair a raiz n-ésima de um número, basta dividir o logaritmo do número pelo índice da raiz.

Estas tábuas utilizavam como base um número muito próximo de 1, fazendo com que os números estivessem bem próximos de modo que, a maioria dos números que interessavam aos cálculos pudessem ser encontrados.

Segundo Sá ([20–?]), Napier utilizou como base a razão $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) \approx 0,9999999$. E para lidar com essas casas decimais que se repetem, multiplicou as potências obtidas com essa razão por 10^7. Assim, a tabela de Napier era formada por uma coluna de números da forma

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L,$$

e uma outra coluna contendo o expoente L chamado de *logaritmo* do número N. Dessa forma, para $L = 0$ temos $N = 1$, ou seja, pela tabela de Napier, o logaritmo de $10^7 = 1$.

A tabela de logaritmos de Bürgi possuía aproximadamente vinte mil termos, utilizava a razão $1,0001$, sendo seu primeiro termo o número 10^8.

De acordo com Lima (1985), Henry Briggs (1561-1631), matemático e professor inglês, junto com Napier, utilizando base decimal, criou uma nova tábua de logaritmos contendo os *logaritmos decimais* ou *logaritmos ordinários*.

Segundo Dante (2011), a possibilidade de definir logaritmos como expoente (mérito do inglês John Wallis, em 1685) e a ideia de base para os logaritmos (apresentada pelo galês William Jones em 1742) transformaram o logaritmo em um instrumento de resolução de equações exponenciais.

O estudo da função exponencial, principalmente por Wallis, Newton e J. Bernoulli teria revelado que a função logarítmica seria a inversa da função exponencial.

Em *Introductio in analysin infinitorum*, o primeiro tratado de Euler sobre análise e publicado em 1748, coube a Euler a prova da existência de logaritmos de números negativos, tomando o número e como base para todos os logaritmos e exponenciais. Ele mostra que os logaritmos de números negativos são números imaginários puros, denominando estes logaritmos por impossíveis, e acreditou ter provado que os números possuíam infinitos logaritmos imaginários, mas apenas um único era um logaritmo real.

Segundo Roque e Carvalho (2012), René Descartes (1596–1650), matemático e filósofo francês, tentou dar em seus trabalhos um caráter algébrico para construções de resoluções de problemas geométricos. Em *La géométrie*(A geometria), apêndice de sua obra *Discours de la méthode* (Discurso do método), publicada em 1637, ele mostrou que as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, e ainda, as soluções de equações quadráticas de coeficientes positivos, podem ser resolvidas através de construções com régua (não graduada) e compasso.

Aragão (2009) conta a obra *La géométrie* trouxe importantes contribuições para a teoria das equações, e destaca o uso, por Descartes, de letras do fim do alfabeto para indicar quantidades desconhecidas e letras do princípio do alfabeto para as conhecidas.

Nesse contexto destacou-se pela criação de um sistema de coordenadas, escolhido convenientemente e não necessariamente ortogonal, para representar graficamente duas quantidades desconhecidas descritas por uma equação encontrada utilizando o conceito de lugar geométrico.

A variável independente era marcada ao longo de uma reta horizontal, e a variável dependente, era representada por um segmento de reta, escolhido convenientemente de modo a resultar em um ângulo fixo qualquer com a variável dependente. De acordo com Roque e Carvalho (2012, p.264), Descartes “trabalhava com equações indeterminadas, nas quais tomando-se infinitos valores para x, é possível encontrar infinitos valores para y.”

Apenas com John Wallis, a quem é atribuída a introdução do símbolo ∞ para designar o infinito que, em 1650, passou-se a considerar coordenadas negativas para os sistemas de coordenadas.

Paralelo ao trabalho de Descartes, Fermat também desenvolveu o seu próprio sistema de coordenadas, para estudar problemas relacionados a lugares geométricos a partir da notação simbólica proposta por Viète. Escrevendo de outro modo, partindo de uma equação, Fermat era capaz de encontrar sua curva correspondente. De acordo com Roque e Carvalho (2012), com base nesses estudos Fermat mostrou que, o lugar geométrico dos pontos que satisfazem uma equação do primeiro grau é uma reta, e, em equações do segundo grau é um círculo ou uma cônica.

Há de se destacar que não há o eixo vertical (hoje conhecido como eixo y), nos sistemas de Fermat e Descartes. De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008), o sistema de eixos ortogonal, como o conhecemos, muito provavelmente foi evoluído naquele século e meio depois da publicação de *La géométrie*. Mesmo assim, conforme Aragão (2009), é a René Descartes a quem é atribuída a invenção do sistema de coordenadas cartesianas, uma escala de medidas em que pontos ou figuras podem ser identificados e podem ser definidos por equações, consistindo nisso, a Geometria Analítica.

De acordo com Roque e Carvalho (2012), no século XVII, com o desenvolvimento de métodos para resolver problemas de natureza geométrica ou cinemática, o objeto de estudo passou a ser a relação entre quantidades, conceito implícito nos trabalhos de Leibniz e Newton, o que contribuirá, segundo o autor, para o surgimento da ideia de função como relação entre quantidades.

Segundo Roque e Carvalho (2012), com o estudo da derivada, encontrar a velocidade instantânea de um corpo (isto é, em um determinado instante) equivalia a encontrar a tangente a uma curva descrita algebricamente. Esta é uma das motivações para o cálculo infinitesimal.

Newton utilizou a geometria clássica para apresentar os resultados de seu estudo do cálculo infinitesimal sobre variáveis, considerando a curva que descrevia a relação entre elas.

Ainda de acordo com Roque e Carvalho (2012), em 1670, o cálculo do Newton para a derivada tinha um conceito de fluentes (quantidades variáveis com o tempo ou velocidade) e fluxão (taxa de variação de uma quantidade em relação ao tempo), em que, a razão entre os fluxões de duas quantidades variáveis determina a inclinação da tangente à curva descrita pelos fluentes.

Leibniz usava métodos analíticos para encontrar tangentes às curvas, adotando o conceito de diferencial.

> Por exemplo, para encontrar a derivada da curva $y = x^2$, era preciso tomar a diferença entre as ordenadas de dois pontos vizinhos, obtendo $dy = d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2$. O último termo deveria ser desprezado, uma vez que possui, comparativamente, ordem de grandeza bem menor que a do primeiro. Concluía-se então que $dy/dx = 2x$. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.282)

Leibniz introduziu o operador "d", chamou de dx e dy as diferenciais, ou "elementos infinitesimais" (quantidades infinitamente pequenas), de modo que, a relação $\frac{dy}{dx}$ é uma quantidade finita, resultado de uma operação de diferenciação, não sendo, portanto, um número infinitesimal. Introduziu ainda em seus estudos, os conceitos de constante e variáveis dependentes e independentes, e usava as noções de coordenadas e parâmetros. Separou as curvas em algébricas, curvas que podiam ser representadas por equações de alguma ordem, e transcendentes, curvas cujas equações não era possível atribuir ordem.

Apesar de não definir função em suas obras, Roque e Carvalho (2012, p.281) afirmam que "é nesse contexto que Leibniz introduz a palavra *função*, designando a 'função' que uma reta desempenha em uma curva, como a de ser tangente, normal ou subtangente."

Leibniz, o primeiro a tentar conceituar o termo *função*, buscou com Johann Bernoulli (1667-1746) qual seria a melhor notação para uma função.

No entanto, foi Johann Bernoulli que, em 1718, publicou um artigo com a definição analítica de função, utilizando φx como modo de expressar uma variável em função de outra. "[...] Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes." (*Opera Omnia*, Vol. II, p.241 apud ROQUE; CARVALHO, 2012, p.301)

A partir desta definição de Bernoulli, há a desvinculação entre a Álgebra e a Geometria. O conceito de função passa a ser analítico e o cálculo infinitesimal passa a ser trabalhado apenas sob um viés algébrico.

Na continuidade aos trabalhos de Bernoulli, Leonhard Euler (1707–1783), matemático suíço, em sua obra *Introdução à análise dos infinitos*, publicado em 1748, após definir constante e variável, apresentou sua primeira definição de função da matemática moderna. "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes." (*Opera Omnia*, ser. I, Vol. III, p.17 apud ROQUE; CARVALHO, 2012, p.302)

Segundo Euler, uma função poderia ser definida por uma série linear de potências da forma $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + ...$, em que os expoentes poderiam ser qualquer número. Todavia, esta noção algébrica de função enfrentou diversos problemas práticos no âmbito da Física.

Em 1755, Euler apresentou em sua obra *Institutiones calculi differentialis*, um novo conceito de função:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, estas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar estas quantidades de funções destas últimas. Esta denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x. (*Opera Omnia*, ser. I, Vol. IV, p.4 apud ROQUE; CARVALHO, 2012, p.305-306)

Lacroix, em seu livro *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, publicado em 1797, apresentou um novo conceito de função, ao afirmar que "toda quantidade que depende de outras quantidades é dita *função* destas últimas, ainda que não se saiba por quais operações podemos passar destas últimas quantidades à primeira." (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.306)

No cálculo infinitesimal, Euler estudou apenas as funções contínuas, definidas por ele em *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à análise dos infinitos), como uma curva representada pela mesma equação (ou expressão analítica) para todos os valores do seu domínio. Caso a equação que representa a curva mude sua expressão para algum valor do seu domínio, ela era considerada descontínua, podendo ser composta por partes contínuas, e por isso chamadas de curvas mistas.

2.5 IDADE CONTEMPORÂNEA

Com o fim da Idade Moderna, no ano de 1789, com a Revolução Francesa, segundo Ramos (2019), iniciou-se o período atual da história, a Idade Contemporânea.

Um das características do século XIX “foi caracterizado por um ideal de precisão e demonstrações rigorosas”, segundo Aragão (2009, p.93).

Surge a teoria geral das funções analíticas por Cauchy, Riemann e Weierstrass. A partir da discordância quanto à definição de função e sua continuidade dada por Euler, Cauchy, Fourier e Dirichlet apresentam suas próprias definições.

De acordo com Roque e Carvalho (2012), Cauchy, em seu livro *Cours d'analyse*, trouxe novas e mais precisas definições de função, continuidade, critérios de convergência de séries, e coeficientes de série trigonométrica (série de Fourier) que podiam representar uma função qualquer.

Pressupondo funções definidas por expressões analíticas simples e mistas (funções compostas das simples), Cauchy apresenta sua definição de função:

> Quando quantidades variáveis são ligadas de tal maneira que, quando o valor de uma delas é dado, pode-se inferir os valores das outras, concebemos ordinariamente estas várias quantidades como expressas por meio de uma delas que recebe, portanto, o nome de ‘variável independente’; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que chamamos *funções* desta variável. (Cauchy, [35], p.19 apud ROQUE; CARVALHO, 2012, p.330)

Cauchy também contradisse o conceito de descontinuidade de Euler, ao fornecer um exemplo de uma função mista de Euler, mostrando que ela pode ser representada por uma única equação, sendo assim, contínua.

A partir de Cauchy, a Matemática apresentava um novo rigor, em que, todo conceito teria de ser definido explicitamente, os teoremas teriam que ser provados e cada passo justificado por outro resultado admitido como válido.

Os trabalhos de Fourier deram um novo impulso à evolução do conceito de função, ao propor mostrar que uma função arbitrária definida no intervalo $(-\phi, \phi)$ pode ser sempre representada por uma série que contêm funções senos e cossenos. As tentativas de demonstração fornecidas por Fourier de que toda função pode ser expressa por uma série trigonométrica impulsionaram uma nova definição de função. Mostrou que uma função descontínua de Euler podia ser representada por uma série, que é uma expressão analítica, logo a função seria contínua.

Roque e Carvalho (2012) dizem que a teoria das séries trigonométricas levou Fourier a afirmar que uma função é dada por uma sequência de valores arbitrários das ordenadas, que se sucedem de um modo qualquer e independente umas das outras, sem precisar obedecer a nenhuma lei comum.

Um dos principais problemas abordados por Dirichlet quanto à convergência das séries de Fourier diz respeito às condições para que se possa calcular a integral de uma função. Em 1829, em seu artigo, apresentou um exemplo de função que não pode ser representada por uma série de Fourier, não é derivável, é descontínua em todos os pontos e não pode ser integrada.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \text{ racional} \\ 1, & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

Lejeune-Dirichlet, estudou as séries de Fourier e então propôs uma nova definição de função, tentando mostrar em 1829 que elas convergem. Na versão revisada deste trabalho, publicada em alemão em 1837, vemos o conceito de função como uma relação mais geral entre duas variáveis x e y, de modo que, a função $y = f(x)$ estará bem determinada se, para cada valor de x obtivermos um único valor de y.

> Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se, a cada x, corresponde um único y finito de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x neste intervalo. Para isto, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas. (Dirichlet, [50], pp.135-136 apud ROQUE; CARVALHO, 2012, p.340)

A Dirichlet é atribuida a definição “formal” de função moderna.

O procedimento de “enumeração” dos elementos de um conjunto, proposto por George Cantor, é feito por meio de uma associação de cada um destes elementos a um número natural. “Esta associação é definida como uma função de um conjunto no outro, uma correspondência biunívoca entre seus elementos.” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.348)

Cantor provou que existem diferentes números cardinais infinitos, ao mostrar que a cardinalidade do conjunto infinito $\mathbb{N}$ é estritamente menor do que a cardinalidade do conjunto infinito $\mathbb{R}$, pela não existência de uma correspondência biunívoca entre esses conjuntos. Como o conjunto $\mathbb{R}$ não é finito e não tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$, diz-se que $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

A partir destas novas ideias de correspondência biunívoca entre elementos de dois conjuntos, firma-se o conceito de função que hoje conhecemos, e é estabelecida a Teoria dos Conjuntos, sob a qual toda a Matemática passou a ser formalizada, a partir do fim do século XIX.

Segundo Cruz (2015, p.15),

> podem-se destacar quatro períodos importantes na evolução do conceito de função. O primeiro ocorre na preocupação grega de descrever relações e mudanças que ocorriam na natureza de forma qualitativa. Em seguida, o período de Newton e Leibniz é marcado por funções que possuíam uma expressão analítica ou representação gráfica que surgiam para resolução de problemas práticos. O próximo período ocorre com Lagrange e Euler quando o conceito de função é rediscutido devido a compreensão da relação de dependência entre variáveis. O último período ocorre a partir da definição de Dirichlet baseada na dependência de variáveis, mas que precisou ser modificada tendo em vista os trabalhos realizados pelos franceses René-Louis Baire (1874-1932), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956) e Henri Léon Lebesgue (1875-1941).

3 FUNÇÕES

Em muitos casos, para saber qual o tipo de função pode ser utilizado como modelo matemático para uma situação ou problema, é necessário recolher e analisar dados (ou valores) reais, a fim de identificar os critérios atendidos, e consequentemente, a função que os modela.

Muitos fenômenos naturais ou situações requerem um modelo matemático constituído de equações complexas, sendo necessário programas de computadores para o seu estudo e cálculo, como por exemplo, os cálculos de previsão meteorológica. No entanto, há inúmeras outras situações em nosso cotidiano, que não necessitam de tais recursos computacionais.

Partindo desse pressuposto, este capítulo contém uma breve caracterização das funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica, seguidos por algumas situações do cotidiano que podem ser modelados por uma destas funções.

Antes contudo, seguem algumas definições e conceitos importantes sobre funções.

Definição 3.1 (Função)**.** *Dados dois conjuntos não vazios X e Y quaisquer, definimos uma função como uma relação que faz corresponder a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$. Notação:*

$$f : X \to Y \quad \textit{(lê-se: f é uma função de X em Y) ou}$$

$$f(x) = y \quad \textit{(lê-se: f de x é igual a y)}$$

Além disso,

a) Os conjuntos X e Y são chamados, respectivamente, **domínio** e **contradomínio** da função f, sendo indicados por $D(f)$ e $CD(f)$. Logo, $D(f) = X$ e $CD(f) = Y$. O domínio é o conjunto de todos os possíveis valores que a variável X pode assumir;

b) Para cada $x \in X$, o elemento $y \in Y$ associado é chamado **imagem de** x, pela função f, ou valor assumido pela função f no ponto x. A notação $y = f(x)$ é utilizada para indicar que y é imagem de x;

c) O subconjunto de Y formado por todos os elementos $y \in Y$ que são imagens dos elementos $x \in X$ através de f, ou seja, $f(x) = \{y \in Y; \exists x \in X, f(x) = y\} \subset Y$ é chamado de **imagem da função** f e é indicado por $Im(f)$;

d) Se $y = f(x)$, dizemos que x é a **variável independente** e y é a **variável dependente**;

e) $f(x_0)$ é o valor da função f para $x = x_0$.

Definição 3.2 (Função real de uma variável)**.** *Define-se **função real de uma variável**, a função $f : X \to \mathbb{R}$, com domínio $X \subset \mathbb{R}$.*

Quando uma função for mencionada apenas pela sua lei de associação, ou como "função f", considera-se a função como função real de uma variável, tal que o domínio seja o maior subconjunto $X \subset \mathbb{R}$.

O **gráfico** de uma função real $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o subconjunto $G(f)$ do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in X$ e $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Assim,

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in X,\ y = f(x)\}.$$

Assim, o gráfico de uma função f é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de associação.

A **taxa de variação média** de uma função do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mede a velocidade com que o valor da função $f(x)$ cresce em determinado intervalo do domínio. Em outras palavras, em um intervalo $[x, x + h]$ do domínio de f, com $h \neq 0$, a taxa de variação média é dada pelo número:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{3.1}$$

Uma função $f : X \to Y$, com $X \subset \mathbb{R}$, pode ser classificada quanto a sua:

a) **monotonicidade** em :

   i) **crescente** (ou estritamente crescente): quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$;

   ii) **decrescente** (ou estritamente decrescente): quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$;

   iii) **monótona não-decrescente**: quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$;

   iv) **monótona não-crescente**: quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$;

   v) **constante**: quando $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$.

b) **paridade** em:

   i) **par**: se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in X$;

   ii) **ímpar**: se $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in X$.

Uma função $f : X \to Y$ também pode ser classificada como:

a) **Função injetora ou injetiva**: se $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. De modo equivalente podemos dizer: se $\forall x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

b) **Função sobrejetora ou sobrejetiva**: se $\forall y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, quando $Im(f) = Y$.

c) **Função bijetora ou bijetiva**: quando f for simultaneamente injetora e sobrejetora. Neste caso, há uma bijeção (ou correspondência biunívoca) entre o domínio X e o contradomínio Y, tendo os dois conjuntos, a mesma quantidade de elementos, isto é, a mesma cardinalidade.

Há ainda, duas importantes definições a serem consideradas: *função composta* e *função inversa*.

Definição 3.3 (Função composta)**.** *Dadas as funções $f : X \to Y$ e $g : Y \to W$, chamamos função composta de g e f a função $g \circ f : X \to W$, definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in X$.*

Definição 3.4 (Função inversa)**.** *Dizemos que a função $f : X \to Y$ é a inversa da função $g : Y \to X$ quando $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.*

Assim, a função g será dita inversa da função f se, e somente se, f é a inversa de g. De outro modo, temos que, uma função f possui inversa, se e somente se, f é bijetora[1].

A função inversa de uma função f pode ser denotada como f^{-1} (lê-se: inversa de f).

3.1 FUNÇÃO AFIM

Definição 3.1.1 (Função afim ou função polinomial do 1º grau)**.** *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *chama-se* ***afim*** *quando existem constantes* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = ax + b$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Notação:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

Onde:

- x é a variável independente;
- $f(x_0)$ é o valor da função para $x = x_0$;
- o número b é chamado **termo constante**, ou **valor inicial de** f, dado por $b = f(0)$;
- o número a é chamado **coeficiente de** x ou **taxa de variação** (ou taxa de crescimento/decrescimento) da função f, pois, dado um intervalo $[x, x + h]$, com $h \neq 0$, temos:

$$\frac{f\,(x+h) - f\,(x)}{(x+h) - (x)} = \frac{a\,(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Portanto, a taxa de variação média da função afim é **constante**, razão pela qual é referida apenas como taxa de variação, e pode ser determinada se conhecidos dois valores $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$, para $x_1 \neq x_2$ quaisquer do domínio de f, da seguinte forma:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Isso significa que, o aumento de 1 unidade em x gera um acréscimo de a unidades em $f(x)$, se $a > 0$, ou decréscimo de a unidades em $f(x)$, se $a < 0$.

[1] Ver sobre função inversa em Lima (2013, pp.188-189).

A taxa de variação nos permite classificar a função afim quanto à sua monotonicidade em:

a) **crescente**: quando $a > 0$;

b) **decrescente**: quando $a < 0$;

c) **constante**: quando $a = 0$.

Uma característica interessante da função afim é sua relação com a progressão aritmética[2].

Observe que, se tomarmos um conjunto de números $x_1, x_2, x_3, ...$, igualmente espaçados, de modo que $x_n - x_{n-1} = h$, e aplicarmos sobre eles a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, os valores $f(x)$ serão também igualmente espaçados, com $f(x_n) - f(x_{n-1}) = ah$, pois,

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = ax_n + b - ax_{n-1} - b = a(x_n - x_{n-1}) = ah.$$

Isso equivale a dizer que, a função afim transforma uma progressão aritmética x_i, $i = 1, 2, 3, ...$ de razão h, em uma progressão aritmética $f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, ...$, de razão ah. Por outro lado, se uma função real f e monótona transforma uma progressão aritmética x_i, $i = 1, 2, 3, ...$ em outra progressão aritmética $f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, ...$, então esta função é afim[3].

O **gráfico** da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é uma reta não vertical representada pela equação $y = ax + b$, conforme Figura 3.1. A demonstração é feita provando que três pontos quaisquer dessa reta são colineares. De igual modo pode-se dizer que, toda reta não vertical é o gráfico de uma função afim.

Do ponto de vista geométrico, se r é a reta que representa graficamente a função afim $f(x) = ax + b$, tem-se que:

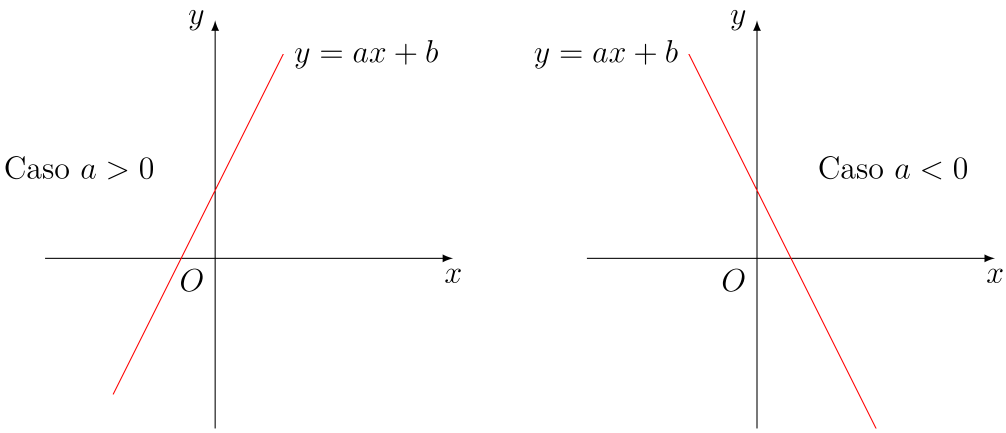
- o número b é a ordenada do ponto $(0, b)$ onde r intersecta o eixo OY, e é dito **coeficiente linear de** r;

- o valor $x = -\frac{b}{a}$ é a abscissa do ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, para o qual $f(x) = 0$, onde r intersecta o eixo OX, sendo chamado o **zero** da função afim.

[2]Ver sobre Progressão Aritmética em Dante (2011, pp.289-302).
[3]Ver sobre conexão entre função afim e progressão aritmética em Lima (2013, pp.103-104)

- o número a é chamado **coeficiente angular da reta** r, e dá a inclinação da reta r em relação ao eixo OX. Assim, a é dado por $a = tan(\alpha)$, onde α é o ângulo formado pela reta r e o eixo OX.
- quando $a > 0$, a reta é ascendente;
- quando $a < 0$, a reta é descendente.

Figura 3.1: Representação gráfica da função afim do tipo $f(x) = ax + b$



Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Como o gráfico da função é uma reta, uma função afim fica bem determinada conhecendo-se dois pontos da reta (x_1, y_1) e (x_2, y_2). De modo que, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da reta r, a **equação da reta** que passa por um ponto $P_0(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular $a = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ é dada por:

$$y = y_0 + a(x - x_0) \tag{3.2}$$

São casos particulares de funções afim, cuja representação gráfica está na Figura 3.2:

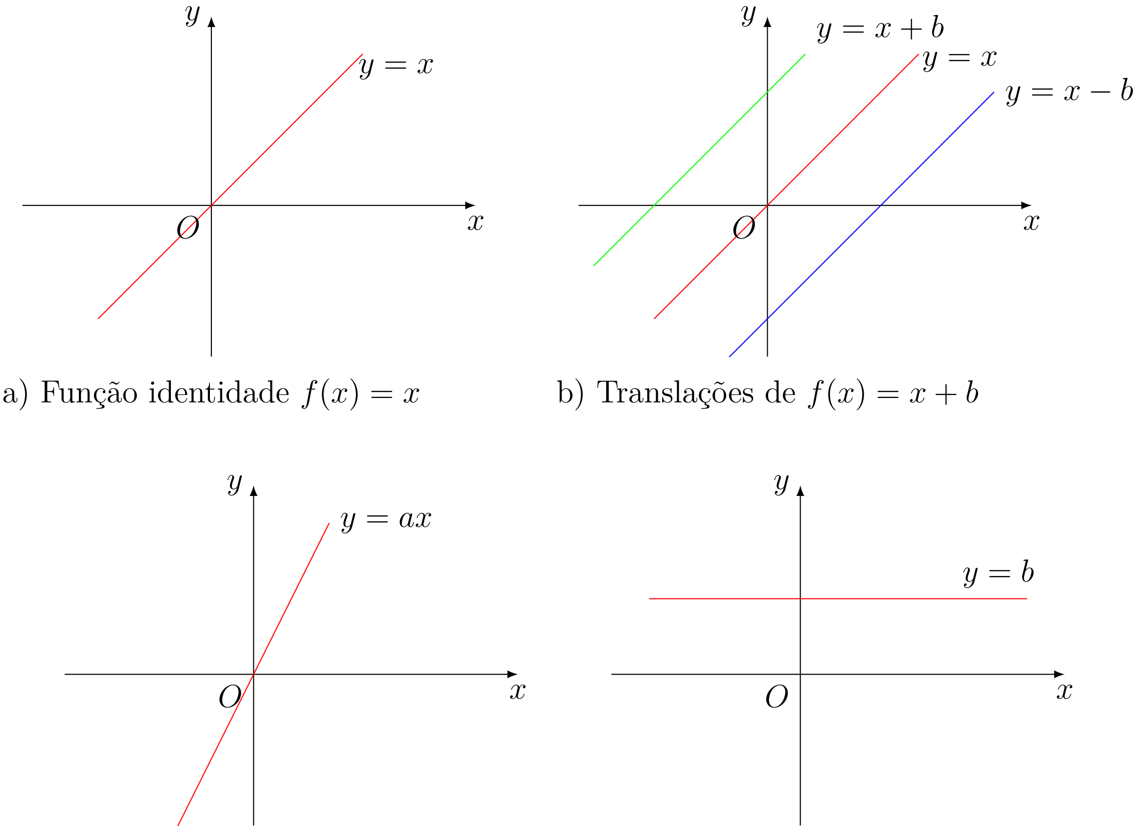
a) **Função identidade**: definida por $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Seu gráfico é uma reta não vertical que passa pela origem (isto é, passa pelo ponto (0,0));

b) As **translações** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + b$, com $b \in \mathbb{R}$;

c) **Função linear**: definida por $f(x) = ax$, constante $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Este é o modelo matemático para tratar de problemas de proporcionalidade direta. Neste caso, sua constante de proporcionalidade é $a = \dfrac{f(x)}{x}$, para $x \neq 0$. Seu gráfico é uma reta não vertical que passa pela origem;

d) **Função constante**: definida por $f(x) = b$. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo OX que passa pelo ponto $(0, b)$.

Figura 3.2: Representação gráfica dos casos particulares de função afim



a) Função identidade $f(x) = x$ b) Translações de $f(x) = x + b$

c) Função linear $f(x) = ax$ d) Função constante $f(x) = b$

Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Como uma modelagem matemática para problemas de proporcionalidade, através da função linear[4], há infinitas possibilidades de aplicação da função afim em atividades diárias, de fácil reconhecimento, como por exemplo na:

- Culinária: em receitas, para manter a proporção entre os ingredientes;
- Construção civil: massa para reboco, para manter a proporção entre cimento e areia, ou no cálculo da quantidade total de tinta necessária para pintar uma área de x m^2, dentre outros exemplos;

[4]Ver sobre Função linear, caso particular da função afim, e proporcionalidade em Dante (2013, p.91-93) e Lima (2013, p.95-96)

- Geometria: comprimento da circunferência, dado em função do seu diâmetro: $C = \pi D$;

- Física e Química: em vários fenômenos naturais ou reações:
  - Cálculo da força: $F = m \cdot a$;
  - Lei de Charles: tomando os valores de pressão P e a quantidade n de mols do gás constantes na Lei dos Gases Ideais $PV = nRT$;
  - Princípio de Avogadro: tomando os valores de pressão P e a temperatura T constantes na Lei dos Gases Ideais $PV = nRT$.

A seguir são apresentados exemplos e situações do cotidiano representadas por uma função afim.

Exemplo 1. ***Comércio***

Possivelmente a mais comum das aplicações da função afim, presente na vida de praticamente todas as pessoas, é a prática do comércio. Três exemplos são identificados abaixo.

Situação 1.1. *Uma aplicação da função afim muito conhecida e encontrada com certa facilidade nos livros didáticos do Ensino Médio, é o da corrida de táxi. Exemplo: em uma corrida de táxi é cobrado um valor fixo de R\$ 4,20, chamado bandeirada, acrescido de R\$ 1,90 por quilômetro rodado. Qual será o valor total a ser pago pelo usuário para uma corrida de 10 km de distância percorrida? De um modo geral, se um produto ou serviço é ofertado por uma taxa fixa b acrescido de um valor a para cada quantidade x de produto ou serviço adquirido, qual a função que representa o valor total a ser pago?*

Resolução:

O preço a ser pago por uma corrida de uma distância x percorrida será dada pela função afim $f(x) = 1,90 \cdot x + 4,20$.

Portanto, para uma corrida de 10 km percorridos, o usuário pagará $f(10) = 1,90 \cdot 10 + 4,20 = \text{R\$ } 23,20$.

De um modo geral, o valor pago por uma quantidade x de produto ou serviço, que cobra um valor fixo b e um valor adicional a dependendo da quantidade x pode ser dado pela função afim: $f(x) = ax + b$.

Situação 1.2. *Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções A e B, ambos com as mesmas coberturas e serviços, e com coparticipação parcial para consultas, ou seja, a pessoa paga à operadora do plano de saúde um certo valor predeterminado, por cada consulta realizada. Será contratado o plano mais econômico para a pessoa. Qual deverá ser o plano escolhido?*

Tabela 3.1: Tabela de oferta dos planos de saúde A e B

	Plano A - Enfermaria	Plano B - Enfermaria
Mensalidade	254	525
Consulta	44	25

Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Resolução:

Observe que, o custo mensal de cada plano é dado em função do número x de consultas, e que, o custo do plano A aumenta mais rapidamente que o custo do plano B, por ter maior taxa de variação:

$$\text{Plano } A : f(x) = 44x + 254$$
$$\text{Plano } B : g(x) = 25x + 525$$

Comparando os dois planos:

- o custo do plano A é igual ao custo do plano B quando $x = 14,26$, pois

$$44x + 254 = 25x + 525 \Rightarrow 44x - 25x = 525 - 254$$
$$\Rightarrow 19x = 271 \Rightarrow x = \frac{271}{19} \Rightarrow x = 14,26$$

- o custo do plano A é mais econômico quando $x < 14,26$;
- o custo do plano B é mais econômico quando $x > 14,26$.

No entanto, como o número de consultas é um número inteiro, segue que para $x \leq 14$ o plano A é mais econômico. O plano B é mais econômico quando $x > 14$. E, não existe um número de consultas tais que os custos dos dois planos sejam iguais.

Portanto, a escolha do plano mais econômico deverá considerar se o número de consultas a serem realizadas durante o mês é maior ou menor que 14 consultas.

Situação 1.3. *Retirado de Lima (2013, p.114) - Uma copiadora publicou a seguinte tabela de preços:*

Tabela 3.2: Tabela de preços de acordo com número de cópias

Número de cópias de um mesmo original	Preço por cópia
de 1 a 19	$R\$ \; 0,10$
de 20 a 49	$R\$ \; 0,08$
50 ou mais	$R\$ \; 0,06$

Fonte: Lima (2013)

a) Esboce o gráfico da função que associa a cada natural n o custo de n cópias de um mesmo original;

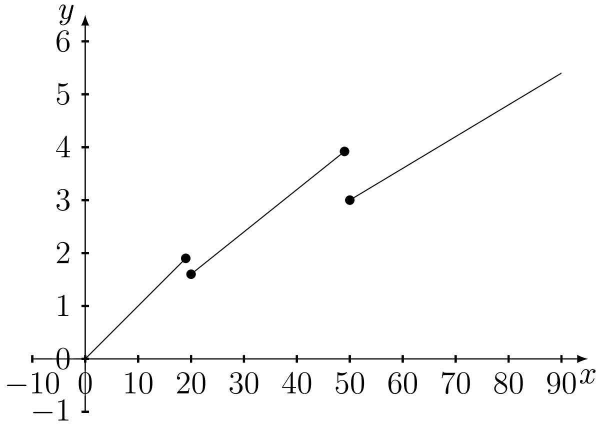
b) O uso da tabela acima provoca distorções. Aponte-as e sugira uma tabela de preços mais razoável.

Resolução letra a):

O preço total $f(n)$ a pagar depende do número de cópias n. Assim, a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que descreve a Tabela 3.2 é:

$$f(n) = \begin{cases} 0,10n; & \text{se} \;\; 1 \leq n \leq 19; \\ 0,08n; & \text{se} \;\; 20 \leq n \leq 49; \\ 0,06n; & \text{se} \;\; n \geq 50. \end{cases} \tag{3.3}$$

Figura 3.3: Representação gráfica da função número de cópias em (3.3)



Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Resolução letra b):

A distorção consiste no fato de que é mais barato fazer, por exemplo, 20 cópias (R$ 1,60) do que 19 cópias (R$ 1,90), e 50 cópias (R$ 3,00) do que fazer 49 cópias (R$ 3,92). Uma escala mais razoável seria:

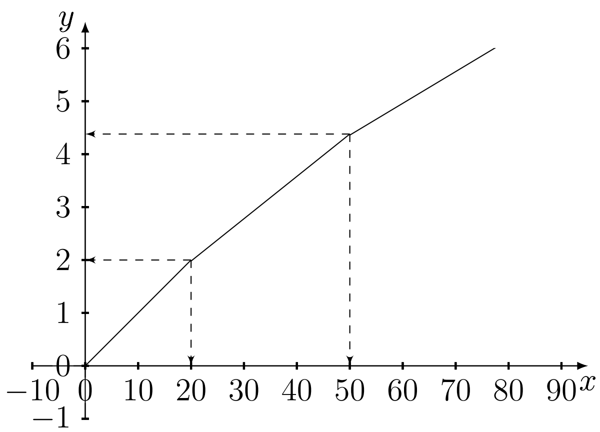
- R$ 0,10 por cópia, pelas primeiras 19 cópias;
- R$ 0,08 por cópia adicional, até 49 cópias;
- R$ 0,06 por cópia adicional, a partir da 50ª cópia.

Assim, teríamos:

$$f(n) = \begin{cases} 0,10n; & \text{se } \ 1 \leq n \leq 19; \\ 1,90 + 0,08 \cdot (n-19); & \text{se } \ 20 \leq n \leq 49; \\ 4,30 + 0,06(n-49); & \text{se } \ n \geq 50. \end{cases} \tag{3.4}$$

Não foi solicitado no exercício, mas é interessante observar como ficou o gráfico desta nova função. Assim:

Figura 3.4: Representação gráfica da função número de cópias modificada em (3.4)



Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Exemplo 2. ***Escola: Notas***

Uma das preocupações dos estudantes é a aprovação no ano escolar, o que pode ser entendido como uma preocupação em obter nota suficiente para aprovação. Vejamos uma possível situação que pode ocorrer na rotina de um estudante.

Situação 2.1. *Adaptado de Iezzi et al. (2001, p.71) - Uma professora do ensino fundamental adota o seguinte critério como nota de participação no bimestre: todo estudante começa com 10. Quando ele deixa de fazer uma tarefa ou apresenta um comportamento inadequado em aula, recebe um negativo, perdendo 0,4 na nota.*

a) Qual seria a nota de participação de um estudante que recebesse 7 negativos no bimestre?

b) Em geral, como se expressaria a nota n de participação de um estudante que recebesse x negativos?

c) Se as notas de um bimestre escolar é composto pela nota de uma prova com peso 2 e a nota de participação com peso 1, quantos negativos, no máximo, poderia receber um aluno que tirasse 5,0 na prova e necessitasse de média 6,0 para não ficar com vermelho no bimestre?

d) Quantos negativos o estudante deverá receber para que não tenha nota de participação no bimestre?

Resolução letra a):

Cada negativo equivale a perder 0,4 pontos. Então, 7 negativos totaliza $7 \cdot 0,4 = 2,8$ pontos a serem descontados do total dos 10 pontos de participação. Portanto, a nota de participação do estudante seria $10 - 2,8 = 7,2$ pontos.

Resolução letra b):

Se y é a nota final de participação do estudante, e x a quantidade de negativos que ele recebeu, então, $y = 10 - 0,4x$, onde $y = f(x)$.

Resolução letra c):

A média procurada é a média ponderada. Então, se M_f a média final da nota do aluno, n_1 a nota da prova e n_2 a nota de participação:

$$M_f = \frac{2n_1 + 1n_2}{2+1}.$$

Por outro lado, pela letra (b), sabemos que a nota de participação n_2 é dada por

$n_2 = y = 10 - 0,4x$, onde x é a nota final de participação do estudante. Logo,

$$M_f = \frac{2n_1 + 10 - 0,4x}{3}.$$

Substituindo a nota da prova e a média final dada na questão, encontramos o número máximo de negativos procurados. Portanto,

$$6 = \frac{2 \cdot 5 + 10 - 0,4x}{3} \Rightarrow 20 - 0,4x = 18 \Rightarrow 0,4x = 20 - 18 \Rightarrow x = \frac{2}{0,4} \Rightarrow x = 5.$$

Resolução letra d):

Para que o estudante não tenha nota de participação devemos encontrar um valor para x tal que $f(x) = y = 0$, ou seja, a solução é encontrar o zero da função $f(x) = 10 - 0,4x$. Assim,

$$f(x) = 0 \Rightarrow 10 - 0,4x = 0 \Rightarrow 0,4x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{0,4} \Rightarrow x = 25.$$

Portanto, o estudante deverá receber 25 negativos para que não tenha nota de participação no bimestre.

Exemplo 3. ***Cálculo da aposentadoria por tempo de contribuição***

Pela regra progressiva, estabelecida na Lei nº 13.183 de 04/11/2015, BRASIL (2015), observado o tempo mínimo de contribuição ao INSS de 35 anos para os homens, e 30 anos para as mulheres, o trabalhador poderá solicitar sua aposentadoria por tempo de contribuição quando, na data do requerimento da aposentadoria, o total resultante da soma de sua idade e seu tempo de contribuição for:

Tabela 3.3: Regra progressiva para aposentadoria por tempo de contribuição

A cada dois anos soma-se 1 ponto						
	Até 2018	2019/2020	2021/2022	2023/2024	2025/2026	31/12/2026 em diante
Homem	95	96	97	98	99	100
Mulher	85	86	87	88	89	90

Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Situação 3.1. *Considerando os dados da tabela acima, e que em todos os meses dos anos trabalhados houve contribuição ao INSS, responda as perguntas:*

a) Encontre a idade mínima para cada quantidade de pontos, de modo que o cidadão se aposente com o tempo mínimo de contribuição exigidos. Qual a lei de associação da função neste caso?

b) Se um jovem começar a trabalhar hoje, com 16 anos, idade mínima exigida por lei para assinar a carteira de trabalho, qual a idade mínima esse jovem deverá ter para se aposentar?

Resolução letra a):

Seja x a idade do cidadão, e $f(x) = y$ o total de pontos por período, conforme Tabela 3.3. Assim, considerando o tempo mínimo de contribuição podemos escrever a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} x + 35 & \text{se homem,} \\ x + 30 & \text{se mulher.} \end{cases}$$

A função inversa de f nos permite encontrar a idade $x = g(y)$ em função do número de pontos, sendo portanto, a lei de associação procurada. Assim, seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a inversa de f. Então,

$$g(y) = \begin{cases} y - 35 & \text{se homem,} \\ y - 30 & \text{se mulher.} \end{cases}$$

Portanto, utilizando a função $g(y)$ podemos construir a seguinte tabela:

Tabela 3.4: Idade mínima para se aposentar com o tempo mínimo de contribuição pela regra progressiva

A cada dois anos soma-se 1 ano na idade						
	Até 2018	2019/2020	2021/2022	2023/2024	2025/2026	31/12/2026 em diante
Homem	60	61	62	63	64	65
Mulher	55	56	57	58	59	60

Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Resolução letra b):

Primeiro, observe que, se considerarmos o início do trabalho em 01/01/2019, até 30/12/2026 serão apenas oito anos de trabalho, e consequentemente, oito anos de contribuição ao INSS. Logo, se o jovem começar a trabalhar em 2019, com 16 anos, ele aposentará após o ano de 2026, em razão do tempo mínimo de contribuição exigido.

Assim, seja x o número de anos trabalhados com contribuição ao INSS. A idade do jovem após trabalhar x anos será $16 + x$.

Caso o jovem seja homem, teremos:

$$(16 + x) + x = 100 \Rightarrow 16 + 2x = 100 \Rightarrow 2x = 84 \Rightarrow x = \frac{84}{2} \Rightarrow x = 42$$

Caso o jovem seja mulher, teremos:

$$(16 + x) + x = 90 \Rightarrow 16 + 2x = 90 \Rightarrow 2x = 74 \Rightarrow x = \frac{74}{2} \Rightarrow x = 37$$

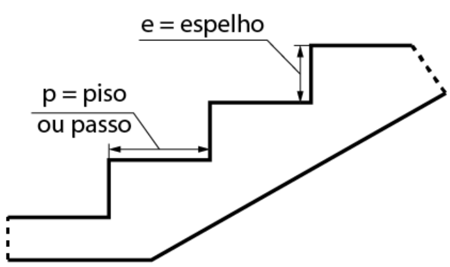
Portanto, caso comece a trabalhar com 16 anos, a partir de 2019, o jovem poderá se aposentar com 58 anos (pois, $16 + 42 = 58$), e a jovem poderá se aposentar com 53 anos (pois, $16 + 37 = 53$). Observe que, em ambos os casos, o jovem cumpre os 35 anos de contribuição mínima exigida para a aposentadoria.

Exemplo 4. ***Construção civil: escadas fixas***

"Uma sequência de três degraus ou mais é considerada escada". ABNT (2015, p.62)

Para a construção de uma escada é preciso determinar o número de degraus e a altura de cada degrau. Na construção civil, esse cálculo é chamado de cálculo de uma escada, e independe da sua forma (em linha reta, em "L", em "U", helicoidal ou outra). Observe a figura abaixo:

Figura 3.5: Elementos de uma escada



Fonte: Moura (2019)

De acordo com Moura (2019) a Fórmula de Blondel é conhecida por ajudar a definir as dimensões da escada, e é dada por $60 \leq p + 2e \leq 64$, onde, as variáveis e e p, medidas em cm, fornecem as medidas para o espelho (altura) e piso (largura) dos degraus da escada.

No entanto, as normas de acessibilidade da ABNT (2015), respeitadas as normas do Corpo de Bombeiros de cada estado, delimitam as dimensões da escada, como a altura e largura dos degraus, de modo que sejam constantes em toda a escada e atendam às seguintes condições:

$$\begin{cases} 63\ cm \leq p + 2e \leq 65\ cm & \\ 28\ cm \leq p \leq 32\ cm & \text{onde } p \text{ é medida do piso} \\ 16\ cm \leq e \leq 18\ cm & \text{onde } e \text{ é a medida do espelho.} \end{cases}$$

Assim, aplicando a norma ABNT (2015) à Fórmula de Blondel, teremos a Fórmula de Blondel + ABNT:

$$63 \leq 2e + p \leq 65 \tag{3.5}$$

Na prática, como o aumento de uma unidade em uma das variáveis e ou p representa um aumento constante na outra variável, a função afim pode ser utilizada para modelar os cálculos de uma escada, isolando-se uma dessas variáveis na Fórmula de Blondel + ABNT:

$$p = f(e) = 65 - 2e \quad \text{ou} \quad e = g(p) = \frac{65 - p}{2} \tag{3.6}$$

O número de espelhos de uma escada pode ser encontrado em função da altura entre o primeiro e o segundo pavimentos onde a escada será construída, ambos concluídos.

Seja x o número de espelhos e h a altura entre os pavimentos, em centímetros. Então:

$$x = \frac{h}{e} \tag{3.7}$$

O número de degraus é determinado pela função afim,

$$y = f(x) = x - 1 \tag{3.8}$$

onde, $f(x)$ é o número de degraus, e x é o número de espelhos.

Situação 4.1. *Considere a altura entre dois pavimentos como $h = 3$ m (300 cm) para construção de uma escada reta, sem patamar, de modo que o tamanho do piso seja o mais próximo possível de 30 cm. Utilizando a Fórmula de Blondel + ABNT em (3.5), quais os tamanhos de espelho e piso? Qual o número de espelhos e o número de pisos? Qual o comprimento da escada?*

Resolução:

Para tamanho do piso $p = 30$ cm, temos que o tamanho e número de espelhos será:

Por (3.6): $e = \dfrac{65 - p}{2} \Rightarrow e = \dfrac{65 - 30}{2} = \dfrac{35}{2} = 17,5$ cm

Por (3.7): $x = \dfrac{h}{e} = \dfrac{300}{17,5} = 17,1428$

Mas o número de espelhos deve ser inteiro. Dessa forma, tomando o número de espelhos $x = 17$, os tamanhos do espelho e piso serão:

Por (3.7): $e = \dfrac{h}{x} = \dfrac{300}{17} = 17,65$

Por (3.6): $p = 65 - 2 \cdot e = 65 - 2 \cdot 17.65 = 65 - 35,3 = 29,7$ cm.

Por (3.8): o número de degraus será: $y = x - 1 = 17 - 1 = 16$ degraus.

Como não há patamar (piso de largura maior), então todos os degraus tem o mesmo tamanho. Logo, o comprimento da escada será: $16 \cdot 29,7 = 475,2$ cm $= 4,752$ m.

Portanto, a escada reta terá:

17 espelhos de 17,65 cm;

16 degraus de 29,7 cm;

comprimento 4,752 m; e,

altura entre primeiro e segundo pavimentos de 3 m.

Exemplo 5. ***Temperatura***

A temperatura está presente no nosso dia-a-dia quando falamos do clima, em estados febril de uma pessoa, na culinária, na conservação de produtos e remédios, sendo medida, na maioria dos países do mundo, através da escala Celsius (°C), proposta no século XVIII pelo cientista sueco Anders Celsius (1701-1744).

O sistema internacional de medidas, SI, utiliza a escala Kelvin como escala de temperatura. Na escala Kelvin, -273°C equivale a 0 K, e 0°C equivale a 273 K, de modo que, as temperaturas t_k em Kelvin e t_c em Celsius se relacionam através da expressão:

$$t_k = t_c + 273. \tag{3.9}$$

Existe também uma outra escala de temperatura chamada Fahrenheit (°F). Os Estados Unidos é um dos principais países de língua inglesa a utilizar esta escala, e não, a escala Celsius.

Vejamos como as escalas Celsius e Fahrenheit se relacionam na situação a seguir.

Situação 5.1. *Os pontos de fusão e ebulição em graus Celsius são, respectivamente,* $0° C$ *e* $100° C$*, e correspondem em graus Fahrenheit, respectivamente, a* $32° F$ *e* $212° F$*. sabendo que a equivalência entre as escalas é uma função afim escreva a lei de associação da função que relaciona a cada grau Celsius (*$° C$*) um grau na escala Fahrenheit (*$° F$*), e encontre o valor em* $° F$ *da temperatura febril* $37,7° C$*.*

Resolução:

Como a função é linear, a lei de formação é da forma: $f(x) = ax + b$, em que, a é o coeficiente angular da reta referente ao gráfico da função e b é o coeficiente linear.

Sejam $x = C$, $y = F$ e $y = ax + b$ a equação da reta que representa graficamente a função f.

Se $y = 32$ e $y = 212$ correspondem, respectivamente, a $x = 0$ e $x = 100$, então, substituindo $(x, y) = (0, 32)$ em $y = ax + b$, temos que $b = 32$.

Como a é o coeficiente angular da reta, ele representa a divisão da variação de y pela variação de x, ou seja,

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} \Rightarrow a = \frac{9}{5}.$$

Portanto, a função procurada é $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \quad ou \quad f(x) = 1,8x + 32. \tag{3.10}$$

Logo, para $37,7$°C, temos:

$$y = \frac{9}{5}x + 32 \Rightarrow y = \frac{9}{5} \cdot 37,7 + 32 \Rightarrow y = \frac{339,3}{5} + 32 \Rightarrow y = 67,86 + 32 \Rightarrow y = 99,86.$$

Assim, $37,7$°C corresponde a $99,86$°F.

Não foi solicitado na questão, mas a transformação de graus °F em °C é dada pela função inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f, (3.10), dada por

$$g(y) = \frac{5}{9} \cdot (y - 32). \tag{3.11}$$

Exemplo 6. ***Área da Saúde: Cálculo IMC***

Situação 6.1. *Adaptado de Dante (2013, p. 66-67) - O índice de massa corporal (IMC) é um dos parâmetros utilizados para identificar sobrepeso e obesidade. Já que uma maior mortalidade é encontrada em pessoas com IMC maior que 30, esse número tornou-se um dos principais parâmetros para definir obesidade.*

O índice IMC é calculado em função do peso p do indivíduo, em quilos, dada a sua altura a, em metros.

$$IMC = \frac{p}{a^2} \tag{3.12}$$

Tabela 3.5: Categoria do peso com base no nível IMC

Categoria	IMC
Abaixo do peso	Abaixo de 18,5
Peso normal	18,6 - 24,9
Sobrepeso/pré-obesidade	25 - 29,9
Obesidade Grau I	30 - 34,9
Obesidade Grau II	35 - 39,9
Obesidade Grau III	Acima de 40

Fonte: ABESO ([20–?])

Qual a faixa de peso a que uma pessoa de altura 1,70 m deve pertencer para que seu peso seja considerado normal de acordo com a Tabela 3.5?

Resolução:

Neste caso, por (3.12), o cálculo do peso será dado por:

$$p = IMC \times a^2$$

Para que seja considerado peso normal, o IMC deve estar entre 18,6 e 24,9. Assim,

- para IMC = 18,6 $\Rightarrow p = 18,6 \times 1,70^2 \Rightarrow p = 18,6 \times 2,89 \Rightarrow p = 53,754$;

- para IMC = 24,9 $\Rightarrow p = 24,9 \times 1,70^2 \Rightarrow p = 24,9 \times 2,89 \Rightarrow p = 71,961$.

Portanto, uma pessoa de altura 1,70 m, com peso entre 53,754 e 71,961 terá seu peso considerado normal, de acordo com a tabela do IMC.

Exemplo 7. ***Vazamento de caixa d'água***

Situação 7.1. *Adaptado de Lima (2013, p.107) - Uma caixa d'água de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às 6h da tarde desse dia, só tinha 850 litros. Quando ficará pela metade? Supondo que não será mais colocada água na caixa.*

Resolução - 1º modo:

Como a vazão a é constante, significa que, a quantidade de litros de água escoados por hora é constante para qualquer intervalo de tempo considerado. Assim, usando a propriedade que caracteriza a função afim, podemos escrever:

$$a = \frac{150}{6} = \frac{500}{t},$$

ou seja, se a é a constante que representa a vazão de 150 litros em 6 horas, então a também será a constante que representa a vazão de 500 litros (metade da capacidade total da caixa d'água) em t horas.

Assim, temos $t = 20$, ou seja, após decorridas 20 horas, a contar do meio dia, a caixa d'água estará com seu volume total pela metade. Isto equivale a dizer que a caixa d'água estará com seu volume total pela metade às 8 h da manhã do dia seguinte.

Resolução - 2º modo (mais trabalhoso):

Sejam t a variável hora em que foram observados o volume da caixa d'água, e x a quantidade de litros dentro da caixa d'água em cada momento t observado.

Assim, em $t_0 = 12$ e $t_1 = 18$ foram observadas, respectivamente, a quantidade de água, em litros, de $x_0 = 1000$ e $x_1 = 850$.

Então,

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{850 - 1000}{18 - 12} = \frac{-150}{6} = -25.$$

Logo, a equação que representa a vazão da água é da forma $x = -25t + b$, para $0 \leq t \leq 1000$.

Substituindo a quantidade de $x = 1000$ litros quando $t = 12$ horas, na equação encontrada, temos:

$$1000 = -25 \cdot 12 + b \Rightarrow 1000 = -300 + b \Rightarrow b = 1300.$$

Segue então que, a equação que descreve a evasão da água é: $x = -25t + 1300$.

Portanto, a caixa d'água estará pela metade ($x = 500$), em:

$$500 = -25t + 1300 \Rightarrow 25t = 800 \Rightarrow t = 32.$$

Ou seja, $32 - 12 = 20$ horas, o que significa que, após decorridas 20 horas, a contar do meio dia, isto é, às 8 h da manhã do dia seguinte, a caixa d'água estará com seu volume total de água pela metade.

Exemplo 8. ***Física: Movimento uniforme***

O movimento conhecido como *movimento uniforme*, caracterizado por um objeto que se desloca sempre no mesmo sentido e percorre espaços iguais em intervalos de tempos iguais, permite o cálculo do espaço percorrido por este objeto, em função do tempo, através da função $S(t) = vt + b$, onde $S(t)$ é a posição do objeto no tempo t, v é a velocidade constante do objeto e $b = S(0)$ é a posição inicial do objeto.

Situação 8.1. *Retirado de Maximo e Alvarenga (1997, p.546) - Durante uma tempestade, uma pessoa observa um relâmpago e, somente após 10 s, escuta o barulho do trovão correspondente. A que distância da pessoa ocorreu a descarga elétrica (o raio) que provocou o relâmpago e o trovão?*

Resolução:

Sabendo que, o som do trovão é emitido junto com o relâmpago, a velocidade do som no ar é constante e igual a 340 m/s, e que a luz se propaga com velocidade tão elevada que a pessoa percebe o relâmpago praticamente no mesmo instante em que ele é produzido, podemos considerar que o intervalo de 10 s representa o tempo que o som do trovão gastou para chegar até a pessoa.

Assim, se $d = S(t) - S(0)$, a distância será dada por:

$$d = v \cdot t = 340 \cdot 10 \Rightarrow d = 3.400 \text{ m ou } d = 3,4 \text{ km}.$$

Portanto, a descarga elétrica ocorreu a uma distância de 3,4 km da pessoa.

Exemplo 9. ***Física: Energia potencial gravitacional***

A energia potencial gravitacional E_p de um corpo de massa m é a energia que esse corpo possui e que varia conforme sua altura h acima da superfície da terra, é dada por:

$$E_p = m \cdot g \cdot h \tag{3.13}$$

em que $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ é considerado o valor padrão para a aceleração da gravidade. Observe que a expressão em (3.13) é um tipo de função afim, em que E_p muda conforme varia o valor de h.

Situação 9.1. *Adaptado de Maximo e Alvarenga (1997, p.247) - Um menino, situado no alto de um edifício, segura um corpo de massa 1,5 kg a uma altura h = 10 m acima do solo. Qual a E_p gravitacional do corpo nessa posição?*

Resolução:

Dados $m = 1,5$, $h = 10$. Considerando $g = 9,81$ e utilizando a expressão em (3.13), temos:

$$E_p = 1,5 \times 10 \times 10 \Rightarrow E_p = 150 \text{ J}.$$

Exemplo 10. ***Física, Química: Pressão exercida por um líquido***

A pressão p, exercida por uma coluna com um líquido de densidade d sobre uma superfície é dada por:

$$p = d \cdot h \cdot g \tag{3.14}$$

em que h é a altura ou profundidade do líquido em relação à base, e g é a aceleração da gravidade. As medidas p, d, h e g são expressas em unidades do padrão internacional - SI - respectivamente, por: Pa, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, m, $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

A pressão atmosférica-padrão (1 atm) é igual a 760 mmHg, em que mmHg é a pressão exercida por uma coluna do mercúrio com 1 milímetro de altura a 0°C no nível do mar. E ainda, a unidade mmHg também é chamado de *torr*, em homenagem ao cientista italiano e inventor do barômetro, Evangelista Torricelli, de modo que 1 torr = 1 mmHg.

A equação (3.14) representa uma função do tipo afim, onde p é dada em função de h.

Situação 10.1. *Adaptado de Maximo e Alvarenga (1997, p.187) - A caixa de água no alto de um edifício está a 52 m de altura. Qual é a pressão exercida pela água, em uma torneira fechada situada no 1º andar, 2 m acima do solo? Considere a densidade da água como* $d = 1.000\ kg/m^3$ *e* $g = 10\ m/s^2$.

Resolução:

O valor h é a diferença entre a base e o topo da coluna, logo, $h = 52 - 2 \Rightarrow h = 50$ m.

Assim, a pressão conforme (3.14) será: $p = 1.000 \cdot 50 \cdot 10 = 5 \cdot 10^5$ N/m^2 ou $p = 5 \cdot 10^5$ Pa.

Situação 10.2. *Retirado de Atkins e Jones (2006, p.237) - Suponhamos que a altura da coluna de mercúrio em um barômetro é 760. mm (escreve-se 760. mmHg e lê-se "760 milímetros de mercúrio"). Qual é a pressão atmosférica em pascals?*

Resolução:

A densidade do mercúrio em 20°C é 13,546 $g \cdot cm^{-3} = 13.546\ kg \cdot m^{-3}$, e, considerando $g = 9,80665\ m \cdot s^{-2}$, e $h = 760.$ mm $= 0,760$ m, em (3.14) temos:

$$p = 13.546 \times 0,760 \times 9,80665 \approx 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

Exemplo 11. ***Cartografia - Escala***

A cartografia é uma área da Geografia que estuda, desenvolve e utiliza mapas. Os mapas são utilizados para localização, além de contribuir em tomadas de decisões para expansão ou crescimento urbano, empresarial, e até mesmo em guerras.

A escala cartográfica é a relação que indica a proporção entre a dimensão real de uma área e sua representação no mapa, e pode ser numérica ou gráfica. Além da sua utilização na produção de mapas, a escala cartográfica também está presente nas áreas de Arquitetura e Engenharias, como forma de representar grandes objetos em projetos da construção civil.

A escala numérica é representada por uma fração de modo que, o numerador "d" representa um comprimento do desenho, e o denominador "D" representa um comprimento real. A escala E será a semelhança $\frac{d}{D} = \frac{1}{E}$.

Assim, a relação $D = E \cdot d$ pode ser vista como uma função linear $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Situação 11.1. *Quanto será, na realidade, a largura de uma janela que aparece em um desenho com 6 cm na escala de 1:25?*

Resolução:

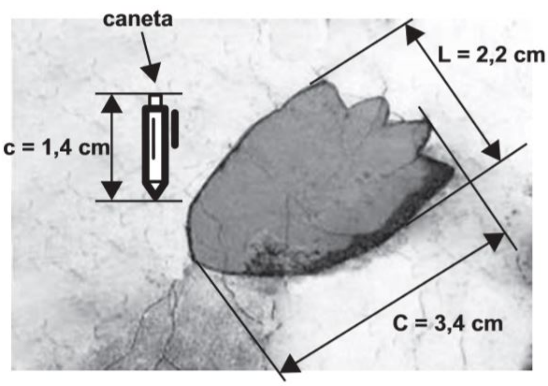
A escala 1:25 nos diz que, 1 cm da janela no desenho equivale a 25 cm do tamanho real da janela. Assim, seja $d = 6$ e $E = 25$, com medidas em centímetro. Logo,

$$D = E \cdot d \Rightarrow D = 25 \cdot 6 = 150 \text{ cm}.$$

Portanto, a janela terá uma largura real de 1,5 m.

Situação 11.2. *Adaptado do ENEM, INEP (2015b) - Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema. Encontre a largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros.*

Figura 3.6: Fotografia de caneta ao lado de uma pegada



Fonte: INEP (2015b)

Resolução:

Dado os tamanhos da caneta real e na fotografia, podemos encontrar a escala E das imagens na fotografia. Logo,

$$E = \frac{\text{comprimento da caneta na fotografia}}{\text{comprimento real da caneta}} = \frac{1,4}{16,8} = \frac{0,7}{8,4} = \frac{0,1}{1,2} = \frac{1}{12}$$

Logo, as imagens na fotografia estão 12 vezes menor que seu tamanho real. Portanto, como a imagem da pegada tem 2,2 cm de largura e 3,4 cm de comprimento, a largura real da pegada (L) e o comprimento real da pegada (C) correspondem, respectivamente, a: $L = 2,2 \times 12 = 26,4$ cm, e $C = 3,4 \times 12 = 40,8$ cm.

Exemplo 12. ***Energia elétrica***

A eletricidade está presente em milhares de casas brasileiras, através das empresas de energia elétrica que cobram uma tarifa por cada kWh de energia consumida mensalmente pelas residências. O consumo da energia de uma residência é feito através de um medidor instalado pela empresa de eletricidade.

Da Física sabemos que energia = potência × tempo, de modo que, maior será a quantidade de energia elétrica consumida por um aparelho eletrônico, quanto maior o tempo que ele permanecer ligado. Assim, podemos escrever essa relação utilizando uma função do tipo linear $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$:

$$E(t) = P \cdot t \tag{3.15}$$

ou, simplesmente, $E = P \cdot t$.

Situação 12.1. *Adaptado de Maximo e Alvarenga (1997, p.447) - Em uma casa há um aquecedor elétrico, de água, cuja potência é $P = 500$ W e que permanece ligado durante um tempo $t = 4$ h diariamente. Sabendo que o custo de 1 kWh de energia elétrica é de R\$ 0,10, qual o valor a ser pago à companhia de eletricidade pelo funcionamento do aquecedor durante 30 dias?*

Resolução:

Temos que $P = 500$ W $= 0,5$ kW. Segue de (3.15) que, o consumo diário de energia do aquecedor é: $E = 0,5 \times 4 = 2$ kWh. Logo, em 30 dias, teremos a energia total de $E = 2 \times 30 = 60$ kWh.

Portanto, o preço a ser pago pela energia consumida pelo aquecedor, em 30 dias de uso, será R$ 6,00, pois $60 \times$ R$ $0,10 =$ R$ $6,00$.

3.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição 3.2.1. *(Função quadrática ou função polinomial do 2º grau) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se* ***quadrática*** *quando existem números reais a, b, c com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Notação:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Dados três pontos no plano (x_1, y_1), (x_2, y_2), e (x_3, y_3), com x_1, x_2 e x_3, distintos dois a dois, existe uma única função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$. Tem-se que $a = 0$, se e somente se, os três pontos forem colineares.

O trinômio da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Completando o quadrado teremos:

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Este modo de escrever o trinômio $ax^2 + bx + c$ é conhecido como **forma canônica da função quadrática**. Daí,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \tag{3.16}$$

Assim como ocorre com a função afim, a seguinte relação com a progressão aritmética caracteriza a função quadrática: uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é dita quadrática, se, e somente se, transforma uma progressão aritmética em uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada[5].

Os **zeros** ou **raízes** da função quadrática, quando existem, podem ser encontrados através da fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.17}$$

Neste caso, a existência e o número de raízes reais é determinado pelo **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$, de modo que:

i) $\Delta > 0$, $f(x)$ possui duas raízes reais x' e x'' distintas;

ii) $\Delta = 0$, $f(x)$ possui uma única raiz real x', chamada raiz dupla, igual a $x = -\dfrac{b}{2a}$;

iii) $\Delta < 0$, $f(x)$ não possui raiz real.

Se x' e x'' são raízes distintas da função quadrática, então:

a) $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$;

b) $x'x'' = \dfrac{c}{a}$;

c) $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$ é conhecida como *forma fatorada*, e representa outro modo para encontrar as raízes da função.

Segue que, quando $a = 1$, tomando $s = x' + x'' = -b$ e $p = x'x'' = c$, encontrar as raízes da função quadrática significa determinar os valores x para os quais $f(x) = x^2 - sx + p = 0$.

Para encontrar os zeros da função, devemos encontrar um valor para x tal que $f(x) = 0$. Assim, utilizando a forma canônica em (3.16):

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

[5] Ver sobre Progressão Aritmética de segunda ordem e sua conexão com a função quadrática em Lima *et al.* (2006, pp.147-150).

Para demonstrar a), b) e c), sejam $x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$. Então,

a) $x' + x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b+\sqrt{\Delta}-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{b}{a}$;

b) $x'x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{b^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \dfrac{b^2-\Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$;

c) $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = a\,[x^2 - (x'+x'')x + x'x'']$
$f(x) = a(x^2 - x'x - x''x + x'x'') = a(x-x')(x-x'')$.

O **gráfico** de uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma curva chamada **parábola**.

A função quadrática assumirá um valor máximo ou mínimo quando igualarmos a zero o termo $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\right]$ em (3.16), uma vez que o termo $a\left[\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\right]$ é constante. O ponto cuja ordenada é o valor máximo ou mínimo da função é chamado **vértice da parábola** e possui coordenadas

$$V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right). \tag{3.18}$$

Note que, a abscissa x_v do vértice é a média aritmética das raízes x' e x'' da função quadrática, isto é, $x_v = \frac{x'+x''}{2}$.

O vértice será ponto de mínimo quando o coeficiente $a > 0$. Nesse caso, para todo x do domínio de f, teremos $f(x) \geq f(x_v)$, e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y \geq y_v\}$.

O vértice será ponto de máximo quando $a < 0$. Nesse caso, para todo x do domínio de f, $f(x) \leq f(x_v)$, e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R};\ y \leq y_v\}$.

O coeficiente a do termo em x^2 determina a concavidade da parábola, e se a mesma possui um menor ou maior valor para a função quadrática:

a) Se $a > 0$: concavidade para cima $\Rightarrow$ possui ponto de mínimo;

b) Se $a < 0$: concavidade para baixo $\Rightarrow$ possui ponto de máximo.

O número b indica se a parábola intersecta o eixo OY no ramo crescente ou decrescente da parábola:

a) Se $b > 0$: o gráfico intersecta o eixo OY no ramo crescente;

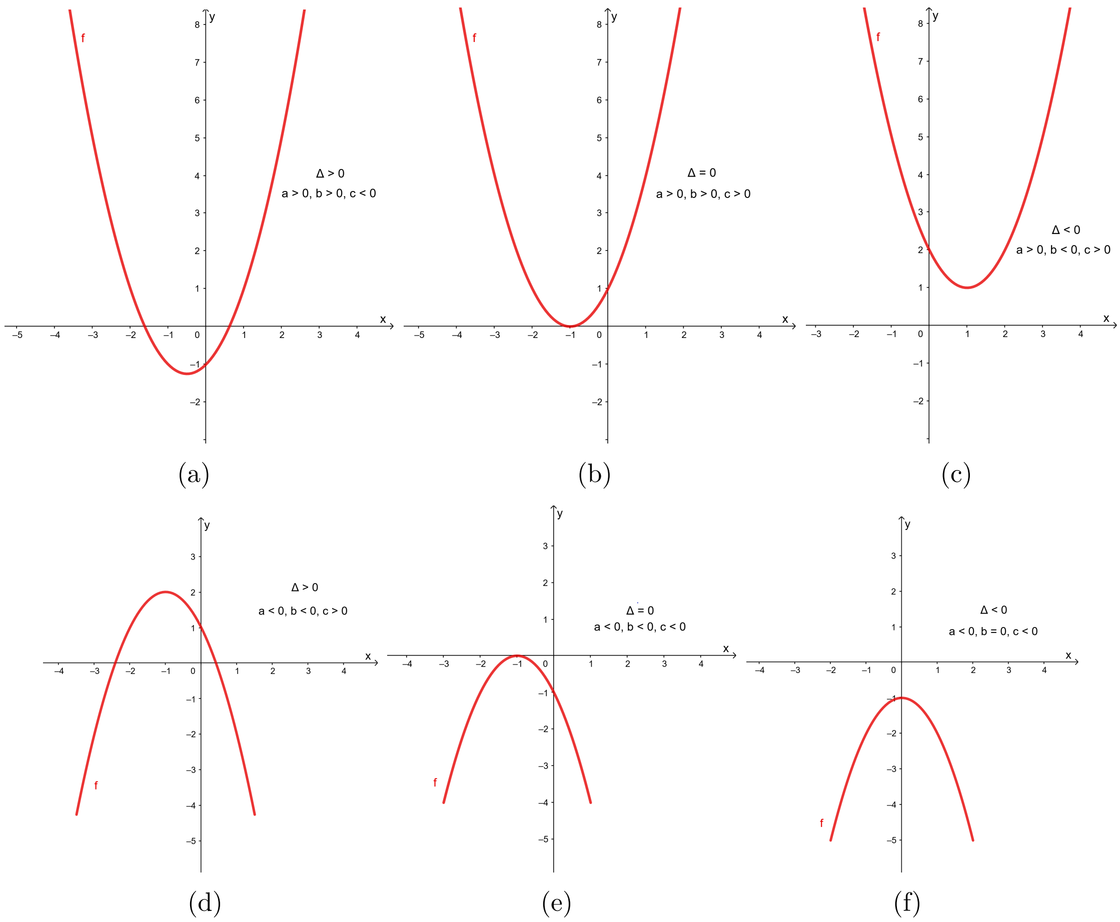
b) Se $b < 0$: o gráfico intersecta o eixo OY no ramo decrescente;

c) Se $b = 0$: o gráfico intersecta o eixo OY no vértice da parábola.

O número c é a ordenada do ponto $(0, c)$, em que a parábola intersecta o eixo OY, isto é, $f(0) = c$.

Assim, considerando os coeficientes a, b e c da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, e o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podemos representar graficamente a função f, genericamente (pois não há valores definidos para a, b e c), para cada caso, conforme a Figura 3.7.

Figura 3.7: Representação gráfica da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ por casos



Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Podemos ainda, caracterizar ou definir uma parábola através do conceito de lugar geométrico.

Assim, sejam F um ponto, e d uma reta que não o contenha. Chamamos parábola ao lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de F e d, de modo que:

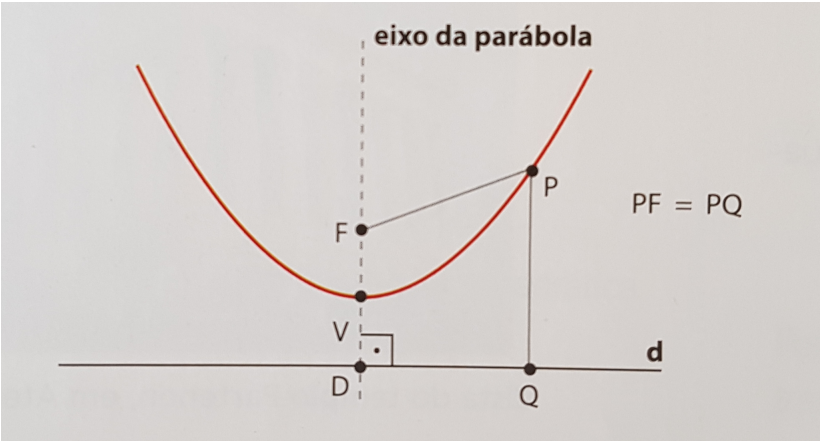
a) o ponto F é chamado **foco** da parábola;

b) a reta d é chamada **diretriz**;

c) a reta perpendicular a d passando pelo vértice V é chamado **eixo da parábola**;

d) o vértice V é o ponto médio entre o ponto F e o ponto de intersecção entre o eixo e a diretriz d.

Figura 3.8: Representação gráfica da parábola



Fonte: Dante (2011, p.158)

São apresentadas a seguir alguns exemplos de situações do cotidiano representadas por uma função quadrática.

Exemplo 1. ***Construções e trajetórias de fenômenos naturais***

A parábola, representação gráfica da função quadrática, é facilmente reconhecida em algumas construções, trajetórias como a que uma bola pode fazer ao ser chutada, e até mesmo as de jatos de água em uma fonte.

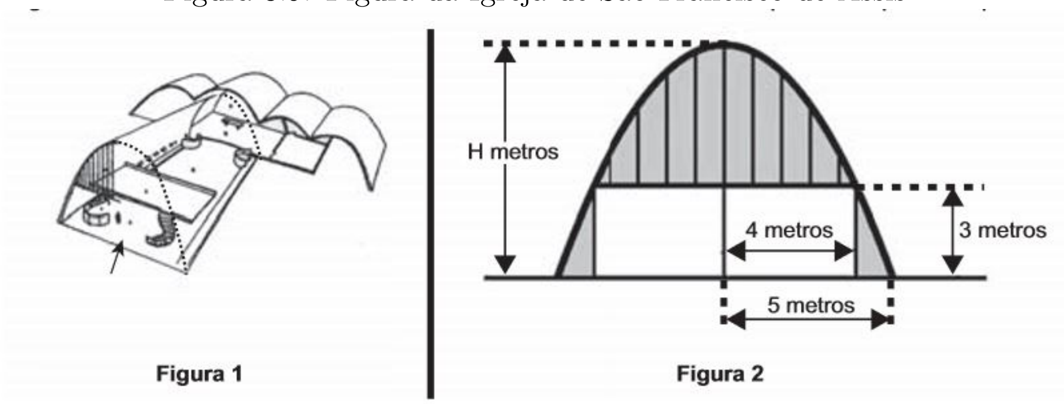
Podemos citar como exemplos, a ponte Juscelino Kubtschek, em Brasília, a Igreja São Francisco de Assis, em Belo Horizonte, o arco do sambódromo na Avenida Marquês de Sapucaí, no Rio de Janeiro, alguns trechos de montanhas-russa, fontes do Parque Ibirapuera, em São Paulo, dentre muitos outros que podemos encontrar, se olharmos atentamente ao nosso redor. Destacam-se ainda as aplicações dessa importante curva, também estudada na Física, em:

a) Faróis de carros: em que a lâmpada é colocada no foco da superfície parabólica. Aplicação ligada à propriedade ótica estudada na Física;

b) Antena parabólica, que é um parabolóide de revolução obtido pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria. Utiliza-se, nesse caso, a propriedade refletora[6] da parábola - todos os sinais captados são direcionados ao foco - como forma de amplificar as ondas eletromagnéticas de um satélite.

Situação 1.1. *Adaptado de INEP (2017) - A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas*[7]*. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos. Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?*

Figura 3.9: Figura da Igreja de São Francisco de Assis



Fonte: INEP (2017)

Resolução:

Tomemos um sistema de eixos OXY na Figura 2 da Figura 3.9, doravante para fins de resolução do exercício, tratada apenas por Figura 2, de modo que, o eixo vertical OY coincida com a altura da abóbada, e a origem do sistema seja o ponto de interseção do eixo OY com o solo.

Se x_1 e x_2 são raízes distintas da função quadrática que descreve as abóbadas parabólicas, então pela construção do sistema de eixos OXY e observando a Figura 2, temos que $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$, pois a parábola é simétrica em relação ao seu eixo de simetria

[6]Veja mais sobre propriedade refletora da parábola em Lima (2013, pp.138-144)

[7]Foi publicado em 2016 um artigo sobre a arquitetura da capela de São Francisco de Assis, dentre outros. Ver em Martins, Azevedo e Meirelles (2016).

(eixo OY). Logo, podemos escrever essa função da forma:

$$y = a(x+5)(x-5) \tag{3.19}$$

Ainda da Figura 2, pela propriedade de simetria da parábola, temos os pontos de coordenadas $(-4, 3)$ e $(4, 3)$. Substituindo essas coordenadas em (3.19), encontramos o valor do coeficiente $a = -\frac{1}{3}$, e a expressão em (3.19) pode ser reescrita como:

$$y = -\frac{1}{3}(x+5)(x-5). \tag{3.20}$$

Agora, observe na Figura 2 que, pela construção do eixo OXY, a altura da abóbada coincide com o valor de y do vértice da parábola de coordenadas $(0, y)$, com $y = H$. Assim, tomando $x = 0$ em (3.20), encontramos a altura procurada.

$$y = -\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot (-5) = \frac{25}{3}.$$

Portanto, a altura da abóbada da Figura 2 é $\frac{25}{3}$ metros.

Exemplo 2. ***Geometria***

a) Número de diagonais d de um polígono convexo de n lados: representado por uma função $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $d(n) = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$;

b) Área do círculo em função do raio r, representada por uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(r) = \pi r^2$;

c) Área do quadrado varia quando fazemos variar seu lado l, de modo que a área é representada por uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(l) = l^2$;

Exemplo 3. ***Física - Movimento uniformemente variado***

Uma das mais importantes e conhecidas aplicações da função quadrática está na Física, no estudo do movimento uniformemente variado (MUV), que fornece a posição de um objeto em um certo instante t através da função quadrática

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{3.21}$$

onde a é a aceleração do objeto, v_0 é a velocidade inicial no instante $t = 0$ e s_0 é a posição inicial do objeto. A constante a é a taxa de variação da velocidade, isto é, $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$.

No caso de um corpo em queda livre, a aceleração a será a aceleração da gravidade, representada pela letra g.

Situação 3.1. *Retirado de Dante (2013, p.133) - Um automóvel viaja com velocidade de 108 km/h (ou seja, 30 m/s) em um trecho retilíneo de uma estrada quando, subitamente, o motorista vê um acidente na pista. Entre o instante em que o motorista avista o acidente e aquele em que começa a frear, o carro percorre 20 m. Se o motorista frear o carro à taxa constante de 5 m/s^2 mantendo-o em sua trajetória retilínea, ele só evitará o acidente se o tiver percebido a, no mínimo, qual distância?*

Resolução:

Como o carro freia com aceleração constante de 5 m/s^2, podemos escrever sua aceleração como sendo $a = -5$ m/s^2. Assim, o tempo de frenagem será dado por:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{-30}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{-30}{-5} = 6 \text{ s}.$$

Como a distância percorrida é dada por $s(t) = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$, e temos que $s_0 = 20$ m, $v_0 = 30$ m/s, $t = 6$ s, $a = -5$ m/s^2, calculamos s:

$$s = s(6) = \frac{(-5)\cdot 6^2}{2} + 30 \cdot 6 + 20 = -90 + 180 + 20 = 110.$$

Portanto, o motorista só evitará o acidente se o tiver percebido a pelo menos 110 m.

Situação 3.2. *Adaptado de Dante (2013, p.134) - Partindo do repouso, um avião percorre a pista de decolagem com aceleração constante e atinge a velocidade de 360 km/h (100 m/s) em 20 s. Encontre o valor da aceleração desse avião, em m/s^2, e o comprimento mínimo da pista de decolagem para que o avião consiga decolar.*

Resolução:

Sejam $v_0 = 0$ e $s_0 = 0$, a velocidade e distância inicial do avião em repouso, no momento $t_0 = 0$ s. E sejam $v = 100$ m/s e $s(20)$ m, a velocidade e a distância do avião no instante $t = 20$ s, respectivamente, quando então o avião decola.

A aceleração pode ser calculada como:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{100}{20} = 5 \text{ m}/s^2$$

Utilizando a fórmula $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$ para o momento $t = 20$, temos:

$$s(20) = \frac{5 \cdot 20^2}{2} + 100 \cdot 20 = 1000 + 2000 = 3000 \text{ m} = 3 \text{ km}.$$

Portanto, o comprimento mínimo da pista para que o avião consiga decolar é de 3 km.

Exemplo 4. ***Física - Energia cinética***

A energia cinética (E_c) é a energia que um corpo de massa m, se movimentando a uma velocidade v possui. A energia cinética de um corpo é dada pela expressão:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.22}$$

Observe que, um corpo em repouso, $v = 0$, tem energia cinética igual a zero, pois não está em movimento. As unidades internacionais de medidas serão: J - joules - para a energia cinética, m/s^2 para a velocidade, e kg para a massa.

Situação 4.1. *Adaptado de Maximo e Alvarenga (1997, p.254) - De massa m = 1000 kg, um carro está se movendo com velocidade v = 30 m/s (correspondente a 108 km/h) e colide contra um muro rígido. Qual a energia cinética que o carro possuía antes da colisão?*

Resolução:

Substituindo as informações dadas m = 1000 kg, v = 30 m/s, em (3.22), temos:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (30)^2 = 450.000 \text{ J} = 45 \cdot 10^4 \text{ kJ}.$$

Exemplo 5. ***Química, Biologia e Geografia***

Situação 5.1. *Adaptado de Dante (2011, p.182) - O sequestro de carbono é a absorção de grandes quantidades de gás carbônico (CO_2) presentes na atmosfera. A forma mais comum* *de sequestro de carbono é naturalmente realizada pelas florestas. Na fase de crescimento, as árvores demandam uma quantidade muito grande de carbono para se desenvolver e acabam tirando esse elemento do ar. Esse processo natural ajuda a diminuir consideravelmente a quantidade de CO_2 na atmosfera: cada hectare de floresta em desenvolvimento é capaz de absorver nada menos que 150 a 200 toneladas de carbono. É por essas e outras que o plantio de árvores é uma das prioridades para a diminuição de poluentes na atmosfera terrestre. "A recuperação de áreas plantadas, que foram degradadas durante décadas pelo homem, é uma das possibilidades mais efetivas para ajudar a combater o aquecimento global", afirma Carlos Joly, do Instituto de Biologia da Unicamp.*

Fonte: Superinteressante, n. 247. São Paulo: Abril, 2007. Disponível em: <http://super.abril.com.br/ecologia/sequestro-carbono-447349.shtml>. Acesso em: 29 ago. 2010.

Consideremos que, em uma determinada região, a função f que fornece o acréscimo do sequestro anual de CO_2 da atmosfera (em milhões de toneladas) em função do tempo (em anos) seja dada por: $f(t) = -\frac{t^2}{135} + \frac{16}{27}t + \frac{85}{27}$.

Considere $t = 0$ para o ano 2000, $t = 1$ para 2001, e assim por diante. De acordo com essa fórmula, encontre o ano e o valor do acréscimo máximo do sequestro anual de carbono nessa região (em milhões de toneladas).

Resposta:

O sequestro de carbono é dado pela fórmula $f(t) = -\frac{t^2}{135} + \frac{16}{27}t + \frac{85}{27}$. O coeficiente $a = -\frac{1}{135}$ que acompanha a variável t^2 é negativo, logo, a concavidade da parábola será para baixo, e portanto, a função possui ponto de máximo, que pode ser encontrado utilizando (3.18).

Como $a = -\dfrac{1}{135}$, $b = \dfrac{16}{27}$ e $c = \dfrac{85}{27}$, temos que:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{16}{27}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{135}\right) \cdot \frac{85}{27} = \frac{256}{729} + \frac{340}{3645} = \frac{4}{9}.$$

Logo, podemos encontrar o ponto de máximo da parábola, que é o seu vértice:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{\frac{16}{27}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{135}\right)}, -\frac{\frac{4}{9}}{4 \cdot \left(-\frac{1}{135}\right)}\right) = \left(\frac{16}{27} \cdot \frac{135}{2}, \frac{4}{9} \cdot \frac{135}{4}\right) = (40, 15).$$

Portanto, quando $t = 40$, ou seja, no ano 2040, o sequestro de carbono será máximo e igual a 15 milhões de tonelada.

Exemplo 6. ***Número de partidas do Campeonato Brasileiro***

Principal competição de futebol do Brasil, o Campeonato Brasileiro de Futebol, ou Brasileirão ou Série A, é a liga brasileira de futebol profissional entre clubes do Brasil. Vinte clubes disputam o campeonato, que ocorre de maio a dezembro. Cada clube joga duas vezes contra os outros (uma partida será em seu estádio e a outra no estádio do seu adversário), totalizando 38 partidas. A pontuação é através de um sistema de pontos corridos, sendo concedido 3 pontos por vitória, um por empate e nenhum para derrota. A equipe que somar o maior número de pontos é a campeã. Os critérios de desempate variam de sequência de gols a número de vitórias.
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Campeonato_Brasileiro_de_Futebol>. Acesso em 22/03/2019

Situação 6.1. *Para programar as datas dos jogos é importante saber o total de jogos do campeonato. Por recorrência é possível dizer que o número de partidas p em função do número x de clubes participantes do torneio é dado pela função quadrática $p(x) = x^2 - x$. Qual o total de partidas do campeonato brasileiro?*

Resolução:

Como são 20 clubes participantes, substituindo em $p(x) = x^2 - x$, temos um total de 380 partidas, pois:

$$p(20) = 20^2 - 20 = 400 - 20 = 380 \text{ partidas.}$$

Exemplo 7. ***Lançamentos oblíquos e a trajetória de projéteis***

Balística é a ciência que se preocupa em estudar o movimento de corpos lançados ao ar livre, o que geralmente está relacionado ao disparo de projéteis por uma arma de fogo. Ao se estudar um projétil disparado por uma arma de fogo, pode-se separar seu movimento em três partes distintas: a balística interior, balística exterior e a balística terminal. [...] A balística exterior trata de estudar o que ocorre a partir do instante em que o projétil abandona a arma e o instante em que este atinge o alvo. Da simples análise física do assunto utilizando energia, podemos deduzir que a massa e a velocidade são muito importantes no desenvolvimento de uma arma e de um projétil, já que a energia cinética de um corpo é igual a $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, e como a energia que será transmitida ao alvo será igual à energia cinética, a maximização desta permitirá um melhor resultado. [...] Galileu e Newton demonstraram que a trajetória de qualquer corpo sob ação da gravidade era parabólica. Fonte: Algosobre ([20–?]).

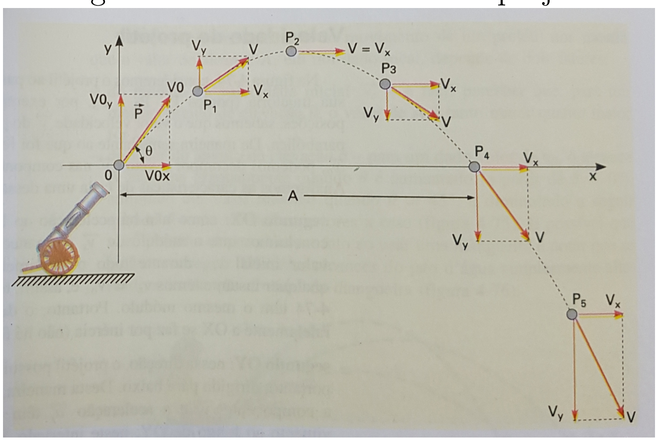
A trajetória que descreve o movimento de um projétil - uma bala de revólver, uma bola, uma pedra, um disco, etc - está contida em um plano, de modo que, após ser lançado por uma força inicial, fica sujeito apenas à força da gravidade que atua sobre ele. Nessa situação, a velocidade é expressa por um vetor, cuja direção e sentido indicam a direção e sentido do deslocamento.

Valendo-se de um conceito que não trataremos neste trabalho - componentes de um vetor - é possível provar que a trajetória de um projétil é uma parábola.

Tome no plano um sistema de coordenadas OXY, tal que a origem coincida com o ponto do lançamento, o eixo OY seja vertical e passe pela origem.

Considere um projétil arremessado com uma velocidade inicial $v_0 = (v_{0x}, v_{0y})$, formando um ângulo θ com a horizontal (eixo OX).

Figura 3.10: Movimento de um projétil



Fonte: Maximo e Alvarenga (1997, p.163)

Na Figura 3.10, a velocidade inicial v_0 foi decomposta em suas componentes v_{0x} e v_{0y}, de modo que:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

Não será feito aqui, mas é possível mostrar que, o alcance máximo do projétil ocorrerá quando $\theta = 45°$.

Como ao longo do eixo OX não existe aceleração, e ao longo do eixo OY, a aceleração é constante e igual a aceleração da gravidade g, de acordo com os movimentos uniforme e uniformemente variado, respectivamente, temos que, se $P = (x, y)$ é a posição do projétil no instante t, então:

$$x = v_{0x}t \tag{3.23}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.24}$$

Se $v_{0x} = 0$ então $x = v_{0x}t = 0$, para todo t. Então, $P = (0, y)$ e $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$. Logo, a trajetória do projétil é vertical.

Então suponhamos $v_{0x} \neq 0$. Substituindo em (3.24), o valor de t obtido em (3.23), obtemos:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2(v_{0x})^2}x^2. \tag{3.25}$$

Tomando $a = \dfrac{-g}{2(v_{0x})^2}$ e $b = \dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}$ em (3.25) obteremos a expressão $y = ax^2 + bx$, o que mostra que a trajetória de um projétil é uma parábola.

Situação 7.1. *Retirado de Leonardo (2013, p.130) - Durante uma situação de emergência, o capitão de um barco dispara um sinalizador para avisar a guarda costeira. A trajetória que o sinal luminoso descreve é um arco de parábola.*

A função que descreve o movimento do sinal luminoso é dada por $h(t) = 80t - 5t^2$, sendo h a altura do sinal, em metro, e t, o tempo decorrido após o disparo, em segundo.

a) Qual é a altura máxima que esse sinal luminoso pode atingir?

b) Quantos segundos se passam, após o disparo, até o sinal luminoso atingir a altura máxima?

Resolução letra a):

Encontrar a altura máxima que o projétil pode atingir equivale a encontrar o valor máximo da função $h(t)$, pois o coeficiente que acompanha o termo t^2 é negativo. Assim, basta encontrar o valor y_v do vértice:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{80^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 0}{4 \cdot (-5)} = \frac{-6400}{-20} = 320.$$

Logo, a altura máxima que o sinal luminoso pode atingir é 320 metros.

Resolução letra b):

O tempo necessário para que o sinal luminoso atinja a altura máxima é dado pelo valor x_v do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2 \cdot (-5)} = \frac{-80}{-10} = 8.$$

Logo o sinal luminoso atinge a altura máxima, oito segundos após o disparo.

Exemplo 8. ***Comércio e a busca pela maior receita***

Situação 8.1. *Retirado de Lima (2013, p.154) - Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500 g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita?*

Resolução:

A receita diária R pela venda da comida a 12 reais o quilo é dada por $R = 12x$, sendo x a quantidade de comida vendida, em quilos.

Dessa forma, a venda diária de comida, passa de 100 kg/dia para $100 - 5x$ kg/dia, e a receita diária, y, dada pelo produto do preço da comida pela quantidade de comida vendida, pode ser expressa por:

$$y = (12 + x)(100 - 5x) \Rightarrow y = -5x^2 + 40x + 1200.$$

Como o coeficiente de x^2 é negativo, o gráfico da função quadrática possui valor máximo no seu vértice, sendo o valor x_v do vértice o maior valor que o restaurante pode aumentar o preço do quilo, para que sua receita seja máxima.

Logo,

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-10} = 4.$$

Portanto, para que a receita seja a maior possível, o restaurante deve vender o quilo da comida a 12 + 4 = 16 reais.

3.3 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição 3.3.1. *Seja* $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$*, onde* $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$*. Chamamos de função exponencial de base* a*, a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que associa cada número real* x *a um número* a^x*.*

Notação:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a^x$$

São propriedades da função exponencial:

a) $a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$;

b) $a^1 = a \Rightarrow f(1) = a$;

c) $a^0 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$, isto é, f corta o eixo OY no ponto de ordenada 1;

d) Se $a > 1$, então $f(x) = a^x$ é crescente, ou seja, $x < y \Rightarrow a^x < a^y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

e) Se $0 < a < 1$, então $f(x) = a^x$ é decrescente, ou seja, $x < y \Rightarrow a^x > a^y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

f) f é ilimitada superiormente, pois:

- para $y = a^x$ com $a > 1$, quando x tende para $+\infty$, a^x tende para $+\infty$;
- para $y = a^x$ com $0 < a < 1$, quando x tende para $-\infty$, a^x tende para $+\infty$.

g) f é monótona injetiva;

h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$, $a > 0$ e $a \neq 1$ é sobrejetiva.

O número irracional $e = 2,7182818284...$, conhecido por número de Napier ou número de Euler, pode ser definido como o valor que a função $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ assume quando x se torna arbitrariamente grande, isto é,

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Quando a base a de uma função exponencial for o número irracional e, dizemos que $f(x) = e^x$ é a função exponencial natural. Usa-se, também, a notação $f(x) = exp(x)$.

De acordo com Lima (2013), os matemáticos preferem utilizar a notação $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$ para expressar funções exponenciais, por explicitar o valor inicial $f = f(0)$ e o coeficiente α ligado à taxa de crescimento de f.

Uma característica da função exponencial é a de transformar uma progressão aritmética x_i, $i = 1, 2, 3...$, de razão h, em uma progressão geométrica[8] $f(x_i)$, $i = 1, 2, 3...$ de razão a^h. De fato, suponha $f(x) = a^x$ e seja $x_i - x_{i-1} = h$. Então, se aplicarmos sobre os valores x_i a função f, temos:

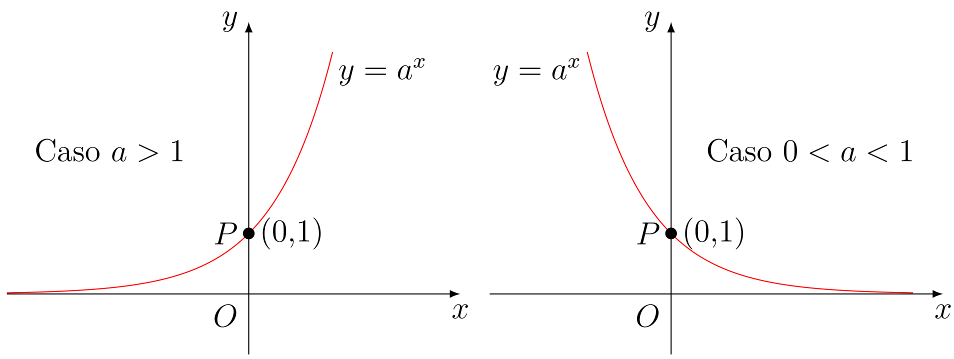
$$\frac{f(x_i)}{f(x_{i-1})} = \frac{a^{x_i}}{a^{x_{i-1}}} = a^{x_i - x_{i-1}} = a^h.$$

De modo que, a recíproca também é verdadeira. Se uma função f monótona injetiva transforma toda progressão aritmética x_i, $i = 1, 2, 3...$, em uma progressão geométrica $f(x_i)$, $i = 1, 2, 3...$, então f é uma função do tipo exponencial[9].

O **gráfico** da função exponencial $f(x) = a^x$, para $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, é representado acima do eixo OX, conforme Figura 3.11 .

Note que, o crescimento exponencial se caracteriza pelo fato de que, a variação da variável dependente é proporcional ao seu próprio valor.

Figura 3.11: Representação gráfica da função exponencial do tipo $f(x) = a^x$



Fonte: Elaborado pela autora, 2019

[8]Ver sobre Progressão Geométrica em Dante (2011, pp.303-316).

[9]Ver conexão entre função exponencial e progressão aritmética e geométrica em Lima *et al.* (2006, p.186).

A função exponencial é comumente utilizada na modelagem de situações de questões naturais, como por exemplo, o crescimento ou tamanho de populações, epidemias, estudo da meia-vida de um elemento radioativo, na datação de fósseis e artefatos, problemas de aprendizagem, e também em questões do sistema financeiro, como no cálculo de juros compostos ou montantes.

Exemplo 1. ***Sistema financeiro***

No que diz respeito a área de finanças, o uso da função exponencial permite o cálculo de juros compostos, aumentos ou descontos sucessivos, financiamentos, empréstimos e dívidas, sendo assim utilizados por bancos, e comércios em geral.

No regime de juros compostos, os juros são capitalizados, isto é, de acordo com Mathias e Gomes (2016, p.81), "o juro gerado pela aplicação será incorporado à mesma passando a participar da geração de juros no período seguinte", de modo que, os juros J e o montante M de um capital (soma do capital inicial e juros), aplicados a um capital inicial C_0 a uma taxa i, pelo prazo de t períodos, são dados pelas expressões:

$$J = C_0 \cdot [(1+i)^t - 1] \quad \text{e} \quad M = C_0 \cdot (1+i)^t.$$

Observe que tanto os juros J quanto o montante M sobre um capital inicial C_0 e uma taxa fixada i são dados em função do período t da aplicação, e poderiam ter suas equações reescritas utilizando a notação de função:

$$J(t) = C_0 \cdot [(1+i)^t - 1] \tag{3.26}$$

$$M(t) = C_0 \cdot (1+i)^t \tag{3.27}$$

Situação 1.1. *De acordo com a pesquisa realizada em março/2018 pelo Datafolha, encomendada pela Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (Anbima), a poupança é o investimento preferido dos brasileiros. De acordo com o site do Banco Central do Brasil, de 22/03/18 a 22/01/2019, a taxa de juros da poupança é 0,3715% a.m. Os rendimentos da poupança são creditados mensalmente, na data equivalente à data da aplicação (chamada data-base) e são isentos de imposto de renda. Fontes: ANBIMA ([2018?]) e BACEN ([2019])*

Supondo que a taxa de juros da poupança permaneça 0,3715% até 31/12/2019, podemos calcular qual será o valor de uma operação corrigida pela poupança de R$ 10.000,00, iniciada em 01/01/2019 e encerrada em 24/12/2019.

Resolução:

Como a data-base da operação é 01/01/2019, a poupança credita os rendimentos no dia 01 de cada mês do período de aplicação, de fevereiro à dezembro, sendo desconsiderado o período de 02/12 à 24/12/2019 pois a aplicação não completou o período mínimo para receber correção, o que aconteceria apenas em 01/01/2020. O valor ou capital inicial investido é de R$ 10.000,00, e o período do investimento é $t = 11$ meses.

Utilizando a função em (3.27):

$$c(t) = 10000 \cdot (1 + 0,003715)^{11} \approx \text{R\$ } 10.416,33$$

Portanto, aplicando na poupança, em 01/01/2019, uma quantia de R$ 10.000,00 com a taxa de juros atual de 0,3715% a.m., obtém-se ao final de 11 meses, o valor de R$ 10.416,33.

Situação 1.2. *Retirado de Mathias e Gomes (2016, p.122) - Um sítio é posto a venda por \$ 50.000,00 de entrada e \$ 100.000,00 em 1 ano. Como opção o vendedor pede \$ 124.000,00 a vista. Se a taxa de juros de mercado for de 2,5% a.m., qual a melhor alternativa?*

Resolução:

Se o valor a vista é \$ 124.000,00, ao dar uma entrada no valor de \$ 50.000,00 resta pagar o valor de \$ 74.000,00 daqui 1 ano.

No entanto, para a entrada de \$ 50.000,00 o vendedor exige um pagamento de \$ 100.000,00 daqui 1 ano. Devemos calcular então, utilizando (3.27), qual o valor foi financiado (C_0) à taxa $i = 0,025$ e $t = 12$. Assim,

$$100.000 = C_0 \cdot (1,025)^{12} \Rightarrow C_0 = 74.355,58$$

Logo, o valor atual do sítio, para a proposta de pagamento de \$ 50.000,00 de entrada e \$ 100.000,00 em 1 ano, seria de \$ 50.000,00 + \$ 74.355,58 = \$ 124.355,58.

Portanto, é melhor que o comprador pague à vista o valor de \$124.000,00, pois o valor atual da alternativa dada pelo vendedor é de \$ 124.355,58.

Situação 1.3. *Adaptado de Mathias e Gomes (2016, p.203) - Um carro está à venda por R$ 10.000,00 de entrada mais 24 prestações mensais de R$ 2.236,51. Como opção, a agência vende em 36 prestações mensais de R$ 1.613,16, sendo neste caso exigida uma entrada de R$ 12.000,00. Qual é a melhor alternativa, se a taxa de mercado for de 3% a.m., sabendo que, nessa situação, o valor à vista V de um produto, é dado pela equação*

$$V = E + P \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} \tag{3.28}$$

onde, E é o valor de entrada, P é o valor fixo das prestações, t é o número de períodos (todos os períodos são iguais) em que serão pagas as prestações, e i a taxa.

Resolução:

Alternativa 1: Entrada do carro no valor $E = 10.000$.

Nesse caso, $t = 24$, $P = 2.236,51$ e $i = 0,03$. Assim, utilizando a fórmula (3.28), temos:

$$V = E + P \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} = 10.000 + 2.236,51 \cdot \frac{(1,03)^{24} - 1}{0,03 \cdot (1,03)^{24}}$$

$$V = 10.000 + 2.236,51 \cdot 16,935542 = 47.876,51$$

Alternativa 2: Entrada do carro no valor $E = 12.000$.

Nesse caso, $t = 36$, $P = 1.613,16$ e $i = 0,03$. Assim, utilizando a fórmula (3.28), temos:

$$V = E + P \cdot \frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t} = 12.000 + 1.613,16 \cdot \frac{(1,03)^{36} - 1}{0,03 \cdot (1,03)^{36}}$$

$$V = 12.000 + 1.613,16 \cdot 21,832252 = 47.218,92$$

Portanto, a segunda alternativa é a melhor para o comprador, visto que representa menor valor à vista para o carro.

Exemplo 2. ***Biologia: Crescimento de uma população de bactérias***

De acordo com Aguiar, Xavier e Rodrigues (1988, pp.191-192), o crescimento de uma população de bactérias pode ser dado através de uma função exponencial, da forma $m(t) = m_0 \cdot e^{kt}$, onde $m(t)$ é a massa bacteriana no instante t, m_0 é a massa bacteriana inicial e k é a constante de crescimento.

Em algumas situações, pelo fato da divisão de uma célula gerar duas novas células, Aguiar diz ser mais conveniente utilizar a equação $N = N_0 \cdot 2^x$, onde N é o número de bactérias após x gerações e N_0 é o número inicial de bactérias.

No estudo de crescimento de população de bactérias, considera-se o tempo médio de geração, isto é, o tempo necessário para que a população inicial de bactérias se duplique. Assim, se T é o tempo médio de geração da população, e t é o tempo que essa população leva para crescer de N_0 até N, temos $\frac{t}{T} = x$.

Situação 2.1. *Retirado de Dante (2011, p.239) - O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38.400 bactérias?*

Resolução:

$$N(t) = 1.200 \cdot 2^{0,4t} = 38.400 \Rightarrow 2^{0,4t} = \frac{38.400}{1.200} \Rightarrow 2^{0,4t} = 32$$
$$2^{0,4t} = 2^5 \Rightarrow 0,4t = 5 \Rightarrow t = 12,5 \text{ h}$$

Portanto, a cultura terá 38.400 bactérias após 12 h e 30 minutos.

Exemplo 3. ***Geografia: Crescimento populacional***

Situação 3.1. *Retirado de Dante (2013, p.171) - A expressão $P(t) = k \cdot 2^{0,05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t, em anos. Se em 1990 essa cidade tinha 300.000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano 2000?*

Resolução:

De acordo com o problema, $P(1990) = 300.000$. então, utilizando a função dada $P(t) = k \cdot 2^{0,05t}$, temos:

$$300.000 = k \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} \Rightarrow k \cdot 2^{99,5} = 300.000 \Rightarrow k = \frac{300.000}{2^{99,5}}.$$

Substituindo o valor de k na função, temos $P(t) = \frac{300.000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05t}$.

Para determinar a população esperada no ano 2000, basta encontrarmos o valor de $P(2000)$:

$$P(2000) = \frac{300.000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,05 \cdot 2000} = \frac{300.000}{2^{99,5}} \cdot 2^{100} = 300.000 \cdot 2^{0,5} \approx 424.264$$

Portanto, no ano 2000, espera-se que a população seja, aproximadamente, de 424 mil habitantes.

Exemplo 4. ***Psicologia: Curva de Aprendizagem***

Situação 4.1. *Adaptado de Iezzi et al. (2001, p.182) - Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão*

$$Q = 700 - 400 \cdot e^{-0,5t}$$

em que Q é a quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário, t é o número de meses de experiência. Considere $e = 2,7183$.

De acordo com essa expressão, compare a quantidade de peças que se deverá produzir mensalmente entre um funcionário sem experiência e um funcionário com 2 meses de experiência.

Resolução:

No caso do funcionário sem experiência, $t = 0$. Utilizando a expressão dada, temos que $Q = 700 - 400 = 300$.

O funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir, de acordo com a expressão dada, 552 peças, pois

$$Q = 700 - 400 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} = 700 - 400 \cdot 2,7183^{-1} = 700 - 147,15 = 552,85.$$

Portanto, de acordo com a Curva de Aprendizagem dada, um funcionário com 2 meses de experiência produzirá 252 peças a mais que um funcionário ainda sem experiência.

Exemplo 5. ***Radioatividade: meia-vida***

Radioatividade é a propriedade que os núcleos atômicos instáveis possuem de emitir partículas e radiações eletromagnéticas para se transformarem em núcleos mais estáveis. Este fenômeno é chamado de desintegração radioativa ou reação de decaimento, e só termina com a estabilização do núcleo atômico.

Chamamos de *meia-vida* ou período de semidesintegração, o tempo que uma substância leva para que metade de seus átomos se desintegrem. De modo que, a cada período transcorrido, a quantidade dos átomos é reduzida à metade da anterior. Esse processo se repete, infinitamente, até que a massa do elemento radioativo seja reduzida a quase zero. No entanto, esses átomos nunca sumirão e nem sua radiação será zero.

A fórmula para cálculo do decaimento é:

$$M = \frac{m_0}{2^n} \tag{3.29}$$

onde, M é a massa após alguns números de meia-vida, m_0 é a massa inicial da amostra, n é o número de meia-vidas.

A fórmula para o cálculo de material radioativo N decorridos um tempo t é:

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{p}} \tag{3.30}$$

onde, N_0 é a quantidade inicial do material radioativo, t é o tempo decorrido, p é o valor da meia-vida do material radioativo.

Se tomarmos a constante $k = \frac{1}{p}$, podemos reescrever a equação em (3.30), como:

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-kt}. \tag{3.31}$$

A meia-vida de elementos radioativos é importante para geólogos, na datação de rochas, para cientistas e arqueólogos, na datação de fósseis e outros materiais, em bombas atômicas para efeito radioativo, na medicina, através de exames de imagem, como PET-CT, para identificação de células tumorais malignas, onde é importante saber o tempo de ação de um determinado elemento no corpo de um indivíduo, dentre outras aplicações.

Ressaltamos que algumas das situações abaixo podem empregar o uso de propriedades logarítmicas que serão vistas na próxima seção.

Situação 5.1. *Adaptado de UNIFESP (2004) - O isótopo* $^{32}_{15}P$ *é utilizado para localizar tumores no cérebro e em estudos de formação de ossos e dentes. Uma mesa de laboratório foi contaminada com 100mg desse isótopo, que possui meia-vida de 14,3 dias. Encontre o tempo mínimo, expresso em dias, para que a radioatividade caia a 0,1% do seu valor original.*

Resolução:

A massa radioativa final será $0,1\% \cdot 100$ mg $= 0,1$ mg. Através da fórmula do decaimento, em (3.29), obtemos o número n de períodos de meia-vida. Assim,

$$0,1 = \frac{100}{2^n} \Rightarrow 2^n = \frac{100}{0,1} \Rightarrow 2^n = 1000 \Rightarrow log2^n = log1000 \Rightarrow n \cdot log2 = 3$$

Considerando $log2 = 0,3$, temos:

$$0,3n = 3 \Rightarrow n = \frac{3}{0,3} \Rightarrow n = 10.$$

Logo, é necessário 10 períodos de meia-vida para que a massa radioatividade caia a 0,1% da original, então o tempo para que esse decaimento ocorra é aproximadamente 143 dias ($14,3 \times 10 = 143$ dias).

Outro modo:

Utilizando a equação em (3.30), sabendo que $N(t) = 0,001 \cdot N_0$ e considerando $\log 2 = 0,3$, temos:

$$0,001 \cdot N_0 = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{14,3}} \Rightarrow 0,001 = 2^{-\frac{t}{14,3}} \Rightarrow \log 0,001 = -\frac{t}{14,3} \cdot \log 2$$
$$-t = 14,3 \cdot \frac{\log 10^{-3}}{\log 2} = -42,9 \cdot \frac{\log 10}{\log 2} = -\frac{42,9}{\log 2} \Rightarrow t = 143 \text{ dias.}$$

Situação 5.2. *Adaptado de Dante (2013, p.172) - O antibiótico acetilcefuroxima apresenta meia-vida de 3 horas. Se uma pessoa tomou 50 mg desse medicamento, qual é a quantidade de antibiótico ainda presente no organismo após 12 horas de sua ingestão? E após t horas de sua ingestão?*

Resolução:

Em 12 horas ocorrem 4 períodos de meia-vida do antibiótico (pois a meia-vida é de 3 horas). Assim, utilizando a fórmula do decaimento (3.29):

$$M = \frac{50}{2^4} = \frac{50}{16} = 3,125 \text{ mg.}$$

Como a taxa de variação em intervalos de tempo de mesma duração é sempre a mesma, podemos utilizar a função exponencial $N(t) = N_0 \cdot a^t$ para calcular a quantidade de antibiótico presente no organismo após t horas. Como $N_0 = 50$ e $N(3) = 25$, pois o período de meia-vida do antibiótico é de 3 horas, temos que:

$$N(3) = N(0) \cdot a^3 \Rightarrow 25 = 50 \cdot a^3 \Rightarrow a^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2^{-\frac{1}{3}}$$

Portanto, após t horas da ingestão do antibiótico, temos que a quantidade de antibiótico restante no organismo pode ser encontrado através da fórmula $N(t) = 50 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$.

Outro modo:

Utilizando (3.30), para $t = 12$ e $p = 3$, temos:

$$N(12) = 50 \cdot 2^{-\frac{12}{3}} = 50 \cdot 2^{-4} = \frac{50}{16} = 3,125 \text{ mg}.$$

Novamente utilizando (3.30), temos que, após t horas de ingestão do antibiótico, a quantidade remanescente no organismo será dado por $N(t) = 50 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$.

Exemplo 6. ***O Carbono 14 e a datação de artefatos ou organismos***

O carbono 14, indicado por ^{14}C, é um isótopo radioativo presente em todos os seres ou organismos vivos, em proporção sempre constante, e possui meia-vida de 5.730 anos. Quando os organismos morrem, a proporção de ^{14}C decai por meio da desintegração, a uma taxa constante de 0,01209% ao ano.

Por esta razão, para determinar a idade de fósseis, ou outro organismo vivo, utiliza-se a datação do ^{14}C como parâmetro de comparação entre as atividades radioativas do ^{14}C no organismo vivo e morto, medindo a quantidade de ^{14}C remanescente nesses organismos.

A atividade radioativa do ^{14}C decai segundo a função exponencial $A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$, onde A_0 é atividade radioativa no organismo vivo, e t o tempo decorrido em anos após a morte.

Situação 6.1. *Adaptado de UNICAMP (2000, p.74) - Poderia um artefato de madeira encontrado no ano 2000 d.C., cujo teor determinado de ^{14}C corresponde a 25% daquele* *presente nos organismos vivos, ser oriundo de uma árvore cortada no período do Antigo Egito (3200 a.C. a 2300 a.C.)? Justifique.*

Resolução:

Para que o organismo tenha 25% do teor de ^{14}C de um organismo vivo, é necessário que tenha ocorrido o período correspondente a duas meias-vidas do ^{14}C. Ou seja, um artefato de madeira com teor de ^{14}C igual a 25% do presente nos seres vivos deve ter sido produzido há 11.460 anos. Portanto, esse objeto foi produzido por volta do ano 9460 a.C., antes do período do Antigo Egito.

Situação 6.2. *Adaptado de Dante (2013, p.172) - Suponha que um fóssil encontrado em uma caverna foi levado ao laboratório para ter sua idade estimada. Verificou-se que emitia 7 radiações de* ^{14}C *por grama/hora. Sabendo que o animal vivo emite 896 radiações por grama/hora, encontre a idade estimada desse fóssil, em anos.*

Resolução:

Seja $A(t) = 7$ a atividade radioativa após um tempo t, em anos, $A_0 = 896$ a atividade radioativa no animal vivo. Assim,

$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow 7 = 896 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

$$7 = \frac{t}{5730} \Rightarrow t = 40.110 \approx 40 \text{ mil anos.}$$

3.4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Definição 3.4.1. *Seja* $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. *Chamamos de função logarítmica de base a, a função* $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *que associa a cada número real* x *o número real* $\log_a x$, *chamado logaritmo de* x *na base* a.

Notação:

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log_a x$$

Indicaremos o número real y como o logaritmo de x na base a pela expressão $y = \log_a x$, onde:

- a é a base do logaritmo; ;
- x é o logaritmando (ou antilogaritmo);
- y é o logaritmo.

Portanto, são equivalentes as afirmações:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

A principal característica dos logaritmos é transformar produtos em soma. Dessa forma, decorre da definição a propriedade fundamental dos logaritmos, conhecida como *logaritmo do produto*:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \tag{3.32}$$

De fato, se $\log_a x = u$ e $\log_a y = v$, então $a^u = x$ e $a^v = y$. Segue que $a^u \cdot a^v = a^{u+v} = xy \Leftrightarrow u + v = \log_a xy$. Logo, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

Outras propriedades dos logaritmos são:

(a) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$;

(b) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$;

(c) $\log_a (a)^x = x$, pois $a^x = a^x$;

(d) $a^{\log_a x} = x$, pois segue da definição que $y = log_a x \Leftrightarrow a^y = x$;

(e) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, pois $\log_a x = \log_a y \Rightarrow a^{\log_a y} = x \Rightarrow y = x$;

(f) *Logaritmo de um quociente:* $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
Demonstração: Se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$, então $x = a^u$ e $y = a^v$. Logo, $\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$. Daí, $\log_a(\frac{x}{y}) = u - v = \log_a x - \log_a y$;

(g) *Logaritmo de uma potência:* $\log_a x^m = m \cdot \log_a x$;
Demonstração: Se $u = \log_a x^m$ e $v = \log_a x$, então $x^m = a^u$ e $x = a^v$. Elevando $x = a^v$ à potência m, temos $x^m = a^{mv}$. Logo, $a^u = a^{mv} \Rightarrow u = m \cdot v$. Daí, $\log_a x^m = m \cdot \log_a x$;

(h) *Fórmula de mudança de base:* $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$.

Demonstração: Se $u = \log_b x$, $v = \log_a b$ e $w = \log_a x$, então $x = b^u$, $b = a^v$ e $x = a^w$. Logo, $b^u = a^w$ e $b^u = (a^v)^u \Rightarrow a^w = a^{uv} \Rightarrow w = u \cdot v$. Daí, $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$.

A propriedade fundamental dos logaritmos é transformar produtos em soma, como demonstrado em (3.32).

Uma vez que a função logarítmica é a inversa da função exponencial[10] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$ decorre que, uma função logarítmica transforma toda progressão geométrica em uma progressão aritmética.

Diversas leis matemáticas e fenômenos naturais e sociais são relacionados com os logaritmos.

O número natural e está relacionado a fenômenos cuja natureza da variação de um grandeza (crescimento/decrescimento) em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante.

Ao conjunto de todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a, com $a \in R_+^* - \{1\}$, chamamos de *sistema de logaritmos de base a*.

Os sistemas de logaritmos mais utilizados são os de base 10, chamados *logaritmos decimais* ou *logaritmos ordinários* e são representados por $\log x$, os de base 2, chamados *logaritmos binários*, e os de base e, chamados *logaritmos naturais* ou *logaritmos neperianos*, representados por $\ln x$. No entanto, os logaritmos de Napier tinham valores diferentes deste.

Logo, por definição de *logaritmo natural*, temos:

$$\ln x = \log_e x.$$

Da definição de logaritmo natural, seguem as propriedades:

a) $\ln e = 1$, pois, $\ln e = \log_e e = 1$;

b) $\ln 1 = 0$, pois, $\ln e = \log_e 1 = 0$;

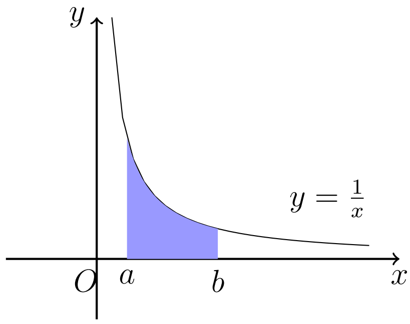
c) $\ln e^n = n$, pois, $\ln e^n = \log_e e^n = n \cdot \log_e e = n$.

Sejam H o ramo positivo da hipérbole $xy = 1$, isto é, H é o ramo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, para $x \in \mathbb{R}_+^*$, e ainda, a e b números reais positivos, com $a < b$. Chamamos

[10]Ver sobre a inversa da função exponencial em Lima (2013, p.192)

de *área da faixa* H_a^b a região do plano limitada por H, o eixo das abscissas e pelas retas verticais $x = a$, $x = b$.

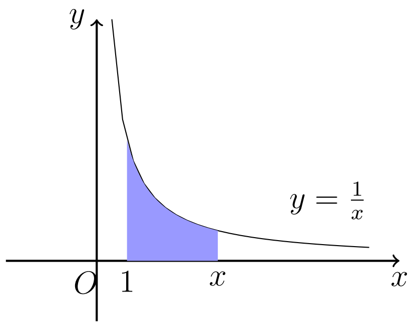
Figura 3.12: Representação gráfica da faixa H_a^b



Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Geometricamente, definimos o *logaritmo natural* de x como sendo a área da faixa H_1^x, com $x \in \mathbb{R}_+^*$, isto é, $\ln x = H_1^x$.

Figura 3.13: Representação gráfica da faixa H_1^x



Fonte: Elaborado pela autora, 2019

Observe que $\ln x$ não está definido quando $x < 0$. Além disso:

a) $\ln 1 = 0$ pois, quando $x = 1$, H_1^1 é um segmento de reta, portanto, tem área igual a zero;

b) $\ln x > 0$ se $x > 1$;

c) $\ln x < 0$ se $0 < x < 1$.

O número real positivo tal que $\ln x = 1$ é o número irracional e, cujo valor aproximado com 12 algarismos decimais é 2,718281828459. Assim,

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Para o estudo da representação gráfica da função logarítmica, seja a função $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $y = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, cujo gráfico está representado na Figura 3.14. Temos que:

a) A função g é **crescente** quando $a > 1$, isto é, se $0 < x < y$, então $\log_a x < \log_a y$, $\forall x, y \in D(g)$;

b) A função g é **decrescente** quando $0 < a < 1$, isto é, se $0 < x < y$, então $\log_a x > \log_a y$, $\forall x, y \in D(g)$;

c) Se $x = 1 \Rightarrow y = \log_a 1 = 0$, ou seja, o gráfico passa pelo ponto $P(1, 0)$;

d) Se $a, x > 1$ ou $0 < a, x < 1$, então $\log_a x > 0$;

e) Se $a > 1$ e $0 < x < 1$ ou, $0 < a < 1$ e $x > 1$, então $\log_a x < 0$;

f) A função g é injetora, pois $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$;

g) A função g é sobrejetora, pois para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $y = \log_a x$;

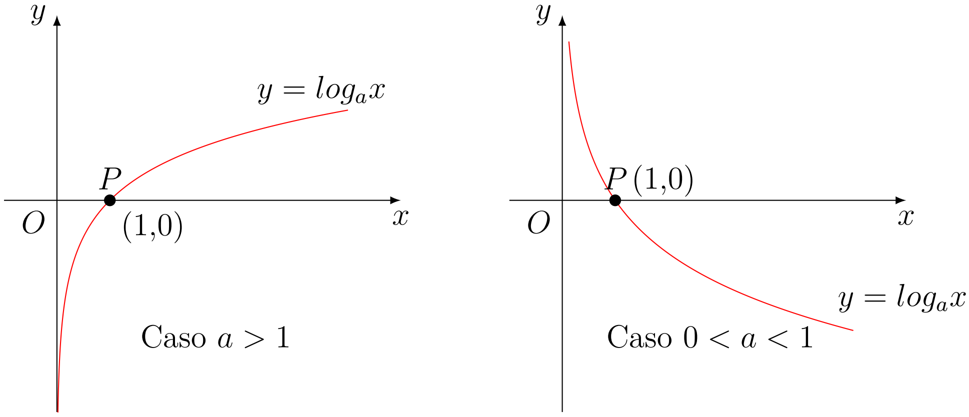
h) A função g é ilimitada superiormente, pois:

- para $y = \log_a x$ com $a > 1$, quando x tende para $+\infty$, $\log_a x$ tende para $+\infty$;
- para $y = \log_a x$ com $0 < a < 1$, quando x tende para 0, $\log_a x$ tende para $+\infty$.

i) A função g é ilimitada inferiormente, pois:

- para $y = \log_a x$ com $a > 1$, quando x tende para 0, $\log_a x$ tende para $-\infty$;
- para $y = \log_a x$ com $0 < a < 1$, quando x tende para $+\infty$, $\log_a x$ tende para $-\infty$.

Figura 3.14: Representação gráfica da função logarítmica do tipo $f(x) = \log_a x$



Fonte: Elaborado pela autora, 2019

A função logarítmica pode ser encontrada em situações, muitas vezes, distante da rotina de um estudante de Ensino Médio, embora esteja presente na modelagem de diversos fenômenos físicos, químicos, dentre outros. Seguem abaixo alguns exemplos.

Exemplo 1. ***Geologia: Magnitude dos terremotos***

A **escala Richter**, também conhecida como **escala de magnitude local**, é um sistema de medição criado em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg para quantificar a magnitude ou intensidade absoluta, em graus, de um terremoto, de acordo com a energia liberada na forma de ondas sob a superfície da terra, cuja medição é feita por aparelhos chamados sismógrafos. A intensidade varia conforme a profundidade do epicentro (ponto de maior liberação de energia). Os grandes tremores são classificados a partir do grau 7.

A escala Richter é uma escala logarítmica de base 10, em que cada aumento de uma unidade na magnitude representa um aumento de 10 unidades na amplitude.

A magnitude M de um terremoto pode ser calculada pela fórmula:

$$M = \log A - \log A_0 \tag{3.33}$$

onde, M é a magnitude do terremoto, A é a amplitude máxima (em milímetros) medida no sismógrafo, e A_0 é uma amplitude de referência.

Para comparar as magnitudes M_1 e M_2 de dois terremotos em função de suas respectivas amplitudes, devemos ter:

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 &= (\log A_1 - \log A_0) - (\log A_2 - \log A_0) \\ M_1 - M_2 &= \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Há também uma fórmula para o cálculo da magnitude M, conhecidas a energia E, em kWh, liberada no terremoto, e a constante $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \tag{3.35}$$

De modo que, aumentando em uma unidade a intensidade de um terremoto, a energia liberada aumenta $10^{\frac{3}{2}} \approx 31,6$ kWh.

A escala Richter porém, foi substituída pela **Escala de Magnitude de Momento**, a MMS, em 1979, introduzida por Thomas C. Haks e Hiroo Kanamori, como escala para medição de magnitudes dos grandes terremotos. A MMS é utilizada para medir a magnitude dos grandes terremotos modernos, baseada no momento do terremoto que é igual a resistência da Terra multiplicada pela quantidade média de deslocamento da falha e o tamanho da área que se deslocou.

A MMS é uma escala logarítmica e o cálculo da magnitude do momento M_w é dado por:

$$M_w = \frac{2}{3}\log M_0 - 10,7, \tag{3.36}$$

onde w é o trabalho mecânico realizado, e M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado através dos sismogramas), em dina.centímetro ou 10^{-7} Newton.metro.

Situação 1.1. *Considerando a escala Richter:*

a) O que podemos afirmar sobre a intensidade de um tremor nível 9 em relação a um tremor de nível 6?

b) Encontre a relação entre as energias E_1 e E_2 liberadas por um terremoto de magnitude 9 e outro de magnitude 6, respectivamente.

Resolução letra a):

Como a escala Richter é uma escala logarítmica de base 10, um terremoto de intensidade 9 é 1000 vezes mais forte que um terremoto de intensidade 6 pois, se $M_1 = 9$, $M_2 = 6$, A_1 e A_2 são as magnitudes e amplitudes máximas dos dois terremotos, respectivamente, então

$$M_1 - M_2 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Rightarrow 9 - 6 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Rightarrow 3 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Rightarrow 10^3 = \frac{A_1}{A_2}$$

$$A_1 = 1000 \cdot A_2$$

Resolução letra b):

Usando a equação (3.35) e o valor da constante $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh, temos:

- Terremoto de magnitude $M_1 = 9$ e energia E_1:

$$9 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_1}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 13,5 = \log\left(\frac{E_1}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 10^{13,5} = \frac{E_1}{7 \cdot 10^{-3}}$$

$$E_1 = 7 \cdot 10^{10,5} kWh$$

- Terremoto de magnitude $M_2 = 6$ e energia E_2:

$$6 = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E_2}{7\cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 9 = \log\left(\frac{E_2}{7\cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 10^9 = \frac{E_2}{7\cdot 10^{-3}}$$
$$E_2 = 7\cdot 10^6 kWh$$

Portanto, a razão entre as energias E_1 e E_2 dos terremotos de magnitudes $M_1 = 9$ e $M_2 = 6$, nessa ordem, é igual a $10^{4,5}$.

Exemplo 2. ***Acústica: Intensidade sonora***

Importante para músicos, área da saúde, construção civil, o conceito de intensidade sonora estabelece, dentre outras coisas, os limites mínimo e máximo da intensidade de um som que o ouvido humano consegue ouvir, fazendo com que seja utilizado, dentre outras aplicações, em leis do meio ambiente para determinar o nível máximo de som permitido durante os períodos do dia, como por exemplo, no Art. 5º da LEI Nº 10.700 de 09/03/2011, da Prefeitura de Uberlândia.

A intensidade de um som, medido em Watt por m^2, refere-se à quantidade de energia, em joules, (J), transferida em um segundo por uma onda sonora na área padrão (1 m^2). Comumente, nas práticas musicais, os níveis de intensidade são divididos em oito níveis, cuja redução de um nível ao outro se dá pelo fator 10. Assim, para um som de intensidade I_1, um grau maior que um som de intensidade I_2, temos que, a razão de intensidade entre eles será:

$$\frac{I_1}{I_2} = 10 \quad ou \quad \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 1.$$

Dizemos que a razão de intensidade é de um bel, se $\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 1$, ou 10 decibéis se $10\cdot\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 1$.

Define-se nível sonoro ou nível de intensidade de um som NS, em decibéis, comparando uma intensidade I com uma intensidade padrão $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2:

$$NS = 10\cdot\log\left(\frac{I}{I_o}\right) \tag{3.37}$$

A intensidade padrão ou intensidade zero $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2, corresponde ao grau dinâmico imediatamente abaixo da menor intensidade audível pelo ser humano, em condições ideais na escuta de um som de 1.000 Hz.

Situação 2.1. *Retirado de Leonardo (2013, p.201) - Quantos decibéis terá um som cuja intensidade equivale a* $100 \cdot I_0$*?*

Resolução:

Como foi dado $I = 100 \cdot I_0$, temos que:

$$d = 10 \cdot \log\left(\frac{100 \cdot I_0}{I_o}\right) = 10 \cdot \log 100 = 10 \cdot \log 10^2 = 20 \cdot \log 10 = 20$$

Portanto, um som cuja intensidade equivale a $100 \cdot I_0$ terá 20 decibéis.

Situação 2.2. *Retirado de Paiva (2013, p.249) - A máxima intensidade suportável pelo ouvido humano é de 1 W/m*^{2}*. Encontre o nível sonoro S de uma fonte que emite um som com a maior intensidade que o ouvido humano pode suportar, sem dor.*

Resolução:

Para $I = 1$, temos:

$$S = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) \Rightarrow S = 10 \cdot \log 10^{12} \Rightarrow S = 10 \cdot 12 \cdot \log 10 \Rightarrow S = 120 \text{ dB}.$$

Portanto, o nível sonoro máximo que o ouvido humano pode suportar, sem dor, é de 120 db.

Exemplo 3. ***Química: Escala pH***

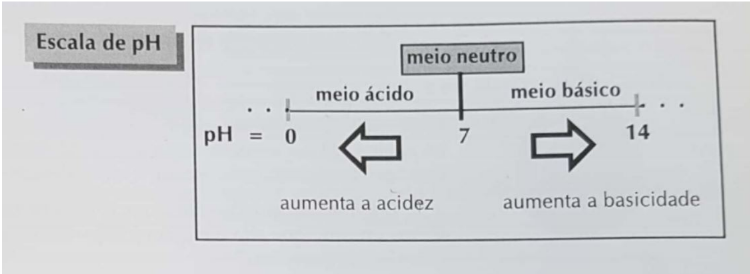
Importante como parâmetro de qualidade de produtos de indústrias de diversas naturezas (químicas, alimentícias, bebidas, farmacêuticas), como fator de interferência no solo e, consequentemente, na produtividade de safras para o setor agrícola, como um indicador na saúde através da análise do sangue de um indivíduo, o pH (potencial hidrogeniônico) é uma escala de pH usada para expressar a acidez ou a basicidade de uma solução aquosa. O valor do pH varia de 0 a 14 e é dado pela fórmula

$$pH = -\log[H^+] \tag{3.38}$$

onde, $[H^+]$ é a concentração de íons de hidrogênio em mol/l.

Assim, o valor do pH aumenta à medida que a concentração de íons hidrogênio decresce. A água, por exemplo, é uma solução neutra, pois seu pH é 7.

Figura 3.15: Escala de pH



Fonte: Sisterolli (1997)

Situação 3.1. *Retirado de Iezzi et al. (2007, p.109) - O suco gástrico, produzido no estômago, é responsável pela digestão de alimentos e seu pH oscila entre 1,0 e 3,0.*

a) *Encontre os limites para a concentração de íons H^+ do suco gástrico.*

b) *Encontre o pH do suco gástrico se a concentração hidrogeniônica for* $4 \cdot 10^{-2}$. *Considere* $\log 2 \approx 0,3$.

Resolução letra a):

A concentração de íons de hidrogênio, em mol/l, no suco gástrico varia de 0,001 a 0,1, pois:

$$pH = 1 \Rightarrow -\log[H^+] = 1 \Rightarrow \log[H^+] = -1 \Rightarrow [H^+] = 10^{-1}$$
$$pH = 3 \Rightarrow -\log[H^+] = 3 \Rightarrow \log[H^+] = -3 \Rightarrow [H^+] = 10^{-3}$$

Resolução letra b):

O suco gástrico com concentração de hidrogeniônica de $4 \cdot 10^{-2}$ mol/l possui pH = 1,4 (ácido), pois:

$$pH = -\log[H^+] = -\log(4 \cdot 10^{-2}) = -(\log 4 + \log 10^{-2}) = -(\log 2^2 + \log 10^{-2})$$
$$pH = -2\log 2 + 2\log 10 = -2\log 2 + 2 = -2 \cdot 0,3 + 2 = 1,4.$$

Situação 3.2. *De acordo com Leonardo (2013, p.190), o pH do sangue humano pode ser calculado utilizando a fórmula de Henderson-Hasselbalch dada por* $pH = 6,1 + \log\left(\frac{B}{C}\right)$, *onde B é a concentração de bicarbonato (substância básica ou alcalina, em mmol/l), e C é a concentração de ácido carbônico (substância ácida, em mmol/l).*

Calcule o pH do sangue de uma pessoa cuja concentração de bicarbonato é 25 mmol/l e de ácido carbônico é 2 mmol/l. Considere $\log 5 \approx 0,699$ *e* $\log 2 \approx 0,301$.

Resolução:

$$pH = 6,1 + \log\left(\frac{B}{C}\right) = 6,1 + \log\left(\frac{25}{2}\right) = 6,1 + \log 25 - \log 2$$
$$pH = 6,1 + \log 5^2 - \log 2 = 6,1 + 2 \cdot 0,699 - 0,301$$
$$pH = 7,197$$

Situação 3.3. *Retirado de Paiva (2013, p.234) - O suco de limão possui pH 2, e o suco de tomate possui pH 4. A concentração de íons H^+, em mol/l, no suco de limão equivale a quantas vezes essa concentração no suco do tomate?*

Resolução:

Indicando por x e y as concentrações de íons H^+, em mol/l, nos sucos de limão e tomate, respectivamente, temos:

$$2 = -\log x \Rightarrow x = 10^{-2}$$
$$4 = -\log y \Rightarrow y = 10^{-4}$$

Assim, a concentração de íons H^+ em mol/l no suco de limão equivale a 100 vezes essa concentração no suco de tomate.

Exemplo 4. ***Juros Compostos***

No estudo das aplicações de funções exponenciais utilizamos a função $M(t) = C_0 \cdot (1+i)^t$, em (3.27), para calcular o capital $M(t)$ obtido após a aplicação de um capital inicial C_0, durante um tempo t, a uma taxa de juros i.

No entanto, e se quiséssemos saber quanto tempo seria necessário para que uma aplicação inicial C_0, ou uma dívida inicial C_0, a uma taxa de juros i, fosse triplicada, por exemplo? Para estimar o tempo procurado devemos utilizar os conhecimentos sobre função logarítmica na resolução da fórmula em (3.27).

Situação 4.1. *Para que um investidor triplique o valor inicial de R$10.000,00 aplicado na poupança, a taxa de 0,3715% a.m., qual o tempo de investimento necessário?*

Resolução:

Serão necessários 297 meses (ou 24 anos e 9 meses) para que o capital inicial de R$10.000,00 triplique a uma taxa de juros mensal de 0,3715%, pois, utilizando (3.27) temos:

$$30000 = 10000 \cdot (1 + 0,003715)^t \Rightarrow 3 = 1,003715^t \Rightarrow \log 3 = \log (1,003715)^t$$

$$0,477 = t \cdot \log 1,003715 \Rightarrow 0,477 = 0,00161t \Rightarrow t = 296,27 \Rightarrow t \approx 297 \text{ meses}$$

Exemplo 5. ***Crescimento populacional***

Vimos no estudo das aplicações das funções exponenciais, que o crescimento de uma população de bactérias pode ser dado por $N = N_0 \cdot 2^x$, com $x = \frac{t}{T}$, onde N é o número de bactérias após x gerações, N_0 é o número inicial de bactérias, t é o tempo que a população leva para crescer de N_0 até N, e T é o tempo médio de geração. Tomando o logaritmo natural de ambos os lados da equação temos:

$$\ln N = \ln N_0 + \ln 2^x = \ln N_0 + x \cdot \ln 2 \Rightarrow \frac{\ln N - \ln N_0}{ln 2} = x \tag{3.39}$$

Fazendo a substituição $x = \frac{t}{T}$, temos:

$$\frac{\ln N - \ln N_0}{ln 2} = \frac{t}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{\ln N - \ln N_0}{t} = \frac{\ln 2}{T} \tag{3.40}$$

Situação 5.1. *Adaptado de Aguiar, Xavier e Rodrigues (1988, p.194) - Se uma cultura de bactérias contendo* $7 \cdot 10^5$ *bactérias, desenvolvendo-se em um meio adequado, após 5 horas, apresenta uma população de* $6,8 \cdot 10^7$ *bactérias, qual foi o tempo médio de geração neste meio?*

Resolução:

Temos $N_0 = 7 \cdot 10^5$, $N = 6,8 \cdot 10^7$, $t = 300$ e queremos determinar o valor de T em minutos. Assim, utilizando (3.40), temos:

$$\frac{\ln (6,8 \cdot 10^7) - \ln (7 \cdot 10^5)}{300} = \frac{\ln 2}{T} \Rightarrow \frac{18,035 - 13,4588}{300} = \frac{0,6931}{T}$$

$$\frac{4,5762}{300} = \frac{0,6931}{T} \Rightarrow T = \frac{0,6931}{0,01525} = 45,44$$

Portanto, o tempo médio para que a população de bactérias se duplique nesse meio é de 45,44 minutos ou 45 minutos e $26,4$ segundos.

Exemplo 6. ***Desintegração Radioativa***

Do nosso estudo de aplicações das funções exponenciais, vimos que a meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Com o auxílio do logaritmo podemos calcular o tempo necessário para que uma determinada massa inicial m_0 se reduza à uma massa $m(t)$.

Situação 6.1. *Retirado de Paiva (2013, p.238) - Sabendo que o rádio é um metal radioativo cujo isótopo Ra-266 tem meia-vida de 1.600 anos, encontre o tempo, em ano, necessário para que 10 g desse isótopo se reduza a 1 g.*

Resolução:

Seja x a taxa percentual anual de desintegração do isótopo Ra-226, e seja m a amostra de sua massa. Sabendo que essa massa leva 1.600 anos para se reduzir à metade, e considerando $\log 0,5 = -0,301$, temos:

$$\frac{m}{2} = m(1-x)^{1600} \Rightarrow \frac{1}{2} = (1-x)^{1600} \Rightarrow \log 0,5 = \log{(1-x)}^{1600}$$
$$\log(1-x) = \frac{\log 0,5}{1600} \Rightarrow log(1-x) \approx -0,000188 \Rightarrow 1-x = 10^{-0,000188} \Rightarrow x \approx 0,000433$$

Assim, utilizando a taxa anual de desintegração do isótopo de 0,0433%, o tempo t, em anos, necessário para que 10 g do isótopo se reduza a 1 g é dado por:

$$1 = 10(1-0,000433)^t \Rightarrow 0,1 = (0,999567)^t \Rightarrow \log 0,1 = t \cdot \log 0,999567$$
$$t = \frac{\log 0,1}{\log 0,999567} \Rightarrow t \approx 5.316$$

Portanto, é necessário 5.316 anos, aproximadamente, para que 10 g do isótopo Ra-266 se reduza a 1 g.

Situação 6.2. *Retirado de Paiva (2013, p.252) - Foram encontradas seis flautas de osso no sítio arqueológico de Jiah, no leste da China, cuja massa do isótopo ^{14}C remanescente nos instrumentos era de 0,337 da massa que teriam se tivessem sido confeccionados com* *ossos de animais mortos atualmente. Sabendo que a taxa de desintegração do isótopo ^{14}C é constante e igual a 0,01209% ao ano, estime a idade das flautas.*

Resolução:

As flautas têm aproximadamente 8.996 anos, pois:

$$0,337 = (1 - 0,0001209)^t \Rightarrow 0,337 = (0,9998791)^t \Rightarrow t = \frac{\log 0,337}{\log 0,9998791} \Rightarrow t \approx 8.996$$

Situação 6.3. *Retirado de Aguiar, Xavier e Rodrigues (1988, p.197) - A meia vida do elemento radioativo ^{14}C é de 5.775 anos, e a função que descreve a redução da quantidade de massa de ^{14}C é dada por $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$, onde $m(t)$ é a quantidade de massa de ^{14}C no instante t, com o tempo t medido em anos, e m_0 é a quantidade inicial de ^{14}C. Nesse caso, o valor da constante é $k = \frac{\ln 2}{5775}$, pois,*

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot e^{-5775k} \Leftrightarrow -5775k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5775}.$$

Um fóssil encontrado possui atividade radiativa de ^{14}C de 40% da existente em um organismo vivo. Determine há quantos anos ocorreu a morte do fóssil encontrado.

Resolução:

Se m_0 é a massa inicial de ^{14}C no organismo, e se, decorridos t anos após a morte do organismo, $m(t) = 0,4 \cdot m_0$, então

$$0,4 \cdot m_0 = m_0 \cdot e^{-\frac{ln2}{5775}t} \Rightarrow \ln 0,4 = -\frac{\ln 2}{5775}t \Rightarrow t = -5775 \cdot \frac{ln0,4}{\ln 2} \Rightarrow t \approx 7.634 \text{ anos.}$$

Portanto, se passaram aproximadamente 7.634 anos do momento da morte do organismo até o encontro de seu fóssil.

Exemplo 7. ***Resfriamento de um corpo***

A *lei do resfriamento de Newton* afirma que, a diferença de temperatura D, entre um objeto em resfriamento e a temperatura constante do meio que o contém, decresce com uma taxa de variação proporcional a essa diferença. Assim, a diferença de temperatura no instante t é dada por:

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t} \tag{3.41}$$

onde D_0 é a diferença de temperatura no instante $t = 0$, e a constante α depende do material de que é constituída a superfície do objeto.

Situação 7.1. *Adaptado de Lima (1996, p.99) - Num certo dia, a temperatura ambiente é de 30ºC. A água que fervia numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo tem a temperatura de 65ºC. Quanto tempo depois de apagado o fogo a água atingirá a temperatura de 38ºC? Utilize* $\ln 2 = 0,693$ *e* $\ln\left(\frac{70}{8}\right) = 2,1691$.

Resolução:

Seja $t = 0$ o momento em que o fogo se apagou. Nesse momento, a temperatura da água que fervia na panela era 100ºC e a temperatura do ambiente era de 30ºC. Logo, $D_0 = 100 - 30 = 70$.

Quando $t = 5$, a diferença de temperatura da água e do ambiente era de $D(5) = 65 - 30 = 35$.

Utilizando (3.41), podemos determinar a constante α:

$$D(5) = 70 \cdot e^{-5\alpha} = 35 \Rightarrow e^{-5\alpha} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2} \Rightarrow -5\alpha = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$
$$\alpha = \frac{\ln 2}{5} = \frac{0,693}{5} \Rightarrow \alpha = 0,1386.$$

Queremos saber o tempo t para $D(t) = 38 - 30 = 8$.

Assim, por (3.41), temos:

$$D(t) = 70 \cdot e^{-0,1386t} = 8 \Rightarrow e^{-0,1386t} = \frac{8}{70} \Rightarrow -0,1386t = \ln\left(\frac{8}{70}\right) = -\ln\left(\frac{70}{8}\right)$$
$$t = \frac{\ln\left(\frac{70}{8}\right)}{0,1386} = \frac{2,1691}{0,1386} \Rightarrow t = 15,65$$

Portanto, o tempo procurado é pouco mais de 15 minutos e meio.

Situação 7.2. *Retirado de Lima (1996, pp.100-101) - O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23:30 e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 34,8º. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou 34,1º. A temperatura do quarto era mantida constante a 20º. Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é 36,5º.*

Resolução:

Sejam t o tempo transcorrido, em horas, a partir do momento da morte e $D(t)$ a diferença entre a temperatura do corpo e do quarto, em graus, e ainda, $D_0 = 36,5 - 20 = 16,5$ a diferença de temperatura no momento da morte do indivíduo.

Se t_1 é o instante em que o médico mediu pela primeira vez a temperatura do corpo, então, $D(t_1) = 34,8 - 20 = 14,8$; e, $D(t_1 + 1) = 34,1 - 20 = 14,1$ é a diferença de temperatura do corpo e do quarto na segunda medição.

Logo, por (3.41), temos:

$$\begin{cases} D(t_1) = 16,5 \cdot e^{-\alpha t_1} = 14,8 \\ D(t_1+1) = 16,5 \cdot e^{-\alpha(t_1+1)} = 14,1 \end{cases}$$

Dividindo, membro a membro, a segunda equação pela primeira equação do sistema, obtemos:

$$e^{-\alpha} = \frac{14,1}{14,8} \approx 0,9527 \Rightarrow -\alpha = \ln 0,9527 \Rightarrow \alpha \approx 0,04845.$$

Substituindo $\alpha = 0,04845$ na primeira equação, temos:

$$16,5 \cdot e^{-0,04845 t_1} = 14,8 \Rightarrow e^{-0,04845 t_1} = \frac{14,8}{16,5} \approx 0,8969$$
$$-0,04845 t_1 = \ln 0,8969 \Rightarrow t_1 = -\frac{\ln 0,8969}{0,04845} \Rightarrow t_1 \approx 2,2458$$

Portanto, a hora da morte ocorreu 2 horas e 15 minutos antes da chegada do médico, ou seja, às 21:15.

Exemplo 8. ***Biologia: Alometria***

De acordo com Paiva (2013, p.226), **Alometria** é o ramo da Biologia que estuda a relação do crescimento entre partes de um organismo vivo, ou o crescimento de cada parte em relação ao todo. E ainda, **lei de Alometria** é uma função do tipo $x = Cy^k$ que descreve a relação entre os crescimentos x e y, em função do tempo t, de duas partes de um organismo vivo, em que C e k são constantes positivas que dependem das partes relacionadas, e k é chamado coeficiente alométrico.

Por outro lado, tomando o logaritmo de ambos os lados da equação $x = Cy^k$ teremos uma equação de reta na escala logarítmica, onde o expoente da escala é a inclinação da reta:

$$\log x = \log C + k \cdot \log y.$$

Situação 8.1. *Retirado de Paiva (2013, p.226) - Suponham que, na comparação dos respectivos crescimentos x e y dos comprimentos de dois órgãos, A e B, de um animal, um cientista fez medições em momentos diferentes, obtendo a tabela:*

Tabela 3.6: Crescimento x e y dos comprimentos dos órgãos A e B

	x (comprimento do órgão A)	y (comprimento do órgão B)
1ª medição	2 mm	16 mm
2ª medição	3 mm	81 mm

Fonte: Paiva (2013)

a) Quais são as constantes C e k na lei de Alometria $x = Cy^k$?

b) Quais são as constantes m e n na lei de Alometria $y = mx^n$?

c) Se o órgão A atingir 4 mm, qual a medida correspondente do órgão B, aplicando a lei de Alometria citada no item a.

d) Se o órgão A atingir 4 mm, qual a medida correspondente do órgão B, aplicando a lei de Alometria citada no item b.

Resolução letra a):

Da Tabela 3.6 temos que:

$$\begin{cases} 2 = C \cdot 16^k \\ 3 = C \cdot 81^k \end{cases}$$

Dividindo, membro a membro, as equações do sistema acima, obtemos:

$$\frac{2}{3} = \left(\frac{16}{81}\right)^k \Rightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4k} \Rightarrow 4k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

Substituindo $k = \frac{1}{4}$ na primeira equação, obtemos

$$2 = C \cdot 16^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2 = C \cdot (2^4)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow C = 1.$$

Portanto, $C = 1$ e $k = \frac{1}{4}$.

Resolução letra b):

Da Tabela 3.6 temos que:

$$\begin{cases} 16 = m \cdot 2^n \\ 81 = m \cdot 3^n \end{cases}$$

Dividindo, membro a membro, as equações do sistema, obtemos:

$$\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow n = 4$$

Substituindo $n = 4$ na primeira equação, obtemos: $16 = m \cdot 2^4 \Rightarrow m = 1$.

Portanto, $m = 1$ e $n = 4$.

Resolução letra c):

Substituindo $x = 4$ na lei $x = y^{\frac{1}{4}}$, temos que: $4 = y^{\frac{1}{4}} \Rightarrow y = 4^4 \Rightarrow y = 256$.

Portanto, a medida correspondente ao órgão B será 256 mm.

Resolução letra d):

Substituindo $x = 4$ na lei $y = x^4$, temos que: $y = 4^4 = 256$.

Portanto, a medida correspondente ao órgão B será 256 mm.

Exemplo 9. ***Química: calor de vaporização***

Calor de vaporização (ΔH_{vap}) é a energia, em quilojoules, necessária para vaporizar um mol de um líquido. A relação quantitativa entre a pressão do vapor P de um líquido e a temperatura absoluta T, em Kelvin, é dada pela equação de Clausius-Clapeyron:

$$\ln P = -\frac{\Delta H_{vap}}{RT} + C \tag{3.42}$$

em que, $R = 8,314$ J/K$\cdot mol$ é a constante dos gases e C é uma constante. Admite-se que ΔH_{vap} não depende da temperatura.

Observe que, a expressão em (3.42) tem a forma de uma equação linear da forma $y = ax + b$. Basta tomar $y = \ln P$, $a = -\frac{\Delta H_{vap}}{R}$, $x = \frac{1}{T}$ e $b = C$.

Situação 9.1. *Retirado de Chang (2010, p.397) - O éter dietílico é um líquido orgânico volátil, altamente inflamável, usado principalmente como solvente. A pressão de vapor do éter dietílico é 401 mmHg a* $18°C$. *Calcule a sua pressão de vapor a* $32°C$.

Resolução:

Em Chang (2010, p.397), encontramos na tabela 12.5, o valor de $\Delta H_{vap} = 26,0$ kJ/mol $= 26.000$ J/mol, do éter dietílico.

Foi dado no problema que, à temperatura de $t_1 = 18°C = 291\ K$, $P_1 = 401$ mmHg. É solicitado P_2, quando $t_2 = 32°C = 305\ K$. Assim,

$$\ln 401 = -\frac{26.000}{8,314 \cdot 291} + C \tag{3.43}$$

$$\ln P_2 = -\frac{26.000}{8,314 \cdot 305} + C \tag{3.44}$$

Subtraindo a equação (3.44) da equação (3.43), obtemos:

$$\ln\left(\frac{401}{P_2}\right) = -\frac{26.000}{8,314} \cdot \left(\frac{-291 + 305}{291 \cdot 305}\right) = -3.127,25 \cdot \frac{14}{88.755} = -0,493$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{401}{P_2}\right) = -0,493 \Rightarrow \frac{401}{P_2} = e^{-0,493} = 0,611 \Rightarrow P_2 = \frac{401}{0,611} \Rightarrow P_2 = 656 \text{ mmHg}$$

Portanto, a pressão de vapor do éter dietílico à 32°C é 656 mmHg.

Exemplo 10. ***Química: relação entre a concentração do reagente e o tempo***

Uma *reação de primeira ordem* é uma reação cuja velocidade depende da concentração de reagente elevada à potência unitária. De modo que, se $[A]_0$ e $[A]_t$ são as concentrações do reagente A nos instantes $t = 0$ ($t = 0$ pode ser qualquer instante arbitrário escolhido para início da medida da variação de A) e $t = t$, a constante de velocidade k pode ser calculada através da expressão que relaciona a concentração do reagente em função do tempo :

$$\ln[A]_t = -kt + \ln[A]_0 \tag{3.45}$$

Observe que, a expressão em (3.45) tem a forma de uma equação linear da forma $y = ax + b$. Basta tomar $y = \ln[A]_t$, $a = -k$, $x = t$ e $b = \ln[A]_0$.

Situação 10.1. *Adaptado de Chang (2010, p.449) - A conversão em fase gasosa do ciclopropano em propeno é uma reação de primeira ordem com uma constante de velocidade de* $6,7 \cdot 10^{-4}$ s^{-1} *a 500°C.*

a) Se a concentração inicial do ciclopropano for 0,25 M, qual será a sua concentração após 8,8 min?

b) Qual é o tempo (em minutos) necessário para que a concentração do ciclopropano diminua de 0,25 M para 0,15 M?

c) Qual é o tempo necessário (em minutos) para a conversão de 74% do material de partida?

Resolução letra a):

Transformando o tempo dado em minutos para segundos, temos que $t = 8,8$ min $= 528$ s. Assim, utilizando (3.45):

$$\ln[A]_t = -(6,7 \cdot 10^{-4} \cdot 528) + \ln(0,25) = -1,74$$
$$[A]_t = e^{-1,74} = 0,18 \text{ M}$$

Resolução letra b):

De (3.45), temos que $\ln\left(\frac{[A]_t}{[A]_0}\right) = -kt$, logo:

$$\ln\left(\frac{0,15}{0,25}\right) = -(6,7 \cdot 10^{-4})t \Rightarrow t = 7,6 \cdot 10^2 \text{ s} = 13 \text{ min.}$$

Resolução letra c):

Utilizando $\ln\left(\frac{[A]_t}{[A]_0}\right) = -kt$, obtida da equação (3.45), temos:

$$\ln\left(\frac{0,26}{1,00}\right) = -(6,7 \cdot 10^{-4})t \Rightarrow t = 2,0 \cdot 10^3 \text{ s} = 33 \text{ min.}$$

Exemplo 11. ***Química: Equação de Arrherrius***

A *equação de Arrhenius* representa a dependência da constante de velocidade de uma reação em relação à temperatura, através da expressão:

$$k = Ae^{-\frac{E_a}{RT}}.$$

Essa equação pode ser reescrita como uma função logarítmica, dada por:

$$\ln k = \left(-\frac{E_a}{R}\right) \cdot \left(\frac{1}{T}\right) + \ln A \tag{3.46}$$

em que E_a é a energia de ativação da reação (em quilojoules por mol), $R = 8,314$ J/K$\cdot$mol é a constante dos gases, T é a temperatura absoluta, em Kelvin, e A é a quantidade denominada fator de frequência por Chang (2010), e por fator pré-exponencial por Atkins e Jones (2006), que definem ainda E_a como sendo a energia de ativação. Ainda de acordo com Atkins e Jones (2006), A e E_a são praticamente independentes da temperatura, mas dependem da reação que está sendo estudada.

Novamente aqui, observamos que, a expressão em (3.46) tem a forma de uma equação linear da forma $y = ax + b$. Basta tomar $y = \ln k$, $a = -\frac{E_a}{R}$, $x = \frac{1}{T}$ e $b = \ln A$.

Situação 11.1. *A constante de velocidade de uma reação de primeira ordem é de* $3,46 \cdot 10^{-2}$ s^{-1} *a 298 K. Qual será a constante de velocidade a 350 K se a energia de ativação para a reação é de 50,2 KJ/mol?*

Resolução:

Sejam $k_1 = 3,46 \cdot 10^{-2}$ s^{-1}, $T_1 = 298$ K, $T_2 = 350$ K, $R = 8,314$ J/K $\cdot$ mol e $E_a = 50,2$ KJ/mol $= 50,2 \cdot 10^3$ J/mol. Da função em (3.46), temos:

$$\ln 3,46 \cdot 10^{-2} = \left(-\frac{50,2 \cdot 10^3}{8,314}\right) \cdot \left(\frac{1}{298}\right) + \ln A \tag{3.47}$$

$$\ln k_2 = \left(-\frac{50,2 \cdot 10^3}{8,314}\right) \cdot \left(\frac{1}{350}\right) + \ln A \tag{3.48}$$

Subtraindo a equação (3.48) de (3.47), temos:

$$\ln\left(\frac{3,46 \cdot 10^{-2}}{k_2}\right) = \frac{50,2 \cdot 10^3}{8,314} \cdot \left(\frac{298 - 350}{298 \cdot 350}\right) = -3,01$$

$$\frac{3,46 \cdot 10^{-2}}{k_2} = e^{-3,01} = 0,0493 \Rightarrow k_2 = 0,702\ s^{-1}$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática é uma “caixa de ferramentas” para construção e, porque não, interpretação da realidade. É através dela que todo e qualquer tipo de conhecimento tem possibilidades de se desenvolver.

Desde o inventário de objetos, que nada mais é do que uma das formas mais rudimentares de contagem, à demonstração de rendimentos financeiros, ao planejamento estrutural de construções ou determinação de valor de produtos no comércio, diversas são as aplicações dos instrumentos matemáticos no cotidiano das pessoas.

Receitas de bolo, expectativa de notas avaliativas, determinação da velocidade de um corpo, do tempo ou do lugar de encontro entre dois corpos, de valor de indenização em processos judiciais, cálculos contábeis, controle de temperatura, estudo de cartas náuticas, mapas cartográficos, estatísticas de processos produtivos de grande escala, em praticamente todas as áreas onde o conhecimento humano se aplica, há um quê de matemática.

As funções são alguns instrumentos que esta valiosa caixa de ferramentas dispõe. A noção de função $y = f(x)$ é tão antiga quanto a história da humanidade. Do mesmo modo que do homem primitivo ao *sapiens* houve uma evolução, a noção de função também evoluiu ao longo do tempo. No capítulo 1 tratou-se desta evolução.

Para o homem pré-histórico, a função era o mero ato de relacionar objetos/símbolos distintos. Muito antes da escrita, cada objeto se relacionava a um risco na parede da caverna ou a uma pedra específica; até que os fenícios estabeleceram o comércio e, além do ato simples de contar os objetos, era necessário estipular o preço, em razão da quantidade e da qualidade do que estava sendo vendido.

Nesse sentido, hábitos domésticos rotineiros como preparar as refeições exigiam (e ainda hoje é assim) procedimentos matemáticos: a contagem dos alimentos, a separação dos ingredientes em porções, a distribuição em medidas de peso, demandam um raciocínio razoavelmente mais complexo que a simples contagem. Assim se originou a **função afim**, tipo de função primária, na qual uma grandeza varia em função de outra.

Alguns historiadores da matemática atribuem aos babilônios o desenvolvimento inicial das funções, já que há diversos artefatos arqueológicos que revelam métodos de soluções aplicados a funções de graus distintos.

Num modo geral, a função afim, expressa pela notação $f(x) = ax + b$, tem um rol praticamente ilimitado de aplicações.

Dos egípcios, exímios construtores do mundo antigo, passando pelos chineses e gregos, o que os historiadores relatam é o desenvolvimento das funções matemáticas por estes povos (em especial as **funções quadrática** e **exponencial** – respectivamente, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $f(x) = a^x$).

Da idade média pouco se observa sobre teorias matemáticas a não ser por Oresme, que inicia o que Descartes desenvolverá posteriormente na representação gráfica dos efeitos das funções.

Assim, o grande período de desenvolvimento das funções ocorre a partir do Iluminismo, em especial a partir da segunda metade do século XVIII.

Num primeiro momento, o conceito de função é um conceito de natureza analítica, não geométrica, como sendo a relação entre uma constante e uma variável. Este conceito induz Euler ao entendimento de que toda função é uma série contínua e linear.

A física moderna de Leibniz e Newton rompe com tal raciocínio, uma vez que continuidade e linearidade não se aplicam a corpos celestes, ondas sonoras e energias térmicas.

O próprio Euler buscou reformular sua proposta. Todavia, ainda que o conceito proposto no *calculi diferenciali* fosse mais amplo, a aplicação é restrita às funções contínuas, o que, segundo Dirichelet, não se verifica na própria teoria daquele matemático: Dirichelet, ao confrontar as funções mistas, demonstrou haver continuidade entre elas, o que, portanto, invalidaria a teoria de Euler.

Portanto, o que conclui Dirichelet é que há uma relação interna entre os componentes das funções, sejam elas contínuas ou descontínuas. Este é o esboço do que será entendido no século XX como correspondência biunívoca, no qual um elemento de um determinado conjunto guarda relação direta e específica com outro(s) de conjunto distinto e determinado.

De um lado, as funções quadráticas e exponencial se adaptaram facilmente aos estudos acadêmico-científicos e nos cálculos econômicos, sendo úteis na projeção de rendimentos, empréstimos, apuração de lucros e dividendos financeiros. Porém, não foram capazes de descrever movimentos astronômicos, de navegação ou de medição de energia elétrica ou de eventos naturais de grande magnitude.

A **função logarítmica**, considerada por muitos como a inversa da função exponencial, é a função que estabelece relação entre um conjunto funcional analítico (algébrico) e outro geométrico, através da soma entre a constante de cada conjunto.

O que se percebe no contexto histórico é que cada função se desenvolveu em razão de uma necessidade específica de aplicação, ou seja, havia um problema prático e cotidiano que pareceu, em certo momento, sem solução.

De uma maneira geral, percebemos que existem e é possível listar situações do cotidiano que podem ser modeladas pelas funções tema deste trabalho. Sendo possível, inclusive, apontar situações que podem ser trabalhadas de modo multidisciplinar.

Embora tenhamos destacado na introdução deste trabalho, que esta pesquisa não tem a pretensão de ser uma proposta pedagógica a ser utilizada, compreendemos que ele pode contribuir com a prática do professor de matemática em sala de aula, no ensino de funções para o primeiro ano do Ensino Médio, valendo-se dos exemplos de aplicações das funções aqui registrados. Neste sentido, sugerimos como sequência a esta pesquisa, a introdução nas aulas sobre funções, das situações-exemplos listadas nesta pesquisa e avaliação da contribuição positiva ou não dessa inserção. Ou ainda, o levantamento de situações cotidianas que possam ser modeladas pelas funções modular, polinomial, de uma forma geral, e as funções trigonométricas.

REFERÊNCIAS

ABESO. **Cálculo do peso saudável**. [20–?]. Disponível em: <http://www.abeso.org.br/atitude-saudavel/imc>. Acesso em: 01 fev. 2019.

ABNT. **NBR 9050**: acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Rio de Janeiro, RJ: ABNT, 2015. Disponível em: <https://www.ufpb.br/cia/contents/manuais/abnt-nbr9050-edicao-2015.pdf>. Acesso em: 09 ago. 2019.

AGUIAR, A. F. A.; XAVIER, A. F. S.; RODRIGUES, J. E. M. **Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas**. São Paulo: Harbra, 1988.

ALGOSOBRE. **Balística e lançamento de projétil**. [20–?]. Disponível em: <https://www.algosobre.com.br/fisica/balistica-e-lancamento-de-projetil.html#menu2>. Acesso em: 17 ago. 2019.

ANBIMA. **Raio X do investidor brasileiro**. [2018?]. Disponível em: <http://www.anbima.com.br/pt_br/especial/raio-x-do-investidor-2018.htm>. Acesso em: 23 jan. 2019.

ARAGÃO, M. J. **História da Matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

ATKINS, P.; JONES, L. **Princípios de Química**: questionando a vida moderna e o meio ambiente. 3. ed. Porto Alegre, RS: Bookman, 2006.

BACEN. **Remuneração dos depósitos de poupança**. [2019]. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/estatisticas/remuneradepositospoupanca>. Acesso em: 23 jan. 2019.

BERLINGOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução Elza F. Gomide; Helena Castro. Ed. ampliada. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BICUDO, I. **Os *Elementos***. São Paulo: UNESP, 2009. (Tradução e organização Irineu Bicudo).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2018.

BRASIL. Presidência da República. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional**. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 10 jul. 2019.

BRASIL. Presidência da República. **Lei nº 13.183 de 4 de novembro de 2015. Altera as Leis nº 8.212, de 24 de julho de 1991, e 8.213, de 24 de julho de 1991 [...]**. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 05 nov. 2015, 2015. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2015-2018/2015/Lei/L13183.htm>. Acesso em: 26 jan. 2019.

CARAÇA, B. d. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografias Matemáticas, 1951.

CHANG, R. **Química geral**: conceitos essenciais. 4. ed. Porto Alegre, RS: AMGH, 2010.

CRUZ, P. H. C. A. d. **Funções no 1º ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, 2015. Disponível em: http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/305997. Acesso em: 4 jan. 2019.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2011. v. 1.

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. v. 1. (Manual do professor).

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GALVÃO, M. E. E. L. **História da Matemática**: dos números à geometria. Osasco: Edifieo, 2008.

GUELLI, O. A Regra da Falsa Posição. **Revista Professor de Matemática**, v. 15, p. 18–22, 1989. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/15/4.htm> Acesso em: 05 jan. 2019.

GUELLI, O. **Contando a história da Matemática**: A invenção dos números. São Paulo, SP: Ática, 1998.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. d. **Matemática**: ciências e aplicações. São Paulo: Atual, 2001. v. 1.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R. **Matemática**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2007. Vol. Único.

IFRAH, G. **Os números**: história de uma grande invenção. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.

INEP. **Matriz de referência ENEM**: matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: INEP, [20–?]. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2019.

INEP. **Matrizes de referência**. Brasília, DF: INEP, 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/matriz-de-referencia>. Acesso em: 10 jul. 2019.

INEP. MEC. **Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM: prova de redação e de linguagens, códigos e suas tecnologias, prova de Matemática e suas tecnologias. 2º dia Caderno 5 amarelo**. [Brasília, DF]: INEP, MEC, 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 10 jul. 2019.

INEP. MEC. **Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM: prova de ciências da natureza e suas tecnologias, prova de Matemática e suas tecnologias. 2º dia Caderno 7 azul**. [Brasília, DF]: INEP, MEC, 2017. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 18 ago. 2019.

LEONARDO, F. M. d. **Conexões com a matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 1. (Manual do professor).

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 1985. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar).

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996. (Coleção do professor de matemática).

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. (Coleção do professor de matemática).

MANSFIELD, D. F.; WILDBERGER, N. J. Plimpton 322 is babylonian exact sexagesimal trigonometry. **Historia Mathematica**, v. 44, p. 395–419, nov. 2017. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086017300691#fg0010.> Acesso em: 11 nov. 2018.

MARTINS, A. A.; AZEVEDO, R. M. de; MEIRELLES, C. R. M. Arquitetura e engenharia no modernismo brasileiro: Os casos do Ministério da Educação e Saúde (MES), da Capela de São Francisco de Assis e do Hipódromo Guanabara. **Cadernos de Arquitetura e Urbanismo**, v. 23, n. 32, p. 42–61, 2016.

MATHIAS, W. F.; GOMES, J. M. **Matemática financeira**. 6 (7 reimpr.). ed. São Paulo: Atlas, 2016.

MAXIMO, A.; ALVARENGA, B. **Física**. São Paulo: Scipione, 1997. vol. único.

MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, [20–?]. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 20 jul. 2019.

MOURA, J. d. **Dimensionamento de escadas de concreto armado**. 2019. Disponível em: <https://www.guiadaengenharia.com/escadas-concreto-dimensionamento/>. Acesso em: 18 jul. 2019.

PAIVA, M. **Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 1.

PIRES, R. F. **O conceito de função: uma análise histórico epistemológica. *In*: Educação matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades**. São Paulo, SP: [s.n.], 2016. 12 p. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6006_2426_ID.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2019.

RAMOS, J. E. M. **Idade Moderna**. 2019. Disponível em: <https://www.suapesquisa.com/historia/idade_moderna.htm>. Acesso em: 23 fev. 2019.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. d. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia da matemática**. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2007. Tradução Maria Luíza X. A. Borges.

SISTEROLLI, G. **Química**: Curso para o ensino médio. Uberlândia: EDG, 1997. v. 1.

Sá, R. **História dos Logaritmos**. [20–?]. Disponível em: <https://www.infoescola.com/matematica/historia-dos-logaritmos/>. Acesso em: 23 mar. 2019.

UNICAMP. Comissão de Vestibulares. **Caderno de Questões**. [Campinas, SP]: UNICAMP, 2000. Disponível em: <http://www.comvest.unicamp.br/vestibulares-anteriores/1a-fase-2a-fase-comentadas/>. Acesso em: 10 jun. 2019.

UNIFESP. **Prova de conhecimentos gerais. Dia 01**. 2004. Disponível em: <https://www.unifesp.br/reitoria/vestibular/vestibulares-anteriores/category/68-provas-e-gabaritos>. Acesso em: 1 mai. 2019.

VINCIGUERRA, T. **Babylon Revisited: How a chunk of ancient math history got to Columbia**. 2017. Disponível em: <https://magazine.columbia.edu/article/babylon-revisited>. Acesso em: 15 jan. 2019.