UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA: um guia de teorias e aplicações para professores e alunos.

Thiago Costa da Silva

MANAUS

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Thiago Costa da Silva

ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA: um guia de teorias e aplicações para professores e alunos.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS

2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

S586a Silva, Thiago Costa da
ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA: Um guia de teorias e aplicações para professores e alunos. / Thiago Costa da Silva. 2019
107 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. análise combinatória. 2. resolução de problemas. 3. conceitos. 4. aplicações. 5. problemas de olimpíadas. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

THIAGO COSTA DA SILVA

ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA: um guia de teorias e aplicações para professores e alunos.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 23 de agosto de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

Presidente

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

Membro

Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto

Membro externo

DEDICATÓRIA

À minha querida esposa Muriel, e ao meu filho Miguel Henrique, que foram minha motivação para a conclusão deste curso.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço ao Deus da minha vida, pelo Seu grandioso amor e por sempre estar comigo, por ter me sustentado e dado força em todos os momentos de dificuldades, onde sem Ele nada disso seria possível.

À minha Mãe Dione, por ter me dado o dom da vida e criação, me ensinando os valores e princípios a qual tenho hoje.

À minha querida esposa Muriel, pelo apoio nas horas mais difíceis e pelas palavras certas nos momentos mais desconfortantes, sem o seu apoio eu não teria terminado este curso.

Ao meu filho Miguel, por me mostrar a felicidade de ser um Pai e por me dar um propósito para buscar sempre mais. Este que hoje mesmo muito pequeno me incentivou de maneira grandiosa.

Aos professores do PROFMAT polo UFAM, pela dedicação e esforço em nos conduzir ao caminho do conhecimento.

Ao meu orientador, Professor Nilomar Oliveira, pelos ensinamentos, atenção e paciência para comigo, tornando possível a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de turma, pelo companheirismo e pelas horas de estudo. Este que foram fundamentais não somente para a conclusão deste trabalho, mas sim para todo o curso de mestrado.

Os que confiam no Senhor serão como o monte Sião, que não se abala, mas permanece para sempre.

(Salmos 125:1)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo auxiliar alunos e professores em relação à análise combinatória, que é considerado como um dos mais complexos na matemática, pelo fato de exigir raciocínio potencializado para a resolução de problemas. Por todas as dificuldades encontradas pelos alunos e professores em relação à aprendizagem tanto pelas metodologias aplicadas quanto falta de continuidade do conteúdo que somente é aprendido no 2º ano do ensino médio, apresentamos conceitos dos tópicos de análise combinatória como Princípio Fundamental da Contagem, Permutações, Arranjos e Combinações com vários problemas de aplicações para melhor entendimento, além de tópicos não muito explanados no ensino básico como Princípio da Inclusão-Exclusão e Princípio das Gavetas de Dirichlet ou Princípio das Casas dos Pombos. Aproveitamos para apresentar problemas de olimpíadas de vários níveis com soluções de muitas maneiras. Através de análises dos PCN's e de dissertações do PROFMAT, comprovamos a importância da análise combinatória e a sua defasagem em alunos do ensino médio, assim como a necessidade de seu ensino ainda no ensino fundamental.

Palavras-chave: análise combinatória, resolução de problemas, conceitos, aplicações, problemas de olimpíadas.

ABSTRACT

This work aims to help students and teachers in the combinatorial analysis, which is considered one of the most complex in mathematics, because it requires a potentialized reasoning to solve problems. Due to all the difficulties encountered by students and teachers such as both applied methodologies learning and lack of continuity of content, for example, this is only learned in the 2nd year of high school, we present concepts of combinatorial analysis topics such as Fundamental Principle of Counting, Permutations, Arrangements and Combinations, associated with various application problems for better understanding, as well as topics not much explained in basic education such as Inclusion-Exclusion Principle and Dirichlet Drawer Principle or Pigeon Houses Principle. We take the opportunity to present Olympics problems in several levels with solutions in many ways. Through analysis of NCP's and PROFMAT dissertations, we have demonstrated the importance of combinatorial analysis and its lag in high school students, as well as the need for its teaching in elementary school.

Keywords: combinatorial analysis, problem solving, concepts, applications, olympic problems.

Sumário

Introdução **1**
1. Análise Combinatória. **2**
1.1 Aspectos históricos 2
1.2 Proposta do PCN de matemática e suas tecnologias e análise combinatória 4
1.3 Analisando algumas pesquisas de dissertações 9
2. Conceitos e aplicações de análise combinatória. **14**
2.1 O que é análise combinatória 14
2.2 Princípio Fundamental da Contagem (PFC) 14
2.3 Fatorial 25
2.4 Permutação 27
2.4.1 Permutação Simples 27
2.4.2 Permutação com elementos repetidos 34
2.4.3 Permutação Circular 38
2.5 Arranjos 42
2.5.1 Arranjos Simples 42
2.5.2 Arranjos com Repetição 47
2.6 Combinações 50
2.6.1 Combinações Simples 50
2.6.2 Combinações com repetição 56
2.7 Princípio da inclusão-exclusão 61
2.8 Princípio das gavetas de Dirichlet ou Princípio das Casas dos pombos 70
3. Problemas de combinatória em olimpíadas **75**
Considerações finais **95**
Referências **96**

Introdução

Neste trabalho apresentamos a análise combinatória para a educação básica, como um apoio pedagógico a professores e alunos. A combinatória é considerada um dos conteúdos de maiores dificuldades por parte dos mesmos e está sendo demonstrada de forma simples e direta com teorias e aplicações para cada tópico.

O trabalho é constituído de três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos os aspectos históricos da análise combinatória, com seu surgimento e curiosidades. Ainda no primeiro capítulo, comentamos os PCN's de matemática e suas tecnologias com relação a análise combinatória, com as propostas e direcionamentos para o seu ensino e suas respectivas habilidades e competências. Em seguida analisamos algumas dissertações do PROFMAT com o tema de análise combinatória, onde expomos alguns pontos estudados pelos autores e comentamos algumas pesquisas aplicadas pelos mesmos.

No segundo capítulo apresentamos alguns tópicos de combinatória como Princípio Fundamental da Contagem, Fatorial, Permutações, Arranjos e Combinações que são bem comuns no ensino médio, além do Princípio da inclusão-exclusão e princípio das gavetas de Dirichlet ou Princípio da casa dos pombos, que não são muito citados no ensino médio mas são de fundamental importância para a solução de alguns problemas. Em todos os tópicos colocamos muitos exemplos de aplicações, com várias formas de soluções, todas essas feitas de forma simples e de fácil entendimento. O objetivo deste trabalho é ajudar a compreensão do conteúdo de combinatória, por isso os vários problemas como exemplos para facilitar exatamente o aprendizado do aluno, onde resolvemos os exemplos com e sem o uso de fórmulas, para que o estudante possa ter mais de um caminho para a solução dos problemas, e várias formas de resoluções para os eu conhecimento.

No terceiro capítulo introduzimos vários problemas de olimpíadas, todos esses resolvidos também de forma bem simples. Há problemas de olimpíadas a nível mundial e da OBMEP, com questões de vários níveis e com soluções bem interessantes para todos os tipos de alunos.

1. Análise Combinatória.

1.1 Aspectos históricos

Por bastante tempo a análise combinatória foi considerada como algo totalmente separado do cálculo aritmético, segundo o matemático e historiador Rey Pastor (1939) “ o conceito moderno do número é, porém uma das provas do papel preponderante que a noção de ordem desempenha nas diversas teorias matemáticas”.

De acordo com Wieleitner (1932), existem várias teorias que afirmam que o problema mais antigo que se relaciona com a análise combinatória é a origem da formação dos quadrados mágicos, onde dispomos de *n* números naturais num quadrado de ordem *n*, de modo que linha, coluna e diagonal tenham a mesma soma. Segundo Needham (1959), o primeiro quadrado mágico conhecido é o *Lo Shu*, onde Lo Shu que significa “o rolar do rio Lo”, e conta a lenda que neste rio apareceu uma tartaruga onde em seu casco havia 9 números desenhados em 3 colunas de 3 números cada, formando um quadrado. O que mais impressionou os estudiosos da época é que somando os números de cada linha, ou coluna, ou diagonal, o resultado sempre era igual a 15, onde 15 é a quantidade de dias de cada um dos 24 ciclos do ano solar chinês. De acordo com Needham (1959), o quadrado mágico de Lo Shu ou quadrado mágico de Saturno como também é conhecido, surgiu no século I *d.C.*. Porém, segundo Berge (1971) que foi um matemático Francês e um dos fundadores da moderna combinatória e teoria dos grafos, o quadrado mágico de Lo Shu pode ser bem mais antigo a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 *a.C.* Estudiosos acreditam que a ideia dos quadrados mágico foi passada dos chineses para os árabes, e os mesmo começaram a fazer grandes contribuições construindo quadrados ainda maiores que o de Lo Shu.

Ainda em relação a história do surgimento da análise combinatória, há uma poesia infantil que sobreviveu a várias culturas e que serve para iniciar o campo de problemas combinatórios (Biggs,1979):

Quando eu estava indo para St. Ives,
Eu encontrei um homem com sete mulheres,
Cada mulher tem sete sacos,
Cada saco tem sete gatos,

Cada gato tem sete caixas,

Caixas, gatos , sacos e mulheres,

Quantos estavam indo para St. Ives?

Esta poesia que é datada de pelo menos 1730 normalmente é interpretada como uma brincadeira, porém imagine-se que há um estudo por trás dela com objetivos bem mais sérios, pois no livro *Líber Abaci* (Fibonacci, 1202) há um problema bem parecido do anterior da poesia, é ele: *"Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o números total de coisas?"*

Há também segundo Wilson (1990), relatos e estudos desde as civilizações mais antigas das regras básicas de contagem e aplicações das mesmas, onde se destacava a memorização como forma de estudo. Um problema citado por Wilson para esses estudos é o Problema 79 do *Papiro Egípcio de Rhind* que é de cerca de 1650 *a.C*, onde o mesmo diz: "*Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat de grãos; quantos itens tem ao todo?*"

Tanto o poema infantil, como o problema escrito por Fibonacci, como o problema do Papiro Egípcio de Rhind, mostram um estudo envolvendo adição e a repetição do número sete, o que ajuda na memorização dos mesmos. Os mesmos são comprovações que a análise combinatória está presente desde as civilizações mais antigas, ajudando na contagem e soluções de problemas.

Há também teorias que dizem que o estudo da análise combinatória começou em jogos de azar envolvendo cartas ou dados, e a busca pela vitória e o vício pelas apostas ajudaram a aprofundar o estudo da análise combinatória e da probabilidade, como ferramentas a ser usada para aumentar as chances de acertos nas apostas e para garantir a vitória nos jogos. A primeira obra conhecida que faz o estudo das probabilidades é o livro *Líber De Ludo Aleae* (1526) de Jerônimo Cardano, o livro que traduzido significa "Sobre os jogos de azar" foi escrito com o intuito de ser um manual para os jogadores de jogos de azar, este mesmo livro também é considerado iniciador das teorias das probabilidades. Em 1657, Christian Hygens publicou o primeiro tratado da teoria das probabilidades, onde além da probabilidade, também fala sobre o cálculo estatístico. E em 1713, Jacob Bernoulli publica o livro *Ars Conjectandi* (A arte de conjecturar) o qual associa os jogos de azar com permutações e combinações. Também surgiram no final do século XVII três grandes livros de análise combinatória, são eles: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatória* (1669) de Athanasius Kircher.

Leibniz (1666) conceituou combinatória como "*o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos*", já Nicholson (1818) conceituou-a como "*o ramo da matemática que nos ensina a averiguare expor todas as possíveis formas através das quais um dado números de objetos podem ser associados e misturados entre si*".

No entanto para Biggs (1979) a base da maioria da aritmética são dois princípios de contagem, o qual são considerados fundamentais na combinatória, são eles: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo, onde o primeiro diz que se queremos contar um conjunto de objetos, podemos dividí-lo em partes, contar as partes separadamente, e somar os resultados. E o segundo diz que se uma decisão pode ser tomada de x maneiras e a partir dessa, outra decisão pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras possíveis será a multiplicação entre x e y, ou seja, $x.y$.

1.2 Proposta do PCN de matemática e suas tecnologias e análise combinatória

Analisando os PCN's de matemática e suas tecnologias voltados para o ensino médio, nota-se claramente a preocupação em formar cidadãos pensantes, capazes de se comunicar, de tomar decisões, de resolver problemas, de criar e aperfeiçoar conhecimentos e valores. De desenvolver e promover alunos os quais possuem diferentes interesses, motivações e capacidades, para um mundo moderno que está em constante mudança. De contribuir para o seu desenvolvimento e capacitação e assim torná-lo pronto para o que lhe será exigido em sua vida social e profissional.

Todas as áreas do conhecimento requer uma base matemática podendo ser para tirar conclusões, para argumentar em certas decisões ou para formar cidadãos consumidores conscientes, elementos que o auxiliam tanto na vida pessoal quanto na profissional, isso apenas comprova a importância da matemática para os dias de hoje e para a formação do indivíduo tão esplanada nos PCN's.

De acordo com os PCN’s a matemática no ensino médio tem valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, e também desempenha um papel instrumental, pois é fundamental para a vida cotidiana e atividades humanas.

O papel formativo associado a matemática tem como objetivo formar no aluno a capacidade de resolver problemas, criar o hábito de investigar e analisar, assim também como enfrentar situações do cotidiano, o tornando capaz de ter uma visão ampla e científica da realidade, e assim desenvolver a criatividade e outras capacidades.

Já no papel instrumental, a matemática precisa ser vista como um conjunto de técnicas e estratégias que servem para serem aplicadas em várias áreas do conhecimento e para todo o decorrer da vida. Não se trata de decorar regras e fórmulas, mas sim de serem capazes de identificar o momento adequado de utilizá-las.

Como sabemos a análise combinatória tem essa habilidade, de incentivar e tornar os alunos seres pensantes, investigadores e criativos, criando diversas estratégias para resoluções de problemas variados. Logo, a análise combinatória não se afasta em nenhum momento dos objetivos dos PCN’s, pois ele é naturalmente um conteúdo que associa de forma muito eficiente a matemática com o cotidiano e o mundo moderno. A combinatória também utiliza estratégias a serem aplicadas em problemas, forçando o aluno a pensar e a criar muitas vezes suas próprias estratégias para as soluções. Então mais do que nunca vimos a importância deste conteúdo para os alunos do ensino médio, pois os mesmo necessitam dessas habilidades para o mundo profissional em que estão prestes a se inserir.

Um outro ponto importante nos PCN’s de matemática e suas tecnologias, é a relação de algumas concepções do ensino médio com vários conhecimentos matemáticas estudados no ensino fundamental, onde nesse nível de ensino o aluno utilizará os conhecimento adquiridos anteriormente e o ampliará de forma contínua, conseguindo desenvolver de forma mais ampla algumas relações matemáticas como abstrações, análise e interpretações da própria realidade. Isso apenas nos afirma a ideia de vários matemáticos em estudar combinatória ainda no ensino fundamental, para fazer com que o aluno se familiarize com problemas de contagem, pois há problemas que não necessitam de fórmulas e nem raciocínios complexos, logo são resolvidos apenas com uma lógica simples.

Nos dias de hoje a maior dificuldade dos docentes de matemática é exatamente essa formação do aluno em ser pensante, investigador e criativo. O ato de apenas repassar conhecimento através de memorização de fórmulas tem criado uma geração de alunos que vivem no “automático”, onde apenas reescrevem a aula do professor, porém não são capazes de criar soluções novas ou solucionar problemas ainda não estudados anteriormente. O estudo da combinatória ainda no ensino fundamental aumentaria as chances dessa formação do aluno, pois teria tempo para que o mesmo se tornasse um estudioso independente, onde é necessário que o aluno aprenda a prender para que fique em constante desenvolvimento e aprendizado, onde essa independência é considerada condição básica para um contínuo aperfeiçoamento ao longo da vida. Porém algumas habilidades como escolher informações e analisá-las e, após essa análise decidir melhores estratégias e métodos, precisam de alguns requisitos que somente serão desenvolvidos ao longo da vida escolar, alguns desses requisitos é uma boa interpretação da linguagem, alguns conhecimentos matemáticos específicos para alguns problemas, possuir a capacidade de avaliar possibilidades e também a adequação de algumas tecnologias a seu favor.

De acordo com os PCN’s de matemática e suas tecnologias, as finalidades do ensino de matemática no ensino médio indicam como objetivos levar o aluno a:

• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

• analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

• desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

• utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;

• expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

• estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

• reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

• promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Observa-se um grande foco no desenvolvimento de valores, habilidades e atitudes de alunos em relação ao conhecimento e também na relação aluno/aluno e aluno/professor. Uma das características distintivas da proposta é a preocupação com os aspectos da formação do indivíduo, pois valores, habilidades e atitudes são objetivos centrais da educação e são eles que possibilitam a aprendizagem, independentemente do conteúdo ou metodologia aplicada pelo docente.

Os conteúdos da Base Nacional Comum (BNCC) são selecionados pelos organizadores de currículo e professores e têm como critérios exatamente os PCN's, logo aqueles conteúdos que não atendem os objetivos dos PCN's recebem menos ênfase e acabam sendo abandonados e retirados da grade curricular do ensino médio. Os organizadores também analisam na criação de um currículo flexível, sendo levado em consideração até a comunidade em que a escola está inserida. Como vimos anteriormente a análise combinatória tem essa habilidade de relacionar a matemática com o meio em que o aluno vive, através de situações problemas que se aproxima da realidade podendo e estando presente tanto por cumprir os objetivos dos PCN's quanto nessa criação do currículo flexível.

Outro ponto muito citado é a contextualização e a interdisciplinaridade, onde como podemos conectar conceitos matemáticos e pensamentos matemáticos a diversas áreas do conhecimento e a situações do dia a dia.

Quanto a análise combinatória, os PCN's associa exatamente a habilidade de descrever e analisar grandes números de dados, assim como realizar inferências e fazer predições com base em um espaço amostral, aplicando ideias de probabilidades e combinatórias a fenômenos naturais e do cotidiano. A análise combinatória foi também considerada complexa, porém com uma relação gigante com o mundo real sendo claramente exposta a sua importância para a formação dos alunos para o mundo moderno.

Pelas técnicas e raciocínios, a análise combinatória foi considerada instrumento tanto para as Ciências da Natureza como para as Ciências Humanas, ressaltando ainda mais a importância aos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade para o ensino básico, ampliando a interdisciplinaridade entre a matemática e as demais ciências e áreas do conhecimento.

Os PCN's apontam que as competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática no âmbito do ensino médio são divididos em três pontos: Representação e Comunicação, Investigação e Compreensão e Contextualização Sociocultural.

Representação e comunicação

• Ler e interpretar textos de Matemática.

• Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).

• Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica

(equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.

• Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

• Produzir textos matemáticos adequados.

• Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

• Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).

• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.

• Formular hipóteses e prever resultados.

• Selecionar estratégias de resolução de problemas.

• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.

• Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.

• Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização sociocultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.

• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

• Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.

• Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

1.3 Análise das dissertações do PROFMAT

Fazendo um estudo tomando como base algumas dissertações do PROFMAT, podemos observar que a dificuldade no estudo do conteúdo de análise combinatória é bem ampla, alcançando tanto alunos quanto professores. Este conteúdo que é de fundamental importância para a formação de um indivíduo pensante, pois sabemos a importância dessa habilidade de raciocinar tanto para a matemática quanto para a vida cotidiana.

Os PCN’s de matemática destacam à importância de estudar combinatória ainda nas séries iniciais, para que o aluno possa ter um olhar mais atento sobre as informações do cotidiano, sabendo associar a matemática às várias outras ciências, assim como utilizar problemas levando em consideração o local a qual o indivíduo está inserido.

Segundo Gildo Gouveia de Oliveira em sua dissertação “Análise Combinatória e Probabilidade: atividades pautadas com foco nos PCNS e no currículo da rede estadual.”, os PCNS direcionam esse estudo de combinatória para as séries iniciais como tratamento de informações, aprendendo a combinar elementos de uma coleção entre outras atividades que não exigem um raciocínio tão complexo, chegando até ao PCN+ onde direciona o aluno a desenvolver um raciocínio combinatório mais potencializado e assim criando estratégias para várias soluções.

Oliveira (2018) baseado nas informações dos PCNS traçou metodologias com atividades contendo questões midiáticas, as quais tem o objetivo de informar, conscientizar ou orientar sobre vários temas atuais e de interesse dos alunos. Produziu questões que vão além do ensino da matemática, afim de interferir positivamente no meio social.

Podemos comprovar que há várias formas distintas de ensinar combinatória, porém precisamos partir do pensamento que nos retire do apenas ensinar fórmulas e gravar resoluções, precisamos pensar e sugerir metodologias que modifiquem o ofício de ensinar, tornando o aprendizado do aluno mais interessante a ele.

Segundo Lucas José Oliveira em sua dissertação “Análise Combinatória e Probabilidades nos concursos públicos de nível médio.”, os alunos associam análise combinatória apenas a arranjos, permutações e combinações, e o autor demonstra com problemas de concursos públicos de nível médio que realmente apenas com esses três tópicos de combinatória conseguiríamos resolver os tais problemas propostos.

Um ponto interessante é a importância mostrada por Oliveira (2018) da Análise Combinatória, explicitando que é um conteúdo que vai além do concluir o ensino médio, pois concurso público é algo desejado por muitos, porém somente os mais bem preparados conseguem aprovação.

Analisando a dissertação de Thiago Miguel Roda “Análise Combinatória: Uma abordagem diferenciada sem a utilização de fórmulas.”, há algo bem interessante que é exatamente o conteúdo de combinatória ensinado sem fórmulas, com base principalmente no Princípio Multiplicativo. Ele ressalta a dificuldade dos alunos e professores com o conteúdo, pois o uso excessivo de fórmulas não envolvem os alunos, que ficam apenas com essa ferramenta como manuseio para solucionar os problemas, e assim não conseguem desenvolver o raciocínio correto para cada um deles.

O principal foco para Roda (2018) é a resolução de problemas, e seu trabalho tem como objetivo exatamente essa resolução sem o uso de fórmulas, e assim ajudar professores, alunos ou todos aqueles que querem entender mais de contagem, a aprender técnicas e metodologias para esse ensino-aprendizado.

O trabalho de Roda (2018) possui uma pesquisa feita com alunos do 2º ano do ensino médio, aplicando alguns exercícios de combinatória. Os alunos inicialmente resolveriam apenas com o conhecimento prévio que já possuíam e a cada resposta o professor instigava os alunos perguntando qual seria a maneira mais eficiente de resolver o problema, e a partir das respostas dadas pelos alunos, o professor apontava ao Princípio Fundamental da Contagem a qual era a base do seu ensino como dito anteriormente.

Observamos com a obra de Roda (2018) a variedade de resoluções de problemas, porém sempre há uma forma que se torna mais eficiente para cada situação, seja ela pelo escasso tempo de uma prova ou pelo raciocínio mais simples que ela exigia. Conseguimos entender que podemos aprender e ensinar combinatória sem o uso excessivo de fórmulas, utilizando uma análise de cada situação que os problemas apresentam e aplicando o raciocínio correto para resolvê-lo.

Analisando a dissertação “Combinatória: Uma proposta para o sexto ano do ensino fundamental.” de Fernando Vicente da Costa, comprovam-se dois pontos já vistos anteriormente, a necessidade de estudar combinatória ainda no ensino fundamental e a dificuldade deste conteúdo por parte dos alunos e professores. Um dos pontos ressaltados na obra de Costa (2018) é a defasagem deste conteúdo na formação de alguns professores, esta formação que na maioria das vezes é feita de maneira complexa e formal, deixando algumas dúvidas em relação a este componente curricular.

A ideia de estudar combinatória desde o ensino fundamental já é orientada pelos PCN’s, na intenção dos alunos se familiarizarem com a ideia de contagem, com situações-problemas associando a matemática ao cotidiano e estimulando sua criatividade e raciocínio lógico, para quando o aluno chegar ao ensino médio estar com esse conhecimento amadurecido.

Outro ponto importante na obra de Costa (2018) é a importância à resoluções de problemas como metodologia de ensino, essa que tem como objetivo desenvolver o potencial do aluno, o estimulando a pensar produtivamente e assim tornando a aula mais interessante e desafiadora. A resolução de problemas se torna mais interessante quando associada a realidade do aluno, a fatos do seu dia a dia , assim como assuntos do seu interesse e da atualidade, fazendo que o mesmo se sinta como parte do problema e objeto dentro do contexto dos mesmos. Assim, a obra de Costa (2018) nos ajuda a compreender e comprovar a importância do estudo de combinatória no ensino fundamental, assim como a utilidade e eficiência da resolução de problemas como metodologia no ensino de combinatória.

Por último analisaremos a dissertação "Resolução de situações-problema da OBMEP por alunos da 3ª série do ensino médio da cidade de União-PI: Uma investigação acerca da análise combinatória." de Antunino da Silva, nela verificamos através da pesquisa do autor os desenvolvimentos e dificuldades dos alunos observados, pois os mesmo estão na 3ª série do ensino médio e foi proposto a eles resolverem problemas da OBMEP de vários níveis, nos ajudando a compreender o grau de suas defasagens com o conteúdo de combinatória.

O trabalho de Silva (2018) ressalta muito bem as estratégias propostas por George Polya como metodologia de ensino, ajudando os alunos a seguirem um raciocínio mais organizado. Porém, antes do ensino da metodologia de Polya aos alunos, foi aplicado um pré-teste com questões da OBMEP de níveis 1 e 2 (ensino fundamental), para observar como estava o conhecimento deles sobre combinatória, e os resultados não foram nada satisfatórios, pois apesar de os mesmos já estarem na 3ª série do ensino médio os índices de erros e questões em branco foram enormes, ultrapassando a quantidade de acertos.

Em seguida, foi ensinado as estratégias de Polya aos alunos, ajudando o aluno a seguir alguns passos para a resolução do problema, esses passos são: Reconhecer a incógnita, organizar os dados, identificar a condicionante, estabelecer um plano de ação, executar o plano de ação e por último revisar a solução. O importante na observação dessa estratégia é a organização das ideias que o aluno terá que se acostumar a ter sempre, e em seguida colocar o plano de ação em prática, esta organização é necessária não apenas para combinatória mais para vários outros conteúdos e diferentes disciplinas.

Após a apresentação das estratégias para a resolução das situações-problema foi aplicado um pós-teste com questões da OBMEP nível 3 (ensino médio), e foi observado um grande avanço no desenvolvimento dos alunos.

Conclui-se que as metodologias de resolução de problemas tanto de Polya como todas as outras existentes, são de extrema eficácia para o conteúdo de combinatória, que é considerado por alunos e professores um conteúdo com muitas dificuldades, seja pela complexidade por parte das fórmulas ou pela exigência de um raciocínio lógico mais potencializado.

Todas as dissertações nos ajudaram entender a importância da análise combinatória na educação básica, não apenas no ensino médio. Mostraram-nos que se trata de um conteúdo que relaciona de forma muito eficiente à matemática ao cotidiano, por isso é tão utilizada em exames como ENEM e em concursos públicos, e ajuda a desenvolver a capacidade de raciocínio do indivíduo o tornando capacitado para solucionar diversos problemas por variados caminhos.

2. Conceitos e aplicações de análise combinatória.

2.1 O que é análise combinatória

A análise combinatória pode ser definida como um conjunto de possibilidades constituído por elementos finitos, utilizando métodos e estratégias que possibilitam a contagem. A análise combinatória está entre os conteúdos considerados mais difíceis entre os alunos e os docentes, pois o mesmo utiliza como base a lógica matemática, onde o aluno necessita da lógica para compreender os critérios apresentados nos problemas e procurar as possíveis estratégias para solucionar o mesmo. Além da lógica é necessário que o aluno tenha uma boa interpretação, senão um problema simples pode se tornar um problema não compreendido e sem solução aparente.

O fato da matemática ser ensinada nos dias de hoje de forma mecânica faz com que esse conteúdo se torne uma dificuldade também para os docentes, pois apenas apresentar fórmulas, conceituar permutações , combinações e etc, não são suficientes para que o aluno tenha sucesso nos problemas propostos pela análise combinatória, ou seja, formar alunos pensantes está entre as maiores dificuldades dos docentes do mundo de hoje. A análise combinatória é um conteúdo muito útil para o cotidiano podendo ser facilmente relacionado com o dia-a-dia, o que em teoria seria mais fácil para a assimilação e associação do aluno. Porém, até os conceitos mais básicos se tornam algo complicado sem a base necessária.

Normalmente a análise combinatória só é estudado no ensino médio e isso pode ser considerado um dos motivos para o problema com o conteúdo, há propostas que esse assunto seja discutido ainda no ensino fundamental, exatamente para habituar o aluno a problemas de contagem, pois há problemas de contagem que não exigem fórmulas e nem cálculos avançados, e sim apenas um raciocínio simples e direto.

2.2 Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O princípio fundamental da contagem (PFC) é o princípio básico da análise combinatória, ele exige uma construção de raciocínio lógico e ensina como verificar possibilidades a partir de certas decisões. O princípio fundamental da contagem; ou também conhecido como princípio multiplicativo diz que, se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é x.y.

Exemplo 2.1. Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Solução:

Para formar os casais teremos que tomar decisões, então vamos fazer da seguinte maneira:

D_1 será os modos de escolher o homem e D_2 será a forma de escolher a mulher.

Como temos 5 homens, então temos 5 modos de escolher o homem, o mesmo vale para a escolha da mulher.

Logo, há $5.5 = 25$ modos que podemos formar o casal.

Exemplo 2.2. Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

Solução:

Para colorir a bandeira precisamos escolher a cor de cada listra, para a primeira listra nós temos 3 possibilidades de cores, pois ainda não escolhemos nenhuma cor então não há restrição; para a segunda listra temos apenas 2 possibilidades pois não podemos repetir a mesma cor escolhida anteriormente; o mesmo raciocínio vale para as outras 5 listras, ou seja, para cada uma das 5 listras restante temos apenas 2 possibilidades.

Então, temos $3.2.2.2.2.2.2 = 3.2^6 = 192$

Exemplo 2.3. Quantos são os números de três dígitos distintos?

Solução:

Começaremos escolhendo pelo primeiro dígito, temos os dígitos de 0 à 9, porém o número 0 não poderá ocupar esta posição então temos 9 modos de escolher esse primeiro dígito. O segundo dígito também pode ser escolhido de 9 modos, pois o zero pode ocupar essa posição, não podendo apenas o número que foi escolhido anteriormente. E para o terceiro dígito temos 8 modos, não podendo apenas os dois números escolhidos para o primeiro e segundo dígito.

Então, podemos concluir que há $9.9.8 = 648$ números de três dígitos distintos.

Nos problemas de combinatória utilizamos sempre algumas estratégias para solucioná-los, porém há três estratégias básicas e fundamentais para solucionarmos de forma correta.

Um deles é a postura, onde devemos sempre nos colocar no lugar do indivíduo que vai executar a ação, isto é, se for um problema de escolher sorvetes, devemos nos colocar no lugar da pessoa que irá escolher o sorvete. Se for para pintar uma bandeira devemos nos colocar no lugar da pessoa que irá pintar e assim por diante.

Outra estratégia importante é a divisão de decisões, devemos dividir sempre que possível as decisões a serem tomadas, como no exemplo de formar um casal dividimos em escolher o homem e escolher a mulher, como no exemplo de escolher os números de três dígitos distintos escolhemos cada um dos três dígitos separadamente.

Um fato interessante é que se não utilizarmos as estratégias ou não usarmos corretamente, tendemos a complicar problemas que a princípio eram bem simples. Para deixar bem claro a importância das estratégias, observemos o exemplo dos números de três dígitos distintos novamente:

Vimos que a forma correta de escolher era começando do primeiro dígito, porém se não tivéssemos começado dessa forma? Então, vamos começar pelo último dígito, logo, esse teria dez possibilidades de números do 0 à 9 pois ainda não utilizamos nenhum número e não temos nenhuma restrição. Para o segundo número temos nove possibilidades, pois a única restrição seria não repetir o número escolhido anteriormente. Porém, ao chegarmos na escolha do primeiro dígito teríamos um grande problema, pois o número de possibilidades de escolher esse dígito não poderia ser dito tão facilmente, isso porque vai depender se o zero foi escolhido anteriormente ou não, se o zero foi escolhido anteriormente temos oito possibilidades, mas se o zero não foi escolhido temos apenas sete possibilidades, já que o zero também não pode ocupar essa posição no número. Logo, isso deixa bem claro que a utilização das estratégias de forma corretamente facilita bastante na hora de solucionarmos problemas de combinatória.

Outra estratégia a ser utilizada é o fato de não adiar dificuldades, pequenas dificuldades ao serem adiadas tendem a ser tornar maiores no decorrer da solução. Logo, é bom começarmos sempre pelas decisões mais restritas. Vimos o que ocorreu ao tentarmos resolver o problema dos números de três dígitos distintos sem seguir a estratégia correta, para sabermos por onde começar é necessário apenas analisar qual o dígito que possui mais restrição, no caso era o primeiro dígito pois o mesmo não podia conter o número zero, então estrategicamente esse era o número a ser escolhido primeiro.

Exemplo 2.4. Uma porta só é aberta quando usamos simultaneamente a chave e o cartão corretos. Se você possui duas chaves e três cartões, quantos testes devemos fazer para garantir que a porta irá abrir?

Solução:

Temos duas decisões a serem tomadas, a escolha da chave e a escolha do cartão, separando-as em decisões temos:

D_1: 2 formas de escolher a chave (chave 1 e chave 2).

D_2: 3 formas de escolher o cartão (cartão 1, cartão 2 e cartão 3).

Combinando temos:

Solução:	**Cartão 1**	**Cartão 2**	**Cartão 3**
Chave 1	**Chave 1/Cartão 1**	**Chave 1/Cartão 2**	**Chave 1/Cartão 3**
Chave 2	**Chave 2/Cartão 1**	**Chave 2/Cartão 2**	**Chave 2/Cartão 3**

Na tabela acima podemos ver todas as combinações possíveis de uma chave com um cartão. Assim, a solução é visual e igual a 6. Por outro lado, poderíamos ter resolvido o problema da seguinte forma:

Note que para cada escolha de chave existem três maneiras para escolher o cartão. Como temos duas chaves, o total de combinações é $2.3 = 6$. Nesse caso, seriam necessários 6 testes para achar a combinação correta.

Exemplo 2.5. Thiago possui 5 blusas, 3 calções e 2 pares sapatos. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

Solução:

Separando em decisões, temos:

D_1: 5 maneiras de escolher a blusa.

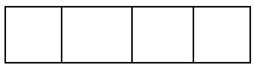
D_2: 3 maneiras de escolher os calções.

D_3: 2 maneiras de escolher os sapatos.

Vamos primeiro contar o número de maneiras que Thiago pode escolher a blusa e a calça. Portanto, para cada calça que Thiago escolhe, ele tem ainda cinco maneiras de escolher a blusa. Como ele possui três calças, o número total de modo de escolher o par (calça e blusa) é $5.3 = 15$.

Agora, para cada maneira de escolher esse par, ele ainda tem duas maneiras de escolher os sapatos. Daí, é fácil concluir que Thiago pode se vestir de $5.3.2 = 30$ maneiras diferentes.

Exemplo 2.6. De quantos modos podemos pintar um tabuleiro 1 × 4 usando apenas três cores, sem pintar casas vizinhas da mesma cor?



Solução:

Semelhante ao exemplo 2.2. podemos solucionar esse problema separando como escolhemos a cor de cada casa do tabuleiro.

Para pintar a primeira casa temos três maneiras diferentes, para a segunda casa temos duas maneiras (pois não podemos utilizar a cor da primeira casa), a terceira casa pode ser pintada de duas maneiras (não podemos repetir a cor da segunda casa), o mesmo ocorre com a quarta casa.

Logo, o total de maneiras de pintar o tabuleiro é $3.2.2.2 = 24$ maneiras.

Exemplo 2.7. Um restaurante tem a disposição de seus clientes além do prato principal, entradas, sobremesas e bebidas. Sabendo que este restaurante possui três tipos de entradas, dois tipos diferentes de sobremesas e dois tipos distintos de bebidas. De quantas maneiras podemos combinar as entradas, as sobremesas e as bebidas?

Solução:

Neste problema possuímos três decisões a serem tomadas, a primeira é qual entrada escolher, a segunda é qual sobremesa e a terceira é qual bebida será escolhida. Pela quantidade de itens que é descrito no problema temos:

D_1: 3 modos de escolher a entrada.

D_2: 2 modos de escolher a sobremesa.

D_3: 2 modos de escolher a bebida.

Podemos resolver esse problema de várias maneiras, umas das formas mais simples é combinando primeiramente as decisões D_1 e D_2, então depois combinamos com D_3. Combinando D_1 e D_2, temos:

Solução	**Entrada 1**	**Entrada 2**	**Entrada 3**
Sobremesa 1	**Combinação 1**	**Combinação 2**	**Combinação 3**
Sobremesa 2	**Combinação 4**	**Combinação 5**	**Combinação 6**

Observe que todas as combinações escritas no quadro acima são distintas, pois compõem ou uma entrada ou uma sobremesa diferente. Logo há 6 modos de combinar as entradas e as sobremesas.

Agora faremos a combinação entre as combinações resultados acima e D_3, então teremos:

Solução	**Bebida 1**	**Bebida 2**
Combinação 1	**1º forma**	**2º forma**
Combinação 2	**3º forma**	**4º forma**
Combinação 3	**5º forma**	**6º forma**
Combinação 4	**7º forma**	**8º forma**
Combinação 5	**9º forma**	**10º forma**
Combinação 6	**11º forma**	**12º forma**

Portanto, nós temos 12 formas diferentes de combinar as três entradas, as duas sobremesas e os dois tipos de bebidas.

Observe de uma maneira mais ampla quais são essas combinações:

<table>
<tr><td rowspan="4">ENTRADA 1</td><td rowspan="2">SOBREMESA 1</td><td>BEBIDA 1</td></tr>
<tr><td>BEBIDA 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SOBREMESA 2</td><td>BEBIDA 1</td></tr>
<tr><td>BEBIDA 2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">ENTRADA 2</td><td rowspan="2">SOBREMESA 1</td><td>BEBIDA 1</td></tr>
<tr><td>BEBIDA 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SOBREMESA 2</td><td>BEBIDA 1</td></tr>
<tr><td>BEBIDA 2</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">ENTRADA 3</td><td rowspan="2">SOBREMESA 1</td><td>BEBIDA 1</td></tr>
<tr><td>BEBIDA 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SOBREMESA 2</td><td>BEBIDA 1</td></tr>
<tr><td>BEBIDA 2</td></tr>
</table>

Desta maneira visualizamos a solução, assim não temos dúvidas de que há 12 maneira de combinarmos as entradas, com as sobremesas e com as bebidas.

Ou ainda utilizaríamos o princípio fundamental da contagem onde:

$$\underline{\ 3\ } \ . \ \underline{\ 2\ } \ . \ \underline{\ 2\ } = 12 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 2.8. Considere uma prova de matemática com cinco questões, onde cada questão possui cinco alternativas de resposta. Quantas maneiras possíveis essa prova pode ser respondida?

Solução:

Sabendo que a prova consiste em cinco questões e cinco alternativas de respostas, temos uma relação entre questões e alternativas de cada uma ou, uma relação entre conjunto e subconjunto.

Vamos considerar cada questão:

- para a primeira questão temos cinco alternativas de resposta;
- para a segunda questão também temos cinco alternativas de respostas;

- para a terceira, quarta e quinta questões temos o mesmo número de alternativas das anteriores.

Então, temos pelo Princípio Fundamental da Contagem:

$$\underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } \cdot \underline{\ 5\ } = 3125$$

Logo, esta prova pode ser respondida de 3125 maneiras diferentes.

Exemplo 2.9. Uma senha de 5 caracteres distintos deve ser formada usando as letras X e Y e os números 0, 1, 2. As senhas devem começar e terminar com letras, mas não é permitido usar o 1 (um) ao lado da letra Y. Quantas senhas podem-se formar atendendo às regras estabelecidas?

Solução:

De acordo com as regras estabelecidas, devemos formar a senha do seguinte modo:

Letra – Número – Número – Número – Letra

Como só podemos utilizar duas letras, temos duas opções, são elas:

X _ _ _ Y

Y _ _ _ X

Agora iremos organizar os números. A única restrição que temos é que o número 1 e a letra Y não podem ficar juntos. Desta forma, temos duas opções para o algarismo um. Exatamente as duas posições não adjacentes a letra Y. Veja:

X 1 _ _ Y

X _ 1 _ Y

Agora basta colocarmos os números 0 e 2. Como nos sobrou apenas duas posições, o primeiro a ser incluído tem duas opções, enquanto o segundo tem apenas uma.

Então, pelo Principio Fundamental da Contagem, temos:

$$2.2.2.1.1 = 8$$

Logo, podemos formar 8 tipos de senhas com as regras estabelecidas acima.

Exemplo 2.10. Quantas senhas com 6 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,e 9?

Solução:

Novamente utilizaremos o PFC para a solução deste exemplo.

$$\_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_$$

Começaremos verificando quantas possibilidades temos para a posição do primeiro dígito. Como ainda não utilizamos nenhum número, então temos 10 opções para esta posição.

Obs: Como se trata de senha, o algarismo 0 (zero) pode preencher a primeira posição, então realmente temos 10 possibilidades.

$$\underline{10} \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_$$

Para a segunda posição temos 9 possibilidades, pois não podemos repetir o algarismo escolhido para o primeiro dígito.

$$\underline{10} \; \underline{\;9} \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_ \; \_\_$$

Para as outras posições seguimos o mesmo raciocínio, não podendo ser repetido os algarismos anteriormente escolhidos. Logo, para a terceira posição temos 8 possibilidades, para a quarta temos 7 e assim por diante.

Observe como ficou nosso raciocínio para o problema:

$$\underline{10} \; \underline{\;9} \; \underline{\;8} \; \underline{\;7} \; \underline{\;6} \; \underline{\;5}$$

Pelo PFC, temos:

$$10.9.8.7.6.5 = 151200$$

Portanto, podemos escrever 151 200 senhas.

Exemplo 2.11. Uma lanchonete tem uma promoção de combo com preço reduzido em que o cliente pode escolher 5 tipos diferentes de sanduíches, 2 tipos de bebida e 4 tipos de sobremesa. Quantos combos diferentes os clientes podem montar?

Solução:

Um combo consiste na montagem de um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa.

Temos:

- 5 opções de sanduíches;
- 2 opções de bebidas;
- 4 opções de sobremesas.

Então pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$5.2.4 = 40$$

Logo, temos 40 formas de montar um combo.

Exemplo 2.12. Um casal e seus cinco filhos se preparam para tirar uma fotografia, sabendo que todos têm que ficar lado a lado e que os pais precisam ficar nas pontas. De quantas maneiras distintas essa fotografia poderá ser tirada?

Solução:

Primeiramente observemos as restrições do enunciado, onde os pais precisam se posicionar nas pontas. Então para isso temos duas formas de organizar os pais:

M __ __ __ __ __ P ou P __ __ __ __ __ M

Para os filhos não há restrições, logo para o primeiro lugar temos 5 possibilidades, para o segundo temos 4 possibilidades e assim por diante até o último que teremos apenas 1 possibilidade. Então para os filhos temos:

$$\underline{\ 5\ }\ \underline{\ 4\ }\ \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 1\ }$$

Como há duas formas de posicionar os pais (como vimos acima), então há:

$$2.5.4.3.2.1 = 240$$

Logo, a fotografia poderá ser tirada de 240 maneiras distintas.

Exemplo 2.13. O campeonato brasileiro de futebol é formado por 20 equipes que jogam entre si, o campeonato ainda consiste em dois turnos (dentro e fora de casa). Sabendo disso, quantos jogos ocorrem no campeonato brasileiro de futebol?

Solução:

Temos duas formas de resolver este problema, uma mais rápida e uma mais detalhada.

Começando pela mais detalhada:

Temos que a primeira equipe jogará com as outras 19 equipes: 19 jogos.

A segunda equipe jogará com as 18 equipes (pois já jogou com a primeira): 18 jogos.

A terceira equipe jogará com as 17 equipes (pois já jogou com a primeira e com a segunda): 17 jogos.

Analogamente isso ocorrerá com todas as equipes até a equipe de número 20 que já jogou todos os jogos, pois foi citada em cada uma das equipes anteriores.

Então é só somarmos os jogos:

$$19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=190 \text{ jogos}$$

Logo, são 190 jogos por turno, como são dois turnos temos 380 jogos no campeonato.

Para analisar a solução mais rápida e direta é necessário uma verificação dos jogos de uma maneira mais específica, pelo fato que são dois turnos. Utilizando o PFC, temos:

$$\underline{\ 20\ } \cdot \underline{\ 19\ } = 380$$

São 20 equipes e cada uma jogará 19 vezes ou, para a primeira equipe temos 20 opções e para a segunda temos 19, pois não poderá repetir a mesma equipe.

A principal dúvida é: Equipe A x Equipe B e Equipe B x Equipe A é a mesma coisa?

A resposta é não, pois o campeonato é composto de dois turnos. Então:

- Equipe A x Equipe B (jogo de ida)
- Equipe B x Equipe A (jogo de volta).

Logo, desta forma obtemos o número de jogos dos dois turnos de uma só vez.

Exemplo 2.14. Quantos números pares de quatro algarismos existem?

Solução:

Começamos separando as informações:

- Número com quatro algarismos;

$$\_\_\_\_ \ \_\_\_\_ \ \_\_\_\_ \ \_\_\_\_$$

- Sabemos que números pares precisam terminar em 0, 2, 4, 6 e 8;

OBS: Como vimos nas estratégias devemos começar pelo dígito com mais restrição, o que nesse caso é o último.

Então para o último dígito temos 5 possibilidades (0, 2, 4, 6 e 8);

Para o primeiro dígito temos 9 possibilidades (pois não pode ser o 0);

Para os demais temos 10 possibilidades (pois não há restrição de serem distintos).

Logo:

$$9.10.10.5 = 4500$$

Portanto, há 4500 números pares de quatro dígitos.

2.3 Fatorial

Consideremos o fatorial de um número natural *n*, para $n \geq 2$, onde representamos como *n*!, como sendo o produto de todos os números naturais menores ou igual a *n*. Para um melhor entendimento, observe alguns fatoriais:

$1! = 1$

$2! = 2.1 = 2$

$3! = 3.2.1 = 6$

$4! = 4.3.2.1 = 24$

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$

$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$

$7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$

Agora que entendemos o que é fatorial, vamos ver algumas operações envolvendo fatorial, onde a nossa maior ferramenta será reescrever um fatorial em relação a outro, para que os mesmos possam se dividir. Um exemplo bem simples é:

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.5!}{5!} = 7.6 = 42$$

As operações utilizando fatorial pode facilitar muito em cálculos mais extensos, faremos o exemplo acima novamente porém sem utilizar a dica da operação com fatorial.

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1} = \frac{5040}{120} = 42$$

Exemplo 2.15. Calcule $\frac{7!}{5!}$:

Solução:

Como o menor fatorial é 5!, colocamos todos em relação a ele. Então:

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.5!}{5!}$$

Agora, efetuando a divisão praticamente concluímos nossa questão.

$$\frac{7.6.5!}{5!} = 7.6 = 42$$

Exemplo 2.16. Calcule $\frac{15!}{10!.5!}$:

Solução:

Neste caso não iremos pelo menor, vamos colocar tudo em relação ao 10!, pois reduz bastante os cálculos que deveríamos efetuar. Logo:

$$\frac{15!}{10!.5!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{10!.5!} = \frac{15.14.13.12.11}{5.4.3.2.1} = \frac{360360}{120} = 3003$$

Lembrando que dividimos o 10! do numerador com 10! do denominador.

Exemplo 2.17. Simplifique a expressão $\frac{(n-4)!}{(n-3)!}$:

Solução:

Temos que:

$(n-4)! = (n-4).(n-3).(n-2).....3.2.1$

$(n-3)! = (n-3).(n-2).....3.2.1$

Portanto, observe que em uma divisão de (n – 4)! Por (n – 3)!, resta apenas (n – 4).

Para uma melhor visualização:

$$\frac{(n-4)!}{(n-3)!} = \frac{(n-4).(n-3).(n-2).....3.2.1}{(n-3).(n-2).....3.2.1} = n-4$$

Exemplo 2.18. Para n natural, n≥2 quanto vale a expressão $n^2.(n-2)!.(1-\frac{1}{n})$.

Solução:

Para solucionar esta questão precisaremos de algumas estratégias de resolução, observe:

$$\begin{aligned} n^2.(n-2)!.(1-\frac{1}{n}) &= n^2.(n-2)!.(\frac{n-1}{n}) \\ &= n.(n-2)!.(n-1) \\ &= n.(n-1).(n-2)! \\ &= n! \end{aligned}$$

Logo, a resposta é n!.

2.4 Permutação

Permutação é o ato de substituir uma coisa por outra ou, trocar os elementos entre si afim de se obter uma nova ordem.

As permutações que abrangeremos será a permutação simples, a permutação com repetição e a permutação circular, apresentando suas aplicações e importâncias, assim também como suas estratégias em resoluções de problemas.

2.4.1 Permutação Simples

O conceito de permutação simples parte do problema onde verificaremos de quantos modos podemos ordenar em fila *n* elementos distintos, ou seja, vamos ordenar *n* elementos em *n* posições de uma fila. Para o primeiro lugar temos n possibilidades de escolha; para o segundo lugar temos n-1 possibilidades, pois apenas tiramos o elemento escolhido no primeiro lugar; para o terceiro lugar temos n-2 possibilidades, pois tiramos os elementos do primeiro e do segundo lugar. Daí em diante segue-se analogamente até chegarmos no último lugar onde teremos apenas uma possibilidade, então temos que:

$$n! = n.(n-1).(n-2).....1 = n!$$

Logo, como podemos verificar, a permutação simples parte da ideia de fatorial, ou seja, quantas formas temos de organizar esses elementos distintos. Utilizando números para um melhor entendimento, vamos permutar os números 1,2 e 3.

Utilizando a fórmula (n!) temos:

$$n! = 3! = 3.2.1 = 6 \text{ combinações possíveis}$$

Para uma melhor visualização, as combinações são as seguintes:

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

Basicamente, apenas verificamos as formas de organizar os números 1,2 e 3.

Exemplo 2.19. De quantas maneiras diferentes 5 amigos podem sentar em um banco para tirar uma foto?

Solução:

Sabendo que são 5 amigos e que os 5 irão aparecer na foto, então a única coisa que mudará será a posição ou ordem em que eles estão sentados.

Então temos uma permutação de 5 elementos, vamos utilizar a fórmula de permutação simples:

$$P_n = n!$$
$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Logo, há 120 maneiras para tirar a foto.

Exemplo 2.20. Thiago possui 10 livros distintos, sendo 5 de Matemática, 3 de Química e 2 de Física. De quantas maneiras Thiago pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesma disciplina permaneçam juntos?

Solução:

Sabemos que Thiago possui livros de 3 disciplinas diferentes, sendo elas Matemática, Química e Física, e que cada livro precisa ficar junto com outro de mesma disciplina. Então faremos a arrumação de maneiras separadas, observe:

Livros de Matemática:

São 5 livros, onde eles podem permutar entre si, então: $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

Livros de Química:

São 3 livros, onde eles podem permutar entre si, então: $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$

Livros de Física:

São 2 livros, onde eles podem permutar entre si, então: $P_2 = 2! = 2.1 = 2$

Então as permutações dos livros são: $120.6.2 = 1440$

Porém, ainda posso permutar a ordem com que arrumo as disciplinas dos livros, como são três disciplinas então tenho:

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

Portanto, há 1440 . 6 maneiras de arrumar os livros, totalizando 8640 maneiras.

Exemplo 2.21. Três casais de amigos se encontram e sentam-se no banco de uma praça. Quantas são as maneiras que os amigos podem se acomodar de modo que os casais sempre fiquem juntos?

Solução:

Cada casal tem que sentar junto, as possibilidades de um casal sentar-se junto é:

Homem e Mulher ou Mulher e Homem

Então para cada casal nós temos 2 possibilidades de permutação.

$$P_2 = 2! = 2.1 = 2$$

Como são 3 casais, eles também podem permutar-se entre si.

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

Logo, o número de maneiras que os três casais de amigos podem sentar-se no banco é:

Portanto há 24 maneiras.

Exemplo 2.22. Os resultados do sorteio da Mega-Sena foram os números 07, 12, 28, 35, 42 e 59. De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido essa sequência de resultados?

Solução:

Este é um problema bem simples de permutação, pois foram sorteados seis números. Os números serão os mesmo apenas a ordem que eles foram sorteados é que irão permutar. Portanto, como são seis números então:

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Logo, este resultado pode ter ocorrido de 720 maneiras distintas.

Exemplo 2.23. Na palavra MESTRADO, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal?

Solução:

A palavra MESTRADO possui oito letras e todas são distintas, então o número de anagramas desta palavra é dado pela permutação de suas letras, então:

$$P_8 = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$$

Logo, há 40320 anagramas distintos da palavra MESTRADO.

Para sabermos quantos deles começam por vogais, precisamos verificar quantas vogais temos na palavra (três).

Como sabemos precisa começar com a vogal, então fixaremos a primeira letra sendo uma vogal. Isso faz com que ainda tenhamos sete letras restantes para se permutarem. Observe:

___ (___ ___ ___ ___ ___ ___ ___)

$$P_7 = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$$

Porém sabemos que são três vogais, então temos:

$$3.P_7 = 3.5040 = 15120$$

Logo, dos 40320 anagramas da palavra MESTRADO, 15120 começam com vogais.

Exemplo 2.24. Considere todos os números formados por seis algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

a) Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1.
b) Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512346 e que número ocupa a 242ª posição.

Solução:

a) Temos que são 6 algarismos (1, 2, 3, 4, 5 e 6) e queremos saber quantos números eu posso formar com eles, para esta primeira parte basta permutarmos os 6 números. Observe:

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Para saber quantos iniciam com o algarismo 1, devemos fixar o algarismo 1 na primeira posição efetuando a permutação apenas com os outros 5 algarismos restantes.

$$\underline{\ 1\ }\ (\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_)$$

Logo, faremos a permutação de apenas 5 elementos.

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Portanto, há 720 números com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 com os algarismos distintos e, desses 120 iniciam com algarismo 1.

b) Um passo importante a fazer para a solução deste problema é entender que podemos separar esses 720 números do item anterior em 6 grupos, onde cada grupo inicia com um algarismo diferente e cada grupo contém 120 elementos como também vimos no item a).

Então, organizando de forma crescente temos:

Números que iniciam com 1: do 1º até 120º;

Números que iniciam com 2: do 121º até 240º;

Números que iniciam com 3: do 241º até 360º;

Números que iniciam com 4: do 361º até 480º;

Números que iniciam com 5: do 481º até 600º;

Números que iniciam com 6: do 601º até 720º.

Agora ficou muito mais fácil saber qual posição ocupa o número 512346, pois:

- Sabemos que está entre a posição 481º e 600º;
- Analisando, observe que este é o menor número que inicia com 5;

Portanto, ele ocupa a primeira posição dos que iniciam com 5 que é a posição de número 481º.

Para achar o número que ocupa a posição 242º, observe:

- Sabemos que é um número que inicia com o algarismo 3;
- O menor número que inicia com o algarismo 3 é 312456, pois está na ordem crescente os algarismos;
- O número 312456 ocupa a posição 241º.

Para acharmos o próximo número basta permutarmos os dois últimos algarismos.

Logo o número que ocupa a posição 242º é 312465.

Exemplo 2.25. Considere a palavra “PROVA” e calcule:

a) Todos os seus anagramas;
b) Seus anagramas que iniciam por A;

c) Seus anagramas que terminam com vogais;

d) Seus anagramas cujas consoantes estejam juntas numa mesma ordem;

e) Seus anagramas cujas consoantes estejam juntas.

Solução:

a) Como a palavra PROVA possui 5 letras, logo os seus anagramas é a permutação de 5 elementos. Então:

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Portanto, a palavra PROVA possui 120 anagramas.

b) Para saber os anagramas que iniciam pela letra A, devemos fixar a letra A e permutar as demais letras restantes. Observe:

$$\underline{\;A\;}\ (\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_)$$

Logo, permutando apenas 4 letras temos:

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Portanto, dos 120 anagramas da palavra PROVA 24 começam com a letra A.

c) Para os anagramas que terminam com vogais, vamos fixar a última posição (pois essa precisa ser vogal). Então temos:

$$\_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \underset{\text{A ou O}}{\_\_\_\_}$$

Logo, eu tenho duas possibilidades para a última posição (A ou O), mas as outras posições irão se permutar normalmente. Portanto:

$$2.P_4 = 2.4! = 2.1.2.3.4 = 48$$

Portanto, há 48 anagramas da palavra PROVA que terminam com vogais.

d) Para os anagramas que precisam ter as consoantes juntas e numa mesma ordem, devemos considerar as três consoantes como ocupando apenas uma posição. Observe:

$$(\,\underline{PRV}\,)\ \_\_\_\_\ \_\_\_\_$$

Ou seja, agora eu possuo apenas três elementos, pois as consoantes precisam estar juntas e na mesma ordem.

OBS: Não é dita qual ordem a consoante deve estar, portanto escolho uma ordem e todas as outras terão o mesmo quantitativo.

Como são 3 elementos, então a permutação será:

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

Portanto, para a condição das consoantes juntas e na mesma ordem há 6 anagramas.

e) Este é bem semelhante ao item anterior, porém as consoantes não precisam estra numa mesma ordem. Então, além de fixar as três consoantes juntas como foi feito no item d), elas podem permutar entre si. Portanto, além do cálculo feito no item d) faremos a permutação também das consoantes. Como são 3 consoantes então:

$$P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$$

Portanto, o número de anagramas é $P_3 . P_3 = 3!.3! = 6.6 = 36$.

Exemplo 2.26. De quantas maneiras podem ser dispostas 4 damas e 4 cavalheiros, numa fila de forma que não fiquem juntos dois cavalheiros e duas damas?

Solução:

Para começar temos apenas duas maneiras de organizar as damas e os cavalheiros para que o critério do problema seja obedecido, são elas:

C-D-C-D-C-D-C-D ou D-C-D-C-D-C-D-C

Como temos 4 cavalheiros e 4 damas, eles podem permutar entre si, então:

- Começando pelo cavalheiro, temos:

$$P_4 . P_4 = 4!.4! = 24.24 = 576$$

- Começando pela dama, temos:

$$P_4 . P_4 = 4!.4! = 24.24 = 576$$

Logo, eu tenho 576 + 576 = 1152 maneiras.

2.4.2 Permutação com elementos repetidos

Usamos a permutação simples quando os elementos do conjunto são distintos, quando há elementos iguais fazemos a permutação de uma forma diferente, pois os elementos iguais podem permutar entre si sem alterar. Para um melhor entendimento observe a palavra CASA, se permutarmos os dois A não alteraria a palavra. Então, o fato dos elementos repetidos não alterar a palavra não conta na permutação, logo devemos subtrair os casos em que isso acontece, então:

Considere um conjunto com n elementos, porém nesse conjunto há a repetição dos elementos *a,b,c,...,z* onde *a+b+c+d+...+z = n*. Como dito acima a permutação simples somente é válida se for feita com os elementos distintos. Então temos *n!* permutações, porém temos que retirar as repetições e fazemos isso pela quantidade que *a,b,c,d,...,z* aparecem representamos as permutações com repetições de elementos de seguinte forma $P_n^{a,b,...,z}$, logo:

$$P_n^{a,b,...,z} = \frac{n!}{a!b!...z!}$$

Exemplo 2.27. Quantos anagramas podem ser formados com a palavra MATEMATICA?

Solução:

Observe que a palavra MATEMATICA, possui letras repetidas. Logo eu preciso calcular os anagramas e retira aquele que as letras iguais se permutam, pois se eu trocar apenas os A a palavra ainda continuará a mesma, ou se eu trocar os T da palavra acontecerá a mesma coisa que com a letra A, ou o M acontecerá o mesmo. Então, usaremos a fórmula de permutação com repetição, onde no numerador estão os elementos para permutação e no denominador a retirada das permutações que se repetem. Observe:

$$P_{10}^{2,3,2} = \frac{10!}{2!.3!.2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.2.3!} = \frac{604800}{4} = 151200$$

Lembrando que 10 é o número de letras da palavra MATEMATICA, com a letra M repetida 2 vezes, a letra A repetida 3 vezes e a letra T repetida 2 vezes.

Portanto, podemos formar 151200 anagramas com a palavra MATEMATICA.

Exemplo 2.28. De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos, um de 5 pessoas e outro de 3 pessoas?

Solução:

Para facilitar a compreensão considere as pessoas como as letras A, B, C, D, E, F, G e H, vamos organizá-las nos grupos. Então:

A B C D E / F G H

Porém, observe que a separação dos grupos ocorre um pequeno fato.

Os grupos: A B C D E / F G H e E D C B A / H G F são iguais.

Logo, temos 8 elementos para permutar, porém desses as permutações dentro dos grupos de forma que não altera o grupo precisa ser retirada. Portanto, trata-se de uma permutação com elementos repetidos, então temos:

$$P_{8}^{5,3} = \frac{8!}{5!.3!} = \frac{8.7.6.5!}{5!.3.2.1} = \frac{336}{6} = 56$$

Logo, podemos dividir de 56 maneiras.

Exemplo 2.29. Em um torneio de futebol de salão, onde os times jogaram 15 partidas, o time de Thiago obteve 8 vitórias, 5 empates e 2 derrotas. De quantas maneiras esses resultados podem ter ocorridos?

Solução:

Sabemos que o time jogou 15 partidas, logo vamos permutar os resultados. Porém, as vitórias são iguais, as derrotas são iguais e os empates também são iguais, então nós tiraremos essas possibilidades de igualdade. Portanto:

$$P_{15}^{8,5,2} = \frac{15!}{8!.5!.2!} = \frac{15.14.13.12.11.10.9.8!}{8!.5!.2!} = \frac{32432400}{240} = 135135$$

Logo, esses resultados podem ter ocorrido de 135135 maneiras diferentes.

Exemplo 2.30. Considere uma prova de 10 questões, onde as respostas são apenas V (verdadeiro) ou F (falso). De quantas maneiras podemos obter 6 V e 4 F?

Solução:

Sabendo que a prova é composta de apenas 10 questões, e que dessas 10 questões 6 são V e 4 são F. Porém, os V não se diferenciam e os F também não, então permutaremos as 10 respostas e retiraremos as respostas iguais pela fórmula da permutação com elementos repetidos:

$$P_{10}^{6,4} = \frac{10!}{6!.4!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!.4.3.2.1} = \frac{5040}{24} = 210$$

Logo, há 210 possibilidades de ter obtido 6 V e 4 F nessa prova.

Exemplo 2.31. Thiago precisa arrumar os CD's de sua casa em uma prateleira, sabendo que Thiago possui 4 CD's (iguais) de Rock, 5 CD's (iguais) de Sertanejo e 3 CD's (iguais) de Pagode. De quantas formas Thiago pode arrumar esses CD's?

Solução:

Para começar a solucionar esse problema é necessário entendemos a ideia do problema. Então para uma melhor compreensão, observe os CD's:

Há 4 CD's de Rock: R R R R;

Há 5 CD's de Sertanejo: S S S S S;

Há 3 CD's de Pagode: P P P.

Considere a seguinte arrumação da prateleira de Thiago:

R R R R S S S S S P P P

Temos 9 CD's para arrumar na prateleira, porém alguns são iguais.

Podemos mudar de lugar 1 de Rock com 1 de Pagode que teremos outra forma de arrumação. Porém, se trocarmos 2 CD's de mesmo gênero, não altera a forma de arrumação pois os CD's são iguais. Portanto, temos uma permutação com elementos repetidos, então:

$$P_{12}^{4,5,3} = \frac{12!}{4!.5!.3!} = \frac{12.11.10.9.8.7.6.5!}{4.3.2.1.5!.3.2.1} = \frac{3991680}{144} = 27720$$

Logo, há 27720 formas de Thiago arrumar os seus CD's.

Exemplo 2.32. Uma moeda é lançada 5 vezes. De quantas maneiras se pode ocorrer 3 caras e 2 coroas?

Solução:

Temos que a moeda é lançada 5 vezes, logo eu possuo 5 resultados (um para cada lançamento). Desses resultados eu preciso ter 3 caras e 2 coroas, então uma possibilidade é:

Consideremos, CARA = C e COROA = K:

C C C K K

Logo, para todas as possibilidades eu sempre vou ter 3 C e 2 K (pois é o que me interessa para a solução), então sempre terei a mesma repetição de 3 C e 2 K. Portanto:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2.1} = \frac{20}{2} = 10$$

Logo, posso obter 3 caras e 2 coroas de 10 maneiras.

2.4.3 Permutação Circular

Dispomos de *n* elementos distintos, e precisamos colocar em *n* posições localizadas em um círculo. Poderíamos pensar que, pelo fato de serem elementos distintos, a permutação simples solucionaria o problema. Porém, os elementos estão dispostos em um círculo ou circunferência, e por este fato algumas permutações não se diferem por causa da rotação.

Portanto com *n* elementos, repetiríamos *n* vezes o mesmo modo com que os elementos estão dispostos, então precisamos retirar essas possibilidades assim como fizemos na permutação com repetição, dividindo pelo número de vezes que se repetem, como eles se repetem *n* vezes, então:

$$PC_n = \frac{n!}{n} \quad \text{ou} \quad PC_n = (n-1)!$$

Exemplo 2.33. De quantos modos 5 crianças podem formar uma roda de ciranda?

Solução:

Este é um exemplo clássico de permutação circular, porém muitos ainda confundem este tipo de permutação com permutação simples.

A primeira vista esta solução seria apenas permutar as 5 crianças. Porém, considere as crianças como A, E, I, O e U, agora analise as rodas:

A E I O U e U A E I O

Observe que as duas rodas são iguais, porque as crianças estão dispostas em uma roda. Portanto, basta virar a roda A E I O U, que ela se torna a roda U A E I O. Logo, este exemplo trata-se de permutação circular, e a nossa fórmula é:

$$PC_n = \frac{n!}{n} \quad \text{OU} \quad PC_n = (n-1)!$$

Então, para n = 5:

$$PC_5 = (5-1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Portanto, podem formar de 24 maneiras.

Exemplo 2.34. Oito membros de uma igreja se colocaram em uma roda para fazer uma oração. De quantas formas eles podem se organizar na roda?

Solução:

Como sabemos, sempre que se trata de organizar em rodas, círculos ou circunferências trata-se de permutação circula. Logo, basta colocarmos na fórmula de permutação circular que resolvemos.

Porém, vamos entender a ideia do problema:

Temos as oito pessoas, e elas podem se organizar de várias maneiras, mas vamos considerar uma:

A B C D E F G H

Essa é uma possibilidade de organização das pessoas para a oração, porém se "rodarmos" obteremos sequências que parecem diferentes, no entanto são a mesma ordem, apenas rodou:

H A B C D E F G ou G H A B C D E F ou F G H A B C D E

Esses são apenas alguns exemplos, como são oito pessoas haverá oito ordens que serão iguais. Por isso que a fórmula de permutação circular há a retirada de sequências iguais.

Portanto:

$$PC_8 = (8-1)! = 7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$$

Logo, há 5040 maneiras das oito pessoas se organizarem para a oração.

Exemplo 2.35. De quantos modos 7 crianças podem brincar de roda, de modo que João e Maria, duas dessas crianças, fiquem sempre juntas?

Solução:

Sabendo que estão dispostos em uma roda, então trata-se de permutação circular. No entanto, há alguns critérios que temos que seguir do problema.

Considerando, a roda em que estão João e Maria:

(J M) ___ ___ ___ ___ ___

O lugar em que João e Maria está será considera apenas uma posição (já que os dois precisam ficar juntos), então temos a permutação circular de 6 elementos:

$$PC_6 = (6-1)! = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

No entanto, há mais um detalhe para a nossa solução. Pois foi considerado apenas João e Maria (nessa ordem) e não Maria e João:

(J M) ___ ___ ___ ___ ___

(M J) ___ ___ ___ ___ ___

Logo, nós temos 2 vezes as possibilidades calculadas acima. Então:

$$120.2 = 240$$

Portanto, há 240 modos.

Exemplo 2.36. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem brincar de roda, de modo que crianças do mesmo sexo não fiquem juntas?

Solução:

Considerando a disposição em uma roda da seguinte forma, onde H são meninos e M são meninas (lembrando que crianças do mesmo sexo não podem ficar juntas):

$$H_1 \_\_\_ H_2 \_\_\_ H_3 \_\_\_ H_4 \_\_\_ H_5 \_\_\_$$

Como ainda não há lugares marcados, então a posição dos meninos continua circular. Pois se girarmos obteremos a mesma possibilidade, então para a posição dos meninos temos:

$$PC_5 = (5-1)! = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

Para a posição das meninas, note que os meninos já estão colocados, portanto a ordem com que as meninas serão colocadas será distintas (pois o menino da direita e o da esquerda serão diferentes). Logo, nós podemos permutá-las, pois para cada posição uma possibilidade diferente. Então:

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

E para finalizar o nosso problema, temos:

$$PC_5 . P_5 = 24.120 = 2880$$

Portanto, a resposta é 2880 maneiras.

Exemplo 2.37. Um grupo constituído por 4 homens e 4 mulheres deve ocupar as oito cadeiras dispostas ao redor de uma mesa circula. O grupo deve ser acomodado de modo que cada homem sente entre duas mulheres. João e Maria estão nesse grupo de pessoas, entretanto, não podem sentar-se lado a lado. Determine o número de diferentes acomodações possíveis dessas oito pessoas?

Solução:

Vamos precisar separar nossa solução em partes, primeiramente vamos posicionar os homens. Lembrando que neste início nenhum lugar está marcado, logo temos permutação circular de 4 lugares (homens), observe:

$$H \_\_\_ H \_\_\_ H \_\_\_ H \_\_\_$$

$$PC_4 = (4-1)! = 3! = 3.2.1 = 6$$

Agora, posicionaremos as mulheres. Lembrando que Maria não pode sentar ao lado de João. Como Maria é a pessoa que possue mais restrição, começaremos por ela, então temos:

H ___ H ___ H ___ H ___

Vamos acomodar João em uma das posições dos homens:

H ___ H ___ J ___ H ___

Logo, das 4 posições das mulheres Maria só pode ocupar 2, pois são as posições que não estão adjacentes a João, Portanto teremos sempre 2 possibilidades de colocar Maria.

Para as outras mulheres não há restrições, então ela poderão permutar-se nas outras 3 posições restantes. Então, temos:

$$PC_4 .2.3! = 3!.2.3! = 6.2.6 = 72$$

Logo, temos 72 possibilidades.

2.5 Arranjos

2.5.1 Arranjos Simples

Utilizamos arranjos simples quando queremos agrupar elementos sem repetições, a ordem e a natureza dos elementos faz com que um grupo seja diferente do outro. Temos um conjunto com *n* elementos e vamos coloca-los em grupos de *p* elementos, assim a ordem que é permutada dentro do grupo e dependendo do elemento que está no grupo faz com que sejam grupos diferentes. Lembrando que *p* é menor ou igual a *n* e os elementos são distintos, e no caso em que *p* é igual a *n* é exatamente quando fazemos a permutação simples, então calcularemos o arranjo simples da seguinte maneira:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemplo 2.38. Em uma competição de tênis de mesa existem 8 jogadores. De quantas formas diferentes poderá ser formado o pódio?

Solução:

Observe que o pódio é formado por três posições, e essas são diferentes (primeiro, segundo e terceiro lugar), então a ordem faz diferença. Logo, trata-se de arranjo.

Portanto, temos 8 elementos para as três posições do pódio. Utilizando a fórmula de Arranjo Simples, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Para n = 8 e p = 3, temos:

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6 = 336$$

O pódio poderá ser formado de 336 maneiras.

Exemplo 2.39. Quantos números formados por três algarismos distintos, escolhidos entre os números 1, 3, 5, 7 e 9, são maiores que 200 e menores que 800?

Solução:

Podemos resolver este problema de duas formas: Princípio Fundamental da Contagem e por Arranjo Simples.

Pelo PFC temos:

$$\underline{\quad\quad}\ \underline{\quad\quad}\ \underline{\quad\quad}$$

Para a primeira posição temos 3 possibilidades, pois como o número precisa ser maior que 200 e menor que 800, não posso utilizar nem o 1 e nem o 9.

Para a segunda posição temos 4 possibilidades pois apenas não podemos repetir o primeiro número escolhido.

Para a terceira posição temos 3 possibilidades pois não podemos repetir os dois números escolhidos anteriormente.

Então temos:

3 . 4 . 3 = 36 números distintos

Resolvendo por Arranjo Simples:

Separaremos em três possibilidades, uma para cada número do primeiro dígito.

1º Começando pelo 3.

_3_ ___ ___

Temos 4 números que podem ocupar a posição do segundo e terceiro dígito:

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 4.3 = 12$$

2º Começando pelo 5.

Analogamente como a primeira temos 12 números.

3º começando pelo 7.

Analogamente como a primeira temos 12 números.

Logo, concluímos que há 12 + 12 + 12 = 36 números distintos.

Exemplo 2.40. Utilizando os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos são os números de quatro algarismos distintos que são divisíveis por 5?

Solução:

Novamente, este problema também pode ser resolvido de duas formas: PFC ou Arranjo Simples.

Utilizando o PFC:

Como vimos nas estratégias, devemos começar pelo dígito com mais restrições que neste caso é o último, pois:

Antes precisaremos do conhecimento de divisibilidade, pois para ser divisível por 5 o número precisa terminar em 5 ou 0, porém não há o número 0 em nossas opções de dígitos. Logo, nosso último dígito precisa ser o 5.

___ ___ ___ _5_

Agora temos 5 possibilidades para o primeiro dígito, 4 possibilidades para o segundo dígito e 3 possibilidades para o terceiro dígito. Logo, temos:

$$5 . 4 . 3 . 1 = 60$$

Portanto, há 60 números.

Utilizando Arranjo Simples:

Ainda temos o 5 como último dígito, pois precisa ser divisível por 5.

Então temos cinco números para os três lugares restantes. Pela fórmula temos:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

Logo, são 60 números.

Exemplo 2.41. Em uma empresa, quinze funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho da empresa. Vamos determinar de quantas maneiras distintas essa escolha pode ser feita?

Solução:

Temos um grupo de 15 pessoas e precisamos agrupar em de 2 em 2, logo faremos um arranjo simples onde n=15 e p=2. Então, temos:

$$A_{15,2} = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15.14.13!}{13!} = 15.14 = 210$$

Logo, temos 210 maneiras distintas de escolha.

Ou ainda, podemos fazer pelo PFC, onde temos 2 vagas e 15 candidatos. Logo:

_15_ . _14_ = 210

O que daria o mesmo resultado e exigiria muito menos cálculo.

Exemplo 2.42. Um número de telefone é formado por 9 algarismos. Determine quantos números de telefone podemos formar com algarismos diferentes, que comecem com 9 e terminem com 0?

Solução:

Mais um exemplo que poderemos resolver de duas maneiras: PFC ou Arranjo Simples.

Pelo PFC, temos que:

9 ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ 0

Temos o número 9 e o número 0 fixos, logo cada um tem apenas uma possibilidade.

Sabendo que são formados por algarismos distintos, logo para o sendo número do meu telefone tenho 8 possibilidades (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8);

Para o meu terceiro número tenho 7 possibilidades (menos o 9, o número 0 e o algarismo escolhido no segundo dígito);

Para o quarto dígito temos 6 possibilidades e assim por diante até chegarmos no 8 dígito que teremos 2 possibilidades.

Então analisando os lugares pelas possibilidades temos:

_1_ _8_ _7_ _6_ _5_ _4_ _3_ _2_ _1_

Pelo PFC, temos:

$$1.8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$$

Portanto, são 40 320 números.

Por Arranjo Simples, temos:

São 9 números porém 2 deles (9 e 0) são fixos, então temos 7 posições para os 8 algarismos que posso usar. Logo, tenho um Arranjo de 8 algarismo de 7 em 7:

$$A_{8,7} = \frac{8!}{(8-7)!} = \frac{8!}{1!} = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$$

Portanto, são 40 320 números.

Exemplo 2.43. Uma família é composta por seis pessoas (pai, mãe e quatro filhos) que nasceram em meses diferentes do ano. Calcule as sequências dos possíveis meses de nascimento dos membros dessa família?

Solução:

Sabendo que 1 ano possui 12 meses, e que os membros da família são 6, teremos um arranjo de 12 tomados de 6 em 6:

$$A_{12,6} = \frac{12!}{(12-6)!} = \frac{12.11.10.9.8.7.6!}{6!} = 12.11.10.9.8.7 = 665280$$

Portanto, há 665 280 sequencias possíveis para os meses de nascimento da família.

2.5.2 Arranjos com Repetição

Quando um conjunto com n elementos distintos, onde selecionaremos p elementos, e podendo se repetir os elementos para formar um novo agrupamento, ou seja, para cada um temos n possibilidades, já que o elemento poderá se repetir. Portanto, isso é o que chamamos de Arranjo com repetições de elementos e calcularemos da seguinte forma $A_{(n,p)} = n^p$, onde n é o número de elementos do conjunto e p é a quantidade de elementos por agrupamento.

Exemplo 2.44. Com os algarismos 1, 3, 5, 7, 9, quantos números de três algarismos são possíveis escrever?

Solução:

Temos três posições:

$$\_\_\_\_ \; \_\_\_\_ \; \_\_\_\_$$

Para essas três posições temos cinco algarismos, são eles 1, 3, 5, 7 e 9. Um ponto importante é o fato dos algarismos poderem se repetir, logo tenho 3 posições para os cinco algarismos.

Podemos resolver de duas maneiras: PFC ou Arranjos com repetição de elementos.

Por Arranjo com repetição temos:

Temos cinco algarismos para as três posições, então é um arranjo de 5 elementos de 3 em 3. Logo n = 5 e p = 3, basta colocarmos na fórmula:

$$A_{(n,p)} = n^p$$
$$A_{(5,3)} = 5^3 = 125$$

Portanto, são possíveis escrever 125 números.

Utilizando o PFC, temos:

____ ____ ____

Podemos repetir os números, então temos 5 possibilidades para cada posição, logo:

$$5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 125$$

Portanto, são possíveis 125 números.

Exemplo 2.45. Quantos números de quatro algarismos são múltiplos de 5?

Solução:

Para este problema vamos analisar as posições a serem ocupadas de uma a uma.

____ ____ ____ ____

- Para a primeira posição, temos 9 possibilidades (pois o zero não pode ocupar esta posição):
- Para a segunda e a terceira posição podemos utilizar qualquer um dos 10 algarismos (de 0 à 9), pois não há restrição quanto a repetição, então temos um arranjo com repetição de 10 algarismos de 2 a 2:

$$A_{(10,2)} = 10^2 = 100$$

- Para a quarta posição, temos apenas 2 possibilidades. Pois pelas regras de divisibilidade para o número ser divisível por 5 precisa terminar em 5 ou 0.

Logo, temos:

$$9 \,.\, 100 \,.\, 2 = 1800$$

Portanto, há 1800 números de quatro algarismos divisíveis por 5.

Exemplo 2.46. Numa escola com 1000 alunos há armários individuais identificados por um código constituído por uma sequência de três números. O número de armários existentes é igual ao número máximo de códigos que é possível formar.

Pretende-se saber se há armários para todos os alunos, sabendo que não há códigos repetidos.

Solução:

Temos três posições no código:

$$\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_$$

Para cada posição temos 10 possibilidades (pois como se trata de códigos, o zero pode ocupar a primeira posição), então temos um arranjo com repetição de 10 algarismos de 3 em 3. Logo:

$$A_{(10,3)} = 10^3 = 1000$$

Poderíamos também resolver pelo PFC, onde para cada posição 10 possibilidades. Então:

$$10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 1000$$

Portanto, há possibilidade de 1000 armários individuais que é exatamente o número de alunos da escola.

Exemplo 2.47. Quantas palavras com 4 letras é possível formar utilizando as 26 letras do nosso alfabeto?

Solução:

Trata-se de um exemplo bem simples, pois temos 4 posições:

$$\_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_\ \_\_\_$$

Para esses quatros espaços temos 26 letras, onde podemos repetir sem problemas. Então trata-se de arranjos com repetição de elementos de 26 elementos de 4 em 4: Logo temos:

$$A_{(26,4)} = 26^4 = 456976$$

Portanto, é possível formar 456 976 palavras.

Exemplo 2.48. Quatro amigos vão a uma panificadora para comprar um bolo cada. Sabendo que nesta panificadora há seis tipos diferentes de bolo de quantas maneiras esses amigo podem comprar os bolos?

Solução:

Temos quatro amigos, então temos quatro lugares para escolha pois cada amigo irá escolher um bolo.

Temos também seis opções de bolo que podem ser escolhidos, lembrando que nada impede que dois amigos escolham o mesmo sabor de bolo.

Logo, temos um arranjo de 6 elementos tomados de 4 em 4, então:

$$A_{(6,4)} = 6^4 = 1296$$

Portanto, há 1296 maneiras dos amigos escolherem os bolos.

2.6 Combinações

2.6.1 Combinações Simples

Dispomos de um conjunto com *n* elementos distintos e organizaremos em subconjuntos de *p* elementos, a princípio pode-se confundir combinações com arranjos, porém arranjos são diferenciados pela ordem e pela natureza dos seus elementos e nas combinações há a diferenciação apenas pela natureza dos elementos, ou seja, a ordem não importa.

Para um melhor entendimento, considere os conjuntos:

A={1,2,3}, B={2,3,1}, C={3,2,1}, D={1,3,2}, E={2,1,3}, F={3,1,2}

Observe que em todos os seis conjuntos têm os elementos 1, 2 e 3.

A diferença entre arranjo e combinações é bem simples, para arranjo nós temos 6 grupos diferentes pois a ordem em que os elementos estão dentro do conjunto importa.

Já em combinações os grupos A, B, C, D, E, F são iguais, pois os seus elementos são os mesmos e a sua ordem dentro do conjunto não importa, pois todos os 6 conjuntos são formados pelos mesmos elementos 1, 2 e 3.

Observe essa diferença aplicada nos problemas abaixo:

- Um supermercado disponibilizou três vagas para os cargos de Fiscal, Operador de Caixa e Repositor. Quantas são as formações possíveis sabendo que dez pessoas se candidataram a essas vagas?
- Um supermercado disponibilizou três vagas para o cargo de Operador de Caixa. Quantas são as formações possíveis sabendo que dez pessoas se candidataram a essas vagas?

Observando os dois problemas, aparentemente eles seguem o mesmo raciocínio apesar de haver diferenças visíveis em seus comandos. Sabendo que ambos possuem três vagas, então tendemos a separar um grupo com três lugares (vagas). Porém, observemos um ponto fundamental:

- ✓ No primeiro problema possuímos cargos diferentes, no caso são Fiscal, Operador de Caixa e Repositor, logo isto simboliza diferença e a ordem como organizamos os candidatos altera pela posição, ou seja, considere candidatos:

  A, B e C

  E os grupos:

  1={A= Fiscal, B= Operador de Caixa e C= Repositor}

  2={B= Fiscal, C= Operador de Caixa e A= Repositor}

  Logo eles são grupos diferentes pois no primeiro grupo A é Fiscal e no segundo grupo A é Repositor, então está claro que não são grupos (formações) iguais, como a ordem importa trata-se de arranjos.
- ✓ No segundo problema os cargos são iguais, todas as vagas são para Operador de Caixa, então não há diferença na posição da formação, ou seja, considere candidatos:

  A, B e C

  E os grupos:

  1={A= Operador de Caixa, B= Operador de Caixa e C= Operador de Caixa}

2={B= Operador de Caixa, C= Operador de Caixa e A= Operador de Caixa}

Observe que são grupos iguais pois os elementos de ambos os conjuntos são A, B e C e os cargos são os mesmos, não importando a ordem. Logo, as formações {A,B,C}, {A,C,B}, {B,A,C}, {B,C,A}, {C,A,B}, {C,B,A} são iguais e devem ser contadas como uma única formação no segundo problema. Claramente podemos perceber que o segundo problema trata-se de combinações pois a ordem não importava nas formações.

Então, considere *n* como quantidade de elementos de um conjunto e *p* como quantidade de elementos de cada grupo, onde *p* é um natural menor ou igual a *n*. Logo, calculamos combinações simples como:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemplo 2.49. Quantas comissões de 3 componentes podemos formar com 15 alunos de uma turma?

Solução:

Como iremos formar uma comissão onde não há cargos nem diferença de função, a ordem nesse caso não importa.

Portanto como a ordem não importa trata-se de uma combinação, então utilizaremos a fórmula de combinação simples, pois também não podemos repetir o mesmo aluno duas vezes em uma equipe.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Como são 15 alunos e a comissão é composta de apenas 3 componentes, nesse problema temos:

n = 15

p = 3

$$C_{15,3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!.12!} = \frac{15.14.13.12!}{3.2.1.12!} = \frac{2730}{6} = 455$$

Portanto, podemos formar 455 comissões.

Exemplo 2.50. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

Solução:

Sabendo que as comissões precisam ser formadas por 5 pessoas, e dessas 5 precisamos escolher exatamente 3 homens, então as outras duas vagas serão de mulheres. Então:

- Escolher 3 dos 5 homens;
- Escolher 2 das 4 mulheres.

Logo:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (Homens)}$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2}{2.2} = \frac{24}{4} = 6 \text{ (Mulheres)}$$

Então:

$$C_{5,3}.C_{4,2} = 10.6 = 60$$

Portanto, podemos formar 60 comissões.

Exemplo 2.51. Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução:

Inicialmente, vamos pensar em como essas comissões podem ser formadas, isto é, só é possível formar comissões com pelo menos 3 homens da seguinte forma:

- 3 homens e 2 mulheres;
- 4 homens e 1 mulher;
- 5 homens.

Para 3 homens e duas mulheres:

$$C_{5,3}.C_{4,2} = 10.6 = 60$$

Para 4 homens e 1 mulher:

$$C_{5,4}.C_{4,1} = 5.4 = 20$$

Para 5 homens:

$$C_{5,5} = 1$$

Portanto, o número de comissões é 60 + 20 + 1 = 81 comissões.

Exemplo 2.52. De quantos modos é possível dividir 15 atletas em três times de 5 atletas, cujos os times são Flamengo, Vasco e Fluminense?

Solução:

Temos 15 atletas para compor os três times, note que os times possuem nomes logo são diferentes. Portanto vamos a seleção:

Para o Flamengo, temos 15 jogadores para selecionar 5, então:

$$C_{15,5} = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5!.10!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{120.10!} = \frac{360360}{120} = 3003$$

Para o Vasco, temos agora apenas 10 jogadores para selecionar 5, então:

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!.5!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{120.5!} = \frac{30240}{120} = 252$$

Para o Fluminense, temos somente 5 jogadores e vamos ter que selecionar os 5, mas vamos fazer os cálculos para constar:

$$C_{5,5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!.0!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

Logo, podemos dividir de $C_{15,5}.C_{10,5}.C_{5,5} = 3003.252.1 = 756756$ maneiras.

Exemplo 2.53. De uma turma de oito alunos, entre eles Carlos e Thiago, três serão escolhidos para representar a turma em uma gincana escolar. Sabendo que Carlos e Thiago não se dão bem e, portanto, não ficarão juntos quantos são os grupos que podem ser formados?

Solução:

Para a solução deste problema, nós teremos três possibilidades de formação de grupos, são elas:

- Carlos está no grupo e Thiago não está;
- Thiago está no grupo e Carlos não está;
- Ambos não estão no grupo.

Para a primeira possibilidade, onde somente Carlos está no grupo, ainda temos que escolher membros para as outras duas vagas restantes. Então:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{2!.4!} = \frac{30}{2} = 15$$

Para a segunda possibilidade, onde somente Thiago está no grupo, também temos que escolher os membros das outras duas vagas. Então:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{2!.4!} = \frac{30}{2} = 15$$

Para a terceira possibilidade, onde nenhum dos dois está no grupo, temos que escolher os membros para as três vagas. Então:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!.3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3!} = \frac{120}{6} = 20$$

Portanto, calculamos todas as combinações possíveis para a formação dos grupos que são 15 + 15 + 20 = 50 grupos.

Exemplo 2.54. Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de salada de frutas, contendo 6 espécies diferentes de frutas podem ser feitas?

Solução:

Temos 10 frutas e dessas 10 precisamos escolher 6. Então temos uma combinação de 10 elementos de 6 em 6, então:

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!.4!} = \frac{5040}{24} = 210$$

Portanto, podemos fazer 210 tipos de saladas de frutas.

Exemplo 2.55. Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado?

Solução:

Vamos separar as nossa combinações de acordo com cada posição discriminada acima, temos:

- Goleiro: 3 para 1 vaga = $C_{3,1}$
- Zagueiro: 8 para 4 vagas = $C_{8,4}$
- Meio campista: 10 para 4 vagas = $C_{10,4}$
- Atacante: 6 para 2 vagas = $C_{6,2}$

Resolvendo cada uma das combinações:

$$C_{3,1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3.2!}{1.2!} = 3$$

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8.7.6.5.4!}{4!.4!} = \frac{1680}{24} = 70$$

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10.9.8.7.6!}{4!.6!} = \frac{5040}{24} = 210$$

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6.5.4!}{2!.4!} = \frac{30}{2} = 15$$

Fazendo o produto das combinações, temos:

$$3 \,.\, 70 \,.\, 210 \,.\, 15 = 661\ 500$$

Portanto, temos 661 500 maneiras do time ser formado.

2.6.2 Combinações com repetição

Considere um conjunto com *n* elementos onde temos que escolher *p* elementos, podendo escolher o mesmo elemento até *p* vezes. Nas combinações simples não podemos repetir os elementos de escolha, já nas combinações com repetições como o próprio nome sugere esses elementos podem se repetir, essa diferença é mais fácil ser notada na prática, observe:

- De quantos modos podemos comprar dois livros de disciplinas diferentes, sabendo que nessa livraria há somente livros de matemática, física e química?
- De quantos podemos comprar dois livros, sabendo que nessa livraria há somente livros de matemática, física e química?

Observe que no primeiro problema não se pode repetir a disciplina dos livros a serem escolhidos, então temos uma combinação simples, pois escolhemos o primeiro livro e depois temos que escolher o segundo que seja diferente do primeiro que foi escolhido anteriormente.

Já no segundo problema, podemos comprar livros de mesma disciplina, então precisamos escolher dois livros não importando se são iguais ou não, já que os livros podem repetir, então no segundo problema temos uma combinação com repetição.

Calculamos as combinações com repetições da seguinte maneira:

$$C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemplo 2.56. Thiago foi a uma sorveteria e queria comprar um sorvete com 4 bolas, a sorveteria possui 3 sabores: chocolate, baunilha e morango. De quantos modos diferentes Thiago pode fazer esta compra?

Solução:

Perceba que esta combinação, é possível repetir a ordem de dois ou mais sabores, logo trata-se de uma combinação com repetição. Se temos 3 sabores disponíveis e queremos uma combinação para 4 bolas, pela fórmula obtemos:

Temos que n = 3 (números de sabores) e p = 4 (número de bolas do sorvete).

$$C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{3+4-1,4} = \frac{(3+4-1)!}{4!(3-1)!}$$

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!.2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2} = \frac{30}{2} = 15$$

Logo, Thiago pode fazer a compra do sorvete de 15 modos.

Exemplo 2.57. Um supermercado possui 6 marcas diferentes de biscoitos de chocolate. De quantas formas pode ser feita uma compra de 8 pacotes de biscoitos de chocolate neste supermercado?

Solução:

A solução deste problema pode ser feita de duas maneiras: por Permutação ou Combinação com repetição.

Repare que não há restrição em ser feita a compra de todos os biscoitos da mesma marca, então pode haver repetição normalmente.

Por combinação com repetição:

O maior segredo de problemas como este é saber do que se trata (combinações simples, combinações com repetição, permutação e etc), porém basta verificar que não há restrição na compra de biscoitos da mesma marca, ou seja, pode haver repetição.

Então, temos n = 6 (número de marcas de biscoito de chocolate) e p = 8 (quantidade de pacotes que será comprado). Logo:

$$C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{6+8-1,8} = \frac{(6+8-1)!}{8!(6-1)!}$$

$$C_{13,8} = \frac{13!}{8!.5!} = \frac{13.12.11.10.9.8!}{8!.5.4.3.2.1} = \frac{154440}{120} = 1287$$

Portanto, 1287 maneiras de comprar os biscoitos de chocolate.

Por permutação, é necessário obter um raciocínio e uma ideia mais generalizada do problema:

Vamos representar os pacotes de biscoitos por palitinhos (|), e vamos comprar oito pacotes, então:

| | | | | | | |

Agora vamos representar as 6 marcas de biscoitos, e uma forma de fazer essa compra:

Marca 1		Marca 2		Marca 3		Marca 4		Marca 5		Marca 6
| |	+	|	+		+	| |	+	| | |	+	|

Observe que desta forma foi comprado 2 pacotes da Marca 1, 1 pacote da Marca 2, nenhum pacote da Marca 3, 2 pacotes da Marca 4, 3 pacotes da Marca 5 e 1 pacote da Marca 6.

Marca 1		Marca 2		Marca 3		Marca 4		Marca 5		Marca 6
	+		+	| | | |	+	| | | |	+		+	

Veja que dessa vez foi comprado apenas 4 pacotes da Marca 3 e 4 pacotes da Marca 4.

Na verdade o que está sendo feito é intercalar os 5 sinais de + no meio dos 8 palitinhos, ou seja, na verdade temos 13 elementos no problema (5 + e 8 | = 13).

Considerando os elementos | | | | | | | | + + + + +, vamos fazer a permutação desses elementos, onde temos 13 elementos com repetição de 8 | e 5 +, logo uma permutação com repetição:

$$P_{13}^{8,5} = \frac{13!}{8!.5!} = \frac{13.12.11.10.9.8!}{8!.5.4.32.1} = \frac{154440}{120} = 1287$$

Portanto há 1287 maneiras.

Exemplo 2.58. De quantos modos é possível comprar 10 bolos em uma padaria que oferece três sabores Leite, Chocolate e Maracujá, sendo que pelo menos dois de cada um dos sabores ofertados devem ser comprados?

Solução:

Temos uma restrição, então iremos começar por ela. Sabemos que pelo menos dois de cada sabor de bolo tem que ser comprado, então temos a seguinte condição:

L L C C M M __ __ __ __

Repare acima que seis bolos já estão certos, que será os 2 de cada sabor, então temos apenas 4 bolos que eu posso na verdade escolher.

Logo, vamos escolher os 4 bolos que faltam, optando entre os 3 sabores. Então:

$$C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{3+4-1,4} = \frac{(3+4-1)!}{4!(3-1)!}$$

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!.2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2.1} = \frac{30}{2} = 15$$

Portanto, posso comprar de 15 modos.

Exemplo 2.59. Quantas são as soluções inteiras positivas da equação x + y + z = 8?

Solução:

Logicamente, temos que as soluções com x = 0, ou y = 0, ou z = 0 são descartadas, logo x, y, z ≥ 1.

Considere x = a + 1, y = b + 1 e z = c + 1, então temos que:

$$x + y + z = 8 \quad \rightarrow \quad a + 1 + b + 1 + c + 1 = 8$$

$$a + b + c = 5 \qquad \text{então,}$$

$$C_{n+p-1,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{3+5-1,5} = \frac{(3+5-1)!}{5!(3-1)!}$$

$$C_{7,5} = \frac{7!}{5!.2!} = \frac{7.6.5!}{5!.2.1} = \frac{42}{2} = 21$$

Portanto, há 21 soluções.

Exemplo 2.60. Seis alunos de Manaus foram vencedores de um torneio de Matemática, um da escola A, três da escola B e dois da escola C. Na cerimônia de premiação, eles foram colocados em fila, um ao lado do outro, de forma aleatória. Quantas formações existem se alunos de mesma escola não podem ficar juntos?

Solução:

Vamos determinar todas as possibilidades que alunos da escola A não fiquem juntos utilizando o modelo abaixo que representa uma possibilidade:

__ C __ C __ A

Agora temos que posicionar as letras B nos espaços vagos. Veja primeiramente que podemos permutar as letras acima entre si, ou seja, temos P_3^2, além disso, temos $C_{4,3}$ maneiras de posicionar as letras B, logo temos $P_3^2.C_{4,3}$, no entanto, estamos contanto as possibilidades, também, que alunos da escola C fiquem juntos e, portanto, devemos subtrair essas formações. Usando o mesmo modelo temos uma possível formação:

__ C C __ A __

Considerando <u>CC</u> como uma única letra temos P_2 que são as permutações de C com A, além disso, vamos posicionar as letras B nos espaços vagos, isto é, $C_{3,3}$. Concluímos então que temos:

$$P_3^2.C_{4,3} - P_2\,.C_{3,3} =$$

$$\frac{3!}{2!}.\frac{4!}{3!.(4-3)!} - 2!.\frac{3!}{3!.(3-3)!} =$$

$$\frac{3.2!}{2!}.\frac{4.3!}{3!.1!} - 2!.\frac{3!}{3!.1} = 3.4 - 2.1 = 12 - 2 = 10$$

Portanto, é possível 10 formações.

2.7 Princípio da inclusão-exclusão

Com certeza já estudamos este princípio, porém o vimos no assunto de conjuntos e não como método de contagem.

Quando temos dois ou mais conjuntos e queremos saber o número de elementos (cardinalidade) desses conjuntos ou da intersecção dos mesmos utilizamos o princípio da inclusão-exclusão.

Primeiramente, tivemos o nosso contato inicial utilizando a teoria dos conjuntos com apenas dois conjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Onde n(A) é o número de elementos do conjunto A, n(B) é o número de elementos do conjunto B e $n(A \cap B)$ é o número de elementos de A e B ao mesmo tempo.

Porém, esta fórmula não é restrita a apenas dois conjuntos. A mesma pode ser aplicada a problemas que envolvem mais de dois conjuntos.

Para três conjuntos, temos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Para quatro conjuntos, temos:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$$

Podemos aplicar esta fórmula até *n* conjuntos, observe:

Considere os conjuntos A_1, A_2, ..., Na, queremos saber quantos elementos há na união de todos esses conjuntos.

Utilizando:

S_1 = A soma das cardinalidades de todos os conjuntos individualmente;

S_2 = A soma das cardinalidades das intersecções dos conjuntos tomados de 2 a 2;

S_3 = A soma das cardinalidades das intersecções dos conjuntos tomados de 3 a 3;

S_n = A soma das cardinalidades das intersecções dos conjuntos tomados de n a n;

Então:

$S_1 = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_n)$

$S_2 = n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + ... + n(A_{n-1} \cap A_n)$

.

.

.

$S_n = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n)$

Logo, $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$

Para um melhor entendimento, acompanhe os exemplos:

Exemplo 2.61. Em um concurso público três questões A, B e C foram analisadas quanto a quantidade de acertos. Verificou-se que 600 pessoas acertaram o item A, 550 o item B, 350 o item C, 250 os itens A e B, 200 os itens B e C, 150 os itens A e C e 100 os três itens. Pede-se:

(a) Quantos acertaram exatamente dois itens?

(b) Quantos acertaram exatamente um item?

(c) Quantos acertaram pelo menos dois itens?

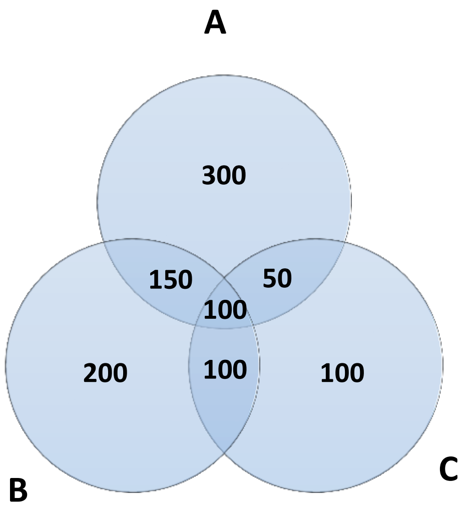
Solução:

Vamos primeiramente separar as informações, assim como aprendemos em problemas de conjuntos:

$n(A) = 600$, $n(B) = 550$, $n(C) = 350$

$n(A \cap B) = 250$, $n(B \cap C) = 200$, $n(A \cap C) = 150$

$n(A \cap B \cap C) = 100$



a) Para saber quantas pessoas acertaram exatamente duas questões, basta verificar as intersecções de dois a dois conjuntos. Porém, devemos lembrar que está sendo contado nas três intersecções também a intersecção dos três conjuntos. Logo, devemos subtraí-la de cada uma delas:

   (250 – 100) + (200 – 100) + (150 – 100) = 150 + 100 + 50 = 300

   Portanto, 300 acertaram exatamente dois itens.

b) Vamos começar entendendo a ideia desse tipo de contagem:

   Queremos saber quantos acertaram exatamente um item, então precisamos subtrair do número de A as intersecções, porém devemos retirar das intersecções de dois a dois a intersecção dos três conjuntos, observe:

   $n(A) = 600$, $n(A \cap B) = 250$, $n(A \cap C) = 150$, $n(A \cap B \cap C) = 100$

   Somente A e B: $n(A \cap B) = 250 - n(A \cap B \cap C) = 100 = 250 - 100 = 150$.

   Somente A e C: $n(A \cap C) = 150 - n(A \cap B \cap C) = 100 = 150 - 100 = 50$.

   Para somente A, devemos retirar todas as intersecções:

   $$n(A) - (\text{Somente A e B} + \text{Somente A e C} + n(A \cap B \cap C)) =$$
   $$= 600 - (150 + 50 + 100) = 600 - 300 = 300$$

   Para o conjunto B, temos:

   $n(B) = 550$, $n(A \cap B) = 250$, $n(B \cap C) = 200$, $n(A \cap B \cap C) = 100$

   Somente A e B: $n(A \cap B) = 250 - n(A \cap B \cap C) = 100 = 250 - 100 = 150$.

   Somente B e C: $n(B \cap C) = 200 - n(A \cap B \cap C) = 100 = 200 - 100 = 100$.

   Para somente B, devemos retirar todas as intersecções:

   $$n(B) - (\text{Somente A e B} + \text{Somente B e C} + n(A \cap B \cap C)) =$$
   $$= 550 - (150 + 100 + 100) = 550 - 350 = 200$$

   Para o conjunto C, temos:

   $n(C) = 350$, $n(A \cap C) = 150$, $n(B \cap C) = 200$, $n(A \cap B \cap C) = 100$

Somente A e C: $n(A \cap C) = 150 - n(A \cap B \cap C) = 100 = 150 - 100 = 50$.

Somente B e C: $n(B \cap C) = 200 - n(A \cap B \cap C) = 100 = 200 - 100 = 100$.

Para somente C, devemos retirar todas as intersecções:

$$n(C) - (\text{Somente A e C} + \text{Somente B e C} + n(A \cap B \cap C)) =$$

$$= 350 - (50 + 100 + 100) = 350 - 250 = 100$$

Logo, para sabermos quantos acertaram exatamente um item somamos:

$$\text{Somente A} + \text{Somente B} + \text{Somente C} = 300 + 200 + 100 = 600$$

Portanto, 600 pessoas.

c) Para essa resposta, vamos utilizar os cálculos feitos no item a), pois para acertar pelo menos dois itens basta somar os que acertaram 2 itens e os que acertaram 3 itens.

- Com dois itens calculamos no item a) e são 300 pessoas;
- Com três itens é a intersecção dos três conjuntos que é 100 pessoas.

Portanto, 300 + 100 = 400.

Logo, 400 pessoas acertaram pelo menos dois itens.

Exemplo 2.62. Quantos números do conjunto $A=\{1, 2, 3, ... , 1000\}$ são múltiplos de 4 ou de 6?

Solução:

Um ponto importante do problema é o “ou” do enunciado, pois o “ou” é a união dos múltiplos de 4 e de 6.

Considere:

X = conjunto dos múltiplos de 4 de 1 a 1000.

Y = conjunto dos múltiplos de 6 de 1 a 1000.

Vamos agora descobrir o número de elementos de cada conjunto:

$n(X) = \{4K: 0 < 4K \leq 1000\} \rightarrow 0 < K \leq 1000/4 \rightarrow 0 < K \leq 250$

$n(X) = 250$

$n(Y) = \{6K: 0 < 6K \leq 1000\} \rightarrow 0 < K \leq [1000/6] \rightarrow 0 < K \leq 166$

$n(Y) = 166$ (pois só queremos a parte inteira).

Para descobrirmos os elementos da intersecção de X e Y, devemos verificar os elementos que são múltiplos do MMC de 4 e 6, logo serão múltiplos dos dois ao mesmo tempo.

MMC (4,6) = 12

$n(X \cap Y) = \{12K: 0 < 12K \leq 1000\} \rightarrow 0 < K \leq [1000/12] \rightarrow 0 < K \leq 83$

$n(X \cap Y) = 83$ (pois só queremos a parte inteira).

Agora, utilizamos a fórmula:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$$

$$n(X \cup Y) = 250 + 166 - 83$$

$$n(X \cup Y) = 333$$

Portanto, são 333 números.

Exemplo 2.63. Quantos números do conjunto B={1, 2, 3, ... , 2000} são múltiplos de 3, de 4 ou de 5?

Solução:

Vamos resolver do mesmo jeito que resolvemos a questão anterior, porém teremos um pouquinho mais de trabalho pois agora são três conjuntos.

Considere:

X = conjunto dos múltiplos de 3 de 1 a 2000.

Y = conjunto dos múltiplos de 4 de 1 a 2000.

Z = conjunto dos múltiplos de 5 de 1 a 2000.

Vamos agora descobrir o número de elementos de cada conjunto:

$n(X) = \{3K: 0 < 3K \leq 2000\} \rightarrow 0 < K \leq [2000/3] \rightarrow 0 < K \leq 666$

$n(X) = 666$ (pois só queremos a parte inteira).

$n(Y) = \{4K: 0 < 4K \leq 2000\} \rightarrow 0 < K \leq 2000/4 \rightarrow 0 < K \leq 500$

$n(Y) = 500$

$n(Z) = \{5K: 0 < 5K \leq 2000\} \rightarrow 0 < K \leq 2000/5 \rightarrow 0 < K \leq 400$

$n(Z) = 400$

Para descobrirmos os elementos da intersecção de X e Y, X e Z, Y e Z, X e Y e Z, devemos verificar os elementos que são múltiplos do MMC de cada um deles.

MMC (3,4) = 12

$n(X \cap Y) = \{12K: 0 < 12K \leq 2000\} \rightarrow 0 < K \leq [2000/12] \rightarrow 0 < K \leq 166$

$n(X \cap Y) = 166$ (pois só queremos a parte inteira).

MMC (3,5) = 15

$n(X \cap Z) = \{15K: 0 < 15K \leq 2000\} \rightarrow 0 < K \leq [2000/15] \rightarrow 0 < K \leq 133$

$n(X \cap Z) = 133$ (pois só queremos a parte inteira).

MMC (4,5) = 20

$n(Y \cap Z) = \{20K: 0 < 20K \leq 2000\} \rightarrow 0 < K \leq 2000/20 \rightarrow 0 < K \leq 100$

$n(Y \cap Z) = 100$

MMC (3,4,5) = 60

$n(X \cap Y \cap Z) = \{60K: 0 < 60K \leq 2000\} \rightarrow 0 < K \leq [2000/60] \rightarrow 0 < K \leq 33$

$n(X \cap Y \cap Z) = 33$ (pois só queremos a parte inteira).

Agora, utilizamos a fórmula:

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z)$$

$$n(X \cup Y \cup Z) = 666 + 500 + 400 - 166 - 133 - 100 + 33$$

$$n(X \cup Y \cup Z) = 1200$$

Portanto, são 1200 números.

Exemplo 2.64. Considere a palavra PERNAMBUCO. Quantos são os anagramas em que A aparece na primeira posição, ou E na segunda ou O na terceira?

Solução:

Vamos primeiramente separa nossas informações e montar nossos conjuntos. Considere:

X = os anagramas em que A aparece na primeira posição;

Y = os anagramas em que E aparece na segunda posição;

Z = os anagramas em que O aparece na terceira posição.

Vamos calcular o número de elementos dos nossos conjuntos:

$X \rightarrow A\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = 9\,!$

$Y \rightarrow \_\_\ E\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = 9\,!$

$Z \rightarrow \_\_\ \_\_\ O\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = 9\,!$

Então temos $n(X) = 9!$, $n(Y) = 9!$ e $n(Z) = 9!$.

Calculando as intersecções dois a dois, temos:

$X \cap Y \rightarrow A\ E\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = 8!$

$X \cap Z \rightarrow A\ \_\_\ O\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = 8!$

$Y \cap Z \rightarrow \_\_\ E\ O\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = 8!$

Calculando a intersecção dos três conjuntos, temos:

$X \cap Y \cap Z \rightarrow A\ E\ O\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_ = 7!$

Agora calcularemos o que pede o problema, então:

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z)$$

$$n(X \cup Y \cup Z) = 9! + 9! + 9! - 8! - 8! - 8! + 7! = 3.9! - 3.8! + 7!$$

$$n(X \cup Y \cup Z) = 972\ 720$$

Portanto, são 972 720 anagramas.

Exemplo 2.65. Um grupo de estudantes do PROFMAT, está planejando fazer uma festa e encomendar pizzas. Se 13 alunos comem pizza que contém calabresa como um dos ingredientes, 10 comem pizza que contém salame como um dos ingredientes, 12 comem pizza que contém catupiry como um dos ingredientes, 4 comem pizza de calabresa e salame, 5 comem pizza de salame e catupiry, 7 comem pizza de calabresa e catupiry e 3 comem pizza que contenham os três ingredientes, quantos estudantes tem o grupo?

Solução:

Começaremos organizando os conjuntos de acordo com os dados do problema. Então considere:

X = alunos que comem pizza com calabresa;

$n(X) = 13$

Y = alunos que comem pizza com salame;

$n(Y) = 10$

Z = alunos que comem pizza com catupiry;

$n(Z) = 12$

Organizando as intersecções, temos:

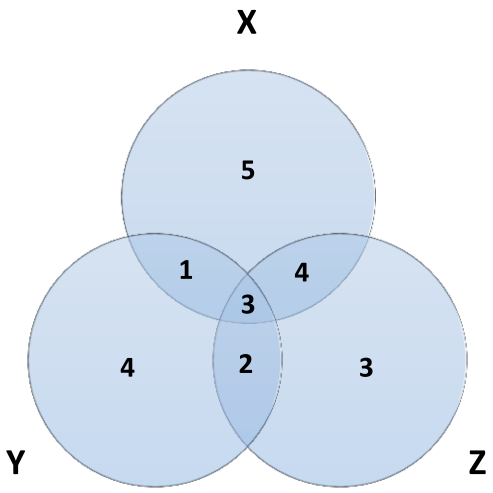
$n(X \cap Y) = 4$

$n(X \cap Z) = 7$

$n(Y \cap Z) = 5$

$n(X \cap Y \cap Z) = 3$

Demonstrando em diagramas, temos:



Agora, calcularemos a união que nos indicará quantas pessoas tem no grupo:

$$n(X \cup Y \cup Z) = n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(X \cap Z) - n(Y \cap Z) + n(X \cap Y \cap Z)$$

$$n(X \cup Y \cup Z) = 13 + 10 + 12 - 4 - 7 - 5 + 3 = 35 - 16 + 3$$

$$n(X \cup Y \cup Z) = 22$$

Ou basta somar todos os valores dos diagramas:

$$n(X \cup Y \cup Z) = 5 + 4 + 3 + 1 + 2 + 4 + 3 = 22$$

Portanto, há 22 pessoas no grupo de comemoração do PROFMAT.

2.8 Princípio das gavetas de Dirichlet ou Princípio das Casas dos pombos

Considere que temos 7 pombos para colocar em 6 casas, então com certeza pelo menos uma casa terá dois pombos. Ou considere que temos 9 objetos para guardar em 8 gavetas, então com certeza pelo menos uma gaveta terá que conter dois objetos.

Portanto, o número de gavetas ou de casas é menor do que o número de objetos ou de pombos, isto é, sempre terá pelo menos uma casa ou gaveta com pelo menos duas unidades. A partir daí temos o Princípio das gavetas de Dirichlet ou Princípio das casas dos pombos.

O princípio das gavetas de Dirichlet ou Princípio das casas dos pombos diz o seguinte:

Se tivermos $n + 1$ objetos para serem colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter dois ou mais objetos. Ou se tivermos $n + 1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter dois ou mais pombos.

Estes princípios que na verdade é o mesmo Princípio de Dirichlet é uma ferramenta importante e útil em problemas aparentemente sem soluções. Ele é aplicado e problemas que tem como objetivo provar a existência ou não de um conjunto com certas propriedades.

Diferente dos métodos de contagem que vimos até agora, o Princípio de Dirichlet exige uma interpretação bem mais atenciosa e um raciocínio um pouco mais complexo, porém é um princípio muito útil e eficiente se aplicado corretamente.

Para um melhor entendimento, vamos solucionar alguns problemas:

Exemplo 2.66. Quantos alunos devem ter em uma sala de aula, de modo que tenhamos certeza de que pelo menos dois deles fazem aniversário no mesmo mês?

Solução:

Este é um exemplo bem simples, onde relacionamos os alunos com os meses do ano. Como percebemos é um exemplo do Princípio das gavetas de Dirichlet ou Princípio das casas dos pombos. Para isso vamos organizar as ideias do problema, considerando:

Casas = meses

Pombos = alunos

Relação = aluno com o respectivo mês de aniversário

Logo, pelo princípio das casas dos pombos, vamos colocar um aluno em cada mês do ano (total de 12 alunos). Agora percebemos que ao colocarmos um 13º aluno, este terá que ficar em um mês que já há um aluno.

Portanto, se existirem 13 alunos, pelo menos dois deles farão aniversário no mesmo mês.

Exemplo 2.67. Os 20 candidatos aprovados em um concurso do Tribunal de Justiça serão colocados em 10 gabinetes de desembargadores. Se cada gabinete receber pelo menos um dos candidatos aprovados e cada um deles só puder ser lotado em um único gabinete, pode-se afirmar que:

a) pelo menos um dos gabinetes receberá dois dos candidatos aprovados.

b) nenhum gabinete receberá mais de dois candidatos aprovados.

c) cada gabinete receberá dois candidatos aprovados.

d) pelo menos um dos gabinetes receberá dois ou mais candidatos aprovados.

e) haverá gabinetes que receberão, cada um, apenas um dos candidatos aprovados.

Solução:

A forma mais simples de resolver este tipo de problema analisando cada uma das opções.

Sabendo que cada gabinete receberá pelo menos um dos 20 candidatos, temos:

Podemos colocar apenas 1 candidato apenas em 9 gabinetes, e 11 candidatos no gabinete restante. Logo, já descartamos as opções A, B e C.

Outra opção é dividirmos os candidatos igualmente entre os gabinetes, e portanto eliminamos a alternativa E.

Então pelo Princípio das Casas dos Pombos (ou Princípio das Gavetas), temos 20 candidatos para 10 gabinetes, onde é possível colocar por exemplo 2 candidatos em cada um dos 10 gabinetes.

Logo, não é possível deixar algum gabinete sem dois ou mais candidatos.

Portanto, alternativa D é a correta.

Exemplo 2.68. Um grupo de 6 estagiários foi designado para rever 50 processos e cada processo deveria ser revisto por apenas um dos estagiários. No final do trabalho, todos os estagiários trabalharam e todos os processos foram revistos. É correto afirmar que:

a) um dos estagiários reviu 10 processos;

b) todos os estagiários reviram, cada um, pelo menos 5 processos;

c) um dos estagiários só reviu 2 processos;

d) quatro estagiários reviram 7 processos e dois estagiários reviram 6 processos;

e) pelo menos um dos estagiários reviu 9 processos ou mais.

Solução:

É importante interpretar os dados do problema, onde o mesmo diz que todos trabalharam. Logo, cada um reviu pelo menos um processo.

Sabemos que 50 processos foram revistos por 6 estagiários. Há a possibilidade onde temos 5 estagiários com apenas 1 processo e 1 estagiário com os 45 restantes. Logo, essa possibilidade elimina as opções A, B, C e D.

Porém, precisamos verificar se a alternativa E está correta. Para isso vamos utilizar o Princípio das casas dos pombos, observe:

Como 6 . 8 = 48, na pior das hipóteses podemos distribuir 48 processos entre os 6 estagiários, de modo que cada um fique com 8, e ainda sobrarão 2 processos. Assim, alguém terá que trabalhar com 9 processos ou mais para completar o trabalho.

Portanto, pelo menos um estagiário reviu 9 processos ou mais.

Exemplo 2.69. Em uma urna contém 4 bolas vermelhas, 8 bolas azuis, 7 bolas verdes e 6 amarelas. Qual o menor número de bolas que devemos retirar, sem olhar, para que se tenha certeza que pelo menos 3 delas são de mesma cor?

Solução:

Sabendo que temos bolas de quatro cores diferentes (vermelhas, azuis, verdes e amarelas) considere:

Cada cor = casa;

Bolas = pombos

Obs: cada pombo deve ir para casa de sua respectiva cor.

A pior das hipóteses é retirarmos 2 bolas de cada cor da urna o que dá um total de 8 bolas. Logo, a 9º bola retirada será a terceira de uma mesma cor.

Portanto, em 9 retiradas pelo menos três bolas serão da mesma cor.

Exemplo 2.70. Uma prova possui 5 questões de múltipla escolha, com 4 alternativas cada. Qual é o menor número de alunos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução:

Temos uma prova com 5 questões:

$$\_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_$$

Para cada questão temos 4 alternativas:

$$4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 4^5 = 1024$$

Logo, temos 1024 maneiras da prova ser respondida.

Para que tenhamos a certeza de que pelo menos duas provas foram iguais, temos que ter uma possibilidade a mais que o número de maneiras possíveis (Princípio das casas dos pombos).

Portanto, o menor número de alunos é 1025.

3. Problemas de combinatória em olimpíadas

Problema 3.1 OBM. Esmeralda, a digitadora, tentou digitar um número de seis algarismos, mas os dois algarismos 1 não apareceram (a tecla devia estar com defeito). O que apareceu foi 2004. Quantos são os números de seis algarismos que ela pode ter tentado digitar?

Solução:

Vamos inicialmente analisar onde poderiam estar os números uns (1):

Logo, os algarismos 1 podem ter sido digitados entre os algarismos de 2004, ou seja:

$$\_\_\ 2\ \_\_\ 0\ \_\_\ 0\ \_\_\ 4\ \_\_$$

Então ao analisarmos veremos que temos duas possibilidades:

- Os dois algarismos 1 em uma única casa entre as 5;

1 1 2 0 0 4

2 1 1 0 0 4

2 0 1 1 0 4

2 0 0 1 1 4

2 0 0 4 1 1

Logo, para essa possibilidade eu tenho 5 maneiras, ou seja,

$$C_{5,1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1!.4!} = \frac{5.4!}{1.4!} = 5$$

- Os algarismos 1 distribuídas em duas casas entre as 5, ou seja,

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!.3!} = \frac{5.4.3!}{2.3!} = \frac{20}{2} = 10$$

Portanto, há 5 + 10 = 15 números que ela pode ter digitado.

Problema 3.2 Olimpíada da Noruega 1996. Quantas contas de banco de 11 dígitos existem usando apenas os dígitos 1 e 2, tais que não ocorram dois 1’s consecutivos?

Solução:

Primeiramente analisando o problema percebemos que precisamos ter no mínimo cinco algarismos 2. E neste caso a única conta possível seria:

1 2 1 2 1 2 1 2 1 2 1

Fixaremos os algarismos 2 e escolheremos as posições dos algarismos 1, Por exemplo, para sete 2's, haveria 8 posições a escolher para colocar os quatro 1's:

_ 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2 _ 2 _

Assim faremos para todos os casos, lembrando que são onze dígitos. Então temos:

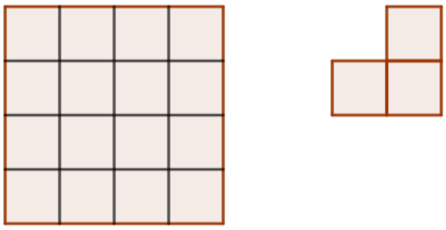
- cinco 2's e seis 1's: $C_{6,6} = 1$ modo.
- seis 2's e cinco 1's: $C_{7,5} = 21$ maneiras.
- sete 2's e quatro 1's: $C_{8,4} = 70$ maneiras.
- oito 2's e três 1's: $C_{9,3} = 84$ maneiras.
- nove 2's e dois 1's: $C_{10,2} = 45$ maneiras.
- dez 2's e um 1: $C_{11,1} = 11$ maneiras.
- onze 2's: $C_{12,0} = 1$ modo.

Somando todas as possibilidades, temos:

$$1 + 21 + 70 + 84 + 45 + 11 + 1 = 233 \text{ maneiras.}$$

Portanto, há 233 contas distintas.

Problema 3.3 OBM 1998. São dados um tabuleiro e uma peça, como mostra a figura



De quantas maneiras diferentes podemos colocar a peça no tabuleiro, de modo que cubra completamente 3 casas?

Solução:

Vamos primeiramente imaginar um tabuleiro menor do que o original da figura, um tabuleiro 2x2. A partir desse tabuleiro menor vamos analisar dois pontos:

- Quantas formas de colocar a peça neste tabuleiro menor?

  R: Há 4 formas de se colocar a peça.
- Quantos tabuleiros menores existem dentro do tabuleiro maior?

  R: Há 9 tabuleiros menores dentro do tabuleiro maior.

Logo, temos 9 tabuleiros menores, onde em cada um deles há 4 possibilidades de se colocar a peça. Então, pelo Princípio Fundamental da Contagem:

$$9 \,.\, 4 = 36$$

Portanto, há 36 modos de colocar a peça.

Problema 3.4 OBM 2010. Em uma cidade arbitrária o prefeito organizou uma rifa com bilhetes numerados de 100 a 999. O prêmio de cada bilhete é determinado pela soma dos algarismos do número do bilhete. Para que ninguém leve três prêmios iguais, estabeleceu-se que quem retirar três bilhetes iguais tem direito a um superprêmio. Qual é o menor número de bilhetes que um cidadão deve comprar para ter a certeza de que vai receber um superprêmio?

Solução:

A menor soma que um bilhete pode ter é 1, que é o bilhete 100 e a maior é 27, que é o bilhete 999. Para qualquer um dos outros valores temos pelo menos três números com a mesma soma, ou seja, para as somas de 2 à 26 temos pelo menos três bilhetes.

Apenas para confirmação, por exemplo, a soma 2 que é a segunda menor temos os bilhetes: 101, 110, 200. E para a segunda maior soma que é 26, temos: 899, 989, 998.

Então, caso o participante seja azarado, na pior das hipóteses, ele irá retirar o bilhete 100, o bilhete 999, e como há 27 somas possíveis, ele vai ter que tirar 1 com cada um dos 25 valores (de 2 à 26), e repetir o feito de tirar cada um dos 25 valores novamente, na próxima retirada ele vai conseguir a terceira soma igual a uma das 25 possíveis que ele já retirou.

Logo, ele teria que retirar:

$$1 + 1 + (2 \cdot 25) + 1 = 53 \text{ bilhetes}$$

Portanto, comprando 53 bilhetes com certeza ele conseguirá o superprêmio.

Problema 3.5 China 1991. Em uma mesa circular estão sentados 8 mulheres e 25 homens, com ao menos 2 homens entre todo par de mulheres consecutivas.

De quantas maneiras as pessoas podem sentar-se à mesa se duas configurações são consideradas iguais se uma pode ser obtida por rotação da outra.

Solução:

Primeiramente vamos fixa a posição de uma das mulheres (M_1) a mesa, e fixemos também o sentido horário de preenchimento das outras pessoas, sem perda de generalidade.

No entanto, cada mulher deve ser seguida por 2 homens, assim, tem-se 8 espaços preenchidos entre as 8 mulheres por 2 homens, o que dará 16 homens já sentados, restando apenas 9 homens ainda por sentar.

Logo, deve-se decidir quantos dos 9 homens deixar entre os oito espaços, que pode ser feito por:

$$P_{(9+7)}^{9,7} = \frac{16!}{9!7!} = 11440 \text{ modos.}$$

Como a primeira mulher (M_1) está fixa, pode-se permutar as outras 7 mulheres de 7! maneiras e os 25 homens podem ser permutados de 25! Modos.

Portanto, há um total de 11440 . 7! . 25! maneiras de se distribuir as pessoas na mesa.

Problema 3.6 OBM 2010. Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares?

Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

Solução:

Podemos resolver este problema de duas maneiras, a primeira é usando as seguintes combinações:

Lembrando que duas situações extremas são ele não vai jogar bola nenhum dia ou então ele joga bola no máximo de dias que pode, que são 5 dias.

Logo,tem-se as seguintes possibilidades:

$$C_{(10-0+1),0} + C_{(10-1+1),1} + C_{(10-2+1),2} + C_{(10-3+1),3} + C_{(10-4+1),4} + C_{(10-5+1),5} =$$
$$= C_{11,0} + C_{10,1} + C_{9,2} + C_{8,3} + C_{7,4} + C_{6,5} =$$
$$= \frac{11!}{11!.0!} + \frac{10!}{1!.9!} + \frac{9!}{2!.7!} + \frac{8!}{3!.5!} + \frac{7!}{4!.3!} + \frac{6!}{5!.1!} =$$
$$= 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 144.$$

Ou também há uma solução muito interessante, onde usaremos recorrência.

Seja a_n o número de maneiras que Diamantino pode jogar sem se machucar em *n* dias seguidos. Se ele joga no primeiro dia, então ele não pode jogar no segundo dia, havendo a_{n-2} possibilidades. Se ele não joga no primeiro dia ele teria a_{n-1} possibilidades de jogar para não se machucar.

Portanto, temos:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Veja que $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$. Então, montamos a seguinte tabela para achar os primeiros 10 termos da sequencia:

N	a_n
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21
7	34
8	55
9	89
10	144

Portanto, para 10 dias são 144 maneiras de Diamantino jogar o seu futebol sem se machucar.

Problema 3.7 Argentina 2001. Carlos escreve a lista de todos os números naturais menores que 10000 que tem exatamente dois dígitos 1 consecutivos. (Por exemplo, 113, 5112, 1181 estão na lista de Carlos, porém 1312, 2111 não estão na lista de Carlos.) Achar quantos números tem a lista de Carlos.

Solução:

Os números naturais menores de 10000 possuem quatro dígitos, então os números são no seguinte formato: 11xy, x11y, ou xy11.

Então dividiremos o problema em 3 casos:

- 1º caso (números no formato 11xy): nesse caso temos 9 modos de se escolher o x, pois o 1 não pode ser escolhido e 10 modos de se escolher o y, pois o 1 pode ser uma opção, logo existe 9 . 10 = 90 maneiras de se formar um número nesse caso.

- 2º caso (números no formato x11y): nesse caso temos 9 modos de se escolher os números x e y, todos os algarismos exceto o 1 podem ser usados, assim no total há 9 . 9 = 81 modos de se colocar um número nesse formato.
- 3º caso (números no formato xy11): para esse caso temos 10 modos de se escolher x e 9 modos de se escolher y, portanto 10 . 9 = 90 modos de obter tal número.

Logo, somando todos os casos, temos 90 + 81 + 90 = 261 números.

Problema 3.8 OBMEP, 2010. De quantas maneiras é possível escolher três números inteiros de 1 a 19, de modo que o maior e menor sejam ímpares e o outro seja par?

Solução:

Temos que o número do meio ou central é par, podendo ser qualquer um de 2 a 18. Considerando 2 como o número central, temos apenas um número ímpar entre 1 e 19 menor que ele e nove ímpares maiores. Então, temos 1 . 9 = 9 possibilidades para este caso.

Considerando 4 como o número central, temos dois ímpares menores e oito ímpares maiores que ele. Então, temos 2 . 8 = 16 possibilidades para este caso.

Analogamente, temos para os outros casos até considerarmos o número 18 como número central, onde temos nove ímpares menores e um ímpar maior. Então, temos 9 . 1 = 9 possibilidades.

Logo, temos:

$$1 . 9 + 2 . 8 + 3 . 7 + 4 . 6 + 5 . 5 + 6 . 4 + 7 . 3 + 8 . 2 + 9 . 1 =$$

$$= 9 + 16 + 21 + 24 + 25 + 24 + 21 + 16 + 9 = 165$$

Portanto, há 165 maneiras.

Problema 3.9 OBMEP, 2005. Os bilhetes de uma rifa são numerados de 1000 a 9999. Marcelo comprou todos os bilhetes nos quais o algarismo sete aparece exatamente três vezes e o zero não aparece. Quantos bilhetes Marcelo comprou?

Solução:

Analisando o problema e suas condições, verifica-se que o número 7771 é um dos bilhetes que Marcelo comprou, pois está entre 1000 e 9999, tem exatamente três algarismos 7 e o 0 não aparece. Porém esse número poderá ter seus algarismos permutados entre si, sem perder os critérios do problema. Então temos:

7771, 7717, 7177, 1777

Então, para o número 1 como quarto algarismo temos 4 bilhetes comprados por Marcelo.

No entanto, para o quarto número temos as possibilidades dos seguintes algarismos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9. Logo, temos a possibilidade de usar oito algarismos, como para cada um desses algarismos temos 4 bilhetes (como vimos no caso do 1) então basta multiplicar 4 . 8 = 32 bilhetes.

Portanto, Marcelo comprou 32 bilhetes.

Problema 3.10 OBMEP, 2006. Quantos são os números menores que 10000 tais que o produto de seus algarismos seja 100? Por exemplo, 455 é um destes números, porque 4 x 5 x 5 = 100.

Solução:

Os números menores que 10000 são números de 1, 2, 3 e 4 algarismos, porém basta pensarmos um pouco para concluirmos que os números procurados tem 3 e 4 algarismos. Pois, com 2 algarismos, o valor máximo do produto será 81 de 9 . 9.

Como o produto tem que ser igual a 100, então vamos verificar os divisores de 100.

Divisores de 100: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

Porém, como o problema fala de produto dos algarismos dos números menores que 10000, então só podemos usar os divisores de apenas um algarismo, no caso 1, 2, 4 e 5.

Agora, vamos a condição que o produto destes divisores seja igual a 100. Para isso temos os produtos:

$$4 \,.\, 5 \,.\, 5 = 1 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 5 = 100$$

Como sabemos, a multiplicação é comutativa. Logo, podemos permutar os algarismos que o produto continua sendo 100. Então, fazendo as permutações temos:

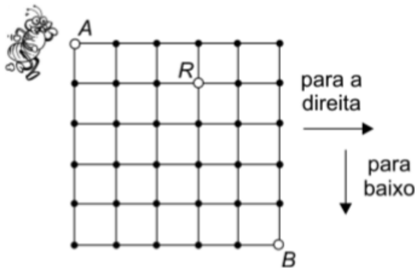
- Para 4 . 5 . 5 , temos permutação $P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$ permutações.
- Para 1 . 4 . 5 . 5 , temos permutação $P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$ permutações.
- Para 2 . 2 . 5 . 5 , temos permutação $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$ permutações.

Somando as permutações, temos:

$$3 + 12 + 6 = 21$$

Portanto, há 21 números menores que 10000 que o produto dos seus algarismos seja 100.

Problema 3.11 OBMEP,2008. Uma formiguinha está no ponto A do quadriculado da figura e quer chegar ao ponto B passando pelo ponto R, andando sobre os lados dos quadradinhos e apenas para a direita ou para baixo. De quantas maneiras ela pode fazer esse trajeto?



Fonte: OBMEP (2008)

Solução:

Este é um problema fácil, porém precisa-se entender e utilizar uma estratégia para a resolução do mesmo. Para isso, dividiremos nosso percurso em duas etapas: de A à R e de R à B.

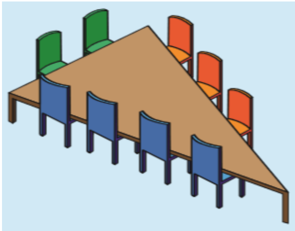
Assim, respeitando as condições de andar apenas para a direita e para a baixo, temos que para ir do ponto A até o ponto R, a formiguinha irá andar três segmentos para a direita e um segmento para baixo, então ela andará 4 segmentos ao todo. Assim faremos a permutação com repetição $P_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$. Logo, a formiguinha tem 4 maneiras de sair do ponto A até o ponto R.

Analogamente faremos para a formiguinha ir do ponto R até o ponto B. A formiguinha irá andar dois segmentos para a direita e quatro segmentos para baixo, totalizando seis segmentos. Assim faremos a permutação com repetição $P_6^{2,4} = \frac{6!}{2!.4!} = 15$. Logo, a formiguinha tem 15 maneiras de sair do ponto R até o ponto B.

Para finalizarmos, basta multiplicar as permutações: 4 . 15 = 60.

Portanto, há 60 maneiras da formiguinha fazer um trajeto em um quadriculado partindo de um ponto A, passando pelo ponto R e chegando no ponto B.

Problema 3.12 OBMEP,2012. Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras esses amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



Fonte: OBMEP (2012)

Solução:

Como Alice e Bernardo devem permanecer sempre juntos e do mesmo lado, vamos fazer as permutações em cada lado do triângulo. Então temos:

Vamos chamar a posição de Alice = A e de Bernardo = B, e lembrando que sempre vamos multiplicar por 2, pois AB e BA são posições diferentes mas, permanecem juntos.

- Para o lado de duas cadeiras, temos:

AB = 1 . 2 = 2 maneiras

- Para o lado de três cadeiras, temos:

AB __ ou __ AB = 2 . 2 = 4 maneiras

- Para o lado de quatro cadeiras, temos:

AB __ __ ou __ AB __ ou __ __ AB = 3 . 2 = 6 maneiras

Logo, há 2 + 4 + 6 = 12 maneiras de Alice e Bernardo sentarem juntos e no mesmo lado da mesa.

Agora vamos ver de quantas maneiras os outros podem sentar-se na mesa. Para isso usaremos o princípio multiplicativo, pois não há restrição para eles. Como são 9 lugares, porém dois estão ocupados por Alice e Bernardo, temos 7 possibilidades para o primeiro amigo, 6 possibilidades para o segundo, 5 para o terceiro e 4 para o quarto. Então pelo PFC:

7 . 6 . 5 . 4 = 840 maneiras

Agora, para sabermos o total de maneiras, basta multiplicar o número de maneiras de Alice e Bernardo sentarem juntos e no mesmo lado da mesa com o número de maneiras dos outro amigos sentarem à mesa.

12 . 840 = 10080

Portanto, há 10080 maneiras.

Problema 3.13 OBMEP, 2014. Quantos números inteiros e positivos de cinco algarismos têm a propriedade de que o produto de seus algarismos é 1000?

Solução:

Para este problema, usaremos a mesma ideia usada no problema 3.10. Porém neste já sabemos que são números de cinco algarismos.

Como só vamos usar os divisores de 1000 de um algarismo, vamos verificar os divisores de 1000 de apenas um algarismo, são eles: 1, 2, 4, 5 e 8.

Agora, vamos a condição que o produto destes divisores seja igual a 1000. Para essas condições, temos os produtos:

$$1 . 8 . 5 . 5 . 5 = 2 . 4 . 5 . 5 . 5 = 1000$$

Como sabemos, a multiplicação é comutativa. Logo, podemos permutar os algarismos que o produto continua sendo 1000. Então, fazendo as permutações temos:

- Para 1 . 8 . 5 . 5 . 5 , temos permutação $P_5^3 = \frac{5!}{3!} = 20$ permutações.
- Para 2 . 4 . 5 . 5 . 5 , temos permutação $P_5^3 = \frac{5!}{3!} = 20$ permutações.

Somando as permutações, temos20 + 20 = 40.

Portanto, há 40 números inteiros de cinco algarismos que o produto dos seus algarismos seja 1000.

Problema 3.14 OBMEP, 2013. Carlinhos escreveu OBMEP2013 em cartões que ele colocou enfileirados no quadro de avisos de sua escola. Ele quer pintar de verde ou amarelo os cartões com letras e de azul ou amarelo os cartões com algarismos, de modo que cada cartão seja pintado com uma única cor e que cartões vizinhos não tenham cores iguais. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer a pintura?

Solução:

Este é um problema bem simples e fácil, porém precisa-se entender o problema.

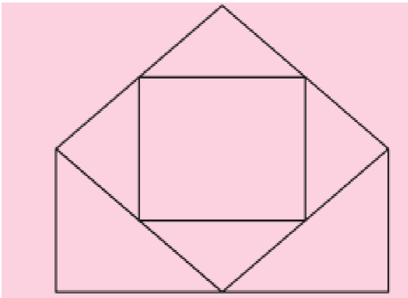
Cada letra é escrita em um cartão, e cada número é escrito em um cartão. O fato de ser usado apenas dois tipos de cores para pintar os cartões, onde a cor amarelo será usada tanto nas letras quanto nos números nos dá as seguintes situações:

- Se começarmos os cartões com letras pela cor verde: o último cartão com letra também será verde, então temos duas opções para os cartões com algarismos, iniciando com a cor azul e iniciando com a cor amarelo.

- Se começarmos os cartões com letra pela cor amarelo: o último cartão com letra também será amarelo, então temos apenas uma opção para os cartões com algarismos, precisa ser iniciado pela cor azul, pois o último com letras já é amarelo.

Portanto, há apenas 3 possibilidades para colorir os cartões.

Problema 3.15 OBMEP, 2013. De quantas maneiras distintas é possível pintar a figura, de modo que cada uma das regiões seja pintada com uma das cores azul, verde ou preto e que regiões cujas bordas possuem um segmento em comum não sejam pintadas com a mesma cor?



Fonte: OBMEP (2013)

Solução:

Sabendo que temos 3 cores diferentes para pintar a figura, há três possibilidades de pintar o triângulo superior e duas para pintar o quadrado do meio. Logo, há 3 . 2 = 6 maneiras.

Para pintar os outros triângulos ao redor do quadrado e os triângulos maiores da base, teremos que dividir o problema em alguns casos. São eles:

- Se pintarmos os triângulos ao redor do quadrado da mesma cor, então temos 2 possibilidades de pintar esses triângulos. Assim, também temos 2 possibilidades para pintar o triângulo da base da direita e 2 possibilidades para pintar o triângulo da base da esquerda. Logo, temos 2 . 2 . 2 = 8 maneiras diferentes;
- Se pintarmos um dos triângulos dos cantos ao redor do quadrado (o da direita ou da esquerda) de cor diferente, então teremos duas possibilidades para pintar os dois triângulos que terão cores iguais e uma para o triângulo do canto com cor diferente. Para os triângulos da base, o triângulo da base que estará do lado do triângulo com cor diferente terá apenas uma possibilidade de cor, enquanto o outro terá duas possibilidade. Logo, com o triângulo da direita pintado diferente

temos 2 . 1 . 2 . 1 = 4 maneiras. Analogamente, com o da esquerda também temos 2 . 1 . 2 . 1 = 4 maneiras.

- E se pintarmos o triângulo que está abaixo do quadrado de cor diferente, teremos duas possibilidades para pintar os triângulos dos cantos do quadrado, e apenas uma possibilidade para pintar cada um dos triângulos da base. Logo, temos 2 . 1 . 1 . 1 = 2 maneiras.

Então, usando o princípio aditivo temos 8 + 4 + 4 + 2 = 18 maneiras.

Como no início vimos, temos 6 possibilidades de pintar o quadrado e o triângulo superior. Então, pelo princípio multiplicativo temos 6 . 18 = 108 maneiras.

Portanto, há 108 maneiras de pintar a figura.

Problema 3.16 OBMEP, 2014. O número 2014 tem quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0. Quantos números possuem exatamente essas características?

Solução:

Vamos resolver este problema descobrindo a quantidade de números de quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0.

Começando pela escolha do algarismo ímpar, temos 5 possibilidades (1, 3, 5, 7 e 9);

Para os algarismos pares, temos 0 como primeiro, 4 possibilidades para o segundo algarismo e 3 possibilidades para o terceiro algarismo. Porém, precisamos entender que repetimos algumas possibilidades, pois ao escolhermos por exemplo o 4 e 2, a escolha será igual ao escolhermos o 2 e 4. Portanto devemos dividir as possibilidades por 2.

Então para os algarismos pares temos $\frac{4.3}{2} = 6$ possibilidades.

Logo, temos 5 . 6 = 30 possibilidades de escolha dos algarismos pares e ímpares.

Como não podemos ter o 0 ocupando o espaço do primeiro algarismo, então para esse espaço temos apenas 3 possibilidades. Porém, para os outros espaços não há restrições então faremos permutações simples.

Então, temos:

$$3.P_3 = 3.3.2.1 = 3.6 = 18$$

Agora multiplicaremos as possibilidades de escolha dos algarismos pares e ímpares com as possibilidades das posições nos espaços:

$$30 \,.\, 18 = 540 \text{ números.}$$

Portanto, há 540 números com quatro algarismos distintos, um ímpar e três pares, sendo um deles 0.

Problema 3.17 OBMEP, 2015. Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?

Solução:

Vamos primeiramente analisar as possíveis premiações, são elas: dois ouros, duas pratas, dois bronzes, um ouro e uma prata, um ouro e um bronze ou uma prata e um bronze.

Então temos 3 possibilidades de medalhas iguais e 3 possibilidades de medalhas distintas.

Como são cinco pessoas, então para as medalhas distintas temos:

$$3 \,.\, 5 \,.\, 4 = 60$$

(5 maneiras de escolher o primeiro e 4 maneiras de escolher o segundo).

Para as medalhas iguais temos:

$$\frac{3.5.4}{2} = 30$$

(dividi-se por 2 pois não há distinção entre as medalhas)

Agora, basta somarmos as possibilidades 60 + 30 = 90.

Portanto, há 90 maneiras de fazer a premiação.

Problema 3.18 OBMEP, 2016. Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB,..., AAZ, ABA, ABB,..., ABZ,..., AZA, AZB,..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

Solução:

Vamos iniciar verificando quantos livros iniciam com a letra A, logo temos:

$$A \,.\, 26 \,.\, 26 = 676 \text{ livros}$$

Sabendo que há 676 livros que iniciam com a letra A, analogamente será para a letra B e para a letra C.

Logo, temos :

- 676 livros que iniciam com a letra A;
- 676 livros que iniciam com a letra B;
- 676 livros que iniciam com a letra C;

Verificando quantos livros há que iniciam com a letra D, percebe-se que há apenas 2, são eles DAA e DAB.

Somando os livros, temos:

$$676 + 676 + 676 + 2 = 2030 \text{ livros}$$

Portanto, há 2030 livros na biblioteca.

Problema 3.19 OBMEP, 2016. Bruno tem 5 figurinhas idênticas com a bandeira da Alemanha, 6 com a bandeira do Brasil e 4 com a da Colômbia. Ele quer fazer um pacote com pelo menos 3 dessas figurinhas. De quantas maneiras ele pode fazer esse pacote?

Solução:

Vamos iniciar verificando quantos pacotes distintos Bruno poderá fazer com as figurinhas. Para isso, ele terá que escolher qual a quantidade de figurinhas ele irá usar de cada país. Suas opções são:

ALEMANHA:{0, 1, 2, 3, 4, 5}

BRASIL: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

COLÔMBIA: {0, 1, 2, 3, 4}

Observe que ele também tem a opção de não escolher nenhuma figurinha do país, por isso a opção 0 também é incluída.

Sendo assim, temos 6 possibilidades de escolher a quantidade de figurinhas da Alemanha, 7 possibilidades para as do Brasil e 5 para as da Colômbia. Usando o princípio multiplicativo, temos:

$$6 \,.\, 7 \,.\, 5 = 210 \text{ maneiras}$$

Porém, foram contadas todas as maneiras de fazer os pacotes, incluindo não haver nenhuma figurinha no pacote. Como os pacotes deverão conter pelo menos 3 figurinhas, vamos excluir os pacotes com 0, 1 e 2 figurinhas. São eles:

- Com 0 figurinhas: temos apenas 1 pacote sem nada;
- Com 1 figurinha: temos 3 pacotes podendo ser uma da Alemanha ou uma do Brasil ou uma da Colômbia;

- Com 2 figurinhas: temos 6 pacotes podendo ser eles Alemanha/Alemanha, Brasil/Brasil, Colômbia/Colômbia, Alemanha/Brasil, Alemanha/Colômbia ou Brasil/Colômbia.

  Logo, soma-se 1 + 3 + 6 = 10 pacotes que terão que ser excluídos.

Então, temos 210 – 10 = 200 maneiras.

Portanto, há 200 maneiras.

Problema 3.20 OBMEP, 2017. Após digitar um número de seis algarismos em sua calculadora, Cecília observou que dois algarismos 9 que ela havia digitado não apareceram no visor; o que apareceu foi 2017. Quantas são as possibilidades para o número que ela digitou?

Solução:

Sabendo que apareceu o número 2017 e que ainda há mais dois algarismos 9, então temos os seguintes algarismos:

$$2 \ 0 \ 1 \ 7 \ 9 \ 9$$

Fazendo simplesmente uma permutação com os algarismos acima, lembrando que o algarismo 9 aparece duas vezes logo é uma permutação com repetição de elementos:

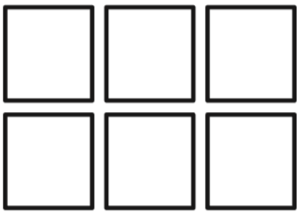
$$P_6^2 = \frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4!}{2} = 15.4!$$

Foi deixado o resultado com 4! ao final de propósito pois, ainda precisamos dividir as possibilidades por 4!, já que os algarismos 2017 precisam aparecer exatamente nesta ordem. Logo, temos:

$$\frac{15.4!}{4!} = 15$$

Portanto, há 15 possibilidades.

Problema 3.21 OBMEP, 2018. Os seis números 1, 2, 3, 4, 5 e 6 devem ser colocados nos quadrados de tal forma que eles fiquem em ordem crescente em cada linha (da esquerda para a direita) e em cada coluna (de cima para baixo). De quantas maneiras isso pode ser feito?



Fonte: OBMEP (2018)

Solução:

Iniciaremos esse problema com o seguinte raciocínio: como os números precisam estar em ordem crescente, tanto em linha como em coluna, então o primeiro quadrado precisa ser preenchido obrigatoriamente pelo número 1 e o último quadrado pelo número 6.

Agora, precisamos pensar na possibilidade de colocar nosso próximo número menor o 2. E para isso temos duas possibilidades:

- O número 2 no segundo quadrado da primeira linha:

  Neste caso, podemos preencher o terceiro quadrado da primeira linha com qualquer um dos números que restaram, e os dois quadrados da segunda linha com os outros dois números colocados em ordem crescente. Logo, temos três possibilidades uma para cada escolha do terceiro quadrado da primeira linha, são elas:

1 2 3	1 2 4	1 2 5
4 5 6	3 5 6	3 4 6

- O número 2 no primeiro quadrado de segunda linha:

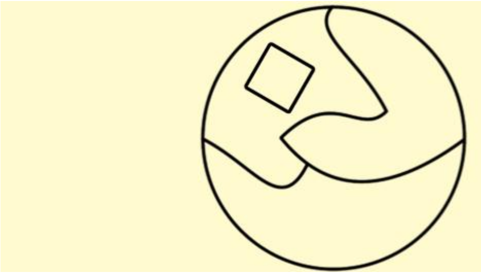
  Neste caso, o segundo quadrado da primeira linha obrigatoriamente precisa ser preenchido com o menor número ainda não usado, no caso o número 3. E os outros dois quadrados restantes podem ser preenchidos de duas formas usando o número 4 e 5 que ainda não foram usados. Logo, temos duas possibilidades, são elas:

1 3 4	1 3 5
2 5 6	2 4 6

Logo, juntando as possibilidades temos $3 + 2 = 5$ maneiras de se preencher os seis quadrados.

Portanto, há 5 maneiras.

Problema 3.22 OBMEP, 2018. Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. Ele quer pintar cada região da figura de uma cor de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?



Fonte: OBMEP (2018)

Solução:

Começaremos pela área de menor tamanho, como ainda não há nada pintado tenho 4 possibilidades para pintar a área.

Para a próxima área, temos 3 possibilidades pois não podemos repetir a cor escolhida para a primeira área, já que são regiões vizinhas.

Para a terceira área também temos 3 possibilidades, pois também não podemos escolher apenas a cor escolhida na área vizinha.

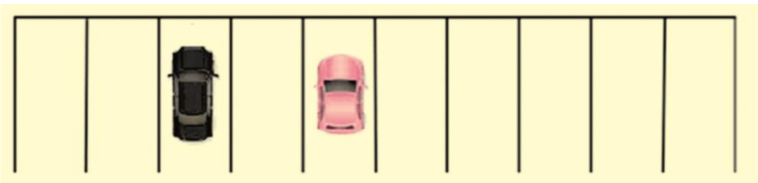
Para a última área, observe que ela faz vizinhança com duas áreas, logo temos apenas 2 possibilidades de cores.

Então, pelo PFC temos:

$$4 . 3 . 3 . 2 = 72$$

Portanto, temos 72 maneiras diferentes de pintar a figura.

Problema 3.23 OBMEP, 2018. Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?



Fonte: OBMEP (2018)

Solução:

Sabendo que o estacionamento possui 10 vagas e que os carros precisam estar estacionados com pelo menos uma vaga livre entre eles, pensamos nas seguintes possibilidades:

- O carro preto na primeira vaga;

Para esta possibilidade temos 8 modos de estacionar o carro rosa.

- O carro preto na 2ª,3ª,4ª,...,9ª vaga;

  Para estas possibilidades temos 7 modos de estacionar o carro rosa.

- O carro preto na última vaga;

  Para esta possibilidade temos 8 modos de estacionar o carro rosa.

Agora usando o Princípio Aditivo temos:

$$8 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 8 = 72$$

Portanto, há 72 maneiras.

Problema 3.24 OBMEP, 2010. Tio Paulo trouxe cinco presentes diferentes, entre os quais uma boneca, para distribuir entre suas sobrinhas Ana, Bruna, Cecília e Daniela. De quantos modos ele pode distribuir os presentes entre as sobrinhas de modo que todas ganhem pelo menos um presente e a boneca seja dada para Ana?

Solução:

Iniciaremos a solução deste problema, dividindo-o em dois casos: o de Ana receber dois presentes e o caso de Ana receber apenas a boneca.

- No caso de Ana receber dois presentes, um dos presentes já é a boneca, e para opção do segundo presente temos 4 possibilidades. Para a próxima sobrinha terá 3 possibilidades de escolha do presente e assim por diante, até que a última sobrinha só terá uma escolha de presente. Então temos:

$$4 \,.\, 3.\ \ 2 \,.\, 1 = 24 \text{ modos}$$

No caso de Ana receber apenas a boneca, Tio João deverá dividir os presentes entre as outras três sobrinhas, logo uma sobrinha receberá dois presentes e duas receberá apenas um. Então, Tio João deverá escolher qual das sobrinhas receberá dois presentes para isso ele tem 3 opções, pois Ana já recebeu a boneca. Agora, vamos verificar primeiro as sobrinhas que receberão apenas um presente. Para a primeira temos 4 possibilidades de escolha do presente, e para a segunda temos 3 possibilidades de escolha, e os dois presentes que sobraram ficará para a sobrinha que receberá dois presentes. Sendo assim, temos:

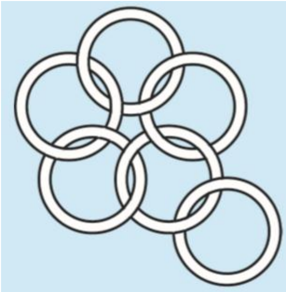
$$3 \,.\, (3 \,.\ \ 4) = 3 \,.\, 12 = 36 \text{ modos}$$

Usando o princípio aditivo temos:

$$24 + 36 = 60 \text{ modos}$$

Portanto, Tio João pode distribuir de 60 modos.

Problema 3.25 OBMEP, 2016. O símbolo proposto para os Jogos Escolares de Quixajuba é formado por seis anéis entrelaçados como na figura. Cada um dos anéis deve ser pintado com uma das três cores da bandeira da cidade (azul, verde ou rosa), de modo que quaisquer dois anéis entrelaçados tenham cores diferentes. Quantas são as maneiras de pintar esse símbolo?



Fonte: OBMEP (2016)

Solução:

Vamos começar enumerando os anéis para um melhor entendimento. Sendo enumerado da seguinte maneira, começaremos do anel que está mais acima este será o anel I, o anel II será o que está a sua esquerda e o que está a sua direita será o III, abaixo do anel II será o anel IV, e abaixo do anel III será o anel V, e por último será o anel que está mais isolado, sendo este o anel VI.

Vamos dividir nosso problema em três casos:

- No caso do anel III (a direita do anel I) ser pintado com a mesma cor do anel II (a esquerda do anel I). Logo, isso nos garante que os anéis III e IV (abaixo do anel II) tenham cores diferentes. Então, pelo princípio multiplicativo temos:

I	II	III	IV	V	VI
3	2	1	2	1	2

3 . 2 . 1 . 2 . 1 . 2 = 24 maneiras

- No caso do anel III ser pintado de cor diferente do anel II e o anel IV com a mesma cor que o anel III. Também pelo princípio multiplicativo temos::

I	II	III	IV	V	VI
3	2	1	1	2	2

3 . 2 . 1 . 1 . 2 . 2 = 24 maneiras

- No caso do anel III ser pintado de cor diferente dos anéis II e IV. Então, também pelo princípio multiplicativo temos:

I	II	III	IV	V	VI

3	2	1	1	1	2

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 12 \text{ maneiras}$$

Logo, usando o princípio aditivo temos:

$$24 + 24 + 12 = 60 \text{ maneiras}$$

Portanto, podemos pintar o símbolo de 60 maneiras diferentes.

Considerações finais

Neste trabalho conseguimos contemplar os aspectos históricos de análise combinatória assim como saber o que diz os PCN’s de matemática em relação a este conteúdo. Analisamos algumas dissertações do PROFMAT, dando ênfase as pesquisas dos autores e comentando com alguns pontos em comum entre elas, onde concluímos a importância do estudo de combinatória desde o ensino fundamental e a eficácia de utilizarmos resoluções de problemas como metodologia de ensino para este conteúdo.

Sem dúvidas, percebemos a dificuldade e complexidade deste conteúdo para professores e alunos, e para isso associamos teorias e aplicações de vários tópicos do mesmo, com diversas estratégias de resoluções de problemas divididas em vários exemplos ao longo do trabalho. Além dos tópicos tradicionais de combinatória do ensino médio, exploramos também o Princípio da Inclusão-Exclusão e Princípio das Gavetas de Dirichlet ou o Princípio da casa dos pombos com a mesma metodologia de resolução de problemas.

Por fim, selecionamos alguns problemas de olimpíadas da OBMEP e outras, de vários níveis, para também aplicarmos nossas estratégias aprendidas, resultando em mais métodos bem interessantes de resoluções, e assim, aumentando o acervo de conhecimentos de todos os estudantes dessa obra.

Pretendemos assim contribuir para o ensino-aprendizado de análise combinatória e que este trabalho possa auxiliar de alguma maneira professores e alunos a suprirem suas dificuldades com este componente.

Referências

BERGE, C. **Principles of Combinatorics**. Vol 72. New York: Academic Press,1971.

BIGGS, N. L. **The roots of combinatorics**. Revista Historia Mathematica. Vol 6. 1979.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**: tradução: Elza F. Gomide. São Paulo. ED. Da Universidade de São Paulo,1974.

BRASIL, Ministério da Educação: **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio) - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2000. http: //portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf, acesso em 06 de mar. 2019.

BRASIL, Ministério da Educação: **Parâmetros Curriculares Nacionais +** (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília, 2002. http://portal.mec.gov. br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf, acesso em 07 de mar. 2019.

CARVALHO P. C. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

COSTA, Fernando Vicente da. **Combinatória: uma proposta para o sexto ano do ensino fundamental**, 78f. Dissertação (mestrado)- Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Rio de Janeiro-RJ, 2018.

LIPSCHUTZ, S. **Matemática Finita**. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

MORGADO A. C.; CARVALHO P. C. **Matemática discreta**: Coleção ProfMat. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MORGADO, Augusto César . **Temas e Problemas Elementares**. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 2005.

NEEDHAM, J. **Science and Civilisation in China**. London: Cambridge University Press. Vol 3.1959.

OLIVEIRA, Gildo Gouveia de. **Análise combinatória e probabilidade: atividades pautadas com foco nos pcns e no currículo da rede estadual**, 58f. Dissertação (mestrado)- Universidade Federal de Sergipe, Departamento de Matemática, Itabaiana-SE, 2018.

OLIVEIRA, Lucas José. **Análise combinatória e probabilidades nos concursos públicos de nível médio**, 50f. Dissertação (mestrado)- Universidade Federal de Viçosa, Instituto de ciências Exatas e Tecnológicas, Viçosa-MG, 2018.

PASTOR, J. R. **Elementos de análisis algebraico**. 5ed. Madrid: Talleres Lusy, 1939.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto de método**

matemático; tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.

QUINTELLA, Ary. **Matemática 2º ano colegial**. 3ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

RODA, Thiago Miguel. **Análise Combinatória: Uma abordagem diferenciada sem a utilização de fórmulas**, 64f. Dissertação (mestrado)- Universidade Federal de São Carlos, Centro de ciências Exatas e de Tecnologias, São Carlos-SP, 2018.

ROXO, Euclides. **Matemática 2º ciclo**. 7ed. São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1955.

SANTOS, José Plínio; MELLO, Margarida; MURACI, Idali. **Introdução a análise combinatória**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciências Moderna, 2007.

SILVA, Antunino da. **Resolução de situações-problemas da OBMEP por alunos da 3ª série do ensino médio da cidade de União-PI: uma investigação acerca da análise combinatória**, 88f. Dissertação (mestrado)- Universidade Estadual do Piauí, Pró-Reitoria de pesquisa e pós-graduação, Teresina-PI, 2018.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. **Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica**. In: VIII ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro: UNESP, jul. 2004. p. 1-13. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 25 mar. 2019.

WIELEITNER, H. **Historia de la Matematica**.Barcelona: Labor. 1932.

WILSON, R. J.; LLOYD, E. K. **Combinatorics**. 1990.

<http://www.obmep.org.br/provas.htm> acesso em: 22/06/2019.