

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE  
ABORDAGEM DE TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA PLANA

ÁTILA RIBEIRO MAUÉS

MANAUS  
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

ÁTILA RIBEIRO MAUÉS

USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE  
ABORDAGEM DE TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA PLANA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e, ofertado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral

MANAUS  
2019

Átila Ribeiro Maués

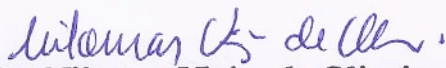
**USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE  
ABORDAGEM DE TEOREMAS CLÁSSICOS DA GEOMETRIA PLANA**

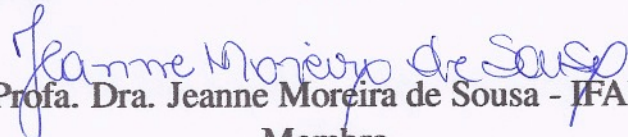
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e, ofertado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 29 de Agosto de 2019.

**BANCA EXAMINADORA**

  
Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral - UFAM  
Presidente

  
Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira - UFAM  
Membro

  
Prof. Dra. Jeanne Moreira de Sousa - UFAM  
Membro

# Dedicatória

Aos meus pais: Nilson e Georgette Maués.

A minha esposa: Luciana Figueiredo.

Ao meu filho: Miguel Maués.

Ao meu irmão: Alexandre Maués.

# Agradecimentos

Neste momento de vitória onde completo mais uma importante etapa da minha vida eu não poderia deixar de agradecer a pessoas que me ajudaram neste projeto.

Ao Grande Arquiteto do Universo, por ter me dado força, determinação, sabedoria e tudo aquilo que precisei nesta caminhada.

Aos meus pais, Nilson Benassuly Maués e Maria Georgette Ribeiro Maués, por me educarem com amor e honestidade, suas vidas são meus exemplos.

A minha esposa, Luciana Sales de Figueiredo, por me incentivar e alimentar esse sonho. Por ter paciência com a minha ausência e reclusão forçada pelas rigorosas atividades do curso.

Ao meu filho, Miguel Figueiredo Ribeiro Maués, que na plenitude de seus 9 anos, sempre me perguntava, como foi a aula papai?

Ao meu irmão, Alexandre Jorge Ribeiro Maués, a quem tenho como exemplo de um extraordinário pai e excelente profissional.

A minha família, com quem divido esse momento feliz.

A todos os amigos da Divisão Distrital Zona Sul - (DDZ Sul), em especial a Chefe da Divisão e ao grupo de Assesores Interdisciplinar que me apoiaram, dando-me força nos momentos de desânimos, ou comemorando comigo nos momentos de vitórias.

Aos colegas do “grupo PROFMAT NOTOK” pelas diversas reuniões de estudo e pelos momentos fraternos inesquecíveis que tivemos aos sábados e com os quais construí uma grande amizade.

Aos professores, Prof. Dr. Nilomar Oliveira, Prof. Dr. Flávia Morgana, Prof. Mt Domingos Anselmo, Prof. Dr. Roberto Prata e Prof. Dr. Valtemir Martins Cabral, que se colocaram como verdadeiros parceiros, nos ensinando conhecimentos valiosos de uma maneira incansável, disponíveis a qualquer hora. Agradeço de maneira especial ao meu orientador Prof. Dr. Valdemir Cabral, que aceitou orientar minha dissertação e teve papel fundamental na escolha do tema e em seu desenvolvimento.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - (CAPES) pelo apoio financeiro.

A todos que contribuíram direta e indiretamente para a implantação deste projeto como a SBM, a Capes e a UFAM.

A todos que me ajudaram a vencer esta etapa, o meu muito obrigado.

# Resumo

O presente trabalho tem por objetivo propiciar ao professor de Matemática, do Ensino Fundamental II e Ensino Médio, suporte matemático e sugestões didáticas para uma aula mais exitosa.

Para isso, foram escolhidos alguns resultados clássicos da geometria plana como: A Reta de Euler, A Circunferência dos Nove Pontos, O Teorema de Menelaus, O Teorema de Ceva e o Teorema de Stewart.

Neste ensaio teórico, começaremos com um recorte Histórico sobre seus descobridores e suas descobertas, as demonstrações dos teoremas e finalizaremos com uma sugestão de ferramenta didática, desenvolvida pelo autor, ao professor, utilizando o software Geogebra, para despertar o interesse do aluno por Geometria e pela Matemática em geral.

Palavras-chave: História da Matemática, Pontos Notáveis no Triângulo, Reta de Euler, Circunferência dos Nove Pontos, Teorema de Tales, Teorema de Menelaus, Teorema de Ceva, Teorema de Pitágoras, Teorema de Stewart.

# Abstract

The present work aims to provide the mathematics teacher, of Junior High School and High School, mathematical support and didactic suggestions for an outstanding class.

Therefore, some classic results of Euclidean Plane Geometry were chosen: Euler's Line, The Nine-Point Circle, Menelaus' Theorem, Ceva's Theorem and Stewart's Theorem.

Beginning this theoretical essay with a historical clipping about the discoverers and their discoveries, the demonstrations of the theorems and finishing with a suggestion of didactic tool, developed by the author, to the teacher, using GeoGebra software to instigate the student interest in Geometry and Mathematics in general.

Keywords: History of Mathematics, Remarkable Points in the Triangle, Euler's Line, Nine-Point Circle, Thales' Theorem, Menelaus' Theorem, Ceva's Theorem, Pythagorean Theorem, Stewart's Theorem.



# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Reta de Euler</b>	<b>2</b>
1.1 Recorte Histórico . . . . .	2
1.1.1 A vida de Euler . . . . .	2
1.1.2 A descoberta da Reta de Euler . . . . .	4
1.2 A Reta de Euler . . . . .	4
1.2.1 Teorema de Euler . . . . .	4
1.2.2 Os Pontos Notáveis do Triângulo . . . . .	4
1.2.3 A Reta de Euler . . . . .	11
1.3 Uma alternativa para o ensino de matemática . . . . .	17
1.3.1 Os Pontos Notáveis do Triângulo . . . . .	17
1.3.2 A Reta de Euler . . . . .	24
<b>2 Circunferência dos Nove Pontos</b>	<b>26</b>
2.1 Recorte Histórico . . . . .	26
2.1.1 A Vida de Feuerbach . . . . .	26
2.1.2 A descoberta do Círculo dos Nove Pontos . . . . .	28
2.2 O Círculo dos Nove Pontos . . . . .	29
2.2.1 Teorema do Círculo dos Nove Pontos . . . . .	29
2.2.2 1ª Demonstração . . . . .	30
2.2.3 2ª Demonstração . . . . .	34
2.3 Uma alternativa para o ensino de matemática . . . . .	37
2.3.1 O Círculo dos Nove Pontos . . . . .	37
<b>3 Teorema de Menelaus</b>	<b>39</b>
3.1 Recorte Histórico . . . . .	39
3.1.1 A vida de Menelaus . . . . .	39
3.2 O Teorema de Menelaus . . . . .	41
3.2.1 Teorema de Menelaus . . . . .	41
3.2.2 Teorema de Tales . . . . .	41
3.2.3 Lema 1 . . . . .	46
3.2.4 Proposição 1 . . . . .	47
3.2.5 Teorema de Menelaus . . . . .	48
3.3 Uma alternativa para o ensino de matemática . . . . .	51
3.3.1 Teorema de Tales . . . . .	51
3.3.2 O Teorema de Menelaus . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Teorema de Ceva</b>	<b>54</b>
4.1	Recorte Histórico . . . . .	54
4.1.1	A vida de Giovanni Benedetto Ceva . . . . .	54
4.2	O Teorema de Ceva . . . . .	57
4.2.1	Teorema de Ceva . . . . .	57
4.3	Uma alternativa para o ensino da matemática . . . . .	59
4.3.1	O Teorema de Ceva . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Teorema Stewart</b>	<b>61</b>
5.1	Recorte Histórico . . . . .	61
5.1.1	A vida de Matthew Stewart . . . . .	61
5.2	O Teorema Stewart . . . . .	64
5.2.1	Teorema de Stewart . . . . .	64
5.2.2	Teorema de Pitágoras . . . . .	64
5.2.3	Lei dos Cossenos . . . . .	66
5.2.4	Teorema de Stewart . . . . .	68
5.3	Uma alternativa para o ensino de matemática . . . . .	71
5.3.1	O Teorema de Pitágoras . . . . .	71
5.3.2	Lei dos Cossenos . . . . .	72
5.3.3	Teorema de Stewart . . . . .	73

# Introdução

No âmbito da escola, muitas vezes a matemática é apresentada aos alunos sem qualquer referência à sua história, enfatizando-se procedimentos e técnicas, em detrimento da reflexão acerca das ideias matemáticas e da percepção de significados para os algoritmos, tornando-se uma atividade mecânica.

Nesta perspectiva, tentamos fazer uma intervenção pedagógica que apresentasse ao estudante de forma prática a Geometria que fascinou nossos precursores da Grécia antiga. Com esse objetivo selecionamos alguns resultados clássicos da geometria plana (A Reta de Euler, A Circunferência dos Nove Pontos, O Teorema de Menelaus, O Teorema de Ceva e o Teorema de Stewart) como o tema desse trabalho.

Durante a pesquisa, pudemos valorizar uma ferramenta pedagógica muito útil que nos foi apresentado durante o mestrado, a disciplina MA36 – Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. Com isso, conhecemos o software Geogebra que nos ajudou na visualização geométrica de tudo que íamos descobrindo.

Nesse sentido, organizamos este trabalho em cinco capítulos. Cada capítulo, um teorema e seus pré-requisitos.

Dessa maneira, entendemos que essa ferramenta pode auxiliar o professor no processo Ensino-aprendizagem da Geometria.

# Capítulo 1

## Reta de Euler

Apresentaremos nesse capítulo, os elementos geométricos de grande importância na construção de uma descoberta da geometria: a reta de Euler. Iniciaremos com um comentário histórico sobre essa descoberta e seu descobridor. Demonstraremos o teorema e faremos uma abordagem com o software Geogebra.

### 1.1 Recorte Histórico

#### 1.1.1 A vida de Euler

O matemático Leonhard Paul Euler nasceu em 1707 na Basileia, importante cidade Suíça. Filho de uma família muito bem estruturada, desde cedo teve acesso a boas escolas e bons professores. Esta preocupação com os estudos do garoto se devia principalmente ao fato de que Paul Euler, pai de Leonhard, era pastor da Igreja Calvinista e sonhava que seu filho o seguisse na profissão (Boyer, 2003). Apesar de Leonhard não ter se tornado um pastor como desejava seu pai, seguiu seus preceitos religiosos por toda a vida (Simmons, 2002). A opção de Leonhard não foi tomada por seu pai como uma afronta, pois o mesmo também havia estudado Matemática com Jakob Bernoulli (1654 - 1705), seu amigo pessoal. A proximidade da família de Euler com a família Bernoulli talvez seja o que mais influenciou interesse do jovem pela Matemática (Boyer, 2003).

Aos 14 anos de idade ingressou na Universidade da Basileia onde inicialmente estudou Medicina, Teologia e Ciências Humanas. Dois anos mais tarde, nesta mesma universidade, dedicou-se a Matemática, com 16 anos, recebeu o grau de Mestre em Artes, com uma dissertação que comparava os sistemas de Filosofia Natural de Newton e Descartes. Após se formar atuou, ainda na Basileia, nas áreas de Filosofia, Teologia e Matemática. Em 1727, por influência dos irmãos Daniel e Nicolas Bernoulli, filhos de Jakob Bernoulli, Euler foi convidado a integrar a Academia de Ciências São Petersburgo na Rússia, onde foi nomeado professor de Física em 1730 e de Matemática em 1733 (Simmons, 2002). Nessa época, Euler publicou diversos textos, entre eles, o livro "Mecânica", quando apresentou extensivamente a dinâmica Newtoniana na forma de análise matemática. Com esse efeito, conquistou reputação internacional, recebendo menção honrosa da Academia de Ciência em Paris. Aos 28 anos de idade, perdeu a visão do olho direito o que não reduziu seu ritmo de trabalho. O que muitos especulam é que este fato ocorreu devido a uma rotina intensa de trabalho, forçando a visão até tarde da noite (Boyer, 2003).

Permaneceu na Rússia até 1741 quando foi convidado a ser professor de Matemática na Academia de Ciências de Berlim. Nesta cidade conquistou a admiração de alguns integrantes da corte do imperador da Prússia, atual Alemanha e Polônia. No entanto, devido a sua timidez, e por ter perdido um olho, tornou-se motivo de zombaria e em 1766 aceita um convite para retornar a Academia de Ciências de São Petersburgo onde trabalhou até o último dia de sua vida (Cajori, 2007).

Leonard Euler escreveu diversos trabalhos utilizando uma matemática inovadora. Uma de suas maiores realizações foi o desenvolvimento do método dos algoritmos com o qual conseguiu, por exemplo, fazer a previsão das fases da lua, com a finalidade de obter informações para a elaboração de tabelas para ajudar o sistema de navegação.

Entre suas contribuições mais conhecidas na matemática moderna estão: a introdução da função gama, a analogia entre o cálculo infinitesimal e o cálculo das diferenças finitas, quando discutiu minuciosamente todos os aspectos formais do Cálculo Diferencial e Integral, da época. Foi o primeiro matemático a trabalhar com as funções seno e cosseno. Em 1760, iniciou o estudo das linhas de curvatura e começou a desenvolver um novo ramo da matemática denominador Geometria Diferencial.

Ainda em 1766 percebeu que, devido à catarata, estava perdendo a visão do segundo olho e, para continuar trabalhando treinou um de seus filhos para escrever enquanto ele ditava. Apesar destas condições, sua memória admirável permitiu que continuasse trabalhando sem parar, contribuindo para todos os ramos da matemática (Eves, 2004). Ao nos referirmos a ele, estamos falando do escritor de matemática mais produtivo de todos os tempos. Em 1783 morreu enquanto tomava chá com um de seus netos, após ter passado o dia estudando a órbita do recém descoberto planeta Urano (Simmons, 2002). A Academia de Ciências de São Petersburgo continuou a publicar trabalhos novos de Euler até 50 anos depois da sua morte.

Sua vida acadêmica movimentada não o impediu de formar com Katharina Gsell uma família numerosa: tiveram ao todo 13 filhos, mas apenas 5 sobreviveram. Segundo alguns autores, conseguia sem muitas dificuldades escrever seus artigos enquanto cuidava das crianças. “Um amigo que presenciava sua vida doméstica disse: Uma criança no colo, um gato sobre o ombro, assim escrevia ele suas obras imortais” (Garbi, 1997).

#### Curiosidades sobre Leonhard Euler

- 1- Por ter sido um dos melhores e mais produtivos matemáticos da história foi representado na sexta série das notas do Banco Suíço em numerosos selos da Suíça, da Alemanha e da Rússia.
- 2- O asteroide 2002 foi chamado de Euler em sua homenagem.
- 3- Foi criador da teoria dos Grafos, a partir da resolução dos problemas das 7 pontes de Königsberg.

## 1.1.2 A descoberta da Reta de Euler

Um dos mais fascinante elementos da Geometria Euclidiana é o TRIÂNGULO. Essa figura geométrica que é tão útil para enrijecer as construções, definir regiões planas e relações trigonométricas, entre outras aplicações práticas, é conhecido bem antes dos Elementos de Euclides. Seus pontos notáveis também são conhecidos há alguns séculos antes da nossa era, porém até o século XVII, não encontramos registros de descobertas relevantes e estudos sobre a Geometria do Triângulo até o teorema de Ceva, em 1678.

O estudo das Cevianas e dos Pontos Notáveis pela intersecção delas definidas, utilizando Régua e Compasso em sua construção despertou em Euler algumas curiosidades como a brilhante observação de que os pontos Baricentro, Circuncentro e Ortocentro são Colineares, independentemente do triângulo. A demonstração desse teorema foi analítica, o que nos leva a crer que deve ter construído, uma grande quantidade de triângulos diferentes até encontrar a lei.

## 1.2 A Reta de Euler

### 1.2.1 Teorema de Euler

A Reta de Euler é uma relação entre os chamados “ pontos notáveis” de um triângulo. O Baricentro (G), Circuncentro (O) e o Ortocentro (H) de um triângulo qualquer.

**Teorema:** Em um triângulo ABC qualquer, o baricentro, o circuncentro e o ortocentro são colineares.

O baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.

### 1.2.2 Os Pontos Notáveis do Triângulo

#### As Medianas e o Baricentro (Centroíde)

Baricentro é o ponto de intersecção das três Medianas de um triângulo.

Mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice deste triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice.

**Teorema:** As três medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Sendo o  $\triangle ABC$ ,

#### Hipótese:

$\overline{AM_1}$ ,  $\overline{BM_2}$ ,  $\overline{CM_3}$  são medianas e isso implica em duas observações:

**Tese:**

$$\Rightarrow 1) \overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\}$$

$$\Rightarrow 2) \overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

**Demonstração:**

Seja X o ponto tal que:  $\overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{X\}$

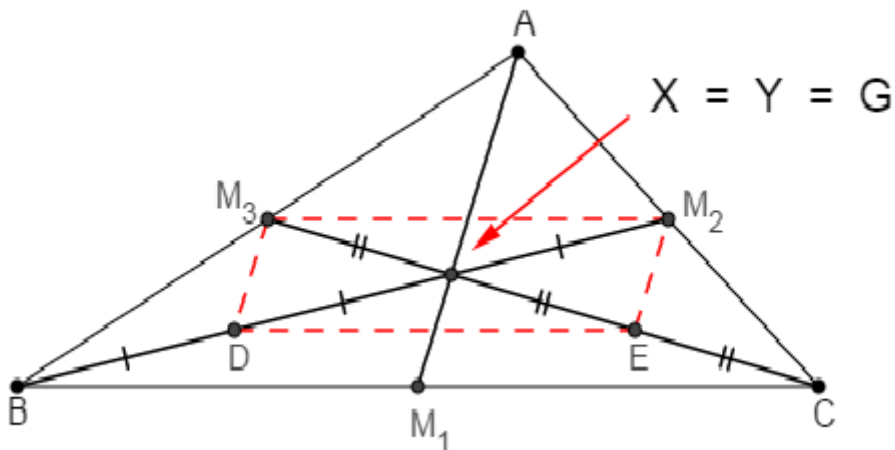


Figura 1.1: Triângulo ABC com suas Medianas.

Considerando os pontos médios de D e E de  $\overline{BX}$  e  $\overline{CX}$ , temos o que segue:

$$(\triangle ABC, \overline{AM_3} \equiv \overline{BM_3}, \overline{AM_2} \equiv \overline{CM_2}) \Rightarrow \overline{M_2M_3} \parallel \overline{BC} \text{ e } \overline{M_2M_3} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

$$(\triangle XBC, \overline{XD} \equiv \overline{BD} \text{ e } \overline{XE} \equiv \overline{CE}) \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC} \text{ e } \overline{DE} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

Isso tudo implica em:

$\Rightarrow \overline{M_2M_3} \parallel \overline{DE}$  e  $\overline{M_2M_3} \equiv \overline{DE} \Rightarrow M_2M_3DE$  é paralelogramo e isso implica em duas observações:

$$\Rightarrow \overline{DX} \equiv \overline{XM_2} \Rightarrow \overline{BX} = 2 \cdot \overline{XM_2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \overline{EX} \equiv \overline{XM_3} \Rightarrow \overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3} \quad (2)$$

Logo, a mediana  $\overline{BM_2}$  intercepta a mediana  $\overline{CM_3}$  num ponto X tal que:

$$\overline{CX} = 2 \cdot \overline{XM_3}$$

Tomando-se as medianas  $\overline{AM_1}$  e  $\overline{CM_3}$  e sendo Y o ponto tal que:

$$\overline{AM_1} \cap \overline{CM_3} = \{Y\}$$

de modo análogo concluímos que:

$$\overline{CY} = 2 \cdot \overline{YM_3} \quad (3)$$

$$\overline{AY} = 2 \cdot \overline{YM_1} \quad (4)$$

De (2) e (3), decorre que  $X = Y$

Chamando este ponto  $X = Y$  de  $G$  e considerando (1), (2) e (4), temos:

$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\} \text{ e}$$

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

$G$  é o baricentro do  $\triangle ABC$

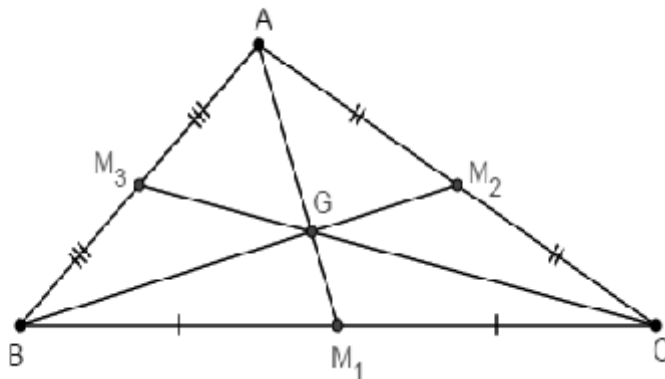


Figura 1.2: Triângulo ABC com o Baricentro G.

$$\overline{AM_1} \cap \overline{BM_2} \cap \overline{CM_3} = \{G\}$$

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}, \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}, \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$$

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AM_1}, \overline{BG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BM_2}, \overline{CG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{CM_3}$$

$$\overline{GM_1} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AM_1}, \overline{GM_2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BM_2}, \overline{GM_3} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CM_3}$$

O baricentro é o centro de gravidade do triângulo. Isto quer dizer que, se suspendermos um triângulo de um mesmo material pelo seu baricentro, ele fica em equilíbrio.

Outro fato curioso que também pode ser levantado é que, ao contrário de alguns polígonos não-convexos, o baricentro do triângulo é interno.



## As Mediatrizes e o Circuncentro

Circuncentro é o ponto de intersecção das três Mediatrizes dos lados de um triângulo.

Mediatriz é a reta perpendicular a um lado do triângulo, traçada pelo seu ponto médio.

**Teorema:** As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está a igual distância dos vértices do triângulo.

Sendo o  $\triangle ABC$ ,

### Hipótese:

$m_1, m_2, m_3$  são as mediatrizes de  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$  e isso implica em duas observações:

### Tese:

$$\Rightarrow 1) m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\}$$

$$\Rightarrow 2) \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

### Demonstração:

Seja  $O$  o ponto tal que:  $m_2 \cap m_3 = \{O\}$

$$O \in m_2 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \quad (1)$$

$$O \in m_3 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \quad (2)$$

De (1) e (2) implica que:

$$\overline{OB} \equiv \overline{OC} \Rightarrow O \in m_1$$

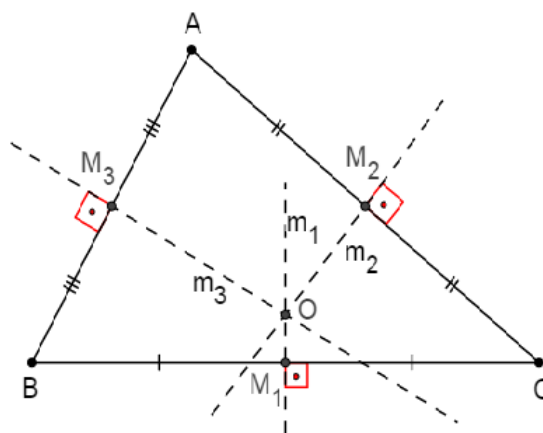


Figura 1.3: Triângulo ABC com suas Mediatrizes e o Circuncentro O.

Logo

$$1) m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\} e$$

$$2) \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$$

**O** é o circuncentro do  $\triangle ABC$ .

O circuncentro é o centro de circunferência circunscrita ao triângulo com raio igual a distância do circuncentro a um dos vértices.

O circuncentro será interno ao triângulo se este for acutângulo, coincidirá como o ponto médio do lado oposto ao ângulo reto se este for retângulo e será externo ao triângulo se este for obtusângulo.

O circuncentro pertence a Hipotenusa no triângulo Retângulo e ao segmento da base do triângulo Isósceles.

### As Alturas e o Ortocentro

Ortocentro é o ponto de intersecção das três alturas relativas de um triângulo.

Altura relativa de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto.

**Teorema:** As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

Sendo o  $\triangle ABC$  de alturas  $\overline{AH_1}$ ,  $\overline{BH_2}$ ,  $\overline{CH_3}$ .

**Hipótese:**

$\overleftrightarrow{AH_1}$ ,  $\overleftrightarrow{BH_2}$ ,  $\overleftrightarrow{CH_3}$  retas que contêm as alturas e isso implica em :

**Tese:**

$$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$$

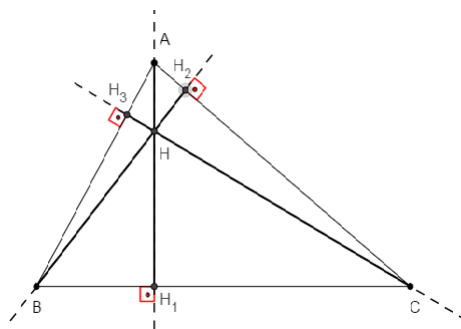


Figura 1.4: Triângulo ABC com suas Alturas.

### Demonstração:

Pelos vértices A, B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo o triângulo MNP.

$$A \in \overline{NP} \text{ e } \overline{NP} \parallel \overline{BC};$$

$$B \in \overline{MP} \text{ e } \overline{MP} \parallel \overline{AC};$$

$$C \in \overline{MN} \text{ e } \overline{MN} \parallel \overline{AB}.$$

$$\text{APBC é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{BC} \quad (1)$$

$$\text{ABCN é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{BC} \quad (2)$$

De (1) e (2) implica que:

$$A \text{ é o ponto médio de } \overline{NP} \quad (3)$$

$$(\overrightarrow{AH_1} \perp \overline{BC}, \overline{NP} \parallel \overline{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{AH_1} \text{ é perpendicular a } \overline{NP} \quad (4)$$

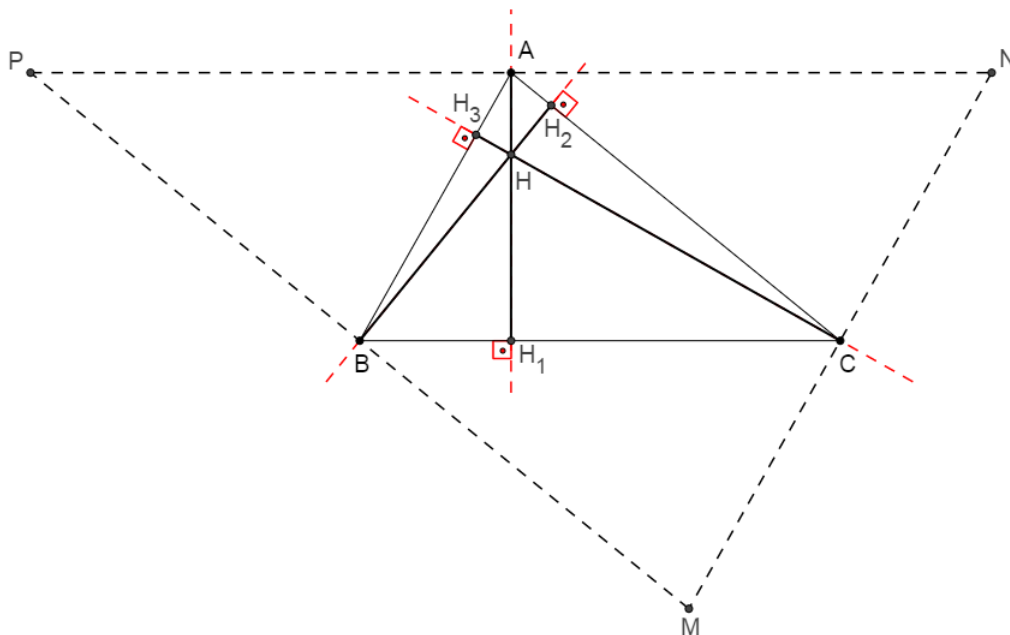


Figura 1.5: Triângulo ABC com o Ortocentro H.

De (3) e (4), decorre que:

A reta  $\overrightarrow{AH_1}$  é mediatriz de NP.

**Analogamente:**

A reta  $\overleftrightarrow{BH_2}$  é mediatriz de  $\overline{MP}$ . A reta  $\overleftrightarrow{CH_3}$  é mediatriz de  $\overline{MN}$ .

Logo, considerando  $\triangle MNP$ , as mediatrizes  $\overleftrightarrow{AH_1}$ ,  $\overleftrightarrow{BH_2}$ ,  $\overleftrightarrow{CH_3}$  dos lados do triângulo interceptam-se num ponto, H.

$$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{H\}$$

**H** é o ortocentro do  $\triangle ABC$ .

No triângulo acutângulo, o ortocentro é interno ao triângulo; no triângulo retângulo, é o vértice do ângulo reto; e no triângulo obtusângulo é externo ao triângulo. Os três vértices juntos com o ortocentro forma um sistema ortocêntrico. O triângulo formado pelos pés das alturas é denominado triângulo órtico.

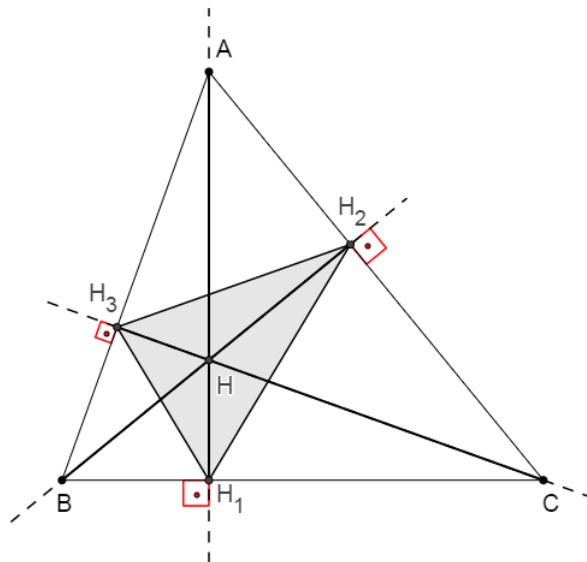


Figura 1.6: Triângulo Órtico.

### 1.2.3 A Reta de Euler

A figura abaixo ilustra a obtenção da Reta de Euler a partir da obtenção dos pontos O (circuncentro), G (baricentro) e H (ortocentro), que determinam a mesma.

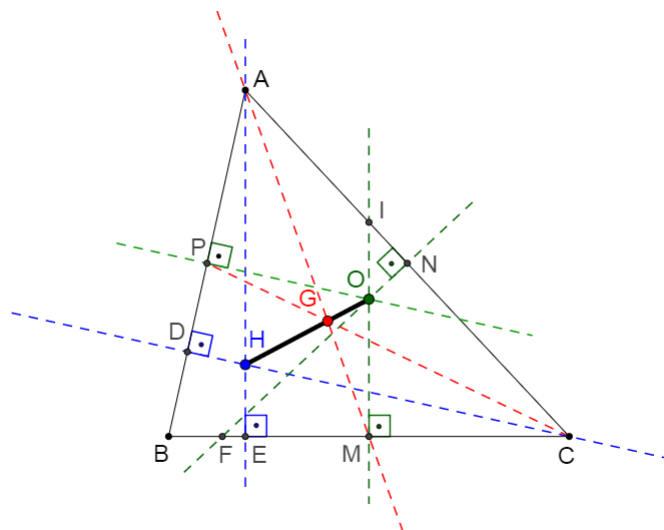


Figura 1.7: Triângulo ABC e a Reta de Euler.

**Teorema:** O baricentro, o ortocentro, e o circuncentro de um triângulo ABC qualquer, são colineares. Além disso, o baricentro está entre o ortocentro e o circuncentro e sua distância ao ortocentro é o dobro de sua distância ao circuncentro.

#### 1ª Demonstração

##### Triângulo Equilátero

No caso de o triângulo ABC ser equilátero, medianas, alturas e mediatrizes coincidem, conseqüentemente, os três pontos G, H e O também irão se coincidir.

Para se definir uma reta precisamos de dois pontos distintos. Sendo assim, em um triângulo equilátero a Reta de Euler não está definida.

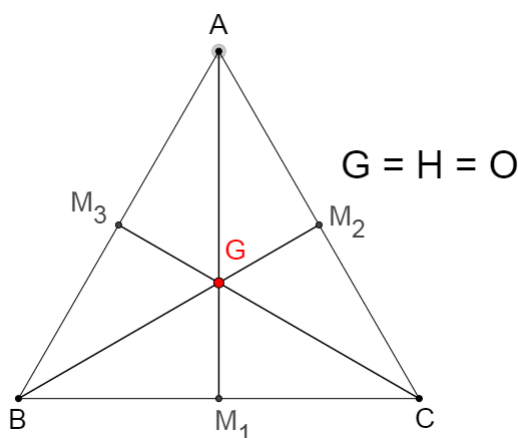


Figura 1.8: Triângulo Equilátero.

## Triângulo Isósceles

Para triângulos isósceles, temos que a mediana, mediatriz e altura relativa à base são coincidentes, logo, o baricentro, o ortocentro e o circuncentro pertencem e um mesmo segmento. Assim, a reta que contém esse segmento é a Reta de Euler do triângulo.

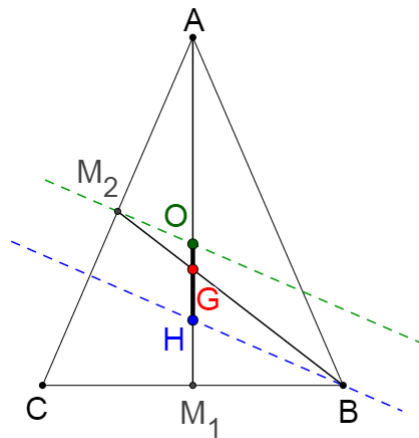


Figura 1.9: Triângulo Isósceles.

## Triângulo Escaleno

Por simplicidade na demonstração para um triângulo escaleno utilizaremos um triângulo acutângulo para garantirmos que os três pontos, citados, serão internos ao triângulo. No entanto a prova é análoga para um triângulo obtusângulo, ou mesmo retângulo.

Segue, para o melhor entendimento do leitor, o passo a passo da demonstração do caso selecionado, devido a extensão da demonstração realizada.

- Vamos considerar então um triângulo ABC escaleno.

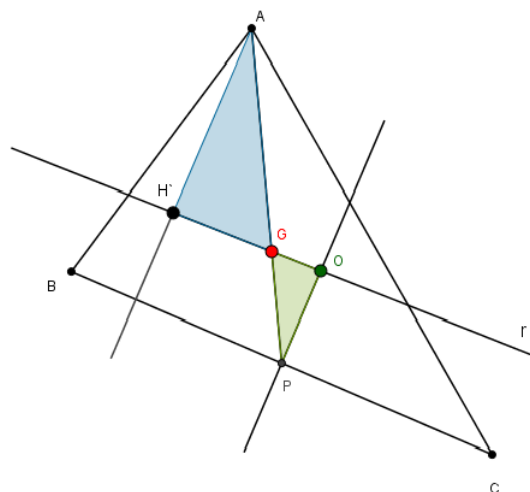


Figura 1.10: Triângulo Escaleno 1.

- Baricentro G (contido na mediana) e o circuncentro O (contido na mediatriz) são pontos distintos, pois a mediana é distinta da mediatriz;

- Tomamos então a reta r determinada pelos pontos G e O;

- Seja H' um ponto pertencente a semi-reta  $\overrightarrow{OG}$  tal que  $\overline{GH'} = 2 \cdot \overline{GO}$ ;

- Seja P o ponto médio do lado  $\overline{BC}$ ;

- Consideremos a mediana  $\overline{AP}$  e a mediatriz  $\overline{PO}$  relativas ao lado  $\overline{BC}$ ;

- Os triângulos GH'A e GOP são semelhantes pelo caso LAL de semelhança:

$$\overline{GH'} = 2 \cdot \overline{GO} \text{ (por construção)}$$

$$\widehat{AGH'} = \widehat{AGO} \text{ (o.p.v)}$$

$$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GP} \text{ (propriedade do baricentro)}$$

- Logo, seus ângulos correspondentes,  $\widehat{AH'G}$  e  $\widehat{POG}$  são congruentes;

- Assim a reta suporte que contém o segmento  $\overline{AH'}$  é paralela à mediatriz  $\overline{OP}$ ;

- Conseqüentemente, H' é um ponto pertencente à altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ ;

- Raciocinando da mesma forma, vamos tomar agora a mediana  $\overline{BP'}$  e a mediatriz  $\overline{P'O}$  relativas ao lado  $\overline{AC}$ .

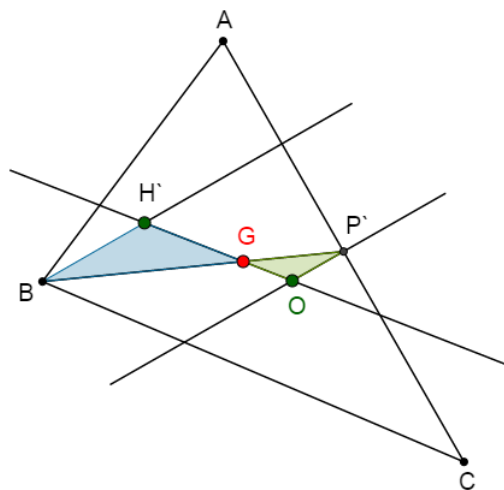


Figura 1.11: Triângulo Escaleno 2.

- Seja  $P'$  o ponto médio do lado  $\overline{AC}$ ;

- Os triângulos  $\triangle GH'B$  e  $\triangle GOP'$  são semelhantes pelo caso LAL de semelhança:

$$\overline{GH'} = 2 \cdot \overline{GO} \quad (\text{por construção})$$

$$\widehat{BGH'} = \widehat{P'GO} \quad (\text{o.p.v})$$

$$\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GP'} \quad (\text{propriedade do baricentro})$$

- Logo, seus ângulos correspondentes,  $\widehat{BH'G}$  e  $\widehat{P'OG}$  são congruentes;

- Assim a reta suporte que contém o segmento  $\overline{BH'}$  é paralela à mediatriz  $\overline{OP'}$ ;

- Conseqüentemente,  $H'$  é um ponto pertencente à altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ ;

- Como  $H'$  é a intersecção de duas alturas do triângulo  $ABC$  temos que  $H' = H$  (ortocentro).

- Concluimos assim que, Circuncentro ( $O$ ) Baricentro ( $G$ ) e Ortocentro ( $H$ ) são colineares e a Reta é a Reta de Euler do Triângulo  $ABC$ .

- Como o Ortocentro de um triângulo é único, por construção, temos que, o Baricentro estará sempre entre o Ortocentro e o Circuncentro e  $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{GO}$ .

## 2ª Demonstração

Consideremos, no triângulo  $ABC$ , os pontos médios  $M_a, M_b, M_c$ , as alturas  $\overrightarrow{AH_a}$  e  $\overrightarrow{BH_b}$ , o ortocentro  $H$  e o baricentro  $G$ .

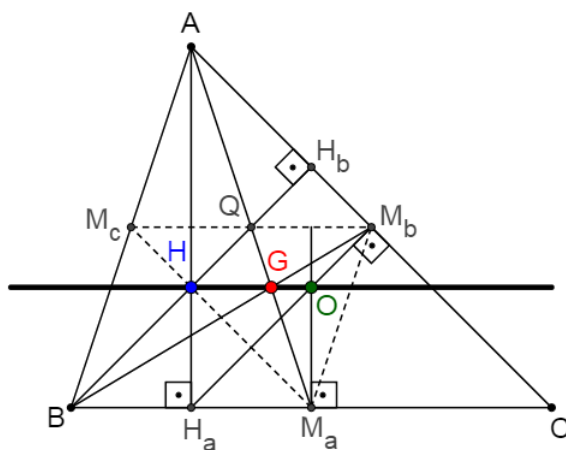


Figura 1.12: Triângulo  $ABC$  e a Reta de Euler.



Consideremos o triângulo  $M_a M_b M_c$ , formado pelos pontos médios dos lados do triângulo  $ABC$ . É fácil ver que o ortocentro  $O$  do triângulo  $M_a M_b M_c$  coincide com o circuncentro do triângulo  $ABC$ .

Além disso, são semelhantes os triângulos  $M_a M_b M_c$  e  $ABC$  pelo caso LLL de semelhança, com razão de semelhança  $1/2$ .

Seja  $M'_c$  e  $M'_b$  pontos de  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , respectivamente, tais que  $\overline{AM'_c} \equiv \overline{M_a M_c}$  e  $\overline{AM'_b} \equiv \overline{M_a M_b}$ .

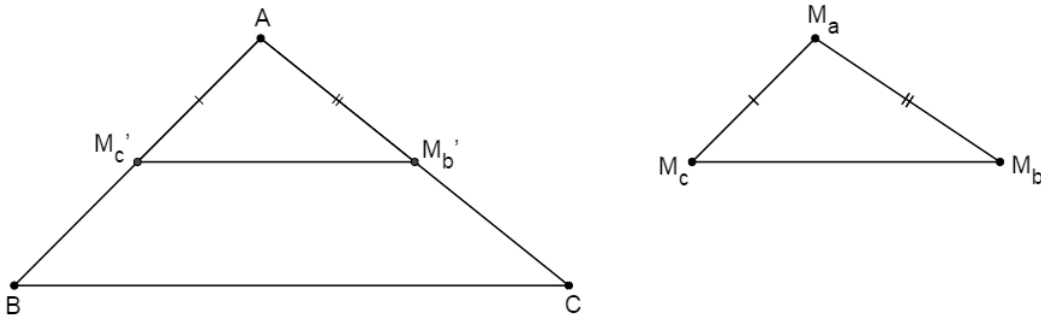


Figura 1.13: Triângulos Semelhantes.

Sendo  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM'_c}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM'_b}}$ , como  $\overline{M'_c}$  e  $\overline{M'_b}$  são pontos médios dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ , logo  $\overline{M'_c M'_b}$  é paralelo ao lado  $\overline{BC}$ .

Então como a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  é transversal a duas retas paralelas, os ângulos  $\widehat{AM'_c M'_b}$  e  $\widehat{ABC}$

são correspondentes, isso implica que:

$$\widehat{AM'_c M'_b} \equiv \widehat{ABC} \quad (1)$$

Analogamente, temos que

$$\widehat{AM'_b M_c} \equiv \widehat{ACB} \quad (2)$$

Portanto, os triângulos  $ABC$  e  $AM'_c M'_b$  são semelhantes.

Logo,  $\frac{\overline{AM'_c}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{M'_c M'_b}}{\overline{BC}}$ , e, daí, segue que

$$\overline{M'_c M'_b} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AM'_c}}{\overline{AB}} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{M_a M_c}}{\overline{AB}} \quad (3)$$

Analogamente, temos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{M_a M_c}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{M_c M_b}}, \text{ ou } \overline{M_c M_b} = \overline{BC} \cdot \frac{\overline{M_a M_c}}{\overline{AB}} \quad (4)$$

De (3) e (4) segue que  $\overline{M'_c M'_b} = \overline{M_c M_b}$ .

Então, pelo caso LLL de congruência de triângulos  $AM'_c M'_b \equiv M_a M_c M_b$ , e portanto  $\widehat{AM'_c M'_b} \equiv \widehat{M_a M_c M_b}$  e  $\widehat{AM'_b M'_c} \equiv \widehat{M_a M_b M_c}$  (5)

Por (1), (2) e (5) temos:

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{AM_c M_b} \text{ e } \widehat{ACB} \equiv \widehat{AM_b M_c}.$$

Portanto os triângulos  $M_a M_b M_c$  e  $ABC$  são semelhantes, logo  $\frac{\overline{AB}}{\overline{M_a M_c}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{M_a M_b}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{M_c M_b}}$ .

Dessa maneira, qualquer par de segmentos correspondentes nesses dois triângulos estão na mesma razão.

Como quadrilátero  $AM_c M_a M_b$  é um paralelogramo, suas diagonais  $\overline{AM_b}$  e  $\overline{M_b M_c}$  bisseccionam-se no ponto Q. Portanto a mediana  $\overline{M_a Q}$  do triângulo  $M_a M_b M_c$  está contida na mediana  $\overline{AM_a}$  do triângulo  $ABC$ , o análogo ocorrendo com as outras duas medianas. Logo os dois triângulos possuem o mesmo baricentro G.

Temos também  $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{M_a O}$ , pela semelhança dos triângulos  $M_a M_b M_c$  e  $ABC$ ;

$\overline{AG} = 2 \cdot \overline{M_a G}$  pelo teorema das medianas; e

$\widehat{HAG} \cong \widehat{GM_a O}$ , pois as retas  $\overleftrightarrow{AH}$  e  $\overleftrightarrow{OM_a}$  são ambas perpendiculares ao lado  $\overline{BC}$ .

Portanto  $\triangle AGH \sim \triangle M_a GO$ , com razão de semelhança 1/2, e daí  $\widehat{AGH} \cong \widehat{M_a GO}$ , pois são opostos pelo vértice.

Isso mostra que O, G e H são colineares e  $\overline{OG} = \frac{\overline{GH}}{2}$ .

A reta que contém esses três pontos notáveis do triângulo é chamada Reta de Euler.

## 1.3 Uma alternativa para o ensino de matemática

O trabalho com software de geometria dinâmica modifica o ambiente da aula e potencializa a criação de conjecturas durante o ensino e aprendizagem de geometria. Um desses software e o Geogebra.

O Geogebra apresenta-se como um software livre, criado por Markus Hohenwarter, escrito em Java e disponível em múltiplas plataformas, que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, considerado como uma ferramenta eficaz no trabalho geométrico de forma interativa.

O software permite realizar construções geométricas por meio de pontos, retas, segmentos de retas, polígonos, dentre outros. Permite também inserir funções e realizar alterações posteriores a todos os objetos de modo dinâmico. Tem a capacidade de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, além de calcular derivadas e integrais de funções.

Com esse objetivo, estamos trazendo uma alternativa, desenvolvida pelo autor, para o professor de Matemática, no ensino da matemática. A ideia é ampliar seus recursos e facilitar o entendimento do aluno em sala de aula.

### 1.3.1 Os Pontos Notáveis do Triângulo

Com o recurso do Geogebra, podemos observar de uma forma simples as propriedades das cevianas, proporcionadas pelos Pontos Notáveis e verificar o deslocamento dos mesmos, conforme a classificação dos triângulos.

#### Baricentro (G)

Nessa ferramenta, podemos observar que o Baricentro é sempre interno ao triângulo. Que cada mediana é dividida em duas partes, tais que, a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

<https://drive.google.com/file/d/1BnL5zCofAuMTevPKjYIWHUZzaA7Eu1tr/view>

Para a verificação da observação<sub>1</sub>, com auxílio do mouse, desloque o ponto C da posição 1 para a posição 2 e 3. Após essa observação devemos acionar, na janela de álgebra, o segmentos  $\overline{CG}$  e  $\overline{GM}_3$ , para reiterarmos a observação<sub>2</sub>. Podemos repetir o movimento do ponto C.

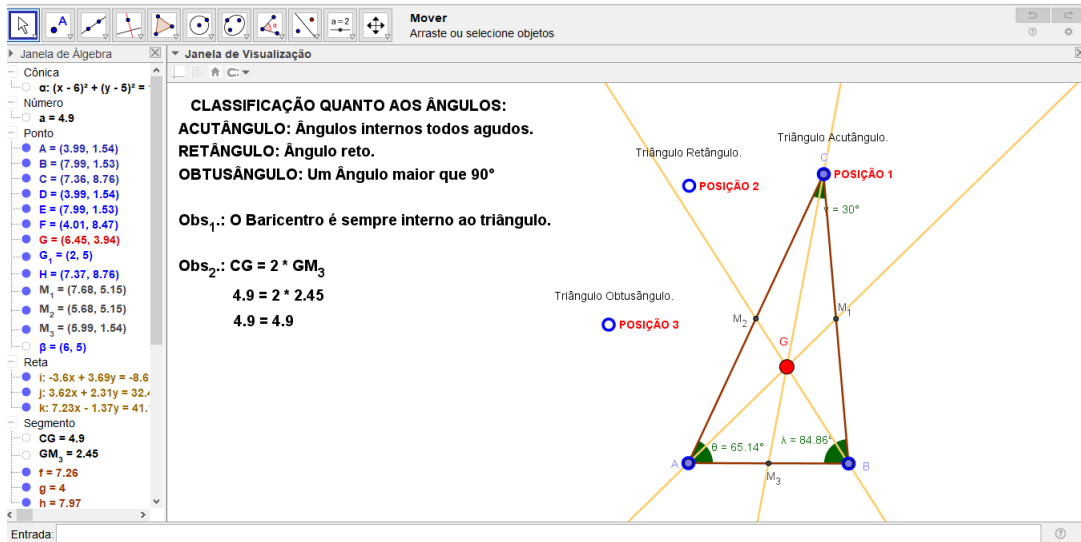


Figura 1.14: Arquivo pessoal: Baricentro 1.

Link de classificação em relação aos lados:

[https://drive.google.com/file/d/1RbG4GTrsurenviYLDppOuyH\\_hU5jZuyr/view](https://drive.google.com/file/d/1RbG4GTrsurenviYLDppOuyH_hU5jZuyr/view)

Para verificação da observação<sub>1</sub>, com auxílio do mouse, desloque:

o ponto A da posição 1 para a posição 2 e assim teremos o triângulo Escaleno;  
 o ponto B da posição 3 para a posição 4 e assim teremos o triângulo Isósceles.

Após essa observação, devemos acionar, na janela de álgebra, os segmentos  $\overline{CG}$ , e  $\overline{GM_3}$ , para reiterarmos a observação<sub>2</sub>. Podemos repetir o movimento dos pontos A e B.

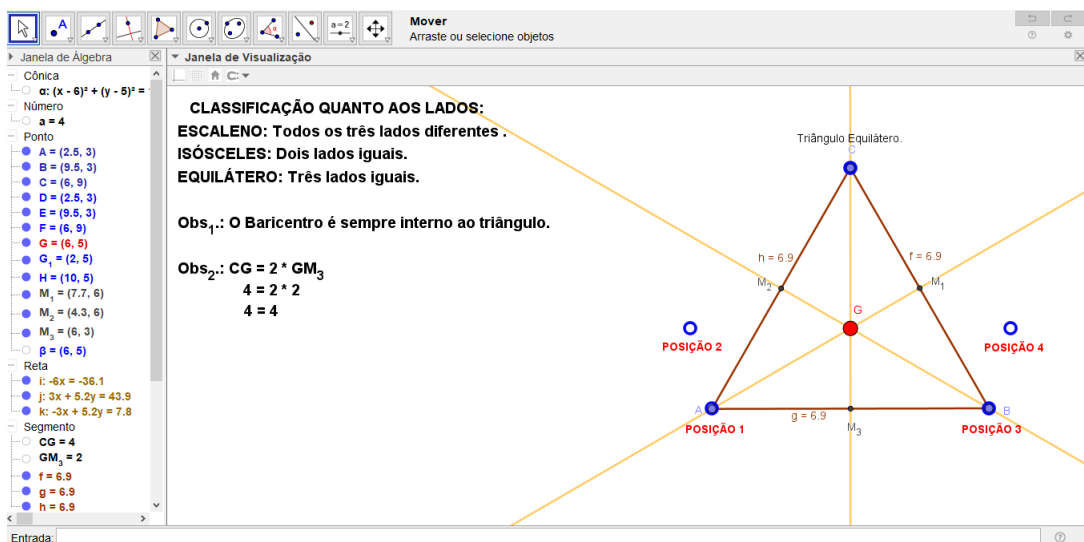


Figura 1.15: Arquivo pessoal: Baricentro 2.

## Circuncentro (O)

Nessa ferramenta, podemos observar que o Circuncentro nem sempre é interno ao triângulo. Que a distância de cada vértice ao Circuncentro são congruentes. Também podemos observar que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, e que o mesmo pertence a Hipotenusa no triângulo Retângulo e ao segmento da base no triângulo Isósceles.

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

<https://drive.google.com/file/d/1egVfZNVdDdSWGkrYWVN6w73YIAcFzplg8/view>

Para a verificação da observação<sub>1</sub>, com auxílio do mouse, desloque o ponto C da posição 2 para a posição 1 e 3. Após essa observação devemos acionar, na janela de álgebra, os segmentos  $\overline{AO}$ ,  $\overline{BO}$  e  $\overline{CO}$ , para reiterarmos a observação<sub>2</sub>. Para a observação<sub>3</sub>, devemos acionar, na janela de álgebra, a cônica  $\alpha$ . Podemos repetir o movimento do ponto C.

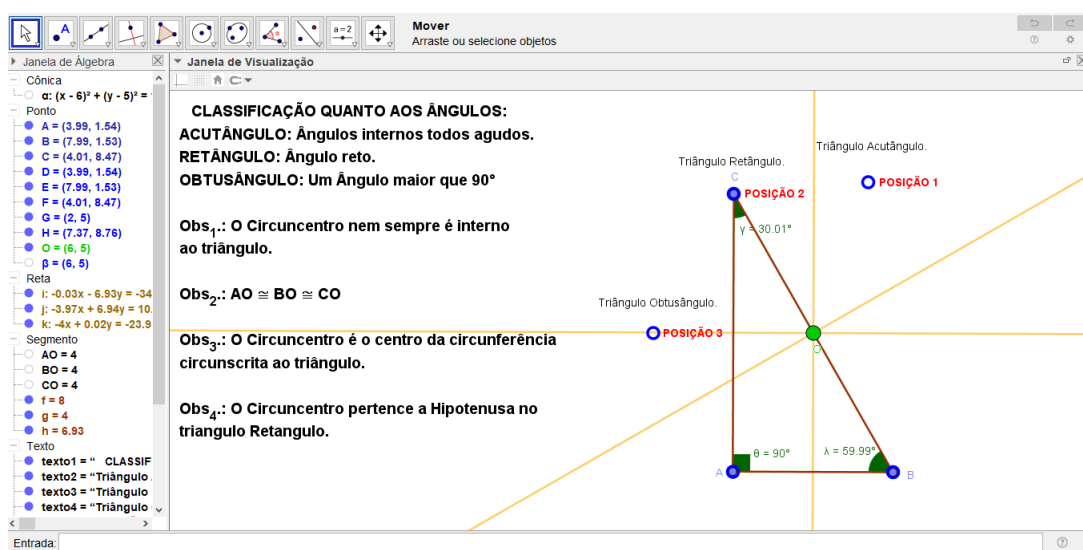


Figura 1.16: Arquivo pessoal: Circuncentro 1.

Link de classificação em relação aos lados:

<https://drive.google.com/file/d/1gQ0ePK7YYIEQa2EV5KIYo5E2GYSyzWn2/view>

Para a verificação da observação<sub>1</sub>, com auxílio do mouse, desloque:

o ponto A da posição 2 para a posição 1 e assim teremos o triângulo Escaleno;  
o ponto B da posição 4 para a posição 3 e assim teremos o triângulo Equilátero.

Após essa observação, devemos acionar, na janela de álgebra, os segmentos  $\overline{AO}$ ,  $\overline{BO}$  e  $\overline{CO}$ , para reiterarmos a observação<sub>2</sub>. Para a observação<sub>3</sub>, devemos acionar, na janela de álgebra, a cônica  $\alpha$ . Podemos repetir o movimento dos pontos A e B.

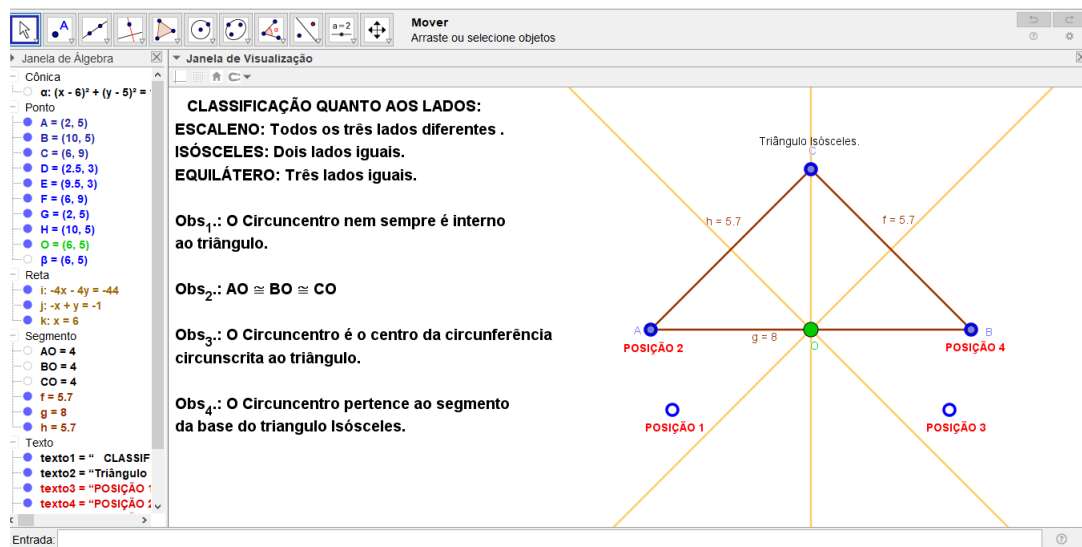


Figura 1.17: Arquivo pessoal: Circuncentro 2.

## Ortocentro (H)

Nessa ferramenta, podemos observar que o Ortocentro nem sempre é interno ao triângulo. No triângulo Retângulo é o vértice do ângulo reto e no triângulo Isósceles é o vértice do lado oposto a base.

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

[https://drive.google.com/file/d/1SEswe\\_2K5IXDGjNhK8nDRTviVXAnP4RE/view](https://drive.google.com/file/d/1SEswe_2K5IXDGjNhK8nDRTviVXAnP4RE/view)

Para a verificação das observações, com auxílio do mouse, desloque o ponto C da posição 2 para a posição 1 e 3.

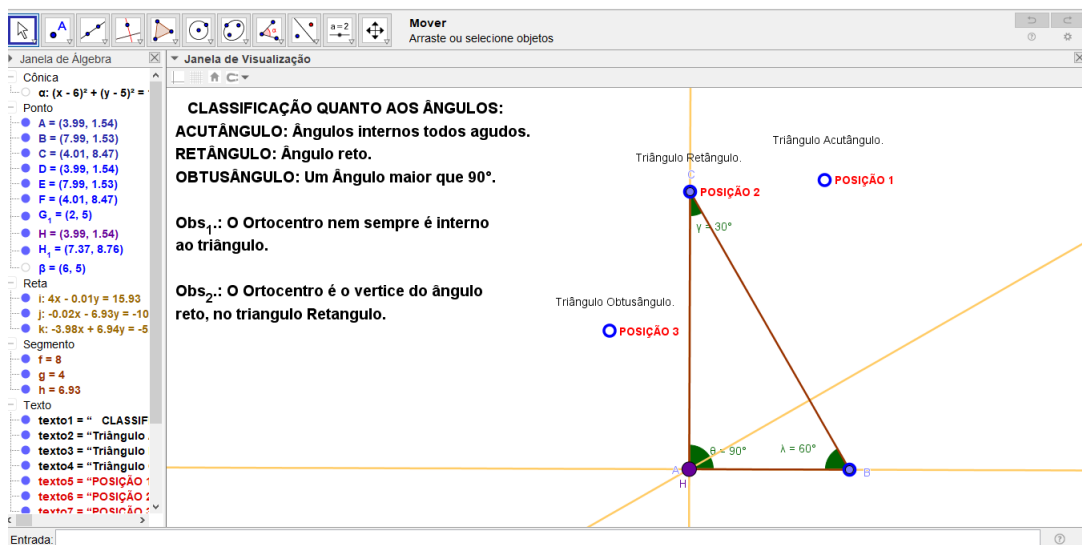


Figura 1.18: Arquivo pessoal: Ortocentro 1.

Link de classificação em relação aos lados:

[https://drive.google.com/file/d/1pH8cKrfAG2hbtqoG4aXDKbj4kFaHNk\\_K/view](https://drive.google.com/file/d/1pH8cKrfAG2hbtqoG4aXDKbj4kFaHNk_K/view)

Para a verificação das observações, com auxílio do mouse, desloque:

o ponto A da posição 1 para a posição 2, e assim teremos o triângulo Escaleno;  
 o ponto B da posição 3 para a posição 4, e assim teremos o triângulo Isósceles.

Podemos repetir esse movimento dos pontos A e B.

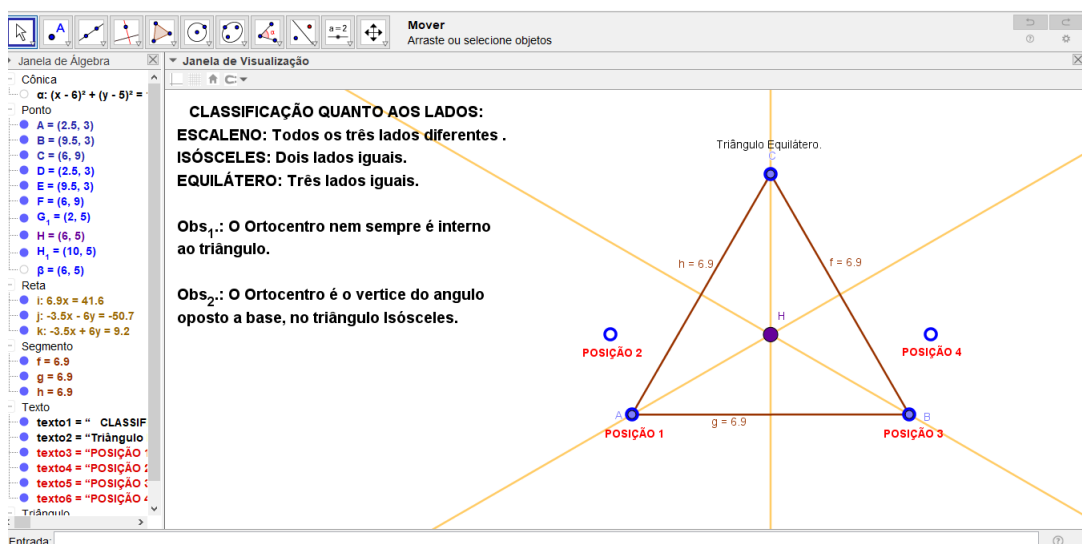


Figura 1.19: Arquivo pessoal: Ortocentro 2.

## Incentro (I)

Nessa ferramenta, podemos observar que o Incentro é sempre interno ao triângulo. Que a distância de cada lado ao Incentro são congruentes. Também podemos observar que o Incentro é o centro da circunferência inscrita ao triângulo.

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

[https://drive.google.com/file/d/1xim\\_02cwUnk89ShPR0YJFtIPy0hy3tkS/view](https://drive.google.com/file/d/1xim_02cwUnk89ShPR0YJFtIPy0hy3tkS/view)

Para a verificação da observação<sub>1</sub>, com auxílio do mouse, desloque o ponto C da posição 3 para as posições 2 e 1. Após essas verificações, devemos observar, na janela de álgebra, os segmentos  $dIa$ ,  $dIb$  e  $dIc$ , para reiterarmos a observação<sub>2</sub>. Para a observação<sub>3</sub>, devemos acionar, na janela de álgebra, a cônica  $\alpha$ . Podemos repetir o movimento do ponto C.

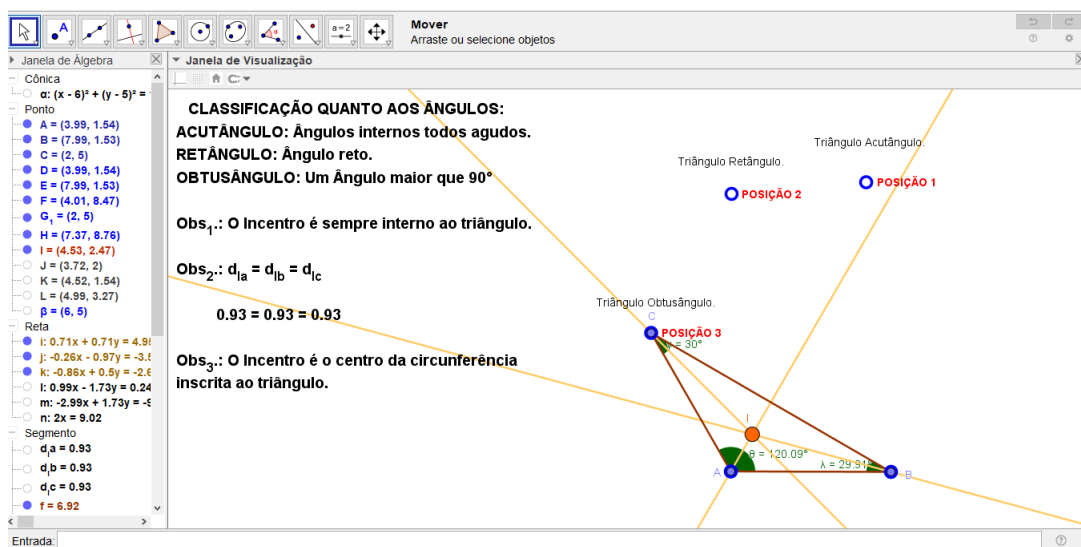


Figura 1.20: Arquivo pessoal: Incentro 1.

Link de classificação em relação aos lados:

[https://drive.google.com/file/d/170LF\\_R3fuTDfVP9DnWI0VdtlJNpMZIPIT/view](https://drive.google.com/file/d/170LF_R3fuTDfVP9DnWI0VdtlJNpMZIPIT/view)

Para a verificação da observação<sub>1</sub>, com auxílio do mouse, desloque:

o ponto A da posição 2 para a posição 1 e assim teremos o triângulo Equilátero;  
o ponto B da posição 3 para a posição 4 e assim teremos o triângulo Isósceles.



Após essa observação, devemos acionar, na janela de álgebra, os segmentos  $\overline{dIa}$ ,  $\overline{dIb}$  e  $\overline{dIc}$ , para reiterarmos a observação<sub>2</sub>. Para a observação<sub>3</sub>, devemos acionar, na janela de álgebra, a cônica  $\alpha$ . Podemos repetir o movimento dos pontos A e B.

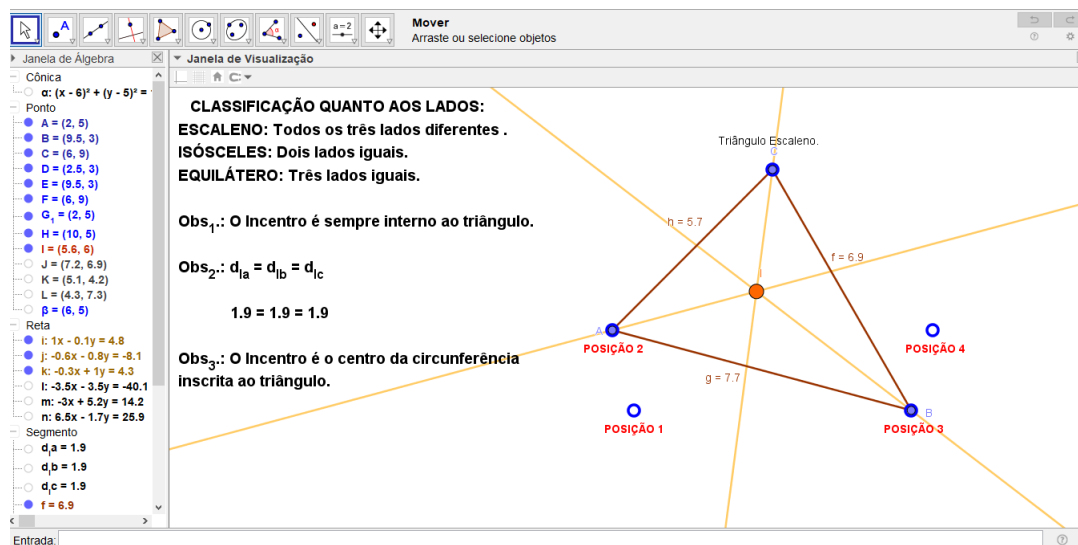


Figura 1.21: Arquivo pessoal: Incentro 2.



Após essa observação, devemos acionar, na janela de álgebra, os segmentos  $\overline{HG}$  e  $\overline{GO}$ , para reiterarmos a observação<sub>2</sub>. Podemos repetir o movimento dos pontos A e B.

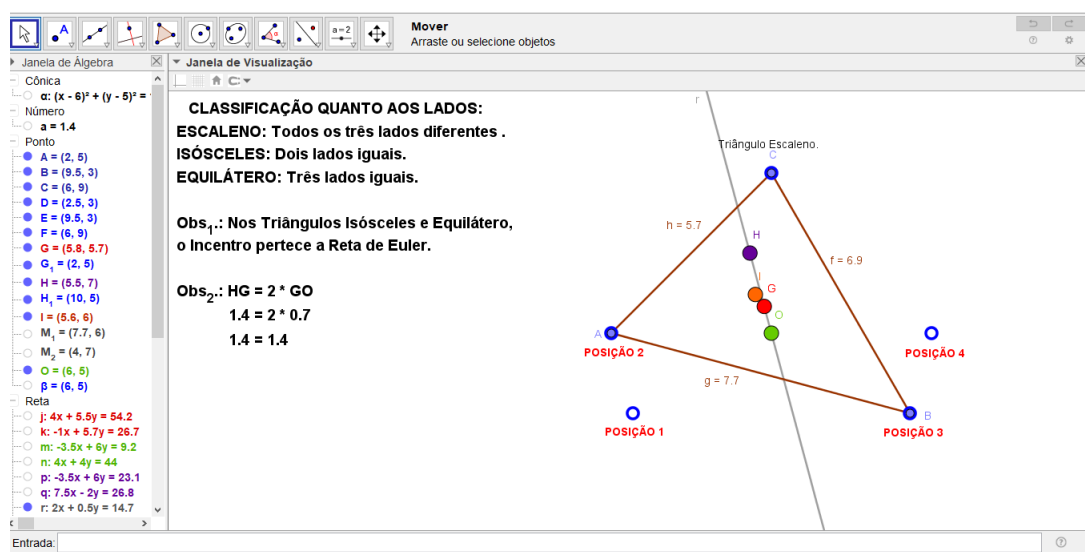


Figura 1.23: Arquivo pessoal: Reta de Euler 2.

# Capítulo 2

## Circunferência dos Nove Pontos

Neste capítulo, mostraremos que dado um triângulo qualquer, a circunferência que passa pelos pés das alturas também passa pelos pontos médios dos lados, bem como pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ortocentro desse triângulo: a Circunferência dos Nove Pontos. Iniciaremos com um comentário histórico sobre essa descoberta e seu descobridor. Demonstraremos o teorema e faremos uma abordagem com o software Geogebra.

### 2.1 Recorte Histórico

#### 2.1.1 A Vida de Feuerbach

Karl Wilhelm Feuerbach nasceu em 30 de Maio de 1800, em Jena, Alemanha, filho de Paul Feuerbach, professor de direito na Universidade de Jena, que escreveu o código penal da Baviera. A família logo se muda para Kiel. No inverno de 1804, seu pai, Paul, escreve em uma carta que ele acabou de levar sua esposa e três filhos de Kiel para Landshut, na Baviera (Weber, 1853). A fama de Paul Feuerbach o levou de uma cidade a outra. Mais tarde, eles se mudaram de Landshut para Munique e, em 1814, de Munique para Bamberg. Karl e seu irmão Anselm estavam estudando na Escola de Munique, quando seu pai se mudou para Bamberg, porém eles ficaram para completar sua escolaridade. Ambos os meninos entraram na Universidade de Erlangen em 1817, onde eles eram estudantes brilhantes.

O rei Maximiliano José, enobreceu Paul em 1808 e lhe concedeu a educação universitária gratuita para todos os seus filhos. Em 1819, Paul Feuerbach foi nomeado Presidente do Tribunal de Apelações em Ansbach. Ele escreveu uma carta em dezembro daquele ano em que ele orgulhosamente descreve as habilidades excepcionais de seu filho Karl em matemática e física e suas realizações na Universidade de Erlangen.

Com 22 anos idade, Karl conclui seu doutorado e é nomeado para um cargo de professor na Universidade de Erlangen. Nesse período publica seu excepcional teorema (Teorema de Feuerbach). Depois de passar três anos estudando Karl Feuerbach mudou-se para a Universidade de Freiburg.

Sua vida, no entanto, não foi fácil e não está claro se os infortúnios que se seguiram foram simplesmente ao acaso ou se foram motivados por inimigos políticos de seu pai. Como estudante, Feuerbach foi, como muitos jovens, um pouco rebelde. Ele havia se juntado a uma organização com objetivos políticos. Um dia, enquanto caminhava até o Universidade de Er-

langen, onde estava ensinando, foi preso. Feuerbach e seus amigos foram presos na Torre Nova em Munique (Weber, 1853).

Karl Feuerbach foi libertado, sob a condição de que ele ficasse na responsabilidade de Friedrich Wilhelm Thiersch, um erudito educador clássico e amigo da família Feuerbach, que ensinara Karl quando este estudara na Escola de Munique. Feuerbach continuou realizando estudos matemáticos enquanto estava na prisão e uma vez liberado, tudo o que ele queria era estar com seus irmãos, irmãs e pai em Ansbach enquanto continuava com sua pesquisa.

Ele ficou debilitado mentalmente por cerca de um ano, sem retornar ao trabalho e quando o fez, foi na Universidade de Hof. No entanto, Feuerbach não ficou feliz em Hof, perdendo a vida tranquila que teve com sua família em Ansbach. Seu estado mental se deteriorou e dois de seus irmãos foram a Hof para ajudá-lo a ir a Erlangen para tratamento médico. Ele fez uma boa recuperação e logo parecia esta bem o suficiente para retomar o ensino, o que ele fez em 1828 na Universidade de Erlangen. No entanto, ele não estava totalmente recuperado como mostra o evento a seguir (The Scientific Monthly 81, 1955):

*... um dia ele apareceu na aula com uma espada desembainhada e ameaçou cortar a cabeça de todos os alunos da turma que não conseguiam resolver as equações que ele havia escrito no quadro negro.*

Após este episódio, ele foi aposentado permanentemente. Ele permitiu que seus cabelos, barba e unhas ficassem longos; ele olhava para visitantes ocasionais sem qualquer sinal de emoção; e sua conversa consistia apenas em baixos tons murmurados, sem significado ou expressão.

Ele só viveu por mais seis anos, na cidade de Erlangen, vivendo como um recluso. Ficou conhecido como um geômetra que descobriu o círculo de nove pontos de um triângulo.

Os geômetras consideram universalmente o "Teorema de Feuerbach" como um teorema surpreendente na geometria moderna do triângulo. Este teorema se concentra em cinco círculos importantes relacionados a um triângulo. Esses cinco círculos são: o círculo inscrito no triângulo, os três círculos tocando um lado do triângulo e o círculo de nove pontos. O teorema de Feuerbach afirma que, para qualquer triângulo, o círculo de nove pontos é tangente ao círculo inscrito e a cada um dos três círculos do triângulo.

Estes resultados aparecem em seu artigo de 1822, e é na força deste papel que a fama de Feuerbach é baseada. Ele escreveu nesse papel:

*O círculo que passa pelos pés das alturas de um triângulo toca todos os quatro círculos que são tangentes aos três lados do triângulo; é internamente tangente ao círculo inscrito e externamente tangente a cada um dos círculos que tocam os lados do triângulo externamente.*

O círculo de nove pontos que é descrito aqui também foi descrito no trabalho conjunto de CHARLES BRIANCHON e JEAN-VENCEDOR PONCELET, intitulado *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère*, nos *Annales de Mathématiques de Gergonne* de 1820-1821, no ano anterior ao surgimento do artigo de Feuerbach. No entanto, JOHN STURGEON MACKAY observa que Feuerbach deu (Mackay, 1892):

*... a primeira enunciação dessa interessante propriedade do círculo de nove pontos*

ou seja, "é internamente tangente ao círculo inscrito e externamente tangente a cada um dos círculos que tocam os lados do triângulo externamente". O ponto em que o círculo e o círculo de nove pontos tocam agora é chamado de ponto de Feuerbach.

Feuerbach realizou novas pesquisas matemáticas. Ele enviou um trabalho para a revista *Isis* (datada de 22 de outubro de 1826) intitulado "Fundamentos da teoria analítica da pirâmide triangular". Este trabalho anunciou resultados que deviam ser incluídos na íntegra em uma publicação posterior, porém eles fizeram em um livreto de 48 páginas, com o mesmo nome, publicado em 1827. Esta é uma segunda grande obra de Feuerbach e foi cuidadosamente estudada por MORITZ CANTOR que descobriu que nele Feuerbach introduz coordenadas homogêneas. Portanto ele deve ser considerado o inventor conjunto de coordenadas homogêneas, uma vez que AUGUST MÖBIUS, em sua obra "Der Barycentrische Calcul" (O Cálculo Baricêntrico), também publicada em 1827, introduziu coordenadas homogêneas na geometria analítica.

### 2.1.2 A descoberta do Círculo dos Nove Pontos

A história do teorema é um tanto confusa, o que faz com que o círculo dos nove pontos seja também chamado "*Círculo de Euler*" e "*Círculo de Feuerbach*".

Em 1804, B. BEVAN propôs como problema a demonstração de um teorema que envolvia o círculo dos nove pontos. O problema foi resolvido em 1808, J. WHITNEY responde a uma questão proposta por J. BUTTERWORTH no ano anterior e o teor de sua solução deixa claro que ele, embora tenha destacado apenas sete dos nove pontos pelos quais a Circunferência dos Nove Pontos passa, sabia que ela passava pelos outros dois. Contudo, para os propósitos que ele tinha em mente na ocasião, ele não precisava dos outros dois, e conseqüentemente, não os mencionou.

O teorema é, às vezes, erroneamente atribuído a Euler. Euler demonstrou, em 1765, que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro de um triângulo, estão em uma mesma reta, conhecida como reta de Euler. Acontece que o centro do círculo dos nove pontos está na reta de Euler e é ponto médio do segmento que tem por extremidades o ortocentro e o circuncentro. Mas não há nenhuma indicação de que Euler conhecesse o círculo dos nove pontos.

Feuerbach, independentemente, demonstrou, em um trabalho publicado em 1822, que o círculo que passa pelos pés das alturas de um triângulo passa também pelos pontos médios dos lados, e acrescentou: este círculo é tangente internamente ao círculo inscrito e tangente exter-

namente aos três círculos ex-inscritos do triângulo — "*talvez o mais belo teorema da Geometria Elementar que tenha sido descoberto desde o tempo de Euclides*". É por isso que o círculo dos nove pontos é também conhecido como círculo de Feuerbach, apesar de o autor ter localizado apenas seis de seus pontos. O destino do teorema após a sua descoberta foi igual ao de muitos outros. Inicialmente ele foi ignorado, depois redescoberto várias vezes. JACOB STEINER o enunciou, sem demonstração, em 1828, e achou os três pontos que faltavam em 1833. OLRY TERQUEM o demonstrou completamente em 1842. SALMON e também CASEY provaram a parte relativa às tangências, em 1860. Muitas outras demonstrações foram publicadas, culminando com SAWAYAMA, que, em 1911, apresentou nove demonstrações, todas, supostamente, inéditas (Mackay, 1892).

## 2.2 O Círculo dos Nove Pontos

### 2.2.1 Teorema do Círculo dos Nove Pontos

O Círculo dos Nove Pontos é uma relação entre os pontos: os pés das alturas relativas, os pontos médios dos lados e os pontos médios entre os vértices e o Ortocentro, todos pertencendo a uma mesma circunferência.

**Teorema:** Seja  $ABC$  um triângulo de circuncentro  $O$  e ortocentro  $H$ . Então os pontos médios dos lados, os pés das alturas e os pontos médios dos segmentos que ligam  $H$  aos vértices estão em uma circunferência cujo centro é o ponto médio do segmento  $\overline{OH}$  e cujo raio é a metade do raio da circunferência circunscrita ao triângulo  $ABC$ .

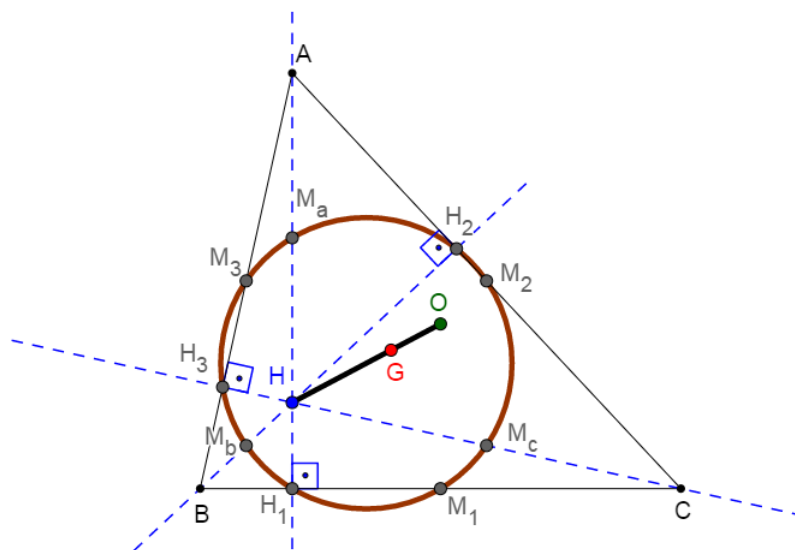


Figura 2.1: Triângulo  $ABC$  e o Círculo dos Nove Pontos.

## 2.2.2 1ª Demonstração

Dada a figura, temos:

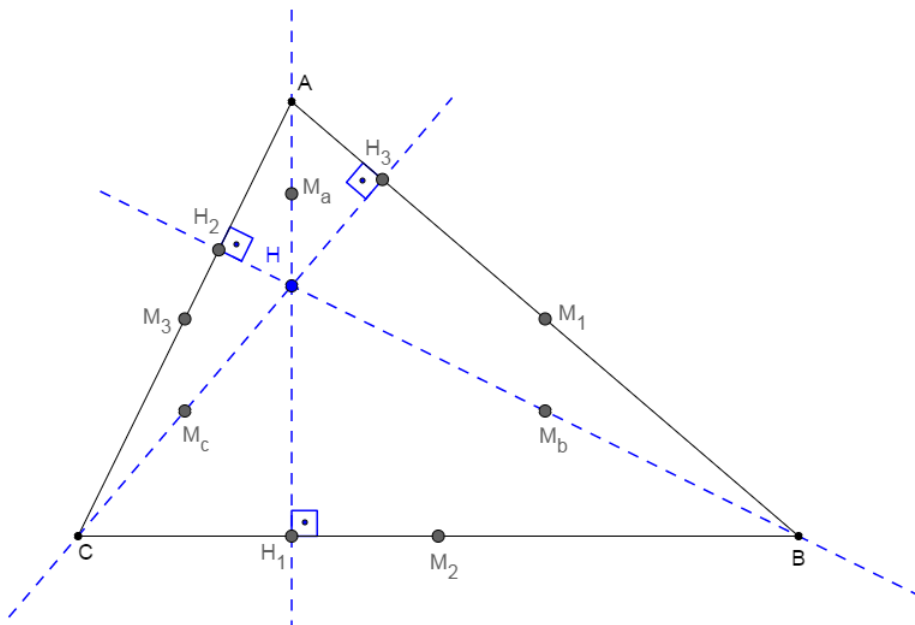


Figura 2.2: Triângulo ABC e os Nove Pontos.

-Sendo ABC o triângulo,

### Hipótese:

- $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  os respectivos pontos médios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{AC}$ .
- $\overline{AH_1}$ ,  $\overline{BH_2}$  e  $\overline{CH_3}$  as alturas com  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  os respectivos pés e H o ortocentro do triângulo.
- $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  os respectivos pontos médios de  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BH}$  e  $\overline{CH}$ .
- Os nove pontos são:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$ .

### Tese:

$M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  pertencem a uma mesma circunferência.

### Demonstração:

Consideremos a circunferência  $\lambda$  passando por  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ .



Trata-se de demonstrar que  $\lambda$  passa,  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  e por  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$ .

Basta provar que  $\lambda$  passa por  $H_1$  (pois, para  $H_2$  e  $H_3$  a demonstração é análoga) e por  $M_a$  (pois, para  $M_b$  e  $M_c$  é análogo).

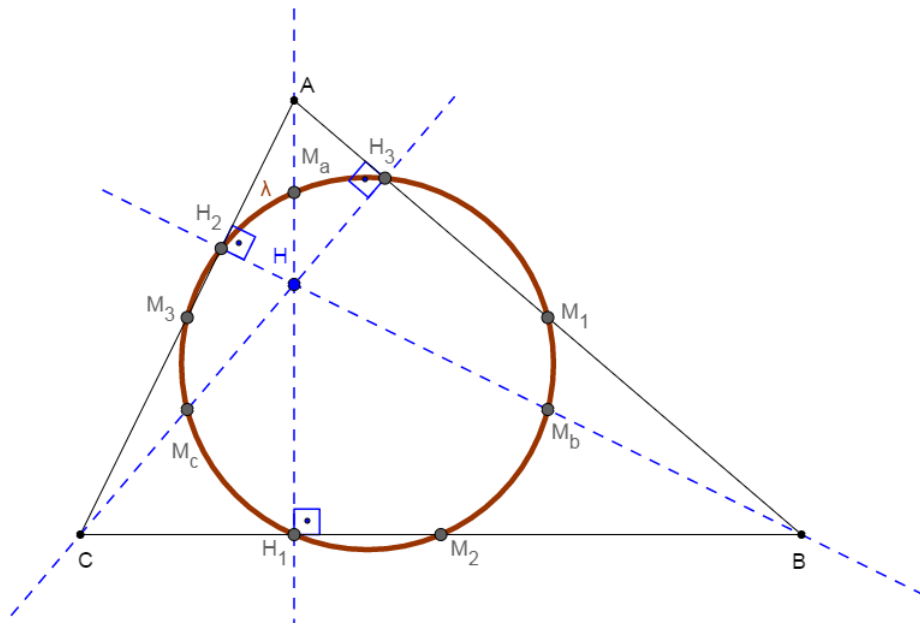


Figura 2.3: Círculo dos Nove Pontos 1.

1º parte: Provemos que  $\lambda$  passa por  $H_1$ , observando o quadrilátero  $H_1M_3M_1M_2$ .

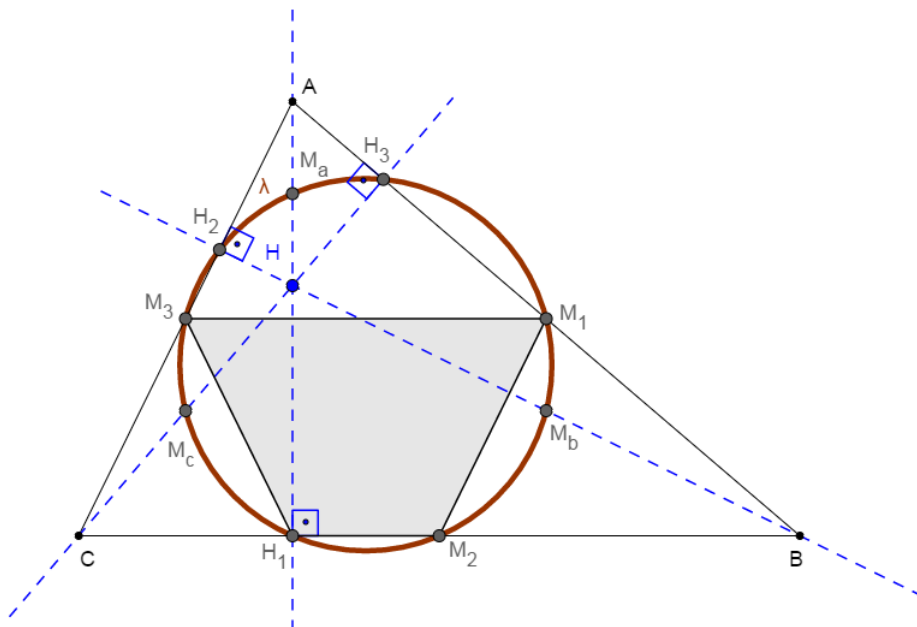


Figura 2.4: Círculo dos Nove Pontos 2.

O segmento  $M_1M_2$ , com extremidades nos pontos médios dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{BC}$  do triângulo  $ABC$ , é paralelo a  $\overline{AC}$  e igual à sua metade,

$$\text{logo } M_1M_2 = M_3C. \quad (1)$$

No triângulo  $CAH_1$ , retângulo em  $H_1$ , a mediana  $\overline{H_1M_3}$ , relativa à hipotenusa  $\overline{AC}$ , é metade desta hipotenusa,

$$\text{logo } \overline{H_1M_3} = \overline{M_3C}. \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2) vem: } \overline{M_1M_2} = \overline{H_1M_3}.$$

Portanto, o quadrilátero  $H_1M_3M_1M_2$  é um trapézio isósceles, pois  $\overline{M_1M_3}$  é paralelo a  $\overline{H_1M_2}$  e  $\overline{H_1M_3} = \overline{M_1M_2}$ . Consequentemente, ele é inscritível. Sendo inscritível, a circunferência  $\lambda$  que passa pelos pontos  $M_1, M_2$  e  $M_3$ , passa, também, por  $H_1$ .

Então,  $\lambda$  passa por  $M_1, M_2, M_3, H_1, H_2$  e  $H_3$ .

2º parte: Provemos que passa por  $M_a$ , observando o quadrilátero  $H_1M_3M_aM_2$ .

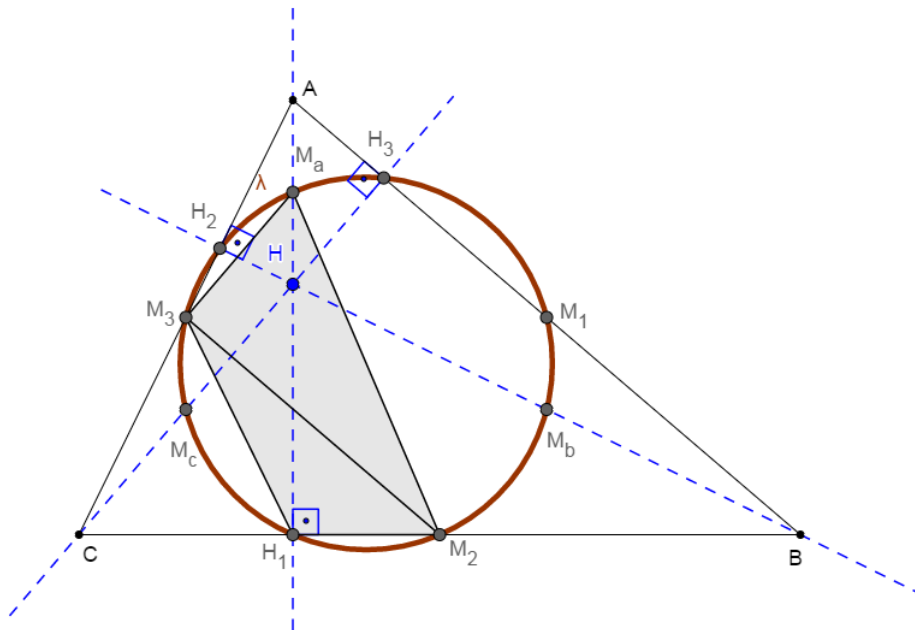


Figura 2.5: Círculo dos Nove Pontos 3.

No triângulo  $ACH$ ,  $\overline{M_3M_a}$  é paralelo a  $\overline{CH}$  por ser segmento com extremidades nos pontos médios dos lados  $\overline{AC}$  e  $\overline{AH}$ .

Analogamente, no triângulo  $ABC$ ,  $\overline{M_2M_3}$  é paralelo a  $\overline{AB}$ . Os ângulos  $\widehat{M_2M_3M_a}$  e  $\widehat{AH_3C}$ , por terem lados respectivamente paralelos, são congruentes. Como  $\widehat{AH_3C}$  é reto, segue-se que  $\widehat{M_2M_3M_a}$  é também reto.

Ora, os triângulos retângulos  $M_2H_1M_a$  e  $M_2M_3M_a$  possuem a mesma hipotenusa  $\overline{M_aM_2}$ , logo o quadrilátero  $H_1M_3M_aM_2$  é inscritível. Sendo inscritível, a circunferência  $\lambda$  que passa pelos pontos  $M_2$ ,  $M_3$  e  $H_1$  (1.ª parte), passa também por  $M_a$ .

Vemos, então, que  $\lambda$  passa por  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$ .

**Corolário 1.** O segmento  $\overline{LE}$  é o diâmetro do "Círculo dos Nove Pontos".

**Demonstração:**

Basta notar que o triângulo  $M_aM_2M_3$  é retângulo em  $M_3$ , e, portanto inscritível em  $\lambda$  com diâmetro  $\overline{M_aM_2}$ .

**Corolário 2.** O centro do "Círculo dos Nove Pontos" é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o ortocentro (H) e o circuncentro (O) do triângulo ABC.

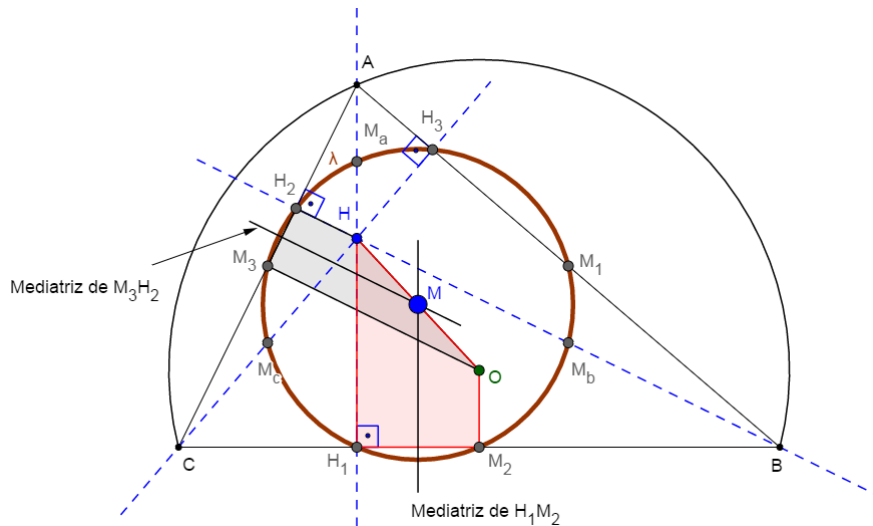


Figura 2.6: Círculo dos Nove Pontos 4.

**Demonstração:**

Num trapézio, toda reta paralela às bases, passando pelo ponto médio de um lado, intercepta o outro em seu ponto médio.

Consideremos os trapézios, retângulos  $M_3H_2HO$  e  $HOM_2H_1$ . No primeiro, a mediatriz de  $\overline{M_3H_2}$  (que é paralela às bases) corta o segmento  $\overline{HO}$  em seu ponto médio M. Também no trapézio  $HOM_2H_1$  a mediatriz de  $\overline{H_1M_2}$  (que é paralela às bases) corta  $\overline{HO}$  em seu ponto médio M.

O ponto M é o centro de  $\lambda$  pois também é intersecção das mediatrizes das cordas  $\overline{M_3H_2}$  e  $\overline{H_1M_2}$  de  $\lambda$ .

### 2.2.3 2ª Demonstração

Considerando o triângulo ABC.

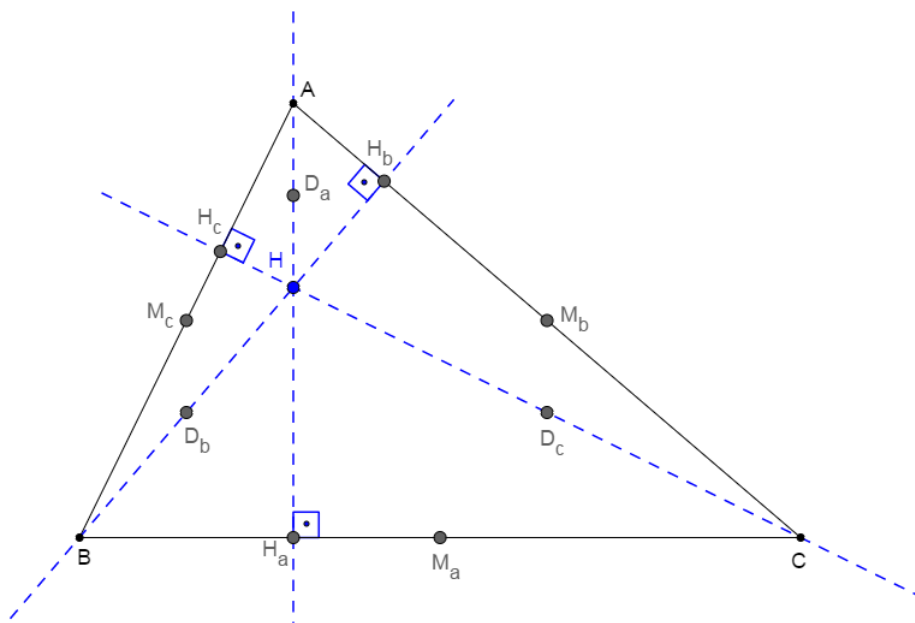


Figura 2.7: Triângulo ABC e os Nove Pontos 1.

#### Hipótese:

Sejam  $M_a$ ,  $M_b$  e  $M_c$  os pontos médios dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente.

Sejam  $H_a$ ,  $H_b$  e  $H_c$  os pés das alturas relativas aos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, sendo H o ortocentro do triângulo.

Sejam  $D_a$ ,  $D_b$  e  $D_c$  os pontos médios dos segmentos  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BH}$  e  $\overline{CH}$ , respectivamente.

#### Tese:

Vamos mostrar que esses nove pontos estão em uma mesma circunferência.

#### Demonstração:

Vamos mostrar inicialmente que o quadrilátero  $D_bD_cM_bM_c$  é um retângulo.

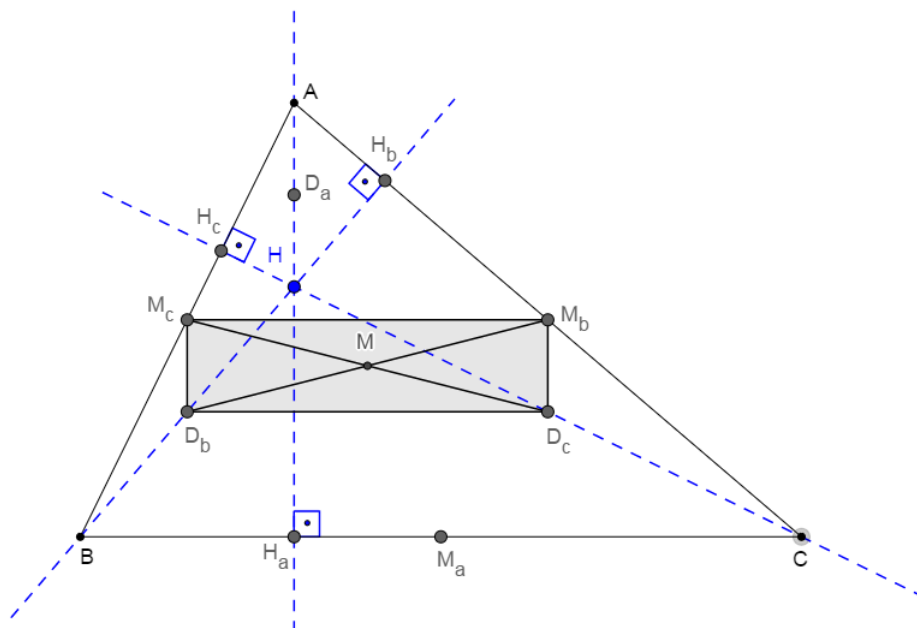


Figura 2.8: Triângulo ABC e os Nove Pontos 2.

De fato, como  $M_c$  e  $M_b$  são pontos médios dos lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  do triângulo ABC, resulta que o segmento  $M_bM_c$  é paralelo ao segmento  $\overline{BC}$  e  $M_bM_c = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ .

Ainda,  $D_b$  e  $D_c$  são pontos médios dos lados  $\overline{HB}$  e  $\overline{HC}$  do triângulo HBC. Logo resultam segmento  $\overline{D_bD_c}$  paralelo ao segmento  $\overline{BC}$  e  $\overline{D_bD_c} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ .

Por transitividade, obtemos  $\overline{M_bM_c} = \overline{D_bD_c}$  e o segmento  $\overline{M_bM_c}$  paralelo ao segmento  $\overline{D_bD_c}$  e portanto  $M_cD_bD_cM_b$  é um paralelogramo.

Consideremos o triângulo  $ABH_a$ . Nele, temos o segmento  $\overline{M_cD_b}$  paralelo ao segmento  $\overline{AH_a}$  e, portanto, ao segmento  $\overline{M_cD_b}$  perpendicular ao segmento  $\overline{D_bD_c}$ .

Ora, um paralelogramo que possui um ângulo reto é um retângulo.

Com isso, concluímos que os segmentos  $\overline{M_cD_c}$  e  $\overline{M_bD_b}$ , sendo diagonais de um retângulo, são congruente e interseccionam-se em seu ponto médio M.

Da mesma maneira, mostramos que  $M_cM_aD_cD_a$  e  $M_aM_bD_aD_b$  são retângulos.

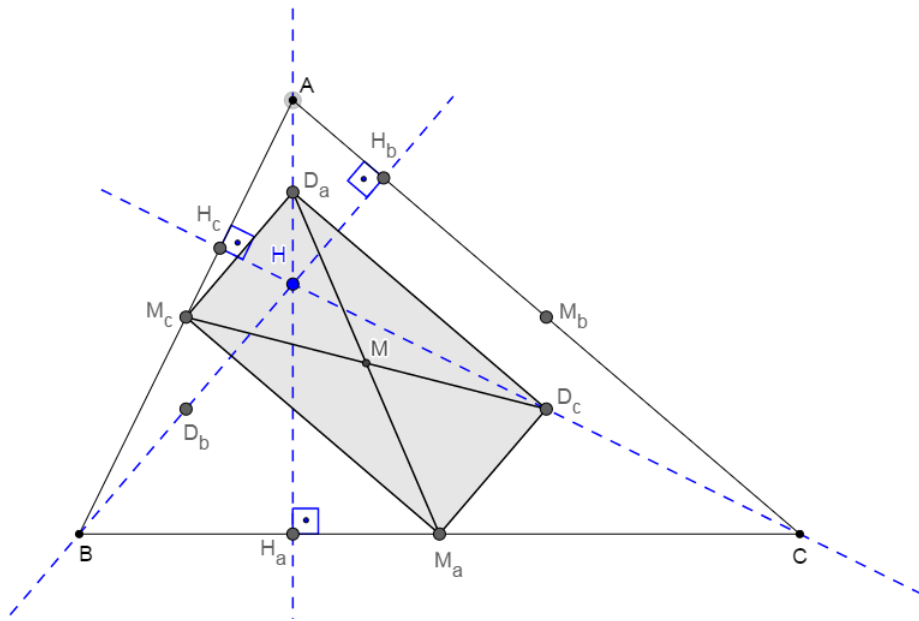


Figura 2.9: Triângulo ABC e os Nove Pontos 3.

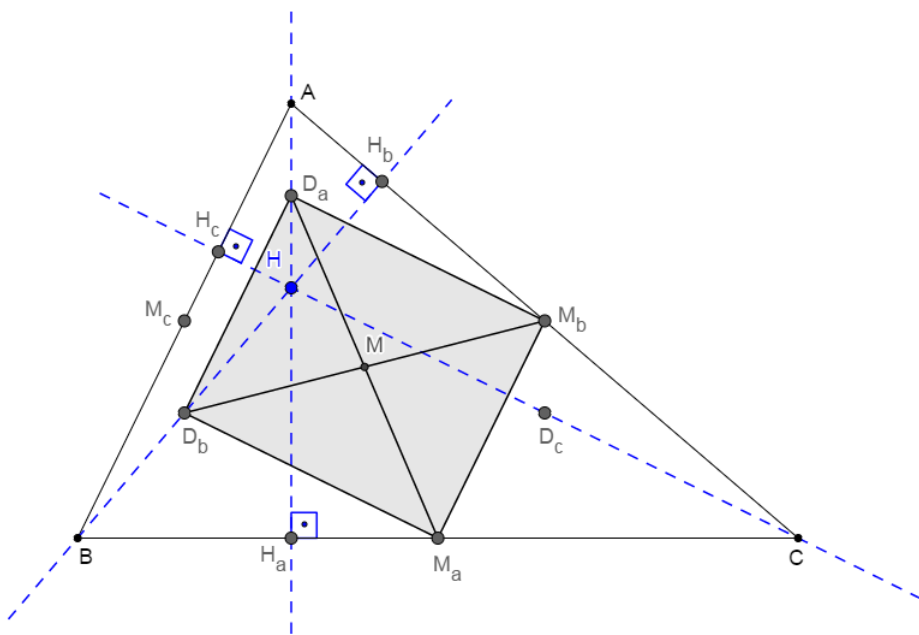


Figura 2.10: Triângulo ABC e os Nove Pontos 4.

Logo suas respectivas diagonais  $\overline{M_c D_c}$  e  $\overline{M_a D_a}$  e,  $\overline{M_a D_a}$  e  $\overline{M_b D_b}$  são congruentes e interseccionam-se em M.

Com isso mostramos que seis dos nove pontos estão na circunferência de diâmetro  $\overline{M_c D_c}$ , por exemplo. Falta mostrar que  $H_a$ ,  $H_b$  e  $H_c$  também pertencem a essa circunferência.

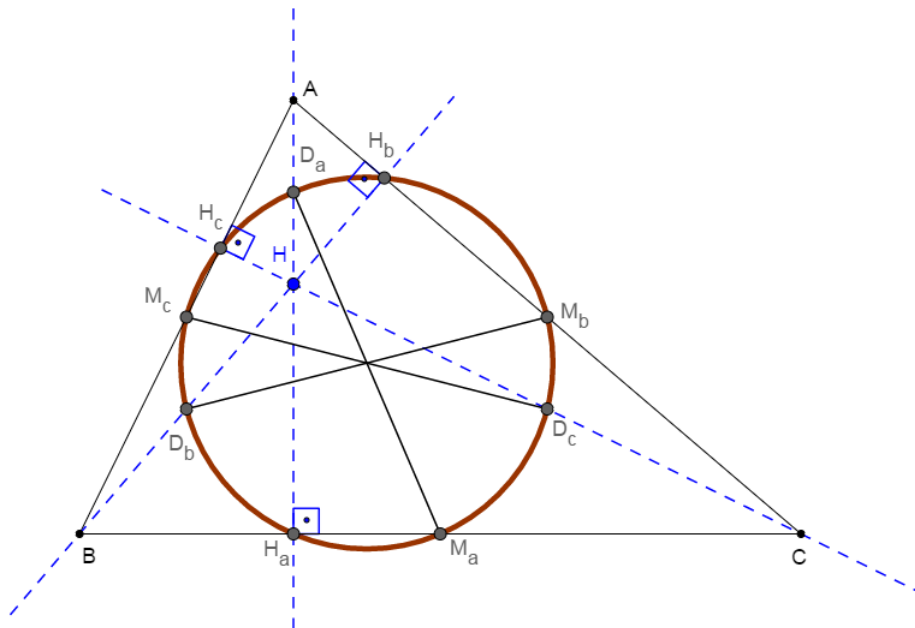


Figura 2.11: Triângulo ABC e o Círculo dos Nove Pontos.

Mas isso decorre imediatamente do Corolário: duas circunferências são tangentes se possuem uma reta tangente comum e com o mesmo ponto de tangência, e pelo fato de que  $D_bH_bM_b$ ,  $D_cH_cM_c$  e  $D_aH_aM_a$  são triângulos retângulos cujas hipotenusas são respectivamente os segmentos  $D_bM_b$ ,  $D_cM_c$  e  $D_aM_a$ , todos diâmetros da circunferência determinada.

## 2.3 Uma alternativa para o ensino de matemática

Estamos trazendo uma alternativa, desenvolvida pelo autor, para o professor de Matemática, no ensino de matemática. A ideia é ampliar seus recursos e facilitar o entendimento do aluno em sala de aula.

### 2.3.1 O Círculo dos Nove Pontos

Com o recurso do Geogebra, podemos observar de uma forma objetiva, que a circunferência que passa pelos pés das alturas também passa pelos pontos médios dos lados, bem como pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao Ortocentro desse triângulo. A coincidência de algum desses pontos e a visualização da Circunferência de Nove Pontos com a Reta de Euler

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

[https://drive.google.com/file/d/1JKNI\\_HHRoxBVq\\_TrNowQYLa1ndVYUkiP/view](https://drive.google.com/file/d/1JKNI_HHRoxBVq_TrNowQYLa1ndVYUkiP/view)

Para a verificação das observações, com auxílio do mouse, desloque o ponto C da posição 1 para a posição 2 e 3. Após essa verificação, devemos acionar, na janela de álgebra, os pontos G (baricentro), O (circuncentro), H (ortocentro), I (incentro) e a reta r (reta de Euler), para visualizarmos a Circunferência de Nove Pontos com a Reta de Euler. Podemos repetir o movimento do ponto C.

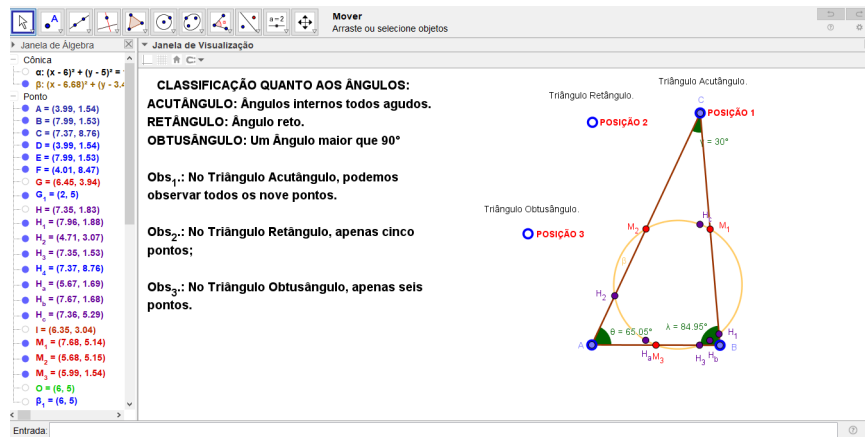


Figura 2.12: Arquivo pessoal: Círculo dos Nove Pontos 1.

Link de classificação em relação aos lados:

<https://drive.google.com/file/d/1FJTbY-sLWNWY4PACszgn1wszMCDjboe/view>

Para a verificação das observações, com auxílio do mouse, desloque:

o ponto A da posição 1 para a posição 2 e assim teremos o triângulo Escaleno;  
o ponto B da posição 3 para a posição 4 e assim teremos o triângulo Isósceles.

Após essas observações, devemos acionar, na janela de álgebra, os pontos G (baricentro), O (circuncentro), H (ortocentro), I (incentro) e a reta r (reta de Euler), para visualizarmos a Circunferência de Nove Pontos com a Reta de Euler. Podemos repetir o movimento dos pontos A e B.

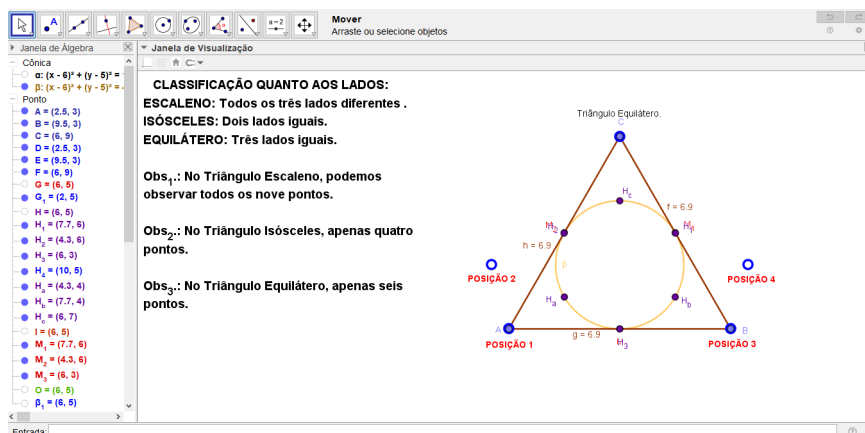


Figura 2.13: Arquivo pessoal: Círculo dos Nove Pontos 2.



# Capítulo 3

## Teorema de Menelaus

Neste capítulo, mostraremos que a colinearidade de três pontos dados sobre os lados de um triângulo, incluindo os prolongamentos desses lados, podendo ser dois pontos sobre os lados e um sobre o prolongamento de um dos lados ou até os três pontos sobre os prolongamentos dos lados e esses pontos devem ser distintos dos vértices gera um belíssimo resultado: O Teorema de Menelaus. Iniciaremos com um comentário histórico sobre essa descoberta e seu descobridor. Demonstraremos o teorema e faremos uma abordagem com o software Geogebra.

### 3.1 Recorte Histórico

#### 3.1.1 A vida de Menelaus

Menelaus de Alexandria, nascido por volta do ano 70 d.C. em Alexandria no Egito, onde possivelmente permaneceu até a sua juventude, mudando-se posteriormente para Roma. Foi Astrônomo e Geômetra.

Téon de Alexandria (335 - 405), menciona um tratado de Cordas num círculo, em seis livros, escrito por Menelaus de Alexandria, que assim como vários outros de seus tratados se perdeu com o tempo.

Há registros de Ptolomeu (90 - 168), sobre observações astronômicas feitas por Menelaus em Roma. Sabe-se que ele continuou os trabalhos de Hiparco (190 - 126 a.C.) sobre trigonometria e escreveu "O Livro das Proposições Esféricas", "Sobre o Conhecimento dos Pesos e a Distribuição de Diferentes Corpos", três livros sobre "Elementos de Geometria" com vários teoremas e "O Livro sobre o Triângulo". Acredita-se ainda que Menelaus teria escrito um texto sobre mecânica. Destes livros, apenas o primeiro, chegou aos nossos dias, o seu tratado *Sphaerica*, em três volumes sobre esféricos, que se preservou através de uma tradução árabe. Esse trabalho é como um foco de luz intensa sobre o desenvolvimento da trigonometria e é também o trabalho mais antigo conhecido sobre trigonometria esférica (WIKIPÉDIA).

O Livro I desse tratado, estabelece uma base teórica para o estudo dos triângulos esféricos, assim como Euclides (330 a.C. - 275 a.C.), fez para os triângulos planos, como teoremas usuais de congruência e teoremas sobre triângulos isósceles, entre outros. Menelaus foi o primeiro a escrever a definição de triângulos esféricos (I Bulmer-Thomas, 1970):

*"o espaço incluído entre arcos de círculos máximos na superfície de uma esfera (. . .), esses arcos são sempre menores que um semicírculo".*

Nesse livro Menelaus apresenta um teorema que não possui um análogo na geometria plana: Dois triângulos esféricos são congruentes quando os ângulos correspondentes são iguais (ele não fazia distinção entre triângulos esféricos congruentes e simétricos). Nessa obra considerou triângulos na esfera e provou, dentre outros resultados, que a soma dos seus ângulos internos é maior que  $180^\circ$ .

O Livro II, trata de teoremas de interesse da astronomia, e no livro III, se aborda o desenvolvimento da trigonometria esférica. Neste livro encontramos o teorema que leva o seu nome, que veio dar uma contribuição valiosa ao próprio desenvolvimento da geometria através dos tempos. O trabalho de Menelaus marcou um ponto importante na trigonometria esférica, tendo o seu trabalho sido aplicado em Astronomia. Ainda hoje, Menelaus é lembrado pelo seguinte teorema que, conhecido anteriormente no plano, foi demonstrado por Menelaus em geometria esférica: Considerem-se três pontos L, M e N, respectivamente, em cada um dos lados ou das retas suportes dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo  $\triangle ABC$  (Heath, 1921).

Então, os pontos L, M e N são colineares se, e somente se,

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1.$$

No análogo esférico tem-se um círculo máximo transversal que intercepta os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  de um triângulo esférico ABC nos pontos L, M e N, respectivamente. A conclusão correspondente é que:

$$\frac{\sin \widehat{AN}}{\sin \widehat{NB}} \cdot \frac{\sin \widehat{LB}}{\sin \widehat{LC}} \cdot \frac{\sin \widehat{MC}}{\sin \widehat{MA}} = 1.$$

Menelaus assume o caso plano como bem conhecido e o usa para estabelecer o caso esférico. Pode-se deduzir um montante considerável de trigonometria esférica a partir desse teorema, considerando-se triângulos e transversais particulares. Os recíprocos desses teoremas, no caso plano e no caso esférico, também são verdadeiros.

Seu nome se tornou mais conhecido através dos matemáticos, Pappus (290 - 347) e Proclus (412 - 485), com a divulgação de sua obra. Sabe-se muito pouco sobre a vida de Menelaus, mas teve grande influência na evolução da trigonometria esférica e na astronomia, participando da Escola de Alexandria, uma das maiores escolas de matemática da antiga civilização mediterrânea, ao lado da escola Pitagórica (300 a.C. - 400 d.C.), em Crotona, Itália e da Academia de Platão (427 - 347 a.C.) em Atenas na Grécia, por onde passaram estudando ou lecionando, nomes importantes da matemática antiga como: Apolônio de Perga (262 - 194 a.C.), Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.), Diofanto (201 - 214 a 284 - 298 a.C.), Euclides (330 - 275 a.C.), Eratóstenes de Cirene (276 - 194 a.C.), Hipsicles (240 - 170 a.C.), Heron (10 - 75), Pappus (290 - 350), Proclus (412 - 485), Ptolomeu (90 - 168), Téon (335 - 405) e Hipácia (350-370 a 8 de março de 415). Menelaus ainda desenvolveu estudos sobre a aceleração da gravidade em Alexandria, onde, se supõe, tenha morrido nessa cidade por volta do ano 130 d.C. .

## 3.2 O Teorema de Menelaus

### 3.2.1 Teorema de Menelaus

**Teorema:** Sejam L, M, N pontos nas retas suportes dos lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , respectivamente, do triângulo  $\triangle ABC$  e diferentes dos vértices. Se estes pontos são colineares, então:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1.$$

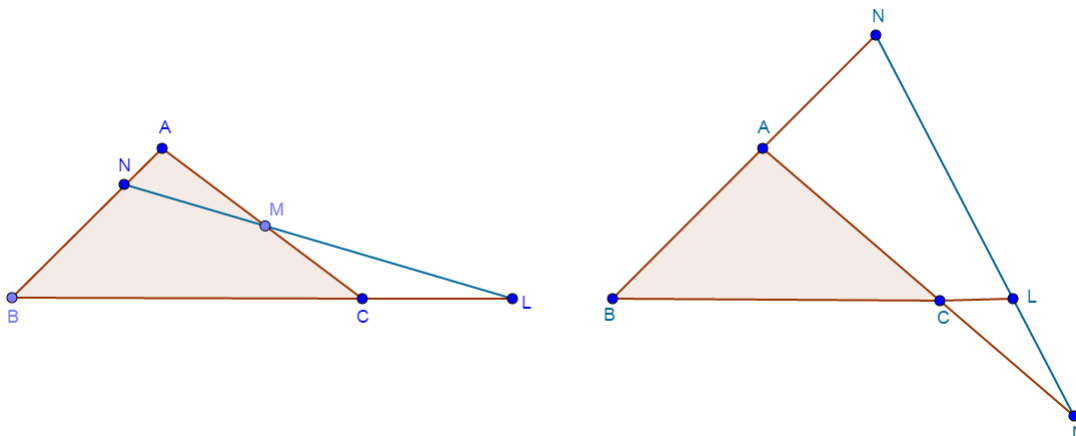


Figura 3.1: Teorema de Menelaus.

### 3.2.2 Teorema de Tales

**Definição:** Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.

**Definição:** Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.

Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe.

Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.

A e A', B e B', C e C', D e D' são pontos correspondentes.

$\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$ ,  $\overline{CD}$  e  $\overline{C'D'}$  são segmentos correspondentes.

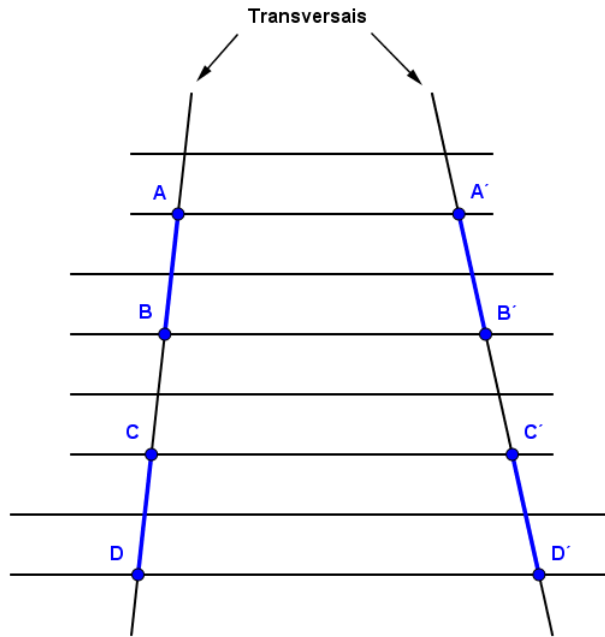


Figura 3.2: Feixe de Retas Paralelas 1.

**Propriedade:**

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas distintas e um segmento de uma delas é dividido em  $p$  partes congruentes entre si e pelos pontos de divisão são conduzidas retas do feixe, então o segmento correspondente de outra transversal:

- 1º) também é dividido em  $p$  partes
- 2º) e essas partes também são congruentes entre si.

**Demonstração:**

1ª parte:  $\overline{AB}$  e  $\overline{A'B'}$  são segmentos correspondentes e  $\overline{AB}$  é dividido em  $p$  partes por retas do feixe.

Se  $\overline{A'B'}$  ficasse dividido em menos partes (ou mais partes), pelo menos duas retas do feixe encontrar-se-iam em pontos de  $\overline{AB}$  (ou de  $\overline{A'B'}$ ), o que é absurdo pois as retas do feixe são paralelas.

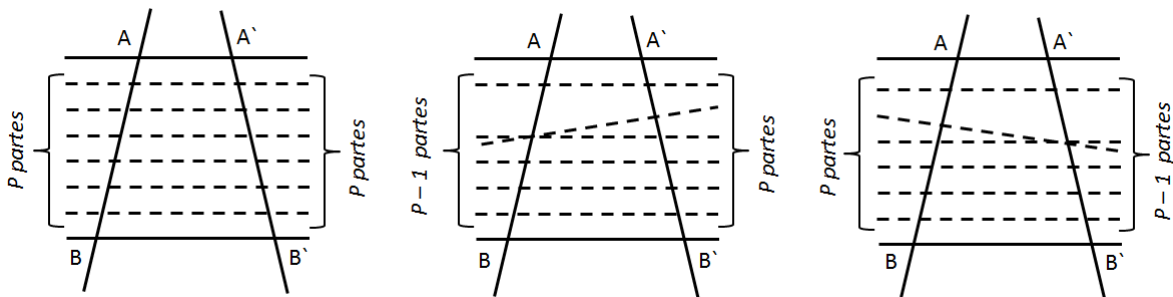


Figura 3.3: Feixe de Retas Paralelas 2.

2ª parte:  $\overline{AB}$  é dividido em partes congruentes a  $x$ .

Pelos pontos de divisão de  $\overline{A'B'}$ , conduzindo paralelas a  $\overline{AB}$ , obtemos um triângulo para cada divisão. Todos os triângulos são congruentes pelo caso ALA ( basta notar os paralelogramos e os ângulos de lados respectivamente paralelos que são obtidos).

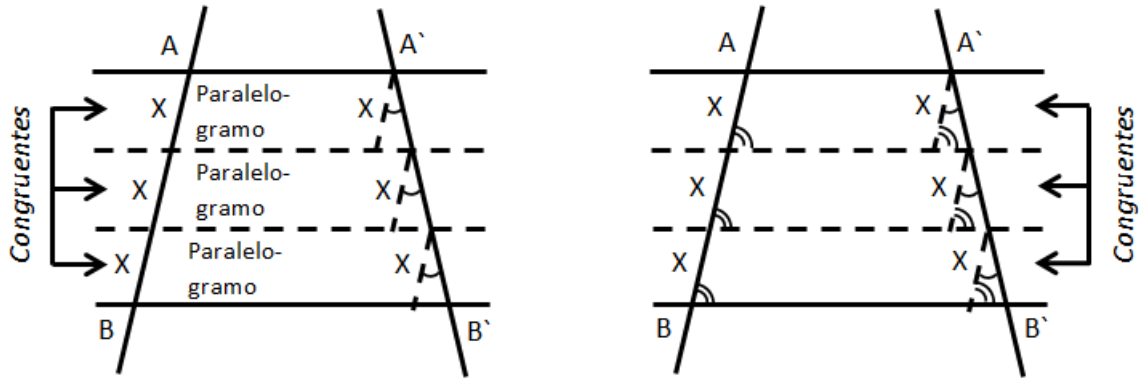


Figura 3.4: Feixe de Retas Paralelas 3.

Com isso,  $\overline{A'B}$  é dividido em partes congruentes pelos pontos de divisão.

**Teorema:** se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

**Hipótese:**

$\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são dois segmentos de uma transversal, e  $\overline{A'B'}$  e  $\overline{C'D'}$  são os respectivos correspondentes da outra.

**Tese:**

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

**Demonstração:**

1º caso:  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são comensuráveis.

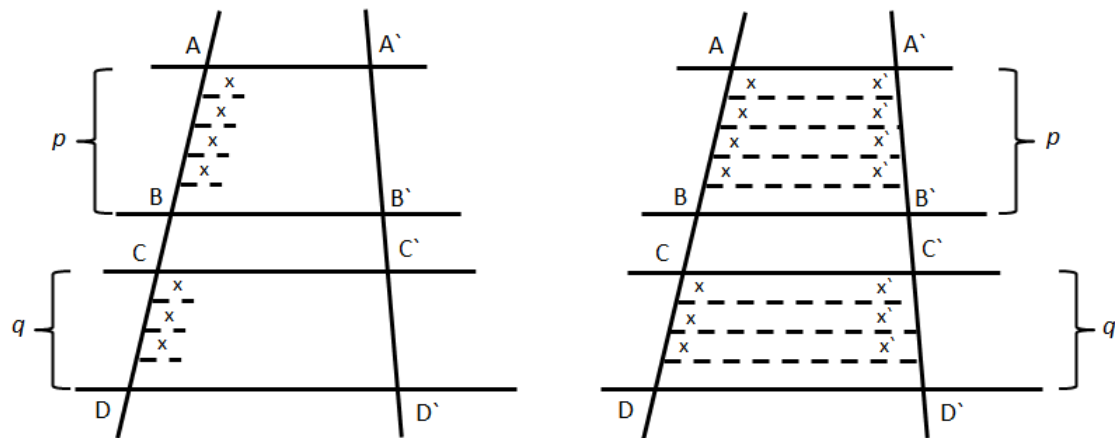


Figura 3.5: Feixe de Retas Paralelas 4.

Existe um segmento  $x$  que é submúltiplo de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .

$$\overline{AB} = px$$

$$\overline{CD} = qx$$

Isso tudo implicam em:

$$\Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  e aplicando a propriedade anterior, vem :

$$\overline{A'B'} = px'$$

$$\overline{C'D'} = qx'$$

Isso tudo implicam em:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos:  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ .

2º caso:  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  são incomensuráveis.

Não existe segmento submúltiplo comum de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .

Tomamos um segmento  $y$  submúltiplo de  $\overline{CD}$  ( $y$  cabe um certo número inteiro  $n$  de vezes em  $\overline{CD}$ ) isto é:

$$\overline{CD} = n \cdot y$$

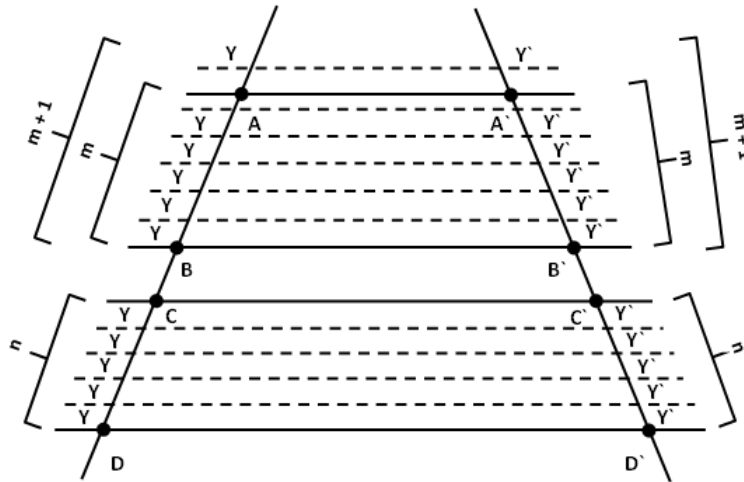


Figura 3.6: Feixe de Retas Paralelas 5.

Por serem  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  incomensuráveis, marcando sucessivamente  $y$  em  $\overline{AB}$ , para um certo número inteiro  $m$  de vezes que acontece que:

$$m \cdot y < \overline{AB} < (m + 1) \cdot y$$

Operando com as relações acima, vem:

$$my < \overline{AB} < (m + 1) \cdot y$$

$$ny = \overline{CD} = ny$$

Essas duas observações implicam em:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m + 1}{n} \quad (3)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  e aplicando a propriedade anterior, vem:

$$\overline{C'D'} = ny'$$

$$my' < \overline{A'B'} < (m + 1) \cdot y'$$

Operando com as relações acima, temos:

$$my' < \overline{A'B'} < (m + 1) \cdot y'$$

$$ny' = \overline{C'D'} = ny'$$

Essas duas observações implicam em:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m + 1}{n} \quad (4)$$

Ora,  $y$  é um submúltiplo de  $\overline{CD}$  que se pode variar dividindo  $y$ , aumentando  $n$  e nestas condições  $\frac{m}{n}$  e  $\frac{m + 1}{n}$  formam um par de classes contíguas que definem um único número real, que é  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$  pela expressão (3), e é  $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$  pela expressão (4). Como esse número é único, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

**Nota**

Vale também a igualdade:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}, \text{ que permite concluir:}$$

A razão entre segmentos correspondentes é constante.

### 3.2.3 Lema 1

Os triângulos com alturas iguais têm áreas proporcionais às medidas das bases dos triângulos.

**Demonstração:**

Sejam os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  com a mesma altura em relação às bases  $BC$  e  $EF$ , respectivamente.



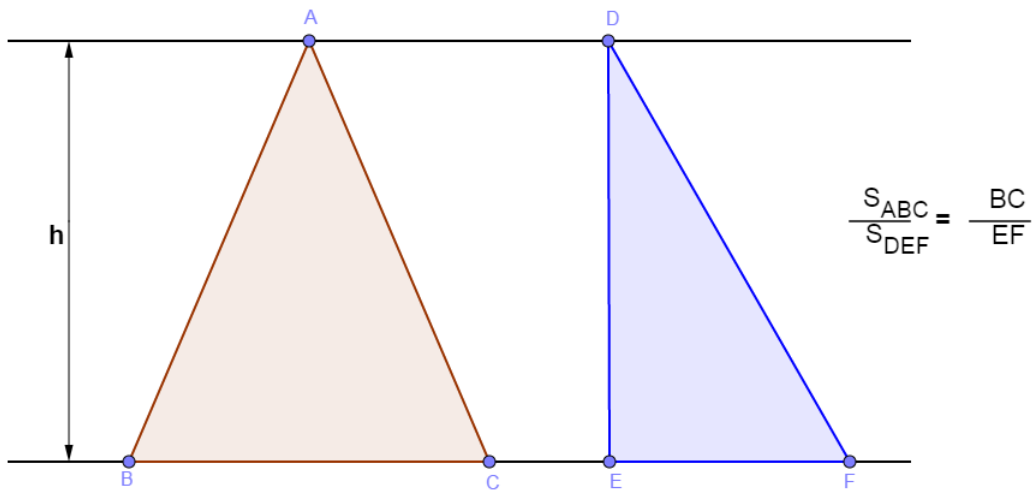


Figura 3.7: Área de Triângulos 1.

Calculando as áreas(S) dos triângulos, teremos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{BC} \quad e \quad S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \overline{EF}$$

Note que:

$$\frac{S_{ABC}}{\overline{BC}} = \frac{h}{2} = \frac{S_{DEF}}{\overline{EF}} \Leftrightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

### 3.2.4 Proposição 1

Dados um triângulo  $\triangle ABC$  e um ponto P que não pertence a nenhum dos seus lados, se a semirreta  $\overrightarrow{AP}$  intercepta o segmento  $\overline{BC}$  no ponto L, então  $\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}$ .

**Demonstração:**

Existem dois casos (a) e (b):

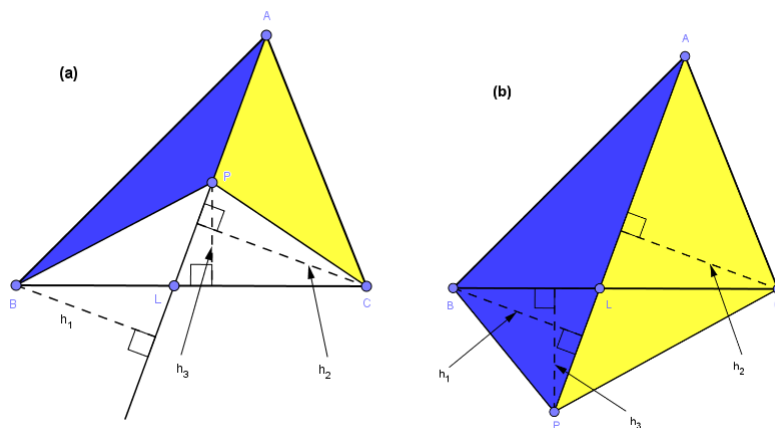


Figura 3.8: Área de Triângulos 2.

Observe que os triângulos  $\triangle PAB$  e  $\triangle PBL$  têm a mesma altura  $h_1$  em relação às bases PA e PL, respectivamente. E, também, os triângulos  $\triangle PAC$  e  $\triangle PLC$  têm a mesma altura  $h_2$  em relação às bases PA e PL, respectivamente. Aplicando o Lema 1, teremos :

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{AP}{PB} = \frac{S_{PAC}}{S_{PLC}} \Leftrightarrow \frac{S_{PAB}}{S_{PBL}} = \frac{S_{PAC}}{S_{PLC}}$$

Usando novamente o Lema 1 nos triângulos  $\triangle PBL$  e  $\triangle PLC$  têm a mesma altura  $h_3$  em relação às bases BL e LC, respectivamente, concluímos :

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PAC}} = \frac{S_{PBL}}{S_{PLC}} = \frac{BL}{LC}$$

### 3.2.5 Teorema de Menelaus

1ª Demonstração

Seja o  $\triangle ABC$ , se sejam L, M e N pontos colineares pertencentes as retas ou prolongamentos das retas  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ , respectivamente. Para efeito didático, dividiremos esta demonstração em dois casos distintos,

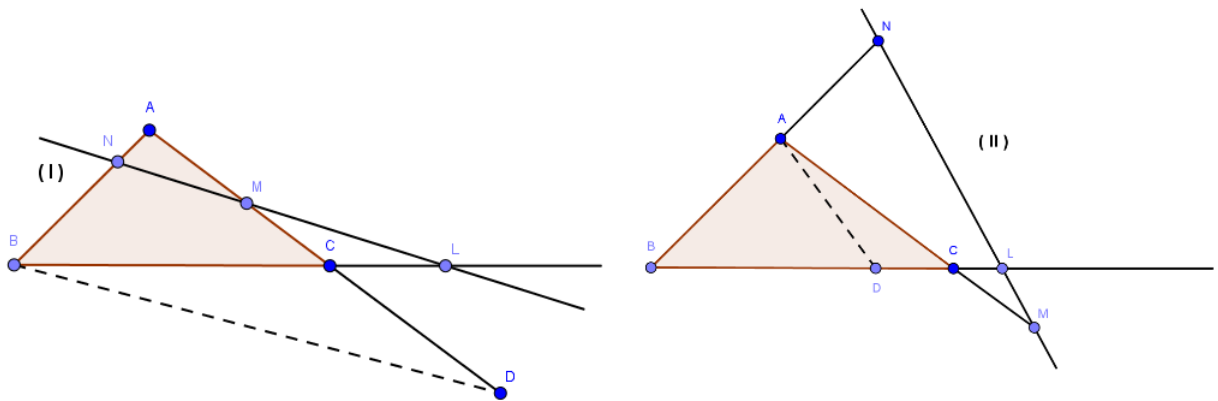


Figura 3.9: Teorema de Menelaus 1.

**Demonstração:**

Para o caso 1, traçaremos o segmento  $\overline{BD}$  paralelo à reta  $\overleftrightarrow{NL}$  que intercepta o prolongamento do lado  $\overline{AC}$  no ponto D. Note que podemos usar o Teorema de Tales, os segmentos  $\overline{BD}$  e  $\overline{MN}$  cortam as secantes  $\overline{AB}$  e  $\overline{AD}$  em partes proporcionais. Então, teremos:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} \Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}} = 1 \quad (1)$$

Agora, tomando os segmentos paralelos  $\overline{NL}$  e  $\overline{BD}$  sobre as transversais  $\overline{BL}$  e  $\overline{MD}$ , pelo Teorema de Tales, teremos :

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CL}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MC} + \overline{CD}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{CL} + \overline{BC}}{\overline{CL}}$$

Como  $\overline{MC} + \overline{CD} = \overline{MD}$  e  $\overline{CL} + \overline{BC} = \overline{BL}$ , teremos:

$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} \Leftrightarrow \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MD}} = 1 \quad (2)$$

Multiplicando, as igualdades 1 e 2, membro a membro, obteremos:

$$\left(\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{MA}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MD}}\right) = 1 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

Já para o caso II, traçaremos o segmento  $\overline{AD}$  paralelo a reta  $\overleftrightarrow{NL}$ , com D no segmento  $\overline{BC}$ . Pelo Teorema de Tales, os segmentos  $\overline{AD}$  e  $\overline{NL}$  cortam as secantes  $\overline{BN}$  e  $\overline{BL}$  em partes proporcionais. Assim teremos:

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DL}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BA} + \overline{AN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BD} + \overline{DL}}{\overline{DL}}$$

Como,  $\overline{BA} + \overline{AN} = \overline{BN}$  e  $\overline{BD} + \overline{DL} = \overline{BL}$ , teremos:

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{DL}} \Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LD}} = 1 \quad (3)$$

Analogamente, tomando os segmentos paralelos  $\overline{AD}$  e  $\overline{MN}$  pelas transversais  $\overline{AM}$  e  $\overline{DL}$ , pelo Teorema de Tales, teremos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CL}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC} + \overline{CM}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{DC} + \overline{CL}}{\overline{CL}}$$

Como,  $\overline{AC} + \overline{CM} = \overline{AM}$  e  $\overline{DC} + \overline{CL} = \overline{DL}$ , teremos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{DL}}{\overline{CL}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{LC}} = 1 \quad (4)$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades 3 e 4, obtemos:

$$\left(\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LD}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{LC}}\right) = 1 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

## 2ª Demonstração

Sejam L, M e N os pontos que relacionam as razões que dividem, respectivamente, os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo  $\triangle ABC$  com as respectivas áreas,  $S_{MBL} = X$ ,  $S_{MAL} = Y$  e  $S_{MAB} = Z$ .

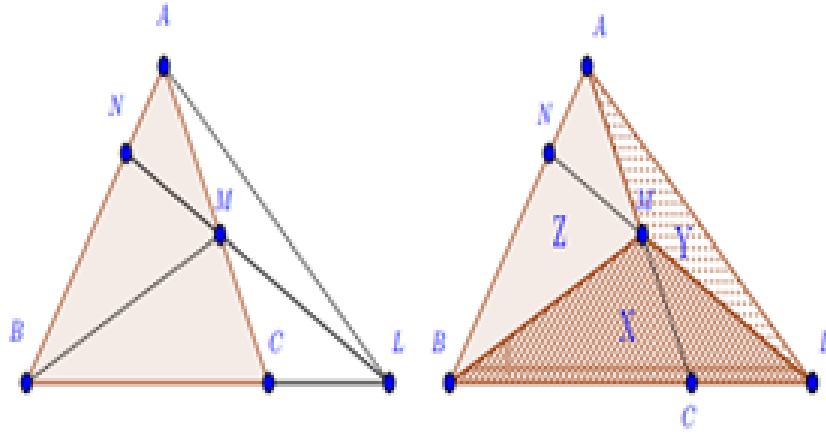


Figura 3.10: Teorema de Menelaus 2.

**Demonstração:**

Observe que o ponto M não pertence a nenhum dos lados do triângulo  $\triangle LAB$  e como a semirreta  $\overleftrightarrow{LM}$  intercepta o segmento  $\overline{AB}$  no ponto N, então pela Proposição 1 temos que:

$$\frac{S_{MAL}}{\overline{NA}} = \frac{S_{MBL}}{\overline{NB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{S_{MAL}}{S_{MBL}} = \frac{Y}{X} \quad (1)$$

Note também que, a semirreta  $\overleftrightarrow{AM}$  intercepta o segmento  $\overline{BL}$  no ponto C, então pela Proposição 1, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{S_{MAB}}{\overline{BC}} = \frac{S_{MAL}}{\overline{LC}} &\Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{LC}} = \frac{S_{MAB}}{S_{MAL}} = \frac{Z}{Y} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{BC} + \overline{LC}}{\overline{LC}} = \frac{S_{MAB} + S_{MAL}}{S_{MAL}} = \frac{Z + Y}{Y} &\quad (2) \end{aligned}$$

Agora observe que os triângulos  $\triangle ABM$  e  $\triangle MBC$  que tem a mesma altura  $h_1$  em relação às bases  $\overline{AM}$  e  $\overline{MC}$  respectivamente, o mesmo ocorrendo para os triângulos  $\triangle AML$  e  $\triangle MCL$  que possuem altura  $h_2$  em relação às mesmas bases. Então, pelo Lema 1, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{S_{MAB}}{\overline{MA}} = \frac{S_{MBC}}{\overline{MC}} &\Leftrightarrow \frac{S_{MBC}}{S_{MBA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} \\ \frac{S_{MAL}}{\overline{MA}} = \frac{S_{MCL}}{\overline{MC}} &\Leftrightarrow \frac{S_{MCL}}{S_{MAL}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{S_{MBC}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MCL}}{S_{MAL}} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{S_{MBC} + S_{MCL}}{S_{MAB} + S_{MAL}} = \frac{X}{Z + Y} &\quad (3) \end{aligned}$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades 1, 2 e 3, obtemos:

$$\left(\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}}\right) = \left(\frac{Y}{X}\right) \cdot \left(\frac{Z + Y}{Y}\right) \cdot \left(\frac{X}{Z + Y}\right) = 1$$

### 3.3 Uma alternativa para o ensino de matemática

Estamos trazendo uma alternativa, desenvolvida pelo autor, para o professor de Matemática, no ensino da matemática. A ideia é ampliar seus recursos e facilitar o entendimento do aluno em sala de aula.

#### 3.3.1 Teorema de Tales

Com o recurso do Geogebra, podemos observar de uma forma simples a propriedade do feixe de retas paralelas distintas cortadas por duas retas transversais implica em segmentos proporcionais.

Abaixo apresentaremos um link para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link Teorema de Tales:

<https://drive.google.com/file/d/1z98tyQp7iG0RQwASGaoeWWmVWyb8sOwv/view>

Nessa ferramenta, podemos observar, mesmo deslocando as retas  $a$ ,  $b$  e  $c$ , os segmentos continuam proporcionais :

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{ST}}$$

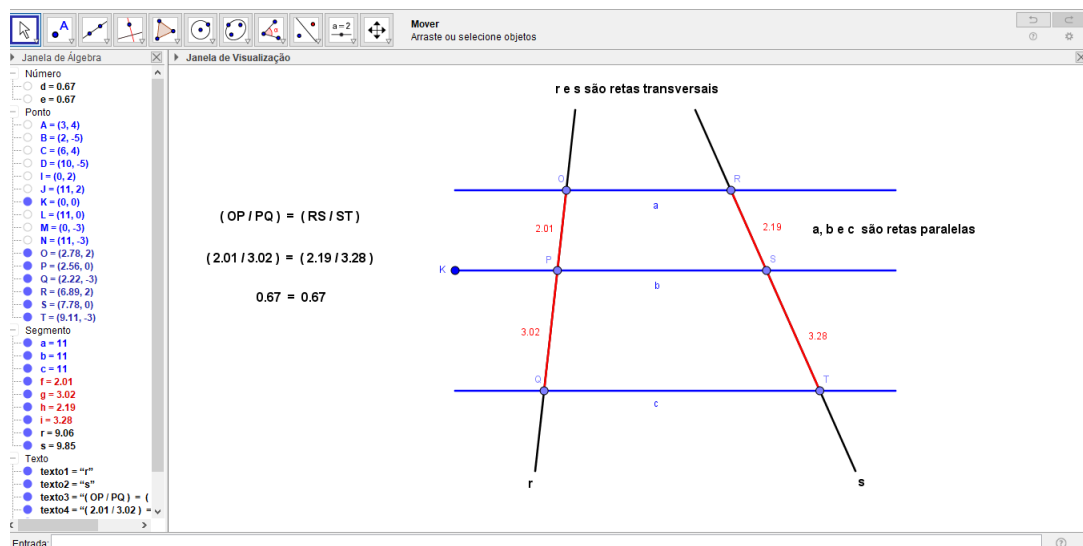


Figura 3.11: Arquivo pessoal: Teorema de Tales.

### 3.3.2 O Teorema de Menelaus

Com o recurso do Geogebra, podemos observar de uma forma objetiva, que a colinearidade de três pontos dados sobre os lados de um triângulo, incluindo os prolongamentos desses lados, podendo ser dois pontos sobre os lados e um sobre o prolongamento de um dos lados ou até os três pontos sobre o prolongamento dos lados e esses pontos devem ser distintos dos vértices.

Se uma reta  $r$  intersecta os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  e  $\overline{CA}$  ou prolongações num triângulo  $\triangle ABC$  nos pontos  $N$ ,  $L$  e  $M$ , respectivamente, então

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

<https://drive.google.com/file/d/1AO3RYDqfxu5M8-PjBQRpagzvt2je3o2y/view>

Para a verificação do teorema, com auxílio do mouse, desloque o ponto A da posição 1 para a posição 2 e 3, ou, deslocar o ponto N sobre o lado  $\overline{AB}$  do triângulo. Para reiterarmos o teorema, podemos deslocar o ponto L nas posições 4 e 5.

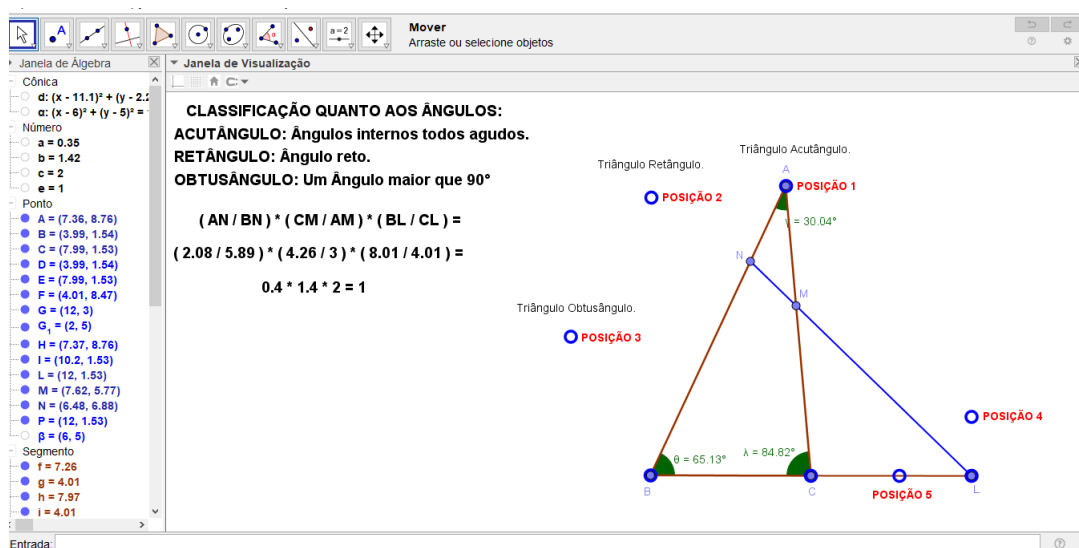


Figura 3.12: Arquivo pessoal: Teorema de Menelaus 1.

Link de classificação em relação aos lados:

[https://drive.google.com/file/d/1PXFIJ2ZcIjUt\\_6IGLRfH3pvXa3WP2usZ/view](https://drive.google.com/file/d/1PXFIJ2ZcIjUt_6IGLRfH3pvXa3WP2usZ/view)

Para a verificação do teorema, desloque:

o ponto C da posição 3 para a posição 4 e o ponto L da posição 5 para a posição 7 e assim teremos o triângulo Escaleno;

o ponto B da posição 1 para a posição 2 e o ponto L da posição 7 para a posição 6 e assim teremos o triângulo Isósceles.

Para reiterarmos o teorema, com auxílio do mouse, podemos deslocar o ponto N sobre o lado  $\overline{AB}$  do triângulo.

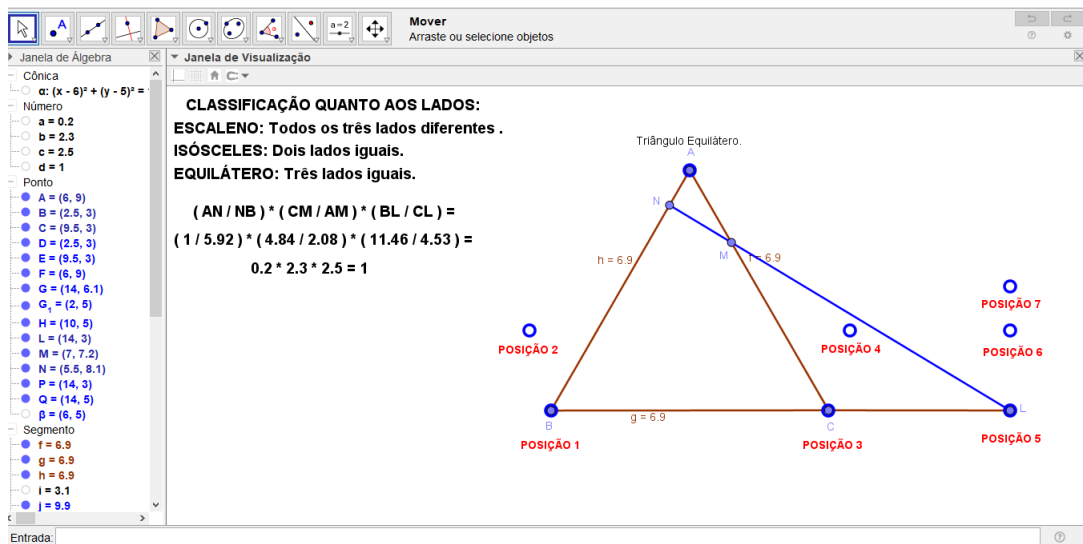


Figura 3.13: Arquivo pessoal: Teorema de Menelaus 2.

# Capítulo 4

## Teorema de Ceva

Neste capítulo trataremos do Teorema de Ceva, que retomando o antigo teorema de Menelaus, verifica que a mesma relação dada pelas razões dos pontos que dividem os lados ou prolongamentos dos lados do triângulo, se adequa a uma outra situação.

Agora, trata-se de provar a concorrência dos segmentos com extremos nos vértices e um ponto qualquer do respectivo lado oposto do triângulo, quando as razões simples formadas por tais pontos verificam a mesma relação dada no teorema de Menelaus. Iniciaremos com um comentário histórico sobre essa descoberta e seu descobridor. Demonstraremos o teorema e faremos uma abordagem com o software Geogebra.

### 4.1 Recorte Histórico

#### 4.1.1 A vida de Giovanni Benedetto Ceva

Giovanni Benedetto Ceva, Matemático, Físico, Geômetra e Engenheiro hidráulico, lembrado pelo Teorema de Ceva ou das cevianas, ressuscitando um teorema antigo, análogo devido a Menelaus de Alexandria: o teorema de Menelaus.

Nasceu em 01 de setembro de 1647 em Habsburgo, Empire (hoje Itália) data confirmada a partir de registros da paróquia onde Ceva foi batizado (Landra, 2009). Um dos filhos do casal Carlo Francesco Ceva (1610-1690) e Paola Columbo, que tiveram uma família numerosa onde a maioria dos filhos seguiu a vida religiosa.

Giovanni B. Ceva foi educado no Collégio di Brera, de orientação jesuíta na cidade de Milão, onde desde cedo mostrou aptidão para ciência e em especial pela matemática. Não há detalhes sobre a juventude de Ceva, mas ele faz um comentário intrigante, que sua juventude ficou triste com “muitos tipos de infortúnio”. Ele também sugere que sua família se opôs as suas pesquisas acadêmicas (WIKIPÉDIA).

Ao deixar a faculdade enganjou-se na mesma atividade do pai: negócios relacionados a papéis políticos e administrativos em Milão, Gênova e Mântua. Além do trabalho, realizava atividades científicas, estudando geometria e hidráulica. Em 1670 entra na Universidade de Pisa, estudou com Donato Rossetti (1633-1686), o professor de lógica, que era um forte defensor de teorias atômicas. Ele também estudou com Alessandro Marchetti (1633 - 1714), ambos membros da Academia de Matemática-Física de Roma. É muito provável que Ceva passou al-



gum tempo na Academia em Roma. Ceva, nos dois anos que passou em Pisa, tentou resolver o problema da quadratura do círculo, emitindo algumas soluções julgadas incorretas o que o desanimou um pouco e após a sua estadia em Pisa, continuou com suas pesquisas e em 1678 publica a obra: "De lineis retis se invicem secantibus Statica constructio"(estática da construção das linhas retas que cortam outra) contendo o Teorema das Cevianas, demonstrando-o com argumentos relativos a centros de gravidade, considerado dos mais importantes resultados da geometria sintética do triângulo, no período compreendido entre a Matemática da antiga Grécia e o século XIX (Boyer, 2003).

Se dos três vértices A, B e C de um triângulo forem traçados segmentos até os respectivos lados opostos, serão determinados três pontos L, M e N, que limitarão três segmentos  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  concorrentes quando

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

e reciprocamente. Neste caso, as cevianas são concorrentes e os pontos sobre os lados definem o que se chama, triângulo Ceviano. Esta conclusão foi muito importante do ponto de vista da mecânica, pois L, M e N são os centros de gravidade de pares de pesos adequados colocados nos vértices do triângulo, sendo o ponto de concorrência o centro de gravidade de três pesos equivalentes, colocados nos três centros de gravidade. Na figura abaixo,  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  são as cevianas que concorrem no ponto P e o triângulo LMN é o triângulo ceviano.

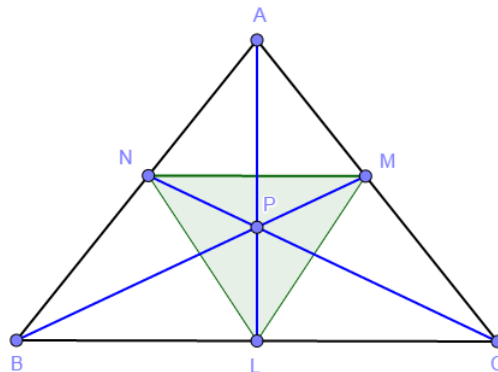


Figura 4.1: Triângulo ABC e o Teorema de Ceva.

Considerando o triângulo ABC e as cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$ , o teorema de Ceva garante que

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

se e somente se  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  são concorrentes.

O Teorema de Ceva também pode ser apresentado como

$$\frac{\sin \widehat{BAL}}{\sin \widehat{LAC}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBM}}{\sin \widehat{AMB}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACN}}{\sin \widehat{BCN}} = 1$$

chamada forma Trigonométrica do Teorema de Ceva.

Na época este trabalho não teve grande repercussão, até que o matemático francês Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), revendo o trabalho de Ceva reconheceu a importância do mesmo, fazendo jus aos méritos do autor.

Ceva ao mesmo tempo em que procedia com seus estudos matemáticos, continuava com atividades semelhantes a do seu pai, a serviço do duque de Montferrat e Mântua, cidade onde passou a viver, sendo nesta época nomeado Auditor e Comissário assumindo a função de seu pai. Nessa função administrativa, Ceva era responsável pela economia de Mântua e Montferrat, porém as atribuições com os papéis do governo não o tirou de suas pesquisas e encontrou tempo para prosseguir com seus estudos científicos. Em 1682 escreveu a obra *Opusculas mathematicae de potentiis obliquis, de pendulis, de VASIS et de fluminibus*, ("O pequeno trabalho, matemática dos poderes da superfície inclinada, dos pêndulos, de seus utensílios, e do leito do rio") obra, em quatro partes. Ela investiga questões de geometria pura, bem como aplicações da matemática, em particular a hidrodinâmica (Boyer, 2003).

Considerando a importância da contribuição de Ceva para o Estado, Ferdinando Carlo Gonzaga, duque de Mântua e Montferrat concede-lhe a cidadania de Mântua em 1683. Apesar de sempre estar muito ocupado com os deveres da função que ocupava, Ceva continuou com as pesquisas matemática, se correspondendo com muitos dos principais cientistas da época se mantendo na vanguarda dos progressos matemáticos. Em 15 de janeiro 1685, Ceva casava-se com Cecilia Vecchi, com quem tiveram sete filhos. O duque de Mântua, estende a cidadania já concedida a Ceva para toda sua família e em 1686 é nomeado professor de matemática na Universidade de Mântua, onde continuou a realizar pesquisas sobre os problemas geométricos e como proceder em questões econômicas, publicando ainda algumas obras: Em 1692, *Geometria motus* (Geometria do movimento), *opusculum geometricum em gratiam aquarum excogitatum* (Em favor da pequena Geometria artificial), obra dedicada ao duque de Mântua, Ferdinando Carlo.

Esta obra antecipou o cálculo infinitesimal em seu estudo de curvas, como parábolas e hipérbolas, utilizando métodos infinitesimais do tipo introduzido pelo matemático Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647). Em 1710 publicou *Tria Problemata geometrica proposita* (Três problemas propostos de geometria). No ano seguinte, ele publicou: *De re nummularia quod potuit fieri, geometricae tractata* (matéria nummularia tratada geometricamente), um dos primeiros trabalhos em economia matemática, nele Ceva tenta resolver as condições de equilíbrio para o sistema monetário de um estado como Mantua. Sobre hidráulica, publicou *Opus hydrostaticum* (trabalho de hidrostática) em 1728, que, com exceção de *De lineis retis* é a sua melhor contribuição sobre esse tema. Ocupou o cargo na Universidade durante o resto de sua vida, falecendo em 13 de maio de 1734, em Mântua, Habsburgo Empire, agora Itália.

## 4.2 O Teorema de Ceva

### 4.2.1 Teorema de Ceva

Teorema: Sejam L, M, N pontos, respectivamente, sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$ , do triângulo  $\triangle ABC$ . As cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  intersectam-se em um ponto P, então:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

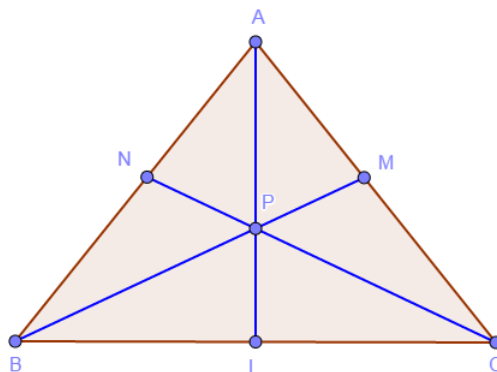


Figura 4.2: Triângulo ABC e o Teorema de Ceva.

1ª Demonstração

**Demonstração:**

Suponhamos que as cevianas  $\overline{AL}$ ,  $\overline{BM}$  e  $\overline{CN}$  se intersectam no ponto P. Note que podemos desmembrar a figura em *a* e *b*, da seguinte forma:

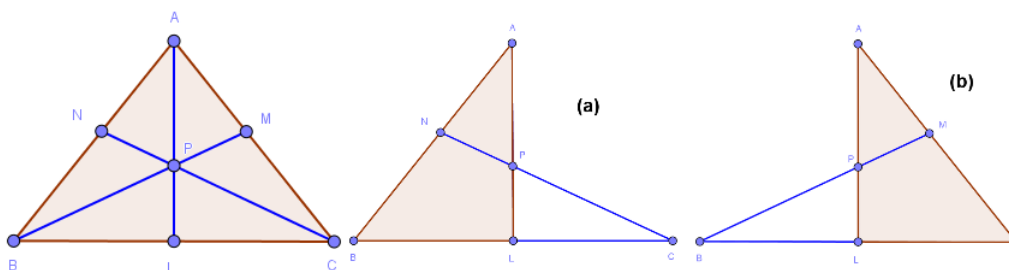


Figura 4.3: Teorema de Ceva 1.

Ao aplicar o Teorema de Menelaus no triângulo  $\triangle ABL$  e a transversal  $\overleftrightarrow{NPC}$ , conforme a figura (a), teremos:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CL}} \cdot \frac{\overline{PL}}{\overline{PA}} = 1 \quad (1)$$

Agora, aplicando o Teorema de Menelaus no triângulo  $\triangle ALC$  e a transversal  $\overleftrightarrow{BPM}$ , conforme a figura (b), teremos:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1 \quad (2)$$

Multiplicando (1) e (2), membro a membro, teremos:

$$\left(\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{CL}} \cdot \frac{\overline{PL}}{\overline{PA}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PL}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}}\right) = 1 \cdot 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$$

2ª Demonstração

**Demonstração:**

Sejam L, M e N os pontos que associam as razões que dividem respectivamente, os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  do triângulo  $\triangle ABC$ , com as respectivas áreas,  $S_{BPC} = X$ ,  $S_{APC} = Y$  e  $S_{APB} = Z$ , conforme a figura.

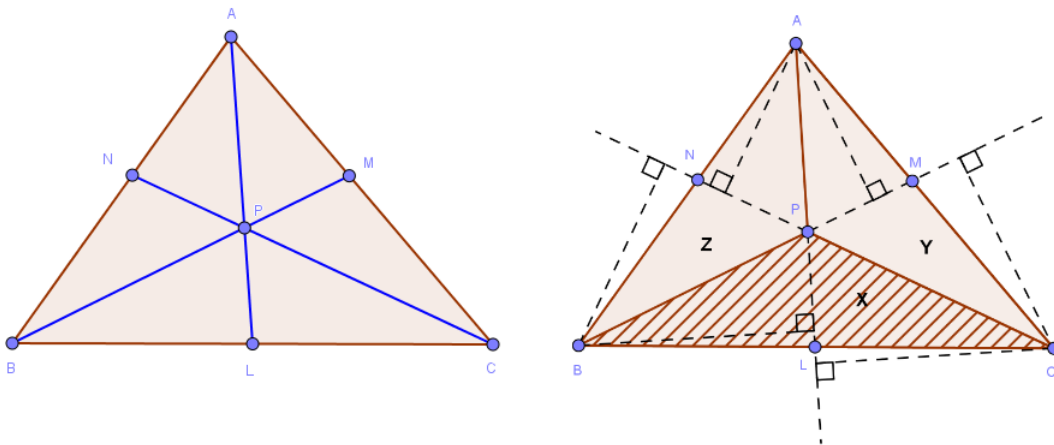


Figura 4.4: Teorema de Ceva 2.

Observe que o ponto P não pertence a nenhum dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ . Como a semirreta  $\overleftrightarrow{CP}$  intercepta o segmento  $\overline{AB}$  no ponto N, então pela Proposição 1 temos que:

$$\frac{S_{APC}}{\overline{NA}} = \frac{S_{BPC}}{\overline{NB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = \frac{S_{APC}}{S_{BPC}} = \frac{Y}{X} \quad (1)$$

Note também que a semirreta  $\overleftrightarrow{AP}$  intercepta o segmento  $\overline{BC}$  no ponto L. Então, temos que:

$$\frac{S_{APB}}{\overline{LB}} = \frac{S_{APC}}{\overline{LC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{Z}{Y} \quad (2)$$

Agora observe que a semirreta  $\overleftrightarrow{BP}$  intercepta o segmento  $\overline{AC}$  no ponto M. Então, temos que:

$$\frac{S_{BPC}}{\overline{MC}} = \frac{S_{APB}}{\overline{MA}} \Leftrightarrow \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{S_{BPC}}{S_{APB}} = \frac{X}{Z} \quad (3)$$

Multiplicando, membro a membro, as igualdades 1, 2 e 3, obtemos:

$$\left(\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{Z}\right) \cdot \left(\frac{Z}{Y}\right) \cdot \left(\frac{X}{Z}\right) = 1$$

## 4.3 Uma alternativa para o ensino da matemática

Estamos trazendo uma alternativa, desenvolvida pelo autor, para o professor de Matemática, no ensino da matemática. A ideia é ampliar seus recursos e facilitar o entendimento do aluno em sala de aula.

### 4.3.1 O Teorema de Ceva

Com o recurso do Geogebra, podemos observar de uma forma objetiva, que se estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas sejam concorrentes. O teorema afirma que as três cevianas em um triângulo ABC qualquer e L, M e N, pontos sobre os lados  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  respectivamente, então

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} = 1$$

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

[https://drive.google.com/file/d/1yIEF4djlEdX7nqhd\\_ytS7Zjh9nr3u7IA/view](https://drive.google.com/file/d/1yIEF4djlEdX7nqhd_ytS7Zjh9nr3u7IA/view)

Para a verificação do teorema, com auxílio do mouse, desloque o ponto A da posição 1 para a posição 2 e 3 ou desloque o ponto M da posição 4 para a posição 5 e o ponto C da posição 6 para a posição 7.

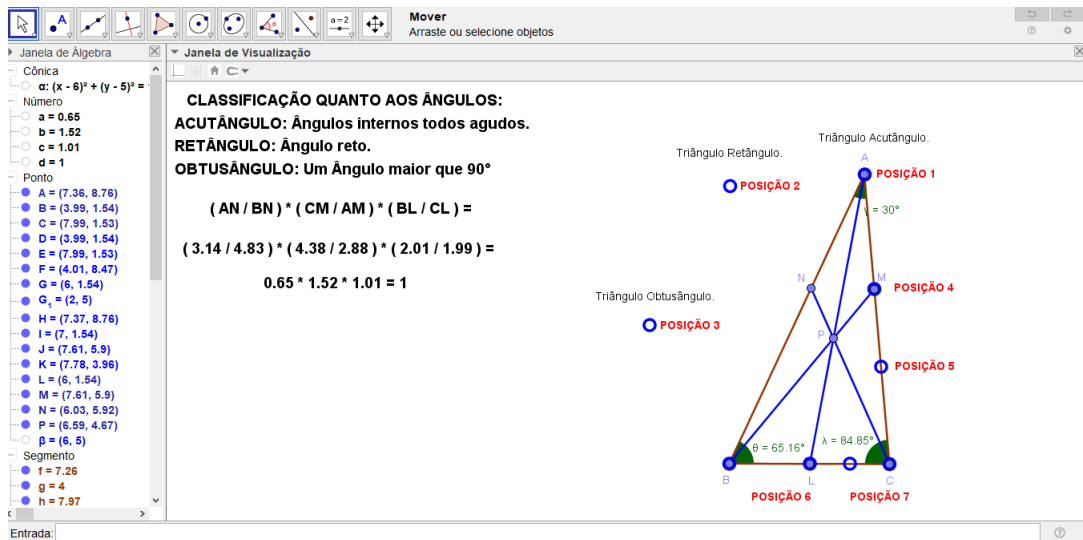


Figura 4.5: Arquivo pessoal: Teorema de Ceva 1.

Link de classificação em relação aos lados:

<https://drive.google.com/file/d/1yTJHDvTjFlazOhyymS6hDaKf6ZDiknvv/view>

Para a verificação do teorema, desloque:

o ponto C da posição 1 para a posição 2 e assim teremos o triângulo Escaleno;  
o ponto B da posição 3 para a posição 4 e assim teremos o triângulo Isóscele.

Para reiterarmos o teorema podemos deslocar o ponto L da posição 5 para a posição 6 e o ponto M da posição 7 para a posição 8.

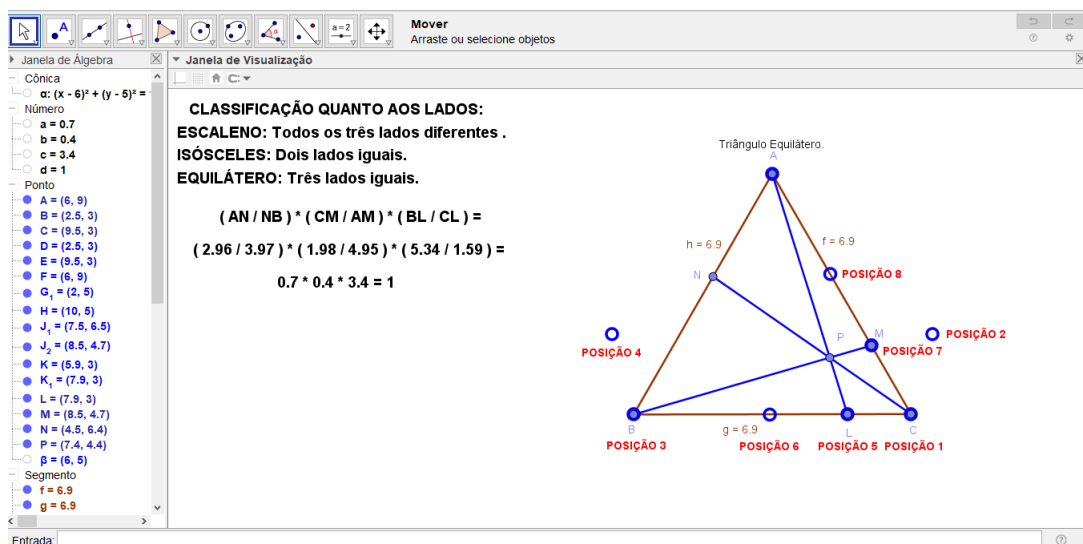


Figura 4.6: Arquivo pessoal: Teorema de Ceva 2.

# Capítulo 5

## Teorema Stewart

Neste capítulo mostraremos que a relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana, sendo aplicável a uma ceviana qualquer: O Teorema de Stewart. Iniciaremos com um comentário histórico sobre essa descoberta e seu descobridor. Demonstraremos o teorema e faremos uma abordagem com o software Geogebra.

### 5.1 Recorte Histórico

#### 5.1.1 A vida de Matthew Stewart

O pai de Matthew Stewart era Dugald Stewart, pastor de Rothesay, e sua mãe era Janet Bannatyne. Matthew, nasceu em 15 de Janeiro de 1717 em Rothesay, na parte inferior do Firth of Clyde, na Escócia, numa pequena ilha chamada Ilha Bute. Frequentou uma escola de gramática na Ilha de Bute e, em 1734, começou a estudar com o filósofo Francis Hutcheson e a trabalhar com Robert Simson na Universidade de Glasgow. Em 1741 ele passou a estudar com Colin Maclaurin (foi um matemático escocês que publicou a primeira exposição sistemática dos métodos de Newton, escrita como uma resposta ao ataque de Berkeley ao cálculo por sua falta de fundamentos rigorosos) na Universidade de Edimburgo.

Durante esse tempo, no entanto, ele continuou a se corresponder com Simson, que era agora um amigo e não um professor, sobre a geometria grega, pois tinham em comum a admiração do Pappus de Alexandria, De Locis Planis de Apolônio de Perga (geômetra e astrônomo grego conhecido por suas teorias sobre o tópico de seções cônicas) e os Porismos de Euclides (matemático grego, muitas vezes referido como o "fundador da geometria ou o "pai da geometria"). Simson estava trabalhando na restauração dos Porisms of Pappus (último dos grandes geômetras gregos, escreveu comentários sobre os Elementos de Euclides e o Almagesto de Ptolomeu), e no mesmo período, Stewart estava estudando em Glasgow. Como ele havia impressionado Simson com algumas ideias brilhantes sobre os Porisms, Simson escreveu para Stewart em 27 de dezembro de 1742 (Mackay, 1892):

*“Renovo o pedido que te fiz, quando estive aqui, para que você não comentasse essas coisas até que nos encontremos novamente. Nesse meio tempo, eu gostaria que você, como seu lazer, permitisse descobrir o máximo que pudesse deles, e não se esqueça de anotar tanto a análise quanto a demonstração, porque quando eu publicar um relato dos "Porismos", ficarei*

*feliz que tenha sua participação, para aumentar a pesquisa do meu trabalho e que cada uma de suas anotações será particularmente reconhecida no livro.”*

Isso certamente agradou o jovem que respondeu a Simson em 30 de dezembro de 1742 dizendo que esperava ter até vinte novos resultados (Mackay,1892):

*“Eu não estava decidido a publicar qualquer uma das minhas proposições na forma de Porisms, embora essa fosse a forma que eu pensava que várias delas deviam aparecer, mas como você me avisou que ficou contente e que teve alguns pensamentos de publicar algo no assunto, logo resolvi, tanto quanto possível, evitar qualquer contra tempo que possa aparecer e interromper o meu estudo.”*

Tweddle escreveu (Tweddle,2000):

*“A próxima carta de Simson para Stewart é de 3 de janeiro de 1743 . Nele, ele faz várias sugestões para a publicação dos resultados de Stewart - um apêndice para o "Plane loci", incorporação no trabalho proposto sobre "Porisms", ou alguns em um e alguns no outro - e ele reitera sua preocupação com a confidencialidade.”*

Em maio de 1743, Stewart passou várias semanas em Glasgow trabalhando em matemática com Simson e ajudando-o na produção de seu texto Apollonii Pergaei locorum planorum libri II , publicado em 1749.. Ele retornou a Rothesay, Ilha de Bute, onde seu pai o pressionou a se juntar ao ministério.

Tweddle escreveu (Tweddle,2000):

*“A ligação direta entre Simson e Stewart foi quebrada e isso provavelmente contribuiu para o atraso na publicação de "Plane loci" e na falha de Simson em publicar seu trabalho em "Porisms”.*

No entanto, seu pai o convenceu a entrar no ministério (essa era uma expectativa normal entre pai e filho no ministério). Ele estudou Divindade na Universidade de Edimburgo no ano de 1742/43 também participando de palestras de matemática sob o comando de Colin Maclaurin. Ele foi licenciado pelo Presbitério da Igreja da Escócia de Dunoon em maio de 1744, e tornou-se ministro em Rosneath em Dumbartonshire um ano depois.

A fama de Stewart é baseada em teoremas gerais de uso considerável nas partes superiores da matemática (1746), descritos por John Playfair (trabalhou em geologia, física e geometria e sua contribuição mais conhecida para a matemática é sua forma de axioma de paralelismo de Euclides) como:

*“... entre as mais belas e mais gerais proposições conhecidas em toda a geometria.”*

Em 1746, após a morte de Colin Maclaurin, que havia saído para servir as tropas na rebelião jacobita de 1745, o cargo de professor de matemática ficou vago na Universidade de Edimburgo e, pouco mais de um ano depois, Stewart deixou o ministério para se tornar professor de matemática. A publicação de seu trabalho mais conhecido, Alguns Teoremas Gerais de Uso Considerável nas Partes Superiores da Matemática podem tê-lo ajudado a garantir o cargo.



Este livro estendeu algumas ideias de Robert Simson e é mais conhecido pela proposição II, ou o que agora é conhecido como “O Teorema de Stewart”, que relaciona medições em um triângulo a uma linha adicional através de um vértice.

Tweddle escreveu (Tweddle,2000):

*“... o sucesso de teoremas gerais foi amplamente instrumental em sua eleição para a presidência ...”*

Stewart se casou com sua prima Marjorie Stewart, a única filha do escritor Archibald Stewart, em 20 de maio de 1750. Eles tiveram vários filhos que morreram quando bebês, mas apenas um filho sobreviveu, Dugald Stewart, que alcançou mais fama do que seu pai. Dugald Stewart, que nasceu em 22 de novembro de 1753, tornou-se um matemático e filósofo que foi o maior expoente da escola de filosofia escocesa do "senso comum".

Em 1756 Stewart escreveu para Johannes Kepler (matemático e astrônomo alemão que descobriu que a Terra e os planetas viajam pelo sol em órbitas elípticas), sobre a segunda lei do movimento planetário usando métodos geométricos. Neste, ele resolveu O Problema de Kepler, que envolvia determinar a área de um setor focal de uma elipse. Em 1761 ele escreveu Tracts, Physical and Mathematical, Contendo uma Explicação de Vários Pontos na Astronomia Física, descrevendo o movimento planetário e a perturbação de um planeta em outro. Neste trabalho ele fez algumas contribuições para o problema extremamente difícil e importante de Três Corpos. Dois anos depois, ele escreveu o suplemento A Distância do Sol da Terra determinada pela Teoria da Gravidade.. Este trabalho alcançou o resultado bastante impreciso de 119 milhões de milhas (o valor correto é de aproximadamente 93 milhões de milhas). Seus métodos geométricos exigiam muitas simplificações para obter um resultado melhor e este trabalho foi criticado por John Landen (matemático inglês amador que escrevia sobre mecânica, soma de funções elípticas e de séries) em 1771.

Stewart foi eleito membro da Royal Society em 21 de junho de 1764. Em 1772 sua saúde começou a se deteriorar e seus deveres como professor em Edimburgo foram assumidos por seu filho Dugald. No entanto ele foi membro fundador da Royal Society of Edinburgh, sendo eleito membro do primeiro encontro de sua classe física em 3 de novembro de 1783 (Carlyle, 2004).

Ele foi homenageado pela Universidade de Glasgow com a concessão de um título honorário em 1756. Devemos também notar que sua fama foi considerável e

*...Michel Chales (trabalhou em geometria algébrica e projetiva) classificou Simson e Stewart entre os mais importantes contribuintes para o progresso da geometria.*

Após a morte de seu pai, em 23 de Janeiro de 1785, em Catrine, Dugald Stewart demitiu-se da cadeira de matemática em Edimburgo quando foi nomeado professor de Filosofia Moral em Edimburgo.

## 5.2 O Teorema Stewart

### 5.2.1 Teorema de Stewart

Teorema: Seja um triângulo ABC qualquer, cujos lados medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Seja  $d$  uma ceviana e  $D$  o ponto pertencente à reta suporte. O teorema de Stewart afirma que:

$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$

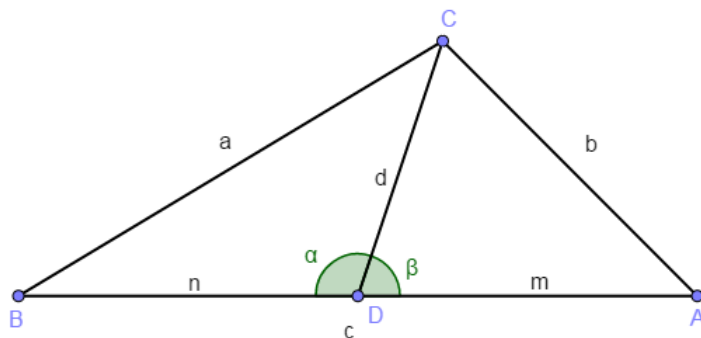


Figura 5.1: Triângulo ABC e o Teorema de Stewart.

### 5.2.2 Teorema de Pitágoras

Não se sabe ao certo o método utilizado por Pitágoras (ou pelos pitagóricos) para a demonstração, supõem-se que foi uma prova, do tipo “geométrico”, como apresentaremos a seguir, baseada na comparação de áreas.

**Teorema:** Em um triângulo Retângulo, o quadrado da Hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

1º Passo:

Pitágoras considerou um triângulo retângulo cujos os catetos medem  $b$  e  $c$  cuja a hipotenusa mede  $a$ .

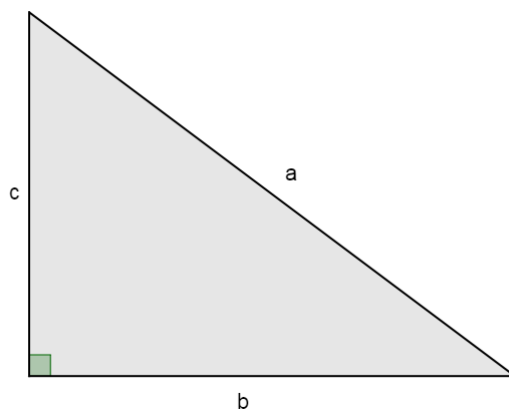


Figura 5.2: Triângulo ABC.

2º Passo:

Construiu em seguida um quadrado de lado igual à soma dos dois catetos do triângulo  $(b + c)$  e fez a respectiva decomposição.

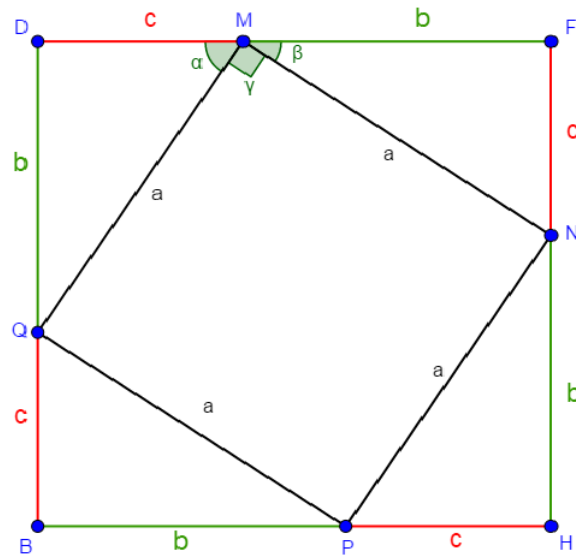


Figura 5.3: Quadrado MNPQ.

3º Passo:

Provar que o quadrilátero MNPQ é um quadrado.

Os seus lados tem todos os mesmo comprimento, porque são as hipotenusas dos triângulos retângulos.

Seus ângulos internos ( $\gamma$ ) são todos retos. Como os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares, e  $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$ , logo  $\gamma$  é igual a  $90^\circ$  (reto).

E analogamente para os outros ângulos internos. Desta forma, fica provado que o quadrilátero MNPQ é um quadrado.

4º Passo:

Pitágoras comprovou sua teoria compondo as peças do quadrado de uma outra forma, e confrontou as duas figuras.

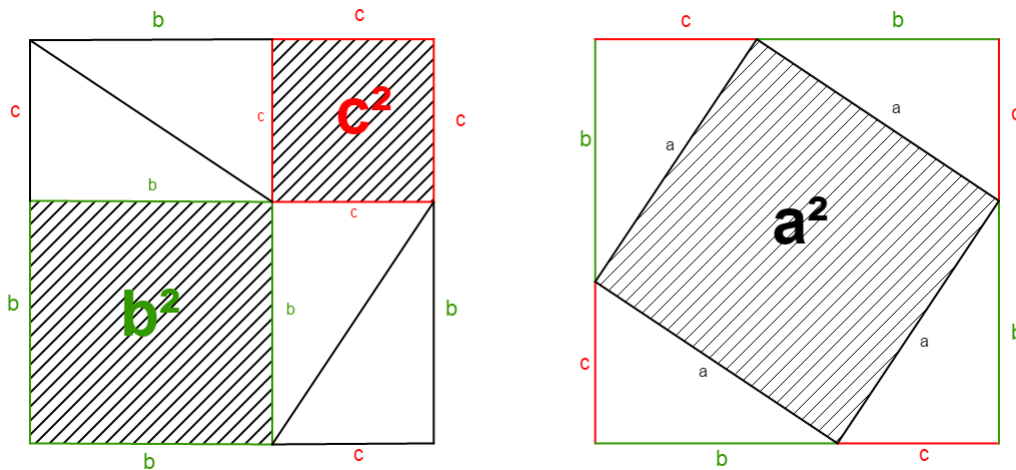


Figura 5.4: Quadrados com Áreas.

### Demonstração:

Dado um triângulo retângulo – figura direita - de hipotenusa  $a$  e catetos  $b$  e  $c$ , vamos considerar o quadrado cujo lado é  $b + c$ . Agora observe duas situações. Ainda, na figura da direita, retirou-se do quadrado de lado  $b + c$  quatro triângulos congruentes ao triângulo dado, restando um quadrado de lado  $a$ . Já na figura da esquerda, também do quadrado de lado  $b + c$ , porém em posições diferentes, foi retirado quatro triângulos congruentes ao dado, restando um quadrado de lado  $b$  e outro de lado  $c$ . Comparando as duas situações, conclui-se que a área do quadrado de lado  $a$  é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados medem  $b$  e  $c$ .

Pitágoras nesta demonstração partiu da hipótese ( um triângulo retângulo qualquer) e chegou a tese

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

### 5.2.3 Lei dos Cossenos

Sabemos que as relações trigonométricas do seno, cosseno e tangente são válidas somente em um triângulo retângulo. Quando estamos trabalhando com triângulos quaisquer, acutângulos ou obtusângulos, no entanto, essas relações não são válidas. Para esses tipos de triângulo teremos que estabelecer outra identidade trigonométrica, chamadas de lei dos cossenos.

*A lei dos cossenos é uma relação geral do Teorema de Pitágoras aplicado a triângulos de qualquer forma.*

**Teorema:** O quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

Observe o triângulo com dimensões laterais  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

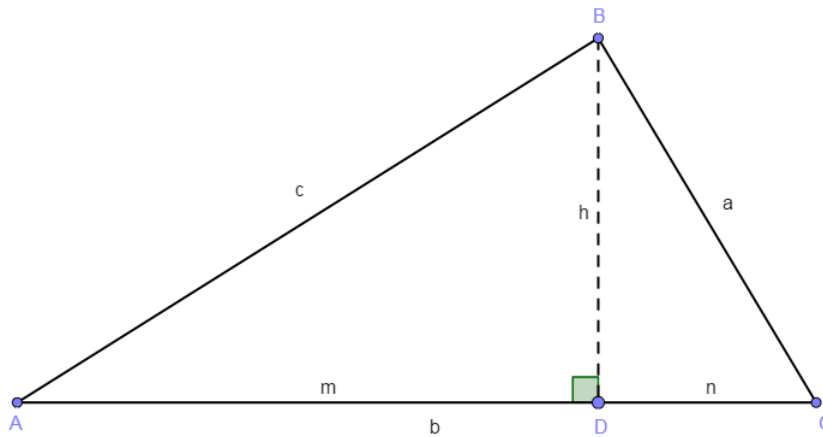


Figura 5.5: Triângulo ABC.

Considere o triângulo definido pelos vértices A, B e C.

Podemos observar três triângulos: ABC, BCD e ABD.

Destes, pode-se extrair as seguintes relações:

$$b = m + n \text{ ou } n = b - m \text{ e } m = c \cdot \cos \hat{A}.$$

Usando o Teorema de Pitágoras, aplicado aos triângulos retângulos, temos para:

$$\triangle BCD \rightarrow a^2 = n^2 + h^2$$

$$\triangle ABD \rightarrow c^2 = m^2 + h^2 \text{ ou } h^2 = c^2 - m^2 :$$

Substituindo na primeira o valor  $n = b - m$  e o valor de  $h^2 = c^2 - m^2$  :

$$a^2 = n^2 + h^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2 =$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Agora, eliminando  $m$  da equação através da equação  $m = c \cdot \cos \hat{A}$ , obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Da mesma forma, pode-se demonstrar as demais relações:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

## 5.2.4 Teorema de Stewart

1ª Demonstração

**Demonstração:**

Considere o triângulo abaixo:

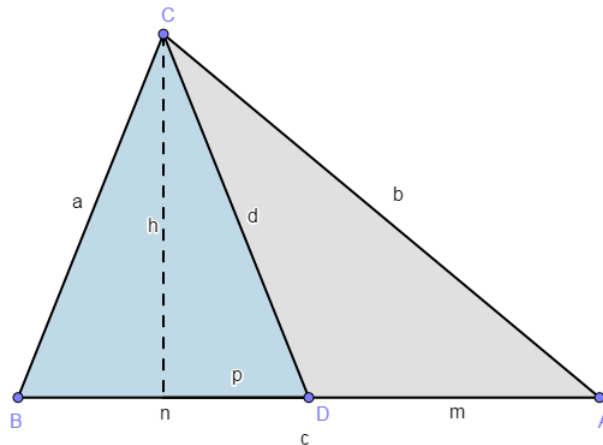


Figura 5.6: Triângulo ABC e o Teorema de Stewart 1.

Do triângulo BCD, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\begin{aligned}a^2 &= h^2 + (n - p)^2 \\a^2 &= h^2 + n^2 - 2np + p^2 \\h^2 &= a^2 - n^2 + 2np - p^2 \quad (1)\end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}d^2 &= h^2 + p^2 \\h^2 &= d^2 - p^2 \quad (2)\end{aligned}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\begin{aligned}d^2 - p^2 &= a^2 - n^2 + 2np - p^2 \\a^2 &= d^2 + n^2 - 2np \quad (3)\end{aligned}$$

Do triângulo ACD, temos que:

$$\begin{aligned}b^2 &= h^2 + (m + p)^2 \\b^2 &= h^2 + m^2 + 2mp + p^2 \\h^2 &= b^2 - m^2 - 2mp - p^2 \quad (4)\end{aligned}$$

E também:

$$\begin{aligned}d^2 &= p^2 + h^2 \\h^2 &= d^2 - p^2 \quad (5)\end{aligned}$$

Substituindo (5) em (4), obtemos:

$$\begin{aligned}d^2 - p^2 &= b^2 - m^2 - 2mp - p^2 \\b^2 &= d^2 + m^2 + 2mp \quad (6)\end{aligned}$$

Podemos montar um sistema de equações utilizando as relações (3) e (6):

$$\begin{aligned}a^2 &= d^2 + n^2 - 2np \\b^2 &= d^2 + m^2 + 2mp\end{aligned}$$

Agora, multiplicamos a primeira equação por  $m$  e a segunda equação por  $n$ , obtendo:

$$\begin{aligned}a^2m &= d^2m + m^2n + 2mnp \\b^2n &= d^2n + m^2n + 2mnp\end{aligned}$$

Somando as duas equações termo a termo, resulta:

$$\begin{aligned}a^2m + b^2n &= n^2m + m^2n + d^2m + d^2n \\a^2m + b^2n &= mn(m + n) + d^2(m + n) \quad (7)\end{aligned}$$

No entanto, temos que:

$$c = m + n \quad (8)$$

Desta forma, substituímos (8) em (7) obtendo a demonstração do teorema:

$$\begin{aligned}a^2m + b^2n &= mnc + d^2c \\a^2m + b^2n - d^2c &= mnc\end{aligned}$$

## 2ª Demonstração

### Demonstração:

Considere o triângulo abaixo:

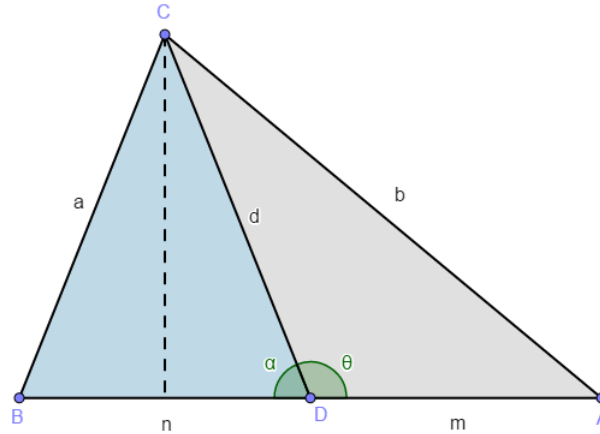


Figura 5.7: Triângulo ABC e o Teorema de Stewart 2.

Seja  $\theta$  o ângulo formado pelos segmentos  $m$  e  $d$  e  $\alpha$  o seu suplemento.

Desta forma, temos que  $\cos(\theta) = -\cos(\alpha)$ . Pela lei dos cossenos, temos que:

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2dm \cdot \cos(\theta)$$

$$a^2 = n^2 + d^2 - 2dn \cdot \cos(\alpha)$$

E também:

$$b^2 = m^2 + d^2 - 2dm \cdot \cos(\theta)$$

$$a^2 = n^2 + d^2 + 2dn \cdot \cos(\theta)$$

Multiplicamos a primeira equação por  $n$  e a segunda por  $m$ , podemos eliminar os termos que contém  $\cos(\theta)$ :

$$b^2n = m^2n + d^2n - 2dmn \cdot \cos(\theta)$$

$$a^2m = n^2m + d^2m + 2dmn \cdot \cos(\theta)$$

Somando as equações membro a membro, obtemos:

$$a^2m + b^2n = n^2m + m^2n + d^2m + d^2n$$

$$a^2m + b^2n = mn(m + n) + d^2(m + n)$$

No entanto,  $c = m + n$ . Logo:

$$a^2m + b^2n = d^2c + mnc$$

$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$



## 5.3 Uma alternativa para o ensino de matemática

Estamos trazendo uma alternativa, desenvolvida pelo autor, para o professor de Matemática, no ensino da matemática. A ideia é ampliar seus recursos e facilitar o entendimento do aluno em sala de aula.

### 5.3.1 O Teorema de Pitágoras

Como o recurso do Geogebra, podemos observar de uma forma simples que em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados de seus catetos.

Abaixo apresentaremos um link para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link Teorema de Pitágoras:

[https://drive.google.com/file/d/1R1G\\_FUjm8BqjCWySl2Bm2sAEVWCmkjx7/view](https://drive.google.com/file/d/1R1G_FUjm8BqjCWySl2Bm2sAEVWCmkjx7/view)

Nessa ferramenta, podemos observar, que mesmo deslocando os Pontos B e C, para aumentar ou diminuir os catetos, o quadrado da hipotenusa continua sendo igual a soma dos quadrados dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

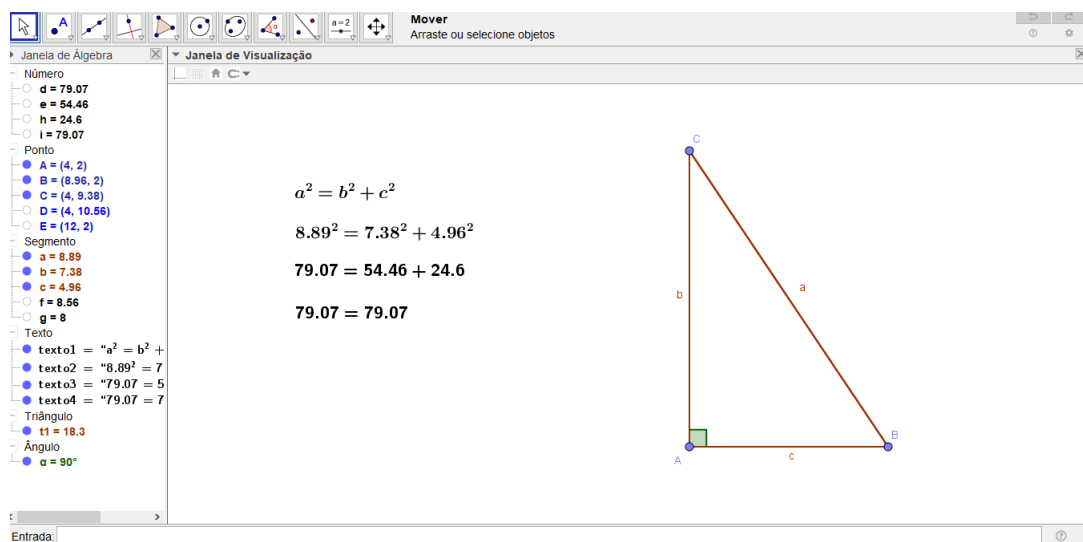


Figura 5.8: Arquivo pessoal: Teorema de Pitágoras.

### 5.3.2 Lei dos Cossenos

Como o recurso do Geogebra, podemos observar de uma forma simples que em um triângulo qualquer, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles.

Se um  $\triangle ABC$  qualquer, com os lados  $a, b$  e  $c$  e os ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ , opostos respectivamente aos lados, então :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\widehat{C}$$

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

[https://drive.google.com/file/d/1DrN408lv\\_UkY6MztyFczWTGhJDrh3oQc/view](https://drive.google.com/file/d/1DrN408lv_UkY6MztyFczWTGhJDrh3oQc/view)

Para a verificação do teorema, com auxílio do mouse, desloque o Ponto B da posição 2 para as posições 1 e 3. Observe que, quando o triângulo é retângulo, a Lei dos cossenos é igual ao teorema de Pitágoras.

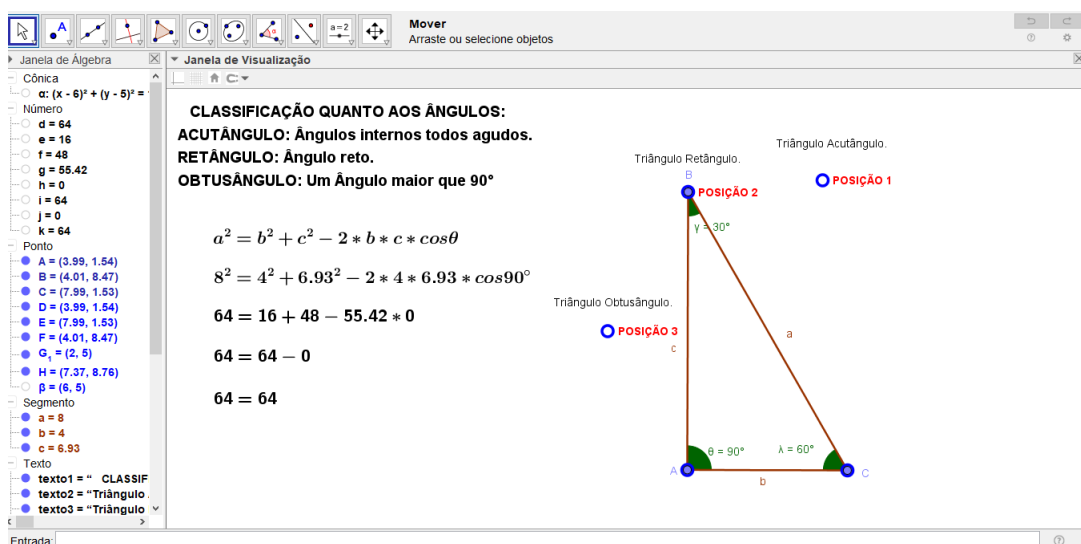


Figura 5.9: Arquivo pessoal: Lei dos Cossenos 1.

Link de classificação em relação aos lados:

<https://drive.google.com/file/d/1DI3A84HLgqzZOtEnKySaAdPwEjU1jajd/view>

Para a verificação do teorema, com auxílio do mouse, desloque:

o ponto A da posição 2 para a posição 1, e assim teremos o triângulo escaleno;  
o ponto C da posição 4 para a posição 3, e assim teremos o triângulo equilátero.

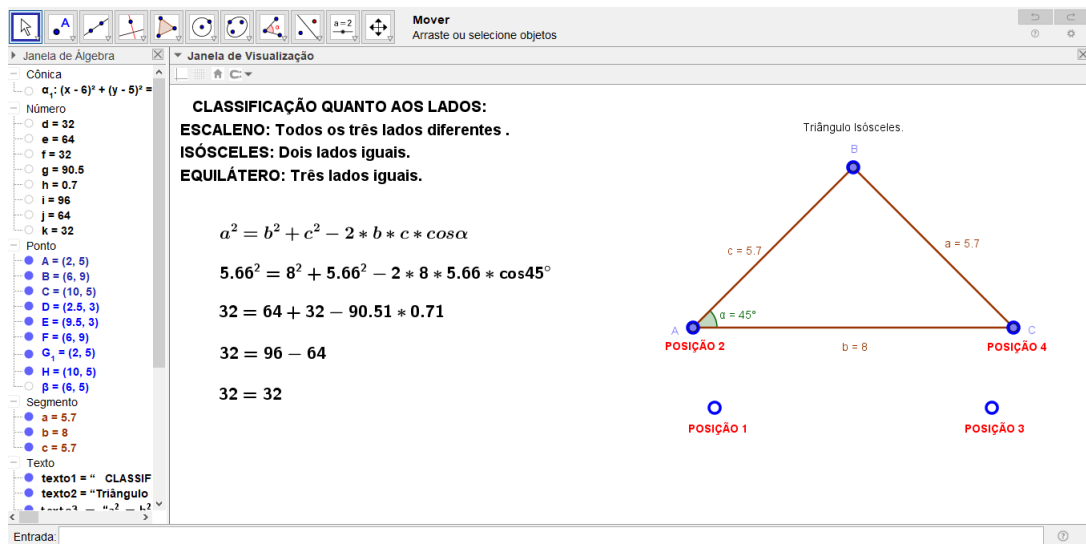


Figura 5.10: Arquivo pessoal: Lei dos Cossenos 2.

### 5.3.3 Teorema de Stewart

Como o recurso do Geogebra, podemos observar de uma forma objetiva que em um triângulo qualquer podemos relacionar os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana, sendo aplicável a uma ceviana qualquer e com as projeções dos lados sobre o lado suporte.

Seja o  $\triangle ABC$  qualquer, cujos os lados são medem  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Seja  $d$  uma ceviana e  $D$  o ponto pertencente à reta suporte. O teorema de Stewart que

$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$

Abaixo apresentaremos links para direcionar a apresentação do teorema, facilitando o trabalho do professor.

Link de classificação em relação aos ângulos:

[https://drive.google.com/file/d/1hZtmAmmoqL5rBpzfs6c6mtSP\\_QZuGDze/view](https://drive.google.com/file/d/1hZtmAmmoqL5rBpzfs6c6mtSP_QZuGDze/view)

Para a verificação do teorema, com auxílio do mouse, desloque o Ponto C da posição 1 para as posições 2 e 3, ou, desloque o ponto D sobre o lado  $\overline{AB}$  do triângulo.

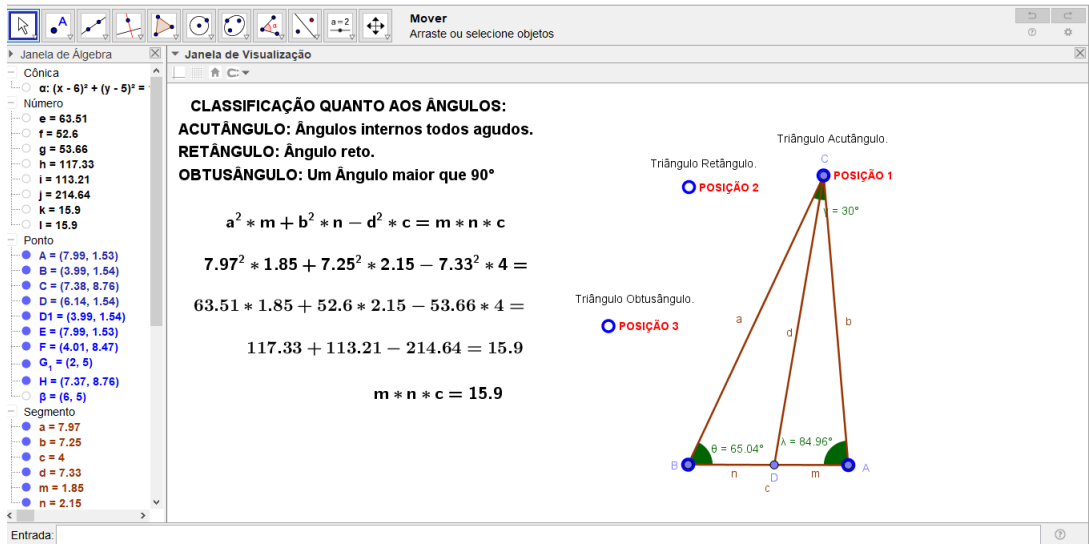


Figura 5.11: Arquivo pessoal: Teorema de Stewart 1.

Link de classificação em relação aos lados:

<https://drive.google.com/file/d/1ikRR4IqCIPllrhFcTibYE3PD9GIFV5LU/view>

Para a verificação do teorema, com auxílio do mouse, desloque:

o ponto B da posição 1 para a posição 2, e assim teremos o triângulo escaleno;  
o ponto A da posição 3 para a posição 4, e assim teremos o triângulo isósceles.

Para reiterarmos o teorema, podemos deslocar o ponto D sobre o lado  $\overline{AB}$  do triângulo.

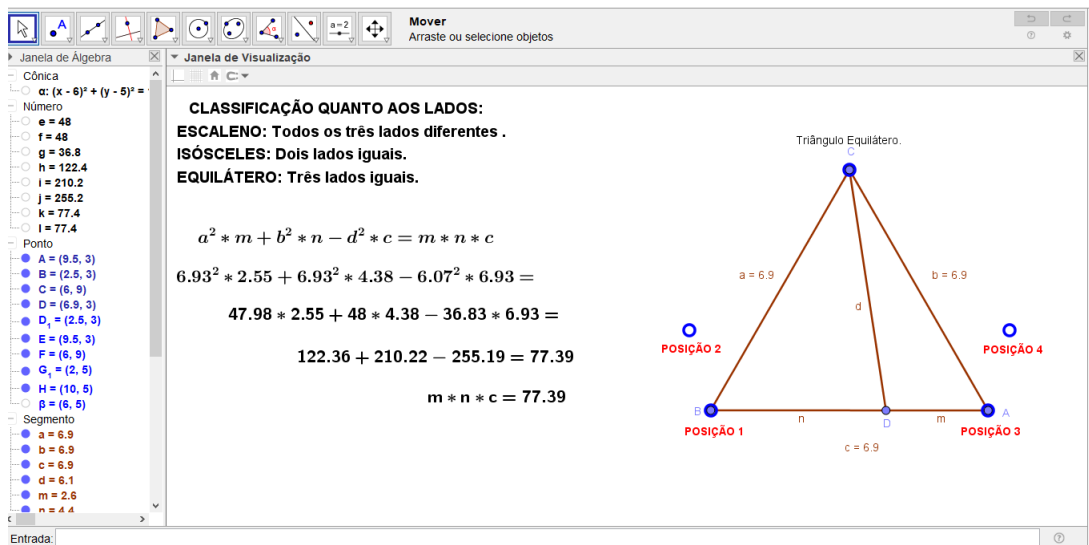


Figura 5.12: Arquivo pessoal: Teorema de Stewart 2.

# Considerações Finais

Neste trabalho tivemos a oportunidade de discutir alguns teoremas de extrema importância para o estudo da geometria dos triângulos, porém podemos constatar que este é um assunto que possui uma amplitude de ramos que ainda podem ser abordados, uma vez que apresentamos um recorte para trabalhar teoremas contemplados no Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Durante a estruturação deste trabalho, fomos estimulados a caminhar através de textos didáticos, que nos propiciaram ampliação de conhecimentos, bem como compreender o que está subentendido nas entrelinhas. A ideia, tomou forma, diante da curiosidade em estudar outras formas de abordagens do referidos teoremas, dentre inúmeras existentes, e posteriormente, divulgar algumas dessas demonstrações.

Nesse sentido, queremos passar ao professor uma abordagem que envolvam aspectos dedutivos, demonstrativos, se possível relacionando tais conteúdos com a sua evolução através dos tempos.

Aproveitamos então a oportunidade, e realizamos um relato do ponto de vista histórico, sobre datas significativas, fatos relevantes, personagens importantes, relacionados ao tema. Com isso, além da matemática correspondente, um pouco de história, devidamente relacionada e narrada e uma abordagem com o software Geogebra, proporcionado uma ferramenta didática, dá ao trabalho um perfil seguramente valorizado na educação matemática.

Procuramos conduzir esse trabalho, na perspectiva de contribuir com a melhoria do ensino de matemática, na expectativa de que o mesmo sirva como fonte de consulta para atividades educacionais, novas investigações e sugerimos sua leitura a professores de Matemática, de Prática de Ensino e acreditamos fortemente que pode servir propostas de atividades a serem refletidas e conduzidas nos Laboratórios/Oficinas de Matemática, no ensino do Desenho Geométrico.

# Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. B., 2003, História da Matemática. Editor Edgard Blucher, São Paulo.
- [2] EVES, H., 2004, Introdução à História da Matemática. Editora da UNICAMP, Campinas.
- [3] EVES, H., 1992, Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula; Geometria. Editora Atual, São Paulo.
- [4] SIMMONS, J. C., 2002, Os 100 maiores cientistas da História: Uma classificação dos cientistas mais influentes do passado e do presente. Editora DIFEL, Rio de Janeiro.
- [5] CAJORI, F., 2007, Uma História da Matemática. Editora Ciência Moderna Ltda, Rio de Janeiro.
- [6] GARBI, G. G., 1997, O Romance das Equações Algébricas, Makron Books, São Paulo.
- [7] WEBER, Leipzig, 1853, L Feuerbach, Anselm Ritter von Feuerbach's Biographischer Nachlass.
- [8] GUGGENBUHL, L., 1955, The Scientific Monthly 81, Karl Wilhelm Feuerbach, Mathematician.
- [9] I BULMER-THOMAS, 1970 - 1990, Biography in Dictionary of Scientific Biography.
- [10] HEATH, T. L., 1921, A History of Greek Mathematics (2 Vols.), Oxford .
- [11] WIKIPÉDIA, A Enciclopédia livre: Menelau de Alexandria, Disponível no site: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Menelau de Alexandria](https://pt.wikipedia.org/wiki/Menelau_de_Alexandria).
- [12] DOLCE, O., POMPEO, J. N., 1993, Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria Plana, 7ª edição. Editora Atual, São Paulo.
- [13] REZENDE, E. Q. F., 2008, Geometria Euclidiana Plana: e construções geométricas. Editora UNICAMP, Campinas.
- [14] MACKAY, J. S., 1892, History of Nine-Point Circle. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 11:19-57.

[15] LANDRA, P., CEVA e MANFREDI, 2009, Una Polemica tra matematici del Settecento (Monografie di Eiris, Milan).

[16] WIKIPÉDIA, A Enciclopédia livre: Giovanni Ceva, Disponível no site: <https://es.wikipedia.org/w>

[17] TWEDDLE, I., 2000, Simson on Porisms (Springer-Verlag, London).

[18] BARBOSA, R. M., 1993, Descobrimdo padrões pitagóricos: geométricos e numéricos, São Paulo: Atual.

[19] CARLYLE, E. I., 2004, Biography by E I Carlyle, rev. Niccolò Guicciardini, in Dictionary of National Biography, Oxford.