



Oldemir Brill Júnior

# **Incerteza Experimental: Métodos Estatísticos e Diferenciais**

Maringá-PR, Brasil

16/08/2019

Oldemir Brill Júnior

# **Incerteza Experimental: Métodos Estatísticos e Diferenciais**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Estadual de Maringá- UEM

Departamento de Matemática

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Wesley Vagner Ines Sirabayashi

Maringá-PR, Brasil

16/08/2019

Ficha Catalográfica

B857i Brill Júnior, Oldemir.  
Incerteza experimental: métodos estatísticos e diferenciais /  
Oldemir Brill Júnior. – Maringá : Universidade Estadual de Maringá -  
UEM, 2019.

Orientador: Wesley Vagner Inês Sirabayashi.  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá –  
UEM.

1. Incerteza. 2. Métodos. 3. Estatística. 4. Diferencial. 5.  
Experimental. I. Universidade Estadual de Maringá – UEM. II. Título.

(21 ed) CDD: 510

Bibliotecária Responsável Inês Gemelli CRB 9/966

**OLDEMIR BRILL JÚNIOR**

**INCERTEZA EXPERIMENTAL: MÉTODOS ESTATÍSTICOS E  
DIFERENCIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dr. Wesley Vagner Inês Shirabayashi  
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Orientador)



Profª. Dra. Sandra Regina D'Antonio Verrengia  
DMA/Universidade Estadual de Maringá



Profª. Dra. Janete de Paula Ferrareze Silva  
Universidade Federal do Paraná/Jandaia do Sul

Aprovado em: 16 de agosto de 2019.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

*Dedico a Deus, e aqueles que, com coragem lutam com fé suas batalhas por superação.*

# Agradecimentos

Agradeço a:

Deus: primeiramente ao nosso Pai que me ampara e me fortalece. Aquele que promove as oportunidades em minha vida. Sem Ele eu nada seria e nada conseguiria.

Samanta: minha amada esposa por seu amor. Por ter me apoiado em minhas lutas. Por me manter forte para que eu começasse, prosseguisse e terminasse mais este desafio.

Pais e irmãos: por me amarem.

Dulce: minha sogra que me incentivou no início desta caminhada e reconhecimento como educador.

Amigos: aos que me conhecem de longa data por terem me cobrado e incentivado. Aos do programa por me mostrarem que era possível a realização desse sonho e pela ajuda.

Professores: pelo conhecimento, broncas e elogios. Em especial ao Rodrigo Martins e Thiago Ferraiol.

Orientador: enfim à Wesley Vagner Ines Shirabayashi por sua paciência e disponibilidade para me nortear, corrigir e encorajar na realização deste trabalho. Pessoa fundamental para esta conquista.

*“Grit grows every time you prove to yourself that you can overcome an obstacle with perseverance and tenacity.”*

*“A coragem cresce toda vez que você prova para si mesmo que pode superar um obstáculo com perseverança e tenacidade.”*

*Bill Hybels*

# Resumo

Este trabalho tem por objetivo introduzir uma visão distinta sobre a utilização da Física Experimental por meio da exploração de ferramentas matemáticas para a obtenção de respostas acerca dos procedimentos que envolve esta metodologia de ensino. Introduzindo maneiras de interpretar resultados obtidos pela experimentação, a abordagem deste documento ressalta a interdisciplinariedade dessas duas áreas, que pode ser observada enfatizada no início da dissertação através da descrição histórica sobre o desenvolvimento conjunto de ambas. Adentrando ao documento, são explicitado os cuidados para um ato de medição, para que então métodos matemáticos pudessem ser introduzidos e explorados para obtenção de resposta/resultados. Métodos estes que quantificam a incerteza, também conhecida como intervalo de confiança, relacionada as condições da experimentação. Estes métodos matemáticos ajudam a obter resultados mais prováveis. Os principais métodos utilizados são Incerteza, Propagação da Incerteza e Mínimos Quadrados. Devido à utilização de derivadas, integrais e definições mais complexas este trabalho tem uma visão voltada para o ensino superior séries iniciais, entretanto com certo cuidado a principal mensagem e os resultados finais das teorias mais robustas podem ser aplicadas ao ensino médio.

**Palavras-chave:** Incerteza; Experimentação; Matemática; Física; Mínimos Quadrados.



# Abstract

The aim of this work was to introduce a distinct view on the use of Experimental Physics through the use of mathematical tools to obtain answers about the procedures involved in this teaching methodology. Introducing ways of interpreting results obtained by experimentation. The approach of this paper underscores the interdisciplinarity of these two areas, which can be observed emphasized at the beginning of the dissertation through the description history on the joint development of both. Entering the document, the care for a measurement act is explained, so that mathematical methods could be introduced and explored to obtain response / results. These methods quantify the uncertainty, also known as the confidence interval, related to the conditions of the experiment. These mathematical methods help you get more likely results. The main methods used are Uncertainty, Propagation of Uncertainty and Least Squares. In order to use the most complex integrations, integrations, and definitions for work with a higher education vision in the early grades, though with an important message, they may be more demanding in high school.

**Keywords:** Uncertainty; Experimentation; Mathematics; Physics; Least Square.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Pesquisa fictícia de eleições. Fonte: Autor. . . . .	35
Figura 2 – Multímetro. Fonte: Autor. . . . .	38
Figura 3 – Instrumentos para experimentação. Fonte: Autor. . . . .	38
Figura 4 – Relação entre precisão e exatidão. Fonte: Autor. . . . .	40
Figura 5 – Métodos de medição. Fonte: Autor. . . . .	41
Figura 6 – Comparativo de precisão e exatidão de uma régua e um paquímetro. Fonte: Autor. . . . .	42
Figura 7 – Balanças. Fonte: Autor. . . . .	44
Figura 8 – Representação Gráfica da Distribuição Normal (Gaussiana). Fonte: Autor.	51
Figura 9 – Representação Gráfica da Distribuição Normal (Gaussiana) com inter- valo de confiança. Fonte: Autor. . . . .	54
Figura 10 – Setup Pêndulo Simples. Fonte: Autor. . . . .	62
Figura 11 – Histograma normalizado para tempos de 10 oscilações para $L = 0,53 m$ . Fonte: Autor. . . . .	63
Figura 12 – Histograma normalizado para tempos de 10 oscilações com linha de comprimento $0,73 m$ . Fonte: Autor. . . . .	64
Figura 13 – Histograma normalizado para tempos de 10 oscilações com linha de comprimento $1,03 m$ . Fonte: Autor. . . . .	65
Figura 14 – Laboratório virtual desvio da luz PhetColorado. Fonte: Autor. . . . .	68
Figura 15 – Histograma ângulo de incidência normalizado. Fonte: Autor. . . . .	70
Figura 16 – Histograma ângulo de refração normalizado. Fonte: Autor. . . . .	71
Figura 17 – Aparelho de efeito fotoelétrico PASCO 6609. Fonte: Autor. . . . .	73
Figura 18 – Fotodiodo e suas catracas seletoras. Fonte: Referência [28]. . . . .	74
Figura 19 – Dados experimentais da corrente em função da tensão. Fonte: Autores.	76
Figura 20 – Histograma da frequência das medidas do calendário. . . . .	84

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Fontes de Incerteza. Fonte: CABRAL, 2004 (alterado). . . . .	37
Tabela 2 – Dados largura (210mm) folha sulfite A4 padrão. Fonte: Autor. . . . .	39
Tabela 3 – Dados experimentais movimento retilíneo com uso do trilho de ar. Fonte: Autor. . . . .	45
Tabela 4 – Média aritmética dos dados da Tabela 3. Fonte: Autor. . . . .	46
Tabela 5 – Média quadrática dos dados da Tabela 3. Fonte: Autor. . . . .	46
Tabela 6 – Variância das leituras da Tabela 3. Fonte: Autor. . . . .	47
Tabela 7 – Desvio Padrão das leituras da Tabela 3. Fonte: Autor. . . . .	48
Tabela 8 – Tabela de Intervalo de Confiança. Fonte: Autor. . . . .	53
Tabela 9 – Tempos de 10 oscilações para $L = 0,53\text{ m}$ , $\Theta = 15^\circ$ e $m = 0,165\text{ kg}$ . Fonte: Autor. . . . .	63
Tabela 10 – Elementos para construção do histograma para $L = 0,53\text{ m}$ . Fonte: Autor. . . . .	63
Tabela 11 – Tempos de 10 oscilações para $L = 0,73\text{ m}$ , $\Theta = 15^\circ$ e $m = 0,165\text{ kg}$ . Fonte: Autor. . . . .	64
Tabela 12 – Elementos para construção do histograma para $L = 0,73\text{ m}$ . Fonte: Autor. . . . .	64
Tabela 13 – Tempos de 10 oscilações para $L = 1,03\text{ m}$ , $\Theta = 15^\circ$ e $m = 0,165\text{ kg}$ . Fonte: Autor. . . . .	65
Tabela 14 – Elementos para construção do histograma para $L = 1,03\text{ m}$ . Fonte: Autor. . . . .	65
Tabela 15 – Resultados. Fonte: Autor. . . . .	66
Tabela 16 – Intervalo de confiança para a aceleração da gravidade local (experimento pêndulo simples). Fonte: Autor. . . . .	67
Tabela 17 – Tabela de dados. Fonte: Autor. . . . .	69
Tabela 18 – 33 Medidas coletadas de ângulo de incidência (em radianos). Fonte: Autor. . . . .	69
Tabela 19 – Elementos para construção do histograma para ângulo de incidência (em radianos). Fonte: Autor. . . . .	70
Tabela 20 – 33 Medidas coletadas de ângulo de refração (em radianos). Fonte: Autor.	71
Tabela 21 – Elementos para construção do histograma para ângulo de refração (em radianos). Fonte: Autor. . . . .	71
Tabela 22 – Intervalo de confiança da experimentação desvio da luz. Fonte: Autor. .	72
Tabela 23 – Dados experimentais da corrente fotoelétrica como função da tensão em diferentes intensidades (linha espectral $\gamma = 436\text{ nm}$ ). Fonte: Autor.	75

Tabela 24 – Dados experimentais da tensão de corte obtidos como função do comprimento de onda da luz incidente (intensidade constante). Fonte: Autor.	75
Tabela 25 – Dados das médias aritméticas. Fonte: Autor. . . . .	76
Tabela 26 – Intervalo de confiança da experimentação efeito fotoelétrico. Fonte: Autor.	77
Tabela 27 – Comprimentos dos calendários (cm). Fonte: Autor. . . . .	83
Tabela 28 – Frequência dos comprimentos dos calendários. Fonte: Autor. . . . .	83

# Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
a.C	antes de Cristo
d.C	depois de Cristo
GPS	Global Positioning System
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IEC	Comissão Eletrônica Internacional
SI	Sistema Internacional de Medidas
UEM	Universidade Estadual de Maringá

# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>A RELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A FÍSICA</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>1.1</b>	<b>Um Breve Histórico</b> . . . . .	<b>19</b>
1.1.1	Da Antiguidade a Grécia Antiga . . . . .	19
1.1.2	Idade Média . . . . .	21
1.1.3	Ressurgimento: a Filosofia Moderna . . . . .	22
1.1.4	Astronomia e Geometria . . . . .	24
1.1.5	Mecânica Clássica e Cálculo Diferencial . . . . .	25
1.1.6	Eletromagnetismo e o Cálculo Diferencial e Integral . . . . .	26
1.1.7	Relatividade e Mecânica Quântica . . . . .	27
1.1.8	Experimentação e Estatística . . . . .	28
<b>2</b>	<b>FÍSICA EXPERIMENTAL</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>2.1</b>	<b>Física Experimental como Ferramenta de Ensino</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Conhecimentos Pré Experimentação</b> . . . . .	<b>32</b>
2.2.1	Algarismo Significativo e Notação Científica . . . . .	33
2.2.2	O Erro . . . . .	33
2.2.3	A Incerteza . . . . .	34
2.2.4	Medir . . . . .	36
2.2.5	Tipos de Erros . . . . .	37
2.2.6	Instrumentos de Medição . . . . .	39
<b>2.3</b>	<b>Medidas</b> . . . . .	<b>40</b>
2.3.1	Medidas Diretas: Incerteza e Análise . . . . .	41
2.3.2	Medidas Indiretas . . . . .	42
<b>3</b>	<b>MÉTODOS ESTATÍSTICOS, DIFERENCIAIS E INTEGRAIS</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>3.1</b>	<b>Métodos Estatísticos - Estatística Básica</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>3.2</b>	<b>Métodos Estatísticos - Integral e Diferencial</b> . . . . .	<b>49</b>
3.2.1	Função Densidade de Probabilidade . . . . .	49
3.2.2	Distribuição Normal . . . . .	50
3.2.3	Intervalo de Confiança . . . . .	52
3.2.4	Propagação da Incerteza . . . . .	54
3.2.4.1	Fórmulas Mais Recorrentes de Propagação de Incerteza . . . . .	56
<b>4</b>	<b>MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS</b> . . . . .	<b>58</b>

4.0.0.1	Função Tipo $y(x)=ax+b$ . . . . .	59
4.0.0.2	Função Tipo $y(x)=ax$ . . . . .	60
<b>5</b>	<b>EXPERIMENTAÇÃO E APLICAÇÃO</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>5.1</b>	<b>Pêndulo Simples</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>5.2</b>	<b>Desvio da Luz</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>5.3</b>	<b>Efeito Foto Elétrico</b> . . . . .	<b>72</b>
5.3.1	Desenvolvimento Experimental. . . . .	72
5.3.2	Procedimento. . . . .	73
5.3.2.1	Determinação do potencial de corte em diferentes intensidades. . . . .	74
5.3.2.2	Determinação da frequência de corte da função trabalho. . . . .	75
5.3.3	Análise dos Resultados. . . . .	76
5.3.3.1	Determinação do potencial de corte em diferentes intensidades. . . . .	76
5.3.3.2	Determinação da frequência de corte da função trabalho. . . . .	76
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>HISTOGRAMA</b> . . . . .	<b>82</b>

# Introdução

Quando conceitos abstratos são trabalhados dentro da sala de aula, o que ocorre com maior frequência nas áreas de Matemática e de Física, os alunos apresentam muitas dificuldades de aprendizagem, o que os levam a terem aversão à disciplina e ao conteúdo ensinado, freando e até bloqueando o seu desenvolvimento nesta área do conhecimento.

“O ensino da matemática não foge a essa regra; muitos alunos apresentam resistência, haja vista que aplicabilidade, muitas vezes abstrata e distante de suas realidades, dificulta a assimilação dos conceitos e teoria.” (NASCIMENTO, 2016, p.2).

Assim, se lidamos com objetos matemáticos cujas representações são facilitadas pelo uso de recursos tecnológicos, como é o caso das figuras geométricas, das funções, ou outros, esses podem se constituir como elementos essenciais, configurando-se como ferramentas de promoção do estreitamento da relação abstrato/concreto e o fortalecimento da compreensão de conceitos matemáticos (SOARES, 2015, p.30).

Em busca da consolidação dos conhecimentos matemáticos e físicos objetivados pelos programas de ensino, seja este tanto no âmbito dos ensino fundamental, médio ou superior, nós profissionais da área buscamos ferramentas que forneçam meios que conectem de maneira compreensível os alunos a estes conhecimentos, e uma dessas maneiras é a interdisciplinaridade.

Na perspectiva da interdisciplinaridade entre a Física e a Matemática uma ferramenta muito importante que ajuda a diminuir esta lacuna e que relaciona a Física Teórica e conceitos da Matemática com os resultados que elas apresentam é a experimentação, também conhecida como Física Experimental. Esta ferramenta auxilia não apenas para a comprovação da teoria, mas também para a consolidação do entendimento de um fenômeno.

Na Física Experimental os alunos podem tocar, experimentar, verificar, sentir, criar, acertar, errar, entre outras experiências que possibilitam o desenvolvimento tanto do aluno como dos próprios conceitos da Física e da Matemática, concretizando ou dando subsídios para a compreensão do mundo que nos rodeia.

Embora se deva deixar claro que as atividades experimentais realizadas na escola têm funções bem distintas daquelas realizadas nas universidades e centros de pesquisa, é possível discutir com os alunos aspectos relacionados à natureza da ciência, evitando que eles tenham algumas visões distorcidas da construção do conhecimento científico [...] (OLIVEIRA, 2010, p.145).

Por sua vez, a utilização dos experimentos quantitativos nos permite trabalhar com tratamento de dados estatísticos, verifica o limite de validade



de algumas leis científicas, mostrar o uso adequado de diferentes instrumentos e desenvolver modelos matemáticos dos fenômenos estudados (CAMPOS, 2009, p.4).

Relacionados com a Física em seus dois âmbitos, teórico e experimental, encontram-se vários conceitos de várias áreas da Matemática, como lógica, aritmética, geometria, estatística, entre outros. A Matemática é de extrema importância para o desenvolvimento da Física, ajudando-a estabelecer padrões dentro dos fenômenos e dando sentido para eles por meio da quantificação desses.

A compreensão e quantificação de um fenômeno auxilia a sociedade a utilizá-lo para benefício próprio, promovendo o desenvolvimento de uma vida mais confortável. Como exemplos disso, podemos destacar os estudos da termodinâmica que promoveram a criação da geladeira, os estudos do eletromagnetismo que impulsionaram a criação das redes elétricas, entre inúmeros outros estudos. Mesmo a Física do Ensino Médio tendo uma perspectiva qualitativa que abrange observações de fenômenos cotidianos, ela também possui o objetivo de quantificar os fenômenos para poder com estes entendimentos encontrar respostas.

Uma parte significativa dessa forma de proceder traduz-se em habilidades relacionadas à investigação. Como ponto de partida, trata-se de identificar questões e problemas a serem resolvidos, estimular a observação, classificação e organização dos fatos e fenômenos à nossa volta segundo os aspectos físicos e funcionais relevantes [...]

[...] desenvolvendo habilidades para medir e quantificar, seja com réguas, balanças, multímetros ou com instrumentos próprios, aprendendo a identificar os parâmetros relevantes, reunindo e analisando dados, propondo conclusões. Como toda investigação envolve a identificação de parâmetros e grandezas, conceitos físicos e relações entre grandezas, a competência em Física passa necessariamente pela compreensão de suas leis e princípios, de seus âmbitos e limites (BRASIL, 2006, parte III, p.24).

Dentro dos conceitos matemáticos que ajudam a Física Experimental a obter fidedignidade e a entender as dissonâncias em seus resultados, estão o tratamento de dados e a estimativa de erros ou incerteza, os quais são os objetos de estudo desse trabalho.

No estudo da Física Pura e Aplicada, a Modelagem Matemática está presente em várias etapas, seja como análise dos dados coletados, como proposta de novos modelos, como verificação de validade dos modelos existentes ou apenas correções, para casos específicos, das teorias em vigência. Em vários campos da Física Teórica e Experimental o desenvolvimento do conceitos matemáticos foi extremamente importante para descrever novas descobertas, com a finalidade de fazer previsões dos fenômenos estudados e verificações dos seus limites de validade (CAMPOS, 2009, p.1).

Neste trabalho é feita uma revisão bibliográfica que procura organizar os conhecimentos acerca de uma experimentação qualitativa e quantitativa, conhecimentos estes

tantos matemáticos quanto físicos, que culmina em sua utilização através de experimentações realizadas em laboratório reais, sejam eles nas dependências da Universidade Estadual de Maringá (UEM) ou até mesmo na própria casa do autor deste trabalho, enfatizando assim que alguns desses experimentos podem ser realizados dentro de uma sala de aula sem que tenham um laboratório de ponta, também foi utilizado laboratório virtual, o simulador elaborado e disponibilizado pela Universidade do Colorado dos Estados Unidos, completando a finalidade deste trabalho.

O presente documento discorre em seu primeiro capítulo um pouco da história e filosofia que uniu a Matemática e a Física, sem apresentar os cálculos ou a modelagem e cada teoria, mas simplesmente elencando que tipo de matemática foi empregada naquela época e naquele ramo da Física. Procura-se enfatizar sobre a importância do tratamento de dados e a estimativa de erros nos estudos de alguns fenômenos, principalmente no caso de Mychelson e Morley, precursores da Física moderna e contemporânea.

Para analisar dados coletados por meio de experimento é necessário alguns cuidados, assim no segundo capítulo são tratados os conceitos pré experimentação, as diferenças entre experimento qualitativo e quantitativo, alguns conceitos matemáticos utilizados na física, algarismo significativo, notação científica, precisão, exatidão, etc. Também foram apresentados aspectos sobre ferramentas de medição e algumas peculiaridades sobre elas. O terceiro e quarto capítulos são uma continuação do segundo. Ele traz conceitos sobre a coleta dos dados junto com a estimativa de erro em relação a esta coleta, traz também os conceitos de propagação dos erros que possam surgir devido a modelagem matemática, e por fim a melhor estimativa para a grandeza analisada.

No quarto e último capítulo é ilustrada a utilização dos conceitos apresentados nos capítulos anteriores através de experimentações realizadas pelo próprio autor.

# 1 A Relação entre a Matemática e a Física

Uma relação inegável é a influência entre estas duas ciências, Física e Matemática. A Física e a Matemática despertaram e ainda despertam a criatividade e a admiração de vários estudiosos ao longo do desenvolvimento da sociedade e do próprio desenvolvimento dessas ciências. Esta admiração pode ser vista desde os antigos filósofos e atuais estudiosos através de frases de efeito, que ressaltam a intimidade e importância de uma para o desdobramento da outra, como por exemplo, Wagh e Deshpande (2013, pag.3) descrevem que a Matemática sendo uma “ferramenta essencial para a física” e Atiyah (1990, pag.34) diz que a Física é “uma rica fonte de inspiração e insight para a matemática”.

A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática (BRASIL, 1998, p.40).

[...] todas as leis, pois, provêm da experiência, mas para enunciá-la é preciso uma linguagem especial; a linguagem corrente é demasiado pobre, e aliás muito vaga para exprimir relações tão delicadas, tão ricas e tão preciosas. Eis portanto uma primeira razão pela qual o físico não pode prescindir da matemática; ela lhe fornece a única linguagem que ele pode falar (POINCARÉ, 1995, p.91).

Dessa forma, a influência de uma na outra proporcionou e proporciona a evolução de ambas, e neste capítulo estamos interessados em falar sobre a história dessa interação. Quando começou esta interação? Qual a influência da Física no ensino da Matemática, e vice-versa? Os resultados de ambas as ciências foi sempre fruto da relação entre elas? Ainda hoje há contribuições entre elas? Estas são algumas das questões que tentaremos responder ao longo deste capítulo.

Para iniciarmos nossa caminhada com respeito a esta temática, precisamos voltar ao tempo dos filósofos, à raiz de nosso conhecimento, a Grécia Antiga, o começo do nosso movimento intelectual e conseqüentemente do conhecimento científico. Passar por uma época obscura com quase nenhum desenvolvimento das ciências, a Idade Média, e então, o ressurgimento com os pensadores modernos caminhando até os dias de hoje, sempre ressaltando a relação dos pensamentos físicos e o uso da matemática e vice-versa.

## 1.1 Um Breve Histórico

O desenvolvimento desta seção se dá através da leitura de diversos artigos e alguns livros que situam o momento da humanidade com a importância do desenvolvimento científico.

Apesar de aparecerem diversos nomes de diversos filósofos, cientistas, estudiosos e assim por diante, sabemos que a construção e o desenvolvimento do conhecimento humano não deve ser creditada a poucos, pois muitos que nem se quer são mencionados dispuseram de seus pensamentos para que cada uma dessas ideias relacionadas a alguns pensadores viessem a luz. Portanto não se enganem ao verificarem o desenvolvimento desta seção que o conhecimento e as teorias nasceram da noite para o dia.

### 1.1.1 Da Antiguidade a Grécia Antiga

[...] o início da História da Matemática se deu na época do paleolítico inferior, onde o homem vivia da caça, coleta, competição com animais e utilizava-se de paus, pedras e fogo, ou seja, vivia de tudo aquilo que pudesse retirar da “natureza”. E ainda, ressalta que o ser humano necessitava de uma “matemática” apenas com noções de mais ou menos, maior ou menor e também de algumas formas e simetria para sobreviverem nessa mesma época (ROSA, 1998, p8, citado por ROSSETO, 2013, p.15-16).

É um pouco confuso apresentar com exatidão qual das duas ciências, Física ou Matemática, nasceu primeiro, pois pela observação de ROSSETO (2013, p.15-16), pode-se ver que o homem utilizava-se da observação da natureza para seu benefício, mas também é possível verificar traços de conceitos matemáticos sendo utilizados neste mesmo momento. Enfim, o fato é que as duas surgiram naturalmente da necessidade do homem em se relacionar com o ambiente e tudo que nele estava inserido.

O amadurecimento das observações da natureza levou o homem a criar padrões, o que levou ele a sair de uma vida nômade para estabelecer uma sociedade mais concisa, transformando o rumo de sua existência, a qual era sempre impulsionada pela sua curiosidade sobre o mundo.

Logo, o interesse e a vontade do homem em realizar descobertas, independente de sua origem, o levou a efetuar explorações fazendo com que diferentes culturas pudessem trocar experiências/conhecimentos. Então, em meio a este acumulado cultural surgem na Grécia Antiga, período de 1100 a.C. até 146 a.C., os chamados filósofos. Estes pensadores foram os responsáveis pelo amadurecimento das ciências das quais podemos verificar hoje. Seus interesses, além do ato de executar tarefas, englobavam, observar, registrar, entender o ambiente natural e a natureza humana, de modo que alguns utilizavam estas observações para facilitar e beneficiar a sua vida e das pessoas próximas, ou, simplesmente obter poder

por meio desses estudos. Assim, começaram a observar os fenômenos naturais de forma racional e não mais com um olhar de misticismo.

Em sua essência a Física é a observação de fenômenos. Porém, no momento em que as observações passaram para experimentações e conseqüentemente para quantização, a Física ficou mais relevante. Esta transição só foi possível com a utilização de ferramentas matemáticas. E apesar de ser uma construção da sociedade filosófica alguns estudiosos se sobressaíram com suas contribuições.

É interessante observar os principais nomes que deram “origem” à Filosofia e as ciências, como por exemplo, Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.), um pensador com contribuições tanto na área da lógica e da matemática geométrica como também da relação homem natureza. Tales recebe o título de pai da Filosofia, pois é reconhecido como o primeiro filósofo. Dentro da mesma perspectiva, Pitágoras (570 a.C. – 495 a.C.) com suas contribuições notórias no campo da matemática, em especial na geometria e Zenão de Eleia (485 a.C. – 430 a.C.) que tem em destaque o Paradoxo que leva seu nome, o qual traz noções de movimento, mesmo sendo contraditório e invariável.

Sócrates (469 a.C. – 399 a.C.) e seu aluno Platão (428 a.C. – 348 a.C.), ambos filósofos e matemáticos, foram responsáveis, principalmente o primeiro, por uma revolução no meio filosófico, o que é evidenciado pela divisão dos períodos filosóficos, pré-socrático e pós-socrático e Platão que defendia o uso da matemática nas descrições dos processos naturais:

A busca de uma ordem na natureza, através das abstrações da matemática, encontra-se diretamente relacionada com a teoria platônica das formas ideais, das quais o mundo em que vivemos não seria mais do que uma cópia imperfeita (ZYLBERSZTAJN, 1988, p.41).

Devido a essa visão, Platão também exigia o domínio da matemática para alunos se matricularem em sua escola em Atenas, influenciando a formação de vários matemáticos.

Platão foi mais um forjador de matemáticos do que um matemático distinguido por descobertas originais e suas contribuições à geometria estão mais no melhoramento de seu método do que em adições a seu conteúdo. Foi ele que transformou a lógica intuitiva dos antigos geômetras em um método a ser usado conscientemente e sem receio. Com ele, aparentemente, começaram aquelas definições dos termos geométricos, aquele enunciado distinto de postulados e axiomas que Euclides adotou (GOW, 1968, p.175, citado por BICUDO, 1998, p.304).

Um dos alunos de Platão foi Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), influenciado por seu mestre, movimentou e perdurou com seus pensamentos lógicos por um longo tempo no mundo filosófico, contribuindo diretamente, com seus próprios pensamentos, ou indiretamente, através de sua escola e seus alunos, para praticamente todas as áreas da ciência

que conhecemos hoje, física, química, biologia, mesmo com pensamentos contraditórios para a ciência atual.

Na Grécia Antiga se destacou o desenvolvimento de uma matemática mais abstrata, uma matemática não somente voltada para as tarefas cotidianas, o que proporcionou explorações ainda não pensadas pelo homem, como a criação da astronomia, área de estudo dos astros celestes.

### 1.1.2 Idade Média

Uma nova era nasce com a ascensão do império romano, porém ele não foi perpétuo. O declínio deste império e a desorganização do estado da época fez com que a população tivesse dificuldade no acesso de alimentos, assim as cidades começaram a se esvaziar, ficando desprotegidas e sujeitas a saques, o que levou a uma perda significativa no acervo de registros da época e a uma movimentação das famílias para lugares menos povoados, distantes uns dos outros e menos estruturados. Isso fez com que as pessoas se voltassem para a produção de alimentos, pois naquele momento o mais importante era sobreviver, a procura por escolas e por conhecimento diminuiu.

Com essa desfragmentação da população a igreja católica surge com grande influência para suprir as necessidades e dar alguma esperança aos povos, com isso a sociedade foi muito “manipulada” pela igreja.

Por último, devemos lembrar de um elemento não propriamente do campo da economia, e sim da ideologia, mas que teve repercussão sobre as atividades produtivas e financeiras. Trata-se da teoria econômica, que, como as demais funções intelectuais, foi por muito tempo monopolizada pela Igreja (FRANCO, 2001, p.54).

Este período, de 476 d.C. à 1492, ficou conhecido como Idade Média, ou, Idade das Trevas, pois além desse retrocesso em relação ao convívio humano em sociedade, surgiu junto às condições precárias vários tipos de doenças, entre elas a temida Peste Negra. Este conjunto de acontecimentos mostra que foi um período muito difícil para a sobrevivência dos povos no continente Europeu.

Esta época nos faz perceber que o crescimento das ciências não foi de forma progressiva. Nesta época, devido à dificuldade de sobrevivência, à diminuição da população das cidades, ao êxodo para áreas rurais mais afastadas, as trocas de experiências e conhecimento decrescessem. Além disso, a ideologia bastante forte aplicada pelas igrejas provocou um forte bloqueio ao desenvolvimento ou permanência do conhecimento adquirido até então, o que marcou um retrocesso para as ciências.

Havia um monopólio da cultura intelectual por parte da Igreja. A educação era feita de clérigos para clérigos, devido às necessidades do culto.

Nas escolas catedralícias e sobretudo monásticas, praticamente as únicas existentes, ensinavam-se as chamadas sete artes liberais, as únicas dignas de homens livres (FRANCO, 2001, p.139).

Um dos motivos para essa dificuldade é que neste tempo foi priorizado o desenvolvimento e cópias dos manuscritos sagrados, o que ocupava muito o tempo dos sábios da época, como também a “ditadura” da igreja sobre os pensamentos científicos.

Mas o campo cultural em que melhor se expressou a tentativa de harmonização do passado clássico com o cristianismo foi o da Filosofia. Na verdade, tal pretensão não foi apenas a dos primeiros tempos medievais, mas de toda a Idade Média, como veremos mais adiante. Na fase que ora examinamos, isso transparece na corrente conhecida por Patrística. Na essência, ela procurava provar que a doutrina cristã não conflitava com a razão, demonstrando assim a falsidade do paganismo, para tanto, ela recorreu à filosofia grega, sobretudo ao platonismo, que se adequava melhor à mensagem cristã (FRANCO, 2001, p.141).

Entretanto com o passar do tempo as cidades cresceram e novamente escolas surgiram, devido ao redescobrimiento de conhecimentos, essas escolas passaram a ser universidades (medievais). Nestas universidades foram constituídas ideias de movimento que avançaram em relação às teorias mais antigas, as quais viriam contribuir de forma contundente para o desenvolvimento do conhecimento científico pós Idade Medieval:

O Jovem Galileu, certamente, teve acesso (se bem que não direto) aos resultados da cinemática medieval... Nicole Oresme, discípulo de Buridan, deu continuidade aos trabalhos do mestre, tendo, inclusive, discutido a possibilidade do movimento de rotação da Terra com argumentos que pressupunham a teoria do “impetus”; séculos mais tarde Galileu usaria argumentos do mesmo tipo para desarmar as “provas” anticopernicanas relativas à imobilidade da Terra (ZYLBERSZTAJN, 1988, p.39).

Verifica-se então aqui neste capítulo que não há contribuições notórias para o desenvolvimento da filosofia e das ciências na Era Medieval, apesar das descobertas em relação ao movimento. Perceber este momento na Europa promove o entendimento do porquê parecer que as ciências poderiam estar mais avançadas, e também que isso proporcionou o surgimento de mentes espetaculares em seu próprio tempo.

Também vale notar que as principais ideias matemáticas eram no campo da geometria. A seguir, pode ser visto que há uma ampliação dos campos da Matemática devido ao desenvolvimento da Física.

### 1.1.3 Ressurgimento: a Filosofia Moderna

A difusão do conhecimento e manuscritos da escola de Platão e de outras escolas que surgiram antes da era medieval, o enfraquecimento da igreja católica, o surgimento de

universidade, as novas cruzadas, e principalmente o povo árabe, possibilitaram a Europa entrar em contato novamente com o conhecimento adquirido antes Idade Medieval e ainda mais, puderam desenvolver de forma abundante e ligeira as várias áreas do conhecimento.

No período em que a Europa viveu o obscurantismo da Idade Média, os tradutores, os filósofos e os estudiosos da época preservaram os manuscritos do mundo antigo e os dos cientistas perseguidos pela igreja católica e pela inquisição. No período seguinte, observa-se um amplo período de criação e desenvolvimento nas ciências, artes, literatura e medicina, óptica, mecânica, física, matemática, arquitetura, música e tantas outras maravilhas realizadas por esta que foi chamada de civilização árabe-islâmica (SMAILI, 2015, p.148).

Os árabes foram responsáveis, primeiro, por terem posses de manuscritos importantes e de traduzi-los mantendo assim o conhecimento grego vivo, segundo por terem introduzido novas descobertas e conceitos matemáticos e também por terem traduzido manuscritos indianos, o que enriqueceu o conhecimento grego.

Eles tinham tremenda habilidade e técnicas apuradas para a tradução de várias línguas, fazendo com que ocupassem um lugar de destaque para a difusão do conhecimento científico pelo mundo. Suas habilidades não paravam por ai, também foram responsáveis por construir objetos que ajudaram nos cálculos e validação de muitos dos conhecimentos que eles entraram em contato, como também novas contribuições para estas áreas do conhecimento, principalmente devido suas habilidades matemáticas, tendo como principais responsáveis pelo desenvolvimento do conhecimento árabe Al-Kwarismi, o qual deu origem ao nome algarismo, Ibn al-Haytam, al-Biruni entre outros.

Este ambiente de enorme estímulo intelectual prevaleceu e se ampliou, destacando-se pelas inúmeras descobertas na Matemática e Álgebra – com o desenvolvimento dos algarismos, do conceito de zero e do sistema decimal, da prática do cálculo, da álgebra, das equações trigonométricas e da aritmética... Na Astronomia são recuperados os conhecimentos dos gregos antigos e desenvolvidas técnicas e instrumentos sofisticados de orientação (astrolábios e observatórios), determinação do tempo e modelos planetários. Na Geografia, conhecimento da geografia humana e cartografia. Na Física, desenvolvimento da hidrostática, da óptica, da mecânica (SMAILI, 2015, p.149).

Época esta tão abundante que perdura até os dias de hoje, tamanho o número de ramos da Física e da Matemática que possibilitaram descobrir, porém neste trabalho serão descritos alguns poucos desses ramos e as relações entre eles, como por exemplo: mecânica clássica, ótica, eletromagnetismo, cálculo diferencial e integral, geometria, álgebra, etc, para simplesmente ressaltar a importância e o uso de uma para com a outra.



### 1.1.4 Astronomia e Geometria

A Astronomia que tem uma relação íntima com a Matemática (geometria) desde a antiguidade era o principal ramo desenvolvido na pré Idade Média, teve bons frutos através dos árabes, e também no ressurgimento da filosofia “científica” que veio por meio deste campo. Nicolau Copérnico (1473 - 1543) com sua teoria do heliocentrismo, fundamentada matematicamente, causou um tremendo desconforto na época, mesmos com seus conflitos internos, pois tinha suas raízes na doutrina católica, foi precursor de uma época próspera conhecida como a época da filosofia moderna, iluminando o caminho com sua teoria do heliocentrismo, dando assim subsídios para novos e grandes nomes. Na citação a seguir podemos ver elementos matemáticos na teoria de Copérnico.

Demonstrava que a Terra é esférica, algo de que muitos ainda duvidavam. Descrevia um sistema no qual os seis planetas conhecidos tinham como centro o Sol. A Terra e a Lua, como os outros planetas, também giravam em torno do mesmo. No sistema de Copérnico, as órbitas dos planetas ainda eram descritas como círculos perfeitos, contidos nas esferas cristalinas da hipótese ptolomaica (PAPROCKI, 2012, p.242).

Galileu Galilei (1564 - 1642) foi um dos influenciados por Copérnico. Ele recebeu o título de pai da Física Moderna por estabelecer e enfatizar as atribuições de um cientista, também por descrever movimentos verticais, descobrindo que movimentos verticais e horizontais eram independentes um do outro. Para aferir suas pesquisas, suas sustentações teóricas foram realizadas por meio do uso de muitos subterfúgios matemáticos e experimentais, reconhecendo a Matemática como uma ferramenta de grande utilidade para a Física. Não parando por aqui, ele também contribuiu através de observações por telescópio, para a Astronomia, enfatizando o sistema de heliocentrismo de Copérnico.

Dentro desse quadro, Galileu é universalmente considerado o fundador da Física Clássica, que passará a ser desenvolvida na direção de uma teoria físico-matemática dos fenômenos naturais. Suas contribuições substantivas para essa nova ciência, a saber, a descoberta da lei de queda dos corpos, a formulação da teoria do movimento uniformemente acelerado e a descoberta da trajetória parabólica dos projéteis, justificam plenamente o veredito (MARICONDA, 2006, p.268).

A Matemática apresentou um avanço interessante e promissor com as contribuições de René Descartes (1596 - 1650), principalmente pela criação do plano cartesiano. Por meio do plano cartesiano a geometria avançou consideravelmente, abrindo novas possibilidades para a Física.

Johannes Kepler (1571 - 1630) foi outro notório que ajudou para a consolidação da teoria do heliocentrismo. Kepler com a ajuda da geometria descreveu as órbitas planetárias. Estas orbitais obedeciam os padrões de uma elipse, onde o sol ocupa um dos focos.

Tycho Brahe, como vimos, era exímio observador. Mas não tinha competência matemática para trabalhar os dados de suas observações. Quando recebeu e examinou o livro de Kepler, logo reconheceu em seu autor um talento matemático singular, que ele, Tycho, não possuía, e de que necessitava para ajudá-lo a aperfeiçoar sua nova teoria planetária... Kepler estendeu a todos os planetas do sistema solar a lei da órbita elíptica, que descobrira para o planeta Marte, a qual ficou conhecida como sua 1.<sup>a</sup> lei e que assim se enuncia: Cada planeta descreve uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos (AVILA, 2010, p.6).

E foi ele, Kepler, o principal cientista a proporcionar o nascimento da Física Moderna.

Johannes Kepler foi uma das figuras chave da “Revolução Científica” dos séculos XVI e XVII. Com uma obra que se situa historicamente entre o heliocentrismo copernicano e a física newtoniana, foi ele que estabeleceu a ponte entre estes dois acontecimentos decisivos que marcaram o nascimento da ciência moderna (VELOSO, 2004, p.2).

Além do desenvolvimento da Matemática e da Física, as trocas de experiências e conhecimentos contribuíram para o nascimento da metodologia científica. Este novo campo ajudou a organizar os estudos e registros científicos.

### 1.1.5 Mecânica Clássica e Cálculo Diferencial

Em decorrência dos estudos sobre movimento de Galileu, Descartes, Kepler e outros matemáticos, Sir Isaac Newton (1643 - 1727), com o auxílio de Huygens, por meio de sua obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) influenciou toda a história da ciência. Apesar de vários conceitos já estarem pré estabelecidos e desenvolvidos por Galileu Galilei e predecessores, Newton conseguiu demonstrar o movimento dos corpos através de princípios matemáticos, estabelecendo assim as três leis do movimento (inércia, dinâmica, ação e reação).

Newton formulou uma teoria matematicamente consistente (para isso Newton desenvolveu o Cálculo Diferencial) e que resolveu de forma aparentemente definitiva a questão do movimento, chegando inclusive, magistralmente, a correta descrição do movimento dos planetas e dos corpos celestes em geral (SANTOS, 2012, p.41).

Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), com trabalhos distintos, também foram os responsáveis pelo desenvolvimento do Cálculo Diferencial, e responsáveis pela introdução desse conceito no mundo da Física, causando grande impacto. Assim sendo, através do Cálculo Diferencial foi possível obter mais precisão em seus resultados, promovendo uma nova perspectiva ao mundo científico.

“Nos estudos de Newton sobre cálculo estão presentes dedução de métodos, fórmulas, regras e algoritmos, sendo depois ilustrados, com o propósito de encontrar uma diferenciação direta sem o menor esforço.” (BARON, 1985, p.5).

Além da Mecânica Newtoniana, nome que recebeu os estudos de Newton, podemos encontrar outros dois tipos de mecânicas relacionadas com a mecânica clássica, são elas: Mecânica Lagrangeana e a Mecânica Hamiltoniana.

### 1.1.6 Eletromagnetismo e o Cálculo Diferencial e Integral

O conhecimento de propriedades elétricas e magnéticas provinham desde a Grécia Antiga por meio de observações das pedras âmbar e magnetita. Ao fim da Idade Média noções sobre a eletricidade aumentaram, porém, somente entre 1500 e 1600, através de William Gilbert (1544 - 1603), iniciou-se o estudo sistêmico da eletricidade. Em 1785, Charles Augustin de Coulomb (1735 - 1806) conseguiu quantificar a eletricidade, passando de análises qualitativas para quantitativas, proporcionando a Joseph Bank (1743 - 1820) introduzir e experimentar a corrente contínua.

Hans Christian Oersted (1777 - 1825), ao acaso, em 1820, descobriu a relação entre a eletricidade e o magnetismo. Nos anos seguintes, André Marie Ampère (1775 - 1836), ótimo matemático francês, considerando as observações de Oersted propôs a primeira teoria matemática desse novo fenômeno, estabelecendo equações matemáticas para efeitos elétricos-magnéticos.

Contrariamente à maioria de seus contemporâneos que tentam reduzir o eletromagnetismo ao magnetismo, Ampère propõe um caminho bem diferente: a ação entre correntes elétricas. Assim, não segue o ponto de vista sugerido por Oersted, a saber, que “alguma coisa” gira ao redor do fio quando passa uma corrente constante por ele (CHAIB, 2007, p.316).

Michael Faraday (1791 - 1867) em 1831 e Joseph Henry (1797 - 1878) descobriram, separadamente, a relação inversa que Oersted observou, eles observaram a implicação do magnetismo na eletricidade, ou seja, que através do magnetismo pode-se obter corrente elétrica, descobrindo uma maneira de gerar eletricidade através do movimento, o que possibilitou a construção de inúmeros equipamentos para a aplicação deste fenômeno.

Assim, outros grandes nomes surgiram para contribuir com o desenvolvimento deste campo de estudo, Weber, Gauss, Siemens, etc. Nikola Tesla (1856 - 1943), por meio de umas das aplicações mais belas dos números complexos, a impedância, pode explicar e quantificar a corrente alternada. A corrente alternada hoje é considerada uma das maiores descobertas de todos os tempos devido ao tamanho de sua importância e sua aplicação.

A consolidação do eletromagnetismo veio por meio de um grande matemático, James Clerk Maxwell (1831 - 1879). Considerado um exímio matemático, ele fez uso do cálculo

diferencial e integral para a elaboração das equações de enlaçamento entre o magnetismo e a eletricidade, provando teoricamente que estes fenômenos estavam relacionados entre si.

A partir de 1864 dedicou-se a formular matematicamente as teorias de Faraday sobre o eletromagnetismo, conseguindo obter equações simples que permitiam descrever tanto os fenômenos elétricos quanto os magnéticos. São quatro equações diferenciais parciais que foram reveladas pela primeira vez em 1873, tendo sido conhecidas desde então como as “equações de Maxwell”. Ficou assim demonstrado que a eletricidade e o magnetismo fazem parte de uma mesma teoria... As equações de Maxwell foram um conjunto de quatro equações diferenciais lineares sobre o tempo e o espaço, aplicadas às grandezas ditas “eletromagnéticas” (OBERZINER, 2008, p.11).

Os estudos de Maxwell sobre as interações eletromagnéticas e a relação disso com a propagação da luz contribuiu para o desenvolvimento da relatividade, que discutiremos posteriormente.

### 1.1.7 Relatividade e Mecânica Quântica

Quase toda Física e Matemática discutidas até agora contribuíram para o desenvolvimento da Teoria da Relatividade, tendo como contribuintes iniciais Fresnel, Stokes, Fizeau e Maxwell (novamente). Entre os estudiosos relacionados à relatividade destaca-se Albert Abraham Michelson (1852 - 1931), físico experimental que foi responsável por medidas da velocidade da luz. Ele criou um aparelho chamado de interferômetro, o qual começou a utilizar para começar seus estudos para descrever/explicar a Teoria do Éter de Fresnel. Éter era uma entidade física responsável pela movimentação, interligação das ondas e dos objetos. Os resultados obtidos por Michelson sobre o éter não foram satisfatórios, tanto matematicamente quanto ao que ele esperaria observar, isso fez com que ele acreditasse que havia algo de errado entre a teoria original, seu aparelho e os resultados.

Michelson corrigiu a teoria, chegando às fórmulas que utilizamos até hoje. A diferença entre os tempos para a luz ir e voltar nos dois braços do interferômetro seria a metade do efeito previsto por Michelson. Portanto, a previsão correta seria um deslocamento de 0,04 franjas, e não 0,08. Michelson havia observado deslocamentos irregulares de 0,02 a 0,03 franjas, que atribuiu a erros experimentais. Portanto, os erros experimentais eram praticamente equivalentes ao próprio efeito que ele queria medir. O experimento era inválido, pois não tinha sensibilidade suficiente para detectar o efeito (MARTINS, 2015, p.23).

Edward W. Morley (1838 - 1923) se juntou a Michelson para construir um novo interferômetro mais preciso, e novamente por a prova e explicar a Teoria do Éter. Obtiveram dois resultados interessantes e mais precisos, mas que apenas poderiam ser explicados por teorias diferentes, alçando uma confusão nas mentes científicas, pois nem a teoria do

éter de Fresnel e nem a teoria do éter de Stokes podiam explicar os dados experimentais obtidos por Michelson e Morley. Em meio aos resultados experimentais de Michelson e Morley uma nova probabilidade para exploração foi aberta, conseqüentemente uma nova teoria foi proposta, uma teoria embasada em uma modelagem matemática mais adequada, a Teoria da Relatividade.

Lorentz e Poincaré tiveram contribuições muito importantes para o desenrolar dessa teoria, promoveram uma matemática de transformações, enfim, uma modelagem robusta, que junto com os pensamentos de Albert Einstein (1879 - 1955), principal nome desta teoria, foram capazes de fundamentá-la. A Teoria da Relatividade, mesmo com suas ideias e resultados sendo inadmissíveis para a época, ganhou importância, e é estudada e desvendada até hoje.

Outro campo da Física que surgiu devido as discussões provenientes do eletromagnetismo foi a Mecânica Quântica.

A pequena inconsistência teórica era a assim chamada não-invariância das equações de Maxwell; sua solução resultou, nada mais nada menos, do que no surgimento da Teoria da Relatividade... O enquadramento teórico desses fenômenos implicou outra revolução conceitual, que resultou na Física Quântica (DIONISIO, 2004, p.3).

Contemporânea à Física Relativista, a Física Quântica estava e está interessada em estudar as propriedades da luz. Estes estudos começam por Max Planck (1858 - 1947), com seus experimentos e pensamentos, o qual propôs que a energia contida em uma onda era quantizada, e que, somente com valores inteiros dessa “quantum” a energia entre as partículas poderiam ser transferidas. As ideias de Planck deixaram o mundo físico perplexo, abrindo caminho para o desenvolvimento da Física Quântica.

Einstein, com a explicação do “quantum” da luz através do efeito fotoelétrico, ganhou seu Prêmio Nobel em 1921. Robert Andrews Milikan (1868 - 1953) comprovando a teoria de Einstein por meio de experimentos, levou seu Nobel em 1923.

Dentro do estudo da dualidade da luz destaca-se Werner Heisenberg (1901 - 1976). Sem dizer aqui das contribuições de Compton, Dirac, Broglie, entre muitos outros que possuem representatividade neste campo.

### 1.1.8 Experimentação e Estatística

Os primeiros registros da utilização dos conceitos estatísticos aparecem na antiguidade, por volta 2000 a.C., em apontamentos dos impérios chinês, egípcio e romano. Estes impérios faziam uso de anotações para controle de população, mantimentos, entre outras coisas que eram de interesse para o Imperador.

O registro de informações perde-se no tempo. Confúcio relatou levantamentos feitos na China, há mais de 2000 anos antes da era cristã. No antigo Egito, os faraós fizeram uso sistemático de informações de caráter estatístico, conforme evidenciaram pesquisas arqueológicas (MEMÓRIA, 2004, p.11).

Com o desenvolvimento da sociedade, os estudos estatísticos foram retomados para aplicações em administrações públicas, devido a importância para determinação do comportamento da população (mortalidade, natalidade, crescimento, escolaridade, etc). Estas aplicações são perceptíveis até hoje, basta ver os levantamentos realizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, referência [18].

Entretanto, para a ciência que observa as leis do universo, a Física, as abstrações estatísticas começaram a aparecer no desenvolvimento da Astronomia. De acordo com MEMÓRIA (2004), os astrônomos, para lidar com o problema de conciliar observações discordantes, por exemplo, tomavam a média aritmética dessas observações.

Inspirada pela probabilidade de jogos de azar, estudados por Galileu Galilei, Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 - 1665), a Estatística começa a ganhar forma nos pensamentos e nas mãos de Jacob Bernoulli (1654 - 1705) e Abraham De Moivre (1667 - 1754). Estes estudos probabilísticos proporcionaram o desenvolvimento de métodos de tratamento de dados de observações, de onde surgiu a Teoria dos Erros.

Com uma estatística mais encorpada entraram em cena dois dos maiores matemáticos de todos os tempos, Pierre Simon, o Marquês de Laplace (1749 - 1827), e Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). O primeiro tem como maior contribuição a generalização do Teorema limite de De Moivre.

A maior contribuição de Laplace, na teoria de probabilidades, é hoje conhecida por teorema central (fundamental) do limite e pode ser descrita como uma generalização do teorema do limite de De Moivre. Na sua forma clássica, o Teorema Central do Limite enuncia que:

“Qualquer soma ou média de variáveis aleatórias tem, para um grande número de termos, uma distribuição aproximadamente normal” (MEMÓRIA, 2004, p.17).

O segundo com um trabalho independente e um pensamento empírico, adotando como axioma que a média era o valor mais provável de ocorrer em observações que ocorressem com igual precisão várias vezes, o levou a enunciar o Princípio dos Mínimos Quadrados.

Com efeito, numa distribuição normal, a probabilidade dos erros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ocorrerem simultaneamente é máxima, quando a soma dos quadrados dos desvios ou erros for mínima. O valor obtido para que essa condição se verifique é a média aritmética das observações, que fica assim justificada como o melhor meio de se combinar as observações, se os erros seguem uma distribuição normal. O argumento de Gauss pode ser acusado de circular (MEMÓRIA, 2004, p.19).

E então, devido as observações e descoberta de Gauss, a curva normal de distribuição recebeu o nome de curva de Gauss.

Como ressaltado, os estudos de Gauss levaram em consideração observações de dados coletados várias vezes através de um procedimento preciso e idêntico. Apesar dos estudos de Gauss serem aplicados a todas as áreas, esta sistematização da observação lembra muito a Física Experimental.

Desde então, estes conceitos começaram a ser inseridos em estudos de experimentação, o que provou que a Estatística poderia promover estudos de fenômenos físicos.

## 2 Física Experimental

Neste capítulo serão tratados os tipos de experimentos, qualitativo e **quantitativo**, trazendo a diferença e a importância de cada um dentro da Física Experimental, do processo de ensino aprendizagem e para o desenvolvimento de tecnologias.

Imagine que ao realizar uma medição ou uma experimentação os resultados não são iguais em relação aos que se encontram nas especificações do produto, ou que a aceleração da gravidade no caso de uma experimentação de pêndulo simples seja um pouco diferente do resultado teórico. Como explicar esta disparidade? O resultado da medida é confiável? Estes são exemplos de questionamentos que podem surgir. Portanto, para ter uma melhor compreensão dos questionamentos provenientes das medições, serão abordados os elementos que são necessários para um bom ato de medição/experimentação dos resultados dentro da Física Experimental. Dentre eles, podem ser destacados de imediato, os algarismos significativos, notação científica, incerteza, tipos de erros, instrumentos de medição, medidas diretas e indiretas.

Portanto, aqui trata-se de uma preparação para a introdução dos conceitos matemáticos relacionados com a Física Experimental e seus resultados, para que seja enfatizada a importância da influência e aplicação da Matemática para a compreensão das circunstâncias reais.

### 2.1 Física Experimental como Ferramenta de Ensino

Dentro da Física Experimental pode-se observar dois caminhos a serem tomados para o ensino-aprendizagem. Um deles está ligado à Física Experimental qualitativa, que procura apresentar e observar os conceitos que envolvem um fenômeno, ou seja, ela usa de artifícios/observações visuais e verbais para a coleta de dados que envolvem a pesquisa no seu contexto natural. A Física Experimental qualitativa geralmente não requer ferramentas de medição, seu foco são as ferramentas para a reprodução e observação.

O segundo é a Física Experimental quantitativa, tratada com maior abrangência e rigor por este trabalho. Trata-se de uma pesquisa laboratorial na qual o interesse é replicar várias vezes, dentro de um mesmo padrão, um determinado fenômeno para poder então coletar dados através de instrumentos específicos, para que se possa identificar, compreender e compará-lo com os valores teóricos da grandeza medida. Também é possível através dessa atividade elaborar conceitos e metodologias para utilização dos fenômenos e resultados obtidos para o desenvolvimento das atividades em que este fenômeno está presente, ou para o desenvolvimento das atividades de diversos profissionais, como por



exemplo, na engenharia pode-se determinar rigidez, pontos de cisalhamento de materiais.

No dia-a-dia, determinar conceitos elétricos e entendê-los podem ajudar o aluno a consertar algum aparelho ou instalação elétrica, entre outras possibilidades.

A pesquisa quantitativa, que tem suas raízes no pensamento positivista lógico, tende a enfatizar o raciocínio dedutivo, as regras da lógica e os atributos mensuráveis da experiência humana. Por outro lado, a pesquisa qualitativa tende a salientar os aspectos dinâmicos, holísticos e individuais da experiência humana, para apreender a totalidade no contexto daqueles que estão vivenciando o fenômeno (GERHARDT E SILVEIRA, 2009, p.32).

Na Física Experimental quantitativa além das ferramentas para a reprodução, também é necessário usar ferramentas para poder medir e quantificar os fenômenos. Devido a comparação entre medidas feitas por um observador, outros conceitos são incluídos em uma experimentação quantitativa. Estes conceitos são necessários para esclarecer, descrever, entender e justificar os resultados atingidos na experimentação, que geralmente não são exatos devido as influências externas que permeiam o ato de medir (aparelho de medição, observador, condições locais, entre outras).

Os conceitos mais adequados para a explicação dos resultados de uma experimentação quantitativa estão no Cálculo e na Estatística, os quais trabalham com a análise de dados, proporcionando justificar a incerteza relacionada com a grandeza medida.

A existência de laboratórios nas instituições de ensino, sendo de uso obrigatório em cursos universitários, e de alternativas de laboratórios virtuais, ou, roteiros com materiais de baixo custo para algumas experimentações, junto com a ampla discussão do ensino-aprendizagem da Física e áreas afins, mostram que há uma mobilização do mundo científico para a inclusão e uso de novas metodologias e ferramentas no ensino, como por exemplo, a utilização da física experimental e os meios para utilizá-la em sala, afim de ampliar meios de propagar e atingir os objetivos do ensino, especialmente, conforme debatido aqui tanto da Física como da Matemática.

Adentrar no mundo das experiências pode ser uma aventura, e é sempre bom estar preparado para as aventuras, assim alguns conceitos e teorias devem ser retomadas para o bom andamento e entendimento de suas utilizações no ato da experimentação. Dessa forma, seguem algumas discussões nos capítulos e seções posteriores que contribuem nesse sentido.

## 2.2 Conhecimentos Pré Experimentação

Para que o ato de realizar experimentos dentro da Física não seja um ato corriqueiro e com pouco sentido é preciso ter uma visão geral do que está envolvido nesta atividade

para então, serem empregados corretamente as teorias físicas e matemáticas. Desta maneira, na próxima seção podem ser encontrados vários elementos que estão presentes em uma experimentação.

### 2.2.1 Algarismo Significativo e Notação Científica

Um fato importante para ter uma padronização de um estudo é fazer uso da notação científica e dos algarismos significativos, como também utilizar o Sistema Internacional de Medidas (SI), ou indicar o sistema que está sendo utilizado no estudo da experimentação ou do trabalho realizado. Deve-se também ter clareza em qual unidade está se trabalhando e calculando cada grandeza, por exemplo, pode-se medir em centímetros, porém é necessário transformar para metros quando for realizar algum cálculo para poder utilizar o SI e as transformações de unidades mais corriqueiras.

Quando se fala em algarismo significativo e notação científica sabe-se que estas noções matemáticas estão interligadas, pois uma complementa a outra. Utilizam-se algarismo significativo e notação científica para padronizar, melhorando a visualização e escrita das grandezas envolvidas. A utilização desses conceitos também ajuda a relacionar mais rapidamente cada uma das grandezas ou o que o experimento envolve como um todo. O uso desses dois conceitos também melhora a noção dimensional de grandezas e fenômenos, como por exemplo, quando se estuda eletromagnetismo utiliza-se padrões de medidas muito pequenos, padrões na casa de potências  $10^{-6}$ ,  $10^{-9}$ , e ainda menores, e quando se estuda astronomia verifica-se o uso de potências de  $10^6$ ,  $10^9$ , e ainda maiores. Então, compreender estes dois conceitos facilita a observação e medição de grandezas e compreensão dos fenômenos.

Os algarismos significativos são os algarismos da esquerda para a direita, com o primeiro diferente de zero, que definem a grandeza, assim, podemos ter um, dois, três, ...,  $n$  algarismos significativos para definir uma grandeza, usualmente utiliza-se no máximo três, porém isso não é algo que não possa ser modificado. A notação científica vem descrita através de potências de 10 que as vezes recebem algumas nomeações e símbolos específicos. Definida a quantidade de algarismos significativos podemos ter potências negativas ou positivas da intensidade que descreve a grandeza, no caso que devemos diminuir o número, tem-se uma potência positiva, caso contrário tem-se uma potência negativa, ambas as condições na quantidade de vezes que tivermos que dividir ou multiplicar por 10, respectivamente.

### 2.2.2 O Erro

Erro é a qualidade daquilo que é inexato, incorreto. Aquilo que é incorreto não é interessante para a Física Experimental (a não ser para ensinar o caminho que não deve

ser percorrido). O que é incorreto prejudica os resultados, tornando a análise do fenômeno equivocada.

Portanto, o erro deve ser identificado e se possível eliminado, ele não deve ser aceito ou ignorado, sua identificação é primordial para se obter bons resultados, resultados mais próximos de um valor verdadeiro, para isto devemos conhecer alguns procedimentos que podem proporcionar erros, para reconhecê-los no momento da realização de uma experimentação. Enfim, o erro pode ser corrigido, diferentemente da incerteza.

### 2.2.3 A Incerteza

Incerteza, formalmente definida em um dicionário, é a falta de certeza, ou, algo incerto, que por sua vez é algo impreciso, que traz dúvidas, pouco nítido, por fim algo variável.

Dentro da estatística de coleta e análise de dados, a incerteza também pode ser reconhecida como sendo um “erro”, palavra esta que talvez seja muito abrupta e que possa distorcer o estudo que é realizado, trazendo um desconforto para quem procura entender este conceito.

Logo, no desenvolvimento dessa dissertação será usado o termo incerteza ao invés de erro, que é comumente utilizado em outros materiais, para um maior conforto, visto que suas definições formais se adequam a realidade deste estudo, pois aqui não há a intenção de apontar erros, e sim de justificar porque os valores obtidos por experimentações (pesquisas ou por coleta de dados) não são absolutos/verdadeiros e sim variáveis, tendo sempre uma margem na qual podemos “confiar”.

Para a análise estatística, diferencial e integral, é fato que todas as decisões tomadas por uma pessoa carregam uma dúvida, se é a melhor, se está correta, ou se poderia tomar outro caminho mais preciso para chegar aos objetivos de seus estudos.

“Toda medida está sujeita a incertezas que podem ser devidas ao processo de medição, às características dos equipamentos utilizados e às habilidades e limitações do operado.” (CORRADI, 2008, p.18).

Dentro de estudos e processos que utilizam a análise de dados, esta incerteza também está presente. Alguns desses processos estão, por exemplo, relacionados com a Física Experimental, que através da coleta de dados, seja por fatores como calibração, precisão, instrumentador, entre outros, não é possível aferir o valor absoluto/verdadeiro da(s) grandeza(s) medida(s). Nesta perspectiva de coleta de dados é possível vê-lo sendo implementado também em pesquisas eleitorais como sendo uma margem de erro para mais ou para menos, que neste caso é a margem de incerteza da pesquisa, como mostra a Figura 1.

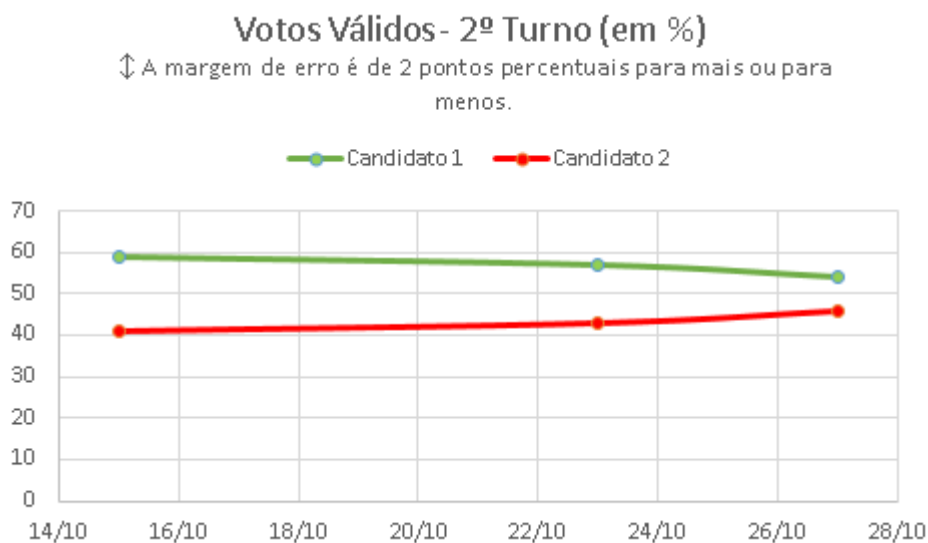


Figura 1 – Pesquisa fictícia de eleições. Fonte: Autor.

Também é possível observar padrões de incertezas e erros em uma construção civil, onde geralmente os cômodos construídos possuem dimensões ligeiramente diferentes dos projetos. Estes casos enfatizam a presença desta noção em várias atividades humanas.

É importante saber também, que cada tipo de pesquisa, cada metodologia para coleta de dados, tem seus fatores que proporcionam a incerteza, como no caso da pesquisa de intensão de voto, pode ser renda familiar, local onde mora, entre outros, este tipo de análise que é uma análise mais qualitativa não será tratado neste trabalho.

Na física: os fatores temperatura, massa, velocidade, extensão, dilatação, força, etc, são variáveis, pois, sob certas circunstâncias, assumem determinado valor e podem ser mensuráveis.

Nas ciências sociais: classe social, raça, renda, escolaridade, etc., são exemplos de variáveis, pois, seguindo o mesmo raciocínio, também podem ser mensurados. Para Marconi e Lakatos (2003, p. 137) variável pode ser classificada como “[...] medida; uma quantidade que varia; um conceito operacional, que contém ou apresenta valores; aspecto, [...] ou fator, discernível em um objeto de estudo e passível de mensuração (HEERDT, 2007, p.59).

Este trabalho é voltado para a análise quantitativa e suas aplicações na Física Experimental, na qual trabalha-se com dados obtidos através de medidas por instrumentos apropriados e condições controladas e favoráveis.

Diferentemente da pesquisa qualitativa, os resultados da pesquisa quantitativa podem ser quantificados. Como as amostras geralmente são grandes e consideradas representativas da população, os resultados são tomados como se constituíssem um retrato real de toda a população alvo da pesquisa. A pesquisa quantitativa se centra na objetividade. Influenciada pelo positivismo, considera que a realidade só pode ser compreendida com

base na análise de dados brutos, recolhidos com o auxílio de instrumentos padronizados e neutros. A pesquisa quantitativa recorre à linguagem matemática para descrever as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, etc. A utilização conjunta da pesquisa qualitativa e quantitativa permite recolher mais informações do que se poderia conseguir isoladamente (FONSECA, 2002, p.20).

## 2.2.4 Medir

O ato de realizar uma análise quantitativa na Física Experimental é nada mais que realizar medidas e analisá-las. Medir significa comparar um objeto, fenômeno, situação com determinada grandeza. Quando é realizada uma medida da altura de uma pessoa é comparado seu tamanho com um instrumento que é projetado para este tipo de ação, ou seja, está sendo coletada uma comparação entre as grandezas de mesma natureza, onde o resultado será um valor que dependerá da precisão do instrumento.

Medir uma grandeza significa compará-la com uma outra, de mesma natureza, escolhida como unidade. O resultado dessa comparação, denominado medida da grandeza, contém as seguintes informações: o valor da grandeza, a precisão da medição - expressa pelo número de algarismos significativos e pela incerteza, e a unidade (CORRADI, 2008, p.18).

Este ato de comparação enfatiza que toda medida está sujeita a incerteza por diversas razões, algumas já mencionadas. O que leva a pensar que algumas dessas incertezas podem realmente ser provenientes de erros propriamente ditos. Por este motivo, é de extrema importância e necessário ter muito cuidado no ato de medir, pois assim pode-se eliminar os erros, sobrando somente a incerteza.

Depois de todos os cuidados tomados, falta analisar o tipo de relação entre a(s) grandeza(s) medida(s) e a(s) grandeza(s) a ser(em) obtida(s), para então aplicar as teorias corretas para a obtenção da incerteza, o que será debatido ao longo deste trabalho.

### 2.2.5 Tipos de Erros

Fonte de Incerteza	Contribuição para a incerteza do resultado
Objeto da medição, ou, equipamento a calibrar	- Resolução finita, facilidade de leitura; - Estado de conservação; - Instabilidade das leituras; - etc.
Instrumento(s) de medição, ou padrão usado	- Incerteza devida à calibração; - Afastamento do “padrão ideal”; - Deriva ao longo do tempo; - etc.
Método de medição utilizado	- Adequabilidade do método ao fim em vista; - Efeito de carga, largura de banda, fugas; - Aproximações inseridas no modelo da medição; - etc.
Operador	- Treino, formação, experiência; - Paralaxe, capacidade visual; - Leitura e registro de valores, tempo de reação; - etc.
Condições ambientais	- Temperatura; - Humidade; - Pressão atmosférica; - Poeiras; - Vibrações; - etc.

Tabela 1 – Fontes de Incerteza. Fonte: CABRAL, 2004 (alterado).

Segundo a Tabela 1, há várias fontes que podem provocar a incerteza, porém algumas delas devem ser tratadas como erros propriamente ditos, pois eles podem ser eliminados favorecendo uma medição coerente. A seguir, são apontadas sugestões para identificação dos erros para se ter um procedimento mais limpo na experimentação.

Erro **primário**, é um erro relacionado ao conhecimento e capacidade de um experimentador seguir ou montar um roteiro experimental, este erro também pode estar relacionado com a habilidade ou conhecimento de manuseio de certos instrumentos de medida. Este tipo de erro inocente compromete ou inviabiliza a execução do experimento, a sua identificação e eliminação é vital para uma experimentação.

A operação correta de instrumentos de medidas é de vital importância na vida de um cientista. A operação do aparelho pode afetar o resultado obtido. Além disto, mesmo que operado com eficiência, é preciso saber o grau de confiabilidade do aparelho utilizado e como ele se adapta ao experimento a ser executado (CORRADI, 2008, p.25).

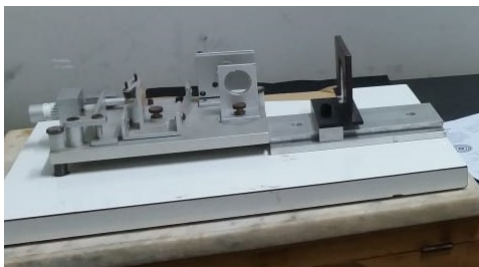
Para que este tipo de erro não esteja presente é necessário entender o que se quer medir, ler manuais dos equipamentos, assistir vídeos, entre outros. Tem-se como exemplo deste erro o manuseio de um multímetro, representado na Figura 2, pois dependendo de como for utilizado, ou seja, se a posição da chave não estiver na posição de medição correta

para a grandeza que se quer medir, serão obtidos resultados indesejados ou até mesmo danificar o aparelho e comprometer as medições futuras.



Figura 2 – Multímetro. Fonte: Autor.

Erro **sistêmico**, é outro tipo de erro, ele consiste em alguma distração da parte do experimentador, esta distração pode ser na calibração do instrumento ou ausência da mesma, como por exemplo o nivelamento do setup para a experimentação de Mychelson-Morley (Figura 3a), ou da mesma forma do trilho de ar (Figura 3b) para experimentos de dinâmica.



(a) Setup Mychelson e Morley para experimentos ópticos.



(b) Trilho de ar para experimentos de dinâmica.

Figura 3 – Instrumentos para experimentação. Fonte: Autor.

Este tipo de erro também pode estar atrelado a escala utilizada e origem, entre outros pontos. A diferença é que este tipo de erro, quando presente em uma experimentação, não impossibilita sua execução, mas proporcionará resultados muito aquém do esperado, do absoluto, do verdadeiro. É possível detectar este tipo de erro para eliminá-lo e diminuir os prejuízos, pois seus resultados podem levar o cientista para um caminho falso.

Os erros sistemáticos são causados por fontes identificáveis, e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Erros sistemáticos fazem com que as medidas feitas estejam consistentemente acima ou abaixo do valor real, prejudicando a **exatidão** (“accuracy”) da medida. (CRUZ, 1997, p.13)

Por fim a incerteza, também conhecida como erro **aleatório**, é algo intrínseco do experimento, do ato de medir. A incerteza aqui estudada pode ser proveniente da precisão da leitura do observador, da precisão de medida do instrumento, das condições ambientais, como densidade do ar, atrito, força de arrasto, entre outros. Como já mencionado é algo que não é possível ser eliminado, ou seja, se houver experimentação haverá confronto com este “problema”, e para este confronto existem algumas teorias e técnicas estatísticas, diferencial e integral para estimar esta incerteza, proporcionando confiança aos resultados.

Os erros aleatórios são flutuações, para cima ou para baixo, que fazem com que aproximadamente a metade das medidas realizadas de uma mesma grandeza numa mesma situação experimental esteja desviada para mais, e a outra metade esteja desviada para menos. Os erros aleatórios afetam a **precisão** (“precision”) da medida (CRUZ, 1997, p.13).

Nas duas últimas citações aparecem correlacionados, com os tipos de erros ou incertezas, dois novos termos, precisão e exatidão. Estes termos são muito importantes já que são influenciados por erros e incertezas, por este motivo a compreensão deles é relevante.

O primeiro, a **precisão**, influenciada por erros sistêmicos, está relacionada com a quantidade de medidas realizadas de uma grandeza e da proximidade entre estas medidas, podendo um experimento ser preciso quando os resultados convergem para um valor, ou não, quando os resultados divergem entre eles.

O conceito do segundo, a **exatidão**, está entrelaçado com o valor verdadeiro, quanto melhor as condições para a experimentação maior a possibilidade de se aproximar do valor verdadeiro.

Entretanto, uma coleta de medidas pode ser precisa mas não exata, ou vice-versa, a Tabela 2 e a Figura 4 ilustram a relação entre a precisão e a exatidão.

Medidas da largura (210mm) de uma folha sulfite A4 em milímetros (mm)						
Medidas	1	2	3	4	5	Precisão x Exatidão
<b>Grupo 1</b>	225	226	225	224	227	Preciso, mas não exato
<b>Grupo 2</b>	206	212	215	200	225	Nem exato e nem preciso
<b>Grupo 3</b>	210	211	209	210	208	Exato e Preciso

Tabela 2 – Dados largura (210mm) folha sulfite A4 padrão. Fonte: Autor.

## 2.2.6 Instrumentos de Medição

O entendimento e obtenção da incerteza de uma medida, realizada através de uma experimentação, está intimamente relacionado com os tipos de instrumentos que são empregados para a medição, logo o entendimento de funcionamento do aparelho e das especificações de fábrica são importantes para uma análise aprofundada. Assim devido a



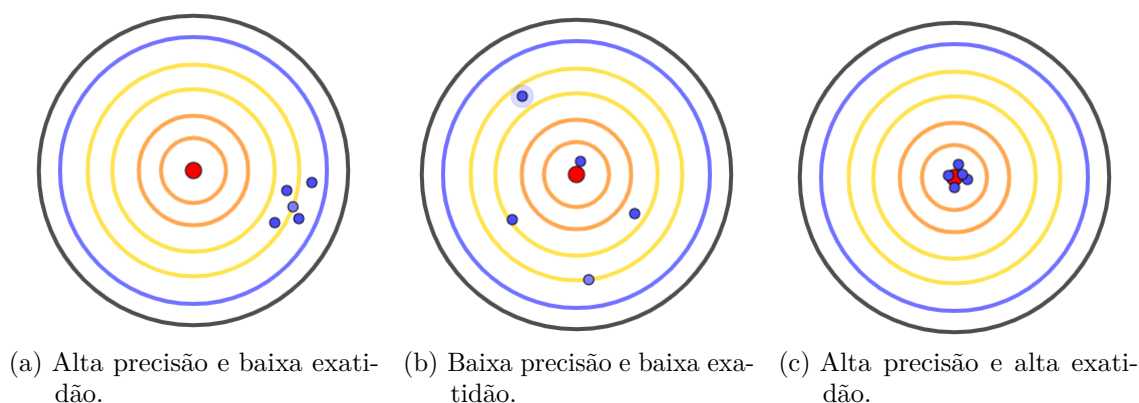


Figura 4 – Relação entre precisão e exatidão. Fonte: Autor.

variedade de instrumentos e métodos de utilização, e também por este tipo de entendimento e aprofundamento não influenciar nos resultados do processo de ensino aprendizagem no ensino médio, este tópico contempla somente uma visão superficial sobre estes instrumentos. Para mais aprofundamento sugerimos a leitura da referência [8].

Entender as diferenças e suas melhores aplicações é um fato que pode ser inicializado no ensino médio, como por exemplo, que há diferentes instrumentos para determinar a medida da mesma grandeza, para este caso pode-se relacionar o metro, o Global Positioning System (GPS) e o paquímetro, onde todos são utilizados para determinar a medida de comprimento, sendo o GPS para longos comprimentos, metro para curtos e médios, e paquímetro para pequenas medidas. Também há aparelhos que servem para determinar diversas medidas, como o multímetro.

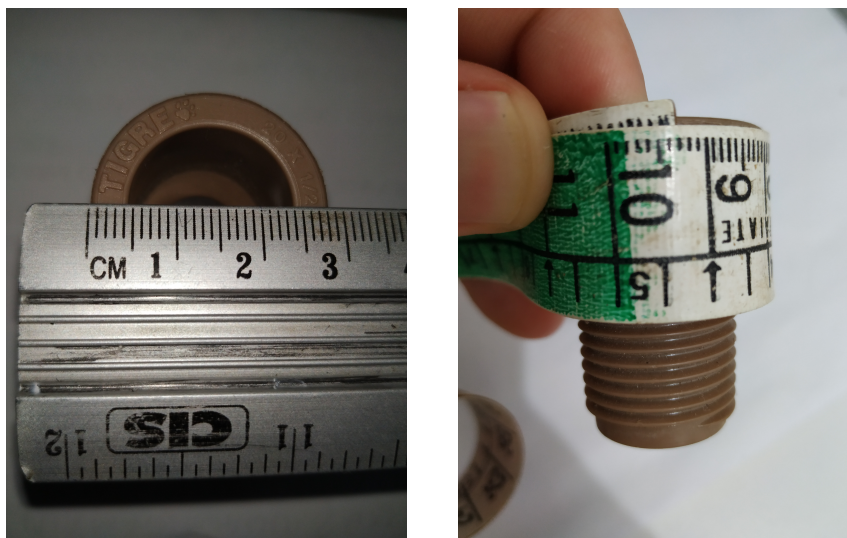
Outro fato importante, de acordo com CABRAL (2004) é que em cada instrumento está embutido e estabelecido os limites esperados para as incertezas contidas nas medições executadas por ele. Estes limites são estabelecidos por normas elaboradas por instituições nacionais ou internacionais, como Associação Brasileira de Normas e Técnicas (ABNT) ou Comissão Eletrônica Internacional (IEC). Os limites de tolerância entre instrumentos analógicos e digitais são diferentes, o primeiro segue uma normalização estabelecida pelos órgãos competentes, alguns já mencionados, quanto o segundo tem suas tolerâncias estabelecidas por seus fabricantes, obtidos geralmente por vários testes rigorosos.

Então, para um bom ato de medição é necessário saber qual instrumento é adequado para o experimento/processo a ser estudado, para que os resultados sejam coerentes ou para saber quais são os fatores que estão contribuindo para a discrepância dos resultados.

## 2.3 Medidas

Para se obter o comprimento de uma circunferência qualquer é possível utilizar duas metodologias diferentes, por exemplo, a Figura 5 relaciona estas duas maneiras, sendo

na Figura 5a é primeiramente obtido o raio ( $2\text{ cm}$ ) do cano e então aplicada a fórmula de comprimento da circunferência (neste caso  $2\pi r = 8,8\text{ cm}$ ), outra maneira esta relacionada na Figura 5b que a partir de uma fita métrica foi coletado um valor (neste caso  $9,3\text{ cm}$ ). Observe que no primeiro caso foi utilizada, além do instrumento de medida, uma fórmula para obter a medida procurada, ou seja, a medida procurada foi obtida *indiretamente*, já no segundo caso o valor coletado foi obtido *diretamente* do instrumento de medição.



(a) Medida raio interno de um cano. (b) Baixa precisão e baixa exatidão.

Figura 5 – Métodos de medição. Fonte: Autor.

Esta ilustração traduz muito bem o que quer dizer medidas **diretas** e **indiretas**. Entretanto, se ainda não for o suficiente pode-se usar as seguintes definições:

**Definição 1 (Medida Direta).** *Se a medida coletada independe de outras medidas, grandezas ou fórmulas, ou seja, se for obtida através da leitura direta do instrumento de medição, esta medida é denominada medida direta.*

**Definição 2 (Medida Indireta).** *Se a determinação de uma medida necessitar de outras medidas, grandezas ou fórmulas, ou seja, se forem necessárias metodologias além do instrumento de medição, esta medida é denominada medida indireta.*

### 2.3.1 Medidas Diretas: Incerteza e Análise

Em análises experimentais o procedimento para a coleta de uma medida é realizado através de várias repetições, geralmente acarretando valores diferentes (mesmo que sejam pequenos). Esta flutuação decorre do que já foi discutido anteriormente (incertezas) e que a Tabela 1 sintetiza bem.

Ao realizar uma **única** medida direta de uma grandeza pode-se utilizar maneiras diferentes para obter a incerteza relacionada com a medida. Porém, uma regra que se

sobressai e é muito utilizada é que a incerteza associada a uma medida direta deve ser a metade da divisão da escala do instrumento da medida. Utilizando as medidas obtidas da Figura 6 e analisando os instrumentos, temos que a medida mais a incerteza associada para o paquímetro, Figura 6b, e para a régua, Figura 6a, são respectivamente,  $(1 \pm 0,05) \text{ cm}$  e  $(1,05 \pm 0,005) \text{ cm}$ , pois a menor medida da régua é  $1 \text{ mm}$  e do paquímetro é  $0,1 \text{ mm}$ .



(a) Diâmetro de uma moeda através da régua.



(b) Diâmetro de uma moeda através do paquímetro.

Figura 6 – Comparativo de precisão e exatidão de uma régua e um paquímetro. Fonte: Autor.

Note que no exemplo acima, da medida do diâmetro da moeda através desses dois instrumentos foi apenas coletada uma única medida. Entretanto, para obter resultados mais coerentes o habitual é realizar várias medidas da mesma grandeza, como afirma CORRADI (2008, p.22). Logo, a metodologia mais adequada é a de utilizar métodos estatísticos como *média*, para se obter um valor central de acordo com os dados coletados, e o desvio padrão para estimar a incerteza proveniente a estas repetições, entretanto estes métodos estatísticos são direcionados para medidas diretas, para medidas indiretas é necessária a utilização desses métodos estatísticos e mais alguns outros.

### 2.3.2 Medidas Indiretas

Diferentemente das medidas diretas, as medidas indiretas não podem ser simplesmente relacionadas a uma única fórmula para a obtenção da incerteza relacionada com o tipo de medida realizada, pois pela Definição 2 a grandeza procurada está relacionada com outras grandezas medidas através de alguma lei, teorema, fórmula, ou seja, um tipo de relação. Dessa forma, é necessário conhecer esta relação para determinar a formulação da metodologia usada para a obtenção da incerteza.

---

O que pode ser adiantado aqui é que as metodologias para cálculo da incerteza relacionada a uma medida indireta irão utilizar, além dos métodos estatísticos básicos, métodos integrais e diferenciais para sua elaboração.

## 3 Métodos Estatísticos, Diferenciais e Integrais

### 3.1 Métodos Estatísticos - Estatística Básica

Na realização de um experimento é possível se deparar com duas situações para a determinação da estimativa de incerteza das medidas realizadas, uma que envolve análise estatística, chamada de TIPO A, e outra que não envolve análise estatística, conhecida como TIPO B.

Quando as observações não requerem realizações repetidas da grandeza observada, é utilizada a avaliação de incerteza do tipo B, suas medidas geralmente são tomadas de forma ocular, levando em consideração o equipamento utilizado no procedimento, podendo ser sofisticado ou não (como uma trena manual ou uma digital), podendo ter sua estimativa de incerteza na confiança da exatidão de quem observa e faz as medições, ou, usualmente pode-se também levar em consideração a menor medida/graduação que o instrumento apresenta para coleta de dados e tomar a metade da menor medida que o equipamento pode apresentar. Como por exemplo, balanças digitais e balanças mecânicas, Figura 7, onde a mecânica Figura 7b possui menor graduação  $1\text{ g}$ , e a digital Figura 7a possui menor graduação  $0,1\text{ g}$ .



(a) Balança digital.



(b) Balança mecânica.

Figura 7 – Balanças. Fonte: Autor.

Se a realização da experimentação levar em consideração várias repetições, sempre lembrando que estas repetições devem ser realizadas de forma controlada, haverá várias

medidas da mesma grandeza, o que cria a possibilidade de aplicação de métodos estatísticos.

Dentro desses métodos estatísticos temos o valor médio como um dos fundamentais para a realização dos outros procedimentos, como por exemplo o desvio padrão. O valor médio também será entendido, aqui neste trabalho, como o valor mais provável obtido por meio das medições. Além disso por meio de análises de valores médios também poderá ser obtido o valor mais provável para a grandeza procurada.

As discussões se iniciaram pela média pois ela é a ferramenta que norteia os estudos estatísticos que compõe os estudos de análises experimentais com coleta de dados, e seguirá com outras definições e resultados pertinentes.

**Média** é definida como o valor que mostra para onde se concentram os dados de uma distribuição, como o ponto de equilíbrio das frequências em um histograma.

Dentro deste conceito, podemos ter a média aritmética, média harmônica, média ponderada, média geométrica, média quadrática entre outras. Cada uma dessas médias tem uma especificidade, aqui serão apresentadas apenas as definições de média aritmética e média quadrática, pois são as mais utilizadas, não só em nosso cotidiano mas também para as estimativas de incertezas.

A média aritmética é a mais comum dentre as citadas, é considerada como sendo uma medida central das medidas obtidas.

**Definição 3 (Média Aritmética).** *Seja  $n$  o número total de valores e  $x_i$  cada valor, em que  $i = 1, 2, \dots, n$ . Média Aritmética, denotada por  $\bar{x}$ , é a razão dos somatório das medidas pela quantidade de medidas, isto é,*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3.1)$$

**Exemplo 1.** *Em um experimento de movimento retilíneo uniforme em um trilho de ar, são obtidas 5 medidas de tempos, em segundos, para 3 diferentes distâncias, que são apresentadas na Tabela 3:*

Distância	Tempo 1	Tempo 2	Tempo 3	Tempo 4	Tempo 5
0 cm – 10 cm	0,25	0,23	0,21	0,25	0,26
10 cm – 20 cm	0,21	0,26	0,27	0,24	0,24
20 cm – 30 cm	0,24	0,27	0,22	0,22	0,20

Tabela 3 – Dados experimentais movimento retilíneo com uso do trilho de ar. Fonte: Autor.

*Determine a média aritmética de cada uma destas distâncias.*

**Solução:**

Segue na Tabela 4 os resultados procurados.

Distância	Média Aritmética do Tempo (s)
0 cm – 10 cm	$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{0,25 + 0,23 + 0,21 + 0,25 + 0,26}{5} = 0,240$
10 cm – 20 cm	$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{0,21 + 0,26 + 0,27 + 0,24 + 0,24}{5} = 0,244$
20 cm – 30 cm	$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{0,24 + 0,27 + 0,22 + 0,22 + 0,20}{5} = 0,230$

Tabela 4 – Média aritmética dos dados da Tabela 3. Fonte: Autor.

**Definição 4 (Média Quadrática).** *Seja  $n$  o número total de valores e  $x_i$  cada valor, em que  $i = 1, 2, \dots, n$ . Média Quadrática, denotada por  $\langle x \rangle$ , é a raiz da razão do somatório das medidas ao quadrado pela quantidade de medidas, isto é,*

$$\overline{x^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}. \tag{3.2}$$

**Exemplo 2.** *Levando em consideração os dados da Tabela 3, determine a média quadrática dos resultados dessa experimentação.*

**Solução:**

Segue na Tabela 5 os resultados procurados.

Distância	Média Quadrática do Tempo(s)
0 cm – 10 cm	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{5}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5}} = \sqrt{\frac{(0,25)^2 + (0,23)^2 + (0,21)^2 + (0,25)^2 + (0,26)^2}{5}} = 0,241$
10 cm – 20 cm	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{5}} = \sqrt{\frac{(0,21)^2 + (0,26)^2 + (0,27)^2 + (0,24)^2 + (0,24)^2}{5}} = 0,245$
20 cm – 30 cm	$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{5}} = \sqrt{\frac{(0,24)^2 + (0,27)^2 + (0,22)^2 + (0,22)^2 + (0,20)^2}{5}} = 0,231$

Tabela 5 – Média quadrática dos dados da Tabela 3. Fonte: Autor.

Comparando os resultados dos Exemplos 1 e 2 é possível notar, neste caso, uma pequena diferença, o que pode melhorar as estimativas de incerteza de uma grandeza. A média quadrática é muito útil nos casos em que os valores seguem uma distribuição simétrica centrada no valor zero, onde a média aritmética possui valor nulo (zero). Exemplo disso são as funções senoidais, que no caso da Física podemos encontrar em sistemas osciladores, como pêndulo, sistema massa-mola, corrente alternada, entre outras.

Perceba que o resultado acima ainda é um trabalho com valores das medições e não realizamos as possíveis dispersões relacionadas com a coleta dos dados de uma

grandeza em um experimento, embora esses valores sejam importantes eles são apenas parte do processo para um resultado ainda mais relevante. Assim, é necessário introduzir novos conceitos conhecidos como dispersão ou variação de um conjunto de valores. Dentro destes conceitos, utilizados para a realização da estimativa de incerteza experimental, neste trabalho serão destacados a variância e o desvio-padrão, este último também ajuda na análise probabilística dos problemas.

**Definição 5 (Variância).** *Seja  $n$  o número total de valores e  $x_i$  cada valor, em que  $i = 1, 2, \dots, n$ . Variância, denotada por  $Var$ , é a razão do somatório das diferenças das medidas com a média aritmética dessas medidas ao quadrado pela quantidade de medidas, isto é,*

$$Var(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (3.3)$$

**Exemplo 3.** *De acordo com a Tabela 3, (c) determinar a variância das leituras realizadas.*

**Solução:**

*Segue na Tabela 6 os resultados pretendidos.*

Distância	Variância do tempo (s)
0 cm e 10 cm	$Var(x) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2$ $Var(x) = \frac{(0,25 - 0,24)^2 + (0,23 - 0,24)^2 + (0,21 - 0,24)^2 + (0,25 - 0,24)^2 + (0,26 - 0,24)^2}{5}$ $Var(x) = 0,00032$
10 cm e 20 cm	$Var(x) = \frac{(0,21 - 0,244)^2 + (0,26 - 0,244)^2 + (0,27 - 0,244)^2 + (0,24 - 0,244)^2 + (0,24 - 0,244)^2}{5}$ $Var(x) = 0,00042$
20 cm e 30 cm	$Var(x) = \frac{(0,24 - 0,23)^2 + (0,27 - 0,23)^2 + (0,22 - 0,23)^2 + (0,22 - 0,23)^2 + (0,20 - 0,23)^2}{5}$ $Var(x) = 0,00056$

Tabela 6 – Variância das leituras da Tabela 3. Fonte: Autor.

**Colorário 1.** *A Variância pode ser expressa como a diferença entre o quadrado da média quadrática e o quadrado da média aritmética, isto é,*

$$Var(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - (\bar{x})^2 = \langle x \rangle^2 - (\bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2. \quad (3.4)$$

**Demonstração:**



$$\begin{aligned}
Var(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n} ((x_1 + \bar{x})^2 + (x_2 + \bar{x})^2 + \cdots + (x_n + \bar{x})^2) \\
&= \frac{1}{n} ((x_1^2 + \bar{x}^2 - 2x_1\bar{x}) + (x_2^2 + \bar{x}^2 - 2x_2\bar{x}) + \cdots + (x_n^2 + \bar{x}^2 - 2x_n\bar{x})) \\
&= \frac{1}{n} ((x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + n\bar{x}^2 - 2\bar{x}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n (x_i^2) + n\bar{x}^2 - 2\bar{x} \frac{n}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n (x_i^2) + n\bar{x}^2 - 2n\bar{x}^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \bar{x}^2 \\
&= \overline{x^2} - \bar{x}^2
\end{aligned}$$

□

**Definição 6 (Desvio Padrão).** *O Desvio Padrão é a raiz da variância.*

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}. \quad (3.5)$$

**Exemplo 4.** *De acordo com o Exemplo 3 determine o valor do desvio padrão de cada dado coletado:*

*Segue na Tabela 7 os resultados pretendidos.*

Distância	Variância do Tempo (s)
0 cm – 10 cm	$\sqrt{Var(x)} = \sqrt{0,00032} = 0,0179$
10 cm – 20 cm	$\sqrt{Var(x)} = \sqrt{0,00042} = 0,0205$
20 cm – 30 cm	$\sqrt{Var(x)} = \sqrt{0,00056} = 0,0237$

Tabela 7 – Desvio Padrão das leituras da Tabela 3. Fonte: Autor.

A utilidade do desvio padrão, como medida, está na confiabilidade que ele proporciona em relação à dispersão dos dados de um conjunto, veja que diferentemente da variância a medida apresentada pelo desvio padrão retoma a unidade relacionada à grandeza medida.

Este fato importante reflete no intervalo de confiabilidade de uma distribuição normal, assim mostrando sua importância como uma estimativa de incerteza.

De fato, se as fontes de incerteza são pequenas e aleatórias, num conjunto de muitas medidas, os valores estarão distribuídos em torno do valor médio, seguindo uma distribuição normal (gaussiana). Nesse caso, aproximadamente 68% dos resultados estão dentro de uma distância  $\sigma_x$  do valor médio, e 95% dentro de  $2\sigma_x$ . É isso que nos permite, na prática, adotar o desvio padrão como uma boa estimativa de erro ou incerteza de um conjunto de medidas. (MUNIZ, 2011, p.14)

## 3.2 Métodos Estatísticos - Integral e Diferencial

Os resultados propostos nesta seção são decorrente da análise de quatro referências, onde a Subseção 3.2.1 e 3.2.2 tem a referência [17] como base, a Subseção 3.2.3 foi obtida da análise conjunto das referências [30] e [37], e encerrando as discussões desta Seção a Subseção 3.2.4 é estabelecida através da referência [38]. Vejamos estes resultados.

### 3.2.1 Função Densidade de Probabilidade

A Função Densidade de Probabilidade analisa a possibilidade de ocorrência de uma variável aleatória contínua ser obtida, ou seja, esta função trabalha em um intervalo que possui um número infinito de ocorrências.

**Definição 7.** *Seja  $X$  uma variável aleatória com conjunto de valores  $X(S)$ . Se o conjunto de valores for infinito não enumerável, então a variável é dita contínua.*

Apesar de análises experimentais terem uma quantidade discreta de possibilidades, isto é, a quantidade obtida experimentalmente depende do limite de medição do instrumento e sua exatidão, o que determina uma quantidade mensurável, geralmente esta quantidade é muito grande, como por exemplo em uma régua de 300 mm, com exatidão de décimo de milímetro, há 3000 resultados possíveis para a leitura nesta régua.

Em virtude do número de valores possíveis ser grande, e a inviabilidade de realizar uma quantidade de repetições para utilizar conceitos de variáveis discretas, utiliza-se o bom senso de buscar os conceitos de variável contínua para a compreensão desses problemas.

Para isso precisamos realizar análises em “subintervalos” contidos no intervalo das possíveis medidas, onde estes subintervalos sejam pequenos de modo que possuam valores ocorridos e valores possíveis. Segue-se uma definição coerente.

**Definição 8.** *Considere um intervalo com centro em  $x_i$  e comprimento  $\Delta x$  aberto em uma de suas extremidades e fechada na outra. Este intervalo pode ser representado por  $(x_i; \Delta x)$ . Por definição, ocorre o evento  $x_i$  se o resultado do processo é uma quantidade  $X_i$  tal que*

$$x_i - \frac{\Delta x}{2} \leq X_i < x_i + \frac{\Delta x}{2}. \quad (3.6)$$

Os valores de  $x_i$  e  $\Delta x$  devem ser tais que qualquer valor possível de  $X_i$  está incluído em apenas um intervalo.

Assim podemos considerar a seguinte definição e propriedades.

**Definição 9.** A Função Densidade de Probabilidade é a função que associa a cada  $x \in \mathbb{R}$  um número  $f(x)$  que deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$(i) f(x) \geq 0$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$$

Analisando esta definição segue que: (i) a menor ocorrência dentro desse intervalo deve ser nula; (ii) ao se somar todas as possibilidades/partes do intervalo que compreende a função densidade de probabilidade como um todo, o valor corresponderá a 1 (um). Esta última é reconhecida como a normalização da função probabilidade.

Fato é que, é necessário conhecer essa função para poder aplicar estes resultados. Para isso é necessário verificar o comportamento/frequência da distribuição dos dados coletados experimentalmente e esta informação é valiosa. De acordo com vários estudos, a verificação do padrão da distribuição indica a teoria que mais se enquadra ao estudo.

Dentre estas várias teorias que nasceram e se concretizaram, uma delas é a Distribuição Normal, também conhecida como Distribuição Gaussiana. Uma distribuição corriqueiramente visualizada nos comportamentos de fenômenos naturais.

Essas características que podem ser vistas numa distribuição gaussiana norteiam este estudo, ou seja, é um ponto importante para entender o conceito de incerteza, probabilidade de ocorrência, e fortalecer os estudos experimentais.

### 3.2.2 Distribuição Normal

**Definição 10.** Uma variável aleatória contínua  $x$  tem distribuição Normal se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (3.7)$$

onde  $\bar{x}$  é a média,  $\sigma > 0$  é o desvio padrão, ou,  $\sigma^2$  é a variância, e são constantes.

Note que a distribuição normal se refere a uma probabilidade, isto é, a chance de ocorrer uma medida em um determinado intervalo. Esta função pode também ser reconhecida por outros nomes, como função de Laplace-Gauss, ou, função normal de erros.

Uma característica interessante é o gráfico de uma distribuição normal, por sua semelhança a um sino, Figura 8, ele é denominado como tal. A representação gráfica da Distribuição Gaussiana ajuda a compreender algumas de suas propriedades.

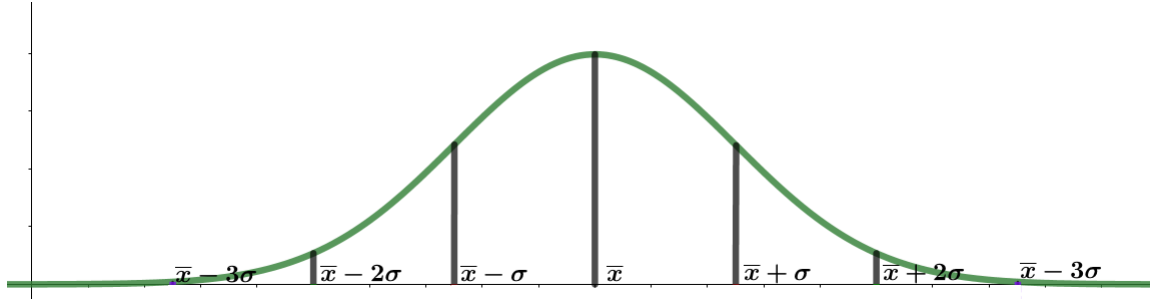


Figura 8 – Representação Gráfica da Distribuição Normal (Gaussiana). Fonte: Autor.

### Propriedades de uma Curva Gaussiana:

[1]  $G(x)$  é simétrica em relação à reta vertical,  $x = \bar{x}$ ;

Prova:

Seja  $k, -k \in \mathbb{R}$ , onde  $-k$  é o oposto de  $k$ . Substituindo-os na função, ou seja, verificar  $G(\bar{x} + k)$  e  $G(\bar{x} - k)$  obtemos:

$$G(\bar{x} + k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}+k-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sigma}\right)^2},$$

$$G(\bar{x} - k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-k-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sigma}\right)^2}.$$

Assim, segue que  $G(\bar{x} - k) = G(\bar{x} + k)$ , para  $k \in \mathbb{R}$ , mostrando a simetria em torno de  $\bar{x}$ .

[2]  $G(x)$  possui um máximo para  $x = \bar{x}$ ;

Prova: Segundo referência [35], podemos aplicar os testes da primeira e segunda derivadas.

Primeira derivada de  $G(x)$ :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow G'(x) = \frac{(x-\bar{x})e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}.$$

Segue que,

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\bar{x})e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} = 0 \Leftrightarrow (x-\bar{x})e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} = 0.$$

Note que temos apenas um caso,

$$x - \bar{x} = 0 \Rightarrow x = \bar{x}.$$

Portanto, somente  $x = \bar{x}$  é ponto crítico.

Segunda derivada de  $G(x)$ :

$$G''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left( \frac{(x - \bar{x})^2 e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^4} - \frac{e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \right).$$

Substituindo  $\bar{x}$  na equação obtemos:

$$G''(\bar{x}) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}.$$

Como  $\sigma > 0$ , então  $\sigma^3 > 0$ , assim segue que  $G''(\bar{x}) < 0$ , portanto pelo teste da segunda derivada  $\bar{x}$  é ponto de máximo.

[3]  $G(x)$  tende a zero quando  $x$  tende para  $\pm\infty$ .

Prova: Basta notar que quando  $x \rightarrow \infty$  o termo  $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \rightarrow 0$ , dessa forma

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) \rightarrow 0.$$

De modo análogo, isso acontece para  $x \rightarrow -\infty$ .

[4]  $G(x)$  tem dois pontos de inflexão cujas abscissas valem  $\bar{x} + \sigma$  e  $\bar{x} - \sigma$ .

Prova:

Para que  $\bar{x} + \sigma$  seja um ponto de inflexão de  $G(x)$ , devemos ter  $G''(\bar{x} + \sigma) = 0$ :

$$\begin{aligned} G''(\bar{x} + \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left( \frac{(\bar{x} + \sigma - \bar{x})^2 e^{-\frac{(\bar{x} + \sigma - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^4} - \frac{e^{-\frac{(\bar{x} + \sigma - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left( \frac{(\sigma)^2 e^{-\frac{(\sigma)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^4} - \frac{e^{-\frac{(\sigma)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente, pode-se mostrar que  $G''(\bar{x} - \sigma) = 0$ .

### 3.2.3 Intervalo de Confiança

A distribuição gaussiana fornece através da área sob a curva, o sino que ela descreve, a probabilidade de obtenção do valor esperado na experimentação. Em outras palavras, ela fornece um intervalo de confiança para os resultados. Para este tipo de análise basta calcular a integral da função no intervalo desejado como indica a próxima definição.

**Definição 11.** A probabilidade  $P(\gamma)$  de obter um resultado  $x$  tal que,

$$(\bar{x} - \gamma) < x < (\bar{x} + \gamma),$$

é dada pela integral:

$$P(\gamma) = \int_{\bar{x}-\gamma}^{\bar{x}+\gamma} G(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\gamma}^{\bar{x}+\gamma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} dx. \quad (3.8)$$

Esta função depende das constantes  $\sigma^2$  e  $\bar{x}$ , que podem variar entre pesquisas e experimentações. Podemos simplificar esta equação fazendo uma troca de variáveis.

Reescrevemos a integral 3.8 com as seguintes variáveis:

$$z = \frac{x-\bar{x}}{\sigma} \quad \text{e} \quad dz = \frac{x}{\sigma}.$$

Assim,

$$P(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\gamma}{\sigma}}^{+\frac{\gamma}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz. \quad (3.9)$$

Note que a unidade para os parâmetros de integração é dada pelo desvio padrão. Assim, quando  $\gamma = \sigma$  os limites são  $\pm 1$ . Este ponto,  $\sigma$ , é interessante, pois ele é o intervalo que assumimos como critério de incerteza. Esta integração não tem solução algébrica, porém pode ser resolvida através do método de Simpson, referência [1], no entanto existem tabelas com os resultados possíveis, que podem ser encontradas na internet ou na referência [38].

Em uma análise experimental seja qual for à distribuição dos dados coletados, ou seja, qualquer que seja o valor de  $\sigma$ , isso não altera o cálculo de probabilidade para a distribuição, basta ver que 3.9 independe do valor de  $\sigma$ . O que queremos dizer aqui é que todas as distribuições seguem um mesmo intervalo de confiança.

Este intervalo de confiança de acordo com os parâmetros de incerteza estão relacionado na Tabela 8, e também podem ser visualizados na Figura 9

Incerteza		Intervalo de confiança	Confiança
Incerteza padrão	$\sigma$	$(\bar{x} - \sigma) < x < (\bar{x} + \sigma)$	68,27%
$\gamma$	$2\sigma$	$(\bar{x} - 2\sigma) < x < (\bar{x} + 2\sigma)$	95,45%
$\gamma$	$3\sigma$	$(\bar{x} - 3\sigma) < x < (\bar{x} + 3\sigma)$	99,73%

Tabela 8 – Tabela de Intervalo de Confiança. Fonte: Autor.

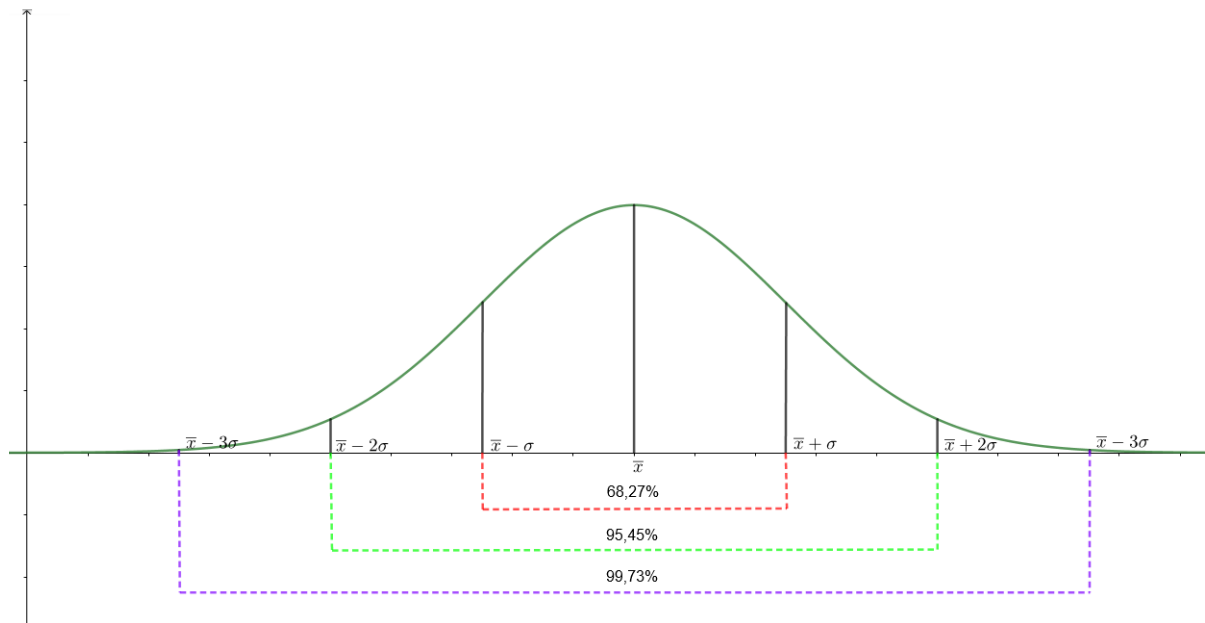


Figura 9 – Representação Gráfica da Distribuição Normal (Gaussiana) com intervalo de confiança. Fonte: Autor.

O intervalo de confiança possibilita-nos supor qual é a probabilidade dos valores estudados estarem no intervalo determinado. É fácil perceber que aumentando o intervalo uma área maior será abrangida e conseqüentemente mais dados com ela, assim aumentando a possibilidade de encontrar o valor verdadeiro.

### 3.2.4 Propagação da Incerteza

Quando há a necessidade de obter uma grandeza  $w$  indiretamente, isso quer dizer que ela dependerá de uma relação entre outras grandezas, isto é  $w(x, y, z, \dots)$ . Se estas grandezas forem independentes teremos um conjunto de variáveis coletadas  $n$  vezes.

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & \cdots \\ x_2 & y_2 & z_2 & \cdots \\ x_3 & y_3 & z_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n & \cdots \end{matrix}$$

Relacionado com cada variável existe uma variância,  $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2, \dots$ , (conseqüentemente um desvio padrão,  $\sqrt{\sigma_x^2}, \sqrt{\sigma_y^2}, \sqrt{\sigma_z^2}, \dots$ ), dada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2; \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2; \quad \dots$$

onde  $\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}; \dots$ , são as melhores aproximações que temos dos valores verdadeiros.

A grandeza  $w$  pode ser calculada para cada conjunto de variáveis  $x_i, y_i, z_i, \dots$ , obtendo-se assim,  $n$  resultados:

$$\begin{aligned} w_1 &= w(x_1, y_1, z_1, \dots) \\ w_2 &= w(x_2, y_2, z_2, \dots) \\ w_3 &= w(x_3, y_3, z_3, \dots) \\ &\vdots \\ w_n &= w(x_n, y_n, z_n, \dots). \end{aligned}$$

Tomamos a média de  $w$ , como sendo  $\bar{w}$ :

$$\bar{w} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i, \quad (3.10)$$

onde assumimos  $\bar{w}$  como uma boa aproximação do valor verdadeiro de  $w$ .

Podemos também obter a variância de  $w$ ,

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta w_i)^2 \quad (3.11)$$

onde  $\bar{w} = w(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$ , e  $\Delta w_i = w_i - \bar{w}$ . A variação  $\Delta w_i$  pode ser aproximada por incremento

$$\Delta w_i = \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z_i + \dots \quad (3.12)$$

onde as derivadas parciais devem ser calculadas para  $x = \bar{x}; y = \bar{y}; z = \bar{z}; \dots$ .

Substituindo 3.12 em 3.11, segue que:

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y_i + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z_i + \dots \right)^2. \quad (3.13)$$

Na equação 3.13 existem dois tipos de termos:

1

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x_i \right)^2; \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y_i \right)^2; \quad \left( \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z_i \right)^2; \quad \dots$$

2

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \Delta x_i \Delta y_i; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \Delta x_i \Delta z_i; \quad \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \Delta z_i \Delta y_i; \quad \dots$$

Devido a simetria da função distribuição gaussiana com respeito as distribuições dos desvios negativos e positivos, os desvios que aparecerem no segundo item acima possuirão



a mesma quantidade, se anulando, ou, possuindo uma diferença muito pequena, próxima de zero, ou ainda, ser algo muito pequeno em relação a soma dos termos quadráticos. Assim assumimos que estes termos são desprezíveis.

Dessa forma nossa soma se resume a,

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (\Delta x_i)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (\Delta y_i)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 (\Delta z_i)^2 + \dots \right]. \quad (3.14)$$

Que pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta z_i)^2 + \dots \\ &= \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

É através da equação 3.15 que podemos determinar a propagação do erro gerado pelas medições e relações entre as grandezas que dão origem a grandeza de medida indireta.

#### 3.2.4.1 Fórmulas Mais Recorrentes de Propagação de Incerteza

Do resultado da seção anterior, equação 3.15, podemos obter algumas fórmulas de propagação de incerteza para os casos mais recorrentes.

- Soma ou subtração de variáveis:  $w = \alpha x \pm \beta y \pm \gamma z \dots$ , onde  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  são constantes livres de erros ou com erros desprezíveis.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma, \dots,$$

segue que,

$$\sigma_w^2 = \alpha^2 \sigma_x^2 + \beta^2 \sigma_y^2 + \gamma^2 \sigma_z^2 + \dots \quad (3.16)$$

Observe que as variâncias sempre se somam, mesmo no caso de subtração; e que para uma única variável, ao calcular o desvio padrão, devemos tomar o módulo da constante.

- Produto de variáveis:  $w = \alpha x^n y^m$ , onde  $\alpha, m$  e  $n$  são constantes livres de erros ou com erros desprezíveis.

Como,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = n\alpha x^{n-1} y^m \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = m\alpha x^n y^{m-1},$$

segue que,

$$\sigma_w^2 = (n\alpha x^{n-1}y^m)^2 \sigma_x^2 + (m\alpha x^n y^{m-1})^2 \sigma_y^2. \quad (3.17)$$

- Razão de variáveis:  $w = \frac{\alpha x^n}{\beta y^m}$ , onde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $m$  e  $n$  são constantes livres de erros ou com erros desprezíveis.

Como,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{n\alpha x^{n-1}}{y^m} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{m\alpha x^n}{y^{m+1}},$$

segue que,

$$\sigma_w^2 = \left( \frac{n\alpha x^{n-1}}{y^m} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{m\alpha x^n}{y^{m+1}} \right)^2 \sigma_y^2. \quad (3.18)$$

- Função Trigonométrica:  $w = \alpha \sin x^n$ , onde  $\alpha$  e  $n$  são constantes livres de erros ou com erros desprezíveis, e  $x$  é dado em radianos.

Como,

$$\frac{dw}{dx} = \alpha n x^{n-1} \cos x^n,$$

segue que,

$$\sigma_w = |\alpha n x^{n-1} \cos x^n| \sigma_x. \quad (3.19)$$

- Função Logarítmica:  $w = \log_\alpha x^n$ , onde  $\alpha$  e  $n$  são constantes livres de erros ou com erros desprezíveis.

Como,

$$\frac{dw}{dx} = \frac{n}{x} \frac{1}{\log \alpha},$$

segue que,

$$\sigma_w = \left| \frac{n}{x} \frac{1}{\log \alpha} \right| \sigma_x. \quad (3.20)$$

## 4 Método dos Mínimos Quadrados

Tomamos como referência para a discussão dos resultados sobre mínimos quadrados o livro discorrido na referência [38].

Um método poderoso para obter o valor mais coerente de um quadro de dados de uma observação experimental é o **método dos mínimos quadrados**. Ao invés de realizar uma análise gráfica, o observador pode determinar por meio desse método, a melhor aproximação ou a reta mais adequada que se aproxima de todos os dados coletados. Esse métodos também é conhecido como regressão linear quando se trata de funções/relações lineares. Ele também pode ser expandido a outros tipos de funções/relações, porém o interesse aqui é simplesmente utilizar este método de acordo com uma relação linear.

Antes da discussão do método, é relevante saber que a maioria dos estudos experimentais propostos pelos conteúdos do ensino médio podem conter uma relação linear entre as grandezas medidas. Entretanto, esta relação linear as vezes não parece saltar aos olhos, porque a relação linear nem sempre esta de forma direta entre as grandezas medidas, por exemplo, podemos encontrar relações lineares entre uma grandeza e o quadrado da outra grandeza, ou seja, há diferentes formas de obter a relação linear entre as grandezas estudadas. O estudo que trata sobre este assunto é a linearização de funções. Logo, para maior conhecimento orientamos estudar a referência [13].

O método dos mínimos quadrados calcula o valor mais provável de uma quantidade que é obtido do rol de dados mensurados, escolhendo o valor que minimiza a soma do quadrado dos desvios destas medidas. Assim para uma coleção de medidas  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , o valor mais provável de  $y(x_i)$ , é o valor que minimiza a quantidade

$$F(y) = \sum_{i=1}^n (y(x_i) - y_i)^2, \quad (4.1)$$

em que  $y(x_i)$  é considerada a variável que será otimizada na minimização da função  $F$ , ou seja,  $y(x_i)$  pertence a reta mais ajustada aos pontos coletados, e  $y_i$  é o correspondente de cada  $x_i$ .

É utilizado o método do quadrado da diferença, pois caso fosse considerado apenas a diferença ocasionaria um problema em determinadas distribuições, onde haveria um grande resíduo positivo e outro negativo, podendo ambos se anularem. Como o interesse deste trabalho é uma distribuição normal e que ela possui uma característica simétrica, o método do quadrado da diferença é mais adequado.

Assim supondo que tenhamos uma distribuição gaussiana, sabemos que a probabilidade de obter um dado valor é dada por

$$P_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y(x_i)-y_i)^2/2\sigma^2} dx,$$

onde  $\sigma$  caracteriza a simetria da distribuição de onde cada  $y_i$  é obtido.

A probabilidade de obter todos os  $n$  dados mensurados é o produto de cada probabilidade separada:

$$\begin{aligned} P &= P_1 P_2 \cdots P_n \\ &= \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y(x_1)-y_1)^2/2\sigma^2} dx \right) \cdots \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y(x_n)-y_n)^2/2\sigma^2} dx \right) \\ &= \left( \frac{dx}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\sum_{i=1}^n (y(x_i)-y_i)^2/2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pense! Para maximizar a probabilidade de obter um valor, é necessário minimizar o expoente da equação 4.2. Logo, se

$$M = - \sum_{i=1}^n (y(x_i) - y_i)^2, \quad (4.3)$$

temos que diferenciar a equação 4.3 para obter o mínimo dessa diferença, por isso o nome de mínimo quadrado. Porém, para isto é necessário conhecer a função  $y(x)$ , ou reconhecer que  $y(x)$  pode ser uma função.

#### 4.0.0.1 Função Tipo $y(x)=ax+b$

Seja,

$$y(x_i) = ax_i + b, \quad (4.4)$$

a melhor reta que se ajusta aos pontos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  de um determinado conjunto. Onde,  $a$  e  $b$  são os coeficientes a serem determinados.

Das equações 4.3 e 4.4 segue que

$$M(a, b) = - \sum_{i=1}^n (y(x_i) - y_i)^2 = - \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = - \sum_{i=1}^n (y_i^2 + b^2 + a^2 x_i^2 - 2by_i - 2ax_i y_i + 2abx_i) \quad (4.5)$$

Assim derivando  $M$  em relação a  $a$  e igualando a zero, obtemos:

$$\frac{\partial M}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (2ax_i^2 - 2x_i y_i + 2bx_i) = 0, \quad (4.6)$$

segue de algumas manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial b} &= 2a \sum_{i=1}^n (x_i^2) - 2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i) + 2b \sum_{i=1}^n (x_i) = 0 (\times 1/2n) \\ &= a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i) = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

seguindo o mesmo caminho, derivando  $M$  em relação a  $b$  e igualando a zero, obtemos:

$$\frac{\partial M}{\partial b} = \sum_{i=1}^n (2b - 2y_i + 2ax_i) = 0. \quad (4.8)$$

Da mesma forma que a equação anterior podemos desenvolver 4.8:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n (b) - 2 \sum_{i=1}^n (y_i) + 2a \sum_{i=1}^n (x_i) = 0 \quad (\times 1/2n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i) + a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Aproveitando os resultados e substituindo  $\sum_{i=1}^n (b) = nb$ ,  $\bar{x} = 1/n \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{y} = 1/n \sum_{i=1}^n y_i$ ,  $\overline{xy} = 1/n \sum_{i=1}^n (x_i y_i)$ , e  $\overline{x^2} = 1/n \sum_{i=1}^n (x_i^2)$ , nas equações 4.7 e 4.9 ficamos com:

$$a\overline{x^2} - \overline{xy} + b\bar{x} = 0 \quad (4.10)$$

e

$$b - \bar{y} + a\bar{x} = 0. \quad (4.11)$$

Realizando algumas manipulações algébricas neste sistema, equações 4.10 e 4.11, segue que:

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (4.12)$$

e

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}. \quad (4.13)$$

#### 4.0.0.2 Função Tipo $y(x)=ax$

Seja

$$y(x_i) = ax_i. \quad (4.14)$$

Substituindo 4.14 em 4.3, temos:

$$M(a) = - \sum_{i=1}^n (y(x_i) - y_i)^2 = - \sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2 = - \sum_{i=1}^n (y_i^2 + a^2 x_i^2 - 2ax_i y_i). \quad (4.15)$$

Derivando  $M$  em relação a  $a$  e igualando a zero, obtemos:

$$\frac{dM}{da} = - \sum_{i=1}^n (2ax_i^2 - 2x_i y_i) = 0. \quad (4.16)$$

Prosseguindo com algumas manipulações algébricas com o termo central da igualdade e o termo a direita (zero), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial b} &= 2a \sum_{i=1}^n (x_i^2) - 2 \sum_{i=1}^n (x_i y_i) = 0 \quad (\times 1/2n) \\ &= a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) = 0. \end{aligned}$$

Tomando  $\overline{xy} = 1/n \sum_{i=1}^n (x_i y_i)$  e  $\overline{x^2} = 1/n \sum_{i=1}^n (x_i^2)$ , encontramos:

$$a = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}. \quad (4.17)$$

Portanto, encontramos para as duas relações lineares existentes, maneiras de determinar os coeficientes destas equações. E como podemos interpretar esta informação? A interpretação vai depender da relação linear que você está estudando, por exemplo, a relação linear entre espaço e tempo fornece uma velocidade, espaço e tempo ao quadrado fornece uma aceleração, força e massa em um sistema massa-mola fornece a constante elástica da mola, entre outras relações. Portanto o coeficiente angular da reta que descreve esta relação linear é a grandeza procurada, ou que pode ser obtida através das outras grandezas medidas e linearizadas.

## 5 Experimentação e Aplicação

Neste capítulo trataremos de algumas aplicações da metodologia apresentada. Estas aplicações são experimentações realizadas em ambientes reais e virtuais, como sala de aula e laboratórios. Duas delas sendo realizadas por alunos e outra pelo próprio autor, como pêndulo simples, desvio da luz e efeito foto elétrico.

### 5.1 Pêndulo Simples

Para determinar a aceleração da gravidade local foi realizado um experimento de pêndulo simples de acordo com roteiro proposto na referência [22], onde foram utilizados 3 comprimentos diferentes de linha para o pêndulo, haste, balança, cronômetro, porém com 1 única massa, conforme mostra a Figura 10.

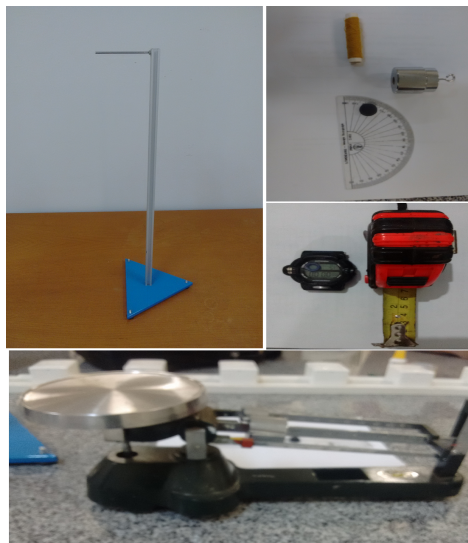


Figura 10 – Setup Pêndulo Simples. Fonte: Autor.

Neste experimento, afim de mostrar de maneira mais visível o tipo de distribuição dos dados coletados, foram realizadas 31 medidas de tempo para cada comprimento de linha, conforme Tabela 9, Tabela 11 e Tabela 13, ao invés de apenas 5 medidas de tempo, como proposto pelo roteiro seguido.

Analisando um comprimento de linha de cada vez, verificamos seus dados de tempo coletados, frequência e histograma, onde a média e o desvio padrão foram obtidos pelas Equações 3.1 e 3.5, respectivamente.

14	14,04	14,05	14,07	14,09	14,10	14,11	14,14	14,14	14,17	14,17
14,18	14,19	14,19	14,19	14,20	14,20	14,23	14,24	14,24	14,25	14,25
14,28	17,29	14,30	14,32	14,33	14,38	14,39	14,41	14,50	-	-

Tabela 9 – Tempos de 10 oscilações para  $L = 0,53\text{ m}$ ,  $\Theta = 15^\circ$  e  $m = 0,165\text{ kg}$ . Fonte: Autor.

Mínimo	14
Máximo	14,5
Número de Elementos	31
Número de Classes	10
Incremento de Classe	0,05
<b>Desvio Padrão</b>	0,12
<b>Média</b>	14,21

(a) Elementos para construção da tabela distribuição de frequência para  $L = 0,53\text{ m}$ .

Classe	Frequência
14 † 14,05	2
14,05 † 14,10	3
14,10 † 14,15	4
14,15 † 14,20	6
14,20 † 14,25	5
14,25 † 14,30	4
14,30 † 14,35	3
14,35 † 14,40	2
14,40 † 14,45	1
14,45 † 14,50	1

(b) Tabela de distribuição de frequência para  $L = 0,53\text{ m}$ .

Tabela 10 – Elementos para construção do histograma para  $L = 0,53\text{ m}$ . Fonte: Autor.

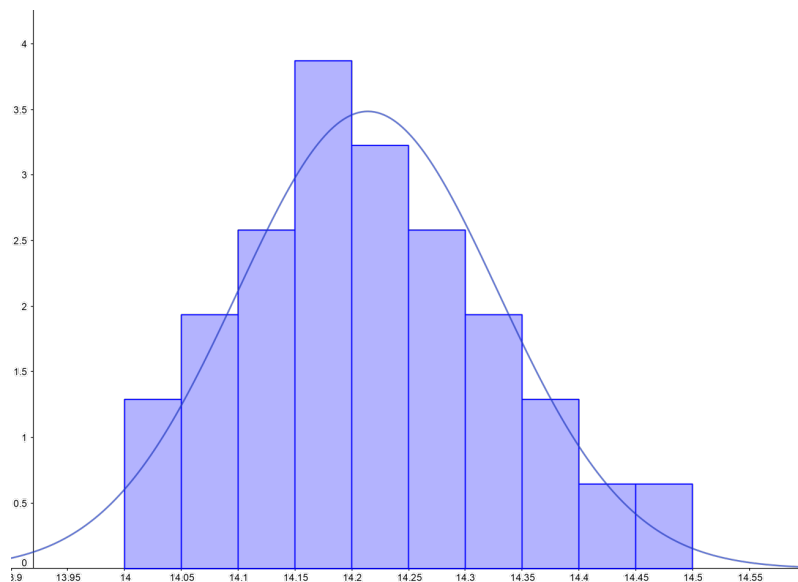


Figura 11 – Histograma normalizado para tempos de 10 oscilações para  $L = 0,53\text{ m}$ . Fonte: Autor.



16,65	16,65	16,68	16,71	16,80	16,85	16,90	16,90	16,93	17,00	17,01
17,01	17,02	17,03	17,05	17,05	17,05	17,10	17,11	17,11	17,11	17,15
17,15	17,16	17,18	17,18	17,18	17,20	17,21	17,28	17,30	-	-

Tabela 11 – Tempos de 10 oscilações para  $L = 0,73\text{ m}$ ,  $\Theta = 15^\circ$  e  $m = 0,165\text{ kg}$ . Fonte: Autor.

Mínimo	16,65
Máximo	17,30
Número de elementos	31
Número de Classes	10
Incremento de Classe	0,065
<b>Desvio Padrão</b>	0,18
<b>Média</b>	17,02

(a) Elementos para construção da Tabela Distribuição de Frequência para  $L = 0,73\text{ m}$ .

Classe	Frequência
16,65 † 16,72	4
16,72 † 16,78	0
16,78 † 16,85	1
16,85 † 16,91	3
16,91 † 16,98	1
16,98 † 17,04	5
17,04 † 17,11	4
17,11 † 17,17	6
17,17 † 17,24	5
17,24 † 17,30	2

(b) Tabela de distribuição de frequência para  $L = 0,73\text{ m}$ .

Tabela 12 – Elementos para construção do histograma para  $L = 0,73\text{ m}$ . Fonte: Autor.

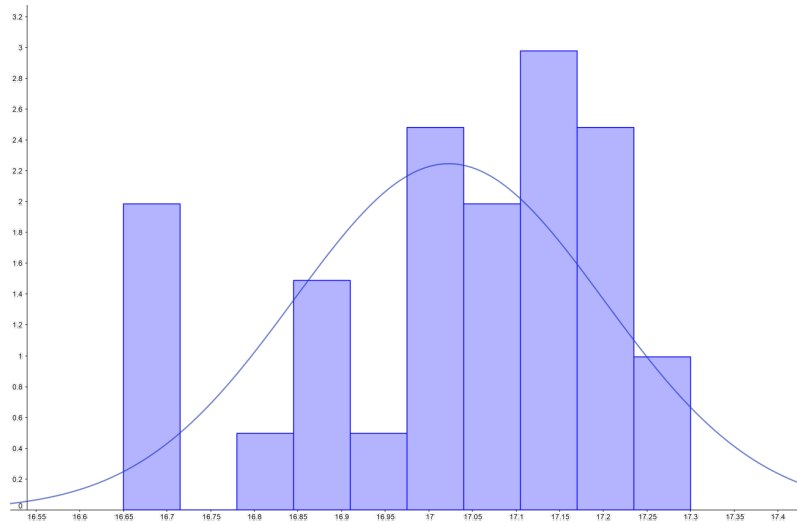


Figura 12 – Histograma normalizado para tempos de 10 oscilações com linha de comprimento  $0,73\text{ m}$ . Fonte: Autor.

20,15	20,20	20,23	20,23	20,23	20,33	20,34	20,35	20,37	20,39	20,40
20,40	20,44	20,44	20,45	20,47	20,48	20,48	20,50	20,52	20,55	20,55
20,59	20,61	20,61	20,62	20,63	20,66	20,66	20,75	20,75	-	-

Tabela 13 – Tempos de 10 oscilações para  $L = 1,03\text{ m}$ ,  $\Theta = 15^\circ$  e  $m = 0,165\text{ kg}$ . Fonte: Autor.

Mínimo	20,15
Máximo	20,75
Número de elementos	31
Número de Classes	10
Incremento de Classe	0,06
<b>Desvio Padrão</b>	0,16
<b>Média</b>	20,47

(a) Elementos para construção da Tabela Distribuição de Frequência para  $L = 1,03\text{ m}$ .

Classe	Frequência
20,15 † 20,21	2
20,21 † 20,27	2
20,27 † 20,33	1
20,33 † 20,39	4
20,39 † 20,45	5
20,45 † 20,51	5
20,51 † 20,57	3
20,57 † 20,63	4
20,63 † 20,69	3
20,69 † 20,75	2

(b) Tabela de distribuição de frequência para  $L = 1,03\text{ m}$ .

Tabela 14 – Elementos para construção do histograma para  $L = 1,03\text{ m}$ . Fonte: Autor.

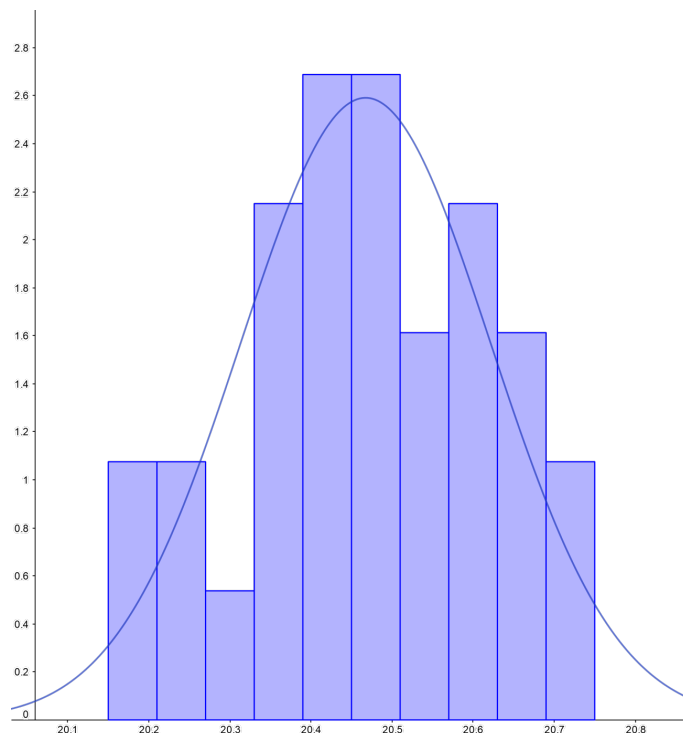


Figura 13 – Histograma normalizado para tempos de 10 oscilações com linha de comprimento  $1,03\text{ m}$ . Fonte: Autor.

Definindo como  $t_i$  o tempo de 10 oscilações, e  $T_i$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots, 31$ , período de oscilação.

$$T_i = t_i/10.$$

De acordo com o ângulo utilizado podemos utilizar a equação:

$$\bar{T} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \bar{T}^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}, \tag{5.1}$$

onde podemos observar uma relação linear entre  $L$  e  $T^2$ . Representando  $L$  e  $T^2$  por  $x$  e  $y$  na função linear 4.14, respectivamente, e que  $\frac{4\pi^2}{g}$  é o coeficiente linear  $a$  da reta:

$$a = \frac{4\pi^2}{g} = \frac{\overline{LT^2}}{\overline{L^2}}. \tag{5.2}$$

Segue os resultados,  $L_j, \bar{T}_j, \overline{T_j^2}$ , ( $j = 1, 2, 3$ ), Tabela 15a,  $\overline{LT^2}$  e  $\overline{L^2}$ , de acordo com a Equação 3.1, Tabela 15b

Grandeza / índice $j$	1	2	3
$L_j$	0,53	0,73	1,03
$L_j^2$	0,281	0,533	1,061
$T_j$	1,422	1,702	2,047
$T_j^2$	2,021	2,898	4,189

(a) Resultados por índice  $j$ .

Grandeza	1
$\overline{L^2}$	0,625
$\overline{T^2}$	3,036
$\overline{LT^2}$	2,501

(b) Médias necessárias para determinar  $a$ .

Tabela 15 – Resultados. Fonte: Autor.

Portanto, substituindo os resultados da Tabela 15b na Equação 5.2 obtemos:

$$g = 9,86 \text{ m/s}^2. \tag{5.3}$$

Assim, foi determinado o valor mais provável dentre a distribuição, agora falta determinar a propagação da incerteza que permeia esta experimentação. Dessa forma através da Equação 5.1, e da derivação parcial obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{4\pi^2}{T^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{8\pi^2 L}{T^3}.$$

Para determinar a incerteza envolvida na medição dos comprimentos, sabendo que

$$L_i = l_i + m, \tag{5.4}$$

onde  $l_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , é o comprimento da linha (0,50; 0,70; 1,00), e  $m$  a distância do suporte até o centro de massa (0,03) ambos em metros.

Assim, segue pela Equação 3.16 que a incerteza propagada pela medida do comprimento é dada por:

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_l^2 + \sigma_m^2} = \sqrt{(0,005)^2 + (0,005)^2} = 0,007, \quad (5.5)$$

já para determinar a incerteza envolvida no período, segue que:

$$\sigma_{\bar{T}} = \text{média} \begin{cases} \sigma_{\bar{T}_1} = 0,0116 \\ \sigma_{\bar{T}_2} = 0,0180 = 0,015. \\ \sigma_{\bar{T}_3} = 0,0157 \end{cases}$$

Da Equação 3.18 (propagação da incerteza) e dos resultados acima obtidos, obtemos:

$$\begin{aligned} \sigma_g &= \left( \left( \frac{\partial g}{\partial L} \right)^2 \sigma_L^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial \bar{T}} \right)^2 \sigma_{\bar{T}}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \left( \frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} \right)^2 \sigma_L^2 + \left( \frac{8\pi^2 \bar{L}}{\bar{T}^3} \right)^2 \sigma_{\bar{T}}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \left( \frac{4\pi^2}{1,724^2} \right)^2 (0,007)^2 + \left( \frac{8\pi^2 0,767}{1,724^3} \right)^2 (0,015)^2 \right)^{1/2} \\ &= 0,20. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Portanto, escrevemos o resultado obtido através de 5.3 e 5.6

$$9,86 \pm 0,20.$$

Interpretando um pouco mais o resultado temos a Tabela 16.

Intervalo	Nível de Confiança
$9,69 \leq g \leq 10,06$	68,27%
$9,46 \leq g \leq 10,26$	95,45%
$9,26 \leq g \leq 10,46$	99,73%

Tabela 16 – Intervalo de confiança para a aceleração da gravidade local (experimento pêndulo simples). Fonte: Autor.

Finalizamos aqui com os resultados de qual é a melhor representação para a gravidade obtida através desta experimentação e também a relação de confiança/abrangência dos dados obtidos (conforme Tabela 16), ou seja, 68,27% dos resultados estão dentro do intervalo  $g \pm \sigma_g$  e assim sucessivamente.

## 5.2 Desvio da Luz

Uma outra proposta desenvolvida com alunos e seus celulares foi o simulador online de desvio da luz, disponibilizado pela Universidade Colorado dos Estados Unidos<sup>1</sup>, com o intuito de determinar o índice de refração de um material desconhecido, através da conversão de ângulo de graus para radianos (Equação 5.7) e do Princípio de Huygens (Equação 5.8).

$$rad = \frac{2\pi\Theta}{180^\circ}, \quad (5.7)$$

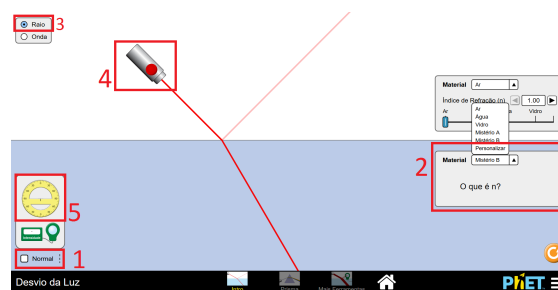
$$n_1 \sin \Theta_1 = n_2 \sin \Theta_2. \quad (5.8)$$

Material (do laboratório virtual): laser, transferidor, ambiente de incidência ar e ambiente de refração “Mistério B”.

**Roteiro:** entrar no simulador desvio da luz no ambiente de simulação de fenômenos físicos. Carregar o simulador e entrar em “Intro” Figura 14a para aparecer o ambiente de simulação como na Figura 14b; desativar a normal (1); alterar ambiente inferior para “Mistério B” (2); deixar como raio (3); manter o laser na posição inicial e liga-lo (4); utilizar o transferidor (5) para determinar o ângulo de incidência e refração do raio e anotar na Tabela 17.



(a) Tela de Seleção.



(b) Instrumentos laboratório virtual desvio da luz.

Figura 14 – Laboratório virtual desvio da luz PhetColorado. Fonte: Autor.

<sup>1</sup> Site: [https://phet.colorado.edu/pt\\_BR/](https://phet.colorado.edu/pt_BR/), acessado em 25 de Setembro 2018.

meio de incidência			índice de refração ( $n_1$ )		

(a) Tabela para registro dos ângulos de incidência.

meio de refração			índice de refração ( $n_2$ )		

(b) Tabela para registro dos ângulos de refração.

Tabela 17 – Tabela de dados. Fonte: Autor.

**Metodologia:** foi solicitado para que todos os alunos acessassem em seus smartphones o simulador (laboratório virtual) e seguissem o roteiro, neste caso, apenas os celulares de 33 alunos puderam executar o simulador. Acompanhando o roteiro foi solicitado que anotassem o valor observado do ângulo de incidência, que foram transferidos para a Tabela 18, e refração, que foram transferidos para a Tabela 20.

Meio de incidência: ar					Índice do ar: $n_1 = 1,00$					
0,633	0,633	0,672	0,672	0,672	0,681	0,681	0,681	0,681	0,681	0,689
0,689	0,689	0,689	0,698	0,698	0,698	0,698	0,698	0,698	0,698	0,707
0,707	0,707	0,707	0,716	0,716	0,716	0,724	0,724	0,724	0,733	0,742

Tabela 18 – 33 Medidas coletadas de ângulo de incidência (em radianos). Fonte: Autor.

Mínimo	0,633
Máximo	0,742
Número de elementos	33
Número de Classes	10
Incremento de Classe	0,011
Desvio Padrão	0,022
Média	0,696

(a) Elementos para construção da Tabela Distribuição de Frequência para ângulo de incidência (em radianos).

Classe	Frequência
0,633 † 0,644	1
0,644 † 0,655	0
0,655 † 0,666	1
0,666 † 0,677	3
0,677 † 0,688	5
0,688 † 0,698	11
0,698 † 0,709	4
0,709 † 0,72	3
0,72 † 0,731	3
0,731 † 0,742	1

(b) Tabela de distribuição de frequência para ângulo de incidência (em radianos).

Tabela 19 – Elementos para construção do histograma para ângulo de incidência (em radianos). Fonte: Autor.

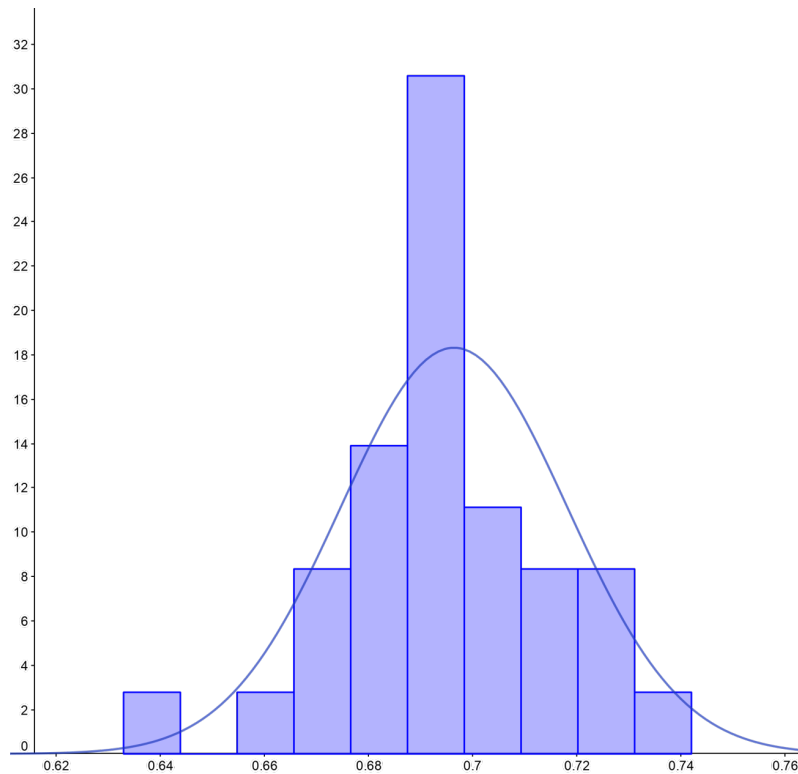


Figura 15 – Histograma ângulo de incidência normalizado. Fonte: Autor.

Meio de refração: Mistério B					Índice do ar: $n_2 = ?$					
0,471	0,471	0,480	0,480	0,480	0,489	0,489	0,489	0,489	0,489	0,489
0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,497	0,506
0,506	0,506	0,506	0,506	0,515	0,515	0,515	0,524	0,524	0,532	0,541

Tabela 20 – 33 Medidas coletadas de ângulo de refração (em radianos). Fonte: Autor.

Mínimo	0,471
Máximo	0,541
Número de elementos	33
Número de Classes	9
Incremento de Classe	0,445
Desvio Padrão	0,016
Média	0,499

(a) Elementos para construção da Tabela Distribuição de Frequência para ângulo de refração (em radianos).

Classe	Frequência
0,471 † 0,478	2
0,478 † 0,487	3
0,487 † 0,494	6
0,494 † 0,502	10
0,502 † 0,51	5
0,51 † 0,518	3
0,518 † 0,525	2
0,525 † 0,533	1
0,533 † 0,541	0

(b) Tabela de distribuição de frequência para ângulo de refração (em radianos).

Tabela 21 – Elementos para construção do histograma para ângulo de refração (em radianos). Fonte: Autor.

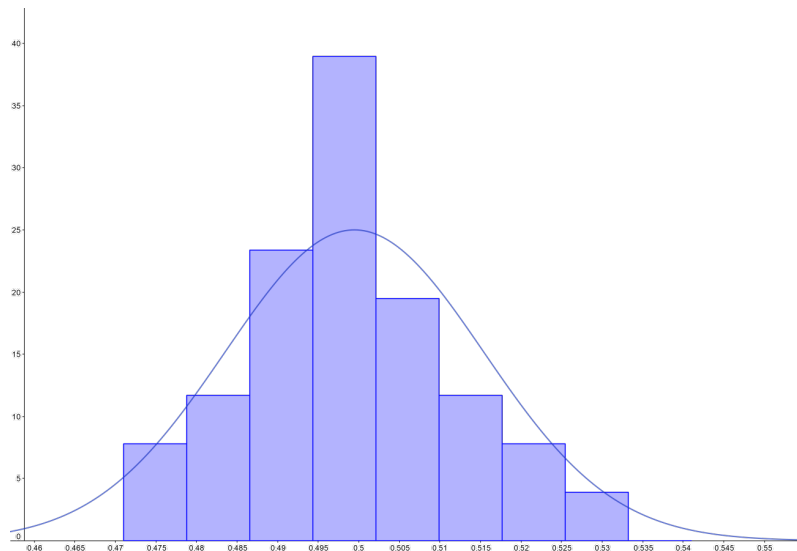


Figura 16 – Histograma ângulo de refração normalizado. Fonte: Autor.

Observe que os ângulos de incidência e refração possuem uma relação linear do tipo  $y = ax$ , onde  $a$  é o índice de refração do meio “Mistério B” ( $n_2$ ), e  $y$  e  $x$ , são



respectivamente,  $\overline{\Theta}_1$  e  $\overline{\Theta}_2$ . Fazendo uso das Equações 4.14 e 4.17:

$$n_r = \frac{\overline{\Theta}_1 \overline{\Theta}_2}{\overline{\Theta}_2^2} = \frac{(0,348)}{(0,250)} = 1,39.$$

Utilizando o princípio de Huygens, Equação 5.8, segue que a incerteza é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sqrt{\left(\frac{\cos \theta_i}{\sin \theta_r}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\cos \theta_r \sin \theta_i}{\sin^2 \theta_r}\right)^2 \sigma_r^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\cos 0,696}{\sin 0,499}\right)^2 (0,022)^2 + \left(\frac{\cos 0,499 \sin 0,696}{\sin^2 0,499}\right)^2 (0,016)^2} \\ &= 0,04. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever o resultado para o índice do meio de refração como:

$$1,39 \pm 0,04.$$

Verificamos, através da Tabela 22, os intervalos e o quanto eles abrangem dos resultados possíveis obtidos para esta experimentação:

Incerteza	Confiança
$1,35 < n_2 < 1,43$	68,27%
$1,31 < n_2 < 1,47$	95,45%
$1,27 < n_2 < 1,51$	99,73%

Tabela 22 – Intervalo de confiança da experimentação desvio da luz. Fonte: Autor.

Assim, concluímos nossa análise sobre a desvio da luz através do laboratório virtual PhetColorado.

## 5.3 Efeito Foto Elétrico

Aqui é apresentado relatório (modificado) realizado pelo autor Oldemir Brill Junior. Relatório este apresentado como parte das obrigações para aprovação na disciplina de Laboratório de Física Modernar do curso de Física a Distância ministrado pela Universidade Estadual de Maringá no ano de 2018.

O roteiro utilizado está disponível na referência [28].

### 5.3.1 Desenvolvimento Experimental.

Para a realização do experimento foram utilizados os seguintes materiais:

- Um aparelho de efeito fotoelétrico da marca PASCO, modelo 6609 que é composto pelos seguintes itens:
  - \* um invólucro de fonte de luz de mercúrio;
  - \* uma fonte de tensão de corrente contínua sintonizável (DC);
  - \* um amplificador de corrente DC;
  - \* uma fonte de alimentação para a fonte de luz de mercúrio;
  - \* cabos diversos;
  - \* um invólucro do tubo fotodiodo que tem filtros ópticos com cinco frequências diferentes;
  - \* um disco de abertura com três diâmetros e tampas de proteção diferentes para o invólucro do fotodiodo e o invólucro da fonte de luz de mercúrio;
  - \* o fotodiodo, o invólucro, e o invólucro da fonte de luz de mercúrio são montados no trilho, incluso.

### 5.3.2 Procedimento.

Montagem do equipamento: o equipamento de efeito fotoelétrico foi montado conforme a Figura 17.

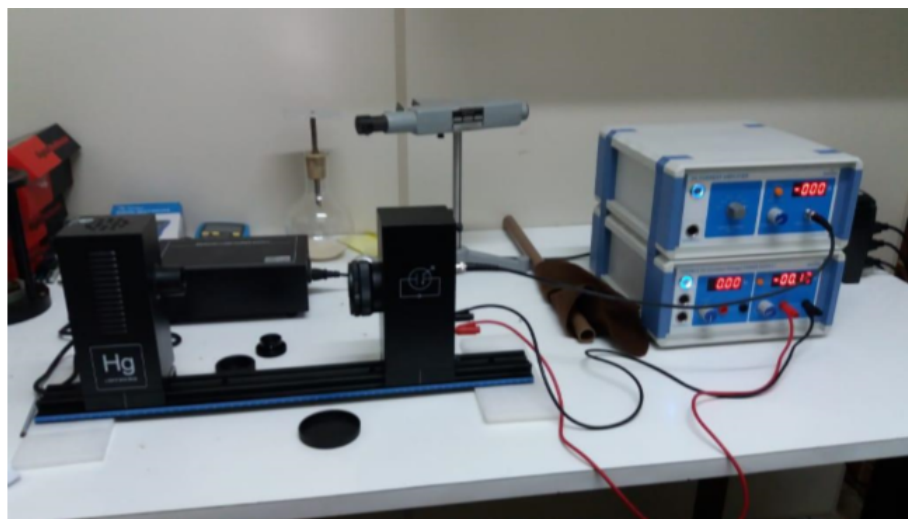


Figura 17 – Aparelho de efeito fotoelétrico PASCO 6609. Fonte: Autor.

Calibragem do aparelho: utilizando os cabos de prova preto e vermelho foi conectado o fotodiodo à fonte de tensão DC. Utilizando o cabo de prova BNC preto conectou-se o fotodiodo ao amplificador de corrente. Ligou-se a fonte da lâmpada de mercúrio. Esperou-se 10 minutos para ocorrer o aquecimento da fonte de luz e do aparato. Na fonte de tensão DC, foi selecionado o botão “Voltage Range” para  $-4,5\text{ V} \Leftrightarrow 30\text{ V}$ .

No amplificador de corrente, girou-se a chave seletora “Current Ranges” para  $10^{-11}$  A. Se, quando não foi suficientemente grande, girou-se o seletor para  $10^{-10}$  A.

Foi pressionado o botão “Signal” para a posição “in” para calibração. Ajustou-se o potenciômetro “Current Ranges” até que o amperímetro mostrasse o valor zero para a corrente. Pressionou-se o botão “Signal” a fim de fazer com que ele voltasse para a posição “out Measure”. Gentilmente, girou-se a catraca das fendas até que a fenda de 2 mm estivesse alinhada com a linha branca. Gentilmente girou-se a catraca dos filtros, até que o filtro de 436 nm estivesse alinhado com a linha branca, Figura 18.



Figura 18 – Fotodiodo e suas catracas seletoras. Fonte: Referência [28].

#### 5.3.2.1 Determinação do potencial de corte em diferentes intensidades.

Em ato contínuo removeu-se as tampas protetoras do fotodiodo e da lâmpada. Neste momento, com a catraca das fendas na posição da fenda de 2 mm, linhas espectrais com comprimento de onda de 436 nm foram incididos no fotodiodo. Ajustou-se o potenciômetro “Voltage Adjust” para 30 V. Diminuiu-se a tensão até que a corrente fotoelétrica no amperímetro marcasse zero. Neste momento foi alcançada a tensão de corte do catodo e anotados os valores da tensão e da corrente na Tabela 23. À medida que a corrente fotoelétrica foi diminuindo, modificações na chave seletora “Current Range” foram necessárias.

Vagarosamente girou-se a catraca das fendas até que a fenda de 4 mm estivesse alinhada com a linha branca. Ajustou-se o potenciômetro “Voltage Adjust” para 30 V. Diminuiu-se a tensão até a corrente fotoelétrica no amperímetro tornar-se zero. Neste momento alcançou-se a tensão de corte do catodo. Anotou-se os valores da tensão e da corrente na Tabela 23. À medida que a corrente fotoelétrica foi diminuindo modificações na chave seletora “Current Range” foram necessárias.

Tensão (V)	Corrente (fenda 2 mm)	Corrente (fenda 4 mm)
30	$300 \times 10^{-11}$	$1050 \times 10^{-11}$
28	$289 \times 10^{-11}$	$1013 \times 10^{-11}$
26	$277 \times 10^{-11}$	$968 \times 10^{-11}$
24	$265 \times 10^{-11}$	$928 \times 10^{-11}$
22	$251 \times 10^{-11}$	$898 \times 10^{-11}$
20	$240 \times 10^{-11}$	$855 \times 10^{-11}$
18	$225 \times 10^{-11}$	$800 \times 10^{-11}$
16	$211 \times 10^{-11}$	$731 \times 10^{-11}$
14	$196 \times 10^{-11}$	$648 \times 10^{-11}$
12	$181 \times 10^{-11}$	$565 \times 10^{-11}$
10	$165 \times 10^{-11}$	$487 \times 10^{-11}$
8	$143 \times 10^{-11}$	$388 \times 10^{-11}$
6	$123 \times 10^{-11}$	$272 \times 10^{-11}$
4	$90 \times 10^{-11}$	$157 \times 10^{-11}$
2	$477 \times 10^{-12}$	$1546 \times 10^{-12}$
1,5	$359 \times 10^{-12}$	$929 \times 10^{-12}$
1	$260 \times 10^{-12}$	$678 \times 10^{-12}$
0,5	$1680 \times 10^{-13}$	$460 \times 10^{-12}$
0	$919 \times 10^{-13}$	$257 \times 10^{-12}$
-0,5	$280 \times 10^{-13}$	$69 \times 10^{-12}$
-1	0	0

Tabela 23 – Dados experimentais da corrente fotoelétrica como função da tensão em diferentes intensidades (linha espectral  $\gamma = 436 \text{ nm}$ ). Fonte: Autor.

### 5.3.2.2 Determinação da frequência de corte da função trabalho.

Com cuidado girou-se a catraca das fendas até a fenda de 4 mm estar alinhada com a linha branca. Ajustou-se o potenciômetro “Voltage Adjust” para 2 V. Girou-se a catraca dos filtros até que o filtro de 365 nm estivesse alinhado com a linha branca. Diminui-se a tensão até a corrente fotoelétrica no amperímetro marcar zero. No momento em que foi alcançado a tensão de corte do catodo, foi anotado o valor da tensão de corte na Tabela 24. Repetiu-se os procedimentos para os filtros de 405 nm, 436 nm, 546 nm e 577 nm, tendo sido anotados na Tabela 24 os valores coletados.

$\lambda$ (nm)	$f$ ( $\times 10^{14}$ Hz)	$V_0$ (Volt)
365	8,21	1,51
405	7,40	1,22
436	6,88	0,94
546	5,49	0,38
577	5,20	0,20

Tabela 24 – Dados experimentais da tensão de corte obtidos como função do comprimento de onda da luz incidente (intensidade constante). Fonte: Autor.

### 5.3.3 Análise dos Resultados.

#### 5.3.3.1 Determinação do potencial de corte em diferentes intensidades.

Com base nos dados da Tabela 23, foi confeccionado, em uma mesma escala, o gráfico da corrente fotoelétrica como função da tensão aplicada, Figura 19, obtidas em diferentes intensidades (diferentes fendas).

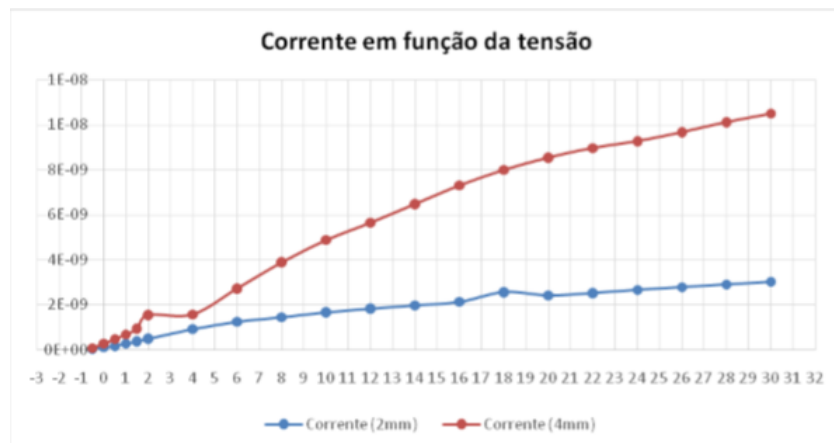


Figura 19 – Dados experimentais da corrente em função da tensão. Fonte: Autores.

#### 5.3.3.2 Determinação da frequência de corte da função trabalho.

De acordo com [28] o efeito foto-elétrico pode ser obtido por

$$eV = hf - \Phi, \tag{5.9}$$

onde  $e = 1,6 \times 10^{-19} C$  é a carga de um elétron,  $V$  é a tensão,  $f$  é a frequência,  $h$  é a constante de Planck, e  $\Phi$  é a função trabalho que varia de metal para metal.

Observado a Equação 5.9, percebe-se que ela é do tipo 4.4. Então,  $y = V$ ,  $x = f$ ,  $a = h/e$  e  $b = \Phi/e$ . Utilizando os dados da Tabela 24 mais a Equação 3.1, construímos um novo conjunto de dados, representados na Tabela 25, para calcular  $h$  e  $\Phi$ .

$\bar{y} = \bar{V}$	$\bar{x} = \bar{f}$	$\overline{xy} = \bar{Vf}$	$\overline{x^2} = \bar{f^2}$
0,85	$6,636 \times 10^{14}$	$6,204 \times 10^{14}$	$45,336 \times 10^{28}$

Tabela 25 – Dados das médias aritméticas. Fonte: Autor.

Dessa forma, podemos calcular  $h/e$ :

$$\begin{aligned} \frac{h}{e} &= \frac{\overline{Vf} - \bar{V}\bar{f}}{\bar{f^2} - \bar{f}^2} \\ &= \frac{(0,85 - 6,204) \times (10^{14})}{(45,336 - 44,037) \times (10^{28})} \\ &= 0,433 \times 10^{-14}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

nos fornecendo,

$$h = ea = ((1,6)(0,433) \times ((10^{-14})(10^{-19}))) = 6,928 \times 10^{-34}. \quad (5.11)$$

Para finalizar a análise de  $h$ , de posse de  $\sigma_V$  e  $\sigma_f$ , e observando que esta é uma Equação do tipo 3.18, segue que a incerteza propagada até  $h$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_h &= \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial V}\right)^2 \sigma_V^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial f}\right)^2 \sigma_f^2} \\ &= \sqrt{((0,241)^2(0,553)^2 + (0,031)^2(1,274)^2) \times (10^{-68})} \\ &= 0,139 \times 10^{-34}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Logo,  $h = ((6,928 \pm 0,139) \times 10^{-34}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

Podemos expressar a confiabilidade dos dados obtidos como sendo o resultado da Tabela 26.

<b>Incerteza</b>	<b>Confiança</b>
$6,789 < h < 7,067$	68,27%
$6,650 < h < 7,206$	95,45%
$6,511 < h < 7,345$	99,73%

Tabela 26 – Intervalo de confiança da experimentação efeito fotoelétrico. Fonte: Autor.

De 5.10 calcula-se  $\Phi/e = b$ :

$$\begin{aligned} \Phi/e &= \bar{V} - a\bar{f} \\ &= 0,85 - (0,433)(6,636) \\ &= -2,026 \times 10^{-19}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

O que nos leva a determinar

$$\Phi = (3,24 \times 10^{-34}) \text{ J}.$$

Assim, podemos escrever as melhores aproximações para a função trabalho  $\Phi$  e para a constante de Planck  $h$ .

## 6 Considerações Finais

Este trabalho foi confeccionado com o objetivo de aproximar o discente, e docente, de uma ferramenta interdisciplinar, a Física Experimental, que promove a Física e a Matemática. Através de um olhar destoadado, um olhar para questões fundamentais em relação a interpretação dos resultados obtidos em uma experimentação. Olhar este que pode ser estendido a muitas situações cotidianas.

As teorias e resultados apresentados colaboram para a justificativa e significado do uso da metodologia abordada sobre a interpretação de dados experimentais. Apesar de apresentar cálculos avançados e um olhar para o ensino superior, esse fato não impede os que procurarem este tipo de material de entenderem a mensagem principal sobre os cuidados e interpretação do ato de medir, ou seja, os conceitos desenvolvidos não impedem que este material seja acessível para alunos e professores do ensino médio que buscam incrementar suas ferramentas de ensino e disseminar ainda mais conhecimento.

Com relação ao suporte que o trabalho visa fornecer aos docentes, esperamos que as aplicações sejam capazes de sanar as dificuldades de entendimento, visto que os experimentos desenvolvidos neste trabalho tentam disseminar conhecimentos da física clássica e física contemporânea, por meio de ferramentas reais e virtuais, na tentativa da maior abrangência possível, promovendo a difusão dos estudos abordados, consequentemente provocando o conhecimento nos diversos estágios do processo de ensino aprendizagem.

Finalmente esperamos que seja um material que sirva de apoio para os professores que desejam inovar em suas aulas. Um material que promova o desenvolvimento científico, e que possa inspirar e estimular novos pesquisadores.

# Referências

- [1] ASANO, C. H., COLLI, E. **Cálculo Numérico - Fundamentos e Aplicações**. Universidade de São Paulo, Departamento de Matemática Aplicada. 2009
- [2] ATIYAH, M. **On the Word of Edward Witten**. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto, Japão, 1990, pag.31-36.
- [3] AVILA, G. **Kepler e a Órbita Elíptica**. Revista do Prof. de Matemática, 15, 2010.
- [4] BARON, M. E., BOS, H. J. M. **Curso de história da matemática: origem e desenvolvimento do cálculo**. Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1985.
- [5] BICUDO, I. **Platão e a Matemática**. Letras Clássicas, n.2, p.301-315, 1998.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos (Matemática)**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: [MEC], 2006. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>> Acesso em 25 Janeiro. 2019.
- [8] CABRAL, P. **Erros e Incerteza nas Medições**. Instituto Superior de Engenharia do Porto. Departamento de Física. Porto, Portugal, 2004.
- [9] CAMPOS, L. S., ARAUJO, M. S. T. **A Modelagem Matemática e a Experimentação Aplicadas ao Ensino de Física**. Anais do VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, Florianópolis – SC, 2009.
- [10] CORRADI, W. **Física Experimental**. Editora UFMG, Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.
- [11] CHAIB, J. P. M. C., ASSIS, A. K. T. **Ampère e a Origem do Magnetismo Terrestre**. Anais do I Simpósio de Pesquisa em Ensino e História de Ciências da Terra, Campinas - SP, 2007.
- [12] DIONISIO, P. H. **Física Quântica: de sua Pré-História à Discussão Sobre o Seu Conteúdo Essencial**. Cadernos IHU IDEIAS, 22, 2004.
- [13] FERREIRA, W. V. **Regressão Linear Simples Aplicada na Física Experimental no Ensino Médio**. Dissertação, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, UFG - Jataí, 2017.
- [14] FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Universidade Estadual



do Ceará, Fortaleza, 2002. Apostila.

[15] FRANCO, H. J. **A Idade Média, Nascimento do Ocidente**. Editora Brasiliense, 2 Ed., revista e ampliada, São Paulo, 2001.

[16] HEERDT, M. L., LEONEL, V. **Metodologia Científica e da Pesquisa**. Editora UnisulVirtual, Universidade do Sul de Santa Catarina, 5<sup>a</sup> Edição revisada e atualizada, Santa Catarina, Palhoça, 2007. Livro Didático.

[17] HELENE, O. A. M. **Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental**. Universidade de São Paulo, 2<sup>a</sup> Edição, Editora Edgard Blucher LTDA, São Paulo – SP, 1991.

[18] IBGE. **Metodologia do Censo Demográfico 2010**. Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2<sup>a</sup> Edição, Volume 41, Rio de Janeiro, 2016.

[19] MARICONDA, P. R. **Galileu e a ciência moderna**. Cadernos de Ciências Humanas – Especiaria, v.9, n.16, p.267-292, jul/dez, 2006.

[20] MARTINS, R. A. **A Origem Histórica da Relatividade Especial**. Editora Livraria da Física, 1<sup>a</sup> Edição, 2015.

[21] MEMÓRIA, J. M. P. **Breve História da Estatística**. Embrapa Informação Tecnológica, Brasília, DF, 2004.

[22] MUKAI, H., FERNANDES, P. R. G., **Manual de Laboratório - Física Experimental I**. Universidade Estadual de Maringá - UEM, Maringá, 2015.

[23] MUNIZ, S. R. **Fundamentos de Matemática II**. 2011. (Desenvolvimento de material didático ou instrucional - Livro texto).

[24] NASCIMENTO, M. L., SILVEIRA, I. R. **Objetos Matemáticos: O Concreto e o Abstrato no Processo de Ensino e Aprendizagem**. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática, p.1-11 São Paulo – SP, 2016.

[25] OBERZINER, A. P. B. **As Equações de Maxwell e Aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Florianópolis - SC, 2008.

[26] OLIVEIRA, J. R. S. **Contribuições e Abordagens das Atividades Experimentais no Ensino da Ciências: Reunindo Elementos para a Prática Docente**. Acta Scientiae, Canoas, V.12, n.1, p.139-153, Janeiro/Junho de 2010.

[27] PAPROCKI, J. **Nicolaus Copernicus: Médico e Astrônomo Polonês**. Revista Medicina Minas Gerias, 22(2), p.239-245, 2012.

[28] PASCO. **Instruction Manual Photoelectric Effect Apparatus PASCO Model n.SE-6609**.

- [29] POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.
- [30] PUGH, E. M., WINSLOW, G. H. **The Analysis of Physical Measurements**. Addison-Wesley Series in Physics, Estados Unidos da América, 1966.
- [31] ROSSETO, H. H. P. **Um Resgate Histórico: A Importância da História da Matemática**. Monografia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Medianeira – Pr, 2013.
- [32] SANTOS, M. A., ORLANDO, M. T. A. **Mecânica Clássica**. UFES - Núcleo de Educação Aberta e a Distância, Vitória - ES, 2012.
- [33] SMAILLI, S. S. **Migrantes, pós-colonialismo e fundamentalismo: enlaces entre Oriente e Ocidente e a questão do Islã**. Psicologia USP (Online), 26(2), p.145-151, 2015.
- [34] SOARES, L. H. **A Dialética Entre o Concreto e o Abstrato na Construção do Conhecimento Matemático**. Tese, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa – PB, 2015.
- [35] STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 1 e 2. 6ª Edição. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- [36] VELOSO, A. J. B. **Kepler e a Ciência Moderna**. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, 2004.
- [37] VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria de Erros**. 2ª Edição revista e ampliada, Editora Edgard Blucher LTDA, São Paulo – SP, 1996.
- [38] YOUNG, H. D. **Statistical Treatment of Experimental Data**. McGraw-Hill Book Company Inc., New York - NY, 1962.
- [39] WAGH, S. M. DESHPANDE, D. A. **Essentials of Physics. Volume 1**. Editora PHI Learning, 2013.
- [40] ZYLBERSZTAJN, A. **Galileu – Um Cientista de Várias Versões**. Caderno Catarinense de Ensino de Física, 5, p.36-48, 1988.

# A Histograma

Histograma é a distribuição da frequência da coleta de dados de uma pesquisa/experimentação em forma de barras verticais ou barras horizontais. O histograma é uma ferramenta importante que auxilia na determinação do tipo de distribuição da pesquisa, podendo ela ser gaussiana (normal), retangular, triangular entre outras. A determinação do tipo de distribuição da frequência dos dados coletados é importante para determinar o comportamento desta pesquisa dando subsídios para comprovar fatos ou prever ações futuras.

Para a construção de um histograma alguns passos devem ser respeitados. Eles são:

- Coletar os dados e organizá-los para uma melhor interpretação;
- Calcular a amplitude da amostra. A amplitude é dada pela diferença entre o maior e o menor valor da amostra e representada pela letra  $R$ , que provém da palavra *range* do inglês.
- Determinar o número de classes que é a quantidade de barras. Para isto não existe uma regra pré-estabelecida, pois depende do tamanho da amostra, geralmente utiliza-se a raiz quadrada do valor da quantidade de elementos da amostra, então tomamos o maior inteiro dessa raiz. Porém, não é necessário utilizar esta regra, mas devemos tomar o cuidado para que a faixa de variação (classe) não seja muito pequena e nem grande para que o histograma não seja descaracterizado. Assim, seja  $N$  o número de elementos da amostra e  $K$  o número de classes. O número de classes (usualmente/geralmente) é determinado por:

$$K = \sqrt{N}. \quad (\text{A.1})$$

- Determinar o intervalo entre as classes. O intervalo entre as classes, denotado por  $H$  é obtido pela razão da amplitude pelo número de classes:

$$H = \frac{R}{K}. \quad (\text{A.2})$$

Calcular os extremos das classes. O limite inferior pode ser a menor medida mensurada, também pode-se arredondar a menor medida mensurada para o menor número inteiro e então somar o intervalo de classe  $H$ . Escolhendo o limite inferior como parte de cada intervalo, ou seja, escolher um intervalo fechado inferiormente (este tipo de escolha também pode ser realizado em relação ao limite superior, a escolha cabe ao experimentador, levando em consideração a forma mais adequada).

- Distribuir as frequências de cada intervalo.

- Montar o histograma. Para a montagem pode-se fazer uso de programas como Excel, BrOffice, ou qualquer outro software de preferência ou até mesmo manualmente, onde no eixo das ordenadas (ou abcissas) coloca-se como sendo o eixo orientado dos intervalos de classe e no outro eixo valores para a frequência, em cada início e término de classe marcar sua posição em relação a sua frequência e traçar a coluna respectiva a aquele intervalo. Realizar este processo para cada um dos intervalos.

Como é possível verificar a seguir, o Exemplo 5 mostra os procedimentos propostos acima para a formação do histograma de acordo com a amostra coletada no exemplo.

**Exemplo 5.** A tabela representa os dados coletados do comprimento (em cm) de 40 calendários que foram distribuídos para os alunos, a medida foi realizada através de uma régua (graduada em mm). Vamos verificar como ficou o histograma dessa coleta de dados.

24,5	24,5	24,6	24,6	24,6	24,7	24,7	24,7	24,7	24,8
24,8	24,8	24,8	24,8	24,8	24,8	24,9	24,9	24,9	24,9
24,9	24,9	24,9	24,9	24,9	24,9	25,0	25,0	25,0	25,0
25,0	25,0	25,1	25,1	25,1	25,1	25,2	25,2	25,3	25,3

Tabela 27 – Comprimentos dos calendários (cm). Fonte: Autor.

Número de amostras:  $N = 40$ .

Amplitude:  $R = 25,3 - 24,5 = 0,8$

Número de Classes:  $K = \sqrt{N} = \sqrt{40} \approx 6,32 = 6 \Rightarrow K = 6$

Intervalo de Classe:  $H = \frac{R}{K} \approx 0,14$

Classe, Intervalo e Frequência:

Classe	Intervalo	Frequência
1 <sup>a</sup>	24,5 † 24,6	2
2 <sup>a</sup>	24,6 † 24,8	7
3 <sup>a</sup>	24,8 † 24,9	7
4 <sup>a</sup>	24,9 † 25,0	10
5 <sup>a</sup>	25,0 † 25,2	10
6 <sup>a</sup>	25,2 † 25,4	4

Tabela 28 – Frequência dos comprimentos dos calendários. Fonte: Autor.

Confeccionando o histograma, temos a Figura 20.

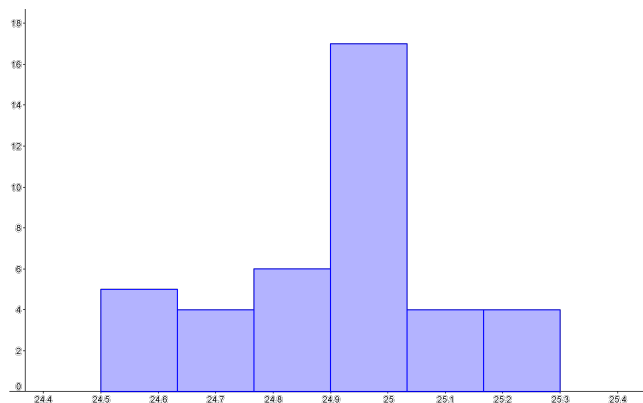


Figura 20 – Histograma da frequência das medidas do calendário.

Quando confeccionado o histograma será possível verificar o padrão (desenho) deste histograma, e então utilizar o procedimento adequado para determinação do desvio padrão, intervalo de confiança e estimativas de incerteza.