



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional - PROFMAT

# A Envoltória †

por

**José Luiz Lucena Travassos**

sob a orientação do

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

agosto/2013  
João Pessoa - PB

---

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

# A Envoltória

por

**José Luiz Lucena Travassos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UEPB (Orientador)**

---

**Prof. Dr. Lizandro Sánchez Challapa - UEPB**

---

**Prof. Dr. Miguel Fidencio Loayza Lozano - UFPE**

agosto/2013

# Agradecimentos

Quero agradecer a Deus que esteve ao meu lado nos momentos de dúvidas e ansiedades.

Aos idealizadores desse programa de mestrado nacional, que enfrentaram muito trabalho para pô-lo em prática, e aos professores do Departamento de Pós-graduação em Matemática da UFPB-Profmat pelo exemplo de dedicação e competência, em especial ao meu orientador Napoleón Caro Tuesta.

Aos companheiros de curso que ao longo desses dois anos de muitos estudos estavam sempre dispostos a ajudar a todos, em especial a: Laércio Francisco Feitosa; Charleson Clivandir de Araujo Silva e Luis Rodrigo D'andrade Bezerra, pelas críticas e sugestões.

A minha esposa Ana Silva Lima Travassos, pelas horas de digitação, carinho, conforto e aos meus filhos Henrique Luiz e Isabela pela paciência e disposição a ajudar, principalmente no inglês.

# Dedicatória

*À minha mãe Lilia, a primeira incentivadora da minha caminhada e ao meu pai Lula, pelo apoio de sempre. À minha esposa Aninha, pelo carinho, incentivo e dedicação. Aos meus filhos Henrique e Isabela, melhor presente de Deus na minha vida.*

# Resumo

Com auxílio do software GeoGebra, como recurso didático para ilustrar uma família de curvas e sua Envoltória.

No primeiro capítulo apresenta alguns exemplos de obtenção da equação de uma família de curva (segmentos, retas, circunferência) e algumas Envoltórias (reta, circunferência, parábola, elipse, hipérbole, lemniscata equilátera, cardióide) dessas família de curvas, como também a dedução de algumas propriedades da parábola e da hipérbole.

No segundo capítulo apresentamos um procedimento para a determinação da equação dessa envoltória com alguns exemplos de manipulações algébricas para determiná-la.

# Abstract

With the help of GeoGebra software, as didactic resource to illustrate a family of curves and its Envelope.

In the first chapter presents some examples of getting the equation of a curve family (segments, polyline, circle) and some Envelopes (line, circle, ellipse, parabola, Hyperbola, lemniscate equilateral, cardioid) of these family of curves, as well as the deduction of some properties of the parabola and the Hyperbola.

In the second chapter we present a procedure for the determination of the equation of this envelope with some examples of algebraic manipulations to determine it.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Famílias de Curvas em <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>1</b>
1.1	A equação de uma família de curvas em $\mathbb{R}^2$	1
1.1.1	Segmento de comprimento constante	2
1.1.2	Segmentos que determinam triângulos retângulos de área constante	3
1.1.3	Segmentos de soma constante	5
1.1.4	Ponto e reta	6
1.1.5	Circunferências com centro numa reta	7
1.1.6	Circunferência e um ponto	8
1.1.7	Vôo de um avião supersônico	10
1.2	Família de Curvas e suas envoltórias	13
1.2.1	Segmento e a perpendicular	13
1.2.2	Circunferência com centro numa circunferência	14
1.2.3	Trajetórias	15
1.2.4	Parábola de segurança	18
1.2.5	Propriedades da parábola	19
1.2.6	Zona de audibilidade	23
1.2.7	Algumas propriedades da hipérbole	24
1.2.8	Lemniscata	29
1.2.9	Cardióide	30
<b>2</b>	<b>Cálculo da Envoltória</b>	<b>32</b>
2.1	A diferenciação e a equação da Envoltória	32
2.1.1	Interseção de uma família de curvas	33
2.1.2	Curva discriminante	37
2.1.3	A astróide	40
2.1.4	Segmento que determinam triângulos retângulos de área constante	43
2.1.5	Segmento e soma constante	44
2.1.6	Segmento e sua perpendicular	46
2.1.7	Circunferências com centro numa reta	47

---

2.1.8	Circunferências com centro numa Circunferência . . . . .	48
2.1.9	A Hipérbole como envoltória . . . . .	49
2.1.10	A Elipse como envoltória . . . . .	51
2.1.11	Lemniscata . . . . .	54
<b>A</b>		<b>56</b>
A.1	Introdução . . . . .	56
A.1.1	Retas e circunferências . . . . .	56
A.1.2	Elipse . . . . .	58
A.1.3	Parábola . . . . .	59
A.1.4	Hipérbole . . . . .	59
A.1.5	Lemniscata . . . . .	61
A.1.6	Cardióide . . . . .	62
A.2	Noção de limite e derivada . . . . .	64
A.3	Derivada parcial . . . . .	64
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>65</b>

# Introdução

A *Envoltória* data de 1678 quando Christiaan Huygens apresentou um trabalho a academia de Ciências de Paris em um relatório intitulado *Traité de la lumière* que determinou a envoltória de uma família de circunferências como caso particular de uma *epicicloide*, a *nefroide*. O termo *envoltória* que hoje é chamado só veio aparecer em 1795, quando Gaspar Monge o usou em sua obra *Application de l'analyse á la géométrie*.

É fascinante pela simplicidade da ideia e o grande campo de aplicações como na física, em problemas de máximos e mínimos, em economia, em matemática financeira, engenharia, etc. Meu primeiro contato foi através de um livro "La Envolute" de Boltianski, indicado pelo meu orientador, Napoleón Caro Tuesta, para a partir deste fazer um trabalho e apresentá-lo com a finalidade de obter o título de mestre pela UFPB.

Este trabalho trata de alguns exemplos de famílias de curvas e de como determinar sua "envoltória", didaticamente viabilizado pelo avanço tecnológico da computação com o uso do software GeoGebra. No primeiro capítulo são estudados alguns exemplos de famílias de curvas, retas, circunferências, parábolas e algumas envoltórias como as parábolas de segurança, a zona de audibilidade, entre outras. No segundo capítulo estudamos o cálculo das envoltórias citadas no primeiro capítulo.



### 1.1.1 Segmento de comprimento constante

Tomemos um segmento de comprimento constante  $k$  em que suas extremidades deslizam nos lados de um ângulo reto.

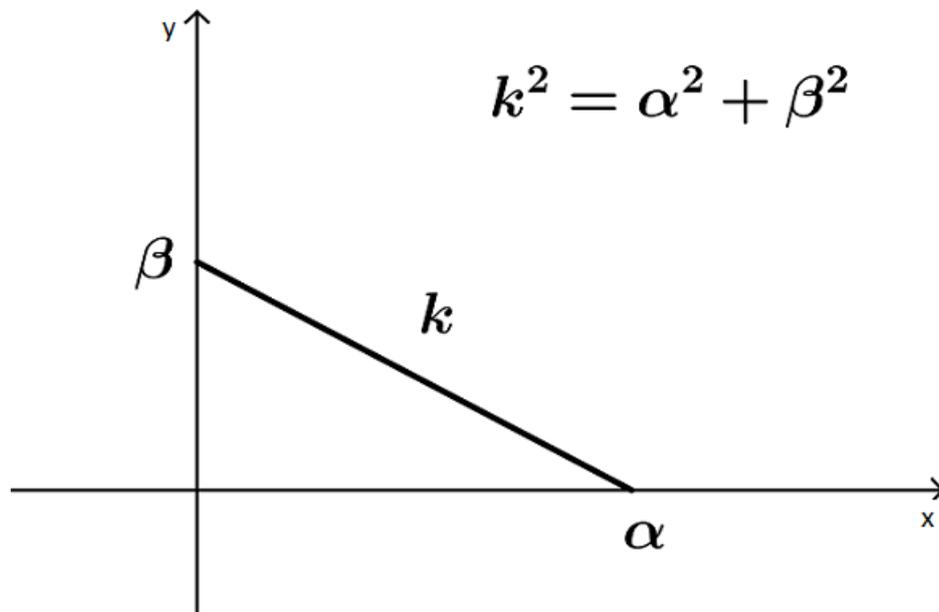


Figura 1.1:

Sejam A e B os pontos extremos desse segmento de comprimento  $k$ , que deslizem pelos eixos das coordenadas.

O ponto A deslizando no eixo das abscissas e B deslizando no eixo das ordenadas,  $A(\alpha, 0)$  e  $B(0, \beta)$ . O segmento AB está contido na reta de equação  $y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$ , com  $\alpha \neq 0$ , que também pode ser escrito na forma de

$$\alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0.$$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  se relacionam, pelo Teorema de Pitágoras, através da equação

$$\alpha^2 + \beta^2 = k^2.$$

Para cada  $\alpha$  escolhido teremos um  $\beta$  e conseqüentemente uma reta determinada, com isso, temos também agora uma família de retas de equação

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0 \\ g(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

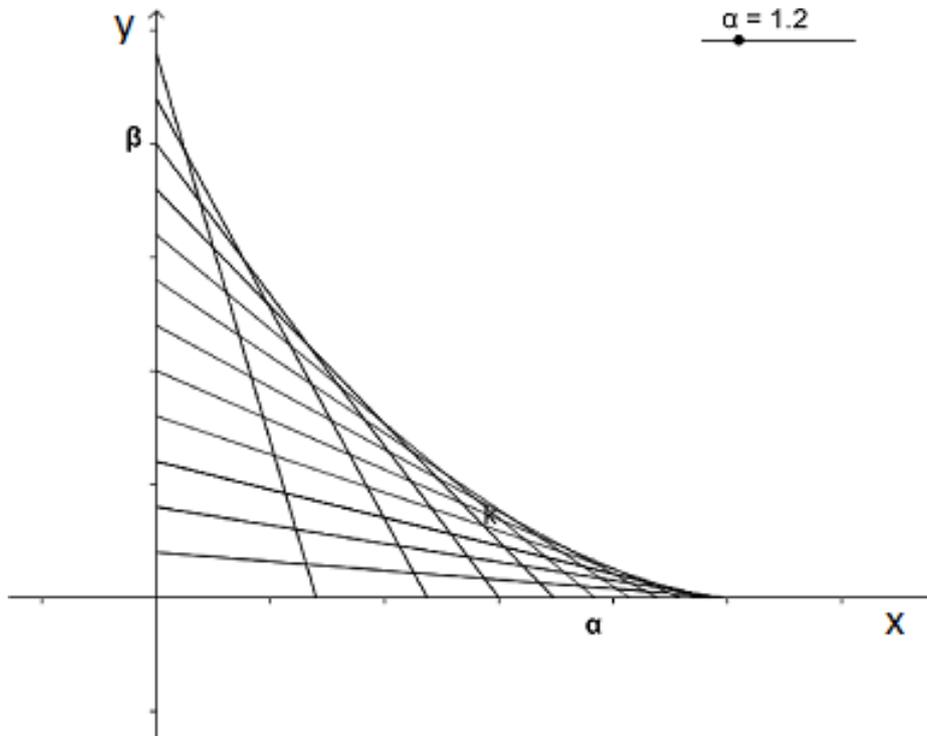


Figura 1.2:

### 1.1.2 Segmentos que determinam triângulos retângulos de área constante

Vamos estudar uma família de retas que determinam triângulos retângulos com os eixos de coordenadas de área constante igual a  $k > 0$ .

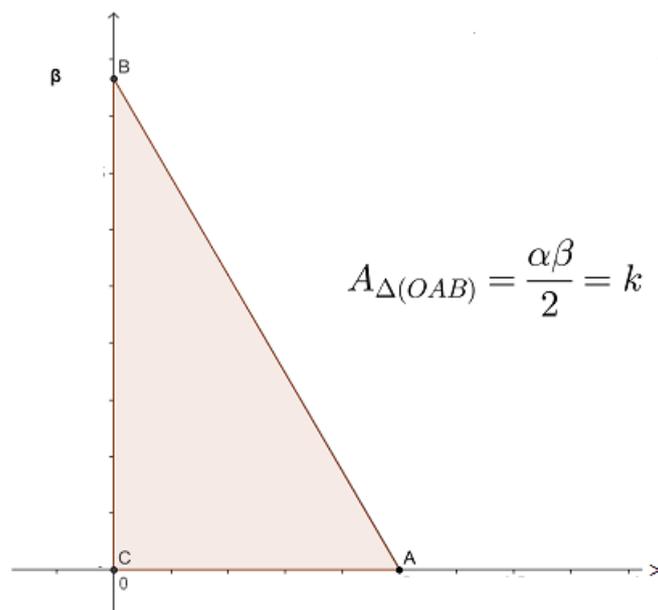


Figura 1.3:

Vamos escolher semelhantemente ao exemplo anterior os eixos que são dados

pelas coordenadas e os pontos de interseção com os eixos das abscissas e das ordenadas, respectivamente,  $A(\alpha, 0)$  e  $B(0, \beta)$ . As retas de equação (1.5) e os parâmetros se relacionam de maneira diferente do exemplo anterior. Neste caso,  $\alpha$  e  $\beta$ , são os catetos de um triângulo retângulo de área igual a  $k$ , ou seja,  $\frac{\alpha\beta}{2} = k$ . Portanto,  $\alpha\beta = 2k$ . Logo, a família é determinada pelas equações:

$$\begin{cases} \alpha y + \beta x - 2k = 0 \\ \alpha\beta - 2k = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

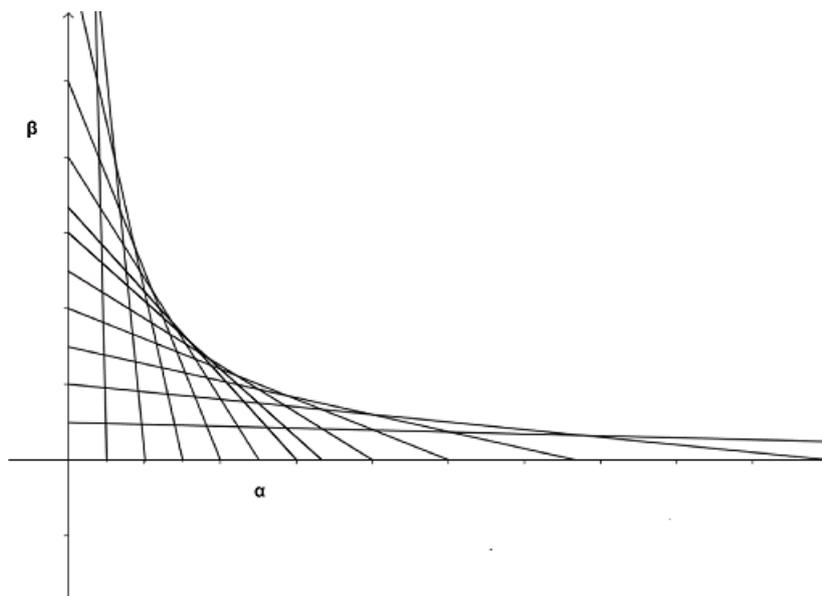


Figura 1.4:

### 1.1.3 Segmentos de soma constante

Considere a família de segmentos que determinam um triângulo retângulo com ângulo reto determinado pelos eixos coordenados e cuja soma dos comprimentos dos catetos é uma constante  $k$ .

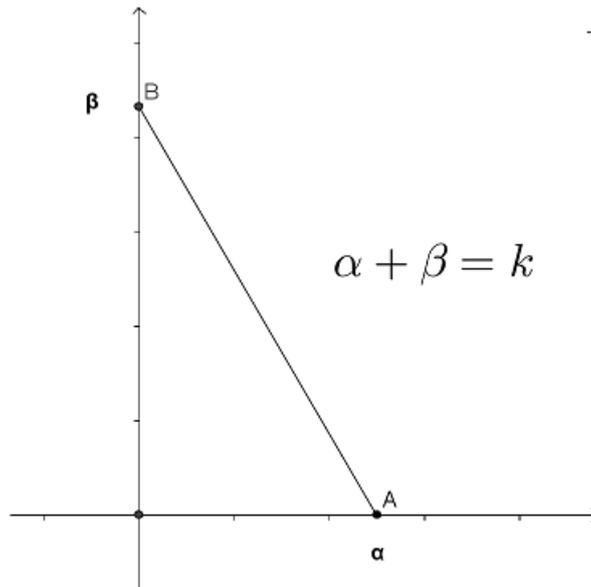


Figura 1.5:

Como no exemplo anterior vamos escolher os pontos A e B como extremidades desses segmentos. O ponto A deslizando no eixo das abscissas e B deslizando no eixo das ordenadas,  $A(\alpha, 0)$  e  $B(0, \beta)$ . Para determinar as equações dessa família vamos utilizar a equação da reta suporte desses segmentos e a relação entre os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . A equação da reta determinada pelas interseções com os eixos é

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta; \alpha \neq 0$$

e a equação que relacionam  $\alpha$  e  $\beta$  é

$$\alpha + \beta = k.$$

Assim, o sistema de equações que determinam essa família de segmentos é:

$$\begin{cases} \alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0 \\ \alpha + \beta - k = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

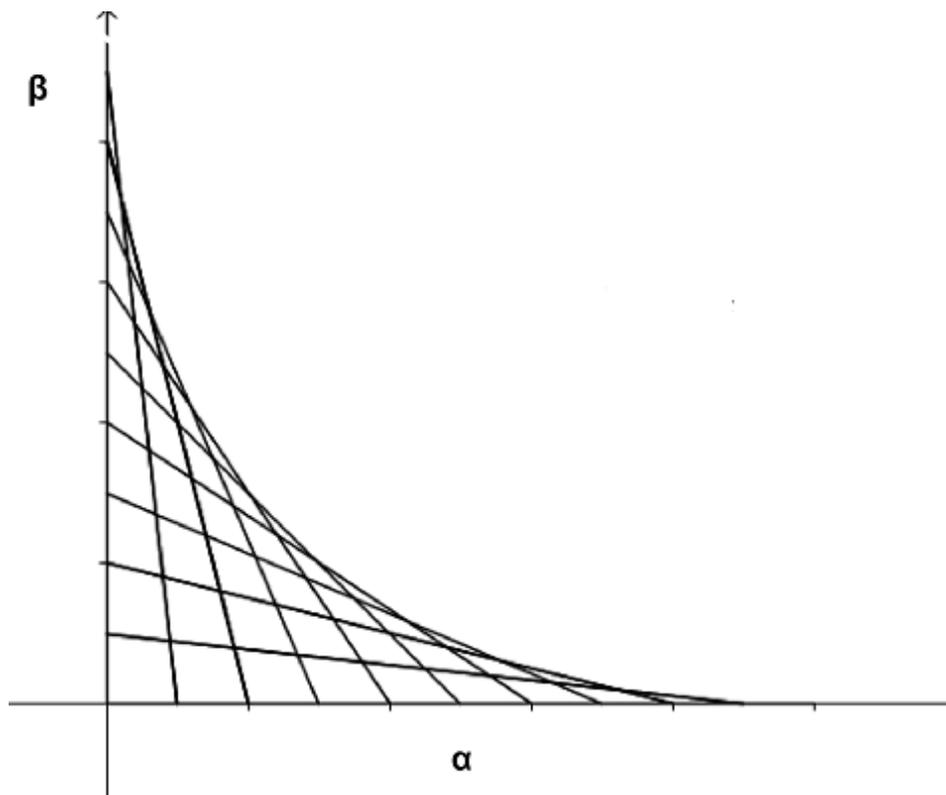


Figura 1.6:

### 1.1.4 Ponto e reta

Um ponto  $A$ , se move livremente sobre uma reta  $l$  e está ligado a um ponto  $F$ , exterior à reta. Vamos examinar a família de todas as retas, passando em  $A$ , perpendiculares ao segmento  $AF$ . Escolheremos o ponto  $A$  no eixo das abscissas.

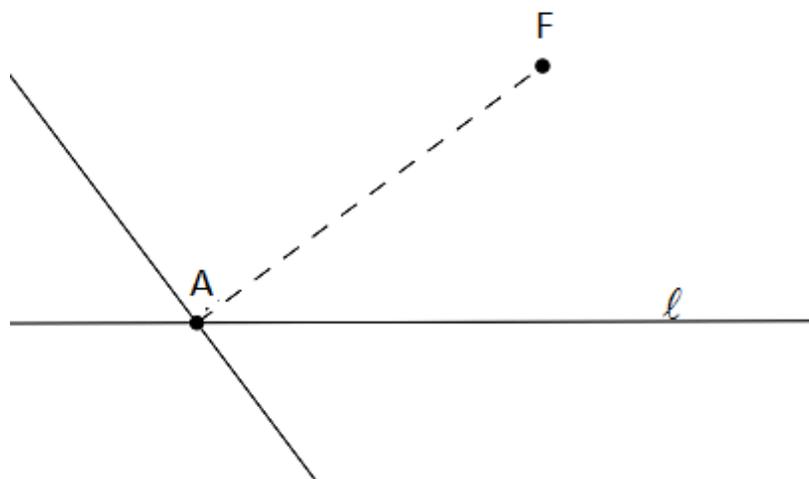


Figura 1.7:

Assim suas coordenadas são da forma  $(\alpha, 0)$  e o ponto  $F$  está fixo no eixo das

ordenadas  $(0, p)$ . A família de retas perpendiculares ao segmento AF é obtido da seguinte maneira. Para cada  $\alpha$  corresponde uma reta de ponto  $P(x, y)$  formando um triângulo retângulo FAP, logo,  $AP^2 + AF^2 = FP^2$  e escrevendo a equação

$$(x - \alpha)^2 + y^2 + \alpha^2 + p^2 = x^2 + (y - p)^2.$$

Desenvolvendo temos

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 + \alpha^2 + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2.$$

Simplificando obtemos

$$py - \alpha x + \alpha^2 = 0, \tag{1.8}$$

que é a equação dessa família de retas.

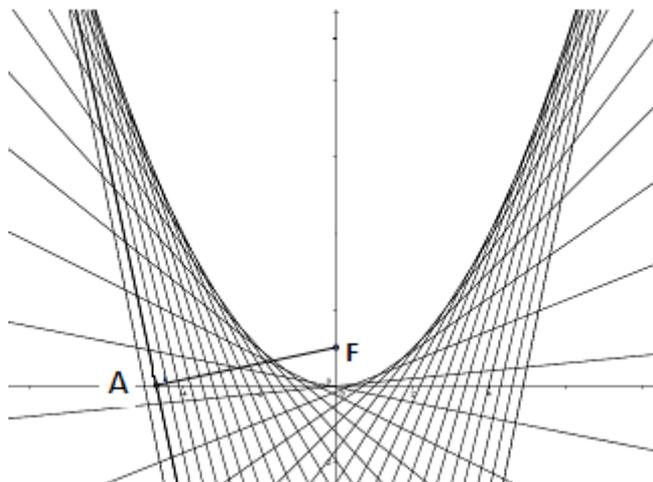


Figura 1.8:

### 1.1.5 Circunferências com centro numa reta

Um exemplo geometricamente simples e que fica claro que para encontrarmos a equação de uma dessas circunferência escolheremos um raio  $R$  e o centro de coordenadas  $(\alpha, \beta)$  numa reta  $l$ .

Sem perda de generalidade vamos escolher para essa reta  $l$  o eixo das abscissas. Portanto a ordenada  $\beta = 0$ , o centro da circunferência  $(\alpha, 0)$  e sua equação é

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2,$$

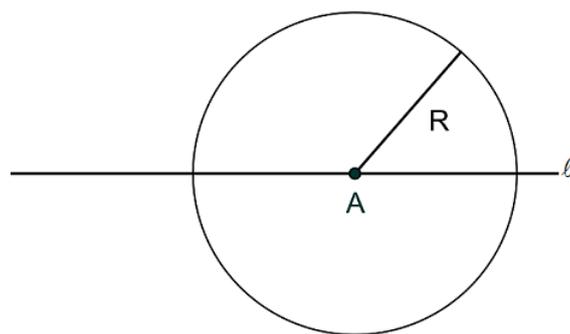


Figura 1.9:

que também pode ser escrita na forma

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0. \quad (1.9)$$

Para cada valor escolhido do parâmetro  $\alpha$ , obtemos uma circunferência dessa família, por essa razão a equação (1.9) é chamada de equação da família de circunferência de raio  $R$  e centro no o eixo das abscissas. Essa equação é formada pelas variáveis  $x$ ,  $y$  e o parâmetro  $\alpha$ .

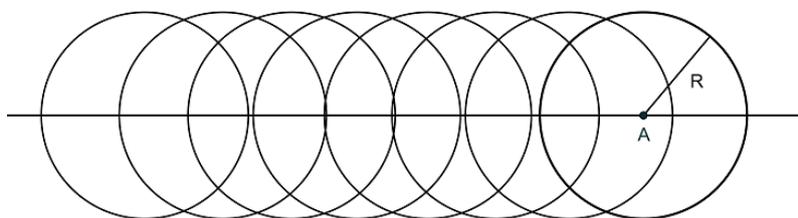


Figura 1.10:

### 1.1.6 Circunferência e um ponto

Neste exemplo, tomaremos uma circunferência de raio  $2a$  e centro no ponto  $F_1$ . Escolhemos outro ponto  $F_2$  no interior desta que está a uma distância  $2c$  de  $F_1$  e um ponto  $A$  pertencente à circunferência. Construímos o segmento de  $AF_2$  e no seu ponto médio traçamos uma reta perpendicular  $L$ .

Nos interessa agora a equação da família de todas essas retas  $L$ . Vamos escolher  $F_1$  e  $F_2$  pertencentes ao eixo das abscissas de coordenadas  $c$  e  $-c$ , respectivamente. Seja o ponto  $A$  de coordenadas  $(\alpha, \beta)$  e um ponto  $M$  de coordenadas  $(x, y)$  pertencente a reta  $L$ . A mediatriz é o lugar geométrico de todos os pontos que estão a mesma distância de  $A$  e  $F_2$ , ou seja,  $MF_2 = AM$  ou  $MF_2^2 = AM^2$ , que é o mesmo

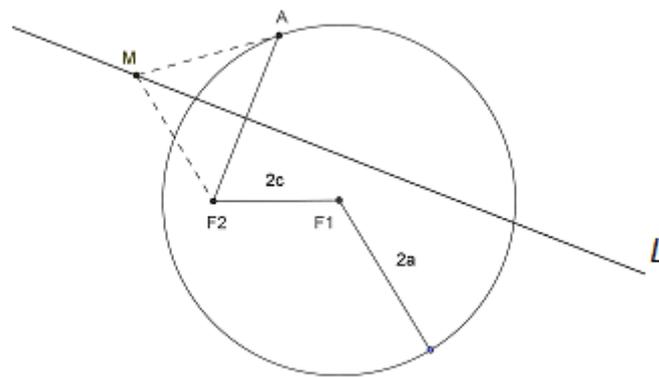


Figura 1.11:

que

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (x + c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo essa equação nos dá

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$

e finalmente

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2cx - c^2 = 0. \quad (1.10)$$

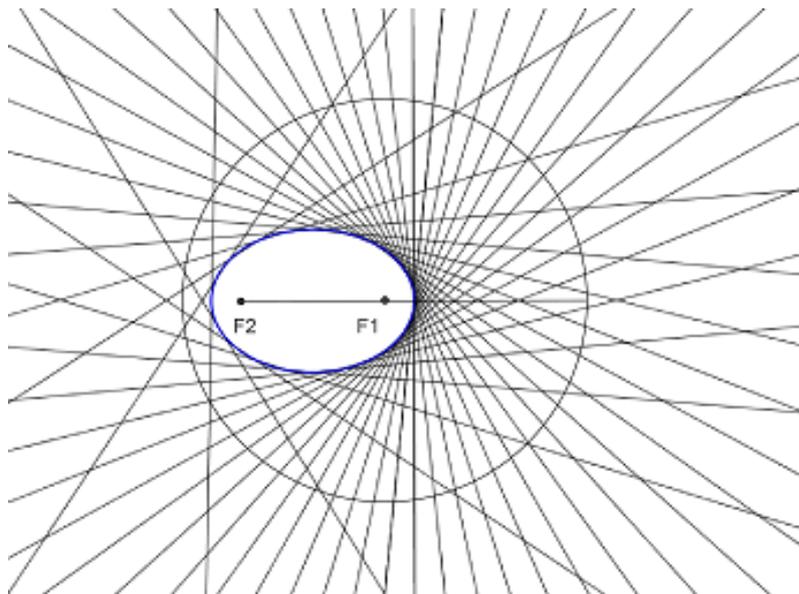


Figura 1.12:

Como o ponto A pertence a circunferência de raio  $2a$ , podemos relacionar  $\alpha$  e  $\beta$

na equação

$$(\alpha - c)^2 + \beta^2 = 4a^2,$$

que desenvolvendo os parênteses e simplificando nos dá

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + c^2 - 4a^2 = 0. \quad (1.11)$$

Das equações 1.10 e 1.11 obtemos as equações dessa família de retas

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2cx - c^2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + c^2 - 4a^2 = 0. \end{cases}$$

### 1.1.7 Vôo de um avião supersônico

Um avião voa a uma altura  $h$  da superfície terrestre com uma velocidade supersônica  $v$ , isto é, acima da velocidade do som no ar  $u$ . Nos perguntamos quais pontos na região da superfície terrestre que um observador, já ouviu ou vai ouvir o som do motor do avião.

A velocidade do som no ar é de aproximadamente 343 m/s ou 1234,8 km/h, sendo considerada a velocidade mínima para que qualquer corpo consiga ultrapassar a barreira do som. Considera-se de supersônica a velocidade do corpo entre 1486 km/h e 6192 km/h e de hipersônica acima de 6192 km/h. Suponha que a superfície

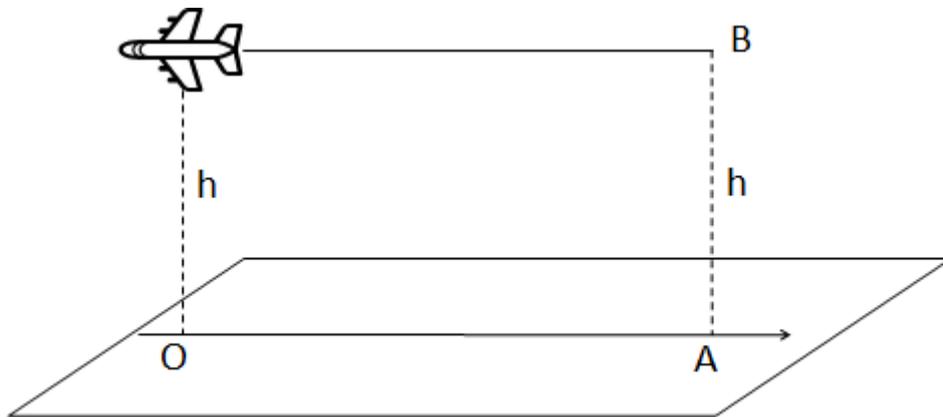


Figura 1.13:

terrestre é perfeitamente plana sobre a qual voa o avião com velocidade  $v$  e altura  $h$  constantes. Tomemos na superfície terrestre uma reta  $l$ , a qual é paralela a trajetória retilínea do avião num certo instante  $t$ , orientada da direita para a esquerda. Chame de  $B$  o ponto onde se encontrava o avião  $t$  segundos atrás, de  $A$  o ponto na superfície terrestre perpendicularmente abaixo do ponto  $B$  e de  $O$  a origem na superfície terrestre perpendicularmente abaixo do avião após  $t$  segundos. Um avião com velocidade supersônica o ruído do motor se propaga no ar em todas as direções

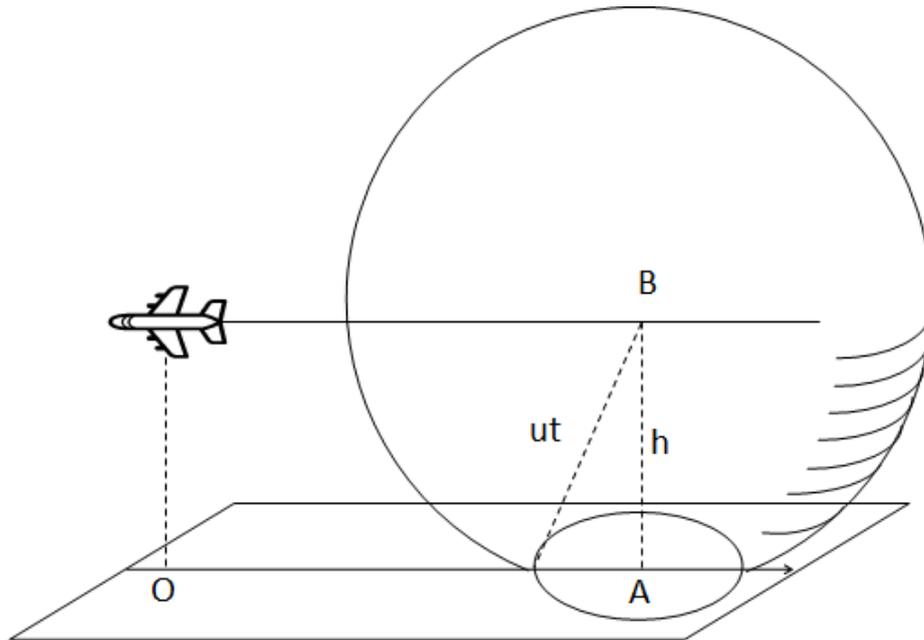


Figura 1.14:

sob uma esfera de raio  $ut$  e centro em  $B$  (ver fig. 2.14). A interseção com a superfície terrestre é uma circunferência de raio  $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$  e centro em  $A$ . A medida que diminui o tempo  $t$  vamos obtendo círculos menores até que  $ut = h$ , ou seja, um ponto entre  $O$  e  $A$  (Fig. 2.15).

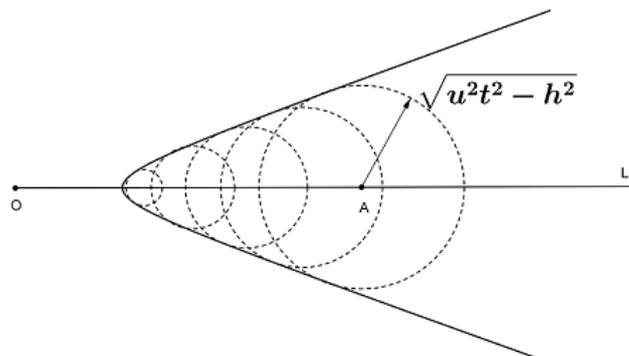


Figura 1.15:

Sendo o ponto  $O$ , cento do sistema de eixos, e o ponto  $A$  de coordenadas  $(\alpha, 0)$  cada uma das circunferências dessa família satisfaz a equação

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = u^2t^2 - h^2,$$

onde  $\alpha = vt$ . Daí, fazendo  $t = \frac{\alpha}{v}$  obtemos a equação

$$\alpha^2 - \frac{u^2\alpha^2}{v^2} - 2x\alpha + x^2 + y^2 + h^2 = 0.$$

Com isso a equação dessa família de circunferências é

$$\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)\alpha^2 - 2\alpha x + x^2 + y^2 + h^2 = 0. \quad (1.12)$$

## 1.2 Família de Curvas e suas envoltórias

**Definição 1** Dada uma certa família de curvas em  $\mathbb{R}^2$ , chamamos de **Envoltória** dessa família de curvas, a curva que em cada um de seus pontos é tangente com alguma curva da família.

Para tornar mais claro, vamos examinar alguns exemplos a seguir de maneira Geométrica e/ou Algébrica.

### 1.2.1 Segmento e a perpendicular

Tomemos um ponto A qualquer no plano e um segmento AB, de comprimento R. Passando por B tracemos uma reta perpendicular ao segmento AB.

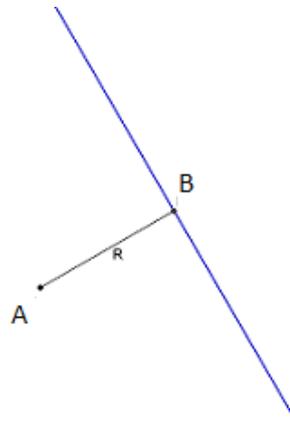


Figura 1.16:

A família de todas as retas perpendicular ao segmento AB é uma circunferência de raio R com centro em A, a qual será a *envoltória* dessa família de retas.

Tomemos A na origem do sistema e B de coordenadas  $(\alpha, \beta)$ . A reta AB tem equação  $\alpha y - \beta x = 0$  e a reta perpendicular a esta, tem equação

$$\alpha x + \beta y - R^2 = 0,$$

para o ponto B temos  $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$ . Portanto a equação da família de reta perpendicular é:

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y - R^2 = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

Note que o ponto B é o ponto da circunferência que toca a reta perpendicular ao segmento AB, ou seja, para cada reta existe um ponto B que toca a circunferência, assim todas as reta são tangentes a circunferência de raio R e centro em A, que é a Envoltória dessa família.

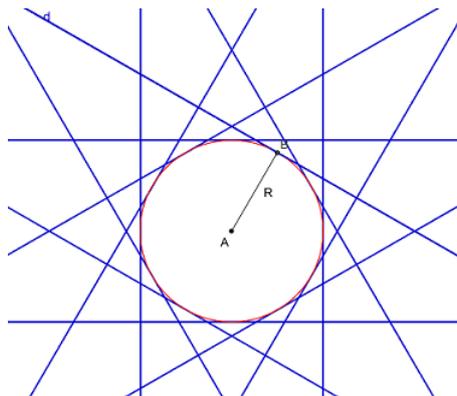


Figura 1.17:

### 1.2.2 Circunferência com centro numa circunferência

Uma família de circunferência de raio  $r$  com centro em uma circunferência de raio  $R$ . A circunferência de raio  $r$  com centro no ponto  $A$ , conforme a (Fig.2.18),

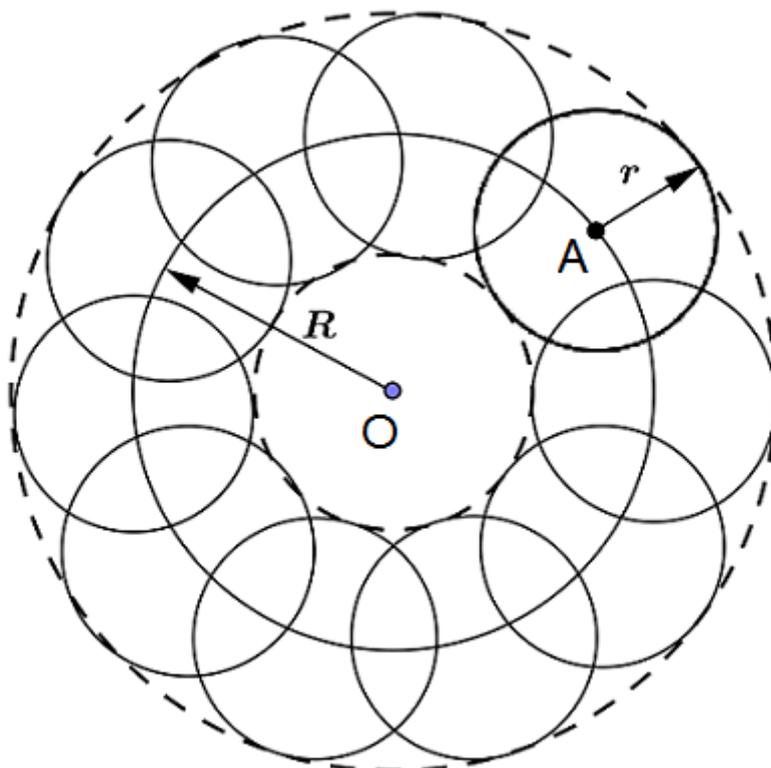


Figura 1.18:

tem a equação

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Tomemos a família de circunferência exposta na Fig.2.18. Adotemos o ponto O como a origem do sistema de coordenadas. Seja A um ponto que pertence a circunferência de raio R com centro na origem das coordenadas. Atribuiremos a abscissa de A o parâmetro  $\alpha$  e sua ordenada pelo parâmetro  $\beta$ , ou seja, o ponto  $A(\alpha, \beta)$ . Então os números  $\alpha$  e  $\beta$  satisfaz a relação

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2$$

As equações acima determinam a família de circunferências que estudamos. Precisamente a equação de uma circunferência de raio r e que exige que seu centro  $(\alpha, \beta)$  e pertença a circunferência de raio R e centro no ponto O. Eliminando os parênteses e passando todos os termos para o lado esquerdo voltamos a escrever as equações acima na forma

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

A primeira destas equações, além de x, y, contém dois parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ ; a segunda equação vincula estes dois parâmetros. Esta será a forma que vamos examinar a família de circunferência.

A Envoltória desta família é composta por duas circunferências com raios  $R + r$  e  $R - r$  (Fig.2.18) e centro no ponto O.

### 1.2.3 Trajetórias

Um corpo, lançado sob um ângulo em relação a horizontal, descreve uma trajetória próxima de uma parábola devido a ação de forças que encontramos na natureza, por exemplo a força da gravidade e a força da resistência do ar. Um projétil descreve uma trajetória chamada de *curva balística*.

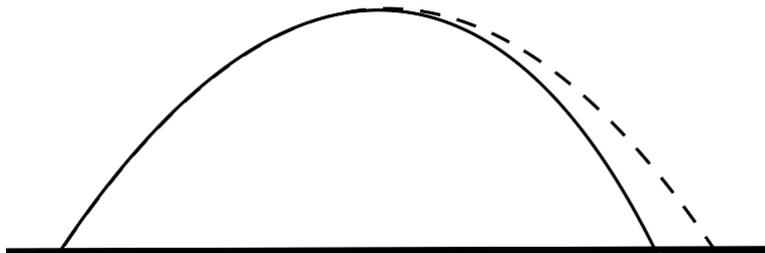


Figura 1.19: Curva Balística

Desconsiderando a resistência do ar, a trajetória de um projétil descreveria uma parábola. Na Fig.2.19 a curva tracejada representa a parábola e a curva contínua a curva balística.

Vamos estudar a partir daqui a trajetória descrita pelo lançamento de um projétil considerando apenas a força da gravidade e desprezando a força da resistência do ar e outras forças menos significativas.

Seja  $v$  o módulo da velocidade instantânea, esta velocidade tem duas componentes, uma horizontal e uma vertical, que serão representadas por  $v_x$  e  $v_y$  respectivamente, tal que

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

esta velocidade tem a direção e o sentido variáveis ao longo dessa trajetória. A direção é tangente em cada ponto da trajetória e o sentido é o mesmo do movimento do projétil.

Chamaremos a força de gravidade  $P = mg$  constante e com direção vertical e sentido para baixo. Daí a velocidade sofre ação da aceleração de gravidade  $g$  apenas na componente vertical, ou seja, como a componente horizontal é perpendicular a  $g$  não sofre variação e sua intensidade é constante.

Considerando o sentido positivo na vertical para cima e na horizontal para a direita, a componente vertical tem movimento retardado na subida e acelerado na descida, que na Física do ensino médio chamamos de *Movimento Uniformemente Variado* e a horizontal *Movimento Retilíneo Uniforme*, atribuiremos a velocidade inicial  $v_o$ , logo as equações das velocidades são:

$$v_x = v_{xo}; \tag{1.14}$$

$$v_y = v_{yo} - gt. \tag{1.15}$$

determinam o módulo da velocidade em cada instante.

Vamos agora estudar a posição do corpo em cada instante, adotaremos A o ponto inicial de lançamento de coordenadas  $(0, y_o)$ ,  $y = OB$  altura acima da superfície da Terra e  $x = OF$  a distância horizontal e as equações de posição do corpo são:

$$x = v_x t; \tag{1.16}$$

$$y = y_o + v_{yo}t - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.17}$$

A altura máxima H ocorrerá quando  $v_y = 0$ , ou seja, quando

$$t = \frac{v_{yo}}{g} \tag{1.18}$$

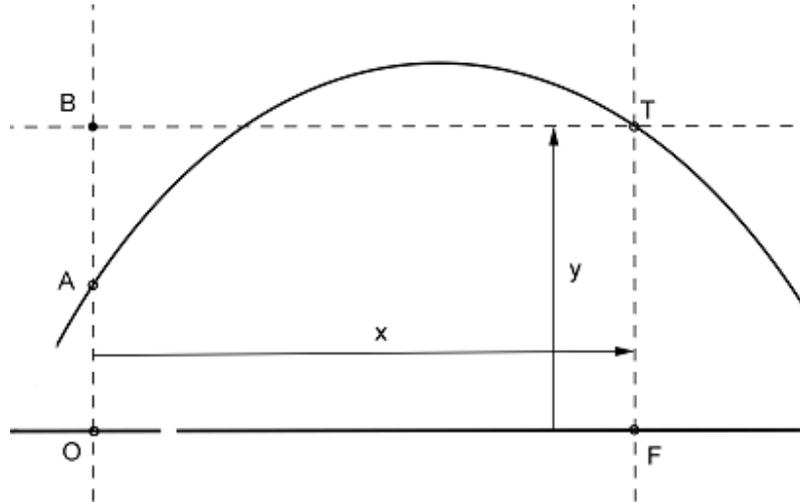


Figura 1.20:

Substituindo em (1.17) obtemos

$$H = y_o + \frac{v_{yo}^2}{2g} \quad (1.19)$$

Vamos ao lançamento de um projétil por um canhão de um certo ponto O na superfície da terra para a direita sob um ângulo  $\phi$  com horizontal a uma velocidade inicial  $v_o$ , desprezando a altura do canhão em relação a superfície terrestre, analogamente para a esquerda, termos o ângulo  $180^\circ - \phi$ .

O alcance máximo X ocorre quando  $y = 0$  e  $y_o = 0$ , ou seja, de (1.17)

$$v_{yo}t - \frac{gt^2}{2} = 0$$

quando  $t = 0$  é instante inicial e

$$t = \frac{2v_{yo}}{g} \quad (1.20)$$

o instante final, obteremos o alcance máximo X em função de  $v_{xo}$  e  $v_{yo}$  ao escrever esta expressão como

$$X = \frac{2v_{xo}v_{yo}}{g} = \frac{(v_{yo})^2 + (v_{xo})^2 - (v_{yo} - v_{xo})^2}{g} = \frac{v_o^2 - (v_{yo} - v_{xo})^2}{g}$$

encontraremos a distancia máxima quando  $v_{yo} - v_{xo} = 0$ , ou seja, quando  $v_{yo} = v_{xo}$  que significa  $\phi = 45^\circ$ , essa distância é

$$X = \frac{v_o^2}{g} \quad (1.21)$$

duas vezes maior que a altura máxima H.

### 1.2.4 Parábola de segurança

A parábola de segurança limita uma zona em que qualquer projétil lançado tem sua trajetória sob essa parábola e todo alvo que esteja fora dessa parábola não será alcançado.

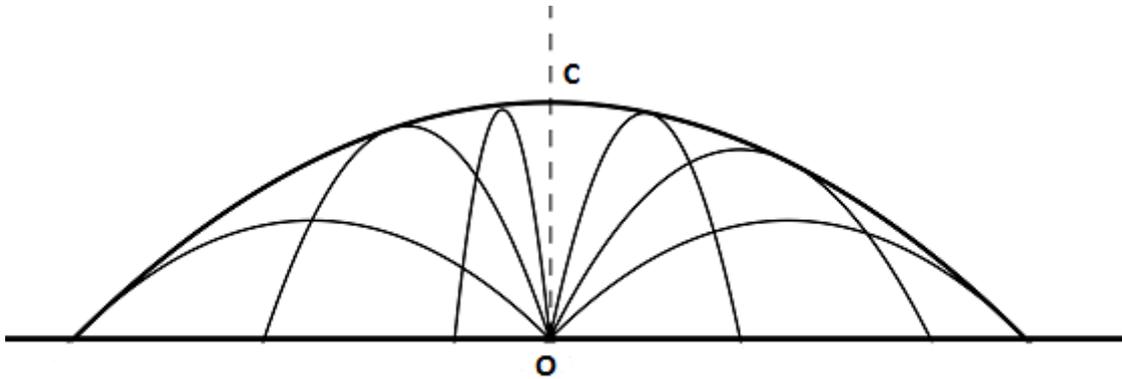


Figura 1.21: Parábola de Segurança

A envoltória de todas as trajetórias possíveis do lançamento de um projétil, sob as condições que estudamos, é a parábola de segurança, que vamos determinar sua equação, considerando sua altura máxima e seu alcance máximo e levando em conta que o canhão encontra-se na origem do eixo de coordenadas.

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Vamos estudar a parábola de segurança para  $x > 0$ , o ponto inicial será o ponto de altura máxima e portanto sua equação sob a ação da gravidade após  $t$  segundos do lançamento será

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}$$

e

$$x = v_0 t.$$

Queremos mostrar que as trajetórias dos projéteis lançados sob as mesmas condições já mencionadas anteriormente não cruza a parábola de segurança.

Tomemos agora a equação do lançamento do projétil sob um ângulo  $\phi$  do ponto O, ou seja,

$$y' = v_{y0} t' - \frac{gt'^2}{2}$$

e

$$x = v_{x0} t'.$$

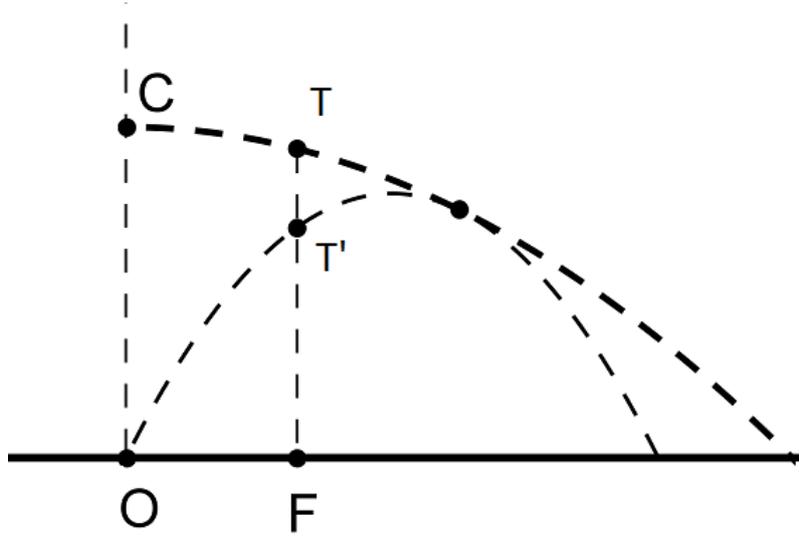


Figura 1.22:

Fazendo  $OF = v_o t = v_{xo} t'$ , que é igual a  $t' = \frac{v_o}{v_{xo}} t$  e substituindo na equação

$$y - y' = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} - v_{yo} t' + \frac{gt'^2}{2},$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} - v_o t \frac{v_{yo}}{v_{xo}} + \frac{gt^2}{2} \left( \frac{v_o}{v_{xo}} \right)^2 &= \frac{1}{2g} \left( v_o^2 - 2gv_o \frac{v_{yo}}{v_{xo}} t + g^2 t^2 \left( \frac{v_o}{v_{xo}} \right)^2 - g^2 t^2 \right) \\ &= \frac{1}{2g} \left[ v_o^2 - 2gv_o \frac{v_{yo}}{v_{xo}} t + g^2 t^2 \left( \left( \frac{v_o}{v_{xo}} \right)^2 - 1 \right) \right] = \frac{1}{2g} \left[ v_o^2 - 2gv_o \frac{v_{yo}}{v_{xo}} t + g^2 t^2 \left( \frac{v_o^2 - v_{xo}^2}{v_{xo}^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2g} \left[ v_o^2 - 2gv_o \frac{v_{yo}}{v_{xo}} t + g^2 t^2 \left( \frac{v_{yo}}{v_{xo}} \right)^2 \right] = \frac{1}{2g} \left[ v_o - gt \frac{v_{yo}}{v_{xo}} \right]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Concluimos então que a parábola de segurança envolve todas as trajetórias e que só toca em um ponto, quando  $y = y'$ , ou seja, quando  $v_o = gt \frac{v_{yo}}{v_{xo}}$ , para o instante  $t = \frac{v_o v_{xo}}{g v_{yo}}$ .

### 1.2.5 Propriedades da parábola

Usaremos a parábola de segurança para verificar duas propriedades da parábola. A primeira propriedade, que é usada como definição da parábola, refere-se a distância, ou seja, a parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um dado ponto O e de uma reta dada d (fig. 1.13). O ponto O é chamado o foco da parábola e a reta d, diretriz (ver Fig. 1.23).

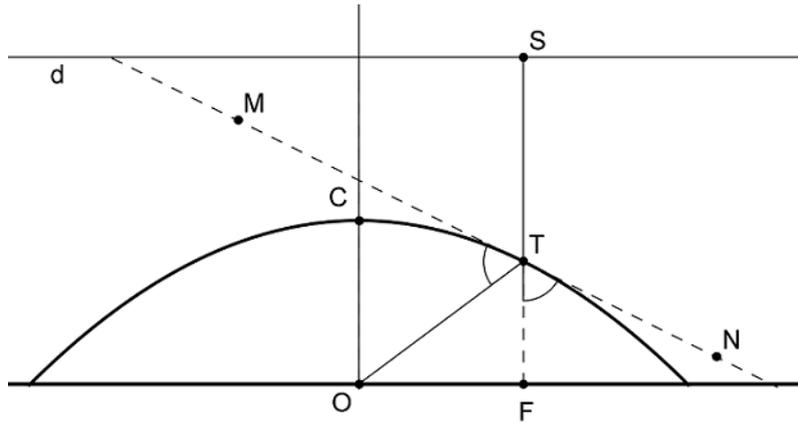


Figura 1.23:

Queremos mostrar que a distância de O a T é igual a distância de T a reta d, assim

$$OT = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{(v_{ot})^2 + \left(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{v_o^2}{2g} + \frac{gt^2}{2}\right)^2} = \frac{v_o^2}{2g} + \frac{gt^2}{2} = \frac{v_o^2}{g} - h.$$

Vamos considerar como diretriz a reta  $y = \frac{v_o^2}{g}$  que é o dobro da distância do foco, o ponto O. Então a distância do ponto T a diretriz d é:

$$TS = SF - h = \frac{v_o^2}{g} - h,$$

com isso encerramos a primeira propriedade.

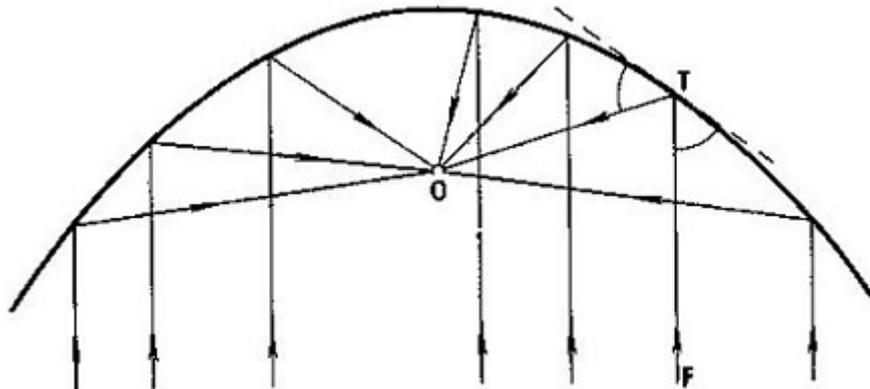


Figura 1.24:

Vamos estudar agora uma outra propriedade que diz respeito ao ângulo. A lei de Snell-Descartes, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de refração, considerando o mesmo meio (ver Fig. 1.24).

Temos que mostrar que

$$\angle FTN = \angle OTM,$$

para isso vamos determinar a tangente de cada ângulo. Seja MN a reta tangente a parábola de segurança no ponto T. A direção da tangente e da velocidade no ponto T são iguais,  $v_x = v_{xo} = v_o$ ,  $v_{yo} = 0$  e portanto  $v_y = -gt$ , então:

$$tg\angle FTN = -\frac{v_x}{v_y} = -\frac{v_o}{-gt} = \frac{v_o}{gt}.$$

Antes de determinar  $tg\angle OTM$  vamos escrever algumas relações:

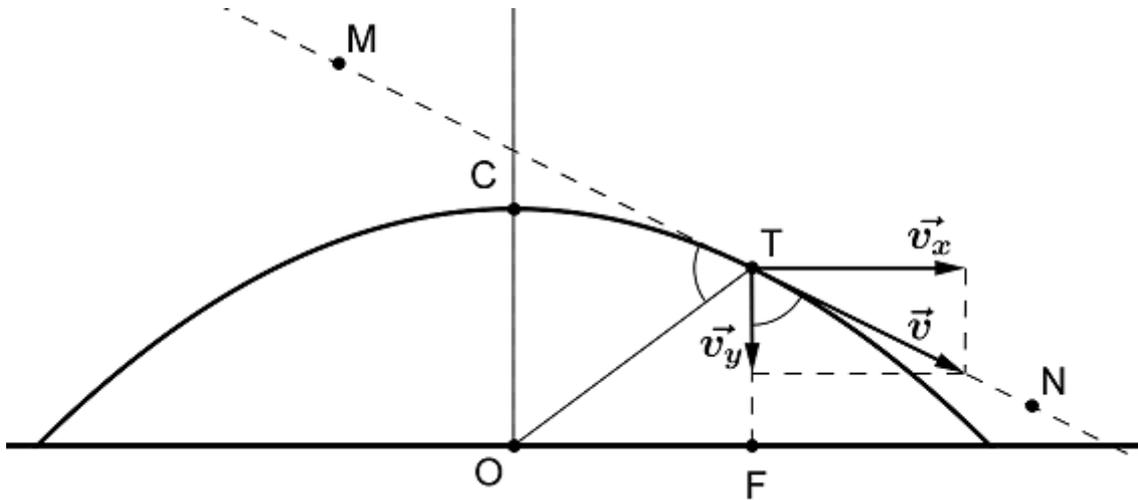


Figura 1.25:

$$tg\angle OTF = \frac{x}{h} = \frac{v_o t}{\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}}.$$

Da trigonometria, a tangente de dois ângulos suplementares são simétricos e que a tangente da soma de dois ângulos é o quociente entre a soma das tangentes por um menos o produto das tangentes. Passemos ao cálculo da tangente do ângulo  $\angle OTM$ . Vejamos

$$\begin{aligned} tg\angle OTM &= tg(180^\circ - \angle OTN) = -tg\angle OTN = -tg(\angle FTN + \angle OTF) \\ &= -\frac{tg\angle FTN + tg\angle OTF}{1 - tg\angle FTN tg\angle OTF} = \frac{tg\angle FTN + tg\angle OTF}{tg\angle FTN tg\angle OTF - 1} \end{aligned}$$

O numerador é:

$$\frac{v_o t}{\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}} + \frac{v_o}{gt} = \frac{v_o g t^2 + v_o \left( \frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} \right)}{gt \left( \frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} \right)}$$

$$= \frac{\frac{v_o}{g}(g^2t^2 + \frac{v_o^2}{2} - \frac{g^2t^2}{2})}{gt(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2})} = \frac{\frac{v_o}{g}(\frac{v_o^2}{2} + \frac{g^2t^2}{2})}{gt(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2})}$$

O denominador é:

$$\frac{v_o^2t}{gt(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2})} - 1 = \frac{v_o^2t - gt(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2})}{gt(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2})}$$

$$= \frac{t(v_o^2 - \frac{v_o^2}{2} + \frac{g^2t^2}{2})}{gt(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2})} = \frac{t(\frac{v_o^2}{2} + \frac{g^2t^2}{2})}{gt(\frac{v_o^2}{2g} - \frac{gt^2}{2})}$$

Finalmente, reunindo numerador e denominador, obtemos :

$$tg\angle OTM = \frac{v_o}{gt}.$$

É essa propriedade da parábola que nos permite afirmar que, se esta tem uma superfície lisa espelhada, um fecho de luz paralelo ao eixo de simetria da parábola convergem para o foco da parábola, e da mesma forma se temos um ponto de luz no foco da parábola essa luz é refletida paralelamente ao seu eixo, ou seja, no primeiro caso a antena parabólica e no segundo caso um farol, são exemplos de aplicação da superfície parabólica.

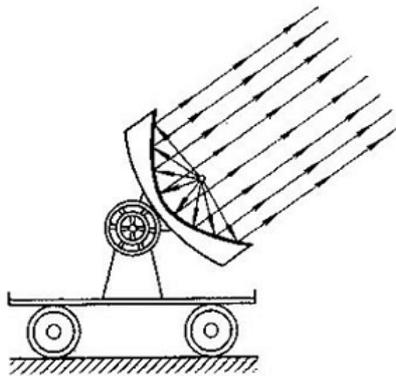


Figura 1.26:

### 1.2.6 Zona de audibilidade

Suponha um ponto M pertencente a um dos círculos de centro  $A=(\alpha, 0)$  e raio  $\sqrt{u^2t^2 - h^2}$ . Portanto M de coordenadas  $(x,y)$  é pertencente a região de audibilidade, ou seja, satisfaz a equação

$$(x - \alpha)^2 + y^2 \leq u^2t^2 - h^2.$$

Fazendo  $\alpha = vt$  podemos escrever a equação

$$(x - vt)^2 + y^2 \leq u^2t^2 - h^2,$$

que é o mesmo que

$$(v^2 - u^2)t^2 - 2vxt + (x^2 + y^2 + h^2) \leq 0. \quad (1.22)$$

Como estamos supondo que  $t > 0$ , a equação acima tem discriminante  $\Delta \geq 0$ , ou seja,

$$(2vx)^2 - 4(v^2 - u^2)(x^2 + y^2 + h^2) \geq 0.$$

Desenvolvendo essa equação obtemos

$$4v^2x^2 - 4v^2x^2 - 4v^2y^2 - 4v^2h^2 + 4u^2x^2 + 4u^2y^2 + 4u^2h^2 \geq 0,$$

ou seja,

$$-4v^2y^2 - 4v^2h^2 + 4u^2x^2 + 4u^2y^2 + 4u^2h^2 \geq 0,$$

e simplificando e agrupando

$$-(v^2 - u^2)y^2 - (v^2 - u^2)h^2 + u^2x^2 \geq 0,$$

e dividindo por  $(v^2 - u^2)h^2$

$$\frac{x^2}{\frac{(v^2 - u^2)h^2}{u^2}} - \frac{y^2}{h^2} \geq 1,$$

e agora fazendo  $c = \frac{vh}{u}$ , já que  $v > u$  e  $c = \frac{vh}{u} > h$ , obtemos

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} \geq 1. \quad (1.23)$$

Assim, o ponto M pertence a região de audibilidade( $M_1$ ) é formada pelos pontos que satisfazem a equação (1.23) para  $x > 0$  e  $y > 0$ , e a igualdade acontece quando

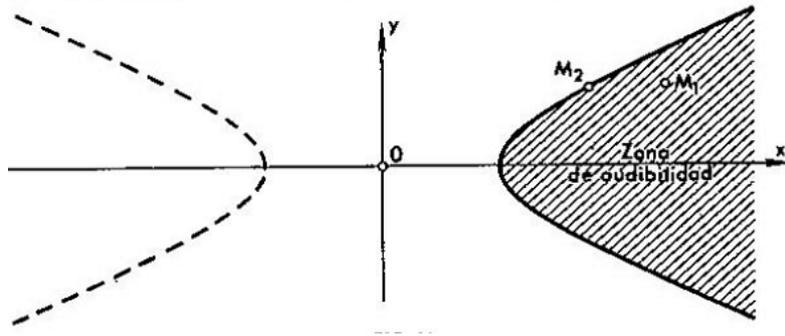


Figura 1.27:

M esta na fronteira dessa região ( $M_2$ ).

### 1.2.7 Algumas propriedades da hipérbole

Observe que se o ponto  $M_0$  de coordenadas  $(x_0, y_0)$  se estiver na fronteira da hipérbole a relação (1.22) transforma-se na igualdade

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1 \tag{1.24}$$

e supondo um determinado  $t$  para um dos círculo, teremos então

$$t = \frac{vx_0}{v^2 - u^2},$$

e ainda mais

$$OA = vt = \frac{v^2x_0}{v^2 - u^2} = \frac{c^2x_0}{c^2 - h^2}.$$

#### Reta tangente a uma hipérbole

Vamos agora encontrar a equação da reta tangente a hipérbole no ponto  $M_0$ , tome um ponto D, interseção da tangente com o eixo da abscissa, e o ponto N pertencente ao eixo da abscissa e a perpendicular  $NM_0$ .

Passemos ao valor da tangente de ângulo  $ADM_0$ .

$$tg\angle ADM_0 = tg\angle NM_0A = \frac{NA}{NM_0} = \frac{OA - ON}{NM_0} = \frac{\frac{c^2x_0}{c^2 - h^2} - x_0}{y_0} = \frac{h^2x_0}{(c^2 - h^2)y_0}.$$

Passemos agora ao valor da interseção da tangente com o eixo da ordenada, b, na equação

$$y = \frac{h^2x_0}{(c^2 - h^2)y_0}x + b,$$

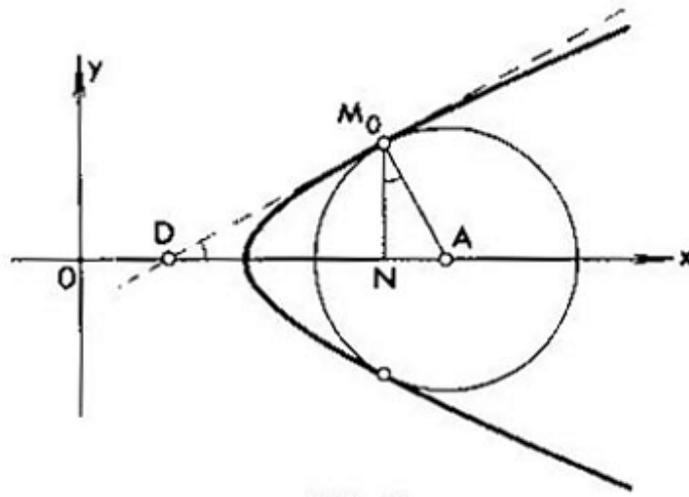


Figura 1.28:

$M_0$  tanto pertence a tangente como a hipérbole (1.24), logo devemos considerar as equações com  $x_0, y_0$

$$y_0 = \frac{h^2 x_0^2}{(c^2 - h^2) y_0} + b$$

onde

$$b = y_0 - \frac{h^2 x_0^2}{(c^2 - h^2) y_0} = -\frac{h^2}{y_0} \left( \frac{x_0^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_0^2}{h^2} \right).$$

Finalmente,

$$b = -\frac{h^2}{y_0},$$

e conseqüentemente, a equação da tangente fica na forma

$$y = \frac{h^2 x_0}{(c^2 - h^2) y_0} x - \frac{h^2}{y_0}.$$

Multiplicando ambas partes por  $\frac{y_0}{h^2}$ , obteremos a equação da tangente numa forma fácil de lembrar (compare com a equação da hipérbole (1.24)):

$$\frac{x_0 x}{c^2 - h^2} - \frac{y_0 y}{h^2} = 1. \tag{1.25}$$

### Assíntotas de uma hipérbole

Vamos escrever a equação das assíntotas da hipérbole. Tome as reta  $OS$ ,  $OT$ , inclinadas em relação ao eixo das abscissas em um ângulo  $\varphi$  e  $h = 0$ , o círculo de centro em  $A$  e raio  $ut$  o ponto  $E$  pertencente a reta  $OS$  e a este círculo. Daí podemos determinar:

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{v^2 t^2 - u^2 t^2} = t \sqrt{v^2 - u^2}$$

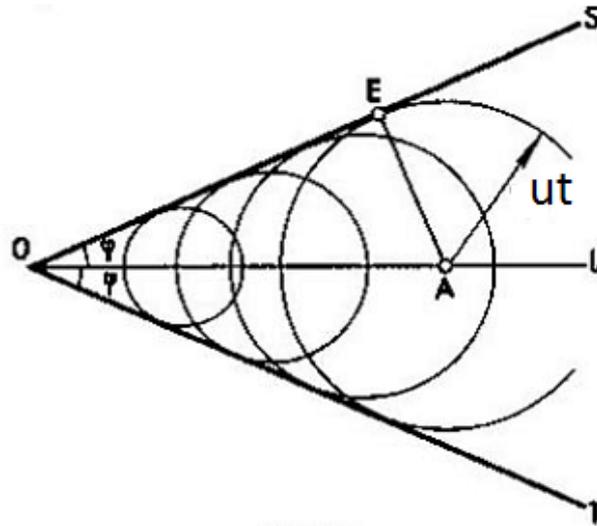


Figura 1.29:

e

$$tg\varphi = \frac{AE}{OE} = \frac{ut}{t\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{u}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{v^2}{u^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{h^2} - 1}} = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}.$$

Como as assíntotas passa no ponto O, suas equações, OS e OT, são respectivamente,

$$y = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}x$$

e

$$y = -\frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}x.$$

### Propriedade do ponto médio

Escolhendo um ponto arbitrário  $M_0$  pertencente a hipérbole, queremos mostrar que se  $P_1 \in \overleftrightarrow{OS}$  e  $P_2 \in \overleftrightarrow{OT}$ , o segmento  $P_1P_2$  é tangente a uma hipérbole, então  $M_0$  é ponto médio. O ponto  $P_1$  satisfaz a equação da reta tangente (1.25) e coordenadas  $x_1, y_1$ , satisfaz a equação da assíntota OS, então podemos escrever:

$$y_1 = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}x_1 \tag{1.26}$$

e substituindo o número  $y_1$  na relação

$$\frac{x_0x_1}{c^2 - h^2} - \frac{y_0y_1}{h^2} = 1$$

obtemos

$$\frac{x_1}{\sqrt{c^2 - h^2}} \left( \frac{x_0}{\sqrt{c^2 - h^2}} - \frac{y_0}{h} \right) = 1.$$

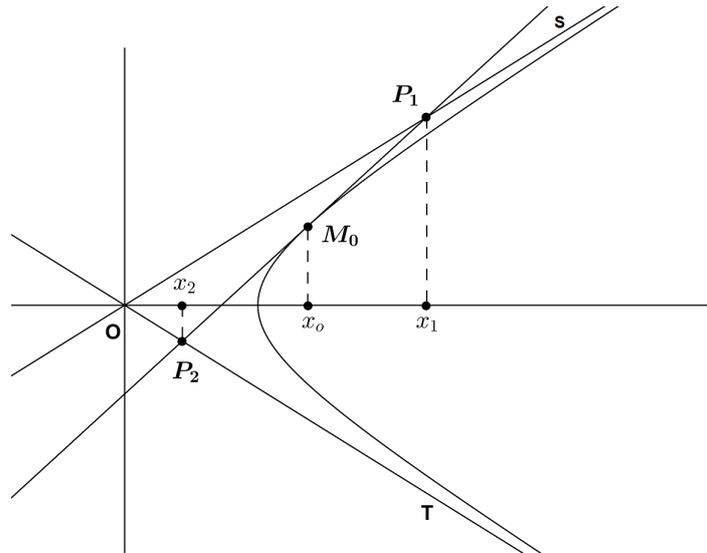


Figura 1.30:

Multiplicando ambas as partes desta relação por  $\frac{x_o}{\sqrt{c^2 - h^2}} + \frac{y_o}{h}$  e aproveitando a relação

$$\frac{x_o^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_o^2}{h^2} = 1,$$

encontramos

$$\frac{x_1}{\sqrt{c^2 - h^2}} = \frac{x_o}{\sqrt{c^2 - h^2}} + \frac{y_o}{h},$$

multiplicando por  $\sqrt{c^2 - h^2}$  ficamos com

$$x_1 = x_o + y_o \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{h}. \tag{1.27}$$

De maneira análoga, se pode calcular a abscissa  $x_2$  do ponto  $P_2$

$$x_2 = x_o - y_o \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{h}. \tag{1.28}$$

Das relações (1.27) e (1.28) obtemos agora

$$x_1 - x_o = x_o - x_2 = y_o \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{h}$$

Em razão dos pontos  $P_1, M_o$  e  $P_2$  pertencerem a mesma reta e por semelhança,  $\frac{P_2 M_o}{M_o P_1} = 1$ , se conclui que o ponto  $M_o$  é o centro do segmento  $P_1 P_2$  e o ponto de contato do segmento tangente a hipérbole, entre as assíntotas.

**Propriedade da área**

Sob as mesmas condições da propriedade anterior, calcularemos a área do triângulo  $OP_1P_2$ .

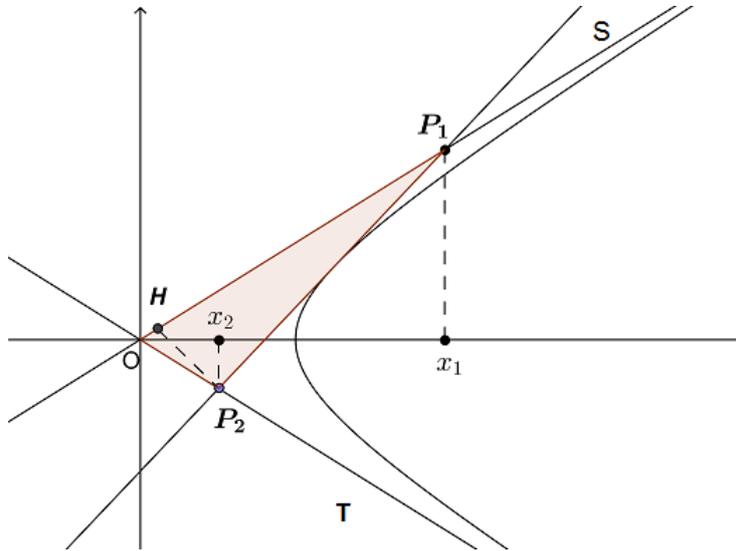


Figura 1.31:

Baixemos do ponto  $P_2$  uma perpendicular  $P_2H$  sobre a reta  $OS$ . Então a área  $S_{\Delta}$  do triângulo  $OP_1P_2$  tem o seguinte valor:

$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \frac{1}{2}OP_1 \cdot P_2H = \frac{1}{2}OP_1(OP_2 \text{sen}2\varphi) = \\ &= \frac{1}{2} \text{sen}2\varphi \left( \frac{x_1}{\text{cos}\varphi} \right) \cdot \left( \frac{x_2}{\text{cos}\varphi} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}2\varphi}{\text{cos}^2\varphi} x_1x_2 \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}2\varphi}{\text{cos}^2\varphi} = \frac{2\text{sen}\varphi\text{cos}\varphi}{2\text{cos}^2\varphi} = \text{tg}\varphi = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}$$

e

$$x_1x_2 = x_o^2 - y_o^2 \frac{c^2 - h^2}{h^2} = (c^2 - h^2) \left( \frac{x_o^2}{c^2 - h^2} - \frac{y_o^2}{h^2} \right) = (c^2 - h^2).$$

De tal modo, qualquer tangente da hipérbole que corta o ângulo entre as assíntotas, determina um triângulo que sempre tem a mesma área e que é

$$S_{\Delta} = h\sqrt{c^2 - h^2}$$

### 1.2.8 Lemniscata

Descrevemos a **lemniscata de Bernoulli**<sup>1</sup> como a envoltória de uma família de circunferências com centro numa hipérbole. Uma hipérbole equilátera de equação

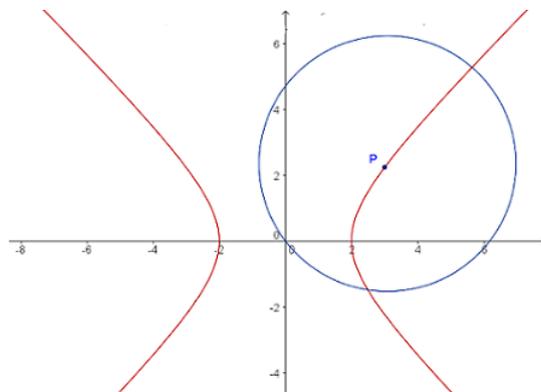


Figura 1.32:

$x^2 - y^2 = k^2$  e seja  $C$  uma circunferência com centro nessa hipérbole passando pelo ponto  $O$ , a origem do sistema. Seja  $(\alpha, \beta)$  um ponto dessa hipérbole, a circunferência em raio igual a  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  equação de  $C$  do lado direito da hipérbole, será:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

que é o mesmo que

$$x^2 - 2\alpha x + y^2 - 2\beta y = 0,$$

que é a equação dessa família de circunferência.

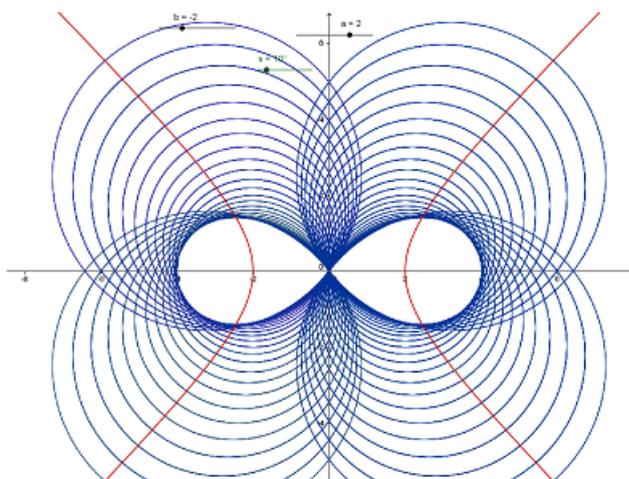


Figura 1.33:

<sup>1</sup>A lemniscata foi descrita pela primeira vez em 1694 por Jakob Bernoulli em um de seus trabalhos na *Acta Eruditorum*. Alí a denominava de lemnisco, *lemniscus* em Latin para "fita pendente", fita que adornava a coroa dos vencedores de certas competições da antiguidade.

### 1.2.9 Cardióide

O nome de **cardióide**<sup>1</sup> é derivado da palavra grega *kardioedides* para em forma de coração, onde *kardia* significa coração e *edidos* significa forma, embora seja realmente a forma mais como o contorno da seção transversal de uma maçã.

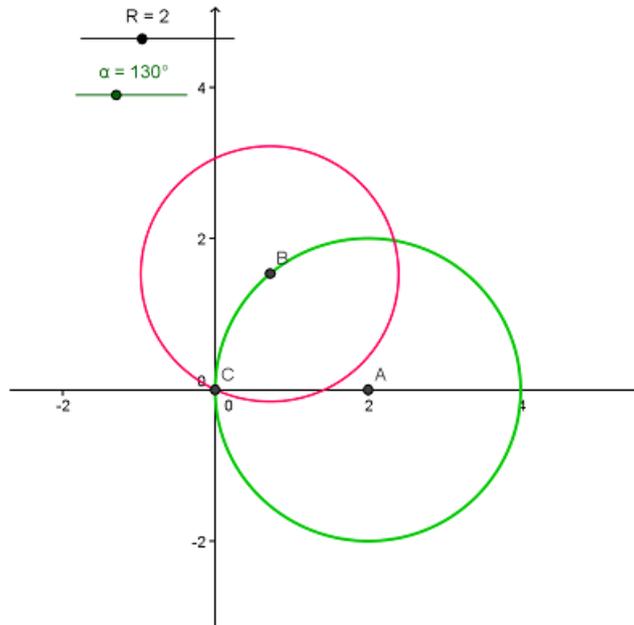


Figura 1.34:

Uma família de circunferência com centro numa circunferência de raio  $R$  e que passa em um ponto fixo. Escolhamos o ponto fixo na origem do sistema  $O$  a circunferência de raio  $R$  e centro no ponto  $A(R, 0)$  de equação  $(x - R)^2 + y^2 = R^2$  e uma circunferência com centro em  $(\alpha, \beta)$  de raio  $r$  de equação

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

onde  $r$  é a distância de  $O$  ao centro desta, logo  $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$ , ou seja, a circunferência tem equação

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

A equação da envoltória dessa família de circunferência é a cardióide, que em coordenadas polar se escreve

$$r = 2R(1 + \cos\theta). \tag{1.29}$$

Para encontrar a equação cartesiana, fazendo:  $x = r\cos\theta$ ;  $y = r\sen\theta$ , e  $x^2 + y^2 = r^2$

---

<sup>1</sup>O cardióide foi inicialmente estudado por Ole Christensen Roemer em 1674, em um esforço para tentar encontrar o melhor projeto para os dentes da engrenagem. No entanto, a curva não foi dado o seu nome, até um matemático italiano, Johann Castillon, usou em um artigo em 1741.

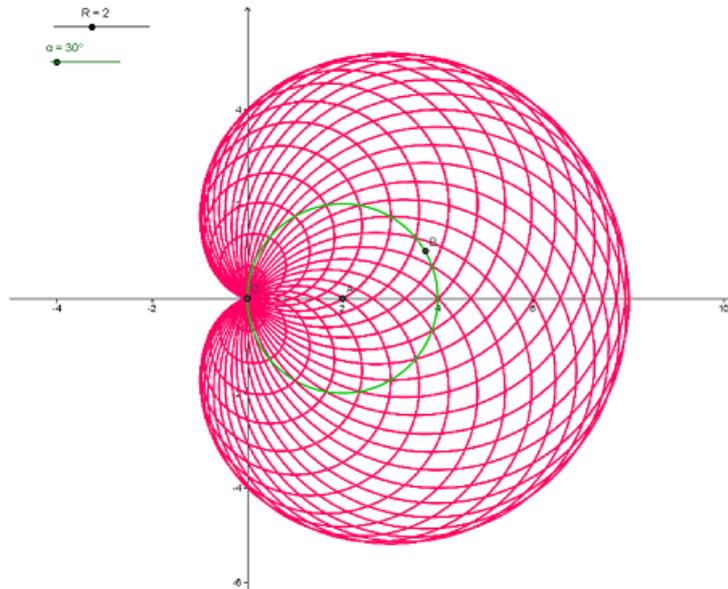


Figura 1.35:

na equação (1.29), obtemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2R \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Multiplicando a equação por  $\sqrt{x^2 + y^2}$  obtemos

$$x^2 + y^2 = 2R\sqrt{x^2 + y^2} + 2Rx,$$

que é o mesmo que

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 2R\sqrt{x^2 + y^2}$$

e agora elevando ao quadrado, finalmente obtemos a equação cartesiana da cardióide

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

# Capítulo 2

## Cálculo da Envoltória

Estudaremos agora de uma forma geral como determinar a equação da envoltória de uma família de curvas, para isso é de se esperar que usemos a diferenciação, que é a ferramenta usada para determinar a tangente num certo ponto  $(x_0, y_0)$ .<sup>1</sup>

### 2.1 A diferenciação e a equação da Envoltória

**Lema 1.1** *Suponha que  $f(x, y, \alpha)$  é um polinômio. Vamos escrever em potências de  $\alpha$*

$$f(x, y, \alpha) = p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + p_3\alpha^3 + \dots \quad (2.1)$$

onde os coeficientes  $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$  são polinômios de  $x, y$ . Então

$$\frac{f(x, y, \alpha + \varepsilon) - f(x, y, \alpha)}{\varepsilon} = f'_\alpha(x, y, \alpha) + \dots \quad (2.2)$$

onde  $f'_\alpha(x, y, \alpha)^2$  significa a soma de todos os termos que não tem  $\varepsilon$  e as reticências indicamos os termos restantes, cada um dos quais contém um fator  $\varepsilon$  ou uma potência deste. O polinômio fica parecido com

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \dots \quad (2.3)$$

**Prova.**

Seja  $f(x, y, \alpha)$  um polinômio de grau  $n$ . Então

$$\frac{f(x, y, \alpha + \varepsilon) - f(x, y, \alpha)}{\varepsilon} =$$

---

<sup>1</sup>Boltianski, V. G., La Envoltente, pp. 56-70.

<sup>2</sup> $f'_\alpha(x, y, \alpha)$  é a derivada parcial com respeito a  $\alpha$  do polinômio  $f(x, y, \alpha)$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon} [p_0 + p_1(\alpha + \varepsilon) + p_2(\alpha + \varepsilon)^2 + p_3(\alpha + \varepsilon)^3 + \dots - (p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2 + p_3\alpha^3 + \dots)] = \\
&= \frac{p_1[(\alpha + \varepsilon) - \alpha]}{\varepsilon} + \frac{p_2[(\alpha + \varepsilon)^2 - \alpha^2]}{\varepsilon} + \frac{p_3[(\alpha + \varepsilon)^3 - \alpha^3]}{\varepsilon} + \dots = \\
&= p_1 + p_2[(2\alpha + \varepsilon)] + p_3[(3\alpha^2 + 3\alpha\varepsilon + \varepsilon^2)] + \dots = \\
&= p_1 + 2p_2\alpha + 3p_3\alpha^2 + \dots + \text{os termos que tem } \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

### 2.1.1 Interseção de uma família de curvas

Seja  $C$  a envoltória de uma família e  $L$  uma curva dessa família que toca a envoltória num ponto  $T$ . Essa família de curva pode estar nos dois lados da envoltória (ver Fig.2.1) ou pode estar todas de um lado da envoltória (ver Fig.2.2), é este tipo que estamos estudando. Chamemos  $L'$  uma dessas curvas, próxima de  $L$ , e toca a envoltória no ponto  $T'$ .

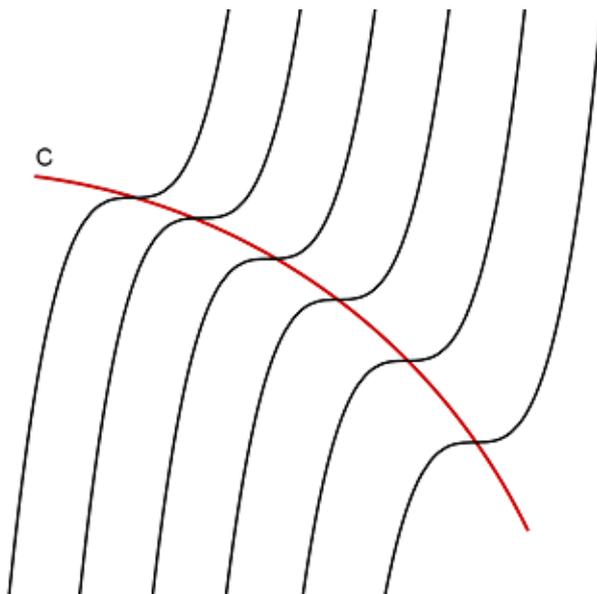


Figura 2.1:

As curva  $L$  e  $L'$  terão pelo menos um ponto de interseção  $M$  e a medida que  $L'$  se aproxima de  $L$  o ponto  $M$  se aproxima do  $T$ . Lembremos que  $C$  é o conjuntos de todos os pontos  $T$  que tocam alguma curva dessa família de curvas, ou seja, se determinamos esses pontos, também determinamos a envoltória dessa família de curvas. Como  $L$  e  $L'$  estão próximas, podemos atribuir uma distância  $\varepsilon$  entre elas, tão pequena quanto se queira. A curva  $L$  possui equação  $f(x, y, \alpha)$  e  $L'$  de equação  $f(x, y, \alpha + \varepsilon)$  e o ponto  $(x_0, y_0)$  de interseção entre elas satisfaz ao tanto a equação

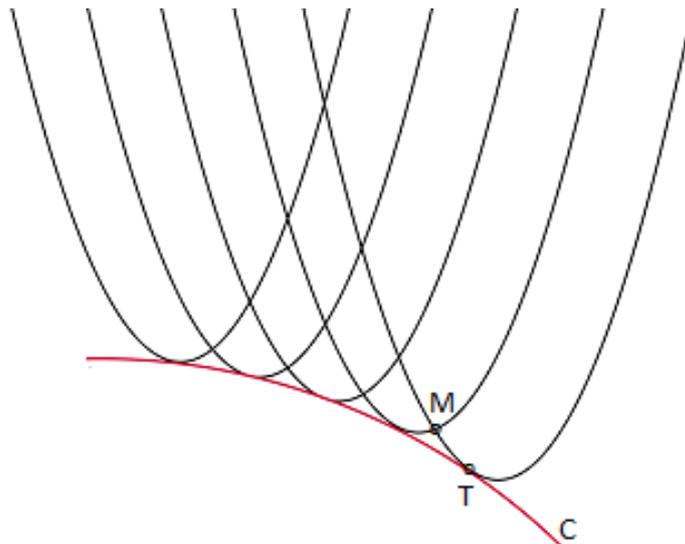


Figura 2.2:

de  $L$  como de  $L'$ , satisfaz ao sistema

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f(x, y, \alpha + \varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Então obtemos

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f(x, y, \alpha + \varepsilon) - f(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Dividindo por  $\varepsilon$  a segunda equação e aplicando o Lema 2.1, podemos escrever

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) + \dots = 0. \end{cases}$$

**Teorema 2** Cada ponto da envoltória satisfaz a equação que se obtém das relações

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

ao eliminar o parâmetro  $\alpha$ .

**Teorema 3** Suponha que a família de curvas está determinada pelas equações (1.4). Então cada ponto da envoltória satisfaz a equação que se obtém das relações

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ f'_\alpha \cdot g'_\beta - g'_\alpha \cdot f'_\beta = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

excluindo os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Prova.**

Para provar a fórmula 2.5 nós vamos examinar duas curvas próximas L e L' de nossa família. Suponhamos que a curva L corresponde aos valores  $\alpha$  e  $\beta$ , e a curva L' corresponde aos valores próximos dos parâmetros  $\alpha + \varepsilon_1$  e  $\beta + \varepsilon_2$ . Desse modo, as equações da curva L e L' se escreve na forma

$$\begin{cases} (L) & f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ (L') & f(x, y, \alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

ao mesmo tempo que os valores escolhidos dos parâmetros satisfazem a relação (1.4), ou seja,

$$\begin{cases} g(\alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Juntemos a equações 2.6 e 2.7, obtemos

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ f(x, y, \alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta) = 0. \end{cases}$$

que é igual a:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ f(x, y, \alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \\ \quad + f(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + g(\alpha, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

As primeiras relações que se examina com um sistema de equações em x, y, determinam o ponto de interseção de L e L'. Em razão da fórmula (2.2) podemos escrever

$$f(x, y, \alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) = \varepsilon_1(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots),$$

$$f(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) - f(x, y, \alpha, \beta) = \varepsilon_2(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \dots),$$

$$g(\alpha + \varepsilon_1, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta + \varepsilon_2) = \varepsilon_1(g'_\alpha(\alpha, \beta)) + \dots,$$

$$g(\alpha, \beta + \varepsilon_2) - g(\alpha, \beta) = \varepsilon_2(g'_\beta(\alpha, \beta)) + \dots$$

Assim as relações (2.8) voltamos a escrever na forma

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha, \beta) = 0, \\ g(\alpha, \beta) = 0, \\ \varepsilon_1(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots) + \varepsilon_2(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \dots) = 0, \\ \varepsilon_1(g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots) + \varepsilon_2(g'_\beta(\alpha, \beta) + \dots) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Termos que contém reticências aqui são o termos que contém os fatores  $\varepsilon_1$  ou  $\varepsilon_2$ . Multiplicando a terceira relação por

$$\varepsilon_1(g'_\beta(\alpha, \beta) + \dots) - \varepsilon_2(g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots)$$

e a quarta relação por

$$-\varepsilon_1(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \dots) + \varepsilon_2(f'_\beta(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots)$$

e somando, depois de subtrair as relações semelhantes e agrupando, obtemos

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)[(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots)(g'_\beta(\alpha, \beta) + \dots) - \\ & - (g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots)(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots)] = 0, \end{aligned}$$

o número  $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ , absolutamente, é diferente de zero, ja que se  $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 0$  implicaria  $\varepsilon_1 = 0$  e  $\varepsilon_2 = 0$ , conseqüentemente, as curvas L e L' são coincidentes, o que não é verdade. Assim, a última relação se pode dividir por  $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ , e obtemos

$$(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots)(g'_\beta(\alpha, \beta) + \dots) - (g'_\alpha(\alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots)(f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta + \varepsilon_2) + \dots) = 0.$$

Esta relação, conjuntamente com a primeira das relações (2.9), nos proporciona os pontos de interseção das curvas L e L'. Se aproximamos a curva L' de L, ou seja, se escolhemos os números  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  cada vez mais próximo de zero, temos que a última relação, no limite, passa ser a equação

$$f'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)g'_\beta(\alpha, \beta) - g'_\alpha(\alpha, \beta)f'_\beta(x, y, \alpha, \beta) = 0,$$

ou seja, se transforma na última relação (2.5). Esta, conjuntamente com a primeira das equações (2.5), nos permite achar aquele ponto no qual a curva L toca a envoltória. Assim, atribuindo a relação obtida das primeiras equações (2.9), acharemos o sistema de equações (2.5). O ponto no qual a curva L toca a envoltória deve satisfazer esse sistema. Portanto por L se pode admitir qualquer das curvas da família, então qualquer ponto da envoltória deve (para certos  $\alpha$  e  $\beta$ ) satisfazer o sistema (2.5), que é o que afirma o teorema 3. ■

O leitor, que conhece a noção de determinante e os teoremas fundamentais sobre equações lineares, pode aceitar como verdadeiro o seguinte teorema.

**Teorema 4** *Se a família de curvas é determinada pelas equações (1.1) e (1.2), então qualquer ponto da envoltória satisfaz a equação que resultante da equação (1.1), adicionar (1.2) a relação*

$$\begin{vmatrix} f'_{\alpha_1} & f'_{\alpha_2} & \cdots & f'_{\alpha_m} \\ (g'_1)_{\alpha_1} & (g'_1)_{\alpha_2} & \cdots & (g'_1)_{\alpha_m} \\ (g'_2)_{\alpha_1} & (g'_2)_{\alpha_2} & \cdots & (g'_2)_{\alpha_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (g'_{m-1})_{\alpha_1} & (g'_{m-1})_{\alpha_2} & \cdots & (g'_{m-1})_{\alpha_m} \end{vmatrix} = 0$$

e eliminamos do sistema de equações os parâmetros  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ .

Quando  $m = 1$  este teorema se reduz ao teorema 2, e quando  $m = 2$  se reduz ao teorema 3.

## 2.1.2 Curva discriminante

Nos Teoremas 2 e 3 comentamos que qualquer ponto da envoltória satisfaz a equação obtida com a eliminação dos parâmetros nas relações (2.4) ou (2.5). Nós não dizemos que a envoltória é determinada pela equação obtida, e apenas dizemos que em qualquer ponto da envoltória satisfaz esta equação. Isso não é um acaso. O fato encontra-se em uma curva determinada através da equação obtida eliminando os parâmetros em (2.4) ou (2.5) (esta curva é chamada de *curva discriminante*), além da envoltória, pode conter um número de pontos que não pertencem a esta.

Que representa essa curva discriminante? Para responder a esta pergunta se referir (sem clarificação, mas todos os argumentos pode ser feito usando a noção de derivada que introduzimos acima), que pode representar uma curva determinada por uma equação. Suponha-se que  $f(x, y)$  é qualquer polinômio em  $x, y$ . O lugar geométrico de pontos no plano, cujas coordenadas satisfazem a equação

$$f(x, y) = 0,$$

se chama *curva algébrica*. A reta é uma curva algébrica, já que sua equação tem forma  $y = kx + b$ , ou  $y - kx - b = 0$ . As relações (1.3) ou (1.4) permitem chegar a conclusão que a circunferência, a hipérbole, a parábola, são também exemplos de curvas algébricas.

A curva algébrica dizemos que é *lisa* se em cada ponto podemos traçar uma tangente. A reta, a circunferência, a parábola e a hipérbole são curvas lisas. Mas pode acontecer que a curva algébrica pode conter *pontos especiais*, que atribuiu

*pontos crunodales* (onde a curva corta a si mesma) *pontos tacnodos* (onde a curva tangente a si mesma) e *pontos isolados*. Assim, por exemplo, a curva é determinada pela equação

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

esta é chamada lemniscata de Bernoulli, (Fig. 2.3) corta-se, a curva

$$y^2 - x^4 = 0$$

(Fig. 2.4) tem um ponto de autocontato na origem das coordenadas, e a curva de equação

$$(x^2 + y^2)(y - x - 1) = 0,$$

é formada por pontos pertencentes a reta  $y - x - 1 = 0$  (ou seja,  $y = x + 1$ ) e, além disso, o ponto O (origem das coordenadas), perto da qual não há outros pontos desta curva (Fig.2.5). Qualquer curva algébrica ou não contém pontos especiais, isto é, é lisa ou tem apenas um número finito de pontos especiais, que a divide em pedaços isolados lisa, e não outros pontos especiais, para além daqueles listados acima, a curva algébrica não pode ter.

Suponha agora que há uma família de curvas algébricas determinados pela equação (1.3) ou (1.4). Se qualquer curva L de nossa família tem um ponto crunodal T (Fig.2.6) acontece que a curva L', "próxima" da primeira, obrigatoriamente corta a curva L em um ponto M próximo do ponto T. Portanto, a razão com a ajuda do qual estabelecemos

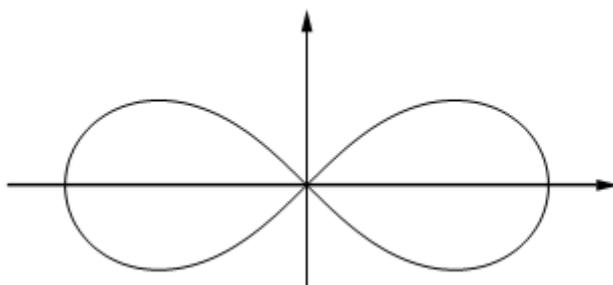


Figura 2.3: Lemniscata de Bernoulli

Teorema 2 ou 3, que demonstram que as coordenadas do ponto T satisfazem as equações (2.4) ou (2.5), ou seja, o ponto T pertence à curva discriminante.

Assim, os pontos de crunodales de cada curva da família deve pertencer a curva discriminante. Da mesma forma, qualquer ponto isolado da curva L também deve pertencer a curva discriminante. De tal modo a curva discriminante não só contém a envoltória, mas contém todos os pontos especiais de nossa família. Acontece que

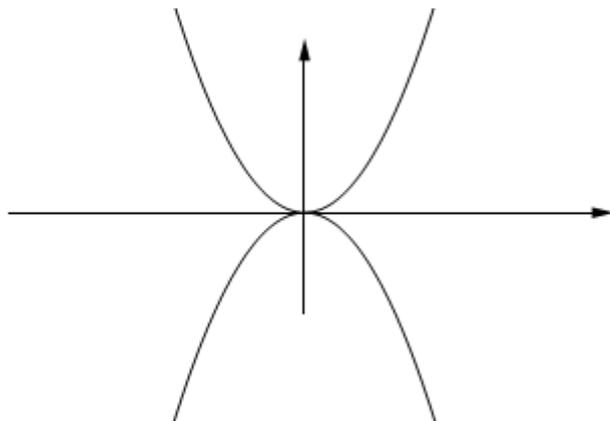


Figura 2.4:

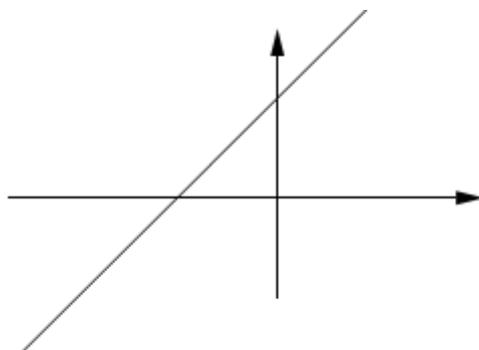


Figura 2.5:

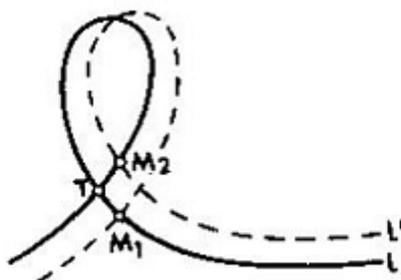


Figura 2.6:

isso já está esgotando todos os pontos da curva discriminante, ou seja, *a curva discriminante incluem a envoltória e o lugar geométrico de todos os pontos especiais de todas as curvas de família, que estudamos (Fig. 2.7)*. Se, pelo contrário, foram examinados uma família de curvas que não têm pontos especiais, então a curva discriminante contém nada mais do que a envoltória, neste caso a curva discriminante coincide com a envoltória. Nos exemplos discutidos abaixo todas as famílias são compostas por curvas que não têm pontos especiais. Portanto, vamos apenas encontrar a curva discriminante, já que nos casos que estudamos esta coincidirá com a

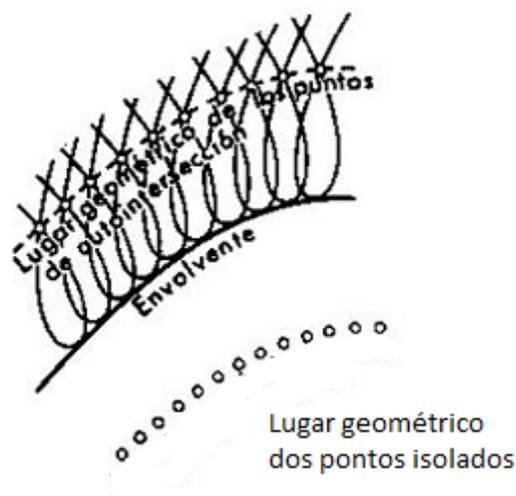


Figura 2.7:

envoltória, ou seja, limitaremos a eliminação dos parâmetros das equações (2.4) ou (2.5).

### 2.1.3 A astróide

Antes de prosseguir com o próximo exemplo vamos apresentar uma curva interessante chamada *astroide*.

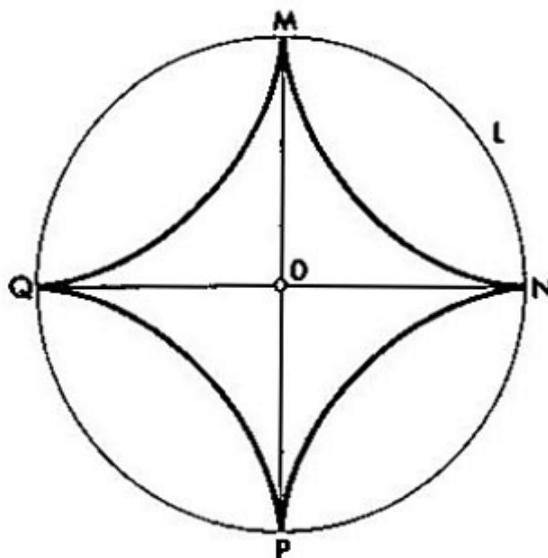


Figura 2.8:

Tomemos uma circunferência de raio  $R$  e outra de raio  $1/4R$  que rola, sem deslizar, no interior da maior. Fixemos um ponto  $A$  na circunferência menor a trajetória que o ponto  $A$  faz é uma curva chamada astroide.

Suponha que a circunferência de raio  $R$  tem centro na origem do sistema, o ponto

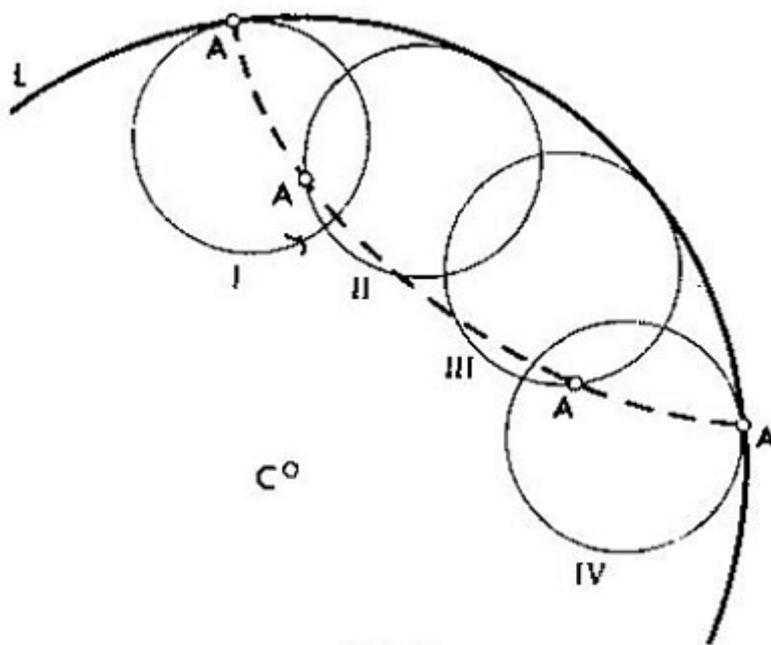


Figura 2.9:

A pertencente a circunferência de raio  $r$ , tem inicialmente a posição  $(R,0)$ , girando no sentido horário ela percorrerá numa volta

$$2\pi r = 2\pi \frac{R}{4} = \frac{\pi R}{2},$$

ou seja, a quarta parte de uma volta da circunferência de raio  $R$ , a curva que o ponto fixo  $A$  da circunferência de raio  $r$  descreve é o que chamamos de *astroide*.

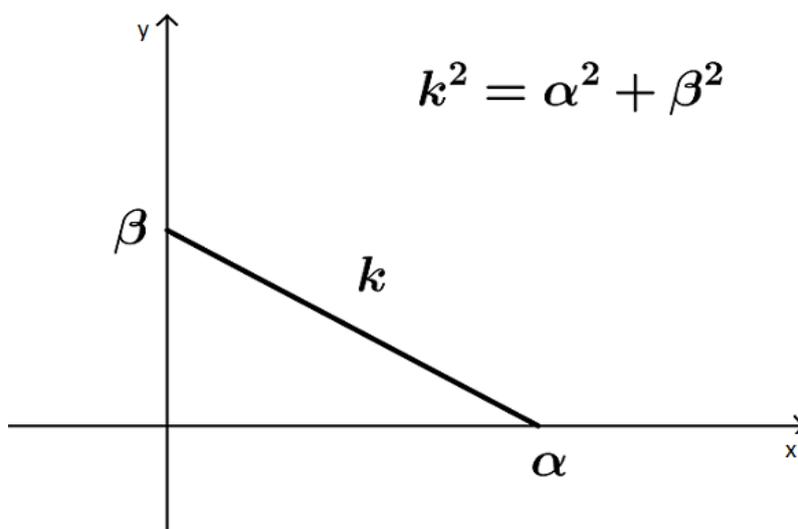


Figura 2.10:

Tomemos um segmento de comprimento  $k$ . Fazemos deslizar suas extremidades nos eixos das abscissas o ponto  $A$ , e no eixo das ordenadas o ponto  $B$ . Vamos atribuir

para as coordenadas de  $A(\alpha, 0)$  e para  $B(0, \beta)$ , a reta AB terá equação

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta; \alpha \neq 0$$

podemos exibir essa família de retas como

$$\begin{cases} \alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Pelo Teorema 3, encontraremos a envoltória dessas retas eliminando os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  no sistema de três equações, encontrando as derivadas parciais e escrevendo na forma de

$$f'_\alpha g'_\beta - f'_\beta g'_\alpha = 0,$$

$$f'_\alpha = y - \beta; f'_\beta = x - \alpha$$

e

$$g'_\alpha = 2\alpha; g'_\beta = 2\beta$$

simplificando, completaremos o sistema

$$\begin{cases} \alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 - k^2 = 0 \\ \beta y - \alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Multiplicando a primeira equação por  $(\beta)$ , a terceira equação por  $(-\alpha)$  e somando, obtemos

$$(\alpha^2 + \beta^2)x = \alpha^3,$$

que é o mesmo que

$$k^2x = \alpha^3,$$

daí ficamos com

$$\alpha = (k^2x)^{1/3}.$$

Para encontrar o valor de  $\beta$ , multiplicamos a primeira equação por  $\alpha$ , a terceira equação por  $\beta$  e somando, obtemos

$$(\alpha^2 + \beta^2)y = \beta^3,$$

que é o mesmo que

$$k^2y = \beta^3,$$

daí ficamos com

$$\beta = (k^2 y)^{1/3}.$$

Substituindo os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  na segunda equação do sistema, obtemos

$$(k^2 x)^{2/3} + (k^2 y)^{2/3} = k^2,$$

finalmente dividindo tudo por  $k^{4/3}$ , encontramos a equação

$$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3},$$

que é a envoltória dessa família de retas, e conseqüentemente, segmentos que são tangentes a essa *astroide*.

### 2.1.4 Segmento que determinam triângulos retângulos de área constante

Vimos no Capítulo 1 a equação da família desses segmentos são

$$\begin{cases} \alpha y + \beta x - 2k = 0 \\ \alpha\beta - 2k = 0. \end{cases}$$

Seguindo a afirmação do teorema 3 vamos determinar as derivadas parciais

$$f'_\alpha = y; f'_\beta = x; g'_\alpha = \beta; g'_\beta = \alpha,$$

e agora exibimos a equação

$$f'_\alpha g'_\beta - f'_\beta g'_\alpha = \alpha y - \beta x = 0.$$

Resolveremos o sistema composto pelas três equações

$$\begin{cases} \alpha y + \beta x - 2k = 0 \\ \alpha\beta - 2k = 0 \\ \beta x - \alpha y = 0 \end{cases}$$

Substituindo  $\alpha y$  por  $\beta x$  na primeira equação obtemos

$$\beta x = k.$$

Analogamente,

$$\alpha y = k.$$

Multiplicando os dois resultados obtemos

$$\alpha\beta xy = k^2$$

e usando a segunda equação do sistema, chegamos a

$$2kxy = k^2.$$

Simplificando, temos a equação da envoltória dessa família de curvas, que é uma hipérbole

$$xy = \frac{k}{2}$$

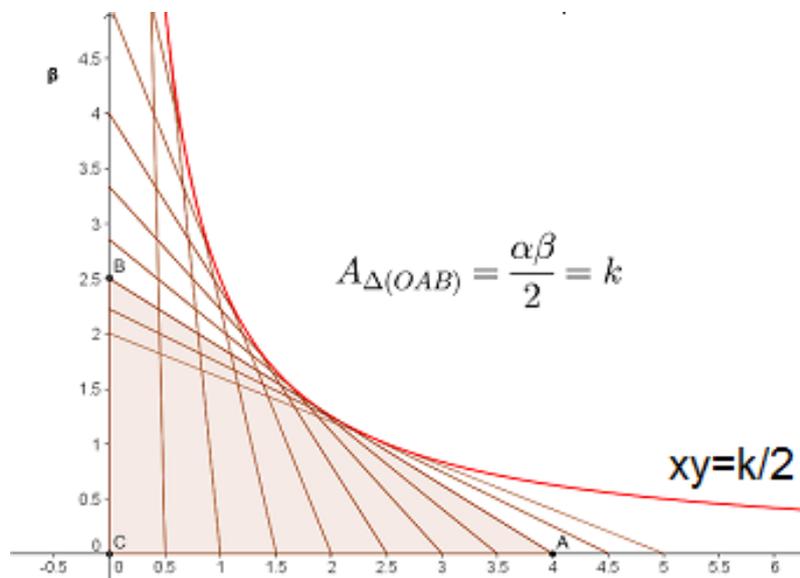


Figura 2.11:

### 2.1.5 Segmento e soma constante

Voltamos agora ao problema da família de segmentos que tem suas extremidades no sistema de eixos e que a soma de suas coordenadas é uma constante  $k$ .

Como já foi mostrado (1.7) as equações abaixo determinam essa família de segmentos.

$$\begin{cases} \alpha y + \beta x - \alpha\beta = 0 \\ \alpha + \beta - k = 0 \end{cases}$$

Fazendo  $\alpha = k - \beta$  e substituindo na equação da reta e simplificando teremos uma equação apenas com um parâmetro, no caso  $\beta$ . Obtemos:

$$(k - \beta)y + \beta x - \beta(k - \beta) = 0$$

$$ky + \beta(x - y - k) + \beta^2 = 0$$

e então podemos aplicar o Teorema 2:

$$\begin{cases} f(x, y, \beta) = \beta^2 + \beta(x - y - k) + ky = 0 \\ f'_\beta(x, y, \beta) = 2\beta + (x - y - k) = 0. \end{cases}$$

Multiplicando por  $(-2)$  a primeira equação e por  $\beta$  a segunda equação, somando, eliminamos o termo de grau 2 na primeira equação, ficamos com:

$$\begin{cases} -\beta(x - y - k) - 2ky = 0 \\ 2\beta + (x - y - k) = 0 \end{cases}$$

Agora fazendo  $\beta = \frac{-(x-y-k)}{2}$  e substituindo na primeira, obtemos

$$\frac{(x - y - k)}{2}(x - y - k) - 2ky = 0,$$

multiplicando por 2

$$(x - y - k)^2 - 4ky = x^2 + y^2 + k^2 - 2kx - 2xy - 2ky = 0$$

somando e subtraindo  $4xy$ ,

$$x^2 + y^2 + k^2 - 2kx + 2xy - 2ky - 4xy = 0$$

$$(k - x - y)^2 = 4xy \therefore k - x - y = 2\sqrt{xy}$$

$$x + 2\sqrt{xy} + y = k \therefore (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = k$$

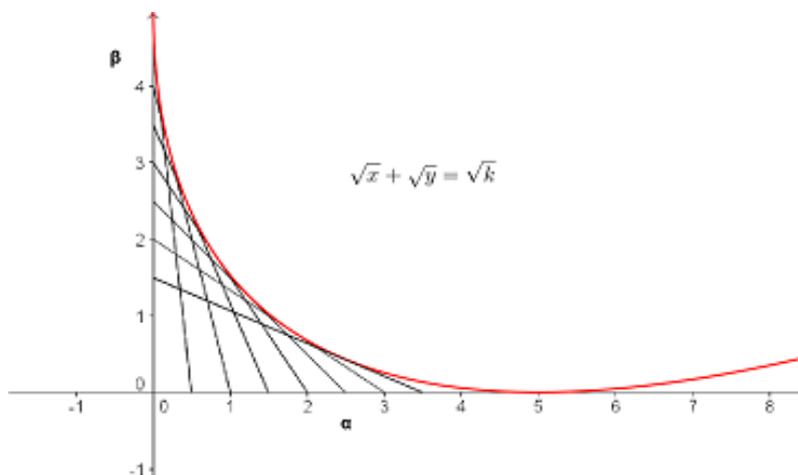


Figura 2.12:

e finalmente

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$$

a equação da envoltória<sup>1</sup> dessa família de segmentos.

### 2.1.6 Segmento e sua perpendicular

Lembremos que neste exemplo, nós temos um ponto fixo F, um ponto A que varia de posição numa reta fixa. Já determinamos a equação dessa família de retas perpendiculares ao segmento AF, que escrevemos aqui sua equação

$$f(x, y, \alpha) = py - \alpha x + \alpha^2 = 0,$$

encontraremos a equação da envoltória, como tem um ponto fixo e uma reta fixa, esperamos que seja uma parábola.

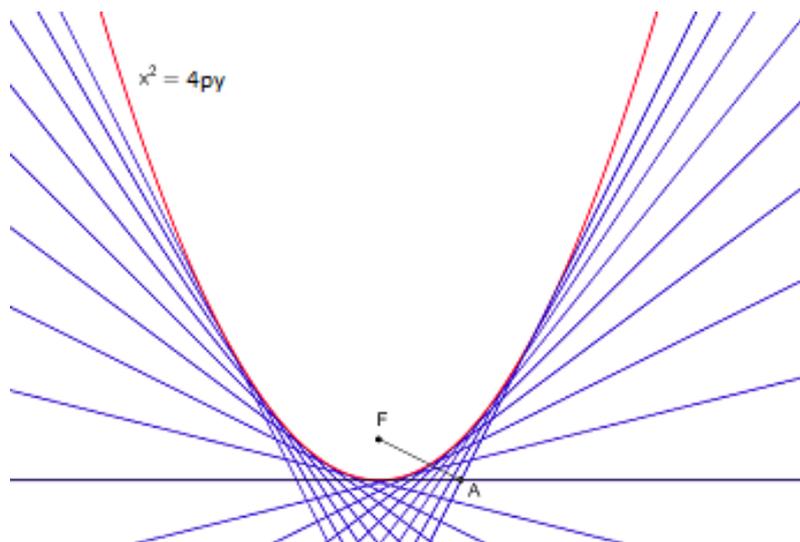


Figura 2.13:

Seguindo o que diz o teorema, para encontrar a equação da envoltória, basta derivar essa equação e eliminar o parâmetro  $\alpha$ . Vamos passar ao cálculo da derivada

$$f'_\alpha = -x + 2\alpha$$

fazendo  $\alpha = \frac{x}{2}$  e substituindo na equação de  $f(x, y, \alpha)$  e multiplicando por 4 temos

$$4py - 2x^2 + x^2 = 0,$$

<sup>1</sup>É um caso particular de uma hipoelipse (ou curva de Lamé) matemático francês Gabriel Lamé (1795 - 1870) que generalizou a equação da elipse  $|\frac{x}{a}|^n + |\frac{y}{b}|^n = 1$ .

ou seja,

$$4py = x^2$$

a equação da parábola como envoltória dessa família de retas.

### 2.1.7 Circunferências com centro numa reta

Uma família de circunferências com raio  $R$  e centro numa reta  $l$  (Fig.1).

Como já vimos a equação (1.9) dessa família é

$$x^2 + y^2 + 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0$$

Escreveremos a equação da família de curvas na forma polinomial

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad (2.12)$$

onde  $f(x, y, \alpha)$  é a parte esquerda da equação (1.1)

Apenas duas retas tangenciam cada uma das circunferências dessa família, são paralelas a reta  $L$ , as Envoltórias dessa família de circunferências, ou seja, as retas  $y = R$  e  $y = -R$ .

Conhecendo a equação dessa família de circunferência vista no Capítulo 1, vamos agora exibir a equação da sua *envoltória*, escrevendo na forma

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

e derivando em relação a  $\alpha$  obtemos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - R^2 = 0, \\ -2x + 2\alpha = 0. \end{cases}$$

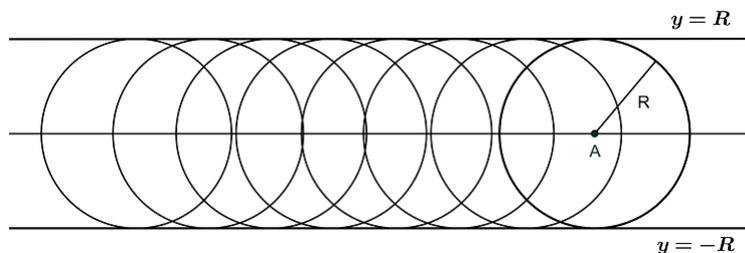


Figura 2.14:

Fazendo  $\alpha = x$  na primeira dessas equações obtemos

$$y^2 - R^2 = 0$$

e daí apenas duas retas  $y = R$  e  $y = -R$ , ou seja, são as Envoltórias dessa família de circunferências.

### 2.1.8 Circunferências com centro numa Circunferência

Já vimos as equações da família de circunferências de raio  $r$  com centro numa circunferência de raio  $R$  é

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0, \quad (2.13)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0. \quad (2.14)$$

A terceira equação conforme o Teorema 3 é:

$$-\beta x + \alpha y = 0 \quad (2.15)$$

Para determinar a envoltória vamos isolar os termos que tem  $\alpha, \beta$  de um lado da igualdade,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \frac{x^2 + y^2 + R^2 - r^2}{2} \\ -\beta x + \alpha y &= 0 \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado ambas equações

$$\begin{aligned} (\alpha x)^2 + 2\alpha\beta xy + (\beta y)^2 &= \left(\frac{x^2 + y^2 + R^2 - r^2}{2}\right)^2 \\ (\beta x)^2 - 2\alpha\beta xy + (\alpha y)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Somando as duas equações e fatorando obtemos

$$(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)y^2 = \left(\frac{x^2 + y^2 + R^2 - r^2}{2}\right)^2$$

que é o mesmo que

$$4R^2(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + R^2 - r^2)^2$$

Desenvolvendo os parênteses

$$4R^2(x^2 + y^2) = x^4 + y^4 + R^4 + r^4 + 2x^2y^2 + 2x^2R^2 - 2x^2r^2 + 2y^2R^2 - 2y^2r^2 - 2R^2r^2$$

Simplificando

$$x^4 + y^4 + R^4 + r^4 + 2x^2y^2 - 2x^2R^2 - 2x^2r^2 - 2y^2R^2 - 2y^2r^2 - 2R^2r^2 = 0$$

Somando  $4R^2r^2$  e fatorando temos

$$(x^2 + y^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2r^2$$

E finalmente as equações das envoltórias dessa família são

$$x^2 + y^2 = (R + r)^2$$

e

$$x^2 + y^2 = (R - r)^2.$$

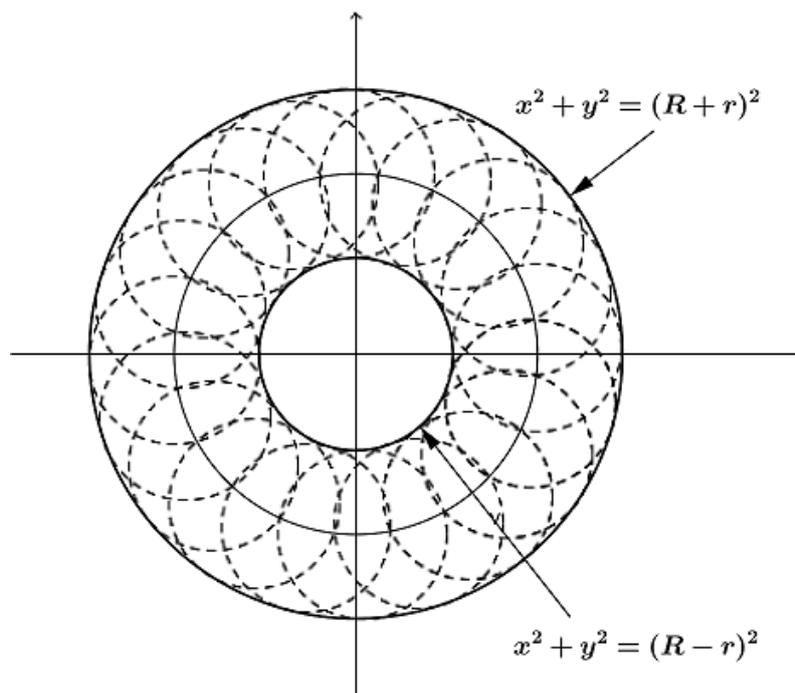


Figura 2.15:

### 2.1.9 A Hipérbole como envoltória

Vimos que a equação da família de circunferências é

$$f(x, y, \alpha) = \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)\alpha^2 - 2x\alpha + x^2 + y^2 + h^2,$$

e agora tomando sua derivada parcial em relação a  $\alpha$  que denotaremos por

$$f'_\alpha(x, y, \alpha) = 2\alpha\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) - 2x$$

que podemos escrever na forma, de acordo com o Teorema 2 devemos eliminar o parâmetro  $\alpha$ , para isso faremos  $\alpha\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right) - x = 0$  e assim obtemos

$$\alpha = \frac{x}{1 - \frac{u^2}{v^2}}.$$

Substituindo em  $f(x, y, \alpha)$  obtemos

$$\frac{x^2}{1 - \frac{u^2}{v^2}} - \frac{2x^2}{1 - \frac{u^2}{v^2}} + x^2 + y^2 + h^2 = 0,$$

que é o mesmo que

$$-\frac{x^2}{1 - \frac{u^2}{v^2}} + x^2 + y^2 + h^2 = \left(\frac{-v^2 + v^2 - u^2}{v^2 - u^2}\right)x^2 + y^2 + h^2 = 0.$$

Daí obtemos

$$-\frac{x^2 u^2}{v^2 - u^2} + y^2 + h^2 = 0.$$

Dividindo por  $-h^2$  ficamos com

$$\frac{x^2}{\frac{(v^2 - u^2)h^2}{u^2}} - \frac{y^2}{h^2} - 1 = 0$$

e finalmente fazendo  $c = \frac{u}{v}h$  obtemos

$$\frac{x^2}{c^2 - h^2} - \frac{y^2}{h^2} = 1$$

que a equação de uma hipérbole como a envoltória dessa família de circunferências, embora no nosso problema o lado direito da hipérbole, quando  $x > 0$ , seja a solução.

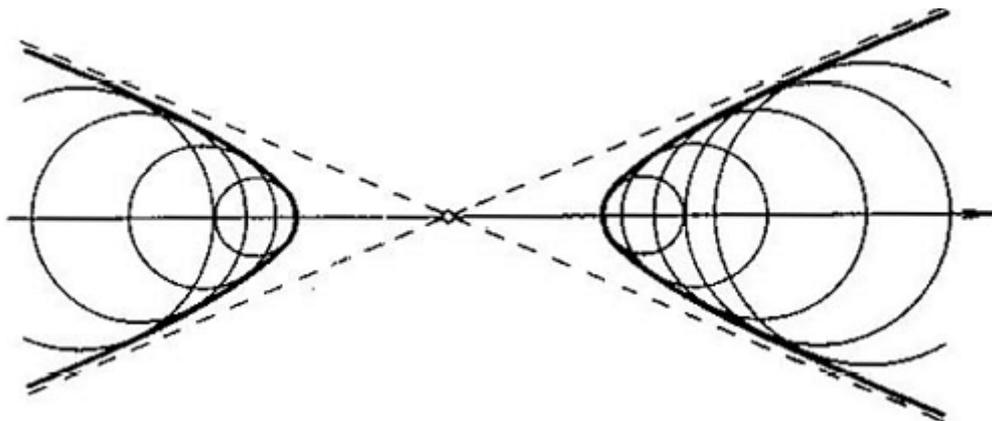


Figura 2.16:

### 2.1.10 A Elipse como envoltória

Retomando a família de retas geradas a partir de uma circunferência e um ponto, as quais expressamos pelas equações abaixo

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2cx - c^2 = 0 \quad (2.16)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha c + c^2 - 4a^2 = 0 \quad (2.17)$$

Determinemos a terceira equação de acordo com o Teorema 3 derivando em relação a  $\alpha$  e a  $\beta$   $f'_\alpha = 2\alpha - 2x$ ;  $f'_\beta = 2\beta - 2y$ ;  $g'_\alpha = 2\alpha - 2c$  e  $g'_\beta = 2\beta$  que é

$$(\alpha - x)\beta - (\beta - y)(\alpha - c) = 0 \quad (2.18)$$

Também podemos escrever como

$$(\alpha - c)y = (x - c)\beta$$

e na forma de equação de uma reta  $L'$

$$y = \frac{\beta}{\alpha - c}x - \frac{\beta c}{\alpha - c}.$$

Antes de escrever a envoltória  $C$  dessa família de retas vamos examinar algumas propriedades. Escolhemos então um ponto  $A$  de coordenadas  $\alpha, \beta$  que satisfaz as equações 2.16, 2.17, 2.18 e conseqüentemente vai existir um ponto  $T$  de coordenadas  $x, y$  que satisfaz a reta tangente  $L$  e a envoltória  $C$ . Temos então  $A, T$  e  $F_1$  pertencentes a mesma reta  $L'$ , já que suas coordenadas também satisfaz a equação dessa reta, logo

$$AT + TF_1 = 2a$$

raio da circunferência.

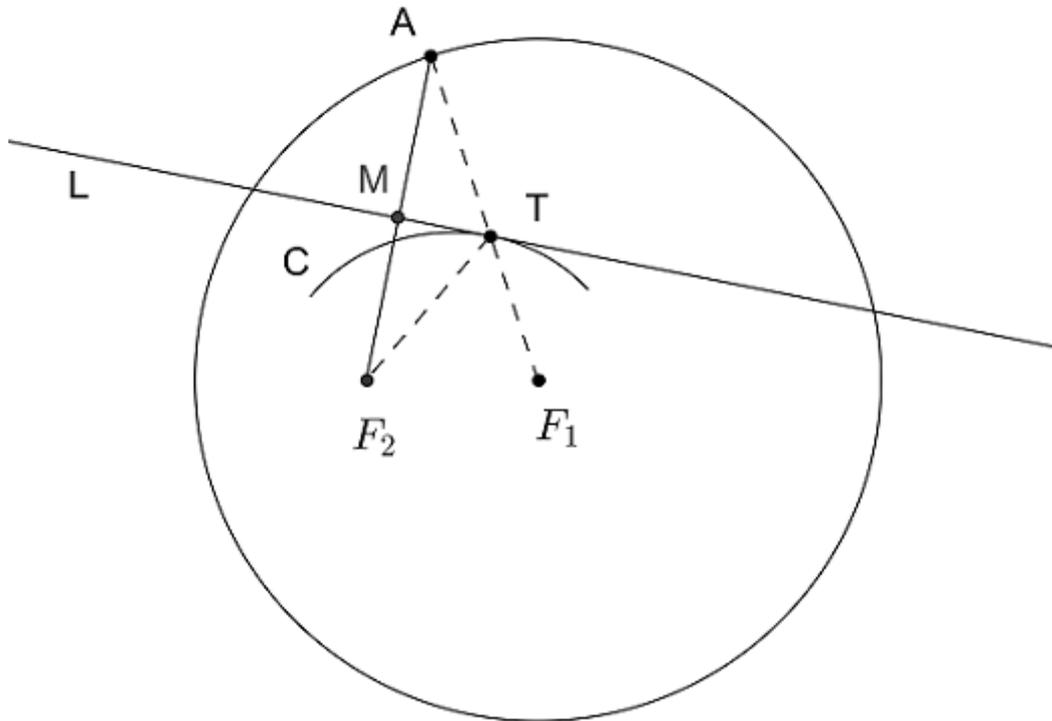


Figura 2.17:

Como todo ponto de  $L$  é equidistante a  $A$  e  $F_2$ , então  $AT = TF_2$  e daí obtemos

$$TF_1 + TF_2 = 2a,$$

ou seja, a primeira propriedade a envoltória  $C$  é o lugar geométrico dos pontos em que a soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante, que geralmente é dada como definição da elipse.

A segunda propriedade tem haver com os ângulos que a reta  $L$  faz com as semi-retas  $TF_1$  e  $TF_2$ . Os pontos  $F_2$  e  $A$  são simétricos em relação a reta  $L$ , portanto  $\angle MTA = \angle MTF_2$ . A reta  $L'$  intercepta a reta  $L$  no ponto  $T$ , logo os ângulos  $\widehat{MTA}$  e  $\widehat{T'TF_1}$  são opostos pelo vértice, daí

$$\angle MTA = \angle T'TF_1 = \angle MTF_2$$

Isso significa que o raio de luz que sai do ponto  $F_2$  em direção a  $F_2T$ , ao refletir na reta  $L$  segundo a lei "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de refração", seguirá em seguida pelo segmento  $TF_1$ . Embora a reta  $L$  toca a elipse no ponto  $T$  e, por consequência, a reflexão do raio no ponto  $T$  da reta  $L$  é equivalente a reflexão da própria elipse no ponto  $T$ . Pois assim, se colocarmos em um dos focos da elipse

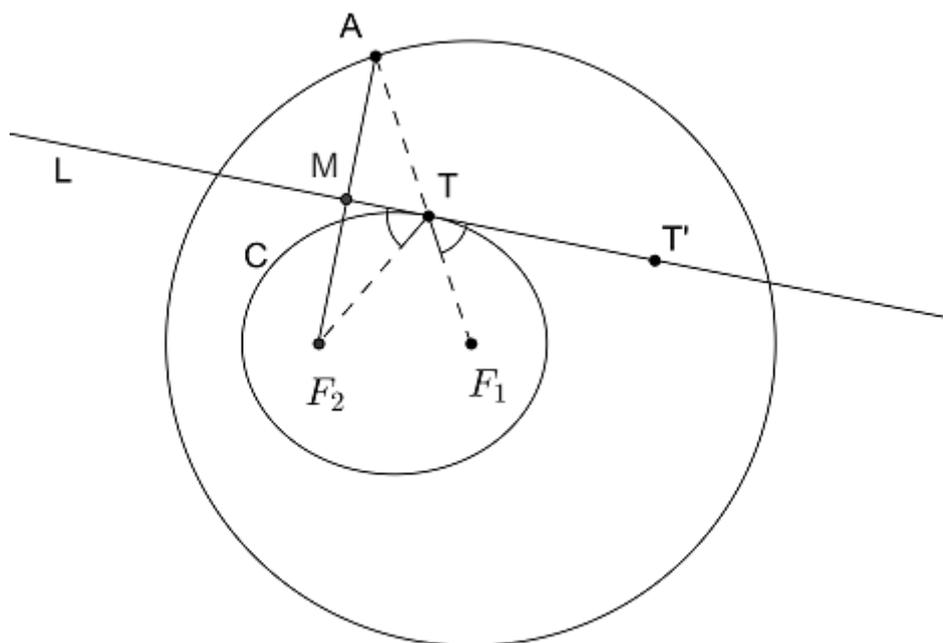


Figura 2.18:

*uma fonte puntiforme de luz mostra que cada raio , convergirá para o segundo foco, ou seja, todos os raios refletidos se reunirão ( "enfocaram", é daqui a denominação "foco") no segundo foco da elipse (Fig. 2.18).*

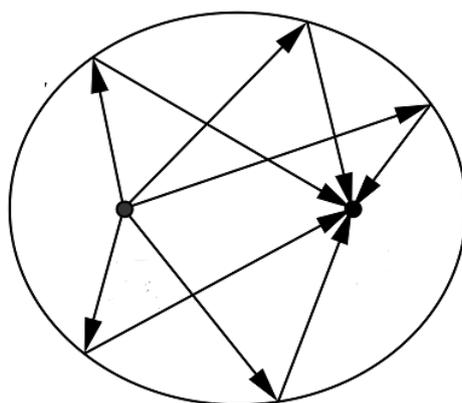


Figura 2.19:

Para finalizar, desenvolvendo a relação que obtemos na primeira propriedade, a equação da elipse que examinamos tem a forma de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Esta equação também pode ser obtida de (2.16), (2.17), (2.18) eliminando os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

Geralmente escrevemos  $b^2 = a^2 - c^2$  e a equação se escreve na forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.19)$$

..

### 2.1.11 Lemniscata

De várias maneiras podemos obter a equação da lemniscata, mas vamos agora obter como uma família de circunferências, que passa pela origem, com centro numa hipérbole. Escolhamos um ponto na hipérbole  $P(\alpha, \beta)$ , então como já vimos a equação dessa família de circunferências tem equação

$$f(x, y, \alpha, \beta) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

como P pertence a hipérbole, podemos relacionar os dois parâmetros pela equação

$$g(\alpha, \beta) = \alpha^2 - \beta^2 - k^2 = 0$$

e determinando as derivadas parciais, obtemos a equação

$$\beta x + \alpha y = 0.$$

Da primeira equação temos

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= (2\alpha x + 2\beta y)^2 \\ &= 4\alpha^2 x^2 + 8\alpha\beta xy + 4\beta^2 y^2 = 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta xy + 4\alpha\beta xy + 4\beta^2 y^2. \end{aligned}$$

Fazendo  $\alpha y = -\beta x$ , obtemos

$$4\alpha^2 x^2 - 4\beta^2 x^2 + 4\alpha^2 y^2 + 4\beta^2 y^2 = 4x^2(\alpha^2 - \beta^2) - 4y^2(\alpha^2 - \beta^2) = 4(\alpha^2 - \beta^2)(x^2 - y^2).$$

Como  $\alpha^2 - \beta^2 = k^2$ , concluímos que

$$(x^2 + y^2)^2 = 4k^2(x^2 - y^2),$$

que é a equação da lemniscata, com isso a lemniscata é a envoltória dessa família de circunferências com centro na hipérbole.

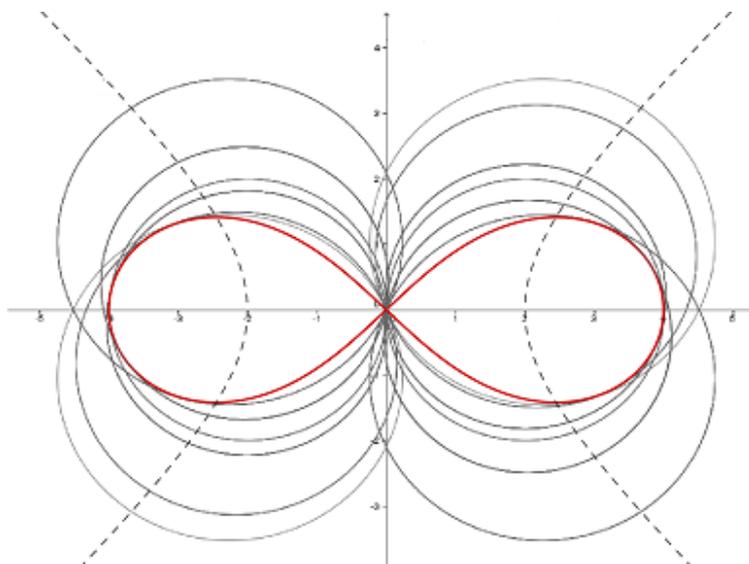


Figura 2.20:

# Apêndice A

## A.1 Introdução

Apresentaremos agora algumas equações tratadas na Geometria analítica do ensino médio e usamos nesta dissertação.

### A.1.1 Retas e circunferências

O ponto vamos representar como um par de coordenadas no plano, por exemplo,  $A=(4,3)$ .

A reta vamos representar por dois pontos  $AB$ , e a equação da reta no plano cartesiano é representada nas formas: Cartesiana (ou Geral) e Reduzida (ou Afim).

Se temos dois pontos  $A$  e  $B$ , vamos determinar a reta  $AB$ . Vamos representar a coordenadas do ponto  $A$  por  $x_A, y_A$  e as coordenadas de  $B$  por  $x_B, y_B$ .

A equação Cartesiana (ou Geral) da reta pode ser calculada usando um ponto variável  $P(x, y)$  e os dois pontos que já conhecemos  $A$  e  $B$ . Como os três pontos pertencem a reta  $AB$ , a tangente dois a dois destes pontos são iguais, ou seja,

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = -\frac{a}{b}$$

, daí fazendo  $b(y - y_A) = -a(x - x_A)$  e eliminando os parênteses, obtemos:

$$by - by_A = -ax + ax_A$$

que é o mesmo que

$$ax + by = ax_A + by_A.$$

Fazendo  $c = by_A + ax_A$  chegamos a equação:

$$ax + by = c.$$

Para escrever a equação Afim (ou Reduzida), basta dividir por  $b$  e isolar o  $y$ , ou

seja,

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

e chamando  $m = -\frac{a}{b}$  e  $n = \frac{c}{b}$  chegamos a forma:

$$y = mx + n$$

, onde  $m$  é chamado de coeficiente angular, pois é a tangente do ângulo de inclinação de reta, e  $n$  é chamado de coeficiente linear, que é a interseção da reta com o eixo  $y$ .

**Definição 5** *Lugar Geométrico* é um conjunto dos pontos que tem uma mesma propriedade.

Assim podemos dizer que a **Circunferência** é o lugar geométrico dos pontos que estão a mesma distância (raio da circunferência) de um ponto dado (centro da circunferência).

A circunferência de centro  $(\alpha, \beta)$  e raio  $R$ , é representada pela equação:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \quad (\text{A.1})$$

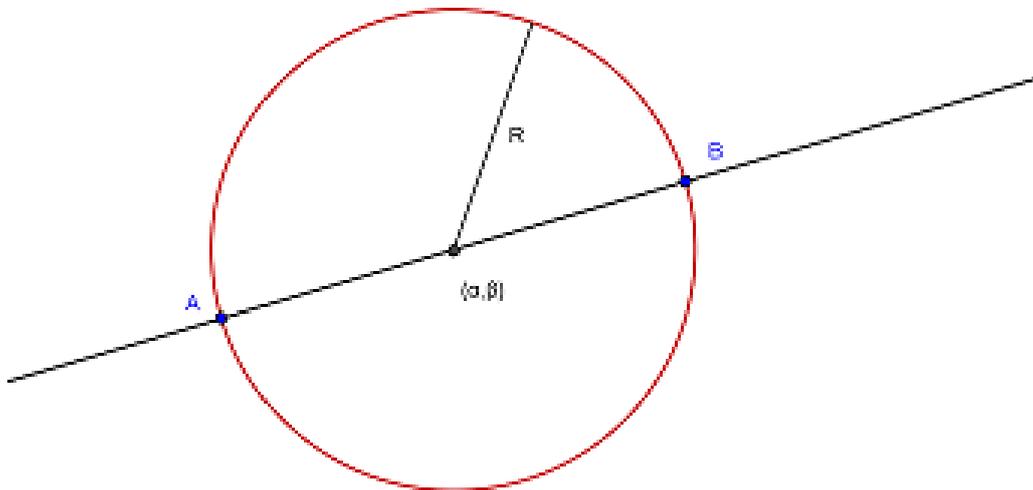


Figura A.1:

### A.1.2 Elipse

A **Elipse** é o lugar geométrico dos pontos em que a soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) é uma constante.

A elipse de focos A e B, centro  $(\alpha, \beta)$ , considerando  $2a$  o comprimento do eixo maior, na horizontal,  $2b$  o comprimento do eixo menor, na vertical e  $2c$  a distância focal, é representada por

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1, \quad (\text{A.2})$$

onde os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  se relacionam pela equação

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

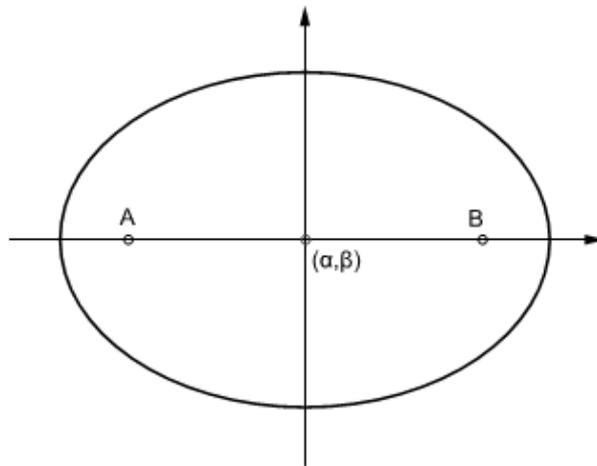


Figura A.2:

### A.1.3 Parábola

A **Parábola** é o lugar geométrico dos pontos equidistantes a um ponto fixo (foco) e uma reta (diretriz).

Uma parábola de foco  $F(a, b + p)$ , vértice  $V = (a, b)$  e diretriz  $y = b - p$ , onde  $2p$  é a distância do foco a diretriz, é representada por

$$(x - a)^2 = 4p(y - b) \quad (\text{A.3})$$

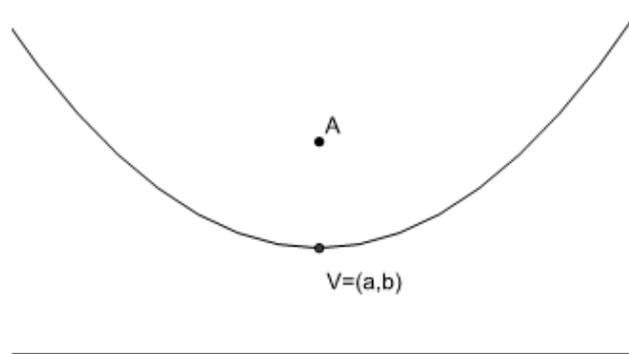


Figura A.3:

### A.1.4 Hipérbole

A **Hipérbole** de focos  $A$  e  $B$  é o lugar geométrico dos pontos em que a diferença, entre as distâncias do foco  $A$  e a do foco  $B$ , é uma constante.

Uma hipérbole de centro  $(\alpha, \beta)$ , seja  $2c$  a distância focal e  $2a$  distância principal e  $2b$  distância secundária, tal que  $a^2 + b^2 = c^2$ , representada por

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1, \quad (\text{A.4})$$

onde os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  se relacionam pela equação

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

### Rotação de eixo

É comum aparecer a hipérbole equilátera na forma

$$xy = k$$

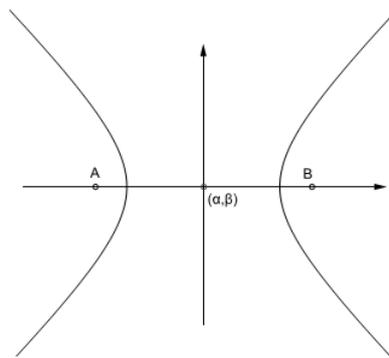


Figura A.4:

, vamos mostrar que é uma hipérbole com uma rotação de eixo.

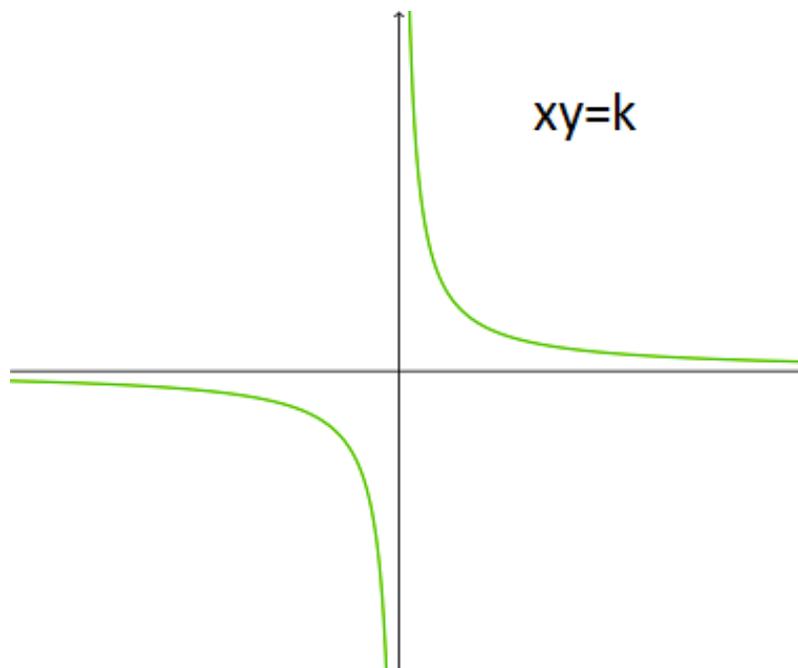


Figura A.5:

Vamos considerar dois eixos um com eixos  $xy$  e outro com eixos  $\bar{x}\bar{y}$ , o segundo rotacionado no sentido anti-horário de um ângulo  $\theta$ . As coordenadas do ponto  $A$  no sistema de eixos  $xy$  chamamos de  $x_A, y_A$  e no sistema de eixos  $\bar{x}\bar{y}$  chamamos de  $\bar{x}_A, \bar{y}_A$ .

Vamos escrever

$$x_A = \bar{x}_A \cos \theta - \bar{y}_A \sin \theta$$

$$y_A = \bar{x}_A \sin \theta + \bar{y}_A \cos \theta$$

Agora para um ponto qualquer de coordenadas  $x, y$  e  $\bar{x}, \bar{y}$ , escrevendo

$$xy = (\bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta)(\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta) = k$$

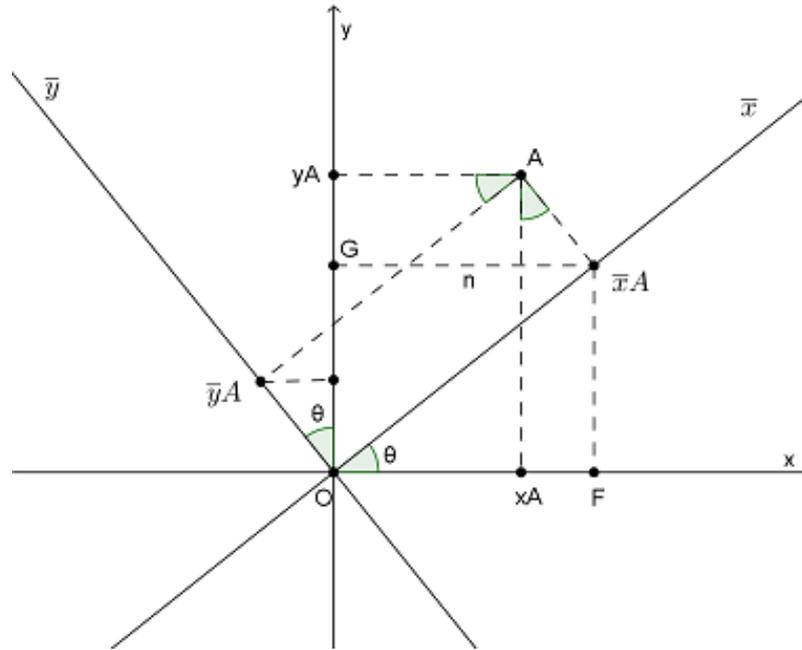


Figura A.6:

$$\bar{x}^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \bar{y}^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \bar{x}\bar{y} \cos^2\theta - \bar{x}\bar{y} \operatorname{sen}^2\theta = k$$

$$(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \bar{x}\bar{y} (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = k$$

Na última equação escolhemos um valor de  $\theta$  que anule o termo  $\bar{x}\bar{y}$ , ou seja,  $\theta = 45^\circ$ , daí obtemos

$$(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) \cos(45^\circ) \operatorname{sen}(45^\circ) = \bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 2k$$

equação de uma hipérbole rotacionada de  $45^\circ$  em rela ao eixo  $xy$ .

### A.1.5 Lemniscata

A lemniscata é uma curva plana definida a partir de dois pontos dados  $F_1$  e  $F_2$ , conhecido como focos, a uma distância de  $2a$  um do outro como o lugar geométrico dos pontos  $P$ , de modo que  $PF_1 \cdot PF_2 = a^2$ . A curva tem uma forma semelhante ao algarismo 8 e à  $\infty$  símbolo para representar infinito.

**Definição 6** A **Lemniscata** é o lugar geométrico dos pontos  $P$ , cujo produto das distância a dois pontos fixos (focos) é igual a  $a^2$ .

Sejam  $F_1 = (-a, 0)$  e  $F_2 = (a, 0)$  os focos da lemniscata de centro  $O = (0, 0)$ , ou seja

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2$$

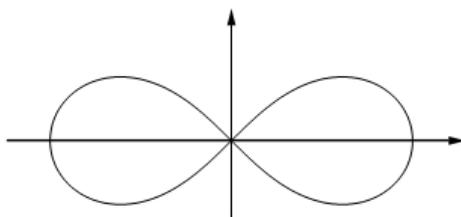


Figura A.7: Lemniscata de Bernoulli

$$[(x + a)^2 + y^2] \cdot [(x - a)^2 + y^2] = a^4$$

$$[x^2 + 2ax + a^2 + y^2][x^2 - 2ax + a^2 + y^2] = a^4$$

$$[(x^2 + y^2) + (a^2 + 2ax)][(x^2 + y^2) + (a^2 - 2ax)] = a^4$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)(a^2 - 2ax) + (x^2 + y^2)(a^2 + 2ax) + a^4 - 4a^2x^2 = a^4$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2)2a^2 - 4a^2x^2 = 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2 - 2x^2)2a^2 = 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

a forma cartesiana da lemniscata. Fazendo  $x = r\cos\theta$  e  $y = r\sin\theta$ , obtemos a equação polar

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

### A.1.6 Cardióide

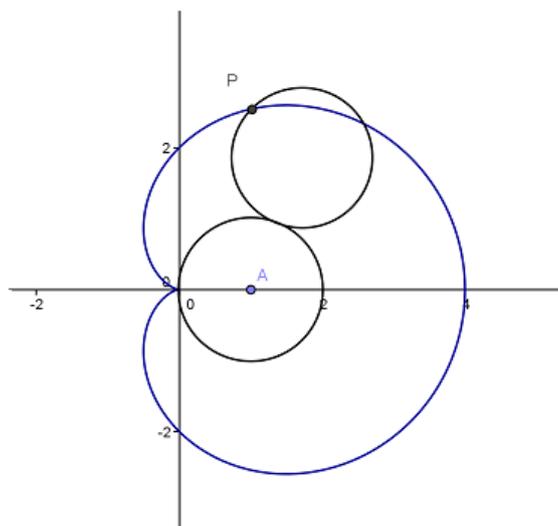


Figura A.8:

A **Cardióide** é definida pelo percurso de um ponto na circunferência de um

círculo com um raio  $R$  que rola sem escorregar sobre um outro círculo de mesmo raio.

Equação cartesiana

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

Equação polar

$$r = 2R(1 + \cos\theta)$$

## A.2 Noção de limite e derivada

Vamos estudar limite das funções polinomiais  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ . Chamemos de limite  $L$  de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de  $b$ , e representado por:

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$$

Exemplo 1: Seja  $f(x) = 3x - 5$ , o  $\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$

Exemplo 2: Seja  $f(x) = 5x^2 - 4x - 2$ , o  $\lim_{x \rightarrow -2} 5x^2 - 4x - 2 = 5 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 2 = 20 + 8 - 2 = 26$

**Definição 7** Uma função de domínio  $D$  é contínua num ponto  $x_0$  de seu domínio, se somente se:

i) existir o valor de  $f(x_0)$ ;

ii) existir o  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

iii)  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

A função polinomial é um exemplo de função contínua em  $\mathfrak{R}$ .

**Definição 8** Chama-se derivada de uma função  $f(x)$  num certo ponto  $x_0$ , pertencente ao domínio de  $f(x)$ , ao valor  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ,  $x \neq x_0$ , se existir o limite e for diferente de  $\pm\infty$ .

A função polinomial é contínua e derivável em todo seu domínio.

Exemplo:  $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 2x + 8$ , a derivada de  $P(x)$  será representada por  $P'(x) = 3 \cdot 5x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 1 \cdot 2x^{1-1} + 0$  que efetuando as operações obtemos  $P'(x) = 15x^2 + 4x - 2$ .

## A.3 Derivada parcial

Suponha que uma função real  $f$  para cada terno  $(x, y, \alpha)$  associa um único número real  $f(x, y, \alpha)$ .

Como por exemplo  $f(x, y, \alpha) = x^2 + 3xy - 4\alpha y$  denotaremos por  $f'_x(x, y, \alpha)$  a derivada parcial de  $f$  em relação  $x$ , considerando  $y$  e  $\alpha$  contantes, ou seja,  $f'_x(x, y, \alpha) = 2x + 3y$ ; analogamente a derivada parcial em relação a  $y$ , considerando  $x$  e  $\alpha$  constantes, é  $f'_y(x, y, \alpha) = 3x - 4\alpha$  e a derivada parcial em relação a  $\alpha$ , considerando  $x$  e  $y$  constantes, é  $f'_\alpha(x, y, \alpha) = 4y$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, Geraldo S.S., *Cálculo: diferencial e integral*, Livros Técnicos e Científicos; Rio de Janeiro; Editora Universidade de Brasília; pp. 166-168, (1978).
- [2] Boltianski, Vlademir G., *La Envolvente*, Editorial Mir Moscou, URSS(1977).
- [3] Markushevich, A.I., *Curvas Notáveis*; Traduzido por Robinson Moreira Tenório - São Paulo : Atual Editora, 1995 - (Coleção Matemática: aprendendo e ensinando)
- [4] Ramírez, Óscar Ciaurri., *A vueltas con la envolvente: una aventura de curvas con algunos personajes*. Universidad de La Rioja - Departamento de Matemáticas y Computación., (2009).
- [5] Vilches, M. A. *A Envoltória de Curvas Planas*, Cadernos do IME - Série Matemática - Volume 3(2009).