UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT

THIAGO LOPES DE FARIA

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Sinop – 2019

THIAGO LOPES DE FARIA

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Dissertação de mestrado apresentada a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT como requisito exigido para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Tadayuki Koga

Sinop - 2019

Luiz Kenji Umeno Alencar CRB 1/2037

F224p

FARIA, Thiago.

Proposta de Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral / Thiago Faria – Sinop, 2019.

58 f.; 30 cm.

Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação/Mestrado) – Curso de Pós-graduação Stricto Sensu (Mestrado Profissional) Profmat, Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Câmpus de Sinop, Universidade do Estado de Mato Grosso, 2019.

Orientador: Miguel Tadayuki Koga

1. a Sala de Aula Invertida. 2. Cálculo Diferencial e Integral. 3. Vídeo Aula. I. Thiago Faria. II. Proposta de Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: .

CDU 37.02:517.2/.3

ESTADO DE MATO GROSSO
SECRETARIA DE ESTADO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
FACET – FACULDADE DE CIÊNCAIS EXATAS E TECNOLOGICAS.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT - UNEMAT - SINOP

THIAGO LOPES DE FARIA

"Proposta de Sequência Didática para o Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral"

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade do Estado de Mato Grosso - UNEMAT no *Campus* Universitário de Sinop, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Tadayuki Koga

Aprovado em: 28/09/2019.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Miguel Tadayuki Koga Presidente	Prof. Dr. Edson Pereira Barbosa Avaliador Externo	Prof. Dr. Giovane Maia do Vale Avaliador Interno

SINOP – SETEMBRO-2019

À minha Maria Neuza Bento que uma vez me disse: “Deve ter um anjinho que gosta de você”. Hoje sei que esse anjo é você mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família e a todos os professores que fizeram parte da minha vida. Quero também agradecer a três professores em especial: ao meu orientador Prof. Dr. Miguel Tadayuki Koga sem ele esse trabalho não existiria; ao Prof. Dr. Oscar Gonzalez Chong que nunca desistiu da nossa turma e nos ajudou até o último momento; e, ao Prof. Dr. Giovane Maia do Vale que me fez refletir sobre minhas práticas de ensino.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo contribuir com a prática docente apresentando um estudo de caso que propõe uma sequência didática para ser executada no ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, utilizando-se da metodologia A Sala de Aula Invertida e a vídeo aula como ferramenta didática. É também objetivo mostrar como o professor de Matemática pode organizar uma prática docente com o uso do vídeo aula. A pesquisa tem uma abordagem qualitativa com a utilização de metodologias ativas de cunho descritivo e interpretativo.

Palavras-Chaves: A Sala de Aula Invertida. Cálculo Diferencial e Integral. Vídeo Aula.

ABSTRACT

This paper aims to contribute to the teaching practice presenting a case study that proposes a didactic sequence to be performed in the teaching and learning of Differential and Integral Calculus, using the methodology The Inverted Classroom and the video class as a didactic tool. It is also intended to show how the Mathematics teacher can organize a teaching practice using the video lesson. The research had a qualitative approach with the use of active methodologies of descriptive and interpretative nature.

Keywords: The Inverted Classroom. Differential and Integral Calculus. Video Lessons.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

CDI I – Cálculo Diferencial e Integral I

CDI II – Cálculo Diferencial e Integral II

CDI III – Cálculo Diferencial e Integral III

EAF-CO – Escola Agro técnica Federal de Colorado D'Oeste – RO

IFMT – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso

IFRO – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SD – Sequência Didática

UFPE – Universidade Federal de Pernambuco

UNIR – Fundação Universidade Federal de Rondônia

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Meus pais eram proprietários de um bar no interior do estado de Rondônia, mais precisamente na cidade de Cacoal. Começo citando o “Pachuca Lanches” porque a minha vida está diretamente ligada a esse bar. É por conta dele e a influência dos meus pais que decido “estudar”, mesmo sendo entediante a escola e toda a rotina que a cerca. Meu pai tinha um ótimo argumento que corroborava com minha escolha: “Você não quer estudar? Tudo bem. Então você irá me substituir, no futuro, aqui no bar”. Bom, eu não queria nenhum dos dois. Mas como não gostava de trabalhar no bar restava a escola.

Ao contrário do que se possa imaginar nunca fui muito fã de Matemática, mas preferia resolver as atividades de Matemática do que as de gramática. E é assim que fui construindo minha trajetória escolar.

Cursei todo o ensino fundamental na cidade de Cacoal em escolas privadas. Já o ensino médio foi realizando na antiga Escola Agro técnica Federal de Colorado D’Oeste – RO (EAF-CO) atual Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia (IFRO) – campus de Colorado D’Oeste. É importante destacar alguns fatos sobre esse período na EAF : 1º) Meus pais me obrigaram a ir; 2º) Eu tinha treze anos, nunca havia saindo, e agora iria dividir um alojamento com mais sete pessoas; 3º) Não fazia ideia sobre o que era o curso que fui matriculado, técnico em agropecuária; 4º) Os três anos lá me mudaram para sempre.

De garoto extremamente tímido à professor federal. Sim, eu era muito introvertido. Dos trezes aos dezesseis anos começo a mudar isso de maneira bem gradativa. Até porque percebia que aquele comportando não me levaria muito longe na vida adulta. É também nesse período que percebo a “vocação” para ser professor, afinal já ajudava meus colegas de classe com seus deveres de casa principalmente os de Matemática. Munido com essas informações, decido prestar vestibular para o curso de física, mudando de ideia na última hora para o curso de Matemática. Por quê? Porque me assustei com os nomes das disciplinas do curso de física e achei que reprovaria. Depois de prestar o vestibular, e ter tido a “sorte” de passar, começo o curso de Licenciatura Plena em Matemática na Fundação Universidade Federal de Rondônia (UNIR) – campus de Ji-Paraná no ano de 2003, o concluindo em 2006. Em janeiro de 2007 tento o mestrado pela primeira vez realizando o curso de verão da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Sem êxito nessa tentativa, volto a minha cidade natal e fico desempregado por cerca de quatro meses até ser aprovado em processo seletivo para ser professor substituto na EAF agora já Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia (IFRO). Começo minha vida profissional na escola que mudou minha vida e substituindo minha professora de Matemática, que havia se aposentado. Permaneço no IFRO por cerca de um ano até assumir o concurso da prefeitura de Ministro Andreazza - RO como professor efetivo. Esse período é bem curto, pois em menos de seis meses sou convocado para assumir uma vaga como professor estatual e agora na cidade de Cacoal. Trabalho como professor estadual de 2009 a julho de 2011. E é em agosto de 2011 que começo a minha vida profissional no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (IFMT) – campus Juína permanecendo lá até o presente momento.

O IFMT me proporcionou ótimas oportunidades. Desde o primeiro ano leciono no curso de Licenciatura em Matemática do campus Juína. No início era apenas a disciplina de Matemática financeira e aulas de Matemática para as turmas de ensino médio profissionalizante. No decorrer dos anos fui trabalhando mais disciplinas no curso de Matemática tais como: Matemática I, Matemática II, Matemática III, Estatística I, Cálculo I, Cálculo II e Equações Diferenciais. As três primeiras disciplinas citadas são as que leciono por mais tempo. Cálculo II e Equações Diferenciais foram em caráter emergencial, apenas por um semestre. Atualmente estou lecionando as disciplinas de Matemática I, Matemática III e Cálculo I.

Desde o final de minha graduação tento ingressar em um mestrado, mas confesso que me frustrei muito com a reprovação na primeira tentativa. Levei alguns anos até me sentir motivado a tentar outra vez. Então essa motivação reaparece em 2011 com o surgimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Não consigo o acesso nessa primeira tentativa, mas fico muito feliz com meu desempenho. E assim os anos foram e sempre que possível eu prestava o exame de acesso. Precisei de várias tentativas, seis ou sete. Uma em Porto Velho – RO, duas em Sinop – MT e as demais em Cuiabá – MT. E então o improvável aconteceu, no ano de 2016, depois do falecimento de minha mãe fui realizar a prova de acesso no polo da cidade de Sinop – MT, sem muitas esperanças de ser admitido. E olha só? Dessa vez eu consegui.

O município de Juína – MT recebeu a implementação do IFMT e ganhou sua liberação para o seu funcionamento através da portaria de nº 119 de 29 de janeiro de 2010 oferecendo cursos de nível médio e superior. Dentre eles o curso de Licenciatura Plena em Matemática que oferece conteúdos curriculares de formação geral e de formação técnica específica, destacando-se as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral – CDI, divido em três CDI I, CDI II, CD III. Sendo a primeira delas oferecida no terceiro semestre do curso, com carga horária de 120 horas/aulas.

Durante minha graduação a disciplina de Cálculo era vista como o “bicho papão” do curso, uma espécie de “divisor de águas” como alguns se referiam. Tudo isso devido ao alto índice de reprovação. Essa disciplina normalmente era ofertada no segundo semestre do curso de Matemática e assim seria para minha turma, mas devido a problemas de saúde do professor titular a disciplina de Cálculo, ela teve que ser cancelada e substituída por outra. Desta maneira só tive contato com o Cálculo Diferencial e Integral no terceiro semestre do curso.

A sala de aula estava extremante lotada na disciplina de Cálculo I. Eram cerca de 50 alunos, desde total apenas 20 eram efetivamente da minha turma. Lembro que nos primeiros dias não havia lugares para todos. E como residia em outra cidade acabava chegando atrasado e em algumas aulas acabava fincando do lado de fora da sala de aula (várias vezes devido as condições da estrada). Após a primeira avaliação a disciplina deu-se a evasão de alunos que apresentaram notas baixas, assim a sala começou a contar com lugares vagos. Não sei exatamente quantos acabaram desistindo, mas sei que mesmo que chegasse atrasado, agora, sobravam lugares vagos na sala. A taxa de aprovação na disciplina de Cálculo I era realmente baixa, dos 20 alunos de minha turma, acabaram ficando uns 10 ao final da disciplina.

As aulas de Cálculo I eram “tradicionais”. Meu professor se dirigia ao quadro e começava a escrever. E assim se passavam duas ou até quatro horas com ele fazendo demonstrações e trabalhando os exemplos necessários para concluir a aula do dia. Resolvia as atividades de forma mecânica. Eu não fazia ideia do que estava fazendo quando calculava a derivada de uma função e muito menos conseguia compreender totalmente as demonstrações feitas, mesmo assim consegui aprovação. Acredito que somente agora, já lecionando a disciplina, é que possuo ferramentas necessárias para compreender os temas do Cálculo Diferencial e Integral.

Esse cenário descrito durante minha graduação poderia ser de um acadêmico que se depara com a disciplina de Cálculo atualmente. Ou, sendo mais específico, um acadêmico do curso de Matemática do IFMT - Campus Juína, que também possui uma taxa baixa de aprovação na disciplina de Cálculo. Há um número considerável de desistências e as aulas geralmente são trabalhadas de maneira “tradicional”.

Existem vários trabalhos como “A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral” (BARUFI, 1999); “Ensino e Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Visão de Acadêmicos de Licenciatura Plena em Matemática do IFMT – Campus Juína” (SILVA, 2016); e “Análise do Índice de Reprovação e Evasão na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I da UFCG-Cuité” (NASCIMENTO, 2018). Que buscam investigar e apontar motivos para o baixo desempenho/aprovação dos alunos no estudo de Cálculo Diferencial e Integral.

Nesta perspectiva é que surge a motivação para esse trabalho, no qual se propõe uma sequência didática que possa ser utilizada no ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, através da Sala de Aula Invertida, uma metodologia ativa, que inverte a situação do processo de ensino e aprendizagem. Nesta proposta foi usado vídeo aula como ferramenta didática para tirar o aluno de um papel passivo e o colocar em um papel mais ativo. Sendo ele o grande responsável por sua aprendizagem. Como resultado desse trabalho pretende-se reduzir a taxa de evasão e aumentar a taxa de aprovação da disciplina de Cálculo I, do curso de Licenciatura Plena em Matemática do IFMT - Campus Juína.

Neste trabalho estaremos apresentando o contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, oferecido no curso de Licenciatura em Matemática do IFMT – Campus Juína. Assim, se estruturou este trabalho da seguinte maneira:

No capítulo 1 é realizada uma revisão de literatura sobre tópicos relevantes para a pesquisa, a saber: um resumo histórico sobre Cálculo Diferencial e Integral, ensino de Cálculo Diferencial e Integral, Sequência didática, e Sala de Aula Invertida. No capítulo 2 discorre-se sobre a metodologia de pesquisa e os instrumentos utilizados para a coleta de dados e os procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 3 são apresentados os dados coletados no decorrer do processo didático e uma avaliação do processo didático desenvolvido durante o semestre. Estas avaliações foram encaminhadas na forma de mensagem de texto, enviado via *e-mail*. Ao final, apresentamos nossas considerações finais sobre o trabalho, respeitando o ponto de vista dos alunos, bem como uma análise pessoal do processo didático realizado.

CAPÍTULO I

O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1.1 Um pouco da História de Cálculo Diferencial e Integral

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, ou simplesmente Cálculo, é na visão atual frequentemente atribuída a Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716). Para Souza (2001):

> [...] o Cálculo Diferencial e Integral não surgiu já pronto e acabando e da cabeça de um só homem. O Cálculo, assim como outras teorias Matemáticas, teve uma história e um longo desenvolvimento, que iniciou na antiguidade e estendeu-se até os tempos modernos. (2001, p.25)

De fato, segundo Eves (2011) algumas ideias do Cálculo são encontradas em trabalhos de matemáticos da Grécia Antiga, com destaque para o filosofo Zenão de Eleia (495-425 A.C.), Antífon, o sofista (480-411 A.C.), Eudoxo (408-370 A.C.) e Arquimedes (287-212 A.C.). Carvalho e D'Ottaviano (2006) ressaltam que apesar de Newton e Leibniz receberem os créditos da criação do Cálculo, já que estes começaram a efetuar a generalização e unificação do assunto, existiram outros precursores do Cálculo Diferencial e Integral, tais como, René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677). Houve ainda, no século XVIII, a contribuição de outros matemáticos como Leonhard Euller (1707-1783) e Joseph L. Lagrange (1736-1813). No final século XIX os processos do Cálculo receberam fundamentação sólida por parte de matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916), como descreve Boyer (2010).

Newton estava interessando em provar se sua teoria física sobre gravitação universal e a força centrípeta estavam corretas. Para tal, acabou criando sua própria "Matemática", primeiramente descobrindo o teorema do binômio generalizado e depois inventando o método dos fluxos, o atual Cálculo Diferencial (EVES, 2011).

Em sua publicação de 1736 Newton mostrava suas conclusões sobre o método dos fluxos.

> [...] uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e à ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma

> quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo de fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. [...] Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. (EVES, 2011, p. 439)

Eves (2011) explica que, Newton tratou de dois tipos de problemas com o método dos fluxos: 1º) considerando uma relação entre alguns fluentes, buscou uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos, que é o que hoje chamamos de diferenciação; 2º) estudou a relação inversa. Considerando a relação entre fluentes e seus fluxos, buscou encontrar uma relação envolvendo apenas os fluentes. Esse é o processo de diferenciação.

Após ler a carta de Pascal sobre *os indivisíveis* Leibniz percebeu que

> [...] a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tomavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que foram a área. (BOYER, 2010, p. 276)

Em 1684 Leibniz publica seu primeiro artigo sobre Cálculo Diferencial, onde ele define dx como um intervalo finito e arbitrário e dy pela proporção $dy/dx = y/subtangente$. (EVES, 2011).

O Cálculo Diferencial e Integral resume-se a basicamente a dois processos: a derivação e a integração, ambos amparados pela Teoria dos Limites. "A derivada tem origem geométrica; está ligada ao problema de traçar uma reta tangente a uma curva de uma função. A integral também tem origem geométrica; está ligado ao problema de determinar uma área de uma figura plana delimitada por uma curva" (OLIVEIRA, 2010, p.8).

Tais conceitos são usados em vários ramos da ciência, sempre que um problema pode ser modelado matematicamente e uma solução otimizada é esperada. Usando a derivada como exemplo, Dall'Anese (2000, p.12) reforça dizendo:

> Diversas áreas do conhecimento utilizam-se da derivada como ferramenta para resolver problemas sobre fenômenos que envolvem variação. Pode-se citar por exemplo, a biologia, em que a derivada se aplica na pesquisa da taxa de crescimento de bactérias de uma cultura; na eletricidade, para descrever a variação da corrente num circuito elétrico; na economia, para estudar a receita, o custo e o lucro marginais. Na física, o conceito de derivada está presente para definir a velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma curva: a primeira, refere-se à medida da taxa de variação da distância percorrida em relação ao tempo; e a segunda, à medida da taxa de variação da velocidade. Enfim, pode-se perceber que as aplicações de derivadas são inúmeras, e que em muitos casos está presente explicitamente a essência do conceito, que é a medida de variação. (2000, p.12)

Como pode ser notado, com o Cálculo podemos analisar e criar vários modelos matemáticos vinculados a fenômenos físicos, químicos e naturais. Não se resumindo apenas às ciências exatas, muito pelo contrário, se desenvolve através de medidas infinitesimais. Desta maneira fica claro a importância de estudar e compreender seus conceitos.

Aprender Cálculo Diferencial e Integral pode se tornar uma tarefa extremamente difícil, já que se faz necessário ter um conhecimento de certas áreas da Matemática como funções. Aprender Matemática, por sua vez, de acordo com Brasil (2004):

> [...] nem sempre é fácil (e, por vezes, parece impossível) mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados. O professor, quase sempre, não encontra ajuda ou apoio para realizar essa tarefa de motivar e instigar o aluno relacionando a Matemática com outras áreas de estudo e identificando, no nosso cotidiano, a presença de conteúdos que são desenvolvidos em sala de aula [...]. (2004, p.3)

Esse cenário de dificuldade pode fazer com que os conteúdos sejam repassados de forma mecânica aos estudantes e estes não compreenderão as suas respectivas aplicações. Gerando assim, futuras frustrações no estudo de Derivadas e Integrais.

1.2 Ensino de Cálculo Diferencial e Integral no Brasil

Conforme Ávila (1991), a Matemática Moderna, proposta criada na década de 50 e implantada no Brasil na década de 60, objetiva uma modernização no ensino da Matemática. Porém esta proposta criada para o desenvolvimento de pesquisadores, pois acaba priorizando o rigor e o formalismo matemático enfocando fortemente a teoria dos conjuntos, ocasionando a exclusão ou ênfase menor em alguns tópicos da Matemática, que antes eram tratados com maior enfoque, entre eles está a Geometria e o Cálculo. Sim, Cálculo. O Cálculo já foi lecionado no que hoje seria o Ensino Médio. Os alunos aprendiam sobre derivadas, aplicações a problemas de máximos e mínimos, entre outros tópicos.

Difícil imaginar que até 1960, no Brasil, o Cálculo era ensinado para os alunos do 2ºgrau e que atualmente é um grande desafio ensinar para nossos alunos de Ensino Superior, não? Ávila (1991) defende que é possível ensinar Cálculo para o Ensino Médio. Na sua visão os programas de Matemática estão mal estruturados, pesados e com um excesso de formalismo.

> “Um exemplo mais evidente disso está no ensino das funções. Gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomenclatura – contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, sobrejetiva – num esforço de poucos resultados práticos”. (ÁVILA, 1991, p.6)

A solução apontada pelo autor é que os programas de ensino devem ser "arrumados" adequadamente. Já que há tópicos da Matemática que são ensinados de maneira isolada uns dos outros. É necessária uma maior articulação entre eles deixando o ensino mais orgânico. Um exemplo: é o ensino de derivada que deveria preceder ou ser feito simultaneamente ao da Cinemática na Física. Ávila (1991) aponta que desta forma os alunos compreenderiam melhor o conceito de velocidade instantânea se essa fosse trabalhada com noções de derivada.

É perceptível para um professor de Cálculo as dificuldades que os alunos apresentam ao terem contato com a disciplina de Cálculo no Ensino Superior como pode ser visto em vários trabalhos que envolvem estudo sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral. De acordo Barufi (1999), os alunos ao ingressarem em cursos de Ensino Superior, que possuem Cálculo como pré-requisito, se frustram por não conseguirem integrar a Matemática vista por eles até o Ensino Médio à nova disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. O motivo de tal frustração é o fato de vários conceitos matemáticos serem, na maioria das vezes, trabalhados de maneira isolada, corroborando com Ávila (1991).

> "Na escola média, os alunos trabalham alguns conceitos matemáticos, muitas vezes de maneira isolada, com a melhor das hipóteses, um enfoque significativo, e apesar dos professores da Universidade esperarem haver domínio de algumas técnicas operatórias, normalmente a linguagem lógico-formal não está satisfatoriamente estabelecida. A Matemática com a qual os estudantes trabalham, na maioria das vezes, permaneceu no âmbito da intuição, com algum aspecto voltado, talvez, para o prazer da descoberta. Nesse sentido, o conhecimento matemático não foi estabelecido como um todo articulado, logicamente estruturado." (BURAFI, 1999. p. 148)

Já Silva (2016) apresenta em seu trabalho como é o índice de aprovação na disciplina Cálculo Diferencial e Integral dentro do Curso de Licenciatura em Matemática do IFMT Campus Juína, buscando através da visão dos alunos estabelecer quais os possíveis motivos para estes índices. A autora relata que apenas 11% dos alunos matriculados em CDI I, da turma 2011, foram aprovados. Na turma 2012 o índice foi de 18% de aprovação. E na turma de 2013 o índice foi de 12%. Apesar desses índices baixos, tal situação se assemelha com a realidade de outras disciplinas de CDI ofertado em outras universidades em curso de licenciatura em Matemática.

Nascimento (2018) destaca o índice de evasão da disciplina, isto é, a reprovação por faltas é bastante elevada. Em seu trabalho, expressa que um percentual de aproximadamente 57,1% dos alunos reprovam por falta, ou seja, os alunos desistem antes de concluir a disciplina.

Silva (2016) em seu trabalho constata que o tempo de estudo extraclasse dos alunos da licenciatura é pequeno, cerca de 50% acadêmicos entrevistados só se dedicam de 1 a 4 horas por semana aos estudos.

Outra informação importante do trabalho de Silva (2016) é a deficiência apresentada por eles com relação à sua formação na Educação Básica, assim 75% dos alunos afirmam que a falta de domínio de operações básicas da Matemática pode influenciar no aprendizado da disciplina de Cálculo I. A pesquisadora ainda reforça outro fator extremamente relevante em relação ao ensino e aprendizagem da disciplina que é a visão do aluno em relação às aplicabilidades do Cálculo.

> Cerca de 75% dos alunos concordaram em diferentes níveis que as dificuldades em perceber as aplicabilidades de Cálculo tem influência no ensino e aprendizagem da disciplina, 10% disseram discordar em diferentes níveis, enquanto 15% dos alunos não opinaram. (SILVA, 2016. p.30)

Para Nascimento (2018),

> Com isto, nota-se que de fato a maioria dos alunos não conseguem acompanhar o ritmo da disciplina por dificuldades trazidas desde o Ensino Básico, tendo então que supri-las no Ensino Superior. E mudar isto já no Ensino Superior não é uma tarefa fácil, pois, de acordo com os dados a cada semestre os índices de reprovação e evasão são sempre bem significativos, pois, de um total de 12 turmas apenas duas conseguiram de fato bons resultados.” (NASCIMENTO, 2018, p.16)

Porém, um dos fatores importantes para o melhor desempenho na disciplina está centrada no professor, a pesquisa mostrou que 85% dos alunos entrevistados consideram que a didática do professor influência na compreensão de Cálculo Diferencial e Integral.

A aprovação ou a não aprovação na disciplina de Cálculo pode depender basicamente de três fatores: O aluno, professor e Matemática.

Matos e Santos (2012) coloca que:

> Um ponto bastante observado com relação à grande maioria dos alunos recém-chegados na Universidade, diz respeito aos assuntos tratados nas aulas de Cálculo, que parecem desconhecidos, chegando-se a pensar que muitos alunos não tiveram ou não assimilaram o mínimo de conhecimento dos conteúdos necessários, conteúdos estes que, na sua grande maioria, são repetições do que estudaram na educação básica.(2012, p. 4)

Como observado, cada vez mais os alunos chegam aos cursos superiores com um conhecimento matemático superficial. Com dificuldade em realizar operações simples como, por exemplo, as operações com frações, resolução de equações e inequações, sem contar com a trigonometria e a geometria espacial. Isso dificulta a compreensão e assimilação dos conceitos mais rigorosos da Matemática, neste caso do Cálculo Diferencial e Integral.

A responsabilidade não é apenas do aluno. É importante lembrar que alguns professores de instituições de ensino superior não possuem perfil para o ensino, mas sim para a pesquisa. Como aponta Koga (1998) os professores que atuam em cursos de Matemática, em sua maioria, são Bacharéis que cursaram um mestrado e/ou doutorado e posteriormente ingressaram em uma instituição de Ensino Superior através de concurso público e começam a lecionar. Sem nenhuma formação pedagógica. Esses profissionais lecionam em cursos de formação de professores desconhecendo o projeto pedagógico de seus respectivos cursos. Suas atribuições de aulas são feitas, na maioria das vezes, por interesses pessoais e não de acordo com a produção cientifica.

> “A maioria dos cursos de Licenciatura em Matemática apresenta um vínculo com o Bacharelado; logo há uma formação mais direcionada para o desenvolvimento de pesquisa em Matemática Pura ou Aplicada, tornando o curso de Licenciatura num Bacharelado de segunda categoria.” (KOGA, 1998. p. 112)

Outro problema é que esses profissionais são obrigados a lecionar no mínimo oito horas semanais de acordo com o art. 57 da lei 9.394, e a instituição exige que o professor universitário apresente, principalmente, a produção científica, sendo o momento didático apenas uma atividade que ele deve cumprir em suas obrigações profissionais.

Outro fator a ser considerado é a própria estrutura da Matemática da Educação Básica com atividade com pouco rigor matemático com a do Ensino Superior que se exige fortemente o rigor e formalismo matemático.

Na educação básica a Matemática pode ser descrita como uma coleção de “passo a passo” que o aluno deve seguir. Em contrapartida no ensino superior o cenário é diferente, já que agora o acadêmico deve provar ou demonstrar um teorema e não mais encontrar um valor para “x”. Na tentativa de minimizar índices de reprovação e/ou evasão nas disciplinas de Cálculo é comum que instituições de ensino superior ofereçam disciplinas de nivelamento ou preparatórias como aponta Rezende (2003):

> [...] um instrumento “normal” bastante usual nas instituições de ensino superior para o enfrentamento dos resultados catastróficos no ensino de Cálculo é a realização de cursos “preparatórios” para um curso inicial de Cálculo. É o caso por exemplo, do curso de “Cálculo Zero”, “Pré-Cálculo”, “Matemática Básica”, já tão familiares no nosso meio acadêmico. (2003, p.13)

Para Machado (2008) o cenário de dificuldade em ensino e aprendizagem de Cálculo são de natureza cognitiva, didática e epistemológica. Os alunos não apresentam estruturas cognitivas capazes de compreender as complexidades do Cálculo Diferencial e Integral. Há uma dificuldade em encontrar uma metodologia adequada para o ensino de Cálculo. Existem deficiências referentes ao ensino destas disciplinas que são anteriores ao ensino universitário.

1.3 Sequência Didática

A expressão Sequência Didática (SD) surge durante uma reforma educacional na França em meados dos anos de 1980. Esse termo designava um conjunto de atividades, voltadas a aprendizagem, aplicáveis ao ensino de qualquer conteúdo. No Brasil, essa expressão começa a aparecer nos textos didáticos ao final de 1990 com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais e atualmente estão associadas ao estudo do gênero textual.

Segundo Zabala (1998, p.18) Sequência Didática é "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos, tanto pelo professor quanto pelos alunos".

No Livro "A Prática Educativa: Como Ensinar" (ZABALA, 1998), o autor apresenta quatro modelos de Sequência Didática que são abstratos e que servem para diferentes níveis de ensino.

O primeiro modelo possui cinco etapas:

- A primeira etapa – Comunicação da lição: o professor expõe o tema. Enquanto explica, os alunos tomam notas; o professor permite alguma pergunta a que responde oportunamente; quando acaba, define a parte do tema que será objeto da prova que vale nota.
- Segunda etapa – Estudo individual sobre o livro didático: cada um dos alunos, utilizando diferentes técnicas (quadros, resumos, sínteses), realiza o estudo do tema.
- Terceira etapa – Repetição do conteúdo aprendido: cada aluno, individualmente, memoriza os conteúdos da lição que supõe que será objeto da prova ou exame.
- Quarta etapa – Prova ou exame: em classe, todos os alunos respondem às perguntas do exame durante uma hora.
- A quinta etapa – Avaliação: o professor comunica aos alunos os resultados obtidos.

O segundo modelo é dividido em oito etapas:

- A primeira etapa – Apresentação: o professor apresenta uma situação problema. Em seguida, expõe aos alunos uma situação conflitante que pode ser solucionada por meios matemáticos, linguísticos, físicos ou de qualquer outra área.
- Segunda etapa – Busca por soluções: o professor pede aos alunos que exponham diferentes formas de resolver o problema ou a situação.
- Terceira etapa – Exposição do conceito ou situação: o professor aproveita as propostas dos alunos para elaborar o novo conceito e ensinar o modelo de algoritmo, o problema ou situação.

- Quarta etapa – Generalização: o professor demonstra a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas aquelas situações que cumprem determinadas condições.
- Quinta etapa – Aplicação: os alunos, individualmente, aplicam o modelo a diversas situações.
- Sexta etapa – Exercitação: os alunos realizam exercícios do uso do algoritmo.
- Sétima etapa – Prova ou exame: em classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.
- Oitava etapa – Avaliação: o professor comunica aos alunos os resultados obtidos.

O terceiro Modelo possui oito etapas:

- A primeira etapa – Apresentação: apresentação por parte do professor, de uma situação problema relacionada a um tema. O professor desenvolve um tema sobre um fato ou acontecimento, destacando os aspectos problemáticos e os que são desconhecidos para os alunos; os conteúdos do tema e da situação podem ser um conflito social ou histórico, uma diferença na interpretação de determinadas obras literárias ou artísticas, a comparação entre um conhecimento vulgar de certos fenômenos biológicos e possíveis explicações cientificas, etc.
- Segunda etapa – Diálogo entre professor e alunos: o professor estabelece um diálogo com os alunos e entre eles promove o surgimento de dúvidas, questões e problemas relacionados com o tema.
- Terceira etapa – Comparação entre diferentes pontos de vista: o professor facilita diferentes pontos de vista e promove a discussão em grupo.
- Quarta etapa – Conclusões: a partir da discussão do grupo e de suas contribuições, o professor estabelece as conclusões.
- Quinta etapa – Generalização: com as contribuições do grupo e as conclusões obtidas, o professor estabelece as leis, os modelos interpretativos ou os princípios que se deduzem deles.
- Sexta etapa – Exercícios de memorização: os alunos, individualmente, realizam exercícios de memorização que lhes permitam lembrar os resultados das conclusões e da generalização.
- Sétima etapa – Prova ou exame: na classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.
- Oitava etapa – Resultado: o professor comunica aos alunos os resultados obtidos.

O quarto modelo é dividido em nove etapas:

- A primeira etapa – Apresentação: apresentação por parte do professor de uma situação problemática relacionada com o tema: o professor desenvolve um tema em torno de um fato ou acontecimento, destacando os aspectos problemáticos e os que são desconhecidos para os alunos. Assim como no terceiro modelo os conteúdos podem ser um conflito social ou histórico, diferenças de interpretação de obras literárias ou artísticas etc.

- Segunda etapa – Proposição de problema ou questões: os alunos, coletiva ou individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor expõem as respostas intuitivas ou suposições sobre cada um dos problemas e situações propostos.
- Terceira etapa – Proposta das fontes de informação: os alunos, coletiva ou individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor, propõem as fontes de informação mais apropriadas para cada uma das questões, uma pesquisa bibliográfica, uma experiência etc.
- Quarta etapa – Busca de informação: os alunos, coletiva ou individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor, realizam a coleta dos dados que as diferentes fontes lhes proporcionaram. A seguir selecionam e classificam estes dados.
- Quinta etapa – Elaboração das conclusões: os alunos, coletiva ou individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor, elaboram as conclusões que se referem às questões e aos problemas propostos.
- Sexta etapa – Generalização das conclusões e síntese: com as contribuições do grupo e as conclusões obtidas, o professor estabelece as leis, os modelos e os princípios que se deduzem do trabalho realizado.
- Sétima etapa – Exercícios de memorização: os alunos, individualmente, realizam exercícios de memorização que lhes permitam lembrarem os resultados das conclusões, da generalização e da sintase.
- Oitava etapa – Prova ou exame: na classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.
- Nona etapa – Avaliação: a partir das observações que o professor fez ao longo da unidade e a partir do resultado da prova, este comunica aos alunos a avaliação das aprendizagens realizadas.

Perceba que cada um dos modelos apresentados possui começo, meio e fim. Ou seja, apresentação, desenvolvimento e finalização com avaliação. Vale, também, destacar que existem diferentes modelos de aula, nas quais que algumas aulas são mais conceituais, outras mais procedimentais e outras mais atitudinais.

O autor ainda acrescenta que o objetivo de uma SD deve ser a de:

> [...] introduzir nas diferentes formas de intervenção aquelas atividades que possibilitem uma melhora de nossa atuação nas aulas, como resultado de um

> conhecimento mais profundo das variáveis que intervêm no papel que cada uma delas tem no processo de aprendizagem dos meninos e meninas. (ZABALA, 1998, p.54)

É importante considerar, durante o planejamento de uma SD, as relações de interação entre os envolvidos (professor e alunos) e as influências dos conteúdos nessas relações.

1.4 Sala de Aula Invertida

Em 2007, nos Estados Unidos, os professores Jonathan Bergmann e Aaron Sams sentiam-se frustrados com a falta de capacidade de seus alunos de traduzir o conteúdo trabalhado na sala de aula em conhecimentos úteis. Até que Aaron fez uma observação simples:

> [...] "O momento que os alunos realmente precisam da minha presença física é quando empacam e carecem de ajuda individual. Não necessitam de mim pessoalmente ao lado deles, tagarelando um monte de coisas e informações; eles podem receber o conteúdo sozinhos". (BERGMANN; SAMS, 2016, p.4)

Assim, decidiram gravar todas as suas aulas para que os alunos as assistissem como "dever de casa". E todo tempo em sala de aula serviria para ajudá-los com os conceitos que não foram compreendidos. Toda essa experiência é descrita no livro "Sala de Aula Invertida: Uma metodologia Ativa de Aprendizado" (BERGMANN; SAMS, 2016) que é uma espécie de manual sobre o tema. Destacam que

> [...] Não fomos os primeiros educadores a usar vídeos *screencast* em sala de aula como ferramenta didática, mas fomos os pioneiros e proponentes ostensivos dessa prática, e, para nós a sala de aula invertida não teria sido possível sem esse recurso. [...] Não propusemos o termo sala de aula invertida. Ninguém é "dono" dessa designação. (BERGMANN; SAMS, 2016, p.5)

A sala de aula invertida é descrita como uma metodologia ativa de aprendizado. Para Sobral e Campos (2011, p. 209) "metodologia ativa é uma concepção educativa que estimula processos de ensino-aprendizagem crítico-reflexivos, no qual o educando participa e se compromete com seu aprendizado" (SOBRAL; CAMPOS, 2011).

Para Valente (2014) a sala de aula invertida é uma modalidade de aprendizagem eletrônica, na qual os conceitos de determinado tema são estudados, antes mesmo que o aluno compareça à sala de aula. Assim a sala de aula passa a ser um espaço onde os estudantes trabalham os conteúdos de maneira prática como: resolução de problemas, experimentações, discussões em grupo, dentre outras.

> [...] no ensino tradicional a sala de aula serve para o professor transmitir informação para o aluno que, após a aula, deve estudar o material que foi transmitido e realizar

> alguma atividade de avaliação para mostrar que esse material foi assimilado. Na abordagem da sala de aula invertida, o aluno estuda antes e a aula se torna o lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas. O professor trabalha as dificuldades dos alunos, ao invés de apresentações sobre o conteúdo da disciplina. (VALENTE, 2014, p. 86)

Em um modelo tradicional de ensino, os alunos assistem à aula passivamente, apresentam alguma dúvida sobre as atividades extraclasse proposta na aula anterior. O professor responde tentando tirar as dúvidas apresentadas ministra (expõe no quadro) e comenta sobre o tema da aula com exemplos prontos e passa nova atividade extraclasse.

Em uma sala de aula invertida de acordo com Bergmann e Sams (2016) a rotina é: nos minutos iniciais de cada aula o professor faz uma pequena discussão sobre o vídeo que foi visto pelos alunos em casa. E seguida os alunos realizam suas perguntas sobre o tema e o professor esclarece as dúvidas. Posteriormente os alunos recebem as atividades a serem realizadas no dia, estas atividades estão relacionadas aos vídeos assistidos.

Essa inversão permite que o aluno não fique limitado a aprender apenas dentro da sala de aula, mas também fora dela e com o auxílio de recursos tecnológicos. Para Bacichi (2018) a sala de aula invertida possibilita que o estudante aprenda a ser responsável pela própria aquisição do conhecimento e aprendizagem.

CAPÍTULO II

A SALA DE AULA INVERTIDA NA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

2.1 Metodologia e linha de trabalho.

O presente trabalho é um estudo descritivo, qualitativo, do tipo relato de experiência. Baseando-se em uma pesquisa qualitativa. O trabalho apresenta uma intervenção docente, e utiliza de técnicas científicas para avaliar o desenvolvimento do conhecimento e concepções sobre um determinado tema. Outro fator importante é a observação que envolve o trabalho de intervenção, pois o comportamento, envolvimento e outros fatores são importantes para a avaliação final do trabalho. Silva (2005, p. 85) afirma que, “a abordagem qualitativa tem como objetivo a linguagem comum das pessoas e sua vida cotidiana, seus significados, motivos, aspirações, atitudes, crenças e valores”.

A metodologia ativa norteadora escolhida foi A Sala de Aula Invertida, que para Camargo e Daros(2018): “coloca o aluno como protagonista, ou seja, em atividades interativas com outros alunos, aprendendo e se desenvolvendo de modo colaborativo”.

Foram escolhidos dois livros que orientaram inicialmente o trabalho de organização e construção das atividades (texto, exemplos resolvidos e exercícios) da disciplina de Cálculo I, sendo eles: “Cálculo A” (FLEMMING, 2006) e “Cálculo com Geometria Analítica” (LEITHOLD, 1994), tendo o segundo maior ênfase por ser bibliográfica básica do curso de Licenciatura Plena em Matemática do IFMT – campus Juína, e possuir maior número de exemplares na biblioteca do campus. Depois deu-se início a procura por vídeos on-line gratuitos que contemplassem os conteúdos a serem explorados durante o semestre. Com os vídeos e livros-textos escolhidos, criou-se um guia de organização. Para Bergmann e Sams (2016):

> [...] “guias organizacionais são como mapas rodoviários que orientam os alunos no estudo da unidade e lhes oferece um arcabouço apropriado e atividades de apoio para alcançar cada objetivo de aprendizagem”. (2016, p. 52)

O guia foi dividido em três unidades. Unidade I – Revisão de números reais, funções e construção de gráficos; Unidade II – Limites; Unidade III – Derivadas. Cada unidade era subdividida em aulas/temas que continham lista de objetivos, os vídeos correspondentes, as leituras dos livros-texto e as atividades de aprendizagem que deviam ser seguidas pelo aluno.

As vídeo aulas selecionadas foram agrupadas em uma *playlist* púbica no *site* do *YouTube*, tendo seu *link* compartilhado nos grupos do aplicativo *WhatsApp* e via *e-mail* para a turma. Desta maneira cada aluno poderia gerir de maneira mais eficaz seu tempo.

As listas de atividades foram criadas utilizando exercícios específicos dos livros citados anteriormente que comtemplassem os objetivos traçados para cada aula. Vale ressaltar que as listas também foram disponibilizadas via *e-mail* e *WhatsApp*.

A Sequência Didática foi configurada em cinco etapas:

- Primeira etapa – Apresentação: o professor faz uma pequena discussão para verificar se os alunos assistiram aos vídeos.
- Segunda etapa – Proposição de problema ou questões: o professor divide a turma em grupos e propõe os exercícios a serem resolvidos. Os grupos deveram ter no máximo quatro alunos e o agrupamento deverá conter alunos que estejam em uma mesma etapa de estudo.
- Terceira etapa – Diálogo entre professor e alunos: o professor visita cada um dos grupos formados estabelecendo um diálogo com os alunos e entre eles promovendo o surgimento de dúvidas, questões e problemas relacionado ao tema.
- Quarta etapa – Aplicação: os alunos desenvolvem as atividades com o auxílio do professor.
- Quinta etapa – Correção: o professor corrige as atividades.

Para um melhor aproveitamento é de suma importância que os alunos assistam aos vídeos antes do encontro presencial.

> “Para enfrentar essa questão, gastamos, no começo do ano, um bom tempo treinando os alunos a assistirem ao vídeo de maneira eficaz. Nós os incentivamos a desligar iPods, telefones e outras distrações enquanto assistem ao vídeo. Sugerimos que “pausem” e “retrocedam” o professor, encorajando-os a usarem sem parcimônia o botão de “pausa” para que possam anotar pontos importantes da lição.” (BERGMANN; SAMS. 2016. p. 11)

Foram estabelecidas três avaliações, duas avaliações individuais e descritivas envolvendo as Unidades II e Unidade III e um seminário sobre as aplicações de Limites e Derivadas.

2.2 A sala de aula

A pesquisa de campo foi realizada com 34 alunos matriculados na disciplina de Cálculo I do curso de Licenciatura Plena em Matemática do IFMT – campus Juína. Destes 34 alunos quatro nunca compareceram as aulas. E dois já haviam cursado a disciplina em semestres anteriores sem êxito.

A disciplina de CDI I (Cálculo I) é ofertada no terceiro de oito semestres do curso de Matemática. Outro aspecto importante a ser destacado é que o curso não possui pré-requisitos. Desta maneira muitos desses alunos matriculados em Cálculo I não possuíam aprovação em disciplinas básicas, ou de nivelamento, como Matemática I.

2.3 Desenvolvimento das atividades.

No primeiro encontro com a turma foram apresentados o plano de ensino e a metodologia a ser utilizada durante todo o semestre, a sala de aula invertida. É importante esclarecer que o primeiro semestre letivo de 2019 do IFMT – campus Juína teve início em 04 de abril de 2019 devido às greves ocorridas nos anos de 2011, 2012 e 2015.

Na apresentação todos os alunos foram informados de que se tratava de parte de um estudo para o mestrado profissional do seu professor. Foi oferecido aos alunos a oportunidade para expor suas dúvidas quanto a proposta, não havendo manifestações contrárias.

Desta forma, foi informado que o guia de organização, listas de atividades e *links* das vídeo aulas seriam enviados para o *e-mail* e grupo de *WhatsApp* da turma. Os alunos aceitaram dando preferências ao grupo de *WhatsApp* já que esse era o mais utilizado por todos para a comunicação.

As atividades didáticas foram estruturadas e 3 (três) unidades e um total de 13 (treze) lista de exercícios que são apresentadas no Apêndice do trabalho. O período da intervenção é de 08/04/2019 à 22/07/2019.

Iniciou-se os trabalhos no dia 08/04/2019, com as atividades da Unidade I. Essa unidade tinha o objetivo de revisar conceitos importantes. Seria possível que boa parte dos alunos conseguissem resolver as atividades sem grandes dificuldades, mesmo sem assistir aos vídeos. Cada acadêmico recebeu uma cópia impressa da primeira lista e foram divididos em sete grupos para resolver os exercícios. O professor fez uma primeira visita a cada um dos grupos com o intuito de verificar se os alunos haviam assistido os vídeos e compreendido a atividade a ser desenvolvida naquela aula. Depois desse primeiro contato o professor passa a ir em cada grupo de acordo com a solicitação dos estudantes. Durante essa aula foi verificado que nenhum dos alunos presentes havia assistido os vídeos e que uma grande parcela apresentava dificuldades na resolução de inequações. Então, é reforçado aos acadêmicos a importância de se assistir os vídeos antes das aulas presenciais para que estivessem preparados para as atividades a serem desenvolvidas. E assim a aula é finalizada sem a conclusão total das atividades planejadas sendo postergado para o próximo encontro.

Na aula seguinte, depois de finalizar os exercícios da lista da aula anterior, é dado início à segunda parte dos exercícios da Lista 1 com foco em gráficos. A rotina do professor ainda é a mesma da apresentada no dia anterior. Nesse encontro foi perceptível que alguns acadêmicos desta vez assistiram o vídeo, apesar de ser ainda uma parcela pequena. Cerca de metade da turma apresentou dificuldades na construção de gráficos. A atividade foi concluída em tempo hábil desta vez.

Para o desenvolvimento das atividades da Lista 2 houve a necessidade de utilizar mais aulas, sendo reservados três dias de aulas para realizarem as atividades. Mesmo os acadêmicos levando muito tempo para resolver os exercícios propostos foi possível cumprir o planejamento finalizando a Unidade I. Durante essas aulas o número de alunos que assistiam os vídeos antes dos encontros presenciais ainda era pequeno. E a principal dificuldade apresentada foi a confusão com as definições de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

Antes do início das atividades da Unidade II o professor decidiu realizar uma reunião com a turma com objetivo de ajustar a metodologia. Pois era nítido que os acadêmicos, na sua maioria, não haviam compreendido a dinâmica das aulas.

Na reunião o professor reforçou a importância de planejamento, gerir o próprio tempo para que fosse possível assistir os vídeos de forma antecipada e resolver os exercícios. Os acadêmicos se defenderam respondendo que um grande problema deles era a falta de tempo, pois trabalhavam de segunda a sexta em período integral e alguns trabalhavam de segunda a sábado. Outro ponto levantado pelos acadêmicos era sobre a duração dos vídeos, cerca de 20 a 30 minutos. Depois de ouvir esses pontos o professor respondeu que compreendia as dificuldades, mas era necessário um esforço maior dos acadêmicos. Sobre a duração dos vídeos o professor argumentou que era difícil encontrar vídeos de qualidade que fossem inferiores a 20 minutos. E que esse problema ainda estaria presente nas próximas unidades. Uma solução possível seria acelerar os vídeos já que o *Youtube* disponibilizava essa função. Desta forma era possível assistir um vídeo de 30 minutos em menos tempo, bastando que cada um testasse as várias velocidades até encontrar uma que fosse mais confortável. Ainda nessa reunião alguns acadêmicos alegaram não ter pacote de dados e/ou conexão com a Internet para assistir os vídeos. Para resolver esse problema dois alunos se dispuseram a realizar o *download* dos vídeos e repassar a toda a turma. É importe salientar que na aula de apresentação nenhum dos estudantes havia se manifestado sobre o problema de acesso à Internet.

A Unidade II começou muito bem no dia 22 de abril. Os acadêmicos haviam assistido aos vídeos e mostravam-se mais dispostos a desenvolver as atividades propostas (Lista 3). Mas apesar de terem visto os vídeos muitos alunos alegavam que não haviam compreendido o assunto exposto. Então o professor explicava o conceito novamente para que fosse possível a resolução dos exercícios. A maior dificuldade encontrada na resolução desta lista foram os exercícios de demonstração.

Na resolução dos exercícios da lista seguinte, os acadêmicos demonstraram ter dificuldade em saber que propriedade dos limites usar em alguns casos, principalmente os exercícios que apresentavam radicais. Outra situação muito presente era a dificuldade em reescrever expressões matemáticas a fim de contornar problemas.

No dia 02 de maio foram desenvolvidas as atividades propostas na Lista 5, envolvendo limites laterais, com a interpretação gráfica. Nessa atividade os alunos apresentaram dificuldades na construção de gráficos e confusão na aplicação de limites laterais. Também foi notado pelo professor uma certa resistência de alguns acadêmicos em trabalhar com pessoas diferentes. Já que na maioria das vezes os grupos acabavam se repetindo. Prática que passa a ser combatida com maior ênfase.

As atividades correspondentes à lista 6 ocorreram de forma tranquila. Com duas dificuldades se destacando. A primeira é o fato de alguns estudantes ainda apresentarem dificuldade em visualizar um produto notável. A segunda é que apesar de realizar os exercícios alguns alunos não compreendem muito bem o conceito de infinito.

É notado que a partir do dia 09 de maio o “gás acaba”. Durante os exercícios da Lista 7 o professor percebe na aula presencial que a maioria dos acadêmicos não assistiram os vídeos. E mais uma vez é reforçado a importância dessa prática. As dificuldades apresentadas durante essa atividade são bem parecidas com as dificuldades da Lista 6.

A resolução das atividades da Lista 8 foi bem atribulada, pois muitos alunos não haviam assistido aos vídeos e os que assistiram alegaram não terem compreendido a maior parte. Perante esse cenário o professor se vê obrigado a ir de grupo em grupo e explicar todo o assunto para que assim os exercícios fossem feitos. Durante essa etapa uma parcela pequena dos acadêmicos ainda apresentava dificuldades na construção de gráficos e a maioria dos estudantes teve dificuldade em exercícios de demonstração.

No encontro do dia 23 de maio decide se por fazer uma nova reunião com a turma, já que para o professor a turma não estava mais “empolgada” com a proposta de ensino. Nessa reunião o professor quis mais ouvir os acadêmicos para poder ajustar sua prática e conseguir com o melhor ambiente possível. Infelizmente não houve avanços nessa discussão. Uma vez que a turma repetiu os mesmos problemas, ou seja, a falta de tempo, acesso e duração dos vídeos. Depois disso o professor e a turma firmam um novo compromisso para seguir com a proposta. Com os acadêmicos assumindo sua responsabilidade e se comprometendo a melhorar.

Nas aulas realizadas no período de 27 de maio a 10 de junho foram trabalhadas as atividades da envolvendo duas listas (lista 9 e 10). Durante esse período a turma se portou bem. A maior parte dos alunos assistiu aos vídeos correspondentes e estavam motivados a desenvolver as atividades propostas. Parte da turma apresentou dificuldade em trabalhar com o teorema do valor intermediário e praticamente a turma toda teve dificuldade em trabalhar com funções trigonométricas.

Como havia uma avaliação prevista para o dia 17 de junho. Na aula anterior a avaliação foi feita uma aula de revisão. Durante essa aula os alunos deveriam trazer suas dúvidas para serem discutidas em sala. O problema é que poucos alunos fizeram o que foi pedido. Muitos escolhiam um exercício qualquer para perguntar. Assim como não houve muitas dúvidas, foram escolhidas algumas questões, que eram exemplos resolvidos do livro Cálculo A, e se fez uma dinâmica em sala. A dinâmica funcionou da seguinte forma:

O professor escolheu aleatoriamente um aluno e uma questão para ser resolvida no quadro e, caso o aluno não conseguisse resolver o exercício, o professor o auxiliava até conclusão da atividade. Não havia punições ou bonificações. O objetivo da dinâmica era que os acadêmicos tivessem uma ideia de como poderia ser a prova e como deveriam se preparar para esta avaliação.

A Unidade III teve início no dia 24 de junho com os exercícios lista 11. A maior parte da turma havia assistido os vídeos e se mostrava interessada em resolver as atividades. De maneira geral as maiores dificuldades foram os exercícios que possuíam radicais e/ou funções cúbicas. Houve também alguns poucos alunos que ainda tinham dificuldades na construção de gráficos.

As atividades subsequentes foram desenvolvidas lentamente e os acadêmicos continuavam apresentando dificuldades com gráficos, principalmente quando as funções eram compostas por sentenças, não compreendiam a estruturação da função, além da dificuldade de compreender o conceito de continuidade de funções, pois deveriam utilizar o cálculo de limites laterais para justificar a existência do limite no ponto.

Devido ao cumprimento de prazos estabelecidos pelo programa de Mestrado Profissional de Matemática (PROFMAT) esta atividade didática foi concluída no dia 04 de julho. Já que o IFMT-campus Juína entrou em recesso escolar de quinze dias. Tendo o retorno de suas atividades normais no dia 22 de julho. Apesar do recesso o trabalho desta disciplina continuou até o seu término. Porém para este trabalho de intervenção concluímos neste encontro, 04 de julho. Até está data a turma permanecia com 27 alunos, havendo uma evasão de 10% dos alunos.

2.4 Relato dos acadêmicos

Durante todo o desenvolvimento do trabalho foi deixada em aberto a possibilidade dos alunos se manifestarem, via *e-mail*, sobre o método de trabalho utilizado, expondo, em sua opinião, os pontos positivos e negativos por ele avaliado, tendo em vista que o curso que está fazendo é de formação de professores de Matemática e que, esta experiência poderá ser útil na sua formação enquanto futuro professor.

O acadêmico X(1) relata que:

> Tenho gostado muito da metodologia que o professor tem usado para ministrar as aulas de Cálculo 1. Acredito que deste modo nos tornamos ainda mais responsáveis pelo nosso conhecimento e aprendizado, somos protagonistas e o professor tem feito o papel de mediar, direcionar o que aprendemos. É claro que é um método ainda pouco usado e estamos ainda muito enraizados com o ensino tradicional. Muitas vezes o tempo que dispomos para estudarmos em casa antes de ir para a faculdade é muito escasso, devido a diversos compromissos que já temos. Mas acredito que é uma metodologia em que precisamos apostar pois vale a pena.

O estar “enraizado” descrito por parte do acadêmico está também presente na rotina do professor pesquisador. É muito difícil abandonar algo que já se tem “domínio” para experimentar algo novo. Surgem dúvidas sobre que caminho escolher e se foi a melhor decisão.

O entusiasmo com o novo método também é descrito pelo acadêmico X(2):

> O método de abordagem que foi utilizado nas aulas de cálculo no meu ponto de vista foi e está sendo bom. Funciona. Eu mesmo estou conseguindo resolver os exercícios (lista) não com tanta facilidade. Primeiro assistimos o vídeo aula e na sala de aula resolvemos as listas como em qualquer curso tem aqueles que tem mais afinidade com o conteúdo outros não sei que o professor não consegue atender a todos mas faz o que dá. Quando vamos resolver as listas temos a ajuda do professor e de outros alunos que compreenderam melhor o conteúdo.
> Sim tem conversas paralelas tem horas que incomoda, mas nas demais horas eu nem ligo. E era formado grupos e todas as aulas era trocado os grupos então tínhamos novas discussões novos entendimentos.

Visando um melhor desenvolvimento das atividades o professor solicitava que os alunos não formassem sempre os mesmos grupos. O que incomodou alguns acadêmicos que se sentiam confortáveis resolvendo as atividades sempre com as mesmas pessoas. A ideia era aumentar a interação, possibilitando a troca de pontos de vista sobre o mesmo problema.

Em contrapartida aos primeiros relatos descritos o acadêmico X(3) diz que:

> Não me adaptei a esse tipo de ensino, pois o tempo que temos em sala de aula é muito pouco e o professor fica sobrecarregado para atender tantas dúvidas dos grupos de uma só vez. Teve momentos que tínhamos que levantar e olhar ele tirando dúvidas em outros grupos.

Quando a maioria dos alunos não assistia o vídeo solicitado o tempo do encontro presencial se tornava bem curto. Tornando muito difícil atender todos os grupos com qualidade. Já que era necessário explicar todo o tema até chegar na resolução de um exercício e muitas vezes voltar ao grupo e explicar novamente.

O acadêmico X(4) justifica que não se adaptou ao método de ensino já que:

> [...] De primeiro momento por conseguir a vídeo aula no dia que seria aplicado os exercícios em sala, muitas vezes no período vespertino - como faço trabalho remunerado antes da faculdade, o horário disponível que teria para assistir seria o horário destinado ao meu almoço - não conseguia assistir, nem sequer uma vez, quanto mais 3 vezes, que creio que seria a conta necessária para entender o conteúdo para partir para os exercícios.[...]
> [...] Em segundo momento, encontrava-me na sala de aula sem ter entendido a teoria, do que gosto de chamar de aula prática de Matemática, não sabia muito menos começar os primeiros exercícios. Havia um grande sentimento de frustração e incompetência de minha parte. Novamente o problema era parcialmente resolvido quando o professor se sentava no nosso grupo e resolvia uma questão, assim, tínhamos um ponto de partida. Porém, perdia-se tempo de aula até que ocorresse, já que o professor não consegue atender a todos na mesma hora. [...]
> [...] Por fim, a experiência em grupos, observei bastante conversas paralelas, ao termino dos exercícios os colegas chegavam a uma conclusão e os outros em outra, discutia-se qual a correta e verificava-se erros, na minha opinião, foi uma situação vantajosa nessa metodologia, em contra partida, as perguntas que muitas vezes eu lançava ao grupo não eram respondidas e eu seguia com a dúvida, pois são daquelas dúvidas momentâneas que logo a gente esquece. Meus colegas também estavam na mesma situação que a minha, com dúvidas e talvez também seguissem com elas.
> Essa metodologia força que façamos exercícios, porém, meu sentimento era de não saber exatamente o que eu estava fazendo. Não consigo me desprender de querer mais intervenções do professor no quadro, exemplificando pelo menos um exercício de cada questão no início da aula e no decorrer conforme fossemos avançando, possivelmente seria uma solução de como corrigir o sentimento de angústia que senti, seria o estar das aulas.

Infelizmente muitos alunos não conseguiam organizar o seu tempo da melhor maneira e acabavam não assistindo os vídeos necessários em tempo hábil para desenvolver as atividades. E por não terem visto o vídeo alguns estudantes acabavam saindo de sala de aula várias vezes ou até mesmo indo embora para suas residências sem tirar suas dúvidas e muito menos desenvolver os exercícios.

CAPÍTULO III

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início da minha carreira como professor de Matemática convivo com um sentimento de frustação. Frustação por meus alunos não conseguirem atingir seus objetivos nas avaliações. Frustação por não conseguir trabalhar toda uma ementa ou por não ter desenvolvido uma aula melhor. Todo esse sentimento sempre me coloca em um processo de reflexão sobre minhas práticas de ensino. Mas, mesmo assim, não conseguia me desprender de trabalhar de maneira mais tradicional. Posto isto, trabalhar com sala de aula invertida foi um excelente desafio. De maneira nenhuma foi fácil, ao contrário, o trabalho foi bem maior. Mas ao mesmo tempo foi gratificante poder testar algo novo e ver os alunos interessados nos temas estudados. E claro que não foi um trabalho perfeito.

Vale ressaltar que há mais de uma maneira de implementar A Sala de Aula Invertida esse trabalho é apenas uma proposta que, sim, deve ser melhorada. Não é uma obrigação usar vídeos para se adotar esse método de Sala de Aula Invertida como afirma Bergmann e Sams (2016) a única característica que deve permanecer é o desejo de redirecionar a atenção na sala de aula, afastando-a do professor e concentrando-a nos aprendizes e na aprendizagem.

Desenvolver um trabalho diferenciado ao método que chamamos de tradicional, no qual o professor é o protagonista do processo, passando a responsabilidade da aprendizagem para o aluno é um processo difícil, tanto para o professor, quanto para os alunos. Em muitos momentos me senti "estranho" na sala de aula simplesmente pelo fato de não ir ao quadro e expor um conteúdo de maneira "tradicional". Os alunos, que passam ser responsáveis pela própria aprendizagem, também apresentam dificuldades em mudar principalmente quando se está "enraizado" ao método tradicional, como relata o aluno X(1). Assim, com o aluno X(4) comenta sobre a necessidade de apresentar um exemplo resolvido como um ponto de partida.

Procurar vídeos que sejam adequados ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral que não ultrapasse vinte minutos é bem difícil, há vários vídeos que apresentam resolução de exercícios e não discussões sobre os conceitos que envolvem o CDI. É importe que se gaste um tempo treinando seus alunos a como assistirem os vídeos de maneira mais adequada, assim como oferecer vídeos de qualidade, voltado para o objetivo do conhecimento que se está trabalhando.

Outro fator importante no processo é proporcionar condições para que o aluno construa uma agenda de suas ações, ou seja, que faça um planejamento de suas atividades. Ensina-lo a gerenciar seu tempo da melhor maneira possível. Se possível disponibilize os vídeos de maneira *offline* em um HD externo, por exemplo, pois certamente algum aluno deixará de assistir aos vídeos por falta de conexão à Internet. Não se esqueça de que outro ponto importante é sempre verificar se os alunos estão assistindo aos vídeos em tempo hábil, afinal sem esse passo o método não funcionará de maneira adequada. Caso alguns alunos não tenham assistindo o vídeo correspondente à aula, uma alternativa é colocá-los em um mesmo grupo para que possam assistir, interagir e posteriormente resolver as atividades.

Sem dúvida ter ingressado e cursados as disciplinas do PROFMAT foi essencial para o desenvolvimento dessa pesquisa. Sem o programa não teria a mesma segurança em trabalhar e explicar determinados temas referentes ao Cálculo Diferencial e Integral, muito menos testar uma nova metodologia de ensino e aprendizagem. Conhecer uma Matemática mais rigorosa e formal sobre os conceitos matemáticos trouxe um número maior de ferramentas para o desenvolvimento de atividades didáticas tanto na Educação Básica, quanto no Ensino Superior. O que antes era trabalhado em sala de aula de maneira rasa e sem muitas alternativas, agora pode ser mais bem explorado.

No desenvolvimento dessa experiência vale ressaltar que: elaborar as atividades e procurar os vídeos mais adequados tomou tempo. Haja visto que foi a primeira vez que ministrei a disciplina de Cálculo I; ter alunos na turma sem bagagem suficiente para cursar a disciplina foi outro grande desafio; gerenciar o próprio tempo é bem difícil para a maioria dos acadêmicos que trabalham durante o dia; e, por ser um método novo haverá resistência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo. O ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática nº 18**. São Paulo. 1991

BACICHI, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico prática**. Porto Alegre: Penso, 2018

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999. Disponível em:< https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-06022004-105356/publico/Tese.pdf >. Acesso em: 04 de Mar. 2019.

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida: uma metodologia ativa de aprendizagem**. (Tradução Afonso Celso da Cunha Serra). 1ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BOYER, Carl b. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Mezsbach .3º ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da educação e Cultura. Secretaria de educação básica. **Explorando o ensino da Matemática.** Atividades volume II, Brasília 2004. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap1.pdf>.. Acesso em: 24 de Mar. 2019.

CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. **A sala de aula inovadora: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo.** Porto Alegre: Penso, 2018.

CARVALHO, Tadeu Fernandes; D' OTTAVIANO, Itala M. Loffredo de. **Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente**. Educ. Mat. Pesq. São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 13-43, 2006. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/544/432>. Acesso em: 15 de Mai. 2019.

DALL'ANESE, Claudio. **Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem**. 2000. Dissertação - (Mestrado em educação matemática) Universidade Católica de São Paulo. PUC – SP. Disponível em:< https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11160/1/dissertacao_claudio_dall%20Anese.pdf>. Acesso em 23 de Mai. 2019

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. 5ª ed.. Editora da Unicamp, Campinas. 2011.

FLEMMING, Diva M e Gonçalves, Mirian B., **Cálculo A – Funções, Limite, Derivação, Integração**. 6ª edição. Editora: Pearson. São Paulo. 2006.

KOGA, Miguel Tadayuki. **Uma análise no discurso de alguns professores de Cálculo Diferencial e Integral do curso de licenciatura em Matemática.** 1998. Dissertação- (Mestrado em educação matemática) Universidade Estadual Paulista. UNESP – SP

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** Vol. 1 3ª edição. Editora: Harbra. São Paulo. 1994

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (org). **Teoria das Situações Didáticas.** EDUC (Série Trilhas) (p.77-113), São Paulo. 2008.

MATOS, Márcia Graci de Oliveira; SANTOS, Sílvia Pereira dos. O ensino de cálculo 1 no curso de licenciatura em matemática: obstáculos na aprendizagem. **Revista: Eventos pedagógicos**. 2012.

NASCIMENTO, Ketly dos Santos *et al*. **Análise do Índice de Reprovação e Evasão na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I da UFCG-Cuité.** Cuité/PB 2018. Disponível em:<http://editorarealize.com.br/revistas/conapesc/trabalhos/TRABALHO_EV107_MD1_SA10_ID367_28052018213742.pdf >. Acessado em 13 de Abr. 2019.

OLIVEIRA, Thiago Brandão. **Monografia: Cálculo Diferencial Integral Aplicado em alguns Sistemas Físicos.** Universidade estadual de Goiás. Jussara/GO 2010. Disponível em:< http://cdn.ueg.edu.br/arquivos/jussara/conteudoN/1209/monografia_-_Thiago_Brandao.pdf > . Acesso em: 19 de Mai. 2016.

REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. Disponível em: < http://www.nilsonjosemachado.net/lca19.pdf >. Acesso em: 02 de Abr.de 2019.

SILVA, Claudinéia Gonçalves Rocha. **Monografia: Ensino e Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Visão de Acadêmicos de Licenciatura Plena em Matemática do IFMT Campus Juína.** Júnia, MT, 2016

SILVA, Mary Aparecida Ferreira. **Métodos e técnicas de pesquisa**. 2 ed. Curitiba: IBPEX, 2005

SOBRAL, Fernanda Ribeiro; CAMPOS, Claudinei José Gomes. Utilização de metodologia ativa no ensino e assistência de enfermagem na produção nacional: revisão integrativa. **Revista da Escola de Enfermagem da USP**, v. 46, n. 1, p. 208-218, 2012. Disponível em:< http://www.scielo.br/pdf/reeusp/v46n1/v46n1a28.pdf> . Acesso em: 3 de Abr. de 2019.

SOUZA, Veriano Cotinim. **Monografia: A origem do Cálculo Diferencial e Integral. Universidade de Candido Mendes.** Rio de Janeiro, RJ, Agosto /2001. Disponível em: <http://www.avm.edu.br/monopdf/4/VERIANO%20CATININ%20DE%20SOUZA.pdf>. Acesso em 12 de Abr. de 2019.

VALENTE, J. A et al. Metodologias ativas: das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. **Revista Diálogo Educacional**, v.17, n. 52, p. 455-78, out/dez. 2014.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNCIDES

APÊNDICE A – Guia Organizacional

Unidade I: Números Reais, Funções e Gráficos

Números Reais

Objetivo: Ser capaz de resolver equações e inequações reais

Referencial: Vídeos 1 e 2; Texto 1.1 (LEITHOLD,1994, p.2 a 12)

Atividades exigidas: Exercícios 1 e 2 da Lista 1

Retas, Coordenadas e Gráficos

Objetivo: Ser capaz de ler coordenas e esboçar gráficos de funções reais.

Referencial: Vídeo 3; Texto 1.2 (LEITHOLD,1994, p.13 a 24)

Atividades exigidas: Exercícios 3 e 4 da Lista 1.

Funções 1

Objetivo: Determinar o Domínio de funções reais.

Referencial: Vídeo 4; Texto 1.3 (LEITHOLD,1994, p.25 a 30)

Atividades exigidas: Exercícios 1 e 2 da Lista 2.

Funções 2

Objetivo: Determinar a imagem e a paridade de funções reais.

Referencial: Vídeo 4; Texto 1.4 (LEITHOLD,1994, p.31 a 39)

Atividades exigidas: Exercícios 3 e 4 da Lista 2.

Funções 3

Objetivo: Compreender os conceitos de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Determinar uma função inversa.

Referencial: Vídeos 5, 6, 7 e 8; Texto 1.4 (LEITHOLD,1994, p.31 a 39)

Atividades exigidas: Exercícios 5 e 6 da Lista 2.

Unidade II: Limites e Continuidade

Limite de uma Função 1

Objetivo: Compreender o conceito de Limite de uma Função através de aproximações.

Referencial: Vídeo 9 e 10; Texto 2.1 (LEITHOLD,1994, p.56 a 63)

Atividades exigidas: Exercício 1 da Lista 3

Limite de uma Função 1

Objetivo: Ser capaz de calcular, usando a Definição de Limite, um valor de $\delta > 0$ dado um ε .

Referencial: Vídeo 11; Texto 2.1 (LEITHOLD,1994, p.56 a 63)

Atividades exigidas: Exercício 2 da Lista 3.

Limite de uma Função 2

Objetivo: Ser capaz de provar o Limite dado, aplicando a Definição.

Referencial: Vídeo 11; Texto 2.1 (LEITHOLD,1994, p.56 a 63)

Atividades exigidas: Exercício 3 da Lista 3.

Teoremas sobre Limites de uma Função 1

Objetivo: Compreender e aplicar os teoremas sobre Limites de uma Função.

Referencial: Vídeo 12; Texto 2.2 (LEITHOLD,1994, p.64 a 72)

Atividades exigidas: Exercício 1 da Lista 4.

Teoremas sobre Limites de uma Função 2

Objetivo: Ser capaz de calcular o Limite, se existir, de uma Função.

Referencial: Vídeo 13 e 14; Texto 2.2 (LEITHOLD,1994, p.64 a 72)

Atividades exigidas: Exercício 2 da Lista 4.

Limites Laterais

Objetivo: Compreender o conceito de Limites Laterais e esboçar o gráfico de uma Função.

Referencial: Vídeo 15; Texto 2.3 (LEITHOLD,1994, p.73 a 77)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 5

Limites Infinitos 1

Objetivo: Compreender e aplicar os teoremas de Limites Infinitos.

Referencial: Vídeo 16; Texto 2.4 (LEITHOLD,1994, p.78 a 87)

Atividades exigidas: Exercício 1 da Lista 6.

Limites Infinitos 2

Objetivo: Determinar as assíntotas verticais e esboçar o gráfico de uma Função.

Referencial: Vídeo 16; Texto 2.4 (LEITHOLD,1994, p.78 a 87)

Atividades exigidas: Exercício 2 da Lista 6.

Limites no Infinito 1

Objetivo: Compreender e aplicar os teoremas de Limites no Infinito.

Referencial: Vídeo 17; Texto 2.5 (LEITHOLD,1994, p.88 a 97)

Atividades exigidas: Exercício 1 da Lista 7.

Limites no Infinito 2

Objetivo: Determinar as assíntotas verticais e horizontais, e esboçar o gráfico de uma Função.

Referencial: Vídeo 18 e 19; Texto 2.5 (LEITHOLD,1994, p.88 a 97)

Atividades exigidas: Exercício 2 da Lista 7.

Continuidade de uma Função em um número 1

Objetivo: Compreender a Definição de Continuidade de uma Função em um número através da construção de gráficos.

Referencial: Vídeo 20 e 21; Texto 2.6 (LEITHOLD,1994, p.98 a 106)

Atividades exigidas: Exercício 1 da Lista 8.

Continuidade de uma Função em um número 2

Objetivo: Ser capaz de provar a descontinuidade de uma Função em um número.

Referencial: Vídeo 20; Texto 2.6 (LEITHOLD,1994, p.98 a 106)

Atividades exigidas: Exercício 2 da Lista 8.

Continuidade de uma Função Composta e continuidade em um Intervalo 1

Objetivo: Compreender a Definição de Continuidade de uma Função Composta e continuidade em um intervalo.

Referencial: Vídeo 21; Texto 2.7 (LEITHOLD,1994, p.107 a 113)

Atividades exigidas: Exercício 1 da Lista 9

Continuidade de uma Função Composta e continuidade em um Intervalo 2

Objetivo: Definir uma função Composta e determinar os números nos quais fog é continua.

Referencial: Vídeo 21; Texto 2.7 (LEITHOLD,1994, p.107 a 113)

Atividades exigidas: Exercício 2 da Lista 9.

Valor intermediário

Objetivo: Compreender e aplicar o teorema do Valor intermediário.

Referencial: Vídeo 22; Texto 2.8 (LEITHOLD,1994, p.114 a 121)

Atividades exigidas: Exercício 1 da Lista 10

Continuidade das Funções Trigonométricas e o Teorema do Confronto de Limites

Objetivo: Compreender o Teorema do Confronto de Limites e calcular. o Limite, quando existir.

Referencial: Vídeo 23 e 24; Texto 2.8 (LEITHOLD,1994, p.114 a 121)

Atividades exigidas: Exercício 2 da Lista 10.

Unidade III: A Derivada e a Derivação

Reta tangente

Objetivo: Ser capaz de determinar a inclinação e a equação da reta tangente.

Referencial: Vídeos 25 e 26; Texto 3.1 (LEITHOLD,1994, p.139 a 147)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 11.

Derivada

Objetivo: Compreender e aplicar a definição de Derivada.

Referencial: Vídeos 27 e 28; Texto 3.1 (LEITHOLD,1994, p.139 a 147)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 12.

Derivadas Laterais e Continuidade

Objetivo: Compreender os conceitos de Derivadas Laterais e Continuidade.

Referencial: Vídeos 29 e 30; Texto 3.2 (LEITHOLD,1994, p.148 a 155)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 13.

Teoremas sobre Derivação de Funções Algébricas

Objetivo: Ser capaz de Derivar uma Função Algébrica aplicando os Teoremas.

Referencial: Vídeos 31 e 32; Texto 3.3 (LEITHOLD,1994, p.156 a 162)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 14.

Movimento Retilíneo e a Derivada como Taxa de Variação

Objetivo: Aplicar Derivadas em Movimento Retilíneo e perceber Derivada como Taxa de Variação.

Referencial: Vídeo 33; Texto 3.4 (LEITHOLD,1994, p.163 a 172)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 15.

Derivada das Funções Trigonométricas

Objetivo: Ser capaz de calcular Derivadas Trigonométricas.

Referencial: Vídeos 34, 35, 36 e 37; Texto 3.5 (LEITHOLD,1994, p.173 a 180)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 16.

A Regra da Cadeia

Objetivo: Ser capaz de calcular Derivadas usando a Regra da Cadeia.

Referencial: Vídeos 38 e 39; Texto 3.6 (LEITHOLD,1994, p.181 a 189)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 17.

Derivada da Função Potência

Objetivo: Calcular Derivadas de Funções Potências com expoentes racionais.

Referencial: Vídeo 40; Texto 3.7 (LEITHOLD,1994, p.190 a 194)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 18.

Derivada Implícita

Objetivo: Ser capaz de calcular uma Derivada sem explicitar y.

Referencial: Vídeo 41; Texto 3.8 (LEITHOLD,1994, p.195 a 198)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 19

Taxas Relacionadas

Objetivo: Aplicar Derivadas em problemas diversos de taxas de variação

Referencial: Vídeo 42; Texto 3.9 (LEITHOLD,1994, p.199 a 204)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 20

Derivadas de Ordem Superior

Objetivo: Ser capaz de calcular Derivadas de Ordem Superior.

Referencial: Vídeo 43; Texto 3.10 (LEITHOLD,1994, p.205 a 211)

Atividades exigidas: Exercícios da Lista 21

PLAYLIST:

https://www.youtube.com/playlist?list=PLm1bhyElGPLl5iZWEuP7WpQy0yeFchg7P&disable_polymer=true

APÊNCICE B – Lista 1: Revisão de Funções

1) Resolva as equações a seguir:

a) $\dfrac{3x}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{7}{x^2-1}-\dfrac{3}{x-1}$

b) $10x^2-9x-243=0$

c) $|x^2+x-5|=|4x-1|$

d) $|x-16|=3x-1$

2) Resolva as seguintes inequações:

a) $\dfrac{2x+1}{x+2}\geq 2$

b) $\dfrac{x+7}{3}(1-2x^2)^2\geq 0$

c) $\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{x^2(x+3)^2}\geq 0$

d) $|x+1|-x+2\leq 0$

e) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}>\dfrac{13}{6}$

f) $x^2(x^2+x-6)(x+1)^2\leq 0$

3) Desenhe a figura definida pelos pontos, encontre o coeficiente angular das retas suporte dos lados do triangulo ABC e dê a equação de cada uma dessas retas, sendo $A\left(-\frac{2}{3},\ 1\right)$, $B\left(-\frac{4}{3},-1\right)$ e $C\ (3,\ 5)$.

4) Represente graficamente as funções:

a) $f(x)=-|x^2-3x-4|$

b) $f(x)=\left|-2x+\dfrac{6}{5}\right|-|2x+5|$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-x-20}{-2x+10}$

APÊNDICE C – Lista 2: Revisão de Funções

1) Seja $f(x) = e^{\sqrt{x^2-4}}$ onde $x \in \mathbb{R}$, um subconjunto D de $\mathbb{R}$ tal que $f: D \to \mathbb{R}$ é uma função injetora é:
   a) $D = (-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$
   b) $D = \mathbb{R}$
   c) $D = (-2;\ 2)$
   d) $D = (2; +\infty)$
   e) $D = (-\infty;\ -2) \cap (2;\ +\infty)$

2) Determine se o conjunto dado é uma função. Se for, qual o seu domínio?
   a) $\{(x, y)\ /\ y = \sqrt{x+1}\}$
   b) $\{(x, y)\ /\ y = \sqrt{x^2-1}\}$
   c) $\{(x, y)\ /\ y = x^3\}$
   d) $\{(x, y)\ /\ y = (x-1)^2 + 2\}$

3) Dada $f(x) = 2x - 1$, determine:
   a) $f(-3)$
   b) $f(0)$
   c) $f(a+1)$
   d) $2f(x)$
   e) $f(x+h)$
   f) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$

4) Verifique a paridade das funções:
   a) $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$
   b) $g(x) = x \operatorname{sen} x$

5) Seja $D = \mathbb{R}$ e $f: D \to D$ uma função definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Analise as informações a seguir:
   a) f é injetiva e sobrejetiva
   b) f é injetiva, mas não é sobrejetiva
   c) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \forall x \in D; x = 0$
   d) $f(x) \cdot f(-x) = -1, \forall x \in D$

6) Mostre que f e g são funções inversas:
   a) $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{1-x}{x}$

APÊNDICE D – Lista 3: Limite de Funções

1) Determine o valor da função nos pontos indicados:

   a) $f(x) = 3x - 2$ para $x = 0{,}9$; $x = 0{,}99$; $x = 0{,}999$; $x = 1{,}1$; $x = 1{,}01$; $x = 1{,}001$

   b) $f(x) = -x^2 + 2x - 10$ para $x = 0{,}1$; $x = 0{,}01$; $x = 0{,}001$; $x = -0{,}1$; $x = -0{,}01$; $x = -0{,}001$

   c) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ para $x = 2{,}1$; $x = 2{,}01$; $x = 2{,}001$; $x = 1{,}9$; $x = 1{,}99$; $x = 1{,}999$

   d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ para $x = 0{,}9$; $x = 0{,}99$; $x = 0{,}999$; $x = 1{,}1$; $x = 1{,}01$; $x = 1{,}001$

Definição Seja f uma função definida por todo o número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O **limite de $\boldsymbol{f(x)}$ quando $\boldsymbol{x}$ tende a $\boldsymbol{a}$ será $\boldsymbol{L}$**, escrito como $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = L}$. Se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

Se $\boldsymbol{0 < |x - a| < \delta}$ então $\boldsymbol{|f(x) - L| < \epsilon}$

Teorema da Unicidade Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$

2) Usando a definição, determine um $\delta > 0$ para o ε dado:

   a) $\lim_{x \to 4}(x - 1) = 3\,;\ \varepsilon = 0{,}2$

   b) $\lim_{x \to 3}(2x + 4) = 10\,;\ \varepsilon = 0{,}01$

   c) $\lim_{x \to -1}(3 - 4x) = 7\,;\ \varepsilon = 0{,}02$

   d) $\lim_{x \to 1}(x^2 - 5) = -4\,;\ \varepsilon = 0{,}01$

   e) $\lim_{x \to -1}(x^2 + 4x + 4) = 1\,;\ \varepsilon = 0{,}002$

   f) $\lim_{x \to -2}\left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = -4\,;\ \varepsilon = 0{,}01$

   g) $\lim_{x \to \frac{1}{2}}\left(\frac{3x^2 - 8x - 3}{x - 3}\right) = \frac{5}{2}\,;\ \varepsilon = 0{,}001$

3) Prove que o limite é o número indicado, aplicando a definição:

   a) $\lim_{x \to 2} 7 = 7$

   b) $\lim_{x \to 4}(2x + 1) = 9$

c) $\lim_{x\to 3}(7-3x) = -2$

d) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right) = -2$

e) $\lim_{x\to 2}(6x^2-13x+5) = 3$

APÊNDICE E – Lista 4: Propriedades dos Limites

Lista 4 – Propriedades dos Limites

Propriedade 1 Se m e b forem constantes quaisquer, $\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$

Propriedade 2 Se c for uma constante, então para qualquer número a, $\lim_{x\to a} c = c$

Propriedade 3 $\lim_{x\to a} x = a$

Propriedade 4 Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

Propriedade 5 Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

Propriedade 6 Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e n for um inteiro positivo qualquer, então $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$

Propriedade 7 Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ se $M \neq 0$

Propriedade 8 Se n for um inteiro positivo e $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ com a restrição de que se n for par, $L > 0$

1) Determine o limite e, quando aplicável, indique as propriedades usadas.

a) $\lim_{x\to 5}(3x - 7)$

b) $\lim_{x\to -4}(5x + 2)$

c) $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1)$

d) $\lim_{x\to 3}(2x^2 - 4x + 5)$

e) $\lim_{x\to -2}(x^2 + 8)$

f) $\lim_{x\to -1}(x^3 - 2x^2 - 4)$

g) $\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}$

h) $\lim_{x\to 2}\frac{3x+4}{8x-1}$

i) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5}{2x^3+6}$

j) $\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x^2-3x+4}$

l) $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$

m) $\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x^3+1}}$

n) $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$

o) $\lim_{x\to -3}\sqrt[3]{\frac{5+2x}{5-x}}$

2) Calcule o limite

a) $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}$

b) $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$

c) $\lim_{x\to -\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$

d) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{3x-1}{9x^2-1}$

e) $\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$

f) $\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+36}$

g) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

i) $\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$

j) $\lim_{x\to \frac{3}{2}}\sqrt{\frac{8x^3-27}{4x^2-9}}$

l) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

m) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$

APÊNDICE F – Lista 5: Limites Laterais

Definição 1 *Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, b). O **limite** de f(x), quando x se aproxima de a pela direita, será **L** e escrevemos $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.*

Definição 2 *Seja f uma função definida em um intervalo aberto (a, b). O **limite** de $f(x)$, quando x se aproxima de a pela esquerda, será **L** e escrevemos $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ se, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.*

Teorema $\lim_{x \to a} f(x)$ existe e será igual a L se e somente se $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais a L.

4) Faça um esboço do gráfico e ache o limite indicado, se existir;

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & se \quad x < 1 \\ -1 & se \quad x = 1 \\ -3 & se \quad x > 1 \end{cases}$

i. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$; ii. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$; iii. $\lim_{x \to 1} f(x)$;

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & se \quad x < 0 \\ 2 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$

i. $\lim_{x \to 0^+} f(x)$; ii. $\lim_{x \to 0^-} f(x)$; iii. $\lim_{x \to 0} f(x)$;

c) $f(x) = \begin{cases} x + 4 & se \quad x \leq -4 \\ 4 - x & se \quad x > -4 \end{cases}$

i. $\lim_{x \to -4^+} f(x)$; ii. $\lim_{x \to -4^-} f(x)$; iii. $\lim_{x \to -4} f(x)$;

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \leq 2 \\ 8 - 2x & se \quad x > 2 \end{cases}$

i. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$; ii. $\lim_{x \to 2^-} f(x)$; iii. $\lim_{x \to 2} f(x)$;

e) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & se \quad x < 1 \\ 2 & se \quad x = 1 \\ 7 - 2x & se \quad x > 1 \end{cases}$

i. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$; ii. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$; iii. $\lim_{x \to 1} f(x)$;

f) $f(x) = |x - 5|$

i. $\lim_{x \to 5^+} f(x)$; ii. $\lim_{x \to 5^-} f(x)$; iii. $\lim_{x \to 5} f(x)$;

APÊNDICE G – Lista 6: Limites Infinitos

Teorema Se r for um inteiro positivo qualquer, então

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & se\ r \text{ for ímpar} \\ +\infty & se\ r \text{ for par} \end{cases}$$

Teorema Se a for um número real qualquer e se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, onde c é uma constante não nula, então

(i) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

(ii) se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iii) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores positivos de $f(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(iv) se $c < 0$ e se $f(x) \to 0$ por valores negativos de $f(x)$, $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

1) Ache o limite

a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+2}{x^2-4}$

b) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+2}{x^2-4}$

c) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

d) $\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

e) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$

f) $\lim_{x\to 0^-} \frac{2-4x^3}{5x^2+3x^3}$

g) $\lim_{x\to -4^-} \left(\frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{3}{x+4}\right)$

h) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$

2) Ache a(s) assíntota(s) vertical(is) do gráfico da função e faça um esboço dele.

a) $f(x) = \frac{2}{x-4}$

b) $f(x) = \frac{-2}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{-2}{(x+3)^2}$

d) $f(x) = \frac{5}{x^2+8x+15}$

APÊNDICE H – Lista 7: Limites no Infinitos

Teorema Se r for um inteiro positivo qualquer, então

$$\text{(i)}\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

1) Ache o limite

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{5x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+7}{4-5x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+4}{3x^2-5}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x}{x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-4}{5x+3}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+5}$

2) Encontre as assíntotas horizontal e vertical e trace um esboço do gráfico da função.

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

b) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-4}}$

d) $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-9}$

APÊNDICE I – Lista 8: Continuidade de uma função em um número

Definição Dizemos que a função é ***continua*** no número a se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será ***descontínua*** em a

1) Faça um esboço do gráfico da função; então, observando onde há quebras no gráfico, determine os valores da variável independente nos quais a função é descontínua e mostre por que a Definição não é satisfeita em cada descontinuidade.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3} & se\ x \neq -3 \\ 1 & se\ x = -3 \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x - 4}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 4} & se\ x \neq 4 \\ 2 & se\ x = 4 \end{cases}$

e) $f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

2) Prove que a função é descontínua no número a. Então determine se a descontinuidade é removível ou essencial. Se a descontinuidade for removível, redefina $f(a)$ de tal modo que seja removida.

a) $f(x) = \dfrac{9x^2 - 4}{3x - 2}; \quad a = \dfrac{2}{3}$

b) $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & se\ x \leq 2 \\ 3x + 2 & se\ x > 2 \end{cases}; \quad a$

$= -5$

c) $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & se\ x \neq 3 \\ 2 & se\ x = 3 \end{cases}; \quad a$

$= 3$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se\ x \leq 2 \\ x & se\ x > 2 \end{cases}; \quad a$

$= 2$

APÊNDICE J – Lista 9: Continuidade de uma função composta e continuidade em um intervalo

Definição Dizemos que uma função é **contínua em um intervalo** aberto se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.

Definição Uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$ será **contínua em** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ se e somente ela for contínua no intervalo aberto (a, b), contínua à direita em a e contínua à esquerda em b.

Teorema Se $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e se a função f for contínua em b, $\lim_{x\to a}(f\ o\ g)(x) = f(b)$ ou, equivalente, $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

Teorema Se a função g for contínua em a e a função f for contínua em $g(a)$, então a função composta $f\ o\ g$ será contínua em a.

1) Ache o domínio da função dada e então determine se a função é contínua ou descontínua em cada um dos intervalos indicados.

   a) $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$; $(3, 7)$; $[-6, 4]$; $(-\infty, 0)$; $(-5, +\infty)$; $[-5, +\infty)$; $[-10, -5)$

   b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; $(0, 1)$; $(-1, 1)$; $[0, 1]$; $(-1, 0]$; $(-\infty, -1]$; $(1, +\infty)$

   c) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$; $(-\infty, -3)$; $]-\infty, -3]$; $(3, +\infty)$; $(-3, 3)$

   d) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$; $(-\infty, 1)$; $]-\infty, 1]$; $[-1, 1]$; $(-1, +\infty)$; $(1, +\infty)$

2) Defina $f\ o\ g$ e determine os números nos quais $f\ o\ g$ é contínua.

   a) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 9 - x^2$

   b) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 16$

   c) $f(x) = x^3$; $g(x) = \sqrt{x}$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = x - 2$

   e) $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

APÊNDICE L – Lista 10: Valor intermediário. Continuidade das Funções Trigonométricas. Teorema do "Sanduíche"

Teorema Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e se $f(a) \neq f(b)$, então, para todo número k entre $f(a)$ e $f(b)$ existirá um número c entre a e b tal que $f(c) = k$.

Teorema do "Sanduíche" Suponha que as funções f, g e h estejam definidas em algum intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a e que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x em I, tal que $x \neq a$. Suponha também que $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} h(x)$ ambos existam e tenham o mesmo valor L. Então $\lim_{x \to a} g(x)$ existe e é igual a L.

Teorema $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Teorema $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

1) Dados uma função f e um intervalo fechado $[a, b]$. Determine se o teorema do valor intermediário se aplica para o valor de k dado. Se o teorema for aplicável, ache um número c tal que $f(c) = k$. Caso contrário, explique por quê. Faça um esboço da curva e da reta $y = k$.

a) $f(x) = 2 + x - x^2$; $[a, b] = [0, 3]$; $k = 1$

b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $[a, b] = \left[-\frac{9}{2}, 3\right]$; $k = 4$

c) $f(x) = \frac{4}{x + 2}$; $[a, b] = [-3, 1]$; $k = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se \ -2 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & se \ \ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$; $[a, b] = [-2, 3]$; $k = -1$

2) Calcule o limite, quando ele existir.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 9x}{\operatorname{sen} 7x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{\operatorname{sen} 5x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 3x}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos x}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{x}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x}$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

APÊNDICE M – Lista 11: Reta Tangente

Definição Suponhamos que a função f seja contínua em x_1. A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é

(i) a reta por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se o limite existir;

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } + \infty \text{ ou } - \infty$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } + \infty \text{ ou } - \infty$$

1) Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x_1, y_1).

a) $y = 9 - x^2$

b) $y = -2x^2 + 4x$

c) $y = x^3 + 1$

d) $y = 3x^2 - 12x + 8$

e) $y = \sqrt{4 - x}$

f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

2) Ache uma equação da reta tangente à curva dada, no ponto indicado. Faça um esboço da curva com a reta tangente e a reta normal.

a) $y = x^2 - 4x - 5;\ \ (-2, 7)$

b) $y = \frac{1}{8}x^3;\ \ (4, 8)$

c) $y = \frac{6}{x};\ \ (3, 2)$

d) $y = x^4 - 4x;\ \ (0, 0)$

e) $y = 2x - x^3;\ \ (-2, 4)$

f) $y = -\frac{8}{\sqrt{x}};\ \ (4, -4)$

APÊNDICE N – Lista 12: Derivada

Definição A **derivada** de uma função f é a função denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se esse limite existir.

Como a função f definida pela equação $y = f(x+\Delta x) - f(x)$ onde Δy é chamado de *incremento* de y e denota a variação no valor da função quando x varia de Δx. Escrevendo $\frac{dy}{dx}$ em lugar de $f'(x)$, a fórmula torna-se

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1) Ache $f'(x)$ aplicando a definição:

a) $f(x) = 7x + 3$

b) $f(x) = -4$

c) $f(x) = 4 - 2x^2$

d) $f(x) = 8 - 5x$

e) $f(x) = 3x^2 + 4$

f) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

2) Ache a derivada indicada.

a) $\frac{d}{dx}(8 - x^3)$

b) $\frac{d}{dx}(x^3)$

c) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

d) $D_x\left(\frac{1}{x+1}\right)$

e) $D_x\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)$

f) $D_x\left(\sqrt{3x+5}\right)$

APÊNDICE O – Lista 13: Derivadas Laterais e Continuidade

Teorema Se uma função f for derivável em x_1, então f será contínua em x_1.

Definição Se a função f for definida em x_1, então aa **derivada à direita** de f em x_1, denotada por $f'_+(x_1)$, será definida por

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'_+(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

Definição Se a função f for definida em x_1, então aa **derivada à esquerda** de f em x_1, denotada por $f'_-(x_1)$, será definida por

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \Leftrightarrow f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

se o limite existir.

Teorema Uma função será derivável em um ponto se existirem derivadas laterais nesse ponto e se essas derivadas laterais forem iguais.

1) Faça o seguinte:
   i. Trace um esboço do gráfico da função;
   ii. Determine se f é contínua em x_1;
   iii. Calcule $f'_-(x_1)$ e $f'_+(x_1)$, se existirem;
   iv. Determine se f é derivável em x_1.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & se\ x \leq -4 \\ -x - 6 & se\ x > -4 \end{cases}; \quad x_1 = -4$

b) $f(x) = |x - 3|; \quad x_1 = 3$

c) $f(x) = \begin{cases} -1 & se\ x < 0 \\ x - 1 & se\ x \geq 0 \end{cases}; \quad x_1 = 0$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \leq 0 \\ -x^2 & se\ x > 0 \end{cases}; \quad x_1 = 0$

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & se\ x < 1 \\ (1 - x)^2 & se\ x \geq 1 \end{cases}; \quad x_1 = 1$

f) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & se\ x \leq 2 \\ 8x - 11 & se\ x > 2 \end{cases}; \quad x_1 = 2$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}\,; \quad x_1 = -1$

h) $f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & se\ x \leq 3 \\ -4 - x^2 & se\ x > 3 \end{cases}\,; \quad x_1 = 3$

2) Dada $f(x) = \sqrt{x-4}$.

a) Prove que f é contínua à direita de 4;

b) Prove que $f'_+(4)$ não existe;

c) Faça um esboço do gráfico de f.

3) Dada $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

a) Prove que f é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$;

b) Prove que nem $f'_- + (-2)$ nem $f'_-(2)$ existem;

c) Faça um esboço do gráfico de f.