UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JOCIELE DOS SANTOS SILVA

UMA BREVE ANÁLISE DO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS E SUA RELAÇÃO COM O POSTULADO DAS PARALELAS

CURITIBA

2019

JOCIELE DOS SANTOS SILVA

UMA BREVE ANÁLISE DO ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS E SUA RELAÇÃO COM O POSTULADO DAS PARALELAS

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique dos Santos

CURITIBA

2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S586b Silva, Jociele dos Santos
Uma breve análise do ensino do Teorema de Pitagoras e sua relacão com o postulado das paralelas [recurso eletrônico] / Jociele dos Santos Silva. – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2019.

Orientador: Carlos Henrique dos Santos.

1. Pitágoras,Teorema de. 2. Educação matemática. 3. Exercícios de matemática . I. Universidade Federal do Paraná. II. Santos, Carlos Henrique dos. III. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **JOCIELE DOS SANTOS SILVA** intitulada: **Uma breve análise do ensino do Teorema de Pitágoras e sua relação com o Postulado das Paralelas**, que após após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 20 de Setembro de 2019.

CARLOS HENRIQUE DOS SANTOS
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Leônia G. Negrelli

LEÔNIA GABARDO NEGRELLI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família e ao meu companheiro pela paciência e compreensão em vários momentos da minha trajetória para a conclusão deste trabalho. Agradeço ao professor Carlos Henrique por tornar prazeroso e satisfatório todo o percurso para a conclusão deste trabalho, dando-me perspectivas para novos trabalhos e estudos futuros.

RESUMO

O principal objetivo do presente trabalho é causar no leitor uma reflexão sobre como o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras vêm sendo abordado no Ensino Fundamental e Médio. Além de investigarmos como essa abordagem é feita, algumas sugestões são apresentadas. Outro objetivo, não menos importante, é mostrar que o Teorema de Pitágoras e o Postulado das Paralelas são equivalentes, diferente do que estamos acostumados a ver em livros didáticos de matemática aprovados pelo Programa Nacional de Livros Didáticos (PNLD), nos quais o Teorema de Pitágoras parte do Postulado das Paralelas.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, Postula das Paralelas.

ABSTRACT

The main objective of this paper is to cause the reader to reflect on how the Tales Theorem and the Pythagorean Theorem have been approached in elementary and high school. In addition to investigating how this approach is made, some suggestions are presented. Another, not least, objective is to show that the Pythagoras Theorem and the Parallel Postulate are equivalent, different from what we are used to seeing in math textbooks approved by the National Textbook Program (PNLD), in which the Pythagoras part of the Parallel Postulate.

Keywords: Pythagorean Theorem, Thales Theorem, Parallel Postulate.

SUMÁRIO

1 Introdução

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, Brasil, 2018), o Teorema de Pitágoras é apresentado ao aluno no 9º ano do Ensino Fundamental e retomado no 1º ano do Ensino Médio. Analisando alguns livros didáticos - ver tabela página 84 - , todos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), observamos que são apresentados, em geral, dois tipos de demonstração: por equivalência de áreas e por semelhança de triângulos. O primeiro tipo, equivalência de áreas, necessita de conceitos ensinados aos alunos ao longo de anos anteriores; também são necessárias algumas propriedades que podem ser ensinadas por meio de atividades. O outro tipo de demonstração, por meio da semelhança entre triângulos, requer toda uma estrutura para apresentar e poder então demonstrar o Teorema de Pitágoras. A estrutura observada segue, na maior parte dos livros, o seguinte roteiro:

- Axioma das Paralelas, também chamado de V Postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas;
- Teorema de Tales;
- Teoria das Proporções;
- Figuras Semelhantes;
- Semelhança de Triângulos;
- Relações Métricas no Triângulo Retângulo;
- Teorema de Pitágoras (que é uma das Relações Métricas no Triângulo Retângulo).

Diante dessa estruturação presente em muitos livros didáticos, o professor pode ficar com a impressão de que essa sequência de conteúdos é essencial para poder apresentar e provar a relação pitagórica. Notemos que as duas opções de demonstração necessitam do Axioma das Paralelas, assim, parece que a demonstração do Teorema de Pitágoras depende necessariamente deste axioma, ou seja, aparentemente sem o Postulado das Paralelas não existe o Teorema de Pitágoras.

Porém, o Axioma das Paralelas na sua forma mais conhecida, *por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela a esta reta*, é válido somente na Geometria Euclidiana. Durante um curso de licenciatura em matemática, o futuro professor é apresentado a outras geometrias, dentre elas a Geometria Esférica e a Geometria Hiperbólica. Na Geometria Esférica não existem paralelas, na Geometria Hiperbólica existem infinitas paralelas, ou seja, nestas duas geometrias citadas o Postulado das Paralelas não ocorre, e ainda assim, a relação pitagórica é válida.

Logo, o Teorema de Pitágoras não depende necessariamente do Postulado das Paralelas. Então, já que o Postulado das Paralelas implica o Teorema de Pitágoras, o que propomos aqui é a validade da recíproca: o Teorema de Pitágoras implicando o Postulado das Paralelas, obtendo como resultado a seguinte equivalência na Geometria Euclidiana:

$$\text{Teorema de Pitágoras} \Leftrightarrow \text{Postulado das Paralelas}$$

Segue agora uma breve descrição de cada capítulo presente neste trabalho, nos quais, além de ferramentas para o objetivo citado acima, analisamos e propomos demonstrações diferenciadas para o Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales.

No capítulo 2, apresentamos as notações que são utilizadas ao longo do trabalho.

No capítulo 3, considerando-se o Postulado das Paralelas, apresentamos definições, postulados, teoremas e algumas consequências. A parte teórica neste capítulo servirá como "matéria prima" para os capítulos posteriores.

No capítulo 4, apresentamos uma primeira demonstração do Teorema de Pitágoras e das Relações Métricas no Triângulo Retângulo por meio de áreas. Também demonstramos o recíproco desse teorema.

No capítulo 5, fazemos uma análise de como o Teorema de Tales é apresentado e demonstrado nos livros didáticos analisados. Propomos uma prova diferente por meio de áreas.

No capítulo 6, com o intuito de provar a relação pitagórica por meio do uso de semelhança de triângulos - modo mais comum nos livros analisados - apresentamos definições e teoremas relacionados à semelhança de triângulos. As Relações Métricas no Triângulo

Retângulo são provadas para então se obter o Teorema de Pitágoras.

No capítulo 7, tratamos o Teorema de Pitágoras como uma equivalência de áreas. Partindo de uma generalização proposta e demonstrada por Pappus, mostramos a equivalência de áreas para paralelogramos, quadrados, triângulos, polígonos e semicírculos, e citamos algumas outras. Apresentamos, também, uma generalização do Teorema de Pitágoras no espaço.

No capítulo 8, focamos no livro de Loomis, *The Pytagorean Proposition* apresentando cinco provas da relação pitagórica contidas nele, sendo a primeira geométrica, as três seguintes por equidecomponibilidade e a última por equivalência de áreas.

No capítulo 9, chegamos ao Postulado das Paralelas, partindo do Teorema de Pitágoras.

No capítulo 10, mostramos uma tabela na qual constam livros que foram analisados coma finalidade de observar como figuram neles demonstrações dos Teoremas de Tales e Pitágoras.

No capítulo 11, fazemos algumas considerações finais. [1]

[1]O leitor com interesse em aprofundar seus estudos, pode encontrar apoio em livros como o *Euclid - The Thirteen Books of the Elements*, vol. I (Books I and II), uma tradução para a língua inglesa de Thomas L. Heath. As páginas de 202 a 220 são dedicadas as várias tentativas de estudiosos para a demonstração do Postulado das Paralelas. Outro livro é *The Foundations of Geometry*, por David Hilbert, no qual é apresentada a mais citada organização formal contemporânea da geometria. Por fim, O livro *Experiencing Geometry* de David Henderson no qual experimentações são realizadas ampliando algumas propostas que aparecem no livro de Loomis.

2 Notações

Apresentaremos neste capítulo as notações que serão utilizadas ao longo do trabalho. Elas estão de acordo, de um modo geral, com as notações dos livros didáticos atuais.

Um ponto será representado por uma letra maiúscula e uma reta por uma letra minúscula ou por dois pontos pertencentes a ela. Por exemplo, uma certa reta denominada r que passa pelos pontos A e B pode ser representada por $\overleftrightarrow{AB}$. Um segmento de reta será representado pelos seus pontos extremos. Assim, um segmento com extremidades nos pontos A e B será denotado por $\overline{AB}$ e sua medida representada por AB. Uma semirreta com origem em um ponto A passando por um ponto B será representada por $\overrightarrow{AB}$. Um quadrilátero de vértices A, B, C e D será escrito como $\square ABCD$. A área de um quadrilátero $ABCD$ será denotada por $a(\square ABCD)$; analogamente, a área de um triângulo ABC será representada por $a(\triangle ABC)$.

3 Pré-Requisitos

Neste capítulo são apresentados vários postulados, definições, teoremas e propriedades que devem estar claras ao leitor para a leitura e compreensão dos capítulos seguintes. As provas apresentadas são essenciais para a demonstração do Teorema de Pitágoras e do Teorema de Tales por meio de áreas. No entanto, precisamos considerar aqui o Postulado das Paralelas como um fato verdadeiro, isto é, consideramos todas as provas na Geometria Euclidiana - geometria plana.

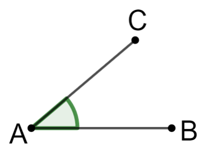
O Postulado das Paralelas também é conhecido como o "V Postulado de Euclides", do livro *Elementos* de Euclides. Existem várias formulações equivalentes a esse postulado. A apresentada aqui é a mais simples e mais frequentemente encontrada nos livros didáticos, conhecida também como o Axioma de Playfair.

Definição 1 *Num plano, duas retas são paralelas se não intersetam-se.*

Postulado 1 ***(O Postulado das Paralelas)*** *Por um ponto fora de uma reta dada, existe somente uma reta paralela à reta dada.*

Definição 2 *É a medida da abertura entre dois segmentos de reta. Consideraremos a medida da menor abertura.*

Por exemplo, na figura abaixo temos o ângulo $\angle BAC$.



Postulado 2 ***(O Postulado da Medida do Ângulo)*** *A todo ângulo $\angle BAC$ corresponde um número real entre 0 e 180.*

Como consequência do postulado acima, a medida de ângulo que utilizaremos é a unidade de graus ($\circ$).

Definição 3 *O número dado pelo Postulado da Medida do Ângulo é chamado medida do* $\angle BAC$ *e é escrito* $med(\angle BAC)$.

Postulado 3 ***(Postulado da Adição de Ângulos)*** *Se* D *está no interior do* $\angle BAC$, *então* $med(\angle BAC) = med(\angle BAD) + med(\angle DAC)$.

Definição 4 *Diremos que* $\angle A < \angle B$ *se* $med(\angle A) < med(\angle B)$. *O mesmo ocorrendo para qualquer desigualdade* $(>, \leqslant, \geqslant)$.

As definições e teoremas que seguem tratam de congruências. Duas figuras são congruentes se têm a mesma forma e o mesmo tamanho.

Definição 5 *Dois ângulos são congruentes se têm a mesma medida. Dois segmentos são congruentes se têm a mesma medida. Diremos que* $\angle A \cong \angle B$ *quando* $med(\angle A) = med(\angle B)$, *o mesmo ocorrendo para segmentos.*

Definição 6 *Se* A, B *e* C *são três pontos não colineares, a reunião dos segmentos* $\overline{AB}, \overline{BC}$ *e* $\overline{AC}$ *é chamada de* ***triângulo*** *e é representado por* $\triangle ABC$. *Os pontos* A, B *e* C *são chamados* ***vértices*** *do triângulo e os segmentos* $\overline{AB}, \overline{BC}$ *e* $\overline{AC}$ *são seus lados. Cada triângulo determina três ângulos, no caso de um triângulo* ABC: $\angle ABC, \angle BCA, \angle CAB$, *que, quando ficar claro, podem ser representados também por* $\angle B, \angle C$ *e* $\angle A$, *respectivamente. Um triângulo é classificado em:*
Acutângulo: quando todos seus ângulos internos medem menos de $90°$,
Retângulo: quando um dos ângulos internos tem exatamente $90°$,
Obtusângulo: quando um dos ângulos internos mede mais de $90°$.

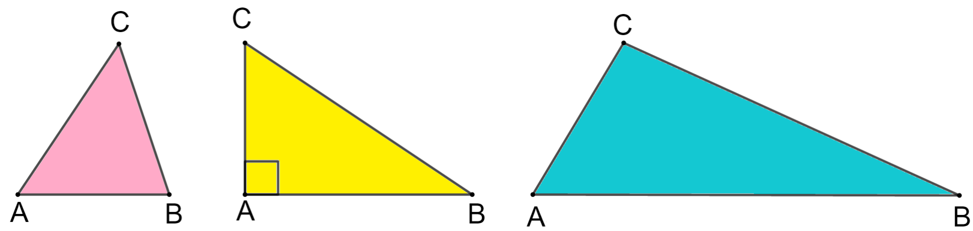


Figura 1: Triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo, respectivamente.

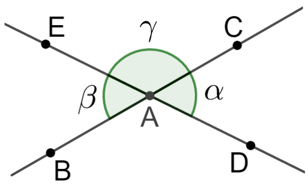
Definição 7 *Se* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AD}$ *são semirretas opostas e* $\overrightarrow{AC}$ *é uma outra semirreta qualquer então* $\angle BAC$ *e* $\angle CAD$ *formam um par linear.*

Definição 8 *Se a soma das medidas de dois ângulos é* $180°$*, os ângulos são chamados* ***suplementares*** *e cada um deles é dito um* ***suplemento*** *do outro.*

Definição 9 *Dois ângulos são chamados* ***ângulos opostos pelo vértice*** *se os seus lados formam dois pares de semirretas opostas.*

Teorema 1 ***(Ângulos Opostos pelo Vértice)*** *Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Demonstração:



Temos que $\angle\alpha$ e $\angle\beta$ são ângulos opostos pelo vértice, isto é, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são semirretas opostas e $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ também. Assim, os ângulos $\angle\alpha$ e $\angle\gamma$ formam um par linear e $\angle\beta$ e $\angle\gamma$ formam outro par linear. Então,

$$\alpha + \gamma = 180°, \beta + \gamma = 180°.$$

logo

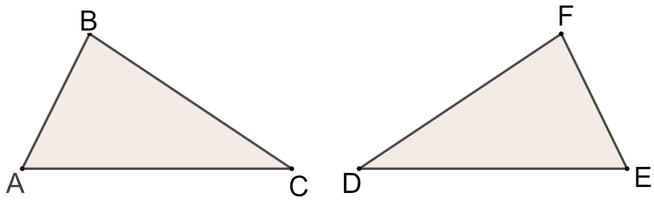
$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma.$$

Portanto,

$$\alpha = \beta.$$

Definição 10 *Dois triângulos são congruentes se for possível transportar um sobre o outro, de tal modo que fiquem sobrepostos, coincidindo lados e ângulos.*

Por exemplo, na figura abaixo, para transportar o $\triangle ABC$ sobre o $\triangle DEF$, colocaríamos A sobre E, B sobre F e C sobre D, fazendo-se então uma reflexão. A ideia de transportar fica então relacionada a movimentos não apenas no plano.



Podemos escrever estes pares de vértices correspondentes do seguinte modo:

$$A \longleftrightarrow E, B \longleftrightarrow F, C \longleftrightarrow D,$$

que lemos: A correspondente a E, B correspondente a F e C correspondente a D, respectivamente.

Este tipo de correspondência é chamada de bijeção entre os vértices dos dois triângulos e pode ser escrita na forma $ABC \leftrightarrow EFD$. Quando

$$\angle A \cong \angle D, \angle C \cong \angle E, \angle B \cong \angle F,$$

$$\overline{AB} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{FE}, \overline{AC} \cong \overline{DE}$$

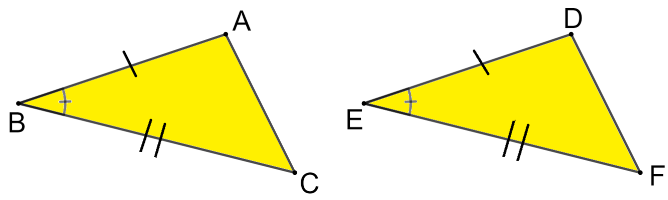
a correspondência é chamada *congruência* entre os dois triângulos. Mas, se considerarmos no exemplo acima

$$A \longleftrightarrow F, B \longleftrightarrow D, C \longleftrightarrow E,$$

isto é uma correspondência bijetora, mas não é um caso de congruência, pois os triângulos não coincidirão.

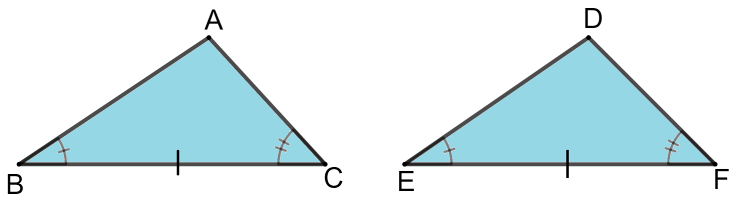
Postulado 4 ***(O Postulado LAL (lado, ângulo, lado))*** *Toda correspondência LAL é uma congruência. Isto é, se dois triângulos possuem dois lados congruentes e o ângulo formado por estes lados também congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Na figura, $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \angle ABC \cong \angle DEF$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então também $\angle A \cong \angle D, \overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\angle C \cong \angle F$.



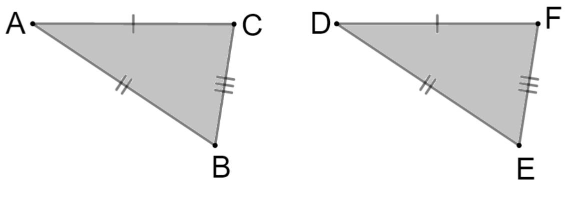
Postulado 5 ***(O Postulado ALA (ângulo, lado, ângulo))*** *Toda correspondência ALA é uma congruência. Isto é, se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes e o lado entre estes ângulos também congruentes então os triângulos são congruentes.*

Na figura, $\angle B \cong \angle E, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ e $\angle C \cong \angle F$, então também $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \angle A \cong \angle D$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

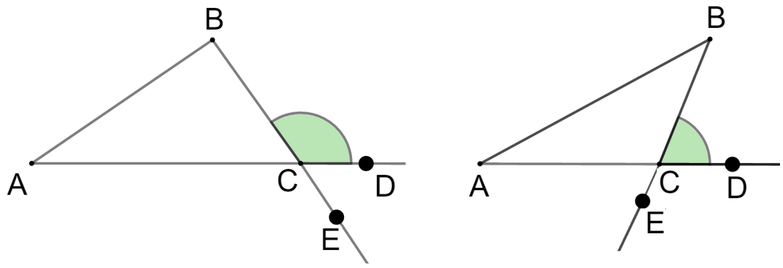


Postulado 6 ***(O Postulado LLL (lado, lado, lado))*** *Toda correspondência LLL é uma congruência. Isto é, se dois triângulos possuem os três lados congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Na figura, $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$ e $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, então também $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$.



Definição 11 *Dado um triângulo ABC, se C está entre A e D, então $\angle BCD$ é um* ***ângulo externo*** *do $\triangle ABC$.*

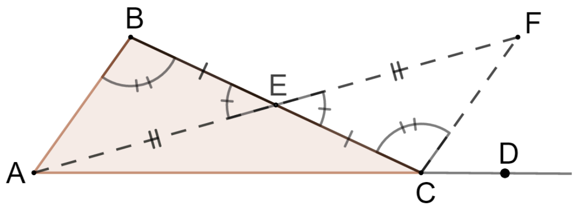


Definição 12 *Os ângulos $\angle A$ e $\angle B$ do $\triangle ABC$ são chamados ângulos internos **não adjacentes** aos ângulos externos $\angle BCD$ e $\angle ACE$.*

Definição 13 *Dado $\overline{AB}$, o ponto médio de $\overline{AB}$ é um ponto que divide o segmento exatamente ao meio, obtendo duas partes iguais.*

Teorema 2 ***(do Ângulo Externo)*** *Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um de seus ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração: Queremos provar que, dado o triângulo ABC, com C entre A e D, então $\angle BCD > \angle B$.



Seja E o ponto médio de $\overline{BC}$ e F um ponto da semirreta oposta a $\overrightarrow{EA}$, tal que $EF = EA$. Agora, observando $\triangle BEA$ e $\triangle CEF$, notamos que, pelo postulado ALA, estes são congruentes pois $AE = EF, \angle BEA \cong \angle CEF$ (opostos pelo vértice), e $BE = CE$, já que E é ponto médio de $\overline{BC}$. Logo, $\angle B \cong \angle ECF$ e então, como

$$med(\angle BCD) = med(\angle ECF) + med(\angle FCD)$$

teremos

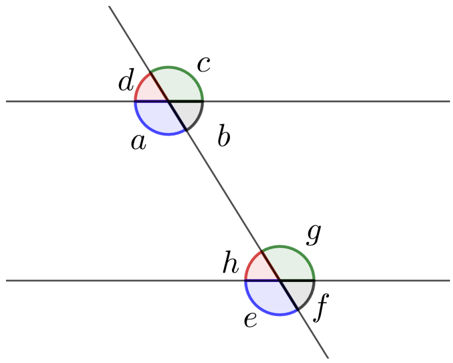
$$med(\angle BCD) = med(\angle B) + med(\angle FCD).$$

Portanto

$$med(\angle BCD) > med(\angle B),$$

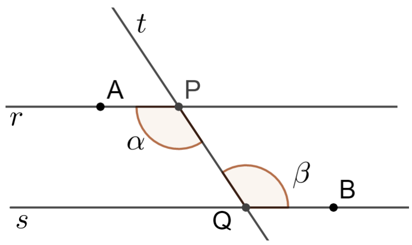
como queríamos demonstrar.

Dadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal, temos formados um total de oito ângulos, conforme figura a seguir temos então os ângulos a, b, c, d, e, f, g e h.

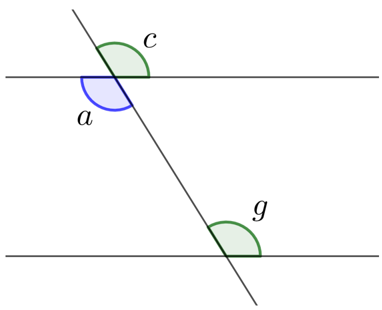


Temos a seguinte correspondência de ângulos: $a \longleftrightarrow e, b \longleftrightarrow f, c \longleftrightarrow g, d \longleftrightarrow h$. Como ângulos correspondentes são congruentes, então $a \cong e, b \cong f, c \cong g, d \cong h$.

Definição 14 *Dadas duas retas r e s cortadas por uma transversal t nos pontos P e Q, sejam A um ponto de r e B um ponto de s, tais que A e B estão em lados opostos de t. Então $\angle APQ$ e $\angle PQB$ são* ***ângulos alternos internos****.*

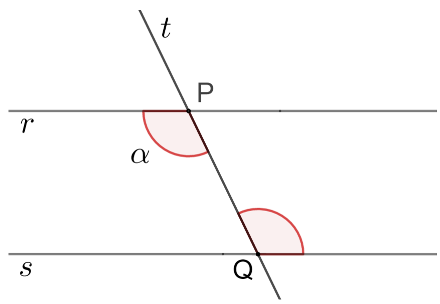


Teorema 3 *Ângulos alternos internos são congruentes.*

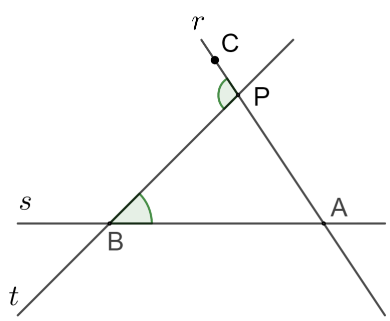


Demonstração: Na figura acima, os ângulos a e g são alternos internos, queremos provar eles são congruentes. g e c são ângulos correspondentes, portanto são congruentes. Além disso, c e a são opostos pelo vértice, logo são também ângulos congruentes. Assim, sendo g congruente a c e c congruente a a, por transitividade concluímos que g é congruente a a, como queríamos demonstrar.

Teorema 4 *Dadas duas retas cortadas por uma transversal, se um par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes, então as retas são paralelas.*



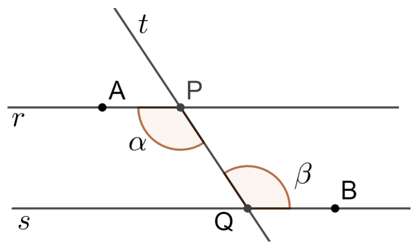
Demonstração: Seja t uma transversal, intersetando r e s em P e Q, respectivamente. Suponha que um par de ângulos alternos internos é formado por ângulos congruentes. Então, pelo teorema anterior, ambos os pares de ângulos alternos internos são formados por ângulos congruentes. Suponha que r intersete s em um ponto A.



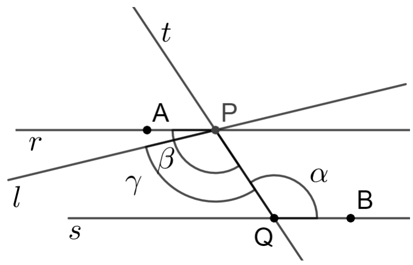
Seja C um ponto de r, no lado de t oposto a A. Então $\angle CPB$ é um ângulo externo do triângulo ABP e $\angle PBA$ é um de seus ângulos internos não adjacentes. Pelo Teorema do Ângulo Externo, $\angle CPB > \angle PBA$. Isto contradiz a afirmação de que ambos os pares de ângulos alternos internos são formados por ângulos congruentes. Portanto, r não intersecta s e r é paralela a s, como queríamos demonstrar.

Teorema 5 *Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.*

Demonstração: São dadas duas paralelas r e s e uma transversal t, intersetando as paralelas em P e Q.



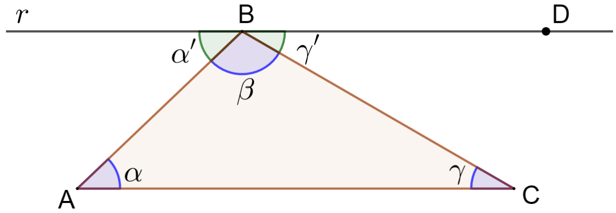
Suponha que $\alpha \neq \beta$. Seja l a reta por P para a qual os ângulos alternos internos são congruentes. Isto é, pela figura abaixo $\alpha = \gamma$.



Então l é paralela a r por P, o que contradiz o Postulado das Paralelas. Portanto, $\alpha = \beta$, ou seja, os ângulos alternos internos são congruentes.

Teorema 6 *A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é* $180°$.

Demonstração: Dado o triâgulo ABC, seja r a reta passando por B paralela a $\overline{AC}$ e considere os ângulos $\alpha, \alpha', \beta, \gamma$ e γ', conforme figura abaixo.



Note que $\alpha = \alpha'$ (1) pois são ângulos alternos internos, do mesmo modo $\gamma = \gamma'$ (2). Pelo Postulado da Adição de Ângulos temos que

$$med(\angle ABD) = \beta + \gamma'$$

como $\alpha' + med(\angle ABD) = 180°$ então

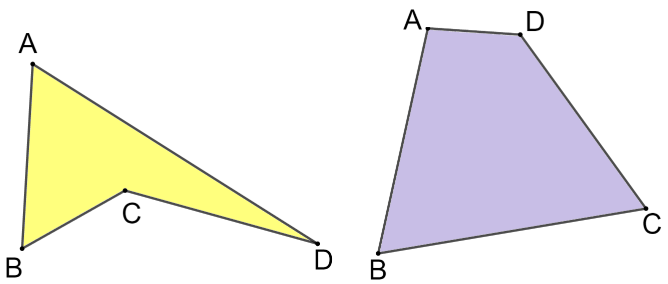
$$\alpha' + \beta + \gamma' = 180°.$$

Utilizando as igualdades (1) e (2) temos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

como queríamos demonstrar.

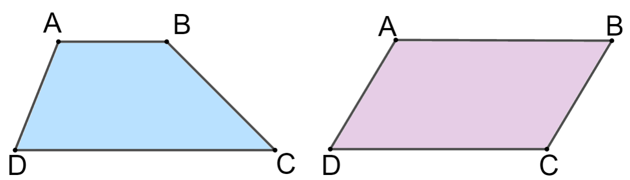
Definição 15 *Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três destes não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$ intersetam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é chamada* ***quadrilátero****.*



Definição 16 *Um* ***trapézio*** *é um quadrilátero em que dois lados são paralelos.*

Definição 17 *Um* ***paralelogramo*** *é um quadrilátero em que ambos os pares de lados opostos são paralelos.*

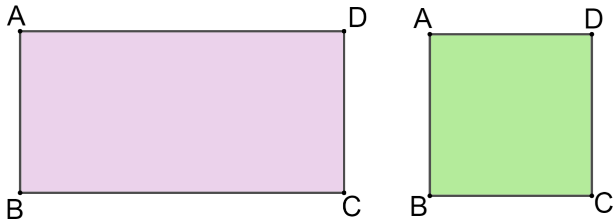
Na figura abaixo, um trapézio e um paralelogramo, respectivamente.



Definição 18 *Um **retângulo** é um paralelogramo cujos ângulos são todos retos, isto é, medem* $90°$.

Definição 19 *Um **quadrado** é um retângulo cujos lados são todos congruentes.*

Na figura, um retângulo e um quadrado, respectivamente.

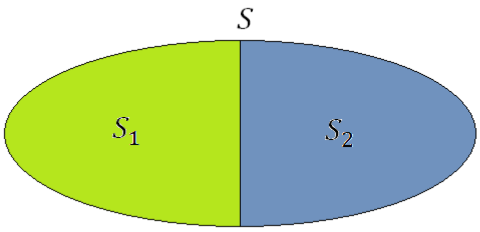


O conceito de área está relacionado a um espaço que se encontra delimitado. O que vem a seguir são postulados referentes a áreas e teoremas mostrando como calcular a área de alguns polígonos, essenciais para nosso objetivo.

Postulado 7 ***(O Postulado da Congruência)*** *Se dois triângulos são congruentes, então eles possuem a mesma área.*

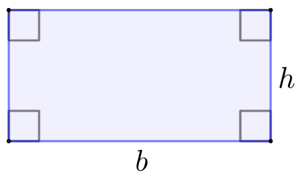
Postulado 8 ***(O Postulado da Unidade)*** *A área de uma superfície quadrada é o quadrado do comprimento do seu lado.*

Postulado 9 ***(O Postulado da Adição de Áreas)*** *Supondo que a região* S *é a reunião de duas regiões* S_1 *e* S_2 *e supondo que* S_1 *e* S_2 *se intersetam, no máximo, em um número finito de segmentos e pontos, então a área da região* S *é igual a soma das áreas das regiões* S_1 *e* S_2.



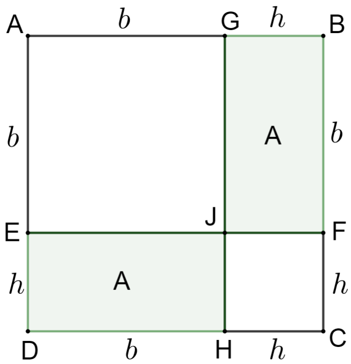
$$S = S_1 + S_2.$$

Teorema 7 *A área de um retângulo é o produto de sua base pela sua altura.*



Se A representa a área do retângulo acima, então $A = bh$.

Demonstração: Considere a figura abaixo, um quadrado de lados $b + h$.



Seja A a área dos retângulos de lados b e h. Pelo postulado da adição de áreas, temos que

$$a(\square ABCD) = a(\square AGJE) + a(\square JFCH) + A + A$$

então

$$(b + h)^2 = b^2 + h^2 + 2A \Longrightarrow b^2 + 2bh + h^2 = b^2 + h^2 + 2A,$$

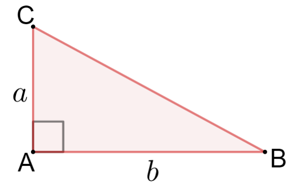
cancelando as parcelas iguais em ambos os membros

$$2bh = 2A \Longrightarrow bh = A.$$

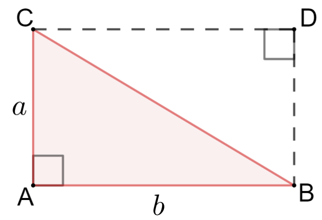
Portanto $A = bh$, como queríamos demonstrar.

Teorema 8 *A área de um triângulo retângulo é o semiproduto de seus catetos.*

Demonstração: Dado o triângulo retângulo da figura abaixo, de catetos a e b, deve-se mostrar que $A = \dfrac{ab}{2}$, onde A representa a área do triângulo.



Constrói-se $BD = AC$ e perpendicular a $\overline{AB}$ e $CD = AB$ perpendicular a $\overline{CA}$, conforme figura abaixo. Temos então que $\triangle DCB \cong \triangle ABC$ pelo postulado LLL, pois $CD = AB$, $BD = AC$ e CB é um lado comum aos triângulos, e assim $a(\triangle DCB) = a(\triangle ABC) = A$. Logo, $\angle D \cong \angle A$. Então, $\square ABDC$ é um retângulo, já que seus ângulos internos são todos retos.



Agora, pelo teorema anterior e pelo postulado da adição de áreas,

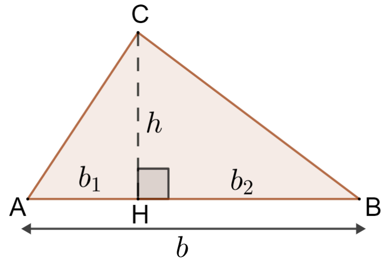
$$a(\square ABDC) = a(\triangle ABC) + a(\triangle DCB) \Longrightarrow ab = A + A \Longrightarrow ab = 2A \Longrightarrow \frac{ab}{2} = A$$

ou $A = \dfrac{ab}{2}$, como queríamos demonstrar.

Teorema 9 *A área de um triângulo qualquer é o semiproduto de qualquer base pela altura correspondente.*

Demonstração: Considere um triângulo ABC cuja área é A de base b e altura h. Temos três casos:

1º Caso: Se a altura considerada é interior ao triângulo, dividimos em dois triângulos retângulos, conforme a figura abaixo.



Pelo teorema anterior,

$$a(\triangle ACH) = \frac{b_1 h}{2}, a(\triangle BCH) = \frac{b_2 h}{2},$$

e pelo postulado da adição de áreas

$$a(\triangle ABC) = a(\triangle ACH) + a(\triangle BCH),$$

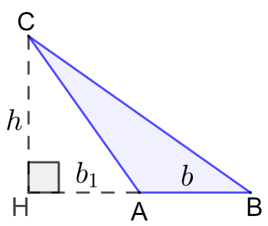
logo

$$A = \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h}{2} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2},$$

como $b_1 + b_2 = b$, segue que $A = \dfrac{bh}{2}$.

2º Caso: Se a altura coincide com um dos lados do triângulo temos então um triângulo retângulo, caso do teorema demonstrado anteriormente.

3º Caso: Se a altura escolhida é externa ao triângulo, temos que



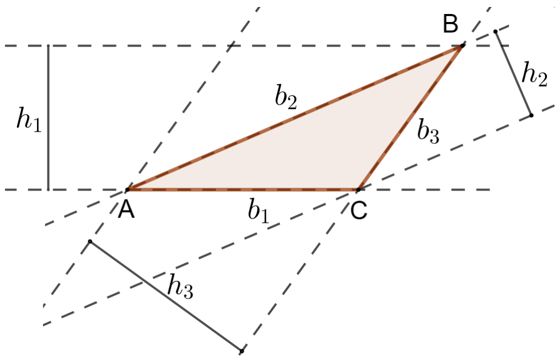
$$a(\triangle HBC) = a(\triangle HAC) + a(\triangle ABC).$$

Sendo $\triangle HBC$ e $\triangle HAC$ ambos retângulos, pelo teorema anterior

$$\frac{(b_1 + b)h}{2} = \frac{b_1 h}{2} + A \Longrightarrow \frac{b_1 h}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{b_1 h}{2} + A$$

e então $A = \dfrac{bh}{2}$.

Observe que a área de um triângulo independe da base ou da altura escolhida, qualquer situação está contemplada por este último teorema.

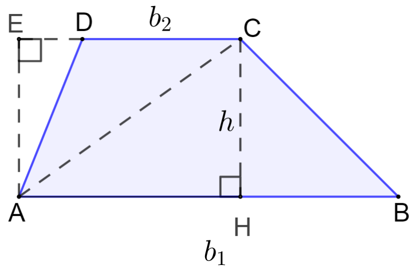


Conforme figura acima, temos que, sendo A a área do triângulo ABC,

$$A = \frac{b_1 h_1}{2} = \frac{b_2 h_2}{2} = \frac{b_3 h_3}{2}$$

Teorema 10 *A área de um trapézio é o semiproduto da altura pela soma das bases.*

Demonstração: Seja A a área do trapézio. Dado o trapézio abaixo, devemos provar que $A = \dfrac{h(b_1 + b_2)}{2}$. Tracemos $\overline{CH}$ perpendicular a $\overline{AB}$, tracemos a diagonal $\overline{AC}$ e também $\overline{AE}$ perpendicular ao prolongamento do segmento $\overline{CD}$.



Temos que $\angle CAH \cong \angle ACE$ e $\angle ACH \cong \angle CAE$, pois são alternos internos. Então, $\triangle ACH \cong \triangle CAE$ pelo postulado ALA, já que $\overline{AC}$ é lado comum a tais triângulos. Assim, $AE = HC = h$.

Pelo postulado da adição de áreas, a área do trapézio é a soma da área dos triângulos ABC e ACD:

$$A = \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h}{2}$$

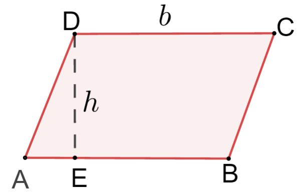
então

$$A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 11 *A área de um paralelogramo é o produto de qualquer base pela altura correspondente.*

Demonstração: Dado um paralelogramo $ABCD$ trace sua altura $DE = h$ e seja b sua base. Devemos provar que $A = bh$.



Note que todo paralelogramo é um trapézio de bases $b_1 = b_2 = b$. Assim, pelo teorema anterior,

$$A = \frac{h(b+b)}{2} \Longrightarrow A = \frac{2bh}{2}.$$

Portanto,

$$A = bh$$

como queríamos demonstrar.

Seguem abaixo algumas propriedades para as áreas de paralelogramos e triângulos.

Propriedade 1 *Paralelogramos e quadrados que estão com lados opostos sobre as mesmas retas paralelas possuem a mesma área.*

Note que neste caso a medida da base e da altura é a mesma.

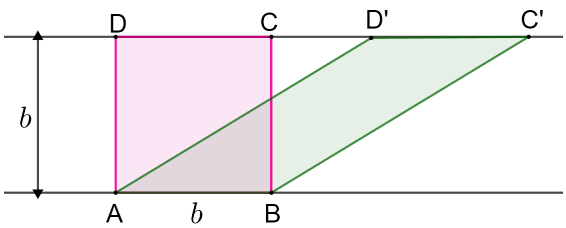


Figura 2: Quadrado e paralelogramo de mesma base e mesma altura

Note que neste caso a medida da base e da altura é a mesma, b, então

$$a(\square ABCD) = a(\square ABC'D') = b.b = b^2$$

Propriedade 2 *Paralelogramos sobre a mesma base e com lados opostos sobre as mesmas paralelas possuem a mesma área.*

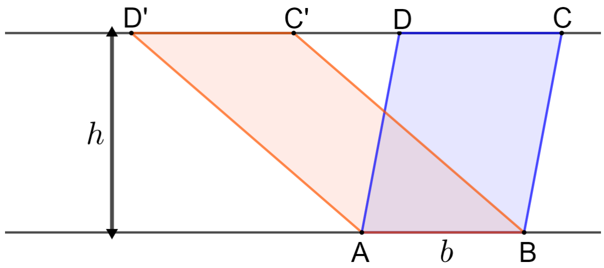


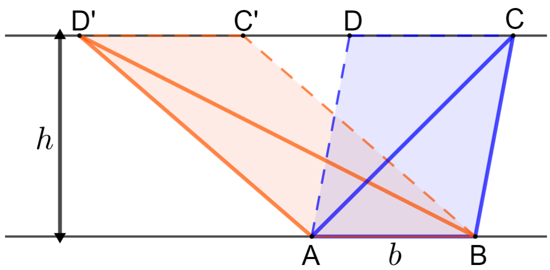
Figura 3: Paralelogramos de mesma base e mesma altura

De fato, seja b a medida da base. Tendo os lados opostos sobre as mesmas paralelas, então os paralelogramos possuem mesma altura h. Portanto,

$$a(\square ABCD) = a(\square ABC'D') = bh.$$

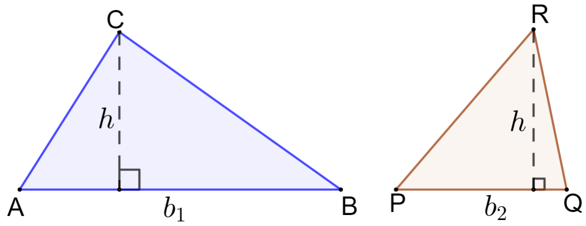
Note que, se traçarmos uma das diagonais de cada paralelogramo, dividiremos estes em dois triângulos de mesma base e mesma altura e, assim, como a área de cada triângulo é metade da área do paralelogramo, temos a seguinte propriedade:

Propriedade 3 *Se dois triângulos têm a mesma base b e a mesma altura h, então eles têm a mesma área.*



De fato, basta ver que para ambos os triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle ABD'$, a área é $\frac{1}{2}bh$.

Teorema 12 *Se dois triângulos têm a mesma altura h, então a razão entre suas áreas é igual a razão entre suas bases.*



Demonstração: Sejam b_1 e b_2 as bases de dois triângulos distintos, $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, respectivamente. Então

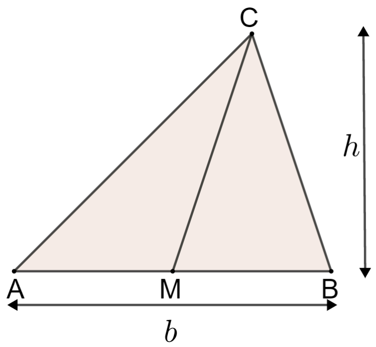
$$\frac{a(\triangle ABC)}{a(\triangle PQR)} = \frac{\frac{1}{2}b_1 h}{\frac{1}{2}b_2 h} = \frac{b_1}{b_2}$$

como queríamos demonstrar.

Definição 20 *A **mediana** de um triângulo é o segmento cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.*

Propriedade 4 *A mediana divide um triângulo em dois triângulos de mesma área.*

De fato, dado um triângulo ABC, de base $AB = b$ e altura h, conforme figura abaixo, seja M o ponto médio do lado $\overline{AB}$. Então $AM = MB = \dfrac{b}{2}$, assim, $a(\triangle AMC) = a(\triangle BMC) = \dfrac{\frac{b}{2}h}{2} = \dfrac{bh}{4}$.

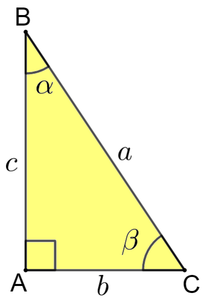


4 Demonstração do Teorema de Pitágoras e das Relações Métricas em um Triângulo Retângulo por meio de áreas

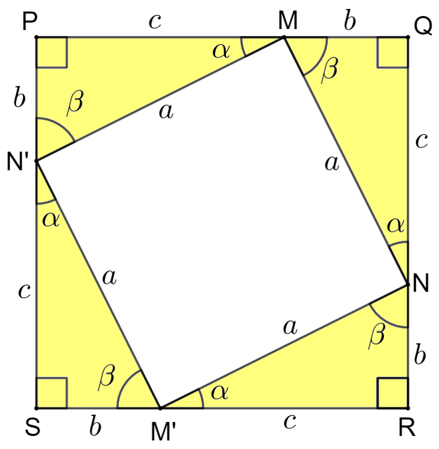
Segue agora a demonstração do Teorema de Pitágoras com a utilização de áreas. Essa é uma das demonstração mais comuns nos livros didáticos atuais. Depois, mostraremos o recíproco do teorema, também pelo uso de áreas. Isso é algo que geralmente não é feito nos livros didáticos e que, acreditamos, ser algo possível de ser realizado com os alunos.

Teorema 13 (de Pitágoras) *Em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Demonstração: Considere um triângulo retângulo cujos catetos medem b e c e cuja hipotenusa mede a:



Construamos um quadrado de lado igual à soma dos dois catetos desse triângulo, $b + c$, e construamos as hipotenusas conforme a figura abaixo.



Pelo postulado LLL segue que $\triangle ABC \cong \triangle PMN' \cong \triangle QNM \cong \triangle RM'N \cong \triangle SN'M'$. Assim,

$$\angle B \cong \angle PMN' \cong \angle QNM \cong \angle RM'N \cong \angle SN'M'$$

e

$$\angle C \cong \angle PN'M \cong \angle QMN \cong \angle RNM' \cong \angle SM'N'.$$

No triângulo ABC considerado, sendo $\alpha + \beta + 90° = 180°$, temos então que $\alpha + \beta = 90°$. Assim, como $\alpha + \angle N'MN + \beta = 180°$, obtemos que $\angle N'MN$ é reto. Analogamente, $\angle MNM', \angle NM'N'$ e $\angle M'N'M$ são todos retos. Portanto, o quadrilátero $\square MNM'N'$ é um quadrado, já que todos seus lados medem a e seus ângulos internos são retos. Agora, pelo Postulado da Adição de Áreas

$$a(\square PQRS) = a(\square MNM'N') + a(\triangle PMN') + a(\triangle QNM) + a(\triangle RM'N) + a(\triangle SN'M').$$

Sendo os triângulos congruentes entre si:

$$a(\square PQRS) = a(\square MNM'N') + 4a(\triangle ABC),$$

então

$$(b+c)^2 = a^2 + 4\frac{bc}{2}$$

desenvolvendo os quadrados

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc \Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Ou ainda,

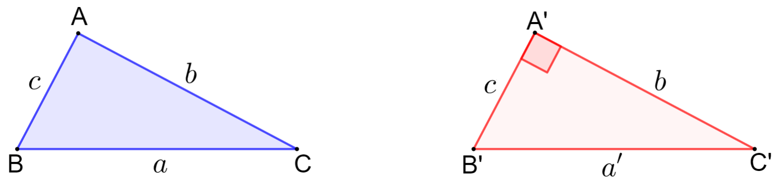
$$a^2 = b^2 + c^2,$$

como queríamos demonstrar.

Segue o recíproco do teorema.

Teorema 14 *Se o quadrado de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao maior lado.*

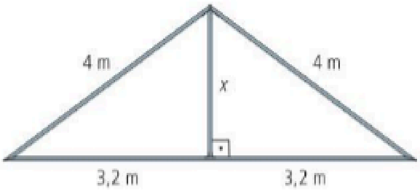
Demonstração: Considere a figura abaixo, por meio da qual é dado o triângulo ABC com $b^2 + c^2 = a^2$. Seja $\triangle A'B'C'$ um triângulo retângulo com catetos b e c e hipotenusa a'. Neste, vale que $b^2 + c^2 = a'^2$. Então, $a = a'$, ou seja, os triângulos possuem os lados congruentes, logo são congruentes pelo postulado LLL. Portanto, seus ângulos internos também são congruentes, $\angle A \cong \angle A'$, como $\angle A'$ é um ângulo reto, também $\angle A$ é reto, como queríamos demonstrar.



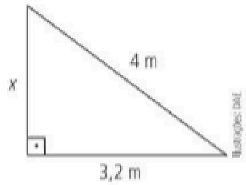
Assim como o Teorema de Pitágoras, as outras *Relações Métricas em um Triângulo Retângulo* também podem ser demonstradas por meio de áreas. Esta demonstração é outra que não aparece nos livros didáticos. Quando a prova é apresentada, é feita pela utilização de semelhança de triângulos. Como exemplo temos o livro *Praticando Matemática*, 9º ano, 3ª edição, São Paulo, 2012, Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, [2] no qual as *Relações Métricas em um Triângulo Retângulo* aparecem a partir da página 192.

[2] O livro pode ser acessado através do link `https://issuu.com/ronaldo.cardoso/docs/praticando__matematica-9ano`

3. Relações métricas nos triângulos retângulos



Nessa estrutura de telhado feita com barras de ferro, qual deve ser a medida de x?



Podemos descobrir aplicando o teorema de Pitágoras.

hipotenusa: 4

catetos: 3,2 e x

$4^2 = x^2 + 3,2^2$

$16 = x^2 + 10,24$

$x^2 = 5,76$

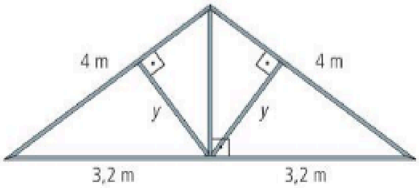
$x = \sqrt{5,76}$

$x = 2,4$

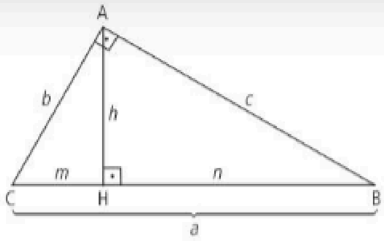
A barra mede 2,4 m.

> $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$
> $\sqrt{5,76}$ está entre 2 e 3.
> Como o último algarismo de 5,76 é 6, experimentamos 2,4.
> De fato, $2,4^2 = 5,76$.
> Você também pode usar calculadora: digite 5,76 $\boxed{\sqrt{\ }}$

Barras de reforço serão colocadas na estrutura. Qual deve ser a medida dessas barras?



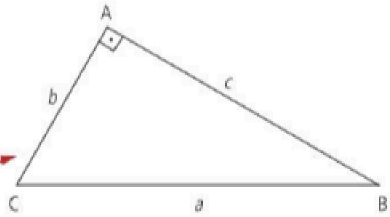
Traçamos a altura $\overline{AH}$ relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Sua medida é h. Repare que $\overline{AH}$ determina dois segmentos sobre a hipotenusa. Eles recebem nomes especiais:

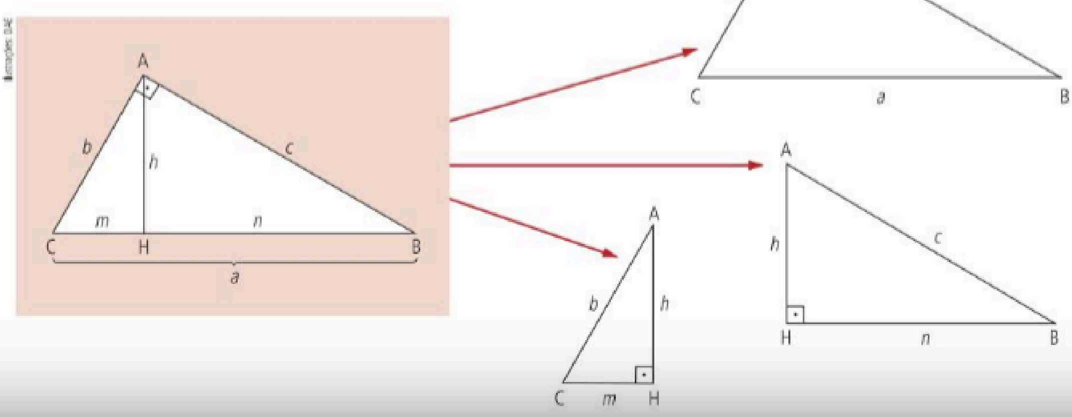


$\overline{CH}$: projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.
Medida: m

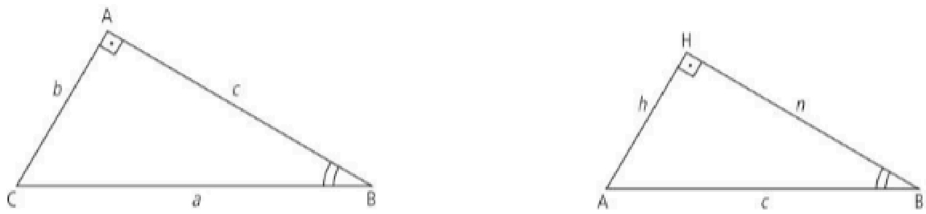
$\overline{BH}$: projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa.
Medida: n

Visualize os três triângulos que aparecem nesta figura:





Vamos comparar os triângulos ABC e HBA. Para facilitar, colocamos o ângulo reto na mesma posição:



$\hat{A} \equiv \hat{H}$ (ambos são ângulos retos)

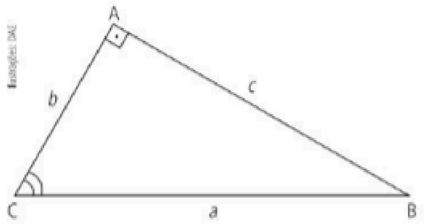
$\hat{B}$ é ângulo comum aos dois triângulos.

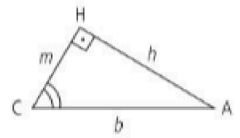
Os triângulos apresentam dois ângulos correspondentes congruentes. O terceiro, automaticamente, também será. Os triângulos são semelhantes, ou seja, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

Podemos escrever:

$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$ Multiplicando os termos da proporção em cruz: $c^2 = a \cdot n$

Vamos comparar os triângulos ABC e HAC, colocando os ângulos retos na mesma posição:





$\hat{A} = \hat{H}$ (são retos).
$\hat{C}$ é ângulo comum aos dois triângulos. } Dois ângulos correspondentes congruentes.

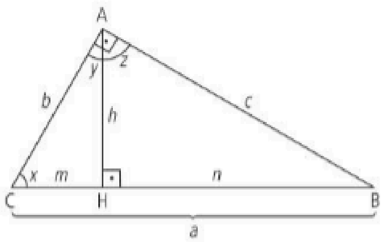
$\triangle ABC \sim \triangle HAC$ (As medidas dos lados correspondentes são proporcionais.)

Podemos escrever:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{m}$ e também: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h}$ Multiplicando os termos das proporções em cruz, obtemos:

$$\boxed{b^2 = a \cdot m} \quad \text{e} \quad \boxed{a \cdot h = b \cdot c}$$

Precisaremos examinar mais uma semelhança para obter a próxima relação. Observe:



Marcamos as medidas x, y e z de ângulos que aparecem na ilustração.

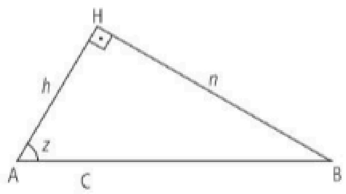
Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos que no triângulo HAC, $x + y + 90° = 180°$, ou seja, $x + y = 90°$. Também temos que, no triângulo ABC, $z + y = 90°$. Daí, $x = z$.

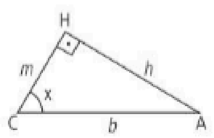
Concluímos que os triângulos HBA e HAC têm dois ângulos correspondentes congruentes: $x = z$ e $90° = 90°$ (ambos têm um ângulo reto). O terceiro ângulo será congruente, e temos $\triangle HBA \sim \triangle HAC$.

Traçando esses triângulos com os ângulos correspondentes na mesma posição, fica mais fácil encontrar os lados correspondentes, que apresentam medidas proporcionais, e obter mais uma fórmula:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$





As fórmulas que encontramos são chamadas de **relações métricas no triângulo retângulo**:

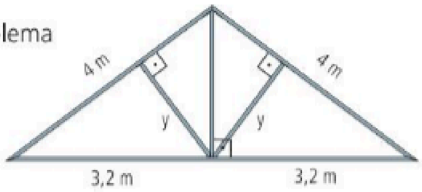
$\left.\begin{matrix} c^2 = a \cdot n \\ b^2 = a \cdot m \end{matrix}\right\}$ Relacionam cateto, sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

$a \cdot h = b \cdot c$ → Relaciona hipotenusa, altura relativa à hipotenusa e catetos.

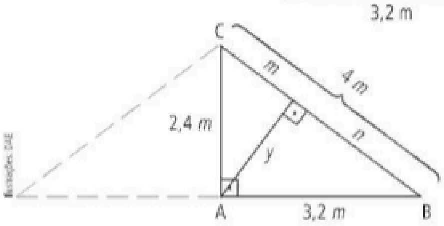
$h^2 = m \cdot n$ → Relaciona a altura relativa à hipotenusa com as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Lembra-se de que demonstramos o teorema de Pitágoras usando equivalência entre áreas? Pois também podemos chegar a esse teorema a partir das relações que acabamos de descobrir.
Vamos somar membro a membro as igualdades:
$c^2 = a \cdot n$
$b^2 = a \cdot m$
$c^2 + b^2 = a \cdot n + a \cdot m$
Colocando o fator comum a em evidência:
$c^2 + b^2 = a(m + n)$
No entanto, $(m + n) = a$
A igualdade fica: $c^2 + b^2 = a \cdot a$ ou $\boxed{c^2 + b^2 = a^2}$, que é o teorema de Pitágoras.

Vamos voltar ao problema da estrutura metálica?



y é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC abaixo.
Vimos que $a \cdot h = b \cdot c$
Nesse problema: $a \cdot y = b \cdot c$



$\left.\begin{matrix} a = 4 \\ b = 2,4 \\ c = 3,2 \end{matrix}\right\}$

$4 \cdot y = 2,4 \cdot 3,2$
$4 \cdot y = 7,68$
$y = \dfrac{7,68}{4}$
$y = 1,92$

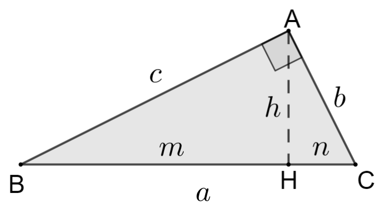
As barras de reforço devem ter 1,92 m de comprimento.
Ainda podemos determinar a que distância do ponto C a barra de reforço deve ser fixada.
Essa distância é a projeção m do cateto b sobre a hipotenusa.

$b = 2,4$ e $a = 4$
Usando a relação:
$b^2 = a \cdot m$
$2,4^2 = 4 \cdot m$
$5,76 = 4 \cdot m$
$m = \dfrac{5,76}{4} \longrightarrow m = 1,44$

O ponto de fixação da barra de reforço deve estar a 1,44 m do ponto C.

Em um ambiente em que estamos tratando todas as demonstrações por meio de áreas, convém então apresentá-la.

Considere o triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice A e tal que $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Seja $AH = h$ a altura baixada do vértice A ao lado $\overline{BC}$, $HC = n$ e $HB = m$.



Valem as seguintes relações:

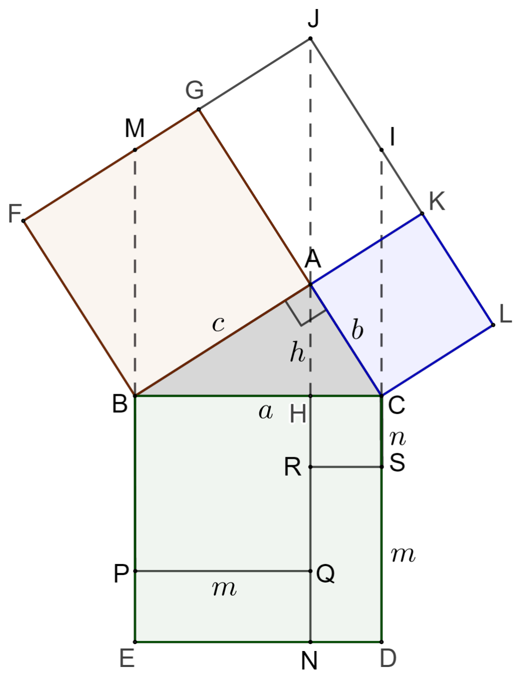
$$h^2 = mn \ \mathbf{(1)}$$

$$b^2 = an \ \mathbf{(2)}$$

$$c^2 = am \ \mathbf{(3)}$$

$$ah = bc \ \mathbf{(4)}$$

Demonstração: Considere a figura abaixo, onde são construídos quadrados sobre os lados do triângulo.



Note que no triângulo AJG temos que $AG = C = AB, \angle AGJ \cong \angle BAC$ e $JG = b = AC$,

logo pelo postulado LAL, $\triangle GAJ \cong \triangle ABC$, então $AJ = BC$.
Temos que

$$a(\Box BFGA) = a(\Box BMJA) = a(\Box BHNE),$$

pois possuem mesmas bases e mesmas alturas. Como $a(\Box BFGA) = c^2$ então $a(\Box BHNE) = c^2$. Também temos que

$$a(\Box ACLK) = a(\Box ACIJ) = a(\Box CHND),$$

já que também possuem mesmas bases e mesmas alturas. Como $a(\Box ACLK) = b^2$ então $a(\Box CHND) = b^2$. Mas $a(\Box BCDE) = a(\Box BHNE) + a(\Box CHND)$ e $a(\Box BCDE) = a^2$.
Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Observando a figura, de $a(\Box BHNE) = c^2$ obtemos que $c^2 = am$, relação **(3)**, e de $a(\Box CHND) = b^2$ obtemos que $b^2 = an$, relação **(2)**.
Agora, nos triângulos ACH e BAH vale, respectivamente, que

$$b^2 = h^2 + n^2$$

$$c^2 = h^2 + m^2$$

Adicionando estas duas últimas igualdades, como $b^2 + c^2 = a^2$ temos

$$a^2 = 2h^2 + n^2 + m^2.$$

Como $a^2 = (m + n)^2$ então

$$(m + n)^2 = 2h^2 + n^2 + m^2$$

$$m^2 + n^2 + 2mn = 2h^2 + n^2 + m^2$$

e cancelando os termos iguais em ambos os lados, temos a relação **(1)**:

$$h^2 = nm.$$

Para a relação de número **(4)**, basta notar que a área do triângulo ABC pode ser calculada de duas maneiras distintas:

$$a(\triangle ABC) = ah \text{ ou } a(\triangle ABC) = bc.$$

Portanto, $ah = bc$, como queríamos demonstrar.

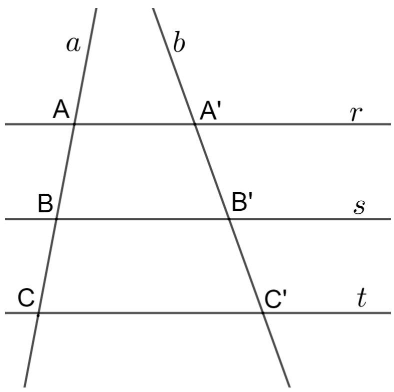
No próximo capítulo, seguiremos a trajetória a fim de podermos demonstrar o Teorema de Pitágoras pelo uso de semelhança em triângulos.

5 Teorema de Tales e sua demonstração

Sendo a semelhança entre triângulos uma consequência do teorema de Tales, vamos então ver o que diz este teorema.

Teorema 15 (de Tales) *Se um feixe de retas paralelas é intersetado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais.*

Este teorema também pode ser exposto da seguinte forma:
Considerando três retas paralelas r, s, t, cortadas por duas transversais a e b, conforme a figura abaixo:



tem-se que: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}, \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}, \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{C'B'}}{\overline{C'A'}}.$

Os livros didáticos atuais que trazem a demonstração fazem-na de maneira incompleta: prova-se para segmentos comensuráveis e afirma-se ser verdadeiro também para segmentos incomensuráveis. Uma possível explicação do motivo pelo qual este teorema não é demonstrado de forma completa, é o fato de exigir o conhecimento do conceito de segmentos comensuráveis e incomensuráveis, que não são abordados de forma explícita durante o Ensino Fundamental.

Definição 21 *Dois segmentos AB e CD são comensuráveis se existem um segmento u e dois inteiros m e n tais que $AB = mu$ e $CD = nv$.*

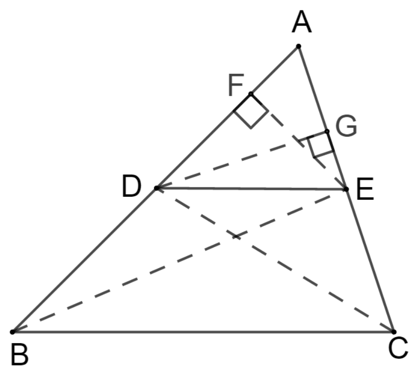
A demonstração usualmente encontrada em textos para o Ensino Fundamental, segue duas etapas:

1. Prova-se que, se $AB = BC$, então $A'B' = B'C'$.

2. Supondo que $AB \neq BC$, considera-se um segmento de comprimento u tal que: $AB = pu$ e $BC = qu$, sendo $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$.

No entanto, se $\dfrac{AB}{BC}$ não é racional, não existirá segmento que esteja contido um número inteiro p de vezes em AB e um número inteiro q de vezes em BC, isto é, AB e BC são incomensuráveis. Assim, a demonstração não aborda segmentos incomensuráveis. Para abordar estes tipos de segmentos, entramos no mundo dos números irracionais e de algumas noções de limites, assuntos considerados abstratos para um aluno de Ensino Fundamental. Porém, o livro de *Geometria Moderna* de Moise Downs (vol 1, capítulo 12, página 307) traz uma demonstração do teorema, a nível elementar, pela utilização do conceito de áreas.

Vamos então aproveitar o ambiente em que o Teorema de Pitágoras já foi provado por áreas e fazer o mesmo para o Teorema de Tales. Provemos, assim, que:
No triângulo ABC abaixo, sejam D e E pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ tais que $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Então $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.



Demonstração: Nos triângulos ADE e BDE considere $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ como suas respectivas bases. Então esses triângulos têm a mesma altura $\overline{FE}$. Pelo Teorema 12, a razão de suas áreas é igual a razão de suas bases, logo

$$\frac{a(\triangle BDE)}{a(\triangle ADE)} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$$

De modo análogo, nos triângulos ADE e CDE considere $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$ como suas respectivas bases. Esses triângulos tem mesma altura $\overline{DG}$, então

$$\frac{a(\triangle CDE)}{a(\triangle ADE)} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$$

Mas os triângulos BDE e CDE têm a mesma base $\overline{DE}$ e, ainda, a mesma altura, pois $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ são paralelas. Portanto,

$$a(\triangle BDE) = a(\triangle CDE)$$

Então $\dfrac{a(\triangle BDE)}{a(\triangle ADE)} = \dfrac{a(\triangle CDE)}{a(\triangle ADE)}$, assim

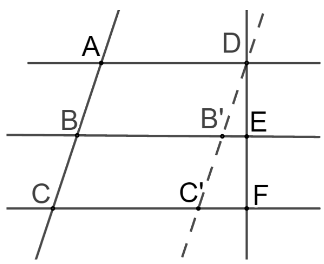
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}.$$

Adicionando 1 a ambos os membros desta última equação temos

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} + 1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} + 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{BD} + \overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CE} + \overline{AE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

como queríamos demonstrar.

O caso em que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ formam um trapézio, como na figura a seguir, recai-se no caso anterior mediante a construção de uma reta paralela a $\overline{AC}$ passando pelo ponto D.



O recíproco do Teorema de Tales não fica difícil de demonstrar, se utilizarmos também o conceito de áreas.

Teorema 16 *Se uma reta interseta dois lados de um triângulo e determina segmentos proporcionais a estes dois lados, então ela é paralela ao terceiro lado.*

Isto é, dado $\triangle ABC$, seja D um ponto entre A e B e seja E um ponto entre A e C. Se $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, então $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

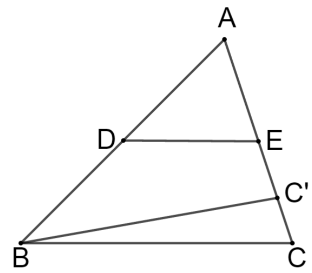


Figura 4: Teorema de Tales

Demonstração: Seja $\overleftrightarrow{BC'}$ uma reta passando por B, paralela a $\overleftrightarrow{DE}$, intersetando $\overleftrightarrow{AC}$ em C'. Pelo teorema anterior $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AE}}$. Como por hipótese $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, temos $\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AE}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ e então $AC' = AC$. Portanto, $C = C'$ e $\overleftrightarrow{DE}$ é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, como queríamos demonstrar.

Nota-se então que a demonstração do Teorema de Tales pode ser feita pelo método das áreas sem ter de utilizar conceitos ainda inacessíveis para o aluno. O único conceito que o aluno já precisa ter adquirido é o de área, mas esta noção começa a ser abordada já nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Quanto aos teoremas e propriedades sobre áreas que foram enunciados no capítulo 3 e utilizados aqui, acreditamos que se pode criar atividades que instiguem o aluno a pensar e a concluir tais resultados. Portanto, levando em consideração o texto da Base Nacional Comum Curricular, segundo o qual

> [...] é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos [...] situações precisam articular aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática. (BRASIL, 2018).

Parece então não haver uma justificativa plausível para que o teorema não seja demonstrado desta última forma (por áreas). O aluno, por si só, geralmente não consegue realizar uma ligação entre os conteúdos, passando a acreditar que a matemática é separada por "caixinhas", além de se acostumar a aceitar certas relações matemáticas sem se questionar acerca do surgimento e da validade destas. Acaba ocorrendo que o aluno pode até saber utilizar a relação, mas, se questionado do porque a relação é verdadeira, não saberá responder. A demonstração do Teorema de Tales pelo método das áreas vem então como uma proposta de prova completa e convincente.

Para o leitor que tenha curiosidade, a demonstração completa do Teorema de Tales por meio do uso de segmentos comensuráveis e incomensuráveis é apresentada no livro *Geometria* da Coleção Profmat, página 120, edição 2013.

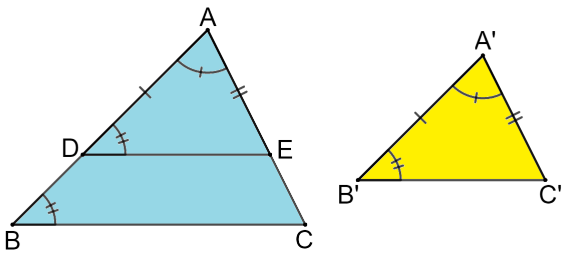
6 Semelhança de triângulos e a demonstração do Teorema de Pitágoras

A partir do Teorema de Tales temos a semelhança entre triângulos. Vamos então definir e estudar alguns teoremas e propriedades referentes a este assunto e, com os resultados, apresentaremos a demonstração do Teorema de Pitágoras mais comumente encontrada nos livros didáticos.

Definição 22 *Dois triângulos são semelhantes se os ângulos correspondentes forem congruentes e os lados correspondentes forem proporcionais. Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ semelhantes, escreve-se $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.*

Teorema 17 ***(AAA sobre semelhança:)*** *Dados dois triângulos correspondentes, se os ângulos correspondentes são congruentes, a correspondência é uma semelhança.*

Demonstração: Dada uma correspondência $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ entre dois triângulos, deve-se mostrar que se $\angle A \cong \angle A', \angle B \cong \angle B'$ e $\angle C \cong \angle C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, ou seja, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.



Sejam D e E pontos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, tais que $AD = A'B'$ e $AE = A'C'$. Pelo postulado 3.4 (Postulado LAL) segue que $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$. Portanto, $\angle ADE \cong \angle B'$. Como $\angle B' \cong \angle B$, segue que $\angle ADE \cong \angle B$. Temos agora duas situações: (1) Se $D = B$ então $\triangle ADE$ e $\triangle ABC$ são o mesmo triângulo. Logo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, então $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$. Ou ainda $\dfrac{AB}{A'B'} = 1$ e $\dfrac{AC}{A'C'} = 1$. Portanto, $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$. (2) Se D é diferente de B, então $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, pois $\angle ADE \cong \angle B$. Pelo teorema de Tales

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Como $AD = A'B'$ e $AE = A'C'$ segue que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

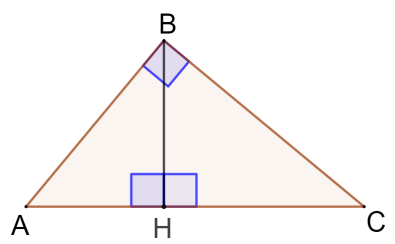
De modo análogo, prova-se que $\dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$.

Observação: Podemos escrever $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} = k$, onde k é a razão de semelhança.

Corolário 1 ***(AA)*** *Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

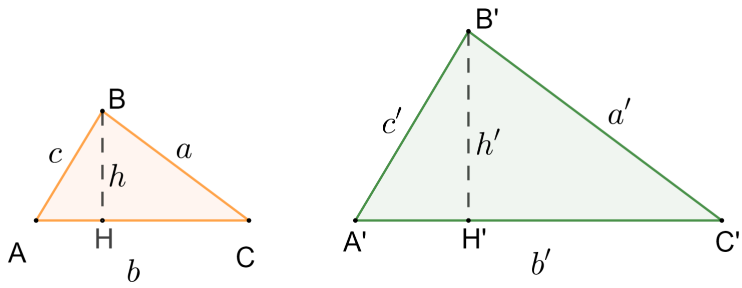
Teorema 18 *Em qualquer triângulo retângulo, a altura em relação à hipotenusa separa o triângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo original.*

Demonstração: Dado $\triangle ABC$ retângulo em B, seja $\overline{BH}$ sua altura em relação a $\overline{AC}$, conforme figura abaixo. Devemos provar que $\triangle AHB \sim \triangle ABC \sim \triangle BHC$.



Temos que $\angle AHB \cong \angle BHC$, pois ambos são retos, e $\angle A$ é comum aos triângulos AHB e ABC. Portanto, pelo Corolário AA, segue que $\triangle AHB \sim \triangle ABC$. De modo análogo, sendo $\angle BHC \cong \angle ABC$ e $\angle C$ comum aos triângulos ABC e BHC, temos que $\triangle ABC \sim \triangle BHC$, também pelo Corolário AA.

Teorema 19 *A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.*



Sejam $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ e A_1 e A_2 suas respectivas áreas, conforme figura acima. Da relação de semelhança, temos que

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Seja k o valor comum dessas três frações. Como $\angle A \cong \angle A'$ (da semelhança) e $\angle ADB \cong \angle A'D'B'$ (pois são retos), pelo Corolário AA, temos que $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$. Portanto,

$$\frac{b'}{b} = \frac{h'}{h} = k.$$

Então

$$b' = kb, h' = kh.$$

Mas

$$A_1 = \frac{bh}{2}, A_2 = \frac{b'h'}{2}.$$

Logo,

$$A_2 = \frac{b'h'}{2} = \frac{(kb)(kh)}{2} = \frac{k^2bh}{2}$$

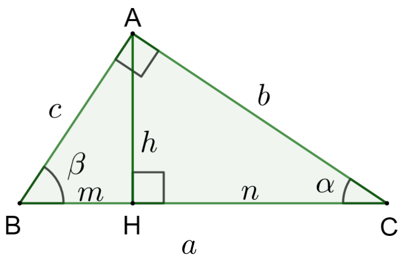
Portanto,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{k^2bh}{2}}{\frac{bh}{2}} = k^2.$$

Observação: Esta última igualdade pode ser usada também da seguinte maneira: o quadrado da razão de semelhança é o quadrado da razão de dois lados correspondentes quaisquer.

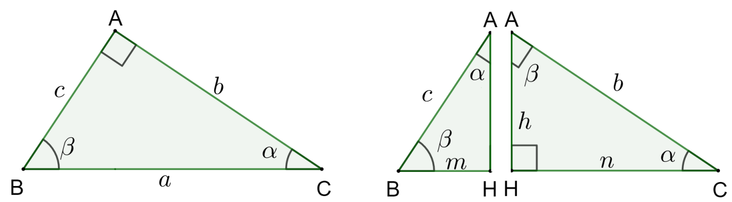
Apresentamos agora a demonstração do Teorema de Pitágoras com a utilização da semelhança de triângulos. Sendo o teorema uma das **Relações Métricas no Triângulo Retângulo**, provamos inicialmente as relações para então se provar a relação pitagórica.

Demonstração: Consideremos o triângulo retângulo ABC, conforme figura.



- b e c são as medidas dos catetos;
- a é a medida da hipotenusa;
- h é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- m é a medida da projeção ortogonal do cateto AB sobre a hipotenusa;
- n é a medida da projeção ortogonal do cateto AC sobre a hipotenusa;

O triângulo retângulo ABC pode ser separado em três triângulos semelhantes entre si:



Assim:

- O triângulo ABC é semelhante ao triângulo HBA, assim $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{m}$. Logo:

$$ah = bc \tag{1}$$

$$c^2 = am \tag{2}$$

$$ch = bm \tag{3}$$

- O triângulo ABC é semelhante ao triângulo HAC, assim $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{h}$. Logo:

$$b^2 = an \tag{4}$$

$$ah = bc \tag{5}$$

$$bh = cn \tag{6}$$

- O triângulo HBA é semelhante ao triângulo HAC, assim $\dfrac{c}{b} = \dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h}$. Logo:

$$bh = cn \tag{7}$$

$$ch = bm \tag{8}$$

$$h^2 = mn \tag{9}$$

Todas as equações enumeradas acima, a saber de (1) a (9), são as **Relações Métricas no Triângulo Retângulo**. Para demonstrar o Teorema de Pitágoras basta adicionar membro a membro as relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, obtendo:

$$b^2 + c^2 = an + am$$

Isolando a no segundo membro:

$$b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $n + m = a$, conclui-se que:

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

como queríamos demonstrar.

Notemos que essa demonstração utiliza vários argumentos algébricos e que o Teorema de Pitágoras é a última relação a ser provada, algo que foi feito bem diferente no capítulo 4.

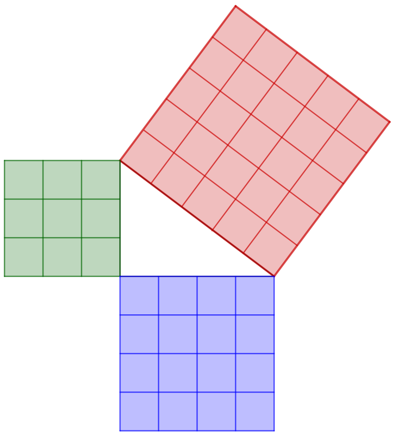
7 O Teorema de Pitágoras como equivalência de áreas

Já tratamos no capítulo 4 da demonstração da relação pitagórica por meio de áreas. A ideia deste capítulo é trazer o teorema como uma equivalência de áreas de figuras sobre os lados de um triângulo retângulo.

7.1 Generalização do teorema no plano

Dois tipos de demonstrações trazidas nos livros didáticos já foram citados e mostrados. Não mencionamos ainda que, no Ensino Fundamental, mais especificamente no nono ano, muitos livros didáticos abordam inicialmente o Teorema de Pitágoras como uma equivalência de áreas de quadrados da seguinte maneira:

Dada a figura a seguir, se considerada a área de cada quadradinho como uma unidade de medida, teremos que a área do quadrado de cor verde é constituída por 9 quadradinhos, a área do quadrado de cor azul é constituída por 16 quadradinhos, e a área do quadrado vermelho é constituída por 25 quadradinhos.



Notemos que $25 = 9 + 16$, ou seja, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos quadrados menores. Como $25 = 5^2, 9 = 3^2$ e $16 = 4^2$, podemos escrever a igualdade $25 = 9 + 16$ da seguinte maneira: $5^2 = 3^2 + 4^2$. Repare que 5, 3 e 4 são as medidas dos lados dos quadrados que estão sobre os lados do triângulo, logo, são as medidas dos lados do triângulo retângulo.

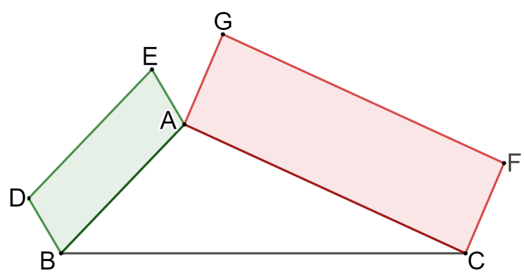
Esta relação entre as medidas dos quadrados dos lados do triângulo retângulo é válida para todo triângulo retângulo e é o Teorema de Pitágoras:

Teorema 20 (de Pitágoras) *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos seus catetos.*

Essa equivalência de áreas não ocorre somente para quadrados sobre os lados do triângulo retângulo, mas vale para figuras quaisquer sobre seus catetos. Este fato não é abordado, discutido ou mesmo questionado nos livros didáticos de matemática para o Ensino Fundamental que observamos. Uma atividade que acreditamos ser produtiva, quando possível, é o uso do aplicativo Geogebra. Os desenhos podem ser construídos e o aluno consegue visualizar a equivalência de áreas. Vamos então fazer esta demonstração e uma breve discussão.

Iniciaremos com uma generalização do Teorema de Pitágoras, uma proposição que foi enunciada e demonstrada por Pappus de Alexandria [3], válida para qualquer triângulo. Na sequência, seguem provas para outros polígonos e figuras.

Proposição 1 *Seja ABC um triângulo qualquer. Sobre dois de seus lados, construamos dois paralelogramos quaisquer, $\square ABDE$ e $\square ACFG$. É possível construir, sobre o outro lado deste triângulo, um terceiro paralelogramo, $BCHI$, cuja área é igual a soma das áreas dos outros dois paralelogramos construídos inicialmente.*

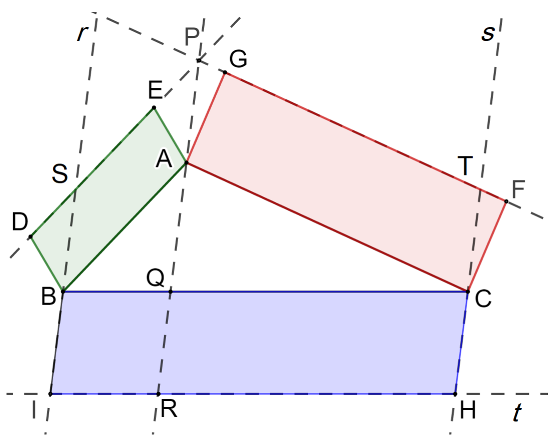


Demonstração: Começemos construindo o terceiro paralelogramo seguindo os passos:

[3]Pappus de Alexandria (c.290 - 350) matemático grego do período helenístico, foi um dos últimos grandes matemáticos gregos da antiguidade.

- Seja P o ponto de interseção do prolongamento dos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$;
- Seja Q a interseção da reta $\overleftrightarrow{PA}$ com o segmento $\overline{BC}$;
- Seja R em $\overleftrightarrow{PA}$ tal que $PA = QR$;
- Construa por R uma reta t paralela a BC;
- Construa também retas r e s paralelas a $\overleftrightarrow{PA}$ passando por B e C, respectivamente;
- Sejam I e H os pontos de interseção da reta t com r com e s, respectivamente.

$\square BCHI$ é o quadrilátero que irá satisfazer o enunciado.



Sejam S o ponto de interseção da reta r e $\overline{DE}$ e T o ponto de interseção da reta s com $\overline{FG}$. Temos que

$$a(\square BQRI) = a(\square ABSP)$$

pois ambos possuem a mesma base, $AP = QR$, e mesma altura, já que estão situados em duas retas paralelas. Os triângulos BDS e AEP são congruentes, então

$$a(\square ABDE) = a(\square ABSP)$$

pois

$$a(\square ABDE) = a(\triangle BDS) + a(\square ABSE)$$

e

$$a(\square ABSP) = a(\triangle AEP) + a(\square ABSP).$$

Logo,

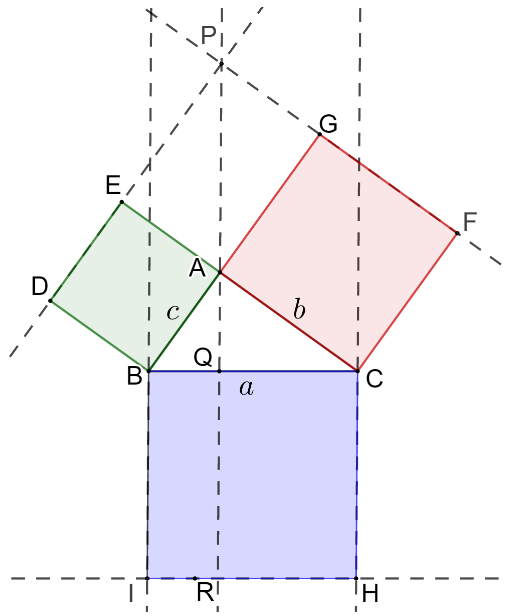
$$a(\square ABDE) = a(\square ABSP) = a(\square BQRI).$$

Analogamente, podemos mostrar que $a(\square ACFG) = a(\square CQRH)$. Dessa forma,

$$a(\square ABDE) + a(\square ACFG) = a(\square BQRI) + a(\square CQRH) = a(\square BCHI).$$

Se na proposição anterior, o triângulo ABC é retângulo e construímos quadrados sobre os catetos do triângulo, então a construção de Pappus originará também um quadrado sobre a hipotenusa, e teremos o teorema de Pitágoras como equivalência de áreas de quadrados, que é justamente a maneira como alguns livros abordam o teorema. A partir deste resultado, muitos livros didáticos têm trazido a relação pitagórica da seguinte forma:

A soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.



Se a medida da hipotenusa é a e se b e c são as medidas dos catetos, o enunciado é equivalente a $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração: Devemos mostrar que $BCHI$ é realmente um quadrado. Iniciamos mostrando que $QR = BC$. Por construção $\square AEPG$ é um retângulo e os triângulos GPA e ABC são congruentes, assim $BC = AP$ e como, por construção, $QR = AP$, segue que $QR = BC$.

Mostremos agora que o ângulo $\angle BQR$ é reto.De fato, observe que $\angle BAQ \cong \angle PAG$, pois são opostos pelo vértice, e que $\angle ABQ \cong \angle GPA$ (os triângulos ABC e GPA são congruentes). Logo, $\angle AQB \cong \angle AGP$, que é reto por construção. Como $\angle BQR$ e $\angle AQB$ são suplementares, segue que $\angle BQR$ é reto. Por construção BI, CH e QR são paralelos, logo podemos concluir que o paralelogramo $BCHI$ é um quadrado. Aplicando aos três quadrados a relação de Pappus, obtemos

$$a(\square BCHI) = a(\square ACFG) + a(\square ABDE),$$

como queríamos demonstrar.

Proposição 2 *Se construídos triângulos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados do triângulo retângulo são correspondentes aos lados dos triângulos semelhantes que os contém, então a área do triângulo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.*

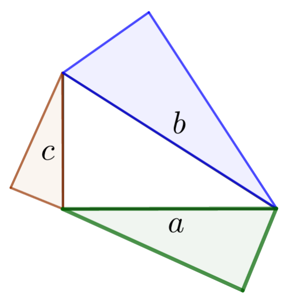


Figura 5: Triângulo semelhantes sobre os catetos do triângulo retângulo

Demonstração: Sejam A_a, A_b e A_c as áreas dos triângulos semelhantes construídos sobre a hipotenusa a e dos catetos b e c, como na figura acima. Pelo Teorema 19, segue que

$$\frac{A_b}{A_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \frac{A_c}{A_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

de onde obtém-se

$$A_b = \frac{b^2}{a^2} \cdot A_a, A_c = \frac{c^2}{a^2} \cdot A_a$$

Somando as duas últimas expressões

$$A_b + A_c = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \cdot A_a$$

Utilizando a relação pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$, temos que

$$A_b + A_c = \frac{a^2}{a^2} \cdot A_a = A_a$$

Portanto,

$$A_b + A_c = A_a$$

Proposição 3 *A área de um polígono regular de n lados construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual a soma das áreas dos polígonos regulares de n lados construídos sobre seus catetos.*

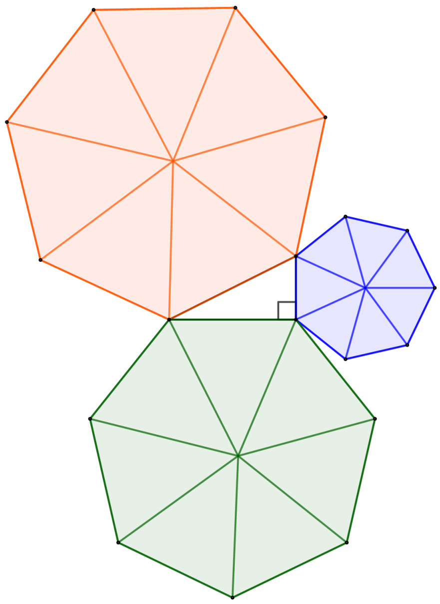


Figura 6: Polígono de sete lados sobre os lados do triângulo retângulo

Demonstração: Considere um triângulo retângulo em que em cada um de seus lados foram construídos polígonos regulares de n lados, conforme a figura acima. Pode-se decompor cada polígono regular em triângulos cujos vértices são: dois vértices consecutivos do polígono e o seu centro. Sendo S_a, S_b e S_c as áreas dos polígonos regulares construídos sobre os lados do triângulo retângulo, temos

$$S_a = nA_a, S_b = nA_b, S_c = nA_c$$

onde A_a, A_b e A_c são, respectivamente, as áreas de cada triângulo em que foi decomposto o polígono regular, construído sobre a hipotenusa de medida a e catetos de medidas b e

c. Então,

$$S_b + S_c = nA_b + nA_c = n(A_b + A_c) = nA_a = S_a$$

uma vez que, pela Proposição 2, temos $A_b + A_c = A_a$.

Definição 23 *Dois polígonos $A_1A_2A_3...A_n$ e $B_1B_2B_3...B_n$ (onde $A_i, B_i, i = 1, ..., n$ indicam seus vértices) são semelhantes se seus ângulos correspondentes são congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais, ou seja, $\angle A_1 \cong \angle B_1, \angle A_2 \cong \angle B_2, ..., \angle A_n \cong \angle B_n$ e $\dfrac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B_1B_2}} = \dfrac{\overline{A_2A_3}}{\overline{B_2B_3}} = ... = \dfrac{\overline{A_nA_1}}{\overline{B_nB_1}} = k$, onde k é a constante chamada razão de semelhança.*

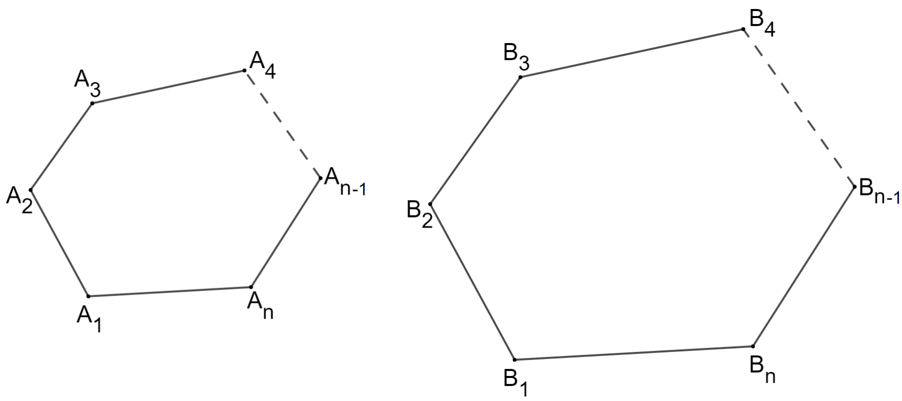


Figura 7: Polígono de n lados

Teorema 21 *Se dois polígonos são semelhantes, então eles possuem áreas proporcionais aos quadrados da razão das medidas entre dois lados congruentes quaisquer (razão de semelhança), ou seja, se S_1 é a área do polígono $A_1A_2A_3...A_n$ e S_2 a área de $B_1B_2B_3...B_n$, então $\dfrac{S_1}{S_2} = k^2$, com k a razão de semelhança.*

A demonstração deste último teorema pode ser encontrada no livro *Medida e forma em Geometria*, de Elon Lages Lima, 1991, página 49.

Proposição 4 *Se construídos polígonos semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo e se os lados do triângulo retângulo são lados congruentes aos lados dos polígonos semelhantes que os contém, então a área do polígono construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos polígonos construídos sobre os catetos.*

Demonstração: Considerando que os polígonos construídos sobre a hipotenusa e os catetos são semelhantes e S_a, S_b e S_c são suas respectivas áreas, devemos mostrar que $S_a = S_b + S_c$.

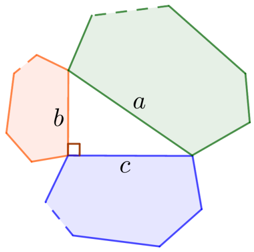


Figura 8: Polígonos não regulares semelhantes sobre os lados de um triângulo retângulo

Como os polígonos são semelhantes e os lados do triângulo são lados correspondentes dos polígonos, pelo teorema 21, segue que

$$\frac{S_b}{S_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2, \frac{S_c}{S_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

Somando membro a membro estas duas igualdades, obtém-se

$$\frac{S_b}{S_a} + \frac{S_c}{S_a} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{S_b + S_c}{S_a} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Pela relação pitagórica,

$$\frac{S_b + S_c}{S_a} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Portanto,

$$S_a = S_b + S_c.$$

Proposição 5 *Se construídos semicírculos sobre os lados de um triângulo retângulo, então a área do semicírculo construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos.*

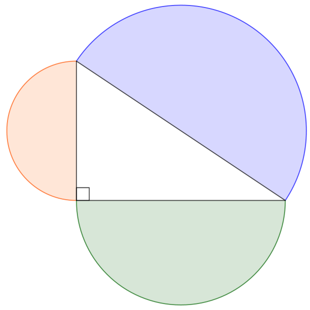


Figura 9: Semicírculos sobre os lados de um triângulo retângulo

Demonstração: Sejam A_a, A_b e A_c as áreas dos semicírculos construídos sobre a hipotenusa e sobre os catetos, respectivamente. Tem-se que

$$A_a = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2\pi}{8};$$

$$A_b = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2\pi}{8};$$

$$A_c = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2\pi}{8}.$$

Somando as duas últimas igualdades,

$$A_b + A_c = \frac{b^2\pi}{8} + \frac{c^2\pi}{8} = \frac{(b^2+c^2)\pi}{8}.$$

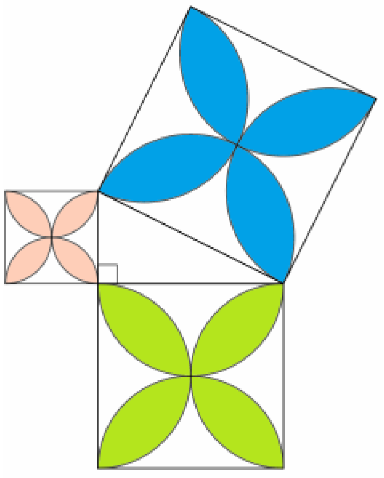
Pelo Teorema de Pitágoras, como $b^2 + c^2 = a^2$

$$A_b + A_c = \frac{a^2\pi}{8} = A_a.$$

Portanto,

$$A_b + A_c = A_a.$$

Mostramos então que a equivalência de áreas vale também para qualquer polígono ou mesmo semicírculos. Na realidade, qualquer que seja a figura geométrica sobre os lados do triângulo retângulo, desde que sejam semelhantes, a equivalência de áreas ocorre. As figuras abaixo são alguns exemplos que não serão demonstrados aqui:



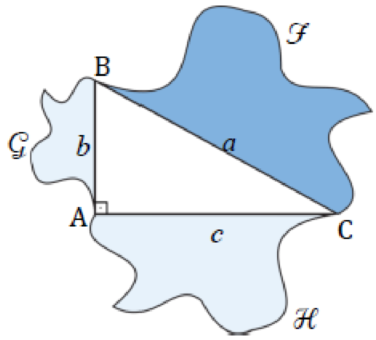


Figura à esquerda: interseção de semicírculos sobre os catetos e a hipotenusa, sendo os semicírculos de mesma medida dos catetos e da hipotenusa, respectivamente.

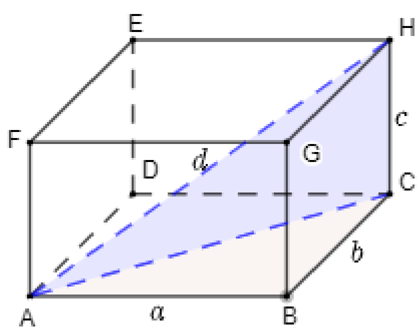
Figura à direita: Figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

7.2 O Teorema de Pitágoras no espaço

Uma extensão do teorema ocorre para uma figura tridimensional, partindo da relação entre as arestas e a diagonal de um paralelepípedo retângulo.

Proposição 6 *Em um paralelepípedo retângulo, a soma dos quadrados das arestas que se intersetam em um dos seus vértices é igual ao quadrado da diagonal.*

Demonstração: Consideremos um paralelepípedo retângulo como na figura abaixo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC temos $AC = a^2 + b^2$. Aplicando também ao triângulo ACH, temos $d^2 = (AC)^2 + c^2$. Substituindo $AC = a^2 + b^2$ obtemos

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

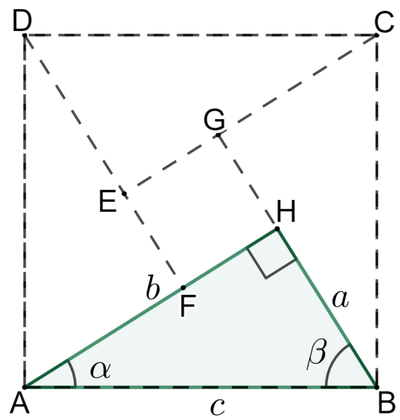
8 Um pouco sobre o livro *The Pytagorean Proposition*

Não poderíamos deixar de mencionar o livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis, que traz várias demonstrações do teorema de Pitágoras. Este livro foi publicado pela 1ª vez em 1927 com 230 demonstrações. Em 1940 foi publicada a 2ª edição, trazendo 370 diferentes provas do teorema, agrupadas e organizadas; as demonstrações estão separadas em 109 provas algébricas, 255 geométricas, 4 quaternárias e 2 dinâmicas.

As provas algébricas são baseadas nas relações métricas dos triângulos retângulos, algumas utilizando círculos e outras diferentes polígonos. As provas geométricas são baseadas na comparação de áreas. De um modo geral, todas as provas algébricas e geométricas, baseiam-se no Postulado das Paralelas, isto é, valem apenas na geometria euclidiana. Dentre as várias observações, Loomis nota que não é possível provar o teorema com argumentos trigonométricos, pois a igualdade fundamental da Trigonometria, $sen^2x + cos^2x = 1$, já é um caso particular do teorema.

Apresentaremos agora algumas demonstrações que estão no livro citado. Estas foram escolhidas por não serem geralmente publicadas. Mesmo seguindo a prova do livro, vários detalhes foram adicionados como uma complementação.

(1) Demonstração número Trinta e quatro - página 49



Considere o triângulo ABH retângulo em H, com $AB = c, BH = a, AH = b, med(\angle A) = \alpha$ e $med(\angle B) = \beta$. Note que $\alpha + \beta = 90°$. Façamos a seguinte construção:

- $\overline{AD}$ perpendicular a $\overline{AB}$ tal que $AD = AB$;
- $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{AB}$ tal que $BC = AB$;
- $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{BC}$ tal que $CD = AB$;
- $\overline{DF}$ perpendicular a $\overline{AH}$;
- $\overline{CE}$ perpendicular a $\overline{DF}$ e
- $\overline{BG}$ perpendicular a $\overline{CE}$.

No triângulo BCG, como $\overline{BC}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, então $med(\angle ABC) = 90°$. Mas

$$med(\angle ABC) = med(\angle ABH) + med(\angle HBC)$$

$$90° = \beta + med(\angle HBC)$$

então

$$med(\angle HBC) = \alpha. \tag{10}$$

Por construção já temos que $BC = AB$. Como $\overline{BG}$ é perpendicular a $\overline{CE}, med(\angle BGC) = 90°$. Pelo teorema da soma dos ângulos internos,

$$med(\angle BCG) + med(\angle CGB) + med(\angle GBC) = 180°$$

$$med(\angle BCG) + 90° + \alpha = 180°$$

logo,

$$med(\angle BCG) = \beta. \tag{11}$$

Portanto, de (10) e (11) e pelo Postulado ALA, $\triangle BCG \cong \triangle ABH$.

No triângulo CDE, como $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, então

$$med(\angle BCD) = 90°$$

$$med(\angle BCD = med(\angle BCG) + med(\angle GCD)$$

$$90° = \beta + med(\angle GCD)$$

então

$$med(\angle GCD) = \alpha \tag{12}$$

Por construção já temos que $CD = AB$. Como $\overline{CE}$ é perpendicular a $\overline{DF}$, $med(\angle DEC) = 90°$.

Pelo teorema da soma dos ângulos internos,

$$med(\angle CDE) + med(\angle DEC) + med(\angle ECD) = 180°$$

$$med(\angle CDE) + 90° + \alpha = 180°$$

logo,

$$med(\angle CDE) = \beta. \tag{13}$$

Portanto, de (12) e (13) e pelo Postulado ALA, $\triangle CDE \cong \triangle ABH$.

No triângulo DAF, como $\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, então $med(\angle DAB) = 90°$, mas

$$med(\angle DAB) = med(\angle DAH) + med(\angle HAB)$$

$$90° = med(\angle DAH) + \alpha$$

então

$$med(\angle DAH) = \beta \tag{14}$$

Por construção já temos que $AD = AB$. Como $\overline{DF}$ é perpendicular a $\overline{AH}$, $med(\angle AFD) = 90°$.

Pelo teorema da soma dos ângulos internos,

$$med(\angle DAF) + med(\angle AFD) + med(\angle FDA) = 180°$$

$$\beta + 90° + med(\angle FDA) = 180°$$

logo,

$$med(\angle FDA) = \alpha. \tag{15}$$

Portanto, de (14) e (15) e pelo Postulado ALA, $\triangle DAF \cong \triangle ABH$.

O quadrilátero $ABCD$ é um quadrado, pois $AB = BC = CD = DA$ e $\angle ABH, \angle BCD, \angle CDA$ e $\angle DAB$ são todos ângulos retos. Também o quadrilátero $FHGE$ é um quadrado, pois, das congruências entre triângulos mostradas acima, temos

$$AH = BG = CE = DF = b, BH = CG = DE = AF = a$$

então

$$AH = AF + FH \Rightarrow B = a + FH \Rightarrow FH = b - a$$

$$BG = BH + HG \Rightarrow b = a + HG \Rightarrow HG = b - a$$

$$CE = CG + GE \Rightarrow b = a + GE \Rightarrow GE = b - a$$

$$DF = DE + EF \Rightarrow b = a + EF \Rightarrow EF = b - a$$

logo,

$$FH = HG = GE = EF = b - a$$

e ainda, de $\overline{DF}$ perpendicular a $\overline{AH}$, $\overline{CE}$ perpendicular a $\overline{DF}$ e $\overline{BG}$ perpendicular a $\overline{CE}$, então $\angle HFE, \angle FEG$ e $\angle EGH$ são todos retos. O $\angle GHF$ é reto porque é suplementar do $\angle AHB$. Agora, pelo Postulado da Adição de Área,

$$a(\square ABCD) = a(\triangle ABH) + a(\triangle BCG) + a(\triangle CDE) + a(\triangle DAF) + a(\square FHGE).$$

Como os triângulos são todos congruentes, então possuem mesma área, a saber $\dfrac{ab}{2}$. Assim,

$$a(\square ABCD) = 4a(\triangle ABH) + a(\square FHGE)$$

$$h^2 = 4\frac{ab}{2} + (b-a)^2$$
$$h^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2$$
$$h^2 = b^2 + a^2.$$

Muitas demonstrações presentes no livro utilizam a equidecomponibilidade, que não é provada ou mesmo citada na obra, pois na época a divisão de figuras para gerar outras figuras era considerado algo intuitivo, não se exigindo então demonstrações para isso. Vamos então definir este conceito de decomponibilidade e demonstrar a equicomposição, podendo então utilizá-los em outras provas.

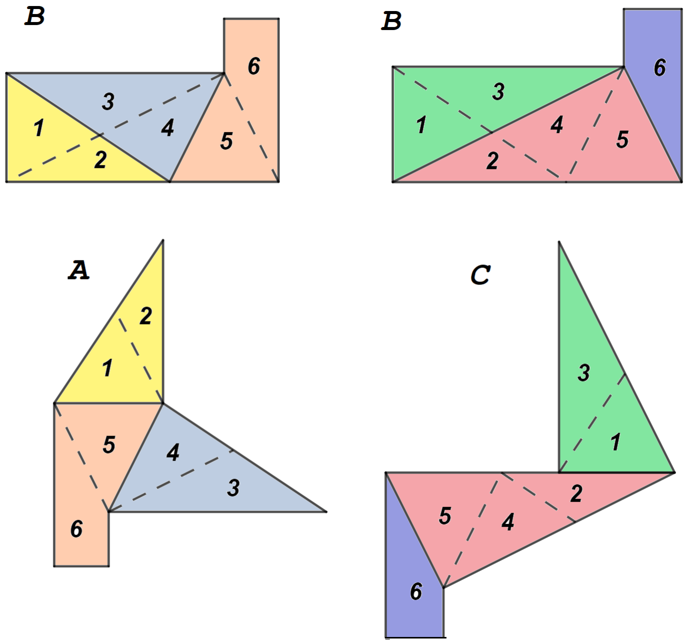
Definição 24 *Duas figuras se chamam **equicompostas** se, cortando de um certo modo uma delas em um número finito de partes, conseguir-se (ao dispor estas partes de outra forma) compor a segunda figura.*

Método de divisão: Utilizado para calcular área de polígonos. O método consiste em tentar dividir o polígono em um número finito de partes, de modo que as mesmas possam compor um polígono mais simples (para o qual sabe-se calcular a área). Por exemplo, para calcular a área de um paralelogramo pode-se recortá-lo e formar um retângulo, este terá mesma base e mesma altura do paralelogramo, logo possuem mesma área. Assim o paralelogramo e o retângulo são equicompostos e, consequentemente, equivalentes.

Logo polígonos equicompostos quaisquer são equivalentes. Vejamos agora alguns lemas para provarmos o recíproco, isto é, que polígonos equivalentes são equicompostos.

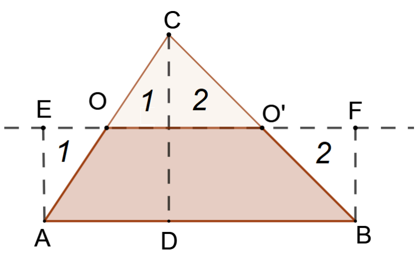
Lema 1 *Se a figura A é equicomposta com a figura B, e a figura B é equicomposta com a figura C, as figuras A e C também são equicompostas.*

De fato, considerando as figuras abaixo como exemplo, tracemos na figura B as linhas tracejadas que dividem-a em partes que irão compor a figura A; tracemos ainda linhas que dividem a figura B em partes que compõem a figura C. Ambas as linhas juntas dividem a figura B em partes mais pequenas, de forma que tais peças podem tanto formar a figura A quanto a figura C. Portanto, as figuras A e C são equicompostas.



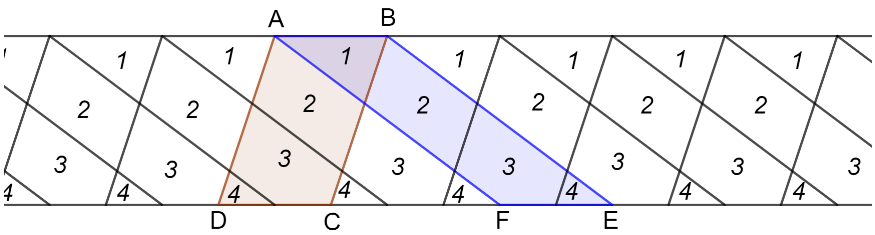
Lema 2 *Todo triângulo é equicomposto com algum retângulo.*

De fato, conforme figura abaixo, seja $\overline{AB}$ o maior lado do triângulo ABC e $\overline{CD}$ a altura em relação ao vértice C. Então o ponto D está entre A e B (de outra maneira um dos ângulos $\angle A$ ou $\angle B$ seria obtuso e o lado $\overline{AB}$ não seria o maior). Na metade da altura $\overline{CD}$ tracemos uma reta paralela a $\overline{AB}$ e tracemos desta reta as perpendiculares $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$. Então obtemos o retângulo $AEFB$ que é equicomposto com o triângulo ABC, pois os triângulo numerados 1 (e 2) são iguais. Cada uma das figuras ABC e $AEFB$ consistem na união de um trapézio, um triângulo numerado 1 e um triângulo numerado 2.



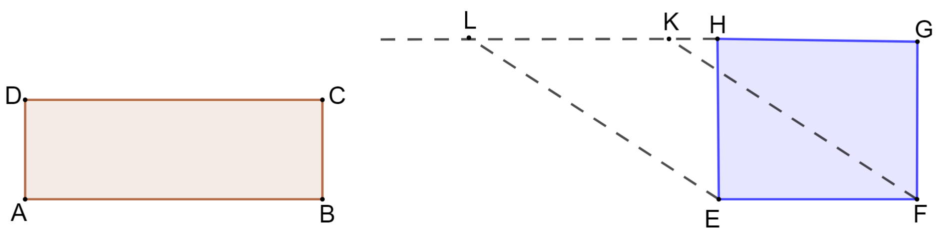
Lema 3 *Dois paralelogramos de mesma base e mesma área são equicompostos.*

Sejam $ABCD$ e $ABEF$ dois paralelogramos de mesma base AB e mesma área. Então as alturas desses paralelogramos tem a mesma medida, isto é, $\overline{DC}$ e $\overline{EF}$ estão sobre uma mesma reta. Tracemos na reta $\overleftrightarrow{AB}$ uma série de segmentos iguais a $\overline{AB}$ e por cada ponto da divisão tracemos retas paralelas aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AF}$. Então a faixa entre as linhas paralelas é dividida em uma série de polígonos. Enumeremos estes polígonos, conforme a figura. Notemos que cada um dos paralelogramos $ABCD$ e $ABEF$ contém uma peça de número 1, uma peça de número 2, uma peça de número 3 e uma peça de número 4. Consequentemente, esses paralelogramos são equicompostos.



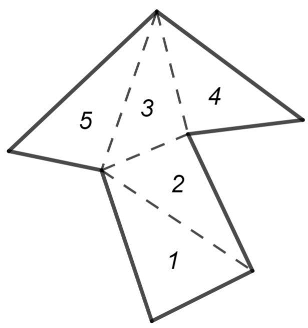
Lema 4 *Dois retângulos de mesma área são equicompostos.*

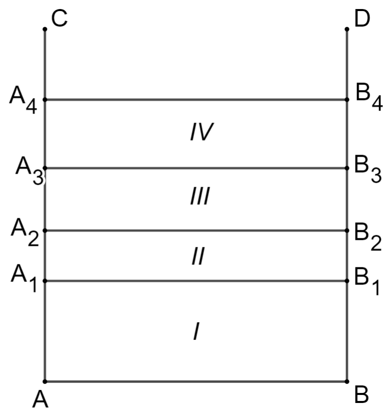
Sejam $ABCD$ e $EFGH$ dois retângulos de mesma área. Prolonguemos $\overline{HG}$ e marquemos nesta reta o ponto L tal que $EL = AB$. Traçando $LK = EF$ sobre a reta $\overleftrightarrow{HG}$, com K entre L e H, construímos o paralelogramo $EFKL$. Este paralelogramo é equivalente ao retângulo $EFGH$ (e ao retângulo $ABCD$). Do lema 3 segue que os paralelogramos $EFGH$ e $EFKL$, que possuem $\overline{EF}$ como lado comum, são equicompostos. Mas os paralelogramos $ABCD$ e $EFKL$ também possuem um lado igual, $AB = EL$, então (pelo lema 8.3) são também equicompostos. Por fim, sendo o paralelogramo $EFKL$ equicomposto com os retângulos $ABCD$ e $EFGH$, então, pelo lema 1, estes retângulos são equicompostos.



Lema 5 *Todo polígono é equicomposto com um certo retângulo.*

Todo polígono pode ser dividido em um número finito de triângulos. Conforme figura abaixo, numerados os triângulos, escolhamos um segmento arbitrário $\overline{AB}$ e sobre seus extremos levantemos as perpendiculares $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Tracemos $\overline{A_1B_1}$, paralelo a $\overline{AB}$, tal que a área do retângulo ABB_1A_1 seja a mesma do triângulo 1. Então o triângulo 1 e o retângulo ABB_1A_1 (I) são equicompostos. De fato, o triângulo 1 é equicomposto com um certo retângulo (lema 2) que, por sua vez, é equicomposto com o retângulo 1, o qual tem a mesma área (lema 4), por isso o triângulo 1 e o retângulo 1 são equicompostos. Em seguida, construamos A_2B_2 paralelo a $\overline{AB}$, de tal modo que o retângulo $A_1B_1B_2A_2$, identificado com II, seja equivalente com triângulo 2. Então este triângulo e o retângulo II são equicompostos. Então construímos o retângulo III, que será equicomposto com o triângulo 3, e assim por diante. Os retângulos construídos I, II, III, ... juntos formam um retângulo que, segundo sua construção, é equicomposto com o polígono inicial.





Teorema 22 *(de Bolyai-Gerwien) Dois polígonos de mesma área são equicompostos.*

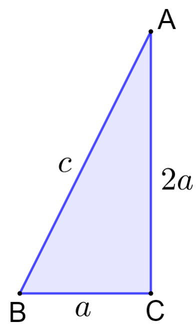
Demonstração: De acordo com o lema 5 cada um dos polígonos é equicomposto com um certo retângulo. Obtendo dois retângulos, cada um equicomposto com um dos polígonos, estes têm mesma área e, consequentemente, são equicompostos (lema 4). Portanto, pelo lema 1, os dois polígonos iniciais são equicompostos.

(2) Demonstração número dois - página 100

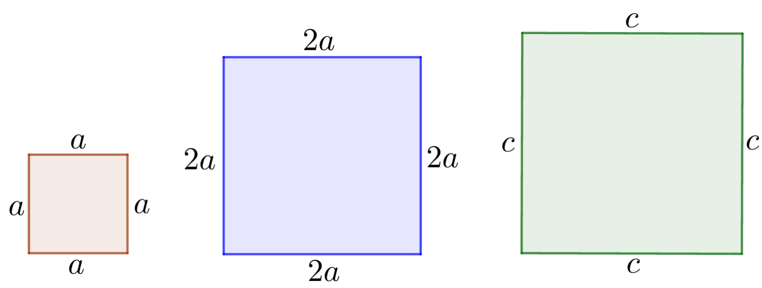
Esta na verdade não é uma prova mas sim um verificação por recorte da validade da relação de Pitágoras para um triângulo em particular. Acreditamos que estas verificações podem ser realizadas como atividades em sala de aula.

Construa um triângulo ABC da seguinte forma:

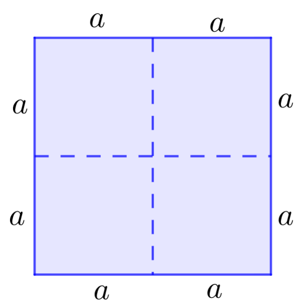
- Trace um segmento $BC = a$;
- Trace um segmento perpendicular a $\overline{BC}$ passando por C tal que este tenha o dobro de $\overline{BC}$, isto é, $AC = 2a$;
- Ligue os pontos A e B formando o segmento $AB = c$.



Construa três quadrados, cada um deles com os lados medindo $a, 2a$ e c. Em seguida, recorte-os:

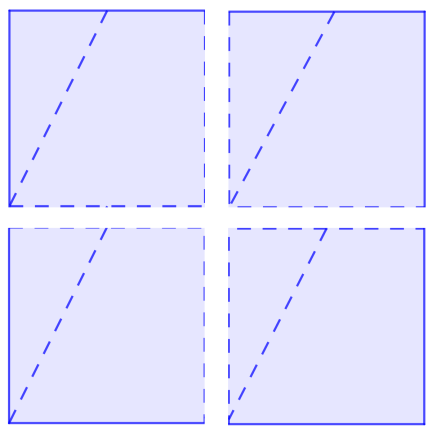


Enumere com 1 o quadrado de lados medindo a e guarde-o. No quadrado de lados medindo $2a$, marque os quatro pontos médios e dobre ligando estes pontos médios:

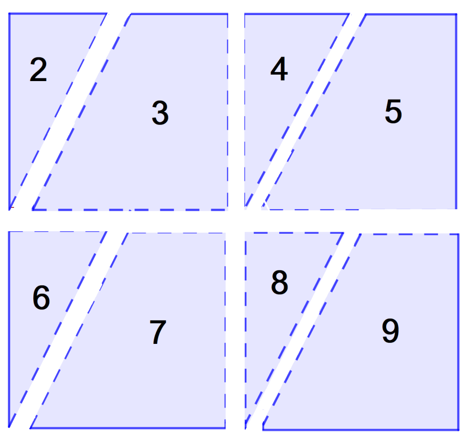


Recorte os quatro quadrados que surgiram a partir das dobras. Note que os novos quatro quadrados tem lados medindo a.

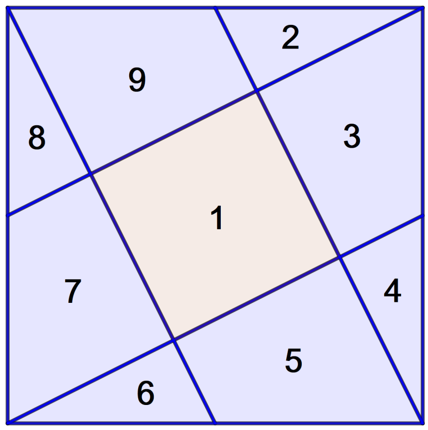
Marque novamente apenas um dos seus pontos médios e dobre, conforme indicado na figura, ligando o ponto médio a um dos vértices opostos:



Recorte estas dobras e numere as peças de 2 a 9 (pois a peça 1 já está separada):



Agora, com as peças de números 1 até 9, tente preencher o quadrado de lado medindo c. As nove peças preenchem o quadrado de lados c da seguinte maneira:

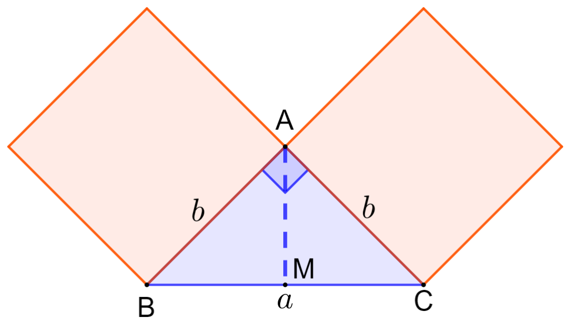


Portanto, a área do quadrado sobre o lado $\overline{AB}$ é igual a soma das áreas dos quadrados sobre os lados $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.

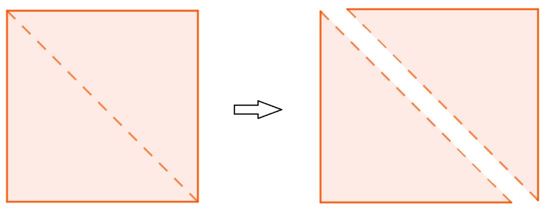
(3)Demonstração número sete - página 103

Trata-se de uma verificação para o caso de um triângulo retângulo isósceles. Construa um triângulo retângulo isósceles da seguinte maneira:

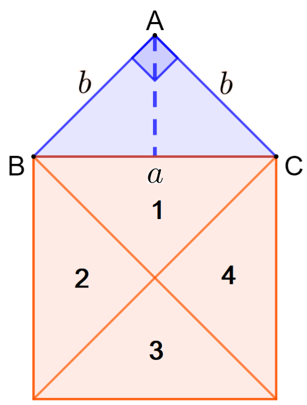
- Trace a base $BC = a$;
- Marque o ponto médio M;
- Trace um segmento $\overline{AM}$ perpendicular à base passando pelo ponto médio, tal que este segmento seja a metade de a;
- Ligue o ponto A a B e C, gerando os lados $AB = AC = b$
- Construa sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ quadrados de lados $AB = AC = b$.



Recorte os quadrados, dobre em uma das diagonais e recorte nesta dobra:



Numere as peças de 1 a 4. Tente encaixar as quatro peças que surgiram do recorte sobre o lado $\overline{BC}$, formando um quadrado. Uma possibilidade é mostrada na figura abaixo:

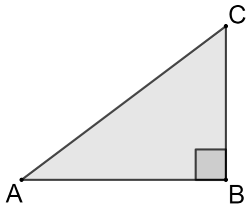


Portanto, a área do quadrado de lado BC é igual a soma das áreas dos quadrados de lados AB e AC.

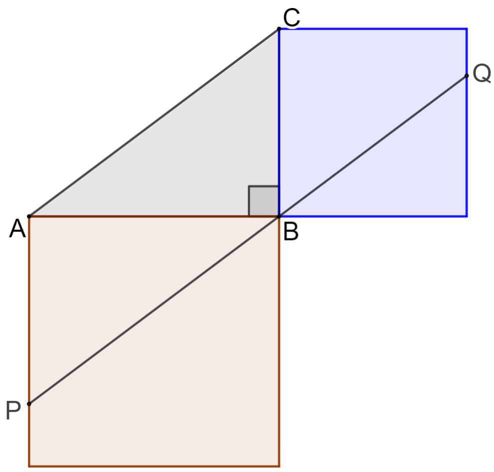
(4) Demonstração número doze - página 107

Construa um triângulo retângulo ABC qualquer:

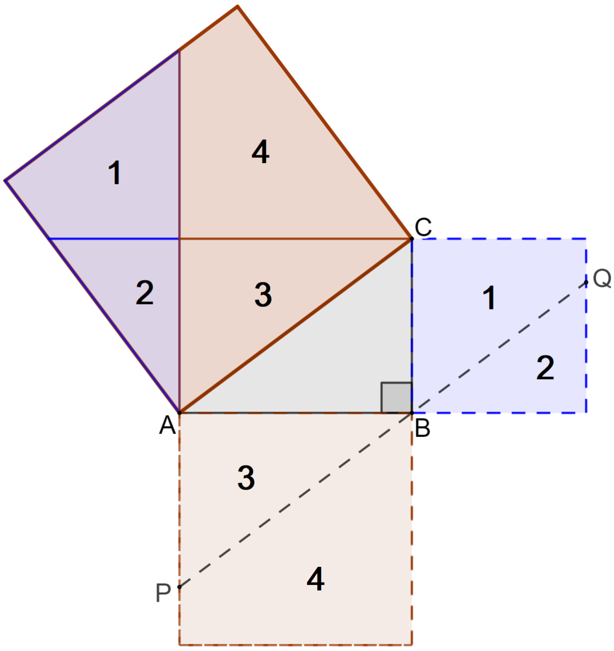
- Trace um segmento $\overline{AB}$, com uma medida qualquer;
- Trace uma perpendicular $\overline{BC}$, também com uma medida qualquer;
- Ligue os pontos A e C.



Sobre os lados AB e BC construa quadrados. Em seguida, trace o segmento $\overline{PQ}$ paralelo ao lado AC.



Recorte os dois quadrados, inclusive as linhas PB e BQ. Enumere as peças e tente encaixar estas formando um quadrado sobre o lado AC.
Segue a montagem:



Novamente, a área do quadrado de lado AC é igual a soma das áreas dos quadrados de lados AB e AC.

9 Relação entre o Teorema de Pitágoras e o Postulado das Paralelas

Até aqui, todas as demonstrações do Teorema de Pitágoras tomaram como base o Postulado das Paralelas, parecendo essencial o uso deste. Na realidade o Teorema de Pitágoras é válido não somente na Geometria Euclidiana (geometria estudada até agora), mas também na Geometria Elíptica, em que não existem paralelas e a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°; e na Geometria Hiperbólica, em que existem infinitas retas paralelas por um ponto dado à uma reta dada e a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180°. Mais ainda, o Postulado das Paralelas na forma mais conhecida é chamado de Axioma de Playfair:

Por um ponto dado, somente uma reta pode ser traçada paralela a uma reta dada.

Assim, o Postulado das Paralelas escrito como acima caracteriza a Geometria Euclidiana. Como já mencionado em seções anteriores, este Postulado é também conhecido como o "V Postulado de Euclides" que afirma:

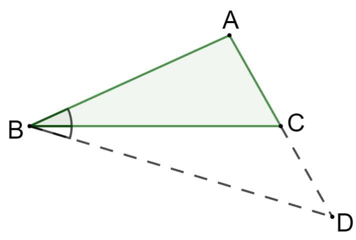
Se uma reta ao cortar outras duas forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então as duas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.

Notemos que esta afirmação não faz menção a respeito de paralelas. Sendo assim, o Teorema de Pitágoras, que vale em geometrias euclidianas e não euclidianas, não necessita da existência de paralelas.

Portanto, deve haver como mostrar que o teorema de Pitágoras implica o Postulado das Paralelas, ou melhor, o Axioma de Playfair. A demonstração não é direta, necessita de alguns lemas e segue uma sequência de teoremas.

Teorema 23 *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo se opõe ao maior lado.*

Demonstração: Queremos provar que em qualquer triângulo ABC, se $AB > AC$, então $\angle C > \angle B$.

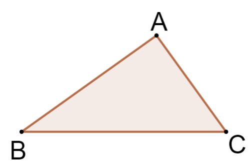


Seja D um ponto de $\overline{AC}$, tal que $AD = AB$. Então $\angle ABD \cong \angle D$, pois os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes. Como $AD = AB > AC$, C deve estar entre A e D. Então, pelo Postulado da Adição de Ângulos,

$$med(\angle ABD) = med(\angle ABC) + med(\angle CBD).$$

Assim, $med(\angle ABC) < med(\angle ABD)$, ou seja, $\angle ABC < \angle D$. Como $\angle ABD \cong \angle D$, segue que $\angle ABC < \angle D$. Mas, pelo Teorema do Ângulo Externo, temos que $\angle D < \angle ACB$. Logo, $\angle ABC < \angle ACB$. Portanto, $\angle B < \angle C$, como queríamos demonstrar.

Teorema 24 *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a estes ângulos não são congruentes e o maior lado se opõe ao maior ângulo.*



Demonstração: Queremos mostrar que em qualquer triângulo ABC, se $\angle C > \angle B$, então $AB > AC$. Há três possibilidades para os números AB e AC:

Possibilidade (1): $AB < AC$,

Possibilidade (2): $AB = AC$,

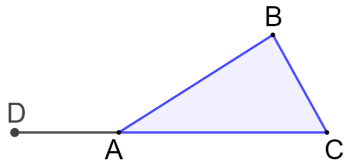
Possibilidade (3) $AB > AC$.

Se (1) for considerada verdadeira, então, pelo teorema anterior, seguiria que $\angle C < \angle B$, o que contradiz com a hipótese.

Se (2) for considerada verdadeira, então $\angle B$ e $\angle C$ seriam os ângulos da base de um triângulo isósceles, de onde teríamos que $\angle B \cong \angle C$, também contradizendo a hipótese. Logo, a única possibilidade é (3), como queríamos demonstrar.

Lema 6 *Em um triângulo, a soma de quaisquer dois ângulos é menor que* 180°.

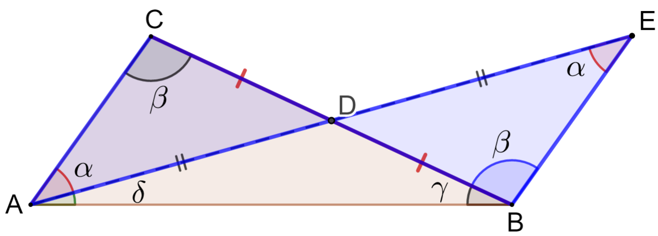
Demonstração: No triângulo ABC da figura abaixo, consideremos a soma dos ângulos $\angle CAB$ e $\angle ABC$. Consideremos também o ângulo externo $\angle DAB$ adjacente ao ângulo $\angle CAB$.



Temos que $med(\angle DAB) + med(\angle CAB) = 180°$. Pelo Teorema do Ângulo Externo sabemos que $med(\angle ABC) < med(\angle DAB)$. Portanto, a soma de $\angle CAB$ e $\angle ABC$ é menor que 180°.

Lema 7 *Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é menor ou igual a* 180°.

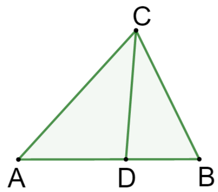
Demonstração:



Prova por absurdo. No triângulo ABC suponhamos que a soma dos ângulos internos exceda 180° por uma certa quantia a. Suponhamos que $\gamma \leqslant \beta$ e seja D o ponto médio de $\overleftrightarrow{CB}$. Estendamos $\overline{AD}$ até E tal que $AD = DE$. Então os triângulos CAD e BED são congruentes, pelo Postulado LAL. Em particular, $med(\angle ACD) = \beta = med(\angle EBD)$ e $med(\angle CAD) = \alpha = med(\angle BED)$. Então, sendo a soma dos ângulos internos do triângulo ABC igual a $\alpha + \delta + \gamma + \beta$, a soma dos ângulos internos do triângulo ABE é também $\alpha + \delta + \gamma + \beta$. Agora, como $\gamma \leqslant \beta$, então $AC \leqslant AB$; como $AC = BE$, segue que $BE \leqslant AB$. Assim, $\delta \leqslant \alpha$. Mas, $med(\angle BAC) = \alpha + \delta$ então $med(\angle BAC) \geq \delta + \delta$, isto é, $med(\angle BAC) \geq 2\delta$ de onde $\delta \leqslant \frac{1}{2}\angle BAC$.

Assim, temos construído um triângulo, ABE, cuja soma dos ângulos internos é igual à do triângulo ABC, mas com um ângulo no máximo a metade de um dos ângulos do triângulo ABC. Esse processo pode ser repetido tantas vezes quanto for necessário até obtermos um triângulo cuja soma dos ângulos internos é menor que $180° + a$, sendo a o excesso da soma dos ângulos internos do $\triangle ABC$ em relação à 180°. Mas a soma total dos ângulos internos do triângulo construído é a mesma que a do triângulo ABC. Mas a soma dos dois ângulos restantes deve exceder 180°, obtemos então uma contradição. Portanto, a soma dos ângulos internos do triângulo ABC não pode exceder 180°.

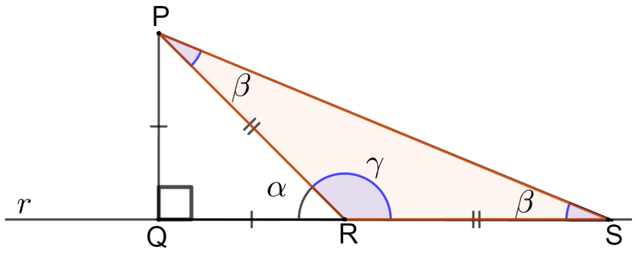
Lema 8 *Se a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a* 180°*, e se um segmento é traçado de um vértice ao lado oposto, de modo a dividir o triângulo em dois pequenos triângulos, então a soma dos ângulos internos de cada pequeno triângulo é também* 180°*.*



Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer e $\overline{CD}$ o segmento que divide $\triangle ABC$ em dois outros triângulos menores, a saber, $\triangle ACD$ e $\triangle BCD$. Sejam S_1 e S_2 a soma dos ângulos internos dos triângulos ACD e BCD, respectivamente. Então a soma $S_1 + S_2$ é maior do que 180°. Se S_1 é menor do que 180°, então S_2 deve ser maior do que 180°. Mas isso contradiz o Lema 7.

Lema 9 *Dada uma reta e um ponto fora dela, uma reta pode ser traçada por este ponto, intersetando a reta inicial de maneira que o ângulo formado é menor que qualquer ângulo pré-fixado.*

Demonstração: Dada a reta r e um ponto P fora dela, tracemos a perpendicular $\overline{PQ}$; escolhamos pontos R e S distintos de Q na reta r tal que $PQ = QR$ e $PR = RS$, respectivamente, (com R entre Q e S) e considere os ângulos α, β e γ, conforme figura.



O triângulo RPS é isósceles, então $\angle RPS$ e $\angle RSP$ são congruentes. $\angle QRP$ e $\angle PRS$ formam um par linear, então $\alpha + \gamma = 180°$. Pelo Lema 9.2, a soma de $\gamma + \beta + \beta$ é no máximo $180°$. Assim, a soma $\beta + \beta$ é no máximo igual a α. Portanto, β tem no máximo a metade de α. Repetindo a construção tanto quanto for necessário, obtemos um ângulo menor que qualquer ângulo pré-fixado.

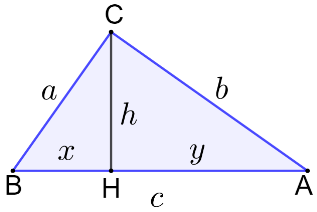
Os teoremas que seguem formam as implicações que vão desde o uso do teorema de Pitágoras até obtermos o Postulado das Paralelas.

Teorema 25 *Se, em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos seus catetos, então existem triângulos retângulos isósceles arbitrariamente grandes cuja soma dos seus ângulos internos é* $180°$.

Demonstração: Na verdade, provaremos a afirmação levemente mais forte:

Se, em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos seus catetos, então os três ângulos internos de todo triângulo retângulo isósceles somam $180°$.

Seja ABC um triângulo retângulo qualquer, com o ângulo reto no vértice C. Trace a altura $CH = h$ do vértice C à hipotenusa AB. Sejam $BC = a$, $AC = b$ e $BA = c$, $BH = x$ e $AH = y$, conforme figura.



Como $\triangle CBH, \triangle ACH$ e $\triangle ABC$ são retângulos, podemos aplicar a relação pitagórica em cada um deles:

$$\triangle ABC : a^2 + b^2 = c^2 \tag{16}$$

$$\triangle CBH : x^2 + h^2 = a^2 \tag{17}$$

$$\triangle ACH : y^2 + h^2 = b^2 \tag{18}$$

Como $c = x + y$ então

$$c^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{19}$$

Substituindo (17), (18) e (19) em (16) obtemos

$$x^2 + h^2 + y^2 + h^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

ou

$$2xy = 2h^2 \Longrightarrow xy = h^2,$$

logo,

$$\frac{h}{x} = \frac{y}{h}.$$

Definamos essa proporção comum $\dfrac{h}{x} = \dfrac{y}{h} = k$. Então $h = kx, y = kh$ e temos

$$b^2 = h^2 + y^2 = (kx)^2 + (kh)^2 = k^2x^2 + k^2h^2 = k^2(x^2 + h^2).$$

Pela igualdade (17), segue que

$$b^2 = k^2a^2$$

assim,

$$\frac{b}{a} = k = \frac{h}{x} = \frac{y}{h}. \tag{20}$$

Dividindo $y = kh$ por $b = ka$, temos $\dfrac{y}{b} = \dfrac{kh}{ka} = \dfrac{h}{a}$, logo $\dfrac{y}{b} = \dfrac{h}{a} = k$.
Utilizando esta última proporção, temos que $y = kb$ e $h = ka$, substituindo na equação (18):

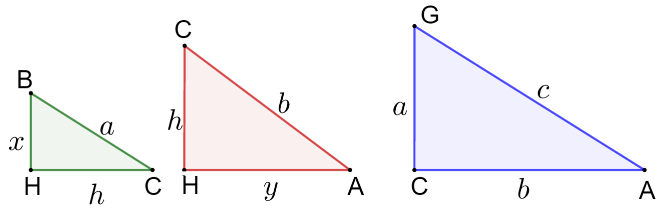
$$b^2 = (kb)^2 + (ka)^2 \Longrightarrow b^2 = k^2b^2 + k^2a^2 \Longrightarrow b^2 = k^2(b^2 + a^2).$$

Como por (9.1) $a^2 + b^2 = c^2$, seque que $b^2 = k^2c^2$, logo, $\dfrac{b}{c} = k$.
Portanto,

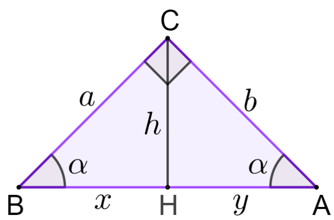
$$\frac{h}{a} = \frac{y}{b} = \frac{b}{c}.$$

Assim, os lados correspondentes dos triângulos CBH e ACH são proporcionais, assim como os lados do triângulo ABC é proporcional aos lados correspondentes dos triângulos CBH e ACH.

Na figura abaixo, onde os triângulos foram separados e reposicionados, conforme seus lados correspondes, a proporção fica visível:



Seria tentador nesta etapa concluirmos que, como os lados correspondentes dos triângulos são proporcionais, os ângulos correspondentes são congruentes. Essa implicação, entretanto, é uma consequência do Postulado das Paralelas, não valendo em geral. No entanto, no caso especial de um triângulo retângulo isósceles, podemos proceder como segue:



Considere o triângulo ABC isósceles de base AB, isto é, $med(\angle A) = med(\angle B)$. Da proporção (20), se $a = b$ e $\frac{b}{a} = \frac{h}{x}$, então $1 = \frac{h}{x}$, logo $h = x$, analogamente, $h = y$. Assim, os triângulos BHC e AHC são também isósceles, então

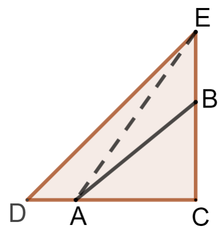
$$med(\angle B) = med(\angle BCH), med(\angle A) = med(\angle ACH).$$

Como $\angle C$ é reto, segue que $med(\angle BCH) + med(\angle ACH) = 90°$.

Fazendo a substituição $med(\angle B) = med(\angle BCH)$ e $med(\angle A) = med(\angle ACH) =$, obtemos $med(\angle A) + med(\angle B) = 90°$. Portanto,

$$med(\angle A) + med(\angle B) + med(\angle C) = 90° + 90° = 180°.$$

Teorema 26 *Se os ângulos internos de um triângulo retângulo isósceles arbitrariamente grande somam* $180°$*, então os ângulos internos de todo triângulo retângulo somam* $180°$*.*

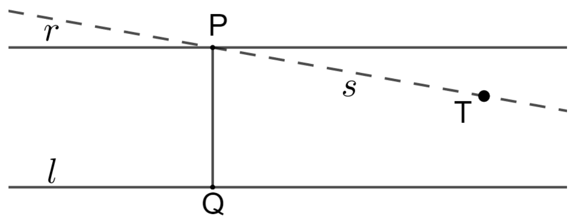


Demonstração: Seja o triângulo ABC retângulo em C. Considere o triângulo DCE retângulo isósceles de base $\overline{DE}$, cuja soma dos ângulos internos é igual a $180°$ construído, a partir de C, estendendo-se os lados $\overline{CA}$ até D e $\overline{CB}$ até E, tal que $CD = CE$. Aplicando o Lema 8, podemos concluir que a soma dos ângulos internos do triângulo EAC é igual a $180°$, e então concluímos que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a $180°$.

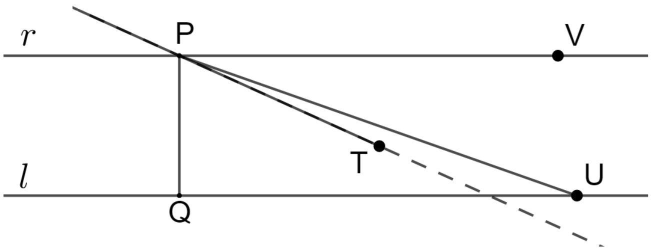
Corolário 2 *Se qualquer uma das afirmações abaixo (equivalências do V postulado) for aceita, então a soma dos três ângulos de qualquer triângulo é igual a* $180°$*.*

- Existem alguns triângulos cujos três ângulos somam dois ângulos retos;
- Existe um triângulo retângulo isósceles cujos ângulos somam dois ângulos retos;
- Existem triângulos retângulos isósceles arbitrariamente grandes cujos ângulos somam dois ângulos retos.

Teorema 27 *Se os ângulos internos de qualquer triângulo retângulo somam* $180°$*, então por um ponto dado, fora de uma reta dada, somente uma reta pode ser traçada paralela à reta dada.*



Demonstração: Dada a reta l e um ponto P fora desta, tracemos $\overline{PQ}$ perpendicular à l. Construa a reta r passando por P perpendicular à $\overline{PQ}$. Então r é paralela (isto é, não interseta) a reta l, pois a existência de um triângulo com dois ângulos retos contradiz o Lema 6. Suponha que existe outra reta s por P paralela à l. Como s é distinta de r, podemos escolher um ponto T em s tal que $med(\angle TPQ) < 90°$. Seja a seu ângulo adjacente tal que $med(\angle TPQ) + a = 90°$.



Pelo Lema 9, construímos uma reta por P intersetando l em U, tal que $med(\angle PUQ) < a$. Seja V um ponto de r do mesmo lado de $\overline{PQ}$ em que está U. Assim, como $\angle PQU$ é reto, então

$$med(\angle QUP) + med(\angle QPU) = 90°.$$

Mas

$$med(\angle QPU) + med(\angle UPV) = 90°.$$

Comparando estas duas últimas igualdades, concluímos então que $\angle QUP$ e $\angle UPV$ são congruentes. Isto significa que $med(\angle UPV) < a$. Como $\angle TPV$ é igual a a, o segmento $\overline{PT}$ deve estar no interior do ângulo $\angle QPU$ e deve, portanto, intersetar a reta l (em algum lugar entre Q e U). Isso contradiz a suposição de que a reta s é paralela à reta l e, portanto, a paralela r por P é única, como queríamos demonstrar.

10 Tabela de análise de alguns livros didáticos

A análise de alguns livros didáticos aprovados pelo PNLD teve por objetivo verificar de que forma é apresentado o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras. A análise serviu para uma reflexão sobre o modo de ensino destes conteúdos. Foram observados ao todo 13 livros, sendo oito deles do 9º ano do Ensino Fundamental e os outros seis do 1º ano do Ensino Médio. A Tabela 1 é uma identificação numérica dos livros. Na Tabela 2, na coluna com a pergunta "Apresenta a demonstração incompleta?" para o Teorema de Tales, estamos nos referindo à prova incompleta, que utiliza apenas segmentos comensuráveis, sendo considerada verdadeira para segmentos incomensuráveis mas sem demonstrar para este segundo caso, situação discutida no capítulo 5. Somente em dois dos livros vemos provas diferentes, a saber, no livro Conexões com a Matemática 1, 1ºEM utiliza-se o método das áreas, e no livro Aplicando a Matemática, 9º ano a demonstração é feita com semelhança de triângulos. Quanto ao Teorema de Pitágoras, parece ainda haver uma preferência pela demonstração por semelhança em triângulos. Muitos deles já trazem outras provas, que utilizam áreas, mas, ainda assim, estas estão em segundo plano, parecendo que a demonstração por semelhança é mais importante. A prova por áreas é mais 'natural' considerando a trajetória de um aluno do 9º ano do Ensino Fundamental.

Tabela 1: Numeração dos livros

Livro Nº	**Título do livro**	**Ano Escolar**	**Autores**	**Ano de edição**
1	Aplicando a Matemática	9º EF	Alexandre L. Trovon de C., Lourisnei F. Reis	2011
2	Tudo é matemática	9º EF	Luis Roberto Dante	2012
3	Descobrindo e aplicando a matemática	9º EF	Alceu dos S. M., Paulo A. F. Machado	2012
4	Praticando Matemática	9º EF	Álvaro Andrini, Maria José Vasconcelos	2012
5	Matemática Teoria e Contexto	9º EF	Marília Centurión, José Jakubovic	2012
6	Vontade de Saber	9º EF	Joamir Souza, Patrícia Moreno P.	2013
7	Matemática Bianchini	9º EF	Edwaldo Bianchini	2015
8	Matemática Ideias e Desfios	9º EF	Dulce S. Onaga, Iracema Mori	2015
9	Matemática Paiva 1	1º EM	Manoel Paiva	2015
10	Conexões com a Matemática 1	1º EM	Fábio M. de Leonardo	2016
11	Matemática 1: Interação e Tecnologia	1º EM	Rodrigo Balestri	2016
12	Matemática 1: Ciências e Aplicações	1º EM	Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périto, Nilze de Almeida	2016
13	Matemática Contexto e Aplicações	1º EM	Luiz Roberto Dante	2016
14	Contato Matemática 1	1º EM	Jaqueline Garcia, Joamir Souza	2016

Tabela 2: Análise dos livros

Livro Nº	**Teorema de Tales**		**Teorema de Pitágoras**	
	Apresenta a demonstração incompleta?	Apresenta a demonstração completa?	Apresenta a demonstração por semelhança?	Apresenta a demonstração por áreas?
1	Não	Sim	Sim	Não
2	Sim	Não	Sim	Sim
3	Não	Não	Não	Não
4	Sim	Não	Não	Sim
5	Não	Não	Não	Sim
6	Sim	Não	Sim	Sim
7	Sim	Não	Sim	Sim
8	Sim	Não	Sim	Não
9	Não	Não	Sim	Sim
10	Não	Sim	Sim	Sim
11	Sim	Não	Sim	Sim
12	Sim	Não	Sim	Não
13	Sim	Não	Sim	Sim
14	Sim	Não	Não	Sim

11 Conclusão

Nosso estudo sobre o Teorema de Pitágoras e do Teorema de Tales nos mostra que qualquer que seja o conteúdo exposto pelo professor, este deve ter um conhecimento abrangente do assunto. Não basta seguir à risca um determinado livro didático, pois são as várias perspectivas de um mesmo conteúdo que dão ao professor uma visão ampla de qual a melhor maneira de ensinar, dependendo de todo o contexto no qual o aluno está inserido.

O Teorema de Pitágoras tem uma lista grande de aplicações, inclusive na própria matemática. Dentre elas, na Geometria Plana é utilizado para se obter a diagonal de um quadrado e a altura de um triângulo equilátero; na Trigonometria temos a relação trigonométrica fundamental; nos Números Complexos o cálculo da norma; na Geometria Analítica a distância entre dois pontos no plano cartesiano; na Geometria Espacial a diagonal de um paralelepípedo; na Álgebra Linear utilizamos para calcular o ângulo entre dois vetores, tanto no $\mathbb{R}^2$ como no $\mathbb{R}^3$; temos também as lúnulas de Hipócrates, que são figuras geométricas limitadas por dois arcos circulares de raios distintos. Ainda, dentre as generalizações que apresentamos no capítulo 7, temos também a lei dos cossenos que não mencionamos. Independente de qual seja a aplicação do teorema, mostramos diferentes maneiras de demonstrá-lo. Para tal, várias propriedades referentes à cálculo de áreas foram utilizadas. Propriedades estas que muitas vezes ficam escondidas com tanto teor algébrico que estamos acostumados a lidar. Principal exemplo disso é o uso da propriedade em que se triângulos tem mesma base e altura então possuem mesma área. Essa propriedade foi utilizada aqui em vários momentos, tornando as demonstrações visíveis e não apenas algébricas.

Portanto, ainda há várias outras perspectivas de estudo do Teorema de Pitágoras e suas demonstrações. Algumas dissertações relacionadas às aplicações citadas acima já foram publicadas mas, ainda assim, há muito o que se explorar deste teorema tão importante e presente não apenas na matemática, mas também em ramos como a física, tendo como um exemplo o cálculo vetorial.

Referências

[1] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, 1991.

[2] WAGNER, Eduardo. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[3] LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[4] LOOMIS, Elisha Scott. *The Pythagorean Proposition, Classics in Mathematics Education Series*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Washington, D.C., 1968, 310p.

[5] MOISE, Edwin E., DOWNS, Floyd L. *Geometria Moderna*. Tradução Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo, Editora Edgard Blucher Ltda, 1971.

[6] EFÍMOV, Nikolai V. *Geometria Superior*. Traducción al espanol, Editorial Mir. 1984.

[7] BRODIE, Scott E. *The Pythagorean Theorem is Equivalent to the Parallel Postulate*.http://www.cut-the-knot.org/triangle/pythpar/PTimpliesPP.shtml, acessado em 12/04/2019.

[8] BOLTIANSKI, V. G. *Figuras Equivalentes y Equicompostas*, Ed. MIR, Moscow. Tradução para espanhol. Steanislav N Belowson, URSS, 1981.

[9] Base Nacional Comum Curricular (BNCC), 2018, Matemática Ensino Fundamental e Ensino Médio. `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf`, acessado em 05/07/2019.