UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MARCELO GORGES

FUNÇÃO QUADRÁTICA: LANÇAMENTO OBLÍQUO DE PROJÉTEIS

CURITIBA

2019

MARCELO GORGES

FUNÇÃO QUADRÁTICA: LANÇAMENTO OBLÍQUO DE PROJÉTEIS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Pettres.

CURITIBA

2019

Gorges, Marcelo
G667f Função quadrática: lançamento oblíquo de projéteis. / Marcelo Gorges. – Curitiba, 2019.
66 f.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Pettres.
Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Setor de Ciências Exatas. Universidade Federal do Paraná.

1. Lançadores. 2. Modelagem matemática. 3. Catapultas. II. Título. III. Universidade Federal do Paraná.

CDD: 512.74

Sistema de Bibliotecas/UFPR, Biblioteca do Campus Jandaia do Sul
César Augusto Galvão Fernandes Conde – CRB 9/1747

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **MARCELO GORGES** intitulada: **Função Quadrática: lançamento oblíquo de projéteis** , após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 22 de Março de 2019.

ROBERTO PETTRES
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO
Avaliador Interno (UFPR)

GERSON ULBRICHT
Avaliador Externo (IFSC)

Dedico este trabalho em especial à minha esposa Elisângela, minha maior incentivadora em todos os momentos desta trajetória e à minha filha Manuela, nosso presente de Deus.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela vida, saúde e bênção de colocar em minha vida pessoas tão importantes para mim.

Agradecimento especial à minha esposa Elisângela pelo amor, carinho, confiança, compreensão, incentivo e apoio nos momentos mais difíceis desta trajetória, fazendo com que eu sempre acreditasse que era capaz de alcançar meus objetivos. Obrigado meu amor. Amo você!

Agradecimento especial à minha filha Manuela, inspiração de minha vida, por você batalho e nada se torna impossível de fazer. Todos os dias trazem aprendizado, é fantástico acompanhar cada passo de seu crescimento e desenvolvimento, obrigado por existir. Amo você!

Agradecimento especial ao professor Roberto Pettres pela parceria, incentivo, confiança e orientação neste trabalho, sem dúvida essencial para esta caminhada. Ao mestre, meu muito obrigado!

Agradecimento aos meus amigos de sala de aula e de trabalho. Em especial ao meu amigo Elzério da Silva Júnior: estudamos juntos grande parte das disciplinas, incentivando e apoiando um ao outro. Obrigado pela amizade e colaboração.

Agradecimento especial ao Colégio Nossa Senhora Medianeira, por me dar a oportunidade profissional e a oportunidade de realizar este trabalho acadêmico, pois sem tal confiança nada disso seria possível. Muito obrigado e conte sempre comigo.

Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação. (Carl Friedrich Gauss, 1777- 1855).

RESUMO

A presente pesquisa tem por finalidade o desenvolvimento de atividades relacionadas à função quadrática com estudantes da primeira série do Ensino Médio do Colégio Nossa Senhora Medianeira, incluindo o planejamento, a construção de protótipos lançadores de projéteis, assim como a análise do projétil lançado, a determinação de seu alcance, o traçado da função da trajetória do projétil, a análise da altura máxima atingida por ele e sua velocidade inicial. A atividade tem como foco as disciplinas de Matemática e Física, desenvolvendo aspectos referentes aos conteúdos de função quadrática e lançamento oblíquo com o uso da modelagem matemática, o que possibilita a interdisciplinaridade, o trabalho em grupo, a troca de posição entre professores e estudantes, permitindo que os estudantes atuem de forma autônoma a partir de ações que envolvem o trabalhar em grupo, a organização, a pesquisa, o planejamento e a decisão para solucionar questões tanto práticas como teóricas.

Palavras-chave: Função Quadrática. Lançamento Oblíquo. Lançadores. Modelagem Matemática. Catapultas.

ABSTRACT

This research intends to develop activities involving the quadratic function with first-grade high school students at the Nossa Senhora Medianeira School, including the construction of prototype projectile launchers, analysis of the launched projectile, its ranging, trajectory function, maximum height and initial velocity. The activity focuses on mathematics and physics, approaching the subjects of quadratic function and ballistics by usage of mathematical modelling, allowing interdisciplinarity, group work and teacher-student role changes. This allows the students to work autonomously based on group efforts, their organization, research, planning and decision-making to solve both practical and theoretical questions.

Keywords: Quadratic Function. Ballistics. Launchers. Mathematical Modelling. Catapults.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – QUADRATURA DA PARÁBOLA..23
FIGURA 2 – CÔNICAS DE APOLÔNIO...24
FIGURA 3 – SEGMENTOS DE RETA 29
FIGURA 4 – QUESTIONÁRIO SOBRE LANÇADOR ESCOLHIDO. 36
FIGURA 5 – DESENHO TÉCNICO DO LANÇADOR. 37
FIGURA 6 – CONSTRUÇÕES E PROTÓTIPOS. 38
FIGURA 7 – CATAPULTAS 39
FIGURA 8 – CATAPULTA EM UM GEOPLANO NO AUXÍLIO DE UM DEFICIENTE VISUAL 39
FIGURA 9 – REGISTRO DOS ALCANCES E CÁLCULO DA MÉDIA.......................40
FIGURA 10 – FÓRMULA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA QUE REPRESENTA A TRAJETÓRIA DA OBLÍQUA DO LANÇAMENTO. 41
FIGURA 11 – PARÁBOLA DADA PELA FUNÇÃO PROPOSTA..............................42
FIGURA 12 – CÁLCULO DA ALTURA MÁXIMA. 43
FIGURA 13 – VELOCIDADE INICIAL DO PROJÉTIL EM RELAÇÃO AO EIXO Y. ..44
FIGURA 14 – APRESENTAÇÃO DOS LANÇADORES. 45
FIGURA 15 – ETAPAS DA ATIVIDADE E SUAS DIFICULDADES...........................46
FIGURA 16 – RELAÇÃO DAS DIFICULDADES NO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 47
FIGURA 17 – CURVA PARABOLICA DE UM OBJETO LANÇADO. 60
FIGURA 18 – FOCO E EIXO DA PARÁBOLA. 62
FIGURA 19 – PARÁBOLA COM CONCAVIDADE PARA CIMA. 63
FIGURA 20 – PARÁBOLA COM CONCAVIDADE PARA BAIXO. 63

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

UFPR	- Universidade Federal do Paraná
MRU	- Movimento Retilíneo Uniforme
MRUV	- Movimento Retilíneo Uniformemente Variado
PIBID	- Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

LISTA DE SÍMBOLOS

Δ - Delta;

v - Velocidade Final;

v_0 - Velocidade Inicial;

a - Aceleração;

ΔS - Distância percorrida.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 ..... **16**
1 INTRODUÇÃO **16**
1.1 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA 16
1.2 JUSTIFICATIVA 19
1.3 OBJETIVOS 19
1.3.1 Objetivo geral 19
1.3.2 Objetivos específicos 19
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO 20
CAPÍTULO 2 ..... **21**
2 REVISÃO DE LITERATURA **21**
2.1 OS BABILÔNIOS 21
2.2 OS GREGOS 22
2.3 OS ÁRABES E OS HINDUS 24
2.4 A IDADE MÉDIA 26
2.5 RENASCIMENTO 26
2.6 A MATEMÁTICA MODERNA 27
2.7 SURGIMENTO DA EXPRESSÃO “FUNÇÃO” E SUA NOTAÇÃO 29
2.8 APLICAÇÕES RECENTES 30
2.9 MODELAGEM MATEMÁTICA E SUAS ARTICULAÇÕES. 31
CAPÍTULO 3 ..... **34**
3 DESENVOLVIMENTO DO PROJETO FUNÇÃO QUADRÁTICA: LANÇAMENTO OBLÍQUO DE PROJÉTEIS **34**
3.1 A ATIVIDADE DESENVOLVIDA: ASPECTOS METODOLÓGICOS 34
3.2 A ATIVIDADE: “FUNÇÃO QUADRÁTICA: LANÇAMENTO OBLÍQUO DE PROJÉTEIS” 35
3.3 QUESTIONÁRIO APLICADO SOBRE A AVALIAÇÃO DOS LANÇADORES 45
CAPÍTULO 4 ..... **49**
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS **49**
REFERÊNCIAS **52**
ANEXO A – FUNÇÃO QUADRÁTICA **56**
A.1 FUNÇÃO QUADRÁTICA – ROTEIRO DAS AULAS 56

A.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA - APRESENTAÇÃO 56
A.3 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA 57
A.4 VALOR NUMÉRICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA 57
A.5 DETERMINAÇÃO DOS ZEROS DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS. 58
A.6 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA CONHECENDO-SE DE TRÊS PONTOS. 61
A.7 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA E SEUS PONTOS RELEVANTES. 62
ANEXO B – QUESTIONÁRIO SOBRE A AVALIAÇÃO DOS LANÇADORES – CATAPULTAS 66

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

1.1 DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Existem diversos trabalhos que destacam aplicações da Matemática no cotidiano. Dentre eles, destacam-se os trabalhos de Lopes, Silva e Araújo (2004) no desenvolvimento de softwares; Pettres, Jarek e Lacerda (2011) que apresentam modelos de inteligência artificial; Ramon (2012), em estudos quantitativos epidemiológicos na área da saúde; Silva (2013), em projetos de engenharia; Tan (2014) que trata de movimentações financeiras e investimentos; Pettres e Lacerda (2017), em simulações numéricas de termodinâmica, entre outras aplicações. Ainda de forma similar, apresentam-se inúmeros trabalhos voltados aos aspectos educacionais de ensino, aprendizagem da Matemática e enriquecendo desta Ciência, como apresentados por Abdanur (2006), Sausen (2006), Orlovski (2014), Bueno (2015) e Rocha (2016).

Dentre os principais autores pesquisados nesse estudo, destacam-se, Ávila (2010), que salienta que a Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial do patrimônio cognitivo da humanidade e acaba por dotar o estudante de instrumental necessário no estudo de outras ciências envolvendo aspectos quantitativos da realidade. Michels (2009) destaca o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e o comprometimento com a construção da cidadania, com objetivo de estabelecer uma postura crítica e reflexiva diante do conhecimento historicamente situado dentro e fora da Matemática. Grando (2000) investiga os processos desencadeados na construção e/ou resgate de conceitos e habilidades matemáticas a partir da intervenção pedagógica com jogos. Morais (2011) ressalta o uso de jogos e a proposição de situações que despertem a curiosidade no ensino da Matemática, e traz como objetivo fazer com que o estudante, além de apreciar e desejar envolver-se mais com esta área do conhecimento, possa despertar para o desenvolvimento intelectual e para a formação de relações sociais por meio de momentos lúdicos, não como meros instrumentos recreativos, mas como espaços facilitadores de aprendizagem. Falkembach (2009) ressalta a importância de pensar em jogos educativos como um recursos que podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, pois estes são atividades lúdicas que possuem objetivos pedagógicos para o desenvolvimento do raciocínio.

Aliada às atividades práticas no desenvolvimento de atividades pedagógicas com cunho matemático está a modelagem matemática, que pode ser incorporada à metodologia de ensino. Para Bassanezzi (2006), na modelagem matemática a pretensão é fazer com que a Matemática interaja com a realidade a fim de constituir um modelo do problema que represente uma aproximação do objeto pesquisado, passível de interpretação e resolução.

Nesse trabalho, adota-se a modelagem matemática para tratar e explorar conceitos relacionados à função quadrática, a partir dos quais jogos, competições e atividades são realizados de forma lúdica. Essa escolha se baseia na formação acadêmica deste autor, na confluência da Licenciatura em Matemática (2001) pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná com o Bacharelado em Engenharia Mecânica (2010) pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. A experiência didática ao longo de 18 anos com estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, de importância central, corrobora a escolha da modelagem matemática.

Sobre os jogos e competições, foi idealizada pelo autor deste trabalho uma atividade denominada “Função Quadrática: lançamento oblíquo de projéteis”, descrito com detalhes no subitem 3.2 deste trabalho. Essa atividade didática vem sendo realizada desde 2010 com estudantes da primeira série do Ensino Médio e busca, de forma lúdica, relacionar a função quadrática com a mecânica de um lançador oblíquo de projéteis.

Uma aplicação histórica de lançador mecânico é a Catapulta de Arquimedes (Siracusa, 287 a.C – 212 a.C), cuja finalidade em determinadas situações tinha cunho militar. De qualquer forma, o modelo mecânico já havia sido explorado e estudado na antiguidade (TAMUDO, 2010).

Trabalhos sobre lançamentos oblíquos são encontrados em, Suarez *et al*. (2012), Ninow e Kaiber (2016), Battisti e Ghisleni (2018) e Rosa, Lima e Palharini (2018), os quais descrevem e demonstram o procedimento para determinar o alcance e altura máxima de um projétil a partir de uma função quadrática, sua trajetória e componentes de velocidade.

Ainda em Ninow e Kaiber (2016), os autores incorporaram a modelagem matemática para orientar estudantes no passo a passo do desenvolvimento e elaboração do protótipo do lançador contendo a parte algébrica, cálculo da trajetória e velocidade do projétil, além de esquemas mecânicos, como se propõe nessa dissertação.

Em contraponto e apesar da reconhecida importância da Matemática para a sociedade, esta é constantemente percebida por pais, estudantes e professores como uma disciplina que apresenta conceitos de difícil compreensão, intrincada e obscura (TEODORO e PETTRES, 2016). No que tange à aprendizagem da função quadrática, essa percepção é recorrente e sinalizada em trabalhos de diversos autores, entre eles, Alexandre e Santos (2009); Quartieri, Boarragini e Dick (2012); Nasser, Sousa e Torraca (2012), além de ser reconhecida pelo autor desse trabalho. Isto posto, a constatação das dificuldades na aprendizagem do conteúdo “função quadrática” caracteriza-se como o problema que norteia a investigação presente neste trabalho. A expectativa por resultados positivos da abordagem alternativa do conteúdo “função quadrática”, apresenta-se como a principal motivação e justificativa do presente estudo.

Dessa forma e a partir de tais considerações, propõe-se neste trabalho o estudo de Funções Quadráticas a partir de dispositivos mecânicos confeccionados em grupo pelos próprios estudantes em forma de um lançador oblíquo de projéteis.

Na confecção desses dispositivos, considera-se, na etapa de planejamento do lançador, um desenho (esboço geométrico) com noções básicas da forma do lançador e de como este irá atuar, e, sob orientação deste autor, os cálculos necessários para a determinação da função quadrática que representa a trajetória, a altura e alcance máximos e a componente da velocidade do projétil em relação ao eixo y.

Em tempo, pretende-se, de forma interdisciplinar, relacionar a função quadrática da disciplina de Matemática ao Movimento Retilíneo Uniforme (MRU), Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV) e Lançamento Oblíquo estudado concomitantemente na disciplina de Física na primeira série do Ensino Médio do Colégio Nossa Senhora da Medianeira, localizado em Curitiba, Paraná.

Durante e após a realização das atividades supracitadas foram coletados e analisados dados com o uso de procedimentos estatísticos, bem como registros de relatos dos próprios estudantes. Os resultados são apresentados ao final deste trabalho.

1.2 JUSTIFICATIVA

Subsidiar através de atividades lúdicas e com o uso de modelagem matemática, práticas de ensino do tema Funções Quadráticas a partir de protótipos mecânicos que desloquem objetos com trajetórias parabólicas, com vista em proporcionar melhores resultados na aprendizagem do referido tema.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem por objetivo desenvolver modelos de lançadores oblíquos de projéteis que podem servir como material de apoio didático para docentes quando estes tratarem do tema função quadrática. A modelagem matemática do problema de lançamento, o que inclui o planejamento e construção dos protótipos e descrição do cálculo da trajetória e demais hipóteses simplificadoras para as variáveis envolvidas no lançamento do projétil, faz parte dos modelos de lançadores.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para atingir o objetivo geral do presente trabalho, são definidos os seguintes objetivos específicos:

(i) apresentar aos estudantes os conceitos matemáticos envolvidos no estudo da função quadrática;

(ii) orientar a modelagem matemática do protótipo;

(iii) executar em conjunto com os estudantes o lançamento de projéteis a partir de cada protótipo;

(iv) realizar medições durante e após os lançamentos;

(v) estudar e discutir com os estudantes os dados obtidos em cada lançamento, determinação da fórmula da trajetória representada por uma função quadrática, cálculo de pontos de altura e alcance máximo, e valor da velocidade;

(vi) analisar os dados obtidos nos experimentos, bem como relatos dos estudantes e observações registradas durante a atividade e

(vii) propor uma prática didática sobre a atividade Lançadores.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2, apresenta-se uma resenha histórica organizada, levando em consideração a ordem cronológica do tempo e fatos relacionados a conceitos abordados no contexto da função quadrática.

No capítulo 3, é descrita a proposta metodológica da modelagem matemática no desenvolvimento da atividade “Função Quadrática: lançamento oblíquo de projéteis”. Além disso, é apresentada a proposta da atividade dos lançadores de projéteis, bem como todas as etapas do desenvolvimento realizado pelos estudantes, desde sua concepção até o lançamento propriamente dito com o protótipo construído, assim como a apresentação de seus resultados: função da trajetória oblíqua, sua altura máxima alcançada atingida e velocidade inicial em relação ao eixo vertical. Consta ainda o relato dos estudantes sobre um questionário aplicado, cujo resultado encontra-se no subitem 3.4.

No capítulo 4, são realizadas as considerações finais do presente estudo e as sugestões para estudos futuros.

CAPÍTULO 2

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo é apresentada uma resenha histórica não exaustiva, levando em consideração a ordem cronológica de fatos relacionados a conceitos abordados no contexto da função quadrática, iniciando-se pelos babilônios, gregos, árabes e hindus, Idade Média, Renascimento, Matemática Moderna e surgimento da expressão função. Ainda nesse capítulo, apresentam-se trabalhos que tratam de aplicações do tema função quadrática e no subitem 2.9 aborda-se o tema modelagem matemática.

2.1OS BABILÔNIOS

A ideia de função quadrática, ainda que primitiva se inicia na resolução de equações quadráticas. Os babilônios, por volta de 1850 a.C., no primeiro reino babilônico, época de Hammurabi. Registravam suas escritas e cálculos em tabletes cuneiformes, utilizando o sistema de numeração sexagesimal posicional. Nestes tabletes, eram registrados resultados de operações, bem como procedimentos, como se fossem exercícios resolvidos, sendo estes equivalentes a exercícios que hoje se resolvem por meio de equações (PITOMBEIRA e ROQUE, 2012).

Os babilônios não utilizavam fórmulas para determinar as raízes de uma equação quadrática, pois não existia a representação dos coeficientes por letras. Existia um procedimento, como se fosse uma receita. Conforme O. Neugebauer e Sachs (1945), entre os principais responsáveis pelas primeiras traduções dos textos matemáticos babilônicos.

Os babilônios conjecturaram que a demonstração das soluções de uma equação quadrática seria de natureza primordialmente algébrica, problemas como encontrar dois números desconhecidos, tais que sua soma fosse s e seu produto p, recaem, hoje, em equações quadráticas, o que geometricamente significa determinar os lados de um retângulo conhecendo-se seu semiperímetro s e a área p (PITOMBEIRA e ROQUE, 2012).

Entretanto o estilo para determinar a solução era o algoritmo: “Eleve ao quadrado a metade da sua soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número” (LIMA, 2006).

Tal procedimento usado para determinar a solução de uma equação do tipo $x^2 - sx + p = 0$, pode ser hoje traduzido assim, na equação (eq.) 1:

$$x = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \tag{1}$$

Como os dados s e p do problema eram sempre números positivos, eles nunca correram o risco de eventuais soluções negativas serem fornecidas pelo algoritmo.

2.2 OS GREGOS

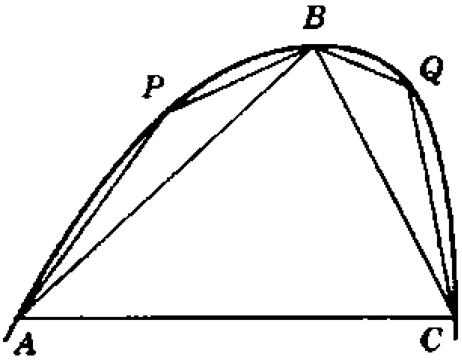
Tales de Mileto (624 – 548 a.C.) e Pitágoras de Samos (580 – 600 a. C.) destacaram-se absorvendo elementos de outras culturas a fim de se desenvolverem. A escola Pitagórica tinha como lema: “Tudo é número”. Os pitagóricos mostravam grande interesse pela secção áurea e pela razão áurea, e também se interessavam por problemas com o fim de transformar a área de uma figura retilínea noutra figura retilínea (EVES, 1995).

Já o período entre 300 e 200 a.C., primeiro século da Idade Helenística, foi denominado “Idade Áurea” da Matemática grega, quando se destacaram Euclides, Arquimedes e Apolônio de Perga.

Para Arquimedes (287 – 212 a.C.) uma parábola era definida seccionando-se um cone circular reto, obtido pela revolução de um triângulo retângulo em torno de um de seus lados que formam o ângulo reto, por um plano perpendicular à hipotenusa do triângulo que foi girado. Esta definição é equivalente à realizada por Euclides em seu livro perdido, sobre cônicas (PITOMBEIRA e ROQUE, 2012).

Arquimedes trabalhou com o problema conhecido como: Quadratura da Parábola. Este problema consiste na comparação da área de um segmento parabólico à área de um triângulo. Ele provou que a área K de um segmento parabólico APBQC (FIGURA 1) é quatro terços da área de um triângulo T tendo a mesma base e a mesma altura (BOYER, 1974).

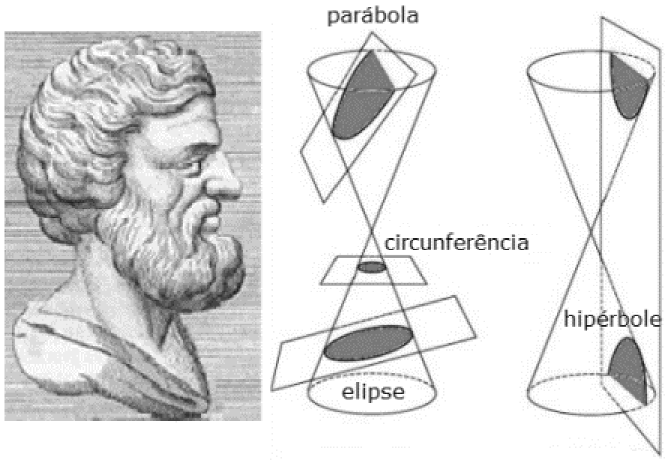
FIGURA 1 – QUADRATURA DA PARÁBOLA



FONTE: BOYER (1974)

Apolônio (262 – 194 a.C.) foi um ilustre membro da escola de Alexandria. Entre suas obras, têm-se As Cônicas, composta por oito volumes e 400 proposições, que aperfeiçoaram os estudos anteriores e introduziram as denominações elipse, parábola e hipérbole. Ele foi o primeiro a conceber as cônicas como interações de uma mesma superfície cônica circular, não necessitando ser reta, podendo ser oblíqua ou escalena, cortada por planos de inclinações diferentes. Posteriormente, uma das concepções feitas por ele e utilizada até hoje é a consideração de um cone de duas folhas; a partir deste, as secções cônicas (FIGURA 2) passaram a se caracterizar da seguinte maneira: se o plano corta todas as geratrizes sobre uma mesma folha do cone, tem-se a elipse; se o plano é paralelo a uma das geratrizes, tem-se a parábola e se o plano corta as duas folhas do cone, obtém-se a hipérbole (PITOMBEIRA e ROQUE, 2012).

FIGURA 2 – CÔNICAS DE APOLÔNIO



FONTE: https://fatosmatematicos.com/2018/01/13/apolonio-de-perga/acessado 01/11/2018.

A astronomia encontrou grande aplicação nas secções cônicas. Kepler, Copérnico, Halley e Newton, por exemplo, utilizaram seus conceitos e configurações para explicarem fenômenos físicos, como as trajetórias dos planetas ou a trajetória descrita por um objeto lançado obliquamente.

2.3 OS ÁRABES E OS HINDUS

Os hindus foram hábeis aritméticos e contribuíram significativamente com a álgebra. Eles somavam progressões aritméticas e geométricas, resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos, descontos e regras de sociedade. A Matemática hindu começou a utilizar os números negativos, o zero e os irracionais como um elemento de cálculo. As principais contribuições para a história da matemática têm Aryabhata (476 – 550), Brahmagupta (598 – 665), Bhaskara I e Bhaskara II (EVES, 1995).

A Matemática hindu tinha por costume desenvolver-se de forma poética, a partir de problemas reais. Sobre a equação quadrática, Brahmagupta apresentou um método, com a qual encontrou as áreas de triângulos, quadriláteros e círculos, assim como volumes e superfícies laterais de pirâmides e cones. Alguns anos depois, seu aluno, Bhaskara I (600 – 680), reescreveu de forma descritiva os versos nela contidos (EVES, 1995).

Segundo Pitombeira e Roque (2012), Bhaskara II (1114 – 1185), foi um matemático indiano dedicado ao estudo da Astronomia e Matemática cujas principais obras escritas são Lilavati ("bela") sobre aritmética, e Vijaganita ("extração de raízes") sobre Álgebra. Ele resolveu equações quadráticas e seu método para resolver as equações consistia em:

(i) Completar o quadrado no primeiro membro para tornar o termo que contém a quantidade desconhecida e seu quadrado um quadrado perfeito;
(ii) Diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros;
(iii) Resolver a equação de primeiro grau que daí resulta.

Conforme Rocha (2019), o hábito de chamar a fórmula resolutiva de uma equação quadrática de "fórmula de Bhaskara" tem origem espanhola, sendo este costume inadequado, pois:

(i) Em torno de 1700 a.C. os babilônios já estudavam as equações quadráticas em forma de prosa;
(ii) Bhaskara II (1114 – 1185), como visto acima, também resolvia as equações quadráticas com receitas e prosas.
(iii) Até o fim do século XVI, não se representavam por letras os coeficientes de uma equação quadrática, logo não utilizavam fórmulas para a sua resolução.

A álgebra de al-Khowarizmi demonstrou pouca originalidade, entretanto a palavra "álgebra" é derivada de *al-jabr* operações que ele utilizou para resolver equações lineares e quadráticas de maneira aritmética e geometricamente. Além disso, o radical de algarismo e algoritmo deriva de *algoritimi*, forma latina de seu nome (EVES, 1995).

Estes matemáticos foram hábeis em articular a abordagem geométrica desenvolvida pelos gregos e a algébrica empregada pelos babilônios. A eles se deve a audácia de demonstrar algebricamente e, logo em seguida, geometricamente, a resolução da equação quadrática, mesmo que em prosa (EVES, 1995).

2.4 A IDADE MÉDIA

O período conhecido como Baixa Idade Média se estende da queda do Império Romano, na metade do século V, até o século XI. Durante este período a civilização ocidental europeia viveu níveis muito baixos no ensino, o saber grego quase desapareceu e muito dos ofícios antigos e artes foram esquecidos. O período foi marcado por muita violência física e intensa fé religiosa (EVES, 1995).

Ainda no período da Idade Média, mas entre os séculos XII e XIII, tem-se Leonardo Fibonacci (1175 – 1250) que foi o matemático mais talentoso da Idade Média. Filho de pai ligado a negócios mercantis, no território do mediterrâneo, o que o levou a receber educação no norte da África. Assim pôde entrar em contato direto com os procedimentos matemáticos ocidentais e árabes. Deve-se a ele a introdução da notação de numeração indo-arábica na Europa. Entre suas obras mais conhecidas, tem-se *Liber abaci, Practica geometriae* e *Liber quadratorum*, nas quais desenvolveu cálculos com inteiros e frações, raízes quadradas e cúbicas e a resolução de equações lineares e quadráticas (EVES, 1995).

2.5 RENASCIMENTO

O Renascimento Europeu, ocorrido na transição da Idade Média para a Idade Moderna, iniciou-se na Itália no século XIV e se expandiu pelo resto da Europa até o século XVI. Neste período se destacaram: pintores, escritores, escultores e outros. Assim como o interesse pelo comércio, a astronomia e o incentivo às grandes navegações se acentuaram. Ainda neste período, a cristandade passou por muitos conflitos religiosos, pela Reforma e Contrarreforma, o que enfraqueceu a influência da Igreja Católica, tornando menos efetiva sua oposição à pesquisa científica.

Os europeus aprimoraram a técnica de obtenção das raízes de uma equação quadrática, fornecida pelos árabes, desenvolveram a álgebra simbólica, a qual era, até então, totalmente descritiva e utilizaram os números negativos como raiz de uma equação quadrática, conhecimento este desconsiderado por outros povos (EVES, 1995).

François Viète (1540 – 1603), matemático francês, com seu mais notório trabalho “*In artem”,* ao qual o desenvolvimento do simbolismo algébrico muito deve, introduziu a prática de usar vogais para representar incógnitas, consoantes para representar constantes e usava a mesma letra, adequadamente qualificada, para as várias potências de uma mesma quantidade, da seguinte forma: *A; A quadratum; A cubum*. Assim encontramos, pela primeira vez na álgebra, uma distinção clara entre os conceitos de parâmetro e quantidade desconhecida (EVES, 1995).

Conforme Trovon (2012) o que hoje se indica x, x^2, x^3, esta forma de escrita ocorreu pela primeira vez com a publicação “La Géometrie” de Descartes, em 1637, é nesse contexto que a fórmula para a equação quadrática aparece como conhecemos hoje.

2.6 A MATEMÁTICA MODERNA

São vários os nomes que se destacam neste período, entre eles os italianos Galileu Galilei (1564 – 1642) e Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647); os ingleses Henry Briggs (1561 – 1639), Thomas Harriot (1560 – 1620) e William Oughtred (1574 – 1660); os flamengos Simon Stevin (1548 – 1620) e Albert Girard (1590 – 1633); os franceses René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665); o escocês John Napier (1550 – 1617); o suíço Jobst Burgi (1552 – 1632) e o alemão Johann Kepler (1571 – 1630).

Segundo Eves (1995), Galileu Galilei nasceu em Pisa e aos vinte e cinco anos foi indicado professor de Matemática da Universidade de Pisa, na qual, segundo consta, realizou experiências públicas sobre a queda de corpos. Ele deixou dois corpos com pesos diferentes caírem do alto da torre de Pisa e observou que os dois pedaços chocaram-se contra o chão praticamente no mesmo momento, contrariando assim Aristóteles, que dizia que o mais pesado teria de cair muito mais rapidamente do que o outro. Assim Galilei estabeleceu a lei segundo a qual a distância percorrida por um corpo em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda e se traduz na fórmula, vista na eq. 2:

$$s = \frac{gt^2}{2} \tag{2}$$

Em que:

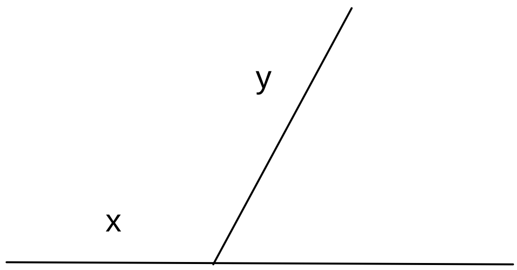
- s : distância;
- g : coeficiente gravitacional;
- t : tempo.

Em relação aos lançadores oblíquos, este fato demonstra que a componente do movimento vertical é uniformemente acelerada e o movimento da componente horizontal é uniforme, permitindo assim provar que a trajetória de um projétil lançado obliquamente é uma parábola.

Já René Descartes propôs um tratado filosófico sobre a ciência universal sob o título de *Discours de la Méthode pour Bien Conduire as Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (Discurso do Método para Bem Conduzir a Razão e Procurar a Verdade nas Ciências). Este tratado trouxe três apêndices, em que *La géométrie*, o terceiro apêndice do Discurso, consiste na única publicação de Matemática de Descartes (EVES, 1995).

> O apêndice *La géométrie* de Descartes, revela um avanço real em relação aos gregos, já que para eles uma variável correspondia ao comprimento de um segmento, o produto de duas variáveis à área de um quadrilátero e o produto de três variáveis ao volume de um paralelepípedo retângulo. Para Descartes, por outro lado, x^2 não sugeriria uma área, antes, porém o quarto termo de uma proporção, $1 : x = x : x^2$, suscetível de ser representado por um segmento de reta fácil de construir quando se conhece x. Desta forma, usando-se um segmento unitário é possível representar qualquer potência de uma variável, ou um produto de variáveis, por meio de um segmento de reta com instrumentos euclidianos. Com isso, ele marcava x num eixo dado e então um comprimento y, formando um eixo fixo (FIGURA 3) com estes segmentos, com o objetivo de construir pontos cujo x e cujo y satisfazem a relação dada. Se, por exemplo, tem-se a relação $y = x^2$, então, para cada valor de x, estamos em condições de construir o y correspondente como quarto termo da proporção acima, tendo ele interesse especial em obter relações como essa para curvas descritas cinematicamente (EVES, 1995, p.384).

FIGURA 3 – SEGMENTOS DE RETA.



FONTE: Eves (1995)

Assim, o sistema constituído por eixos ortogonais ficou conhecido por sistema cartesiano de retas; entretanto, as palavras “coordenadas”, “abscissas” e “ordenadas”, no sentido técnico que têm hoje, foram contribuições de Leibniz (1646 – 1716) em 1692. Este sistema possibilitou a representação gráfica do lançamento oblíquo, facilitando a visualização e estudo das parábolas.

2.7 SURGIMENTO DA EXPRESSÃO “FUNÇÃO” E SUA NOTAÇÃO

Ao longo da história, a ideia de função foi construída por vários matemáticos. O século XVII foi muito produtivo para o desenvolvimento da matemática, com tantas descobertas e pesquisas iniciadas, entre estas o início do Cálculo, por Isaac Newton (1643 – 1727) que desenvolveu métodos analíticos e tornou possível a resolução de vários tipos de problemas, como encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas, assim como máximos e mínimos de funções. Gottfried Wihelm Von Leibniz (1646 – 1716) elaborou uma notação apropriada, assim como nomeou o Cálculo Diferencial e Integral (EVES, 1995).

Ainda de acordo com Pitombeira e Roque (2012), Isaac Newton (1642 – 1727), foi quem desenhou e construiu o primeiro telescópio refletor parabólico e inventou o método dos fluxos, nome dado por ele ao atual Cálculo Diferencial. Já Leibniz (1646 – 1716) foi um matemático que em linguagem atual estabeleceu o seguinte: é sempre necessário determinar a variável em relação à qual se quer derivar, uma quantidade varia em função da outra, ou seja, já temos aqui uma noção implícita de variável dependente e independente, que antecede a noção de função. Leibniz criou os termos: “função”, “constante” e “variável”.

Segundo Eves (1995), nos séculos XVIII e XIX, se destacaram os matemáticos: Leonard Euler e Peter Gustav Lejeune Dirichlet. As contribuições de Euler (1707 – 1783) são inúmeras: criou várias fórmulas e notações, dentre elas $f(x)$ para funções, de utilização universal, indica a lei de uma função. Quando uma variável é dependente de outra de acordo com uma expressão analítica, se diz que y é uma função de x.

Já Dirichlet (1805 – 1859), nasceu em Düren e sucessivamente exerceu o magistério em Breslau e Berlim. Ex-aluno de Gauss, com a morte deste foi indicado para sucedê-lo em Göttingen. Entre seus estudos e contribuições, cabe a ele uma definição formal muito próxima da que se usa hoje: “*Se uma variável* y *está relacionada com uma variável* x*, de tal forma que sempre que um valor numérico é atribuído a* x*, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de* y *é determinado, então* y *diz-se uma variável independente* x”(EVES, 1995).

Somente após a elaboração da teoria dos conjuntos por Cantor (1845 – 1918), no final do século XIX, a definição de função foi assim citada: função é um conjunto de pares ordenados *(x,y)* em que x é elemento de um conjunto A, y é elemento de um conjunto B e $\forall x \in A, \exists | \, y \in B / (x,y) \in f$ (EVES, 1995).

2.8 APLICAÇÕES RECENTES

Aplicações recentes são encontradas nos trabalhos propostos por Suarez *et al.* (2012), Ninow e Kaiber (2016), Battisti e Ghisleni (2018) e Rosa, Lima e Palharini (2018), os quais descrevem e demonstram o procedimento para determinar o alcance e altura máxima de um projétil a partir de uma função quadrática, sua trajetória, e componentes de velocidade.

Conforme Suarez *et al*. (2012), seu trabalho foi realizado na cidade de Medellín, e tinha como objetivo construir uma catapulta (lançador oblíquo de projéteis), e apenas observar a relação entre a energia potencial e cinética do projétil a ser lançado.

Já Ninow e Kaiber (2016), demonstram a referência adotada pelo autor deste trabalho. Entretanto este aplicou seu trabalho a apenas um grupo de estudantes da 3ª série do Ensino Médio, com o objetivo de investigar o desenvolvimento da modelagem matemática. Ainda no trabalho aqui relatado, estão contidos: a construção do protótipo de lançador de projétil, o cálculo da trajetória e velocidade do projétil lançado e a elaboração dos gráficos: distância x altura, tempo x altura e tempo x distância, com suas respectivas análises.

No trabalho de Battisti e Ghisleni (2018), o tema é uma atividade elaborada e desenvolvida por bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), cujo objetivo era ampliar as compreensões do conceito de função quadrática e do currículo escolar com uma abordagem interdisciplinar e contextualizada.

Por fim, no trabalho de Rosa, Lima e Palharini (2018) foi desenvolvido um foguete de garrafa pet, sendo avaliadas no lançamento três categorias: alcance, mais tempo no ar e apresentação/ design. Com as medidas aproximadas do alcance, realizadas com uma trena, levaram os resultados para uma turma de 1ª série do Ensino Médio e calcularam teoricamente o valor da altura máxima, a velocidade inicial do projétil e a função que descreve o movimento parabólico do foguete.

2.9 MODELAGEM MATEMÁTICA E SUAS ARTICULAÇÕES.

Para Bassanezi (2006) a modelagem matemática consiste no uso da Matemática para a compreensão, simplificação e solução de problemas do cotidiano. O modelo matemático pode ser uma das possíveis representações, ou ainda a interpretação da realidade ou parte da realidade sendo que, na tentativa de compreender essa realidade, o indivíduo busque meios para atingi-la e a ressignificar.

Além disso, ele sugere que após a escolha do tema e/ou problema a ser estudado, o trabalho com a modelagem matemática seja organizado da seguinte forma:

(i) Experimentação: consiste na obtenção dos dados;
(ii) Abstração: deve levar à formulação dos modelos através da seleção de variáveis, da formulação de hipóteses, da formulação de problemas e simplificação do sistema para restringir a quantidade de variáveis de modo que o problema seja tratável;
(iii) Resolução: é a obtenção do modelo com a tradução da linguagem natural das hipóteses para uma linguagem matemática;
(iv) Validação: ato de aceitação ou rejeição do modelo conforme o grau de aproximação que ele tem do objeto de estudo;
(v) Modificação: consiste em elaborar ou melhorar o modelo sob novas hipóteses, dadas no intuito de qualificar o grau de aproximação com a realidade.

Todas essas fases estão interligadas, são processos interconectados ou por seus produtos ou por seus resultados.

Já Biembengut e Hein (2007) alegam que a modelagem matemática pode ser aplicada desde as séries iniciais até as pós-graduações, e acrescentam que seus objetivos como estratégia de ensino são:

(i) Aproximar outra área do conhecimento da Matemática;
(ii) Enfatizar a importância da Matemática para a formação do estudante;
(iii) Despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;
(iv) Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
(v) Desenvolver a habilidade para resolver problemas;
(vi) Estimular a criatividade.

Malheiros (2008) busca estabelecer uma relação entre a teoria e a prática, com uma proposta de mudança na organização curricular da escola, e propõe a possibilidade do conhecimento tornar-se significativo ao estudante, quando esse faz conexões com a realidade, com aquilo que já sabe sobre a questão em estudo, tendo ele suas referências internas e externas, as quais, por meio do diálogo e questionamentos entre professor e estudante, se constituirão adequadamente num processo de ensino-aprendizagem.

Assim, a modelagem matemática, por suas características, pode revelar-se como um diferencial no ensino da matemática, pois distanciada do tecnicismo e de pressupostos autoritários da relação professor – estudante, pode contribuir significativamente para avanços qualitativos em um Ensino de Matemática mais expressivo para os estudantes, enquadrando-se no pensamento emergente, fundamentado na transversalidade, na interdisciplinaridade e na contextualização (MORIN, 1998).

Com esta mesma linha teórica, as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio sinalizam que a ideia de modelagem matemática favorece a criação de estratégias de organização dos conhecimentos escolares, ao integrar os diferentes saberes de cada componente curricular. Pode iniciar a partir de uma questão problema, uma temática ou um conjunto de questões inter-relacionadas. Entretanto, deve ter como prioridade o estudo de um tema que seja de interesse dos estudantes, de forma que se promova a interação social e a reflexão sobre problemas que fazem parte da sua realidade (BRASIL, 2006).

Para o desenvolvimento do presente trabalho, adotou-se a linha teórica de Bassanezzi (2006) da modelagem matemática, com vistas a contribuir para os estudos sobre a função quadrática e contribuir com alternativas metodológicas para o ensino desse tema na primeira série do Ensino Médio.

CAPÍTULO 3

3 DESENVOLVIMENTO DO PROJETO FUNÇÃO QUADRÁTICA: LANÇAMENTO OBLÍQUO DE PROJÉTEIS

Neste capítulo são apresentadas as etapas de planejamento do lançador, os procedimentos para cálculo das estimativas do alcance, altura máxima e velocidade inicial do projétil em relação ao eixo y, além da formulação da função quadrática que representa a trajetória. No ANEXO A propõe-se um roteiro resumo/esquema de aulas de função quadrática relacionando o assunto com o lançador oblíquo de projéteis.

3.1 A ATIVIDADE DESENVOLVIDA: ASPECTOS METODOLÓGICOS

A atividade “Função Quadrática: lançamento oblíquo de projéteis” é desenvolvida no Colégio Nossa Senhora Medianeira, em Curitiba/PR, Brasil, por estudantes da primeira série do Ensino Médio, como parte integrante do currículo e se constitui em uma das partes do sistema avaliativo, na forma de um trabalho/prova compondo a nota do segundo trimestre. O objetivo é qualificar a compreensão dos conceitos de função quadrática em Matemática e MRU, MRUV e Lançamento Oblíquo em Física.

No desenvolvimento desta atividade, optou-se por uma investigação de base qualitativa e quantitativa, que segundo Bogdan e Biklen (1994), se caracteriza por ter o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento, a predominância de dados descritos e as análises tendendo a seguir um processo indutivo. Esses autores sinalizam ainda que, nesse tipo de pesquisa, o processo é mais importante que o produto, sendo que o destaque é para o significado que os estudantes atribuem às coisas.

A partir desse contexto, os procedimentos e instrumentos adotados pelo professor/pesquisador para a coleta de dados e análise das atividades desenvolvidas contaram com a observação e registro em campo, gravações de vídeo, fotos das atividades realizadas, análise dos registros da produção dos estudantes, a partir das atividades, redação do trabalho/prova e apresentações destes.

3.2 A ATIVIDADE: "FUNÇÃO QUADRÁTICA: LANÇAMENTO OBLÍQUO DE PROJÉTEIS"

Esta atividade iniciou-se, apenas nas aulas da disciplina de Matemática, em 2010 e 2011, como forma de motivação aos estudantes que tinham interesse em compreender melhor os conceitos envolvendo função quadrática. No início, tinha como propósito a construção do protótipo e observação da parábola descrita no lançamento oblíquo do seu projétil.

Na sequência, em 2012 e 2013, a atividade que havia repercutido tão bem entre os estudantes nos anos anteriores, passou a ser considerada um trabalho e incluída na composição da média do sistema avaliativo da disciplina, abrangendo a todos os estudantes da série.

Já em 2014, a disciplina de Física aderiu à proposta da atividade, e o trabalho foi estruturado, na época, com as seguintes fases: construção do protótipo, estudo da sua parábola, observação e descrição da fórmula da trajetória da parábola descrita no lançamento oblíquo do projétil, a determinação da sua altura máxima e seu alcance.

E a partir de 2015, a atividade que passou a ser *trabalho* se tornou uma *prova*, por isso chamamos de trabalho/prova, compondo a média do sistema avaliativo das disciplinas de Matemática e Física, no segundo trimestre do ano letivo. Qualificando-o a cada ano, desde 2010, e no ano de 2018, o trabalho/prova foi encaminhado aos estudantes, no início de maio tendo como prazo até agosto para o desenvolvimento de todas as suas fases, que estão descritas a seguir.

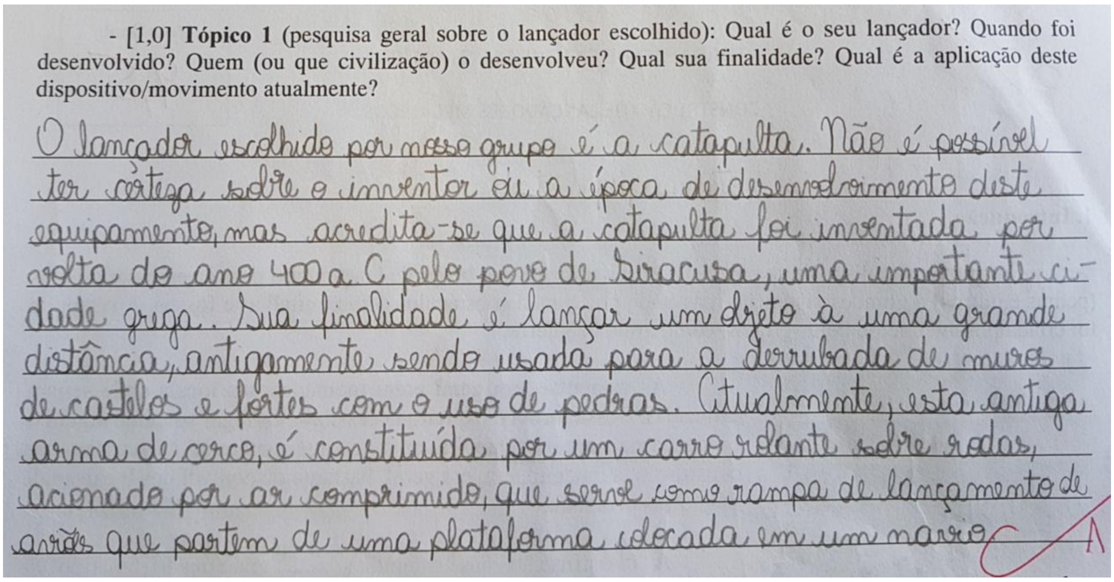
Com a seguinte temática, "Função Quadrática: lançamento oblíquo de projéteis" se iniciam em Matemática os estudos sobre função quadrática e em Física os estudos sobre MRU, MRUV e Lançamento Oblíquo. Este trabalho/prova ao qual chamaremos de atividade, com duração de quatro meses, é desenvolvido seguindo as fases propostas pela metodologia de modelagem matemática, já destacada, as quais passam a ser descritas e analisadas.

Na primeira fase, as turmas são divididas em grupos de no máximo três estudantes que recebem a proposta da atividade. Neste momento, se apresentam a eles algumas formas de lançadores, como as catapultas, os chafarizes, as bestas e os morteiros. A partir disso, os grupos começam a discutir e escolher sobre qual lançador pretende desenvolver sua atividade.

Escolhido o lançador, eles devem relatar (FIGURA 4):

(i) Qual é o seu lançador?
(ii) Quando foi desenvolvido?
(iii) Quem (ou que civilização) o desenvolveu?
(iv) Qual sua finalidade?
(v) Qual é a aplicação deste dispositivo/movimento atualmente?

FIGURA 4 – QUESTIONÁRIO SOBRE LANÇADOR ESCOLHIDO.



- [1,0] **Tópico 1** (pesquisa geral sobre o lançador escolhido): Qual é o seu lançador? Quando foi desenvolvido? Quem (ou que civilização) o desenvolveu? Qual sua finalidade? Qual é a aplicação deste dispositivo/movimento atualmente?

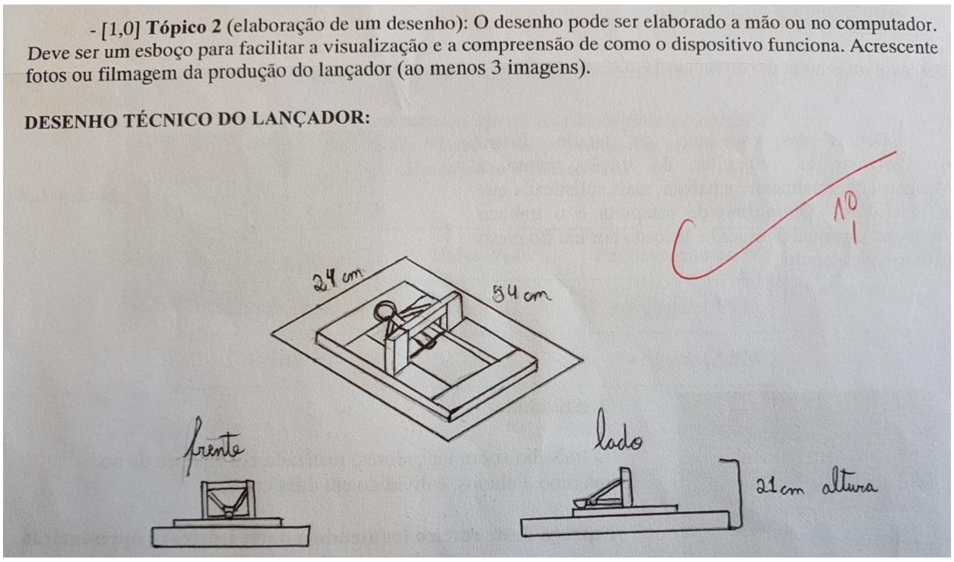
O lançador escolhido por nosso grupo é a catapulta. Não é possível ter certeza sobre o inventor ou a época de desenvolvimento deste equipamento, mas acredita-se que a catapulta foi inventada por volta do ano 400 a.C pelo povo de Siracusa, uma importante cidade grega. Sua finalidade é lançar um objeto à uma grande distância, antigamente sendo usada para a derrubada de muros de castelos e fortes com o uso de pedras. Atualmente, esta antiga arma de cerco, é constituída por um carro rolante sobre rodas, acionado por ar comprimido, que serve como rampa de lançamento de aviões que partem de uma plataforma colocada em um navio.

A

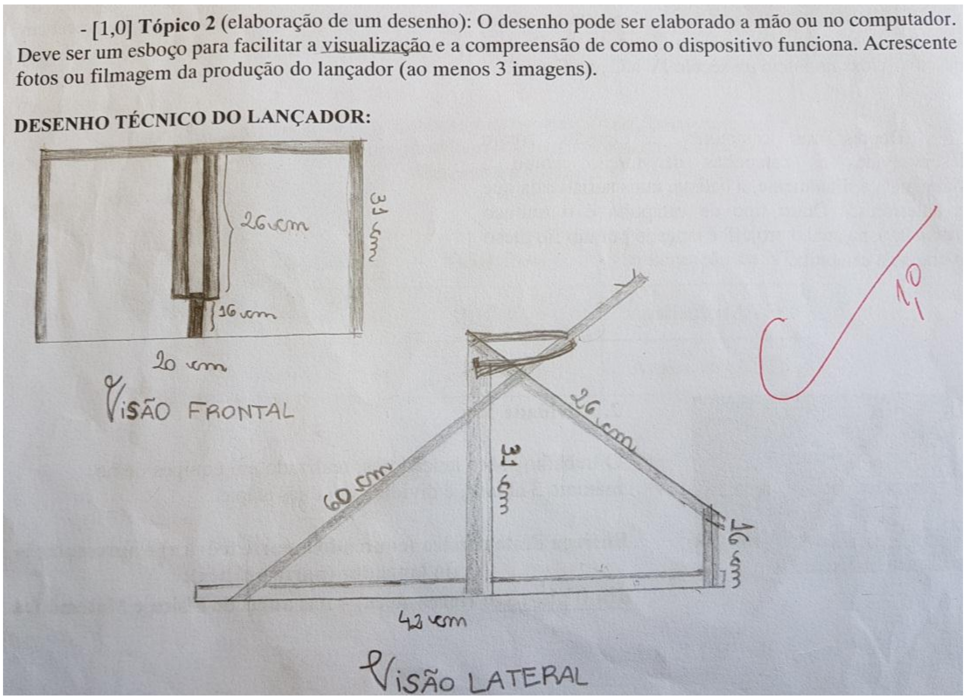
Na segunda fase, já escolhido o lançador e realizado um levantamento de seu estado da arte, os grupos devem elaborar um desenho, podendo ser este feito à mão ou utilizando um *software*. Deve ser um esboço para facilitar a visualização e compreensão de como o dispositivo funciona, e ainda dar uma noção das medidas e quantidades de materiais que devem ser comprados para a construção do protótipo. Na FIGURA 5, apresentam-se estes desenhos.

FIGURA 5 – DESENHO TÉCNICO DO LANÇADOR.

(a) DESENHO EM PERSPECTIVA, FRONTAL E LATERAL



(b) DESENHO DA VISTA FRONTAL E LATERAL



A partir da terceira fase, inicia-se a construção do protótipo que representa o lançador escolhido por cada grupo. Para tal, devem-se ater às seguintes instruções.

Quanto ao lançador:

(i) Dimensões máximas: 1,0 m x 1,0 m x 1,0 m;
(ii) Materiais: livre;
(iii) Tipos de lançadores permitidos:

- Catapulta: mola, tração, contrapeso, *Da Vinci*,...;
- *Trebuchet;*
- Morteiro mecânico;
- Besta com projétil a ser lançado sem ponta;
- Balista com projétil a ser lançado sem ponta;
- Chafariz;
- Outras propostas desde que previamente apresentadas aos Professores orientadores.

Quanto ao formato dos projéteis:

(i) Não é permitido o uso de projéteis pontiagudos ou cortantes;
(ii) O projétil pode conter massa de 10 g a 200 g.

Cada grupo deve registrar com filmagem ou no mínimo de três fotos o processo de construção do protótipo. As FIGURAS 6, 7 e 8 demonstram esta etapa realizada pelos grupos.

A FIGURA 6 apresenta um grupo finalizando a construção da sua besta e ela finalizada.

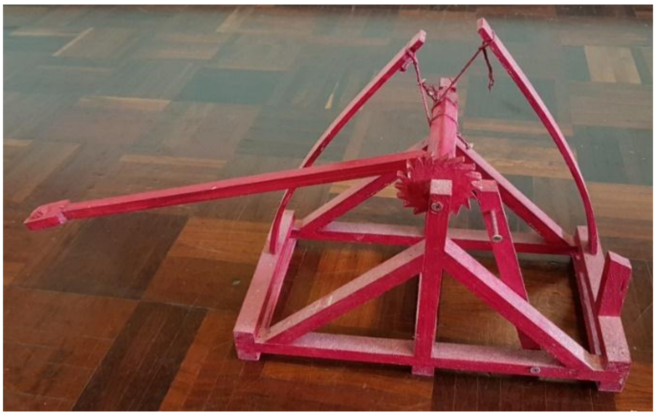
FIGURA 6 – CONSTRUÇÕES E PROTÓTIPOS.

(a) CONSTRUÇÃO DA BESTA (b) BESTA

A FIGURA 7 apresenta dois outros exemplos de lançadores construídos: a catapulta da Vinci e outra de tração.

FIGURA 7 – CATAPULTAS

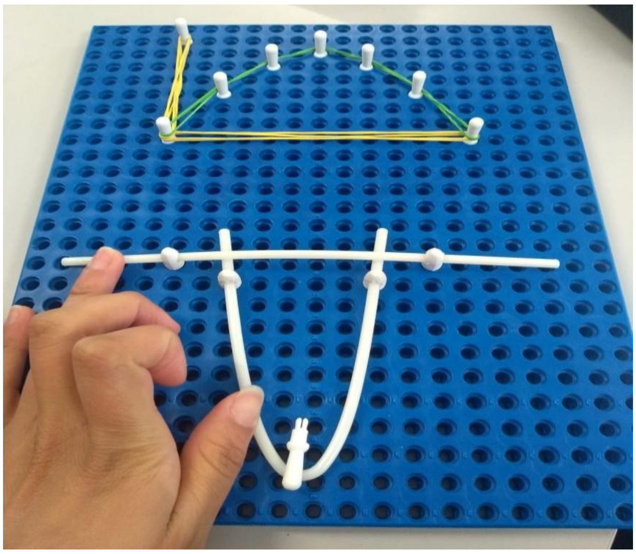
(a) CATAPULTA DA VINCI



(b) CATAPULTAS TRAÇÃO

A FIGURA 8 apresenta uma catapulta construída em um geoplano, um desafio encontrado e superado, pois foi realizado por um estudante com deficiência visual, seu foco foi compreender através de um lançador o significado das parábolas.

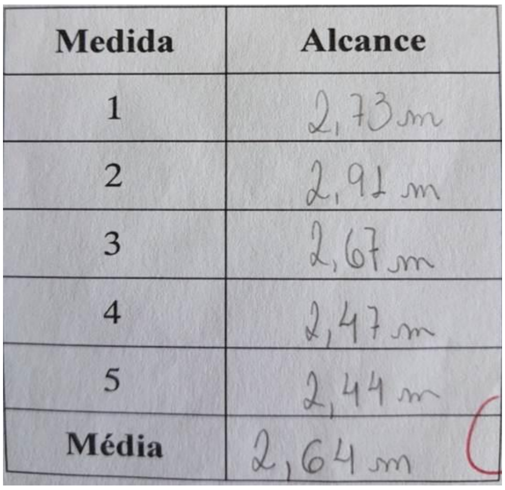
FIGURA 8 – CATAPULTA EM UM GEOPLANO NO AUXÍLIO DE UM DEFICIENTE VISUAL



Agora na quarta fase da atividade, com o protótipo construído, os grupos passam a debruçar-se sobre as observações dos conceitos já estudados nas respectivas disciplinas de Matemática e Física e iniciam a coleta de dados.

O primeiro dado a ser determinado é o alcance, para isso estrutura-se inicialmente uma tabela (FIGURA 9) para registrarem ao menos cinco lançamentos e calcularem a média dos valores obtidos após estes lançamentos, para análises posteriores.

FIGURA 9 – REGISTRO DOS ALCANCES E CÁLCULO DA MÉDIA.



Medida	Alcance
1	2,73 m
2	2,91 m
3	2,67 m
4	2,47 m
5	2,44 m
Média	2,64 m

A partir da observação da parábola, o segundo dado a ser determinado pelos grupos é a fórmula matemática que representa a função da trajetória descrita pelo projétil. Para isso, cada grupo deve registrar três pontos da parábola (pares ordenados), que podem ser encontrados com as seguintes orientações:

(i) O primeiro ponto a ser considerado pelo grupo deve ser o ponto inicial do projétil, ou seja, ponto de partida do projétil. Este ponto em que o projétil sai do lançador pode ser considerado $(0, y_1)$. Valor inicial com relação ao eixo x igual a zero e com relação ao eixo y, a altura relativa deste ponto ao chão, chamada de y_1.

(ii) O segundo ponto a ser considerado, pode ser o alcance do protótipo, já determinado pelo grupo anteriormente, tendo assim o par ordenado $(x_2, 0)$. A abscissa x_2, refere-se à medida do alcance, determinada com a média encontrada da (FIGURA 7) e ordenada zero, já que o projétil finaliza ao bater no chão o seu movimento oblíquo.

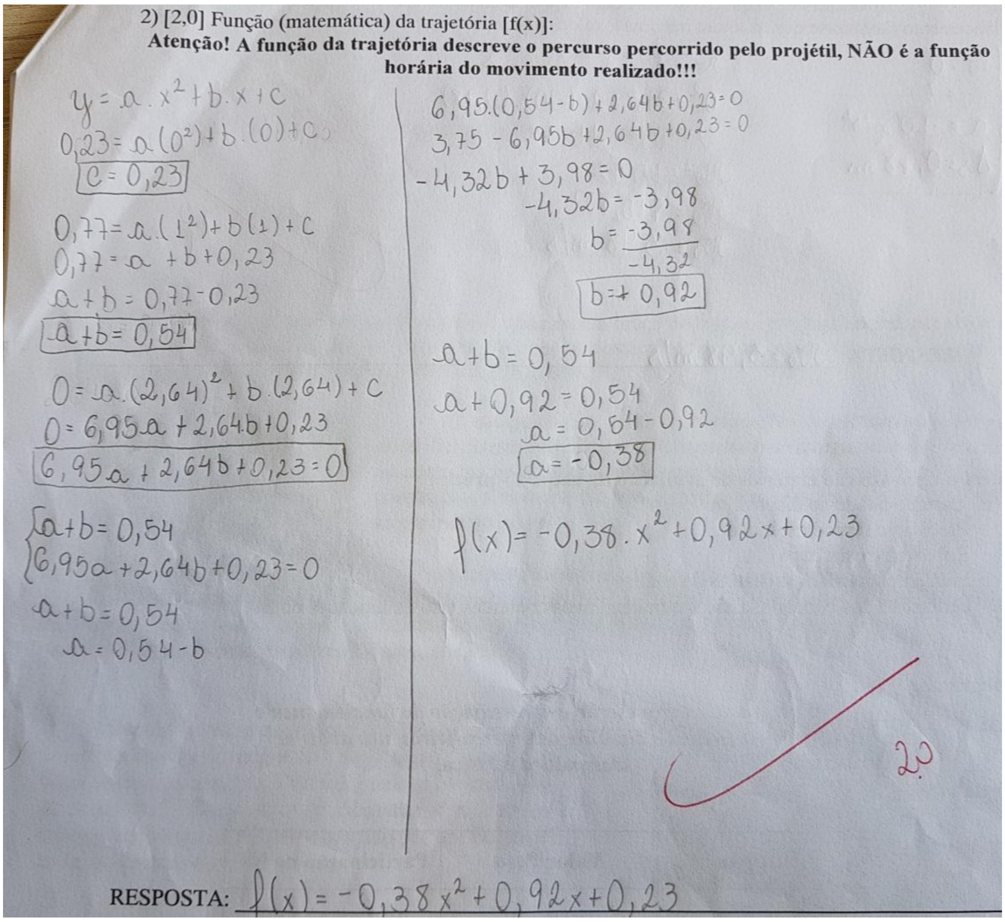
(iii) O terceiro ponto pode ser determinado com o projétil sendo lançado em uma parede. Como exemplo, o ponto (x_3, y_3), tem-se a medida da abscissa x_3 realizada com uma trena, medindo a distância do protótipo até a parede e a ordenada y_3 medida em que o projétil bateu na parede.

Assim, têm-se três pares ordenados. Com estes três pares, pode-se montar um sistema de equações ao substituí-los na forma geral da função quadrática (eq.3) e determinar os coeficientes a, b e c.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{3}$$

Substituindo-se estes coeficientes, tem-se a função que representa a parábola da trajetória do projétil no seu lançamento oblíquo, a FIGURA 10 representa este procedimento.

FIGURA 10 – FÓRMULA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA QUE REPRESENTA A TRAJETÓRIA DA OBLÍQUA DO LANÇAMENTO.



2) [2,0] Função (matemática) da trajetória [f(x)]:

Atenção! A função da trajetória descreve o percurso percorrido pelo projétil, NÃO é a função horária do movimento realizado!!!

$y = a.x^2 + b.x + c$

$0,23 = a(0^2) + b.(0) + c$

$\boxed{c = 0,23}$

$0,77 = a.(1^2) + b(1) + c$

$0,77 = a + b + 0,23$

$a + b = 0,77 - 0,23$

$\boxed{a + b = 0,54}$

$0 = a.(2,64)^2 + b.(2,64) + c$

$0 = 6,95a + 2,64b + 0,23$

$\boxed{6,95a + 2,64b + 0,23 = 0}$

$\begin{cases} a + b = 0,54 \\ 6,95a + 2,64b + 0,23 = 0 \end{cases}$

$a + b = 0,54$

$a = 0,54 - b$

$6,95.(0,54 - b) + 2,64b + 0,23 = 0$

$3,75 - 6,95b + 2,64b + 0,23 = 0$

$-4,32b + 3,98 = 0$

$-4,32b = -3,98$

$b = \frac{-3,98}{-4,32}$

$\boxed{b = +0,92}$

$a + b = 0,54$

$a + 0,92 = 0,54$

$a = 0,54 - 0,92$

$\boxed{a = -0,38}$

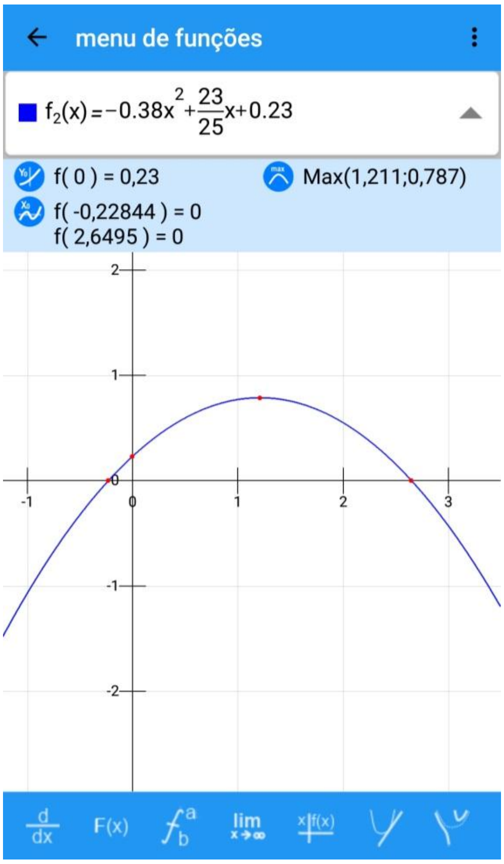
$f(x) = -0,38.x^2 + 0,92x + 0,23$

2,0

RESPOSTA: $f(x) = -0,38x^2 + 0,92x + 0,23$

Neste momento é sugerido aos grupos que utilizem um *software* (GeoGebra) ou um aplicativo de celular (*Mathematics*) para que esbocem a parábola representada pela função encontrada como solução. Seu objetivo é visualizar se os cálculos efetuados, de fato, verificam o fenômeno observado. O aplicativo *Mathematics*, gerou a seguinte imagem, apresentada na FIGURA 11.

FIGURA 11 – PARÁBOLA DADA PELA FUNÇÃO PROPOSTA.



Na FIGURA 11, podem-se verificar vários resultados, entre eles:

(i) Observação da concavidade da parábola, como o coeficiente a é negativo, tem-se a parábola com concavidade para baixo;

(ii) O primeiro ponto $f(0) = 0{,}23$, representa o ponto inicial, ponto que o grupo escolheu como referência das medidas do lançamento. A ordenada 0,23 m corresponde à altura inicial no momento em que o projétil deixou o lançador.

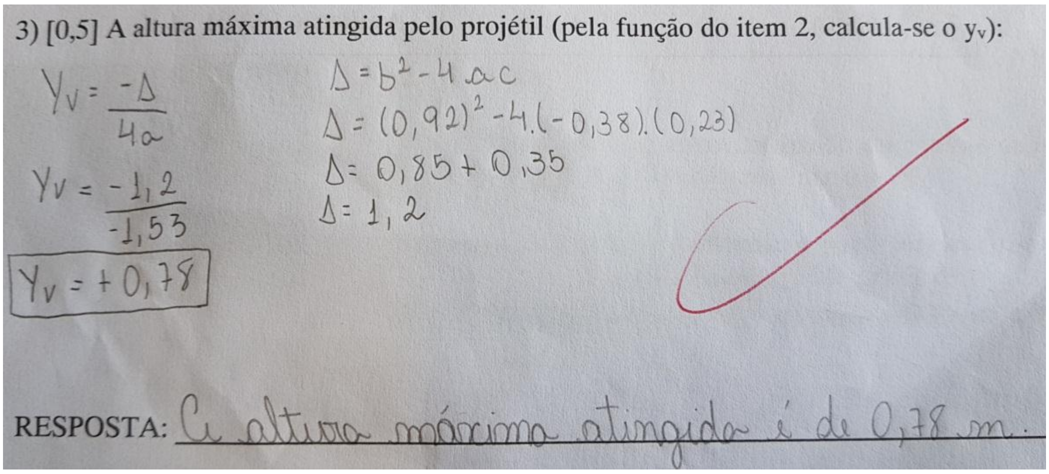
(iii) O segundo ponto $f(2{,}6495) = 0$, representa o alcance do projétil após seu lançamento, neste momento o grupo pode retornar a FIGURA 9 e comparar se o resultado da média lá obtida corresponde à abscissa encontrada do ponto em questão.

(iv) O terceiro ponto $Max(1{,}211;0{,}787)$, representa o vértice da parábola. Neste item, o que chama atenção é a altura máxima atingida pelo projétil, no caso 0,787 m, medida está a ser verificada na FIGURA 12.

Neste momento, com a análise dos resultados encontrados no *software*, é possível tomar a seguinte decisão: a atividade é continuada se os cálculos algébricos conferem com os projetados no aplicativo, ou se tem a necessidade de revisar as demarcações anteriores; nesta situação, os grupos precisam refazer as medições e reiniciar seus cálculos.

O terceiro dado é o cálculo da altura máxima atingida pelo projétil (FIGURA 12).

FIGURA 12 – CÁLCULO DA ALTURA MÁXIMA.



Este valor está associado ao vértice V, representado por (x_v, y_v) da parábola descrita pelo movimento do projétil e pode ser determinado por y_v (eq. 4).

$$y_v = -\frac{b^2 - 4.a.c}{4a} \quad (4)$$

O quarto dado é a estimativa do módulo da componente vertical da velocidade inicial do lançamento (FIGURA 13), para isso, utiliza-se a equação de Torricelli (eq. 5). Neste passo, é fundamental lembrar que na altura máxima a velocidade no eixo y é nula, pois é o ponto de inflexão do projétil.

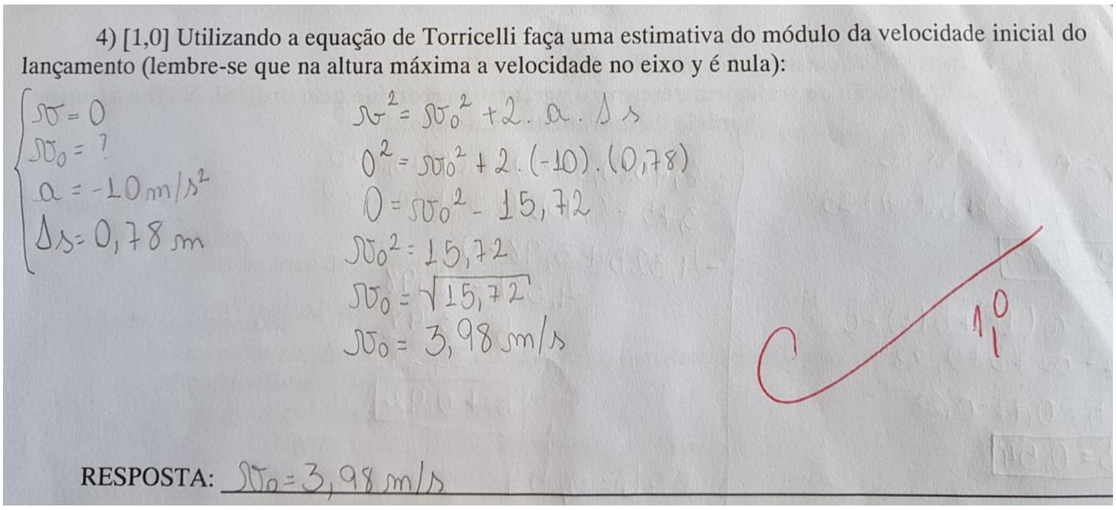
$$v^2 = v_{0^2} + 2 \cdot a \cdot \Delta S \quad (5)$$

Em que:

- v : velocidade final;
- v_0 : velocidade inicial;

- a : aceleração;
- ΔS : distância percorrida pelo móvel.

FIGURA 13 – VELOCIDADE INICIAL DO PROJÉTIL EM RELAÇÃO AO EIXO Y.



4) [1,0] Utilizando a equação de Torricelli faça uma estimativa do módulo da velocidade inicial do lançamento (lembre-se que na altura máxima a velocidade no eixo y é nula):

$v = 0$
$v_0 = ?$
$a = -10 m/s^2$
$\Delta s = 0,78 m$

$v^2 = v_0^2 + 2 . a . \Delta s$
$0^2 = v_0^2 + 2 . (-10) . (0,78)$
$0 = v_0^2 - 15,72$
$v_0^2 = 15,72$
$v_0 = \sqrt{15,72}$
$v_0 = 3,98 m/s$

1,0

RESPOSTA: $v_0 = 3,98 m/s$

Importante salientar que não foi possível calcular a componente da velocidade inicial em relação ao eixo x, na proposta apresentada aos estudantes, pois eles não estimaram o ângulo de inclinação do lançamento do projétil, nem o tempo total do movimento do mesmo, dados estes necessários para o cálculo da componente da velocidade do eixo x.

O quinto e último passo é a avaliação da atividade (FIGURA 14). Esta se realiza em uma data pré-agendada, em que todos os estudantes apresentam seus protótipos e realizam três lançamentos de seus projéteis, explicando à turma e aos Professores de Matemática e Física o seu desenvolvimento. O interessante é a variedade de protótipos lançadores apresentados, a criatividade de cada grupo para seu desenvolvimento e construção, o desafio em descrever as soluções algébricas a partir de fenômenos, mas principalmente a visualização da aplicação de conceitos estudados teoricamente em livros e sala de aula na sua prática.

Como critérios da avaliação realizada pelos Professores de Matemática e Física, tem-se:

(i) Complexidade do dispositivo;
(ii) Precisão e reprodutibilidade;
(iii) Robustez (resistência);
(iv) Elementos teóricos (questões de análise);

(v) Utilização dos conceitos físicos e matemáticos coerentes e uso de unidades no Sistema Internacional de Medidas.

FIGURA 14 – APRESENTAÇÃO DOS LANÇADORES.

3.3 QUESTIONÁRIO APLICADO SOBRE A AVALIAÇÃO DOS LANÇADORES

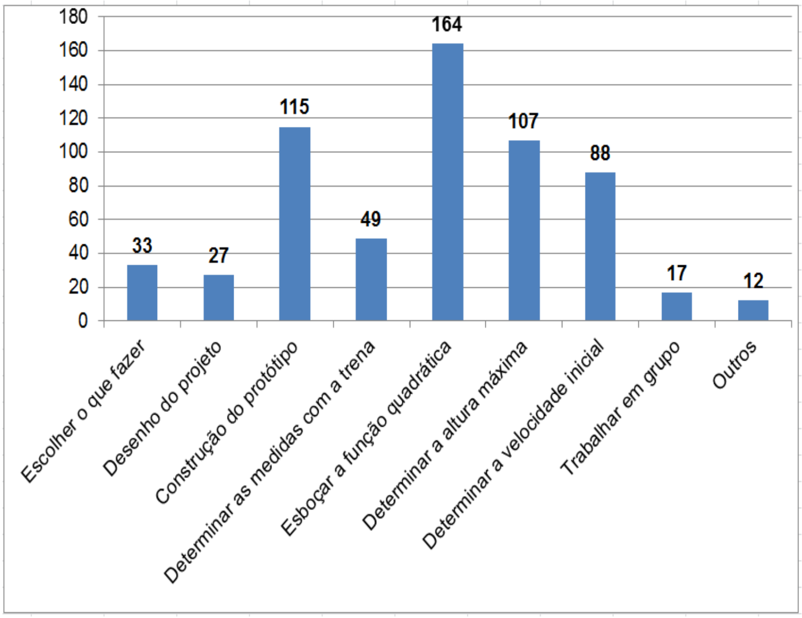
Como forma de retomada da atividade e sua avaliação, perspectivas de melhorias e qualificações, aplicou-se um questionário aos estudantes, o ANEXO B apresenta o questionário na íntegra. Primeiramente foi levantado o ano em que o estudante realizou a atividade, se já concluiu o ensino médio, se frequenta ou frequentou um curso universitário, qual é. A intenção é saber se ele fez algo similar na universidade ou se o projétil lhe foi útil em algum momento posterior.

Outro fator é saber o que construiu o grupo na época da realização da atividade. A partir disso, se fez uma enquete para estabelecer quais foram as principais dificuldades encontradas. Exemplo:

(i) Escolha do que fazer;
(ii) Desenho do projeto;
(iii) Construção do protótipo;
(iv) Determinar as medidas com a trena;
(v) Esboçar a fórmula da função quadrática;
(vi) Determinar a altura máxima atingida pelo projétil;
(vii) Determinar a velocidade inicial do projétil;
(viii) Trabalhar em grupo;
(ix) Outros________________________.

Assim foi possível ranquear as respostas às perguntas tendo em vista as frequências registradas, como ilustra a FIGURA 15.

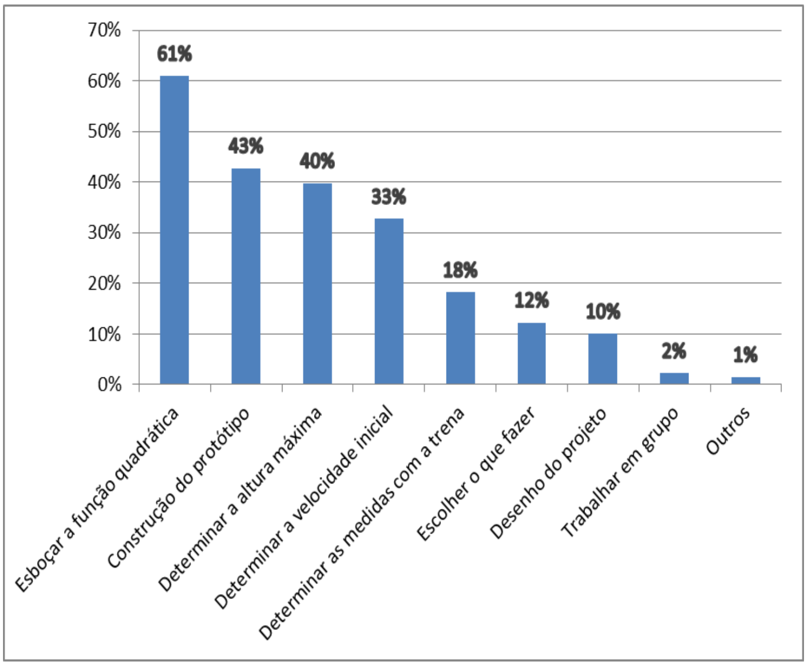
FIGURA 15 – ETAPAS DA ATIVIDADE E SUAS DIFICULDADES.



Responderam a enquete 269 estudantes podendo escolher mais de uma alternativa entre as apresentadas. Observa-se, na FIGURA 15, com relação ao eixo das abscissas, a ordem cronológica do desenvolvimento da atividade, assim ficam evidentes as fases da atividade em que os grupos encontraram maiores dificuldades, como: a construção do protótipo, o esboço da fórmula da função quadrática da trajetória do projétil e a determinação da altura máxima.

Já a FIGURA 16, apresentam as dificuldades em porcentagem de forma decrescente.

FIGURA 16 – RELAÇÃO DAS DIFICULDADES NO DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE



A principal dificuldade apresentada pelos grupos durante a atividade ratificada pela FIGURA 16 foi esboçar a fórmula da função quadrática da trajetória do projétil (61%), pois a partir do registro de três pontos da parábola (pares ordenados) cada grupo deve resolver um sistema de equações três por três (três incógnitas e três equações), situação que para a maioria dos grupos é a primeira vez que se depara com a resolução de tal sistema. A construção do protótipo e a determinação da altura máxima do projétil também se ratificam como as principais dificuldades.

Já escolher o que fazer, desenhar o projeto (protótipo) e trabalhar em grupo consiste nas menores dificuldades, isto se evidencia pelo fato dos estudantes terem a autonomia em montarem seus grupos, assim a maior parte dos grupos formados tem grande afinidade entre seus integrantes, a partir daí procuram escolher o protótipo que acreditam ser mais interessante para construir, mais fácil ou desafiador dependendo do perfil de cada grupo.

Ainda verificou-se no questionário, o que os ajudou na aprendizagem da função quadrática em Matemática e no estudo dos movimentos em Física. Entre as principais considerações, ressaltam-se alguns depoimentos:

“Ajudou a reforçar os conceitos de parábola, ponto máximo e mínimo, x_v e y_v, olhar a função e determinar onde corta o eixo y, a curvatura da concavidade. Em resumo, qualificou o conteúdo”.

“Aplicação prática de fórmulas matemáticas e físicas em projetos”.

“A construção do lançador me ajudou a colocar os problemas teóricos em prática”.

“Ajudou na aprendizagem de função quadrática e no estudo de Movimento em Física, pois eu pude ver na prática como os cálculos trabalhados em aula funcionam”.

Finalizando o questionário, está o relato de estudantes que já cursaram alguma universidade ou que estão cursando e realizaram atividades semelhantes, entre estes depoimentos, tem-se:

Estudante do curso de Engenharia Mecânica da UFPR, “na disciplina de Introdução à Engenharia Mecânica, primeiro semestre 2018, tivemos um trabalho de construir catapultas. Na ocasião, contudo, almejava-se atingir um alvo no chão à cinco metros de distância e as catapultas tinham que ter propulsão por molas ou elásticos. A experiência foi bastante inferior à da primeira série do Ensino Médio. Isso porque o tipo de propulsão obrigatório reduziu a criatividade e a graça do trabalho. O grupo que não escolhesse o modelo mais simples (estilingue) era indiretamente prejudicado por ter mais dificuldades em atingir o alvo. Atingir o alvo era mais importante que a catapulta em si. Um ponto positivo do trabalho, contudo, foi que apresentamos para a turma o projeto como quem vende um produto. Apontando as partes robustas, o motivo de cada material (madeira, pvc, ...)”.

Estudante do curso de Matemática, “já entendia bem o assunto na época, foi bom ver o conteúdo sendo aplicado na prática”.

Com isso os estudantes perpassaram por conceitos apresentados pela função quadrática, tais como a concepção de sua parábola e possíveis análises.

CAPÍTULO 4

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na primeira parte da proposta, o envolvimento dos estudantes com a criação e construção do protótipo permitiu desenvolver trabalhos manuais, o que gerou desconforto para alguns estudantes, pois foi a primeira vez que utilizaram martelo, prego, serrote, furadeira e trena. Entretanto depois de construídos os protótipos, os relatos dos estudantes, de modo geral, citam que mais de 50% gostaram da experiência e agradeceram pela oportunidade de realizá-la. Sobre este aspecto ressalta-se o valor da Matemática aplicada a fenômenos observados no cotidiano, a importância da manipulação de instrumentos de medida e ferramentas para a construção dos protótipos.

Na segunda fase, as aplicações dos conceitos vistos nas aulas de Matemática e Física, os estudantes retrataram que a principal dificuldade, como registrado no subitem 3.4, foi a medição dos pontos necessários para o modelamento da fórmula da trajetória oblíqua representada por uma função quadrática do projétil. Entretanto, após auxílio e orientações dos professores e demais estudantes que já haviam concluído e/ou melhor compreendido como fazer, esta fase foi sendo superada pelos grupos, que motivados pelo resultados encontrados, compreenderam melhor os conceitos.

No que se refere à modelagem matemática, além dos conteúdos abordados, possibilitou aos estudantes compreenderem assuntos (que descrevam parábolas) no cotidiano, aproximando os conteúdos matemáticos com situações da vida social, demonstrando situações em que eles estão inseridos, como nos esportes e em particular o lançamento de uma bola de basquete à cesta. Considera-se ainda que elementos da modelagem matemática fossem utilizados durante a atividade, pois cada grupo gerou um expressivo conjunto de dados de forma experimental, utilizando-os para as aproximações aos modelos já existentes, buscando soluções para os problemas que surgiram durante a atividade. Assim, cálculos foram confrontados e avaliados, hipóteses foram verificadas e soluções que não atendiam ao problema em questão puderam ser revistas ou descartadas.

Em tempo, registra-se a troca de papel entre estudante e professor observado em determinados momentos da execução da atividade, onde os estudantes mostraram-se atuantes, participativos e comprometidos com a construção de um conhecimento matemático sobre função quadrática de forma coletiva, cujo professor acabou tendo um importante papel mediador, incentivador e colaborador com o processo aprendizagem.

Considera-se ainda que um dos principais ganhos deste trabalho esteve na oportunidade fornecida aos estudantes de perceberem a riqueza da experiência concreta (projetar, desenhar, cortar, medir, fazer, visualizar e manipular) em ligação com a abstração (simular, a partir do que acontece, usando medidas e ângulos). A partir disso, investigar os conceitos que envolvem a função quadrática, percebendo-se o caminho natural percorrido pela própria Matemática, trabalhando em grupo, em um campo do conhecimento (não apenas em uma disciplina escolar).

Retomando uma das referências utilizadas, e baseando-se no trabalho de Ninow e Kaiber (2016), cabe destacar em que o presente trabalho complementa os referidos autores, principalmente quando são comparados os seguintes pontos:

(i) este trabalho é realizado por todos os estudantes da 1ª série do Ensino Médio, enquanto o trabalho do Ninow e Kaiber é realizado por apenas 4 estudantes da 3ª série do ensino Médio;
(ii) apenas este trabalho propõe uma reflexão histórica do lançador de projéteis escolhida pelo grupo e
(iii) solicita a cada grupo um desenho/esboço do lançador.
(iv) ambos trabalhos apresentam a construção dos protótipos, tabela de lançamentos dos projéteis e formulação da lei matemática que representa a trajetória do projétil obliquamente lançado
(v) apenas o trabalho de Ninow e Kaiber apresentam a construção dos gráficos distância x altura, tempo x altura e tempo x distância
(vi) entretanto apenas este trabalho possibilitou a troca de experiência entre os estudantes durante a apresentação dos diversos lançadores de projéteis, (FIGURA14) a suas respectivas turma, pois cada grupo foi avaliado conforme critérios vistos no subitem 3.3.

Ressalta-se que todos os objetivos do presente trabalho foram alcançados e para trabalhos futuros, o estudo pode ser conduzido para:

(i) o cálculo da velocidade em relação ao eixo x e cálculo da velocidade inicial resultante, cuja finalidade relaciona-se à análise do MRU e MRUV e
(ii) os gráficos que relacionam estes movimentos ao projétil lançado, como: distância x altura, tempo x altura e tempo x distância.
(iii) a análise de propriedades matemáticas como conjunto domínio da função, conjunto imagem;
(iv) desenvolvimento de atividades sobre o tema função quadrática com foco para o aprendizado de estudantes com necessidades especiais.

Por fim, entende-se que este trabalho pode servir como uma alternativa para o planejamento de aulas sobre o tema função quadrática incitando a participação dos estudantes e explorando a riqueza da experiência concreta conectada à abstração.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, P. P.; SANTOS, M. H.S. M. **Principais dificuldades de alunos do 2º ano do ensino médio quanto a interpretação gráfica da função quadrática**. I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2009.

ABDANUR, P. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa de ensino**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2006.

ÁVILA, G. S. S. **Várias faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura em geral**. 2ª Ed., Blucher, São Paulo, 2010.

BASSANEZZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2006.

BATTISTI, I. K.; GHISLENI, L. P. **A Matemática da catapulta: Qual o exato momento em que o projétil alcança a altura máxima? Feira Regional de Matemática do RS**, [S.l.], v. 1, n. 1, jun. 2018. Disponível em: <https://publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/feiramatematica/article/view/9102>. Acesso em: 17 out. 2018.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4ª ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto editora, 1994.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/ Secretária da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/ SEF, v.2, 2006.

BUENO, C. S. **Educação Matemática no ciclo de alfabetização: entrelaços da formação de professores com a tecnologia, discutindo a alfabetização matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1995.

FALKEMBACH, G.A.M. **O lúdico e os jogos educacionais**. 2007. Disponível em: <http://penta3.ufrgs.br/midiasedu/modulo13/etapa1/leituras/arquivos/Leitura_1.pdf.> Acesso em: 07 fev. 2019

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e uso de jogos na sala de aula**. Tese de doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação, Campinas, 2000.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**, volume 1. 9ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOPES, M. V. O.; SILVA, V. M.; ARAÙJO, T. L. **Desenvolvimento lógico-matemático do software** “ND”. Revista Latino-americana de Enfermagem, V. 12, N.1, pp 92-100, 2004.

MALHEIROS, A. P. S. **Educação Matemática online: a elaboração de projetos de modelagem matemática**. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), Universidade Estadua Paulista (UNESP), Rio Claro, São Paulo, 2008.

MICHELS, J. **O processo de Ensino Aprendizagem da tabuada**: Desvendando práticas e criando possibilidades. UNESC. Disponível em: <http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/00003F/00003FD7.pdf> Acesso: 17 dez. 2018.

MORAIS, K**.** J. **O ensino da tabuada: do tradicional ao lúdico.** Disponível em <http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads/2012/05/o-ensino-da-tabuada-tradicional-ao-ludico.pdf> acesso em: 17 dez. 2018.

MORIN E. **Ciência com consciência**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1998.

NASSER, L.; SOUZA, G. A.; TORRACA, M. A. **Transição do Ensino Médio para o superior: como minimizar as dificuldades em Cálculo?**. Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Rio de Janeiro, Petrópolis, Outubro de 2012.

NEUGEBAUER, O.; SACHS, A. J. ***Mathematical Cuneiform Texts***. American Oriental Texts, V.29, New Heaven: American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 1945.

NINOW, V.; KAIBER, C. T. **O projeto “lançamento de projéteis”: uma perspectiva para o ensino e aprendizagem da matemática no ensino médio**. REVEMAT. Florianópolis/SC, v.11, n.2, p.300-317, 2016.

ORLOVSKI, N. **A forma-ação do professor que ensina matemática nos anos iniciais**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

PETTRES, R.; JAREK, A.; LACERDA, L. A. **Aplicativo para o diagnóstico subsuperficial de estruturas baseado em imagens térmicas e redes neurais artificiais.** 14 Learning and Nonlinear Models (L&NLM) – Journal of the Brazilian Neural Network Society, V. 9, pp. 185-201, 2011.

PETTRES, R.; LACERDA, L. A**. Numerical analysis of an advective diffusion domain coupled with a diffusive heat source**. Engineering Analysis with Boundary Elements, V. 84, pp 129-140, 2017.

PITOMBEIRA, J. B.; ROQUE, T. M. **Tópicos de História da Matemática**. 1ª edição. SBM, 2012.

QUARTIERI, M. T.; BORRAGINI, E. F.; DICK, A. P. **Superação de Dificuldades no Início dos Cursos de Engenharia: Introdução ao Estudo de Física e Matemática**. XL Congresso Brasileiro de Matemática, Belém, Pará, 2012.

RAMON, R. **Modelagem matemática aplicada a epidemiologia**. Monografia de Especialização em Matemática, Universidade Federal de Sana Catarina. Chapecó, 2012.

ROCHA, H. N. B. **A prática como componente curricular na formação inicial do professor de matemática: um olhar na perspectiva da legislação brasileira**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

ROCHA, R. **Fórmula resolutiva da equação quadrática: uma análise do uso da expressão "Fórmula de Bhaskara" nos livros didáticos**. Dissertação PROFMAT – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019

ROSA, J. A.; LIMA, W. L.; PALHARINI, A. L. M. **Conceitos físicos e matemáticos no lançamento de foguetes de garrafa pet. Feira Regional de Matemática do RS**, [S.l.], v. 1, n. 1, jun. 2018. Disponível em: <https://publicacoeseventos.unijui.edu.br/index.php/feiramatematica/article/view/9243>. Acesso em: 17 out. 2018.

SAUSEN, S. **Os recursos de ambientes virtuais no ensino presencial**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

SILVA, N. G. Modelagem matemática e a engenharia civil. **Cadernos PDE (Programa de Desenvolvimento Educacional)**, V. II, 2013.

SUAREZ, A. M.; ORTIZ J. A.; LEÓN, Y. C.; DUQUE, Y. R.; GONZÁLEZ, Y. **Catapulta Feminina**. Institución Educativa Colégio Loyola para la Ciencia y la Innovación, Medellín, 2012. Disponível em: < https://pt.slideshare.net/julianaaristii/catapulta-15118545?next_slideshow=1>. Acesso em 08 jan. 2019.

TAMUDO, Y. **Catapulta**. Publicado em 6 out. 2010. Disponível em: < https://pt.slideshare.net/ytdanda/catapulta>. Acesso em 08 jan. 2019.

TAN, S. T. **Matemática aplicada a administração e economia** – Trad. 9ª ed., Cengage Learning, São Paulo, 2014.

TEODORO, M. A. M.; PETTRES, R. **Metodologia Alternativa para o ensino da tabuada utilizando jogos. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE**. Led. Curitiba: Governo do Estado – Secretaria da Educação, 2016, v. I, p. 21 – 35.

TROVON, A. **Equações no período babilônico**. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

ANEXO A – FUNÇÃO QUADRÁTICA

A.1 FUNÇÃO QUADRÁTICA – ROTEIRO DAS AULAS

A função quadrática faz parte dos Conteúdos estudados que devem ser ensinados na primeira série do Ensino Médio e segundo o MEC, este conteúdo deveria ser exposto da seguinte maneira:

> O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). O estudo dessa função – posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função – deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o “aspecto” do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. O trabalho com a forma fatorada (f(x) = a. (x - m)2 + n) pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática (a fórmula de Bhaskara) e a identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz). (BRASIL, 2006, p.73)

Já de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), tem-se:

> O ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. (BRASIL, 2006, p.69).

A.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA - APRESENTAÇÃO

Inicia-se o estudo da função quadrática, ao longo destas aulas tem-se como pano de fundo a idealização do modelamento de um lançador de projéteis oblíquo, assim a cada novo assunto estudado, faz-se o paralelo com o que deve ser apresentado no lançador.

A fórmula que define essa função é um polinômio de 2° grau na variável x. Funções reais como essa são chamadas de função quadrática ou função polinomial do 2° Grau.

A.3 DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Chama-se função polinomial do 2º grau, ou função quadrática, a qualquer função f de IR em IR dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $x \in \mathrm{IR}$, onde a, b e c são números reais dados, com $a \neq 0$ e $f(x) = y$.

Exemplos:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$, em que a = 2, b = – 3 e c = – 4;

b) $f(x) = x^2 - 5x$, em que a = 1, b = – 5 e c = 0;

c) $y = -2x^2 + 8$, onde a = – 2, b = 0 e c = 8;

d) $y = x^2$, onde a = 1, b = 0 e c = 0.

A.4 VALOR NUMÉRICO DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O valor de uma função quadrática, se $f\colon \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$com $f(x) = ax^2 + bx + c$, têm-se duas possibilidades:

i) $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = a(x_0)^2 + b(x_0) + c$.

ii) Dado $f(x)$ ou y, determinar o valor de x.

Exemplo: Dada a função quadrática $f\colon \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, determine:

a) $f(3) = (3)^2 - 6.(3) + 8$

$f(3) = 9 - 18 + 8$

$f(3) = 1$

Logo temos o par ordenado (3,1).

b) $f(-2) = (-2)^2 - 6.(-2) + 8$

$f(-2) = 4 + 12 + 8$

$f(-2) = 24$

Assim, temos o par ordenado (– 2,24).

c) Calcule o valor de x, se existir $x \in \mathrm{IR}$, tal que $f(x)=3$.

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

Para resolver-se esta questão, necessita-se do entendimento da fórmula resolutiva de uma equação quadrática. O que se descreve no próximo subitem A.5, assim, ao final dele, retoma-se a resolução deste item (c) acima.

A.5 DETERMINAÇÃO DOS ZEROS DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS.

São chamados de raízes ou zeros da função quadrática, os valores de x tais que tornam a função $f(x)=ax^2+bx+c$, nula, isto é, $ax^2+bx+c=0$. Uma técnica amplamente conhecida e utilizada para determinar as raízes de uma equação quadrática e relativamente fácil de ser aplicada é demonstrada abaixo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$
$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chamando de discriminante e representando por Δ(delta) a expressão $b^2 - 4ac$, tem-se a fórmula resolutiva de uma equação quadrática (eq. 6), também popularmente conhecida, como “Fórmula de Bhaskara”.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (6)$$

Vamos dividir em três etapas a resolução de uma equação quadrática:

i) Destacar os coeficientes;
ii) Calcular o discriminante Δ;
iii) Calcular as raízes, utilizando a fórmula resolutiva da equação quadrática, se existirem no conjunto dos números reais.

Assim voltamos a nossa questão do subitem A.4, calcule o valor de x, se existir $x \in \mathrm{IR}$, tal que $f(x) = 3$.

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

i) Destacar seus coeficientes: a = 1, b = – 6 e c = 8.
ii) Calcular o discriminante Δ:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8$$
$$\Delta = 36 - 32$$
$$\Delta = 4$$

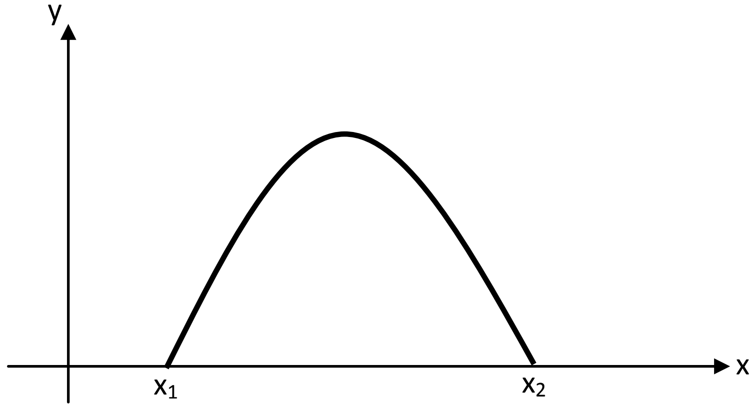
iii) Cálculo das suas raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.1}$$
$$x = \frac{6 \pm 2}{2}$$
$$x_1 = \frac{6 + 2}{2}$$
$$x_1 = \frac{8}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{6 - 2}{2}$$
$$x_2 = \frac{4}{2}$$
$$x_2 = 2$$

Logo, têm-se os pares ordenados (4, 0) e (2, 0).

Agora, podemos relacionar o significado destes valores à nossa proposta dos lançadores. Determinar as raízes de uma equação quadrática tem como analogia ao lançador, determinar o valor de x, quando a altura do projétil é zero, isto é, encontrar as raízes do ponto em que o projétil sai do chão até o ponto em que retorna ao chão, seu alcance (FIGURA 16), representa está condição.

FIGURA 17 – CURVA PARABOLICA DE UM OBJETO LANÇADO.



A.6 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA CONHECENDO-SE DE TRÊS PONTOS.

A partir do estudo do valor numérico de uma função quadrática e a determinação de suas raízes, tem-se condição de determinar a lei de uma função quadrática, conhecendo-se três pontos.

Este tópico é o mais difícil para os estudantes na realização dos seus respectivos lançadores.

Exemplo: Sejam três pares ordenados (0, 3), (1, 7) e (–1, 1), determine a lei ou fórmula da função quadrática que passa por estes três pontos.

Sabendo que a forma geral da função quadrática é $f(x) = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + c$, substituem-se os pontos conhecidos na forma geral.

Ponto (0, 3): $f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 3$

Ponto (1, 7): $f(1) = a(1)^2 + b(1) + c = 7$

Ponto (–1, 1): $f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 1$

Assim tem-se o seguinte sistema de equações a ser resolvido:

$$\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 7 \\ a - b + c = 1 \end{cases}$$

Sua solução será, primeiramente substituindo o valor de c = 3, nas duas equações seguintes:

$$\begin{cases} a + b + 3 = 7 \\ a - b + 3 = 1 \end{cases}$$

Reorganizando o sistema e resolvendo-o pelo método da substituição:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = -2 \end{cases}$$

Da equação $a - b = -2$, isolando a variável a: $a = -2 + b$.

Substituindo-se na equação seguinte $a + b = 3$, tem-se:

$$-2 + b + b = 4$$
$$2b = 6$$
$$b = 3$$

Retornando na equação $a = -2 + b$, determina-se o valor de a:

$$a = -2 + b$$
$$a = -2 + 3$$
$$a = 1$$

Logo, a fórmula da função quadrática que passa pelos pontos (0, 3), (1, 7) e (–1, 1) é $f(x) = x^2 + 3x + 3$.

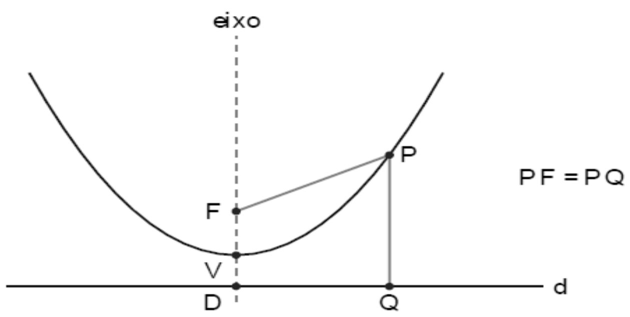
Novamente, focando a atividade do lançador, é desta maneira que irá se determinar a função da trajetória do projétil do objeto lançado, primeiramente se determinará os três pontos e na sequência sua função quadrática, seguindo os passos do exemplo acima.

A.7 GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA E SEUS PONTOS RELEVANTES.

Consideremos um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o vértice dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz, visto na FIGURA 17.

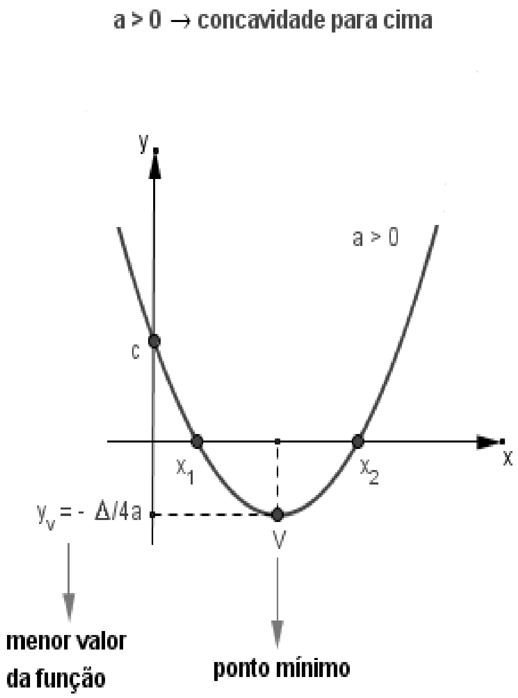
FIGURA 18 – FOCO E EIXO DA PARÁBOLA.



FONTE: (SBM - apostila MA11)

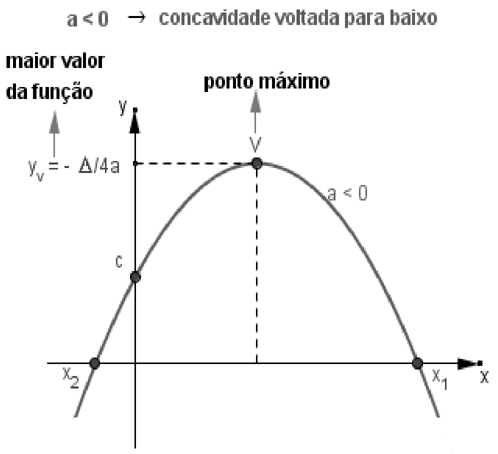
O efeito dos parâmetros *a, b* e *c* na parábola que representa a função quadrática.

FIGURA 19 – PARÁBOLA COM CONCAVIDADE PARA CIMA.



FONTE:http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_IV/fundamentos4.htm

FIGURA 20 – PARÁBOLA COM CONCAVIDADE PARA BAIXO.



FONTE:http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_IV/fundamentos4.htm

Conforme apresentada as FIGURAS 18 e 19, podemos perceber:

O parâmetro *a* é responsável pela concavidade da parábola, se *a* > 0 a parábola tem concavidade voltada para cima, já se *a* < 0 a parábola tem concavidade voltada para baixo.

O parâmetro *b* é responsável pela intersecção da parábola com o eixo x, se a parábola corta o eixo x no seu lado crescente o valor do *b* é positivo, já se corta com o seu lado decrescente seu valor é negativo.

O parâmetro *c* é responsável pelo valor que a parábola intercepta o eixo y, originando assim o par ordenado (0, *c*).

De acordo com a proposta do lançador, teremos como parâmetro *a* seu valor negativo, já que a curva que o projétil deve fazer constitui de uma parábola com concavidade para baixo, não fazendo sentido algum o valor do parâmetro *a* ser positivo. Com relação ao parâmetro *b*, vai depender do referencial inicial escolhido para o lançamento, portanto ele pode ser tanto positivo quanto negativo, já o parâmetro *c*, também depende do mesmo referencial, pois ele representa a altura inicial do projétil em relação ao chão.

A intersecção com o eixo x é determinado pelas raízes da equação quadrática, da seguinte maneira:

i) Quando $\Delta > 0$, a parábola intersecta o eixo x, em dois pontos distintos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, diz-se que possui duas raízes reais e distintas;
ii) Quando $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo x, no ponto (x, 0), diz-se que possui duas raízes reais e iguais;
iii) Quando $\Delta < 0$, a parábola não intersecta o eixo x, assim não se tem raízes reais.

Com relação ao lançador, tem-se como primeira raiz a continuação da curva parabólica projetada até o chão, caso a referencia do ponto inicial do projétil não parta do chão, e a segunda raiz o alcance do projétil lançado obliquamente.

Por fim, seu ponto máximo ou mínimo é determinado pelo vértice V da parábola, que pode ser calculado pelas equações representadas em (eq. 7):

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a} \qquad (7)$$

Assim, tem-se o vértice $V = (x_v, y_v)$.

Para o lançador, a partir da função da trajetória já calculada e conhecida neste instante do trabalho, utiliza-se do y_v para determinar a altura máxima atingida pelo projétil.

ANEXO B – QUESTIONÁRIO SOBRE A AVALIAÇÃO DOS LANÇADORES – CATAPULTAS

1) Ano em que fez? ___________________

2) O curso (universidade) que faz ou pretende fazer? Se ainda não sabe, por qual área tem mais afinidade (humanas, exatas, biológicas, linguagens)? _______

3) O que você ou seu grupo construíram? ____________________________

4) Quais foram as principais dificuldades encontradas? Assinale quantos achar necessário.

( ) escolha do que fazer

( ) desenho do projeto

( ) construção do protótipo

( ) determinar as medidas com a trena

( ) esboçar a fórmula da função quadrática

( ) determinar a altura máxima atingida pelo projétil

( ) determinar a velocidade inicial do projétil

( ) trabalhar em grupo

( ) outros ____

5) O que lhe ajudou na aprendizagem da função quadrática em matemática e no estudo dos movimentos em física? ____________________________________

____

6) Encontrou alguma relação com o seu dia a dia? Ou na sua formação acadêmica? Se sim, qual? ____

____

____

7) Alguma sugestão de melhoria na atividade? Se sim, qual?

____

____

8) Se já cursa ou cursou a universidade, desenvolveu alguma atividade semelhante? Conte como foi? ____

____

____