



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**



DANIEL POSSETTI

**A GEOMETRIA FRACTAL E A CONTEXTUALIZAÇÃO DE CONTEÚDOS NO
ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA**

**TRÊS LAGOAS - MS
2019**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**A GEOMETRIA FRACTAL E A CONTEXTUALIZAÇÃO DE CONTEÚDOS NO
ENSINO FUNDAMENTAL: UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato César da Silva

**TRÊS LAGOAS - MS
2019**



Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul



MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Pólo de Três Lagoas

A GEOMETRIA FRACTAL E A CONTEXTUALIZAÇÃO DE CONTEÚDOS NO
ENSINO FUNDAMENTAL: Uma experiência em sala de aula

por

DANIEL POSSETTI

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional – PROFMAT da
Universidade Federal de Mato Grosso do
Sul, Campus de Três Lagoas, como parte
dos requisitos para obtenção do título de
Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Renato César da Silva (Orientador)

UFMS/CPTL

Prof. Dr. Edivaldo Romanini

UFMS/CPTL

Prof. Dr. José Antônio Menoni

UFMS/CPTL

Setembro de 2019

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa, Ivanete
e minha filha, Nicole.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, pelo dom da vida, pela oportunidade concedida.

À UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Campus Três Lagoas.

Ao meu orientador, Renato, deixo um imenso agradecimento pelo apoio constante na minha formação, pela profissionalidade de quem, incentiva e nos põe de pé e firmes no objetivo. Pela orientação habilmente conduzida e por acreditar na minha capacidade de concluir esse trabalho com sua orientação.

Aos meus professores do ProfMat: Osmar, Allan, Tomarozzi, Vitor, Fernando, Romanini, Renato.

Aos meus colegas do ProfMat.

“Depois de muito refletir, calcular e suar, concluí paradoxalmente que o mundo é composto de uma desordem organizada”.

Lorenz, 1970.

Resumo

A Geometria Fractal é um ramo novo da Matemática que vem sendo estudado desde sua descoberta nos anos sessenta por Benoit Mandelbrot. Por se tratar de uma geometria essencialmente intuitiva, muito se tem comentado a respeito da possibilidade de sua introdução ainda no Ensino Fundamental e Médio. Assim, muitas atividades envolvendo Geometria Fractal foram e ainda estão sendo desenvolvidas com o intuito de tornar o conteúdo da Matemática curricular mais significativo ao aluno. Entretanto, muitas carecem de um estudo mais aprofundado no que tange ao seu verdadeiro grau de eficiência. Para tentar vislumbrar até que ponto estas atividades podem se caracterizar como um recurso didático válido, elaboramos uma pesquisa e realizamos atividades abordando a Geometria Fractal no contexto dos alunos do nono ano do ensino fundamental, de uma escola na cidade de Birigui-SP, realizada no ano de 2018. Antes das atividades práticas, realizamos uma pesquisa, de caráter introdutório, contextualizada, relacionada ao tema a fim de que os alunos se familiarizarem com o assunto a ser estudado. Ao final, relatamos a experiência vivida em sala de aula e as dificuldades apresentadas nas decorrentes atividades. O estudo ainda sugere que a Geometria Fractal pôde proporcionar aos alunos uma relação mais forte entre os saberes do cotidiano e o escolar, além de ter proporcionado uma visão dinâmica da matemática como uma ciência que avança, e não como um corpo de conhecimento pronto e acabado.

Palavras-chave: Geometria Fractal, contextualização, aprendizagem-significativa.

Abstract

Fractal Geometry is a new branch of mathematics that has been studied since its discovery in the sixties by Benoit Mandelbrot. Because it is an essentially intuitive geometry, much has been commented about the possibility of its introduction still in Elementary and Middle School. Thus, many activities involving Fractal Geometry were and are still being developed with the intention of making the content of curriculum Mathematics more meaningful to the student. Many, however, need further study as to their true degree of efficiency. In order to try to glimpse the extent to which these activities can be characterized as a valid didactic resource, we elaborated a research and carried out activities addressing the Fractal Geometry in the context of the students of the ninth year of elementary school, of a school in the city of Birigui-SP, year of 2018. Before the practical activities, we carried out a research, of introductory character, related to the subject so that the students become familiar with the subject to be studied. In the end, we report the experience lived in the classroom and the difficulties presented in the activities. The study also suggests that Fractal Geometry was able to provide students with a stronger relationship between everyday and school knowledge, as well as providing a dynamic view of mathematics as a science that advances, not as a ready and finished body of knowledge.

Keywords: Fractal geometry, contextualization, learning-meaningful.

Lista de Figuras

Figura 1. 1: Benoit. B. Mandelbrot.....	19
Figura 1. 2: Fractal de Mandelbrot	20
Figura 1. 3: Aloe Polyphylla (Babosa-espiral).....	21
Figura 1. 4: Brócolis Romanesco	21
Figura 1. 5: Girassol	22
Figura 1. 6: Folha de Samambaia	22
Figura 1. 7: Edifício fractal (Singapura).....	23
Figura 1. 8: Capela Japonesa	24
Figura 1. 9: Pavilhão Serpentine (Londres – Inglaterra).....	24
Figura 1. 10: Escola Judaica Heinz-Galinski (Berlim - Alemanha)	25
Figura 3. 1: Passo 1 do Jogo do Caos	33
Figura 3. 2: Jogo do Caos após 10 jogadas.....	34
Figura 3. 3: Triângulo PQR contendo apenas o ponto P_0	34
Figura 3. 4: Triângulos centrais	35
Figura 3. 5: Conjunto de Cantor	36
Figura 3. 6: Triângulo de Sierpinski.....	38
Figura 3. 7: Tapete de Sierpinski.....	39
Figura 3. 8: Curva de Koch.....	41
Figura 3. 9: Ilha de Koch	42
Figura 3. 10: Esquema de divisão de triângulos equiláteros	44
Figura 3. 11: Quatro iterações da Árvore Pitagórica Fundamental.....	47
Figura 3. 12: Dimensão do segmento	49
Figura 3. 13: Dimensão do quadrado	49
Figura 3. 14: Dimensão do cubo	50
Figura A. 1: Passo 2 – Cartão Fractal	78
Figura A. 2: Passo 3 – Cartão Fractal	78
Figura A. 3: Passo 4 – Cartão Fractal	79
Figura A. 4: Passo 5 – Cartão Fractal	79

Figura A. 5: Passo 6 – Cartão Fractal	79
Figura A. 6: Passo 7 – Cartão Fractal	80
Figura A. 7: Primeira e segunda iteração do cartão fractal	80
Figura A. 8: Cartão Fractal	81

Lista de Tabelas

Tabela 2. 1: Conteúdo curricular de geometria do ensino fundamental (São Paulo)	29
Tabela 3. 1: Área e perímetro do triângulo de Sierpinski	38
Tabela 3. 2: Área do Tapete de Sierpinski	40
Tabela 3. 3: Comprimento e perímetro do floco de neve de Koch	46
Tabela 3. 4: Número de triângulos da árvore pitagórica.....	48
Tabela 3. 5: Número de quadrados da árvore pitagórica	48
Tabela A. 1: Paralelepípedos Cartão Fractal.....	81

Lista de Gráficos

Gráfico 4. 1: Conhecimento do termo Fractal.....	54
Gráfico 4. 2: Escolha do fractal pelos alunos	57

Sumário

1. GEOMETRIA FRACTAL.....	18
1.1. Definição de Fractal	20
1.2. Fractais na natureza	21
1.3. Fractais em arquitetura e urbanismo.....	23
2. GEOMETRIA E O CENÁRIO EDUCACIONAL ATUAL DO ESTADO DE SÃO PAULO (2018)	27
2.1. Sobre o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos básicos	28
2.1.1. Quadro de conteúdos de Matemática, em geometria, (6º ao 9º ano) do Estado de São Paulo	29
3. PROPOSTA DIDÁTICA PARA A INTRODUÇÃO DE FRACTAIS NOS ANOS FINAIS DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO COMO FERRAMENTA FACILITADORA NA CONTEXTUALIZAÇÃO DE ASSUNTOS MATEMÁTICOS....	31
3.1. O Jogo do Caos	31
3.2. Conjunto de Cantor	35
3.2.1. Construção do Conjunto de Cantor.....	36
3.3. O Triângulo de Sierpinski	37
3.3.1. Construção do Triângulo de Sierpinski	37
3.4. O Tapete de Sierpinski.....	39
3.5. A Curva de Koch	40
3.5.1. Construção da Curva de Koch.....	40
3.6. A Ilha de Koch.....	41
3.6.1. Construção da Ilha de Koch.....	42
3.6.2. Área do fractal “Floco de Neve de Koch”	43
3.6.3. Perímetro do fractal “Floco de Neve de Koch”	45
3.7. Árvore pitagórica fundamental	46
3.7.1. Construção da Árvore Pitagórica	47
3.8. Dimensão fractal	48
3.8.1. Conjuntos auto semelhantes	49
3.8.2. Conjunto de Cantor.....	51
3.8.3. Triângulo de Sierpinski	51

3.8.4. Tapete de Sierpinski	51
3.8.5. Curva de Koch	52
4. CONSTRUINDO FRACTAIS EM SALA DE AULA.....	53
4.1. A pesquisa “Geometria Fractal”	53
4.2. O Jogo do Caos	59
4.3. Triângulo de Sierpinski.....	61
4.4. Tapete de Sierpinski	62
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
APÊNDICES – Propostas de atividades	69
“Pesquisa sobre Fractais”	69
“O Jogo do Caos”	73
“Reproduzindo Fractais na Malha”	74
I) Fractal Triângulo de Sierpinski	74
II) Fractal Tapete de Sierpinski	75
“Poeira de Cantor”.....	76
“Floco de Neve de Koch”	77
Construção de um Fractal.....	78
“Cartão Fractal”	78
Atividade Avaliativa	82

INTRODUÇÃO

Durante séculos, os objetos e os conceitos da geometria euclidiana foram considerados aqueles que melhor descreviam o mundo em que vivemos. Cientistas conceberam uma visão da natureza a partir de conceitos e formas de figuras regulares e diferenciáveis.

Nos últimos quarenta anos, vem se desenvolvendo um novo ramo da geometria que modela as irregularidades da natureza, a geometria fractal. Figuras que no início do século passado eram vistas como “monstros matemáticos”, já que desafiavam as noções comuns de infinito e para as quais não havia uma explicação objetiva, têm hoje um papel notável na interpretação da realidade.

Através dos estudos realizados no final do século XIX e início do século XX, foi possível fundamentar este novo ramo da geometria que, influenciou decisivamente para o rompimento do determinismo, ampliou a abrangência da geometria e possibilitou ao homem trabalhar com as complexidades da natureza.

Difundida pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot (1983), a geometria dos fractais tem atraído interesse científico e educacional devido à sua potencialidade, versatilidade e fascínio oferecido por sua beleza e pelo grande poder de análise dos objetos da natureza. Por isso, seu uso tem ocorrido em diversas áreas da ciência, tecnologia e arte.

A Geometria Fractal é o ramo da matemática que estuda as propriedades e o comportamento dos fractais (objetos geométricos irregulares e fragmentados). Na matemática da educação básica costumamos trabalhar com os alunos a Geometria Euclidiana, onde se estuda as figuras mais simples, como retas, círculos, quadrados, cones, etc. Calculamos volumes, áreas, perímetros e, assim, trabalhamos em duas e três dimensões. Mas em muitos fenômenos e formas da natureza não podemos utilizar a geometria tradicional, precisando para tanto de uma teoria especial para ser explicada. É aqui que entra a geometria fractal, que foi criada nos anos 70 do séc. XX, pela mão de Benoit Mandelbrot. Surgiu como uma intenção de descrever diversos fenômenos na natureza. Segundo Mandelbrot,

As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, a casca das árvores não é lisa e nem os relâmpagos viajam em linha reta (MANDELBROT, B., 1983)

A utilização da linguagem do caos e da geometria fractal

Segundo Piaget (1995), em sua classificação dos estágios de desenvolvimento da criança, no estágio de desenvolvimento Operatório Formal (de 12 anos em diante), a representação permite a abstração total, não se limitando ao imediato ou às relações pré-existentes. Neste período o indivíduo é capaz de pensar em todas as relações possíveis logicamente, buscando soluções a partir de hipóteses e não apenas pela observação da realidade. Neste estágio as estruturas cognitivas alcançam seu nível mais elevado e tornam capazes de aplicar o raciocínio lógico a todas as classes de problemas.

Conclui-se, portanto, que para este estágio do desenvolvimento, o estudo da Geometria Fractal e da Teoria do Caos é totalmente apropriado. Os alunos têm, através dele, a oportunidade de investigar tópicos da Matemática numa nova perspectiva e de fazer conexões com cotidiano. No caso da Geometria Plana, especificamente, sua limitação explicativa e conceitual do mundo, estava colocada pela multiplicidade de formas dos objetos existentes na natureza, com variados graus de complexidade os quais excediam a capacidade formulativa e explicativa da Geometria Euclidiana, como por exemplo, as formas das nuvens, dos galhos de árvores e dos relâmpagos, cujos construtores teóricos não podiam ser descritos pela geometria plana.

Desse modo, o “espaço” não preenchido pela Geometria Euclidiana, no que concerne aos fenômenos e às formas que não se enquadram no seu conceito explicativo, cuja base era a matemática convencional, torna necessário a busca e o desenvolvimento de novas teorias explicativas que excedessem as antigas fronteiras explicativas da Geometria Euclidiana, cujas bases permaneceram imutáveis até o século XIX, fazendo necessário o surgimento de um outro ramo da geometria, que os explicasse e que os caracterizasse; a Geometria Fractal.

A utilização de fractais, para ilustrar tópicos, como áreas e perímetros de polígonos ou volumes de poliedros, pode tornar o seu estudo mais motivador. Por

exemplo, o "Floco de Neve" que abordamos nesta pesquisa, apresenta perímetro infinito e área finita, suscitará naturalmente a curiosidade dos alunos, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo. A construção e estudo deste fractal pode ser uma boa forma de consolidar conhecimentos já adquiridos envolvendo fórmulas algébricas, áreas e perímetros, assim como o cálculo do número de segmentos e o comprimento total do Conjunto de Cantor poderá servir de base para o estudo posterior de limites devido ao fato deste comprimento total se aproximar, mas não ser igual a zero. No 3º ano do ensino médio, o estudo do Conjunto de Mandelbrot poderá servir de exemplo da aplicação dos Números Complexos.

Reforçando a ideia da necessidade de experimentar a Matemática por caminhos diferentes para além da resolução de exercícios com papel e lápis, a Geometria Fractal permite explorar conceitos matemáticos de uma forma mais contextualizada e criativa. Nomeadamente, através da construção de modelos e quadros com os resultados de sucessivas iterações.

Este tipo de construção induz o esforço intelectual nos alunos, pois as figuras não podem ser totalmente desenhadas, dependendo da iteração a ser realizada, estimulando o pensamento abstrato, para além de lhes despertar o interesse para a beleza e complexidade destas formas não euclidianas, inserindo no conceito de ensino que se pretende hoje: a conexão dos fundamentos teóricos com conhecimentos adquiridos através da observação.

Uma das propostas desse trabalho é, digamos como nosso objetivo primário, a introdução dos fractais nos ensinamentos fundamental e médio, uma vez que a prática pedagógica da Geometria na atualidade contempla, em grande medida, apenas a Geometria Euclidiana. Visando com isso, colaborar com o desenvolvimento do ensino da matemática, levando os alunos a perceberem a aplicação dos elementos da matemática em nosso dia-a-dia, observando que nem todas as formas existentes na natureza são regulares e suaves, sendo na maioria das vezes complexas e irregulares. Além disso, como objetivo secundário, a atividade com fractais pode ser utilizada em articulação com outras disciplinas, como por exemplo arte, biologia e geografia, através de projetos interdisciplinares, fornecendo aos professores uma aprendizagem significativa, em que o professor se torna o mediador e o aluno, o protagonista.

Com isso, o aprendizado da matemática torna concreto, valorizando estratégias diferenciadas de ensino, em que os estudantes se sintam mobilizados e desafiados a aprender, motivados pelas belezas da Geometria Fractal.

Com o intuito de alcançar tais objetivos, o trabalho foi estruturado na seguinte maneira:

No capítulo 1, apresentamos a geometria fractal. Tal capítulo foi dividido em seções: a história dos fractais; a definição de fractal, alguns fractais na natureza, fractais na arquitetura e urbanismo.

No capítulo 2, falamos sobre o ensino da geometria no currículo do Estado de São Paulo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

No capítulo 3, discorremos sobre alguns tipos de fractais: O Jogo do Caos, o Conjunto de Cantor, o Triângulo de Sierpinski, o Tapete de Sierpinski, a Curva de Koch, a Ilha de Koch e a Árvore Pitagórica.

No capítulo 4, discorremos sobre as atividades realizadas em sala de aula, com alunos de uma turma de 9º ano do ensino regular, na cidade de Birigui - SP, no ano letivo de 2018.

Por fim, nas considerações finais, discorremos sobre as experiências de sala de aula ao se trabalhar com a Geometria Fractal, bem como as dificuldades enfrentadas.

1. GEOMETRIA FRACTAL

O termo fractal foi criado por Benoit Mandelbrot, para designar um objeto geométrico que nunca perde a sua estrutura qualquer que seja a distância de visão. Fractal acima de tudo significa auto semelhante. Mandelbrot classificou desta forma os seus objetos de estudo pois estes possuíam dimensão fracionária. As dimensões não inteiras tornam, então, uma forma de quantificar qualidades que, de outro modo, permaneceriam inquantificáveis: o grau de irregularidade ou tortuosidade de um objeto.

Se repararmos, todas as formas geométricas ortodoxas, degeneram quando são ampliadas ou diminuídas. Um círculo numa escala muito maior não é nada mais do que uma reta. Basta ter em mente que há apenas 500 anos pensava-se que a Terra era plana. Isto, porque à escala de visão humana não vemos mais do que uma linha reta no horizonte. No entanto, a maior parte dos objetos com que lidamos no nosso dia-a-dia não são retas, nem esferas, nem cones. Olhando, por exemplo, para um tronco de uma árvore, verificamos que é extremamente rugoso e irregular. Se observarmos um pequeno pedaço desse tronco ao microscópio observamos novas rugosidades e irregularidades que antes não tínhamos observado. No entanto esta imagem assemelha-se bastante à anterior. É esta irregularidade regular que caracteriza um fractal.

Muitos matemáticos, ao longo da história, como Georg Cantor¹, Giuseppe Peano², Helge Von Koch³ e Waclaw Sierpinski⁴, estudaram algumas figuras que não se enquadravam nas definições da geometria euclidiana. Tais figuras ficaram conhecidas como “monstros matemáticos”. Tempos depois, com os estudos de Benoit Mandelbrot, considerado o pai da Geometria Fractal, esses monstros matemáticos passaram a ser chamados de Fractais Clássicos. (EVES, 2004)

¹ Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor (1845-1918), foi um matemático alemão nascido no Império Russo.

² Giuseppe Peano (1858-1932), foi um matemático italiano, um dos fundadores da lógica matemática e da teoria dos conjuntos.

³ Helge Von Koch (1870-1924), foi um matemático sueco, que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como “flocos de neve de Koch”.

⁴ Waclaw Sierpinski (1882-1969), foi um matemático polonês, que deu seu nome aos fractais “triângulo de Sierpinski” e “tapete de Sierpinski”.

Benoit Mandelbrot nasceu em 1924 na cidade de Varsóvia (Polônia), vindo de uma família judia da Lituânia. Em 1936, mudou-se para Paris. Após a Segunda Guerra Mundial, ingressou na Escola Normal passando, pouco tempo depois, à Escola Politécnica. Seu tio, Szolem Mandelbrot, que assumiu a responsabilidade por sua educação, juntamente com outros jovens matemáticos participavam do grupo Bourbaki que na época buscava reconstruir a matemática francesa deixando-a mais formal e rigorosa, ignorando o aspecto geométrico. Porém, Mandelbrot não defendia essas ideias. Em 1948 foi estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos e após isto conseguiu um cargo na IBM – Centro de Pesquisas Thomas Watson, trabalhando com problemas de economia. Lá ele soube pelos engenheiros que havia um ruído nas linhas telefônicas que interferia nos sinais, sendo que eles não conseguiam eliminar devido à irregularidade dos ruídos. Mandelbrot resolveu esse problema utilizando um trabalho de Georg Cantor chamado Poeira de Cantor. Depois disso, continuou procurando problemas científicos de qualquer área para aplicar suas ideias. A geometria fractal de Mandelbrot reflete a natureza cheia de irregularidades e fragmentação. Uma de suas indagações foi “*Que extensão tem o litoral da Grã-Bretanha?*” cuja possível resposta varia de acordo com a escala de medição. Mandelbrot teve muitos de seus trabalhos publicados. Sua obra mais famosa é *The Fractal Geometry of Nature*, New York, Freeman, 1977. (EVES, 2004)

Mandelbrot faleceu em 14 de outubro de 2010, aos 85 anos.



Figura 1. 1: Benoit. B. Mandelbrot

Fonte: <<http://www.learn-math.info>>, acesso em 23 jul. 2018.

1.1. Definição de Fractal

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Dizemos que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente auto similares e de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

As principais propriedades que caracterizam e que permitem definir os conjuntos fractais são: (BARBOSA, 2005)

- *Auto similaridade*, que pode ser exata ou estatística, ou seja, mantém a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala (transformação que reduz ou amplia o objeto ou parte dele);
- *Complexidade infinita*, isto é, qualquer que seja o número de ampliações de um objeto fractal, nunca obtemos a “imagem final”, uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada.
- *Irregularidade*, no sentido de rugosidade (não-suavidade) ou fragmentação;
- Possuir em geral, *dimensão não-inteira*. A dimensão fractal quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade ou fragmentação do conjunto considerado

O Fractal de Mandelbrot é o mais famoso fractal gerado através de uma função iterativa.

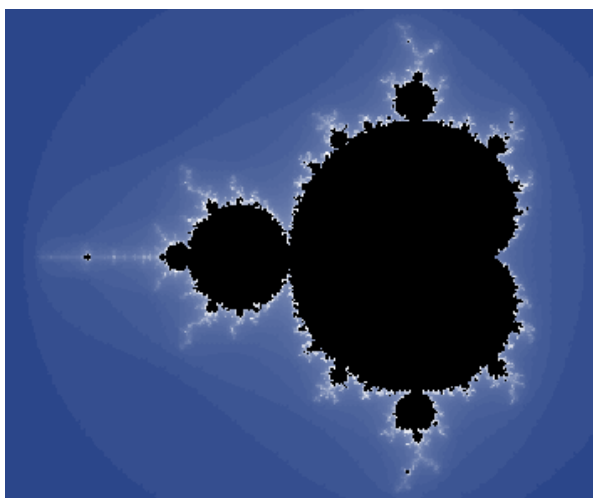


Figura 1. 2: Fractal de Mandelbrot

Fonte: <<http://www.math.utah.edu>>, acesso em 24 jul. 2018.

1.2. Fractais na natureza

Muitas formas naturais como nuvens, montanhas, linhas costeiras, raízes, ramos de árvores, estruturas vitais (como vasos sanguíneos, sistema nervoso) e, segundo algumas teorias até mesmo a estrutura do universo, têm formas que se assemelham a objetos fractais.



Figura 1. 3: Aloe Polyphylla (Babosa-espiral)

Fonte: <<http://brotandoconsciencia.com.br>>, acesso em 26 jul. 2018



Figura 1. 4: Brócolis Romanesco

Fonte: <<http://brotandoconsciencia.com.br>>, acesso em 26 jul. 2018

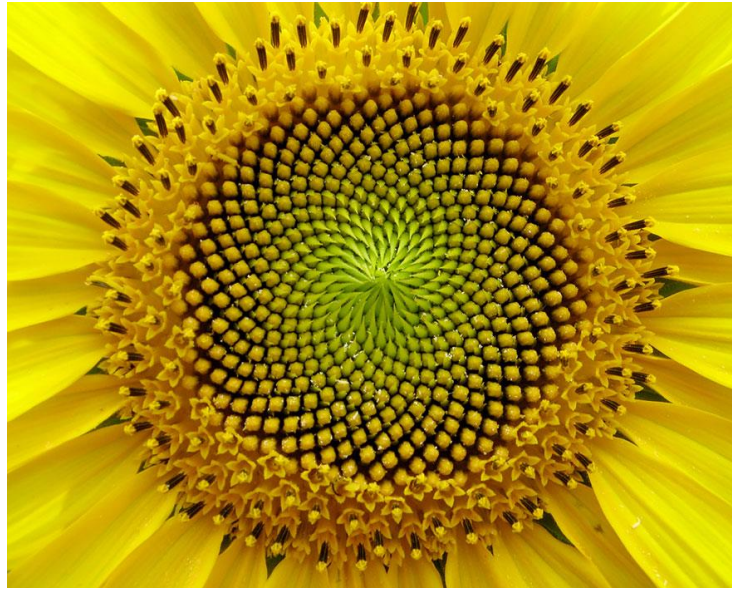


Figura 1. 5: Girassol

Fonte: <<http://brotandoconsciencia.com.br>>, acesso em 26 jul. 2018

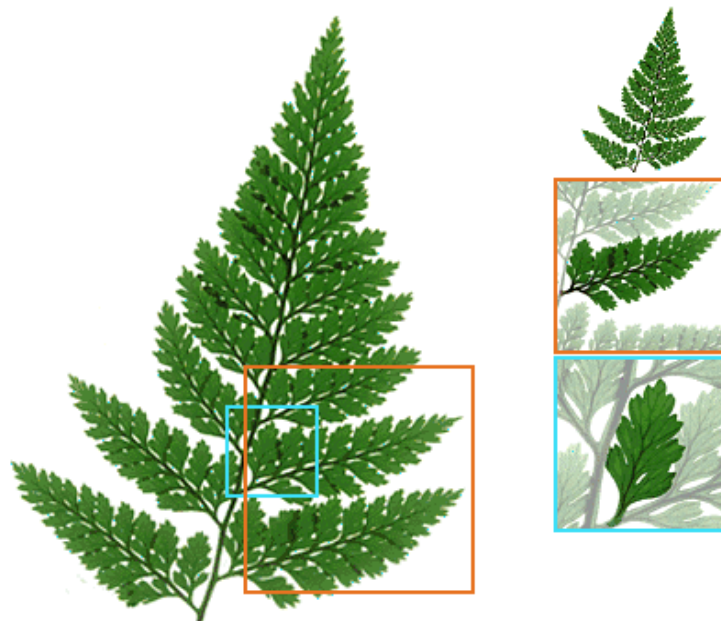


Figura 1. 6: Folha de Samambaia

Fonte: <<http://lounge.obviousmag.org>>, acesso em 26 jul. 2018

1.3. Fractais em arquitetura e urbanismo

A recente utilização da forma fractal em projetos arquitetônicos e seu estudo podem trazer diferentes abordagens. Por um processo fractal apresentar infinitas escalas, a aplicação da geometria fractal em arquitetura não poderá ser um processo simplesmente matemático, pois existe a limitação da escala na arquitetura. O avanço das pesquisas sobre o tema, no entanto, demonstra que é possível essa relação geométrica com o projeto arquitetônico. A seguir destacamos alguns projetos e modelos de arquitetura fractal.



Figura 1. 7: Edifício fractal (Singapura)

Fonte: <<https://www.engenhariacivil.com>>, acesso em 06 março de 2019



Figura 1. 8: Capela Japonesa

Fonte: <<https://casacor.abril.com.br/arquitetura>>, acesso em 06 março de 2019



Figura 1. 9: Pavilhão Serpentine (Londres – Inglaterra)

Fonte: <<https://www.researchgate.net>>, acesso em 06 março de 2019



Figura 1. 10: Escola Judaica Heinz-Galinski (Berlim - Alemanha)

Fonte: <<http://wright.ava.ufsc.br>>, acesso em 06 março de 2019

Ao longo das últimas décadas a geometria fractal não só foi alargando o seu domínio de intervenção, como foi conquistando cada vez mais adeptos. Muitos são os domínios da ciência e das artes que exibem hoje as suas aplicações que parecem não ter fim.

Uma maneira simples de fazer com que os alunos percebam a importância da matemática no seu dia-a-dia é relacioná-la com objetos e elementos presentes na natureza. Por isso, trazer para a sala de aula atividades que ao mesmo tempo desenvolvam o raciocínio lógico-matemático e utilizem elementos do mundo concreto do aluno, satisfaz plenamente à expectativa de melhorar a qualidade do ensino-aprendizagem. Poucos alunos sabem, por exemplo, que podemos encontrar na forma de uma simples brócolis, uma representação matemática conhecida como fractal. Estas estruturas, fartamente encontradas na natureza, por serem constituídas de formas irregulares não se enquadram na geometria euclidiana e não encontram abordagem em sala de aula.

Assim, a introdução de fractais na sala de aula, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, bem como apresentar exemplos práticos dos conceitos de logaritmos e exponenciais. Também é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas.

Em resumo, este trabalho fornece ao professor a possibilidade de ensino de conceitos matemáticos básicos para as séries finais do ensino fundamental recorrendo ao uso da geometria fractal, mostrando a importância da integração entre vários segmentos da educação para a troca de experiências e estudos. Além disso, discutir a abordagem e o ensino de conceitos matemáticos como unidade de medidas, operações com números inteiros e decimais, perímetros, áreas e frações, bem como uma introdução de progressão geométrica, e relacionando estes conceitos com a confecção do cartão fractal.

Diante o exposto, no próximo capítulo, veremos que os PCNs, a BNCC e o Currículo do Estado de São Paulo, já enfatizam sobre o ensino de geometria e seus benefícios para o aprendizado, como exemplo, no processo de percepção de regularidades.

2. GEOMETRIA E O CENÁRIO EDUCACIONAL ATUAL DO ESTADO DE SÃO PAULO (2018)

A geometria diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginárias, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão de espaço do mundo físico que nos cerca. (CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2010)

As investigações numéricas contribuem, de modo decisivo, para desenvolver essa compreensão global dos números e operações, bem como capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações. Os alunos podem realizar pequenas investigações que conduzem a descobertas de fatos, explorar sequências numéricas, descobrindo relações numéricas e até mesmo estabelecer conexões entre os números e a Geometria.

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes.

É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC),

“No Ensino Fundamental – Anos Finais, o ensino de Geometria precisa ser visto como consolidação e ampliação das aprendizagens realizadas. Nessa etapa, devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que

saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético dedutivo.”

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.

De acordo com o Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998, p. 118),

“No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas.”

2.1. Sobre o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos básicos

Em Geometria, no Ensino Fundamental, a preocupação inicial é o reconhecimento, a representação e a classificação das formas planas e espaciais, preferencialmente trabalhadas em contextos concretos com os alunos de 6º ano e 7º ano. Certa ênfase na construção de raciocínios lógicos, de deduções simples de resultados a partir de outros anteriormente conhecidos poderá ser a tônica dos trabalhos no 8º ano e no 9º ano.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2010),

[...] Consideramos que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nas séries/anos do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo a diferença a escala do tratamento dada ao tema. [...]

2.1.1. Quadro de conteúdos de Matemática, em geometria, (6º ao 9º ano) do Estado de São Paulo

Proposta curricular do Estado de São Paulo – Geometria				
Ensino Fundamental 2				
	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
2º bimestre		Geometria - Ângulos; - Polígonos; - Circunferência; - Simetrias; - Construções geométricas; - Poliedros.		
3º bimestre	Formas geométricas - Formas planas; - Formas espaciais Perímetro e área - Unidades de medida; - Perímetro de uma figura plana; - Cálculo de área por composição e decomposição; - Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas.			Proporcionalidade na geometria - O conceito de semelhança; - Semelhança de triângulos; - Razões trigonométricas.
4º bimestre			Geometria - Teorema de Tales; - Teorema de Pitágoras; - Área de polígonos; - Volume do prisma.	Corpos Redondos - O número π ; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo; - Volume e área do cilindro.

Tabela 2. 1: Conteúdo curricular de geometria do ensino fundamental (São Paulo)

Fonte: Currículo do Estado de São Paulo

Diante do sistema tradicional de ensinar e de aprender a matemática, devemos recriar o modelo educativo referindo primeiramente ao que ensinamos aos alunos e o como os ensinamos. Recriar esse modelo tem a ver com o que entendemos como qualidade de ensino. Há tempos que qualidade de ensino significa alunos com cabeças cheias de datas, fórmulas, conceitos, todos justapostos, enfim, o reinado das disciplinas estáticas e com muito, muito conteúdo.

Para ensinar a turma toda temos de propor atividades abertas, diversificadas, isto é, atividades que possam ser abordadas por diferentes níveis de compreensão e desempenho dos alunos. Além disso, que não se destaquem os que sabem mais ou os que sabem menos, pois tudo o que as atividades propõem pode ser disposto, segundo as possibilidades de interesses dos alunos que optaram por desenvolvê-las. Diante disso, o estudo da geometria fractal pode ser uma grande aliada no despertar a curiosidade no aluno e o interesse pela matemática. O ensino da matemática através de atividades práticas, torna o ensino motivador e a aprendizagem significativa.

Apesar da grande importância da Geometria Euclidiana para a evolução do homem, ela não foi suficiente para satisfazer todos os anseios da humanidade. Foi necessária a presença de novos conhecimentos geométricos que abrangesse o máximo possível de formas existentes no mundo. Neste contexto surge a Geometria Fractal. No próximo capítulo serão apresentados os entes constituintes desta “nova” geometria: os fractais, com suas definições, precursores e aplicações. Como será visto, as características fractais carregam grande apelo estético, possibilitam construções utilizando diversos materiais, tendo grandes aplicações no cotidiano, além disso, permitem o desenvolvimento de diversas competências e habilidades.

3. PROPOSTA DIDÁTICA PARA A INTRODUÇÃO DE FRACTAIS NOS ANOS FINAIS DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO COMO FERRAMENTA FACILITADORA NA CONTEXTUALIZAÇÃO DE ASSUNTOS MATEMÁTICOS

O ensino de fractais na escola propicia ao aluno a oportunidade de abordar temas da geometria euclidiana de maneira diferenciada além de fornecer subsídios para o melhor entendimento da geometria de objetos não tradicionais e estabelece relações matemáticas para auxiliar no estudo de fenômenos naturais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam a importância do aluno adquirir conhecimento da matemática para o seu desenvolvimento de raciocínio, de sua sensibilidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação.

Apresentamos aqui algumas atividades que envolvam a Geometria Fractal, em que os alunos podem verificar que o ensino e a aprendizagem dessa Geometria podem ser prazerosos, despertando nos alunos o senso estético e o interesse pelo assunto.

Ainda, segundo os PCNs (1998), no que diz respeito ao aluno e o saber matemático, destaca:

“[...] apesar dessa evidência, tem-se buscado, sem sucesso, uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e da acumulação de informações; nem mesmo a exploração de materiais didáticos tem contribuído para uma aprendizagem mais eficaz, por ser realizada em contextos pouco significativos e de forma muitas vezes artificial.”

3.1. O Jogo do Caos

Conteúdos abordados: raciocínio lógico, sequências, ponto médio de um segmento.

Fundamentado em várias teorias anteriores ao século XX sobre o assunto, Edward Lorenz, um meteorologista do MIT, no início dos anos 1960, usando um computador primitivo e um conjunto simples de equações que visavam a modelagem

atmosférica, esboçou os contornos de um dos primeiros reconhecidos atratores caóticos. (BARBOSA, 2005)

Para estender a sua simulação para um futuro mais distante, Lorenz fez pequenos ajustes no cálculo, iniciando-o do meio do caminho com algumas casas decimais a menos. No entanto, o resultado foi completamente diferente do primeiro. O clima passou a se comportar de maneira distinta. Esta foi uma das primeiras demonstrações claras de dependência sensível das condições iniciais. Esta conclusão o leva à um artigo de 1963 onde Lorenz explica que uma borboleta batendo suas asas em Pequim pode afetar o clima milhares de quilômetros de distância de alguns dias mais tarde. Esta sensibilidade é agora chamada o "efeito borboleta".

Foi com base nessas observações e na curiosidade por decifrar tantos mistérios que surgiu a Teoria do Caos. Cientistas das mais diversas áreas passaram por meio desta nova teoria a entender, ou pelo menos começar a entender, fenômenos naturais de suas respectivas áreas, como descreveu Barbosa (2005):

“Essa ciência trouxe consigo o ver ordem e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o caótico. Entretanto, nota-se que o Caos colocou elos entre temas não relacionados, justamente pelas suas irregularidades. Seus cientistas, de áreas diversas, tiveram dificuldades e desânimo até mesmo para publicar, para colocar suas ideias e resultados de forma publicável. Temas como desordem na atmosfera, turbulência nos fluidos, variação populacional de espécies, oscilações do coração e cérebro, interligações microscópicas de vasos sanguíneos, ramificações alveolares, cotações da bolsa, forma das nuvens, relâmpagos, aglomerações estelares, etc. eram estudados buscando – se então ligações entre diferentes tipos de irregularidades: e surpreendentes ordens no caos foram descobertas.”

A ordem na desordem procurada pela Teoria do Caos pode ser percebida na marcação aparentemente desordenada de pontos no plano apresentada por Barbosa (2005) que intitula essa atividade como “O jogo do Caos”.

Seguindo os passos propostos por Barbosa (2005):

Considere três pontos A, B e C, não colineares, e um ponto P_i diferente do ponto central (baricentro) do triângulo ABC.

Passo 1. Faça $i = 0$ (ver figura 3.1)

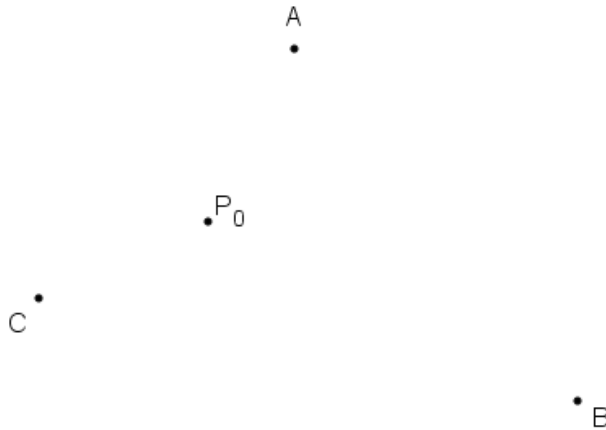


Figura 3. 1: Passo 1 do Jogo do Caos

Fonte: Próprio autor

Passo 2. Por um processo de sorteio, escolha um dos vértices, A, B ou C. (Sugerimos utilizar um dado hexaédrico e associar os números 1 e 2 para o vértice A, 3 e 4 para o vértice B e 5 e 6 para o vértice C)

Passo 3. Troque i por $i + 1$.

Passo 4. Marque o ponto P_{i+1} , ponto médio do segmento $\overline{P_i V}$, onde V é o vértice escolhido pelo sorteio do passo 2.

Passo 5. Volte ao passo 2.

A Figura 3.2 exemplifica o Jogo do Caos após 10 jogadas.

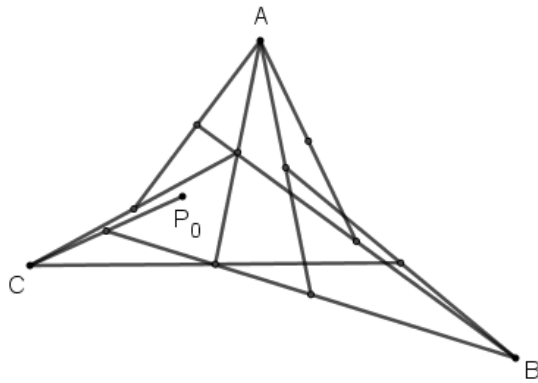


Figura 3. 2: Jogo do Caos após 10 jogadas

Fonte: Próprio autor

A aleatoriedade gera sensação de desordem. Porém ao construir o triângulo cujos vértices são os pontos médios P , Q e R , dos lados AB , BC e AC , respectivamente, não existem pontos no triângulo PQR , exceto o ponto P_0 .

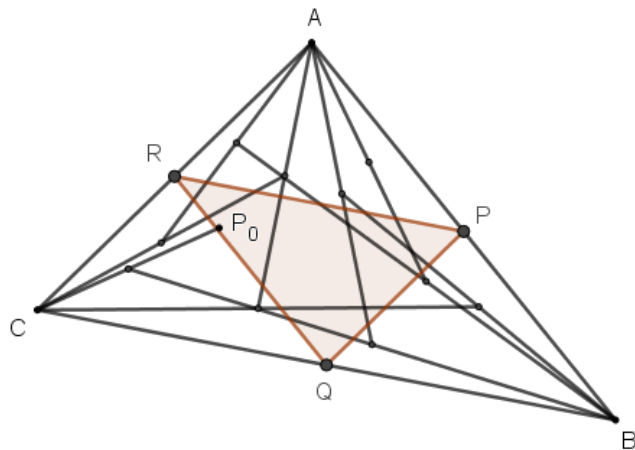


Figura 3. 3: Triângulo PQR contendo apenas o ponto P_0

Fonte: Próprio autor

De modo análogo, ao construir os triângulos VWZ , LMN e STU , centrais dos triângulos APR , BQP e CRQ , respectivamente, não teremos pontos interiores a esses triângulos. (Ver Figura 3.4)

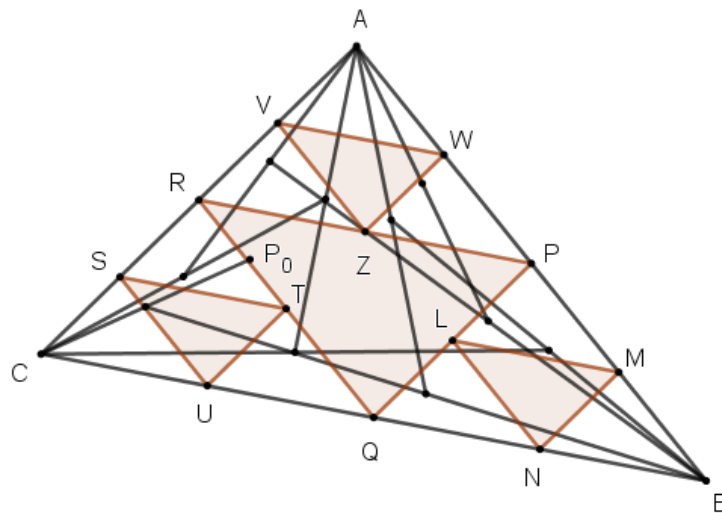


Figura 3. 4: Triângulos centrais

Fonte: Próprio autor

3.2. Conjunto de Cantor

Conteúdos abordados: frações, sequências, intervalos, proporcionalidade, potenciação.

Georg Cantor (1845-1918), nasceu em S. Petersburgo, Rússia. Estudou em Zurique, Göttingen e Berlim, onde recebeu a influência de Weierstrass⁵ e obteve o doutorado em 1867. A seguir, de 1869 a 1905, desenvolveu sua longa carreira no ensino na Universidade de Halle.

Os primeiros interesses de Cantor se voltaram para a teoria dos números, equações indeterminadas e séries geométricas. Criou uma bela abordagem dos números irracionais, que utiliza séries convergentes de números racionais e difere radicalmente do inspirado tratamento de Dedekind⁶. Em seus artigos ele desenvolveu

⁵ Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815-1897), foi um matemático alemão, conhecido pelos Teoremas de Stone-Weierstrass, Bolzano-Weierstrass e criador do conceito de limite de uma função.

⁶ Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), foi um matemático alemão conhecido pelo método que consiste em partir o corpo ordenado \mathbb{Q} dos números racionais e construir um corpo ordenado completo.

a teoria dos números transfinitos, baseado num tratamento matemático do infinito atual e criou uma aritmética dos números transfinitos análoga à aritmética dos números finitos. (EVES, 2004)

Hoje a teoria dos conjuntos de Cantor se faz presente em quase todos os ramos da matemática e mostra-se de importância especial na topologia e nos fundamentos da teoria das funções reais.

3.2.1. Construção do Conjunto de Cantor

Em 1883, Cantor publicou um trabalho no qual é construído o conjunto, chamado “*Conjunto de Cantor*”, descrito a seguir.

Passo 1. Considerar um segmento de reta;

Passo 2. Dividir o segmento em três partes iguais e remover (eliminar) o terço central;

Passo 3. Repetir o passo 2 em cada segmento, e assim, sucessivamente.



Figura 3. 5: Conjunto de Cantor

Fonte: <<https://topologia.wordpress.com>>, acesso em 26 jul. 2018

Consideremos o segmento de reta inicial com extremos em 0 e 1, isto é, o conjunto de pontos do nível 0, corresponde ao intervalo fechado $[0,1]$.

Com isso, no nível 1 teremos dois intervalos fechados: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. No nível 2, teremos quatro intervalos fechados: $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$ e $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

No nível 3, teremos 8 intervalos fechados: $\left[0, \frac{1}{27}\right]$, $\left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right]$, $\left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right]$, $\left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right]$ e $\left[\frac{26}{27}, 1\right]$ e assim sucessivamente no n-ésimo nível, teremos 2^n intervalos fechados.

3.3. O Triângulo de Sierpinski

Conteúdos abordados: sequências, ponto médio, potenciação, área, perímetro.

Waclaw Sierpinski (1882-1969), foi um matemático polonês. Ele era conhecido por contribuições para a teoria dos conjuntos, teoria dos números, teoria das funções e topologia. Estudou uma figura geométrica que ficou conhecida por Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski ou Fractal de Sierpinski, que se obtém como limite de um processo iterativo. (EVES, 2004)

Existem diferentes formas de construção deste fractal, uma delas será descrita a seguir.

3.3.1. Construção do Triângulo de Sierpinski

Passo 1. Considerar inicialmente um triângulo equilátero;

Passo 2. Unir os pontos médios dos lados do triângulo equilátero, obtendo 4 triângulos equiláteros;

Passo 3. Remover o triângulo central;

Passo 4. Em cada um dos triângulos não removidos, repetir os passos 2 e 3.

Passo 5. Repetir o passo 4 recursivamente.

A figura a seguir exemplifica o processo de construção.

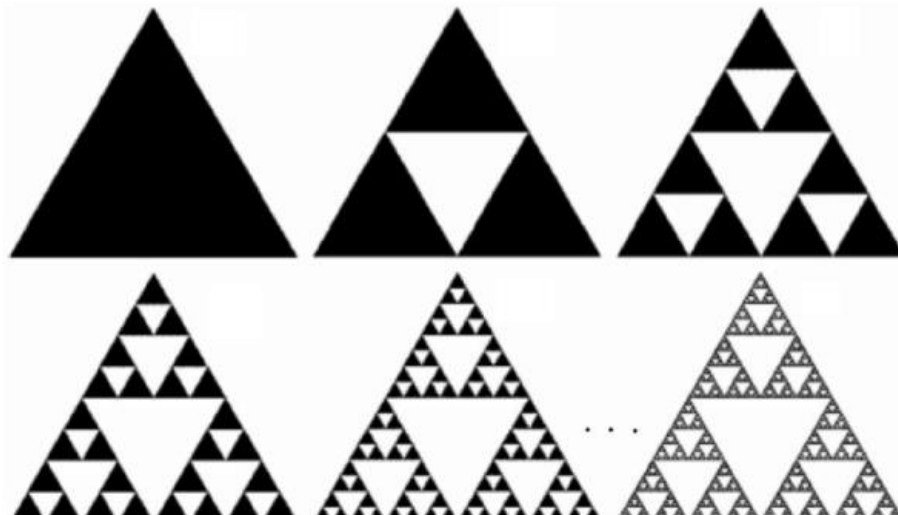


Figura 3. 6: Triângulo de Sierpinski

Fonte: <<http://www.asociacionceat.org>>, acesso em 23 jul. 2018.

Agora, considerar l a medida do lado do triângulo equilátero da etapa 1 da figura 3.6. A tabela 3.1 mostra a área e o perímetro de cada triângulo obtido a partir de cada passo realizado.

Passos	Área (A) de cada triângulo	Perímetro (P) de cada triângulo
0	A_0	$P_0 = 3l$
1	$A_1 = A_0 \cdot \frac{3}{4}$	$P_1 = 3 \cdot \frac{3l}{2} = P_0 \cdot \frac{3}{2}$
2	$A_2 = A_1 \cdot \frac{3}{4} = \left(A_0 \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} = A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$P_2 = 9 \cdot \frac{3l}{4} = P_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$
3	$A_3 = A_2 \cdot \frac{3}{4} = \left[A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] \cdot \frac{3}{4} = A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$	$P_3 = 27 \cdot \frac{3l}{8} = P_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$
4	$A_4 = A_3 \cdot \frac{3}{4} = \left[A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3\right] \cdot \frac{3}{4} = A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$	$P_4 = 81 \cdot \frac{3l}{16} = P_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$
⋮	⋮	⋮
n	$A_n = A_0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$	$P_n = P_0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$

Tabela 3. 1: Área e perímetro do triângulo de Sierpinski

Assim, como $\frac{3}{4} < 1$, segue que a área total do fractal vai diminuindo em 75% da anterior, conforme aumenta a ordem do nível (passos realizados), o que implica a área do fractal tender a zero. De modo análogo ao perímetro, temos que $\frac{3}{2} > 1$ e então o perímetro aumenta conforme aumenta a ordem do nível e faz o perímetro tender ao infinito.

3.4. O Tapete de Sierpinski

Conteúdos abordados: fração, sequência, potenciação, área, perímetro.

Podemos aplicar a mesma técnica de remoção usada no Triângulo de Sierpinski, partindo de um quadrado, dividindo-o em 9 quadrados congruentes, removendo o quadrado central, e aplicar o mesmo procedimento com os 8 quadrados restantes, e assim sucessivamente, obtendo o Tapete de Sierpinski (Figura 3.7).

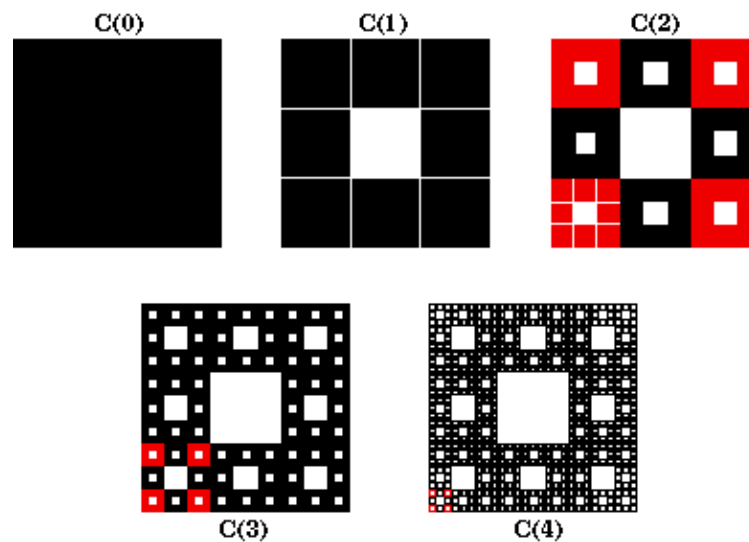


Figura 3. 7: Tapete de Sierpinski

Fonte: <<http://www.gloomy-grim.info>>, acesso em 23 jul. 2018

Considerando l como medida do lado do quadrado inicial do Tapete de Sierpinski, temos,

Passo	Quadrado retirados	Área (A)
0	$2^0 = 2^{3 \cdot 0} = 1$	$A_0 = l^2$
1	$2^3 = 2^{3 \cdot 1} = 8$	$A_1 = \frac{8}{9} \cdot A_0 = \frac{8}{9} \cdot l^2$
2	$2^6 = 2^{3 \cdot 2} = 64$	$A_2 = \frac{8}{9} \cdot A_1 = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{8}{9} \cdot l^2\right) = A_0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$
3	$2^9 = 2^{3 \cdot 3} = 512$	$A_3 = \frac{8}{9} \cdot A_2 = \frac{8}{9} \cdot \left[A_0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2\right] = A_0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3$
4	$2^{12} = 2^{3 \cdot 4} = 4096$	$A_4 = \frac{8}{9} \cdot A_3 = \frac{8}{9} \cdot \left[A_0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3\right] = A_0 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^4$
⋮	⋮	⋮
n	2^{3n}	$A = l^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n$

Tabela 3. 2: Área do Tapete de Sierpinski

Como $\frac{8}{9} < 1$, então a área do fractal diminui, cerca de 88,89% da anterior, à medida que aumentam os passos das iterações. Com isso, dizemos que a área do fractal tende a zero à medida que n tende ao infinito.

3.5. A Curva de Koch

Conteúdos abordados: fração, sequências, potenciação, perímetro.

Um dos exemplos de fractais mais simples é a Curva de Koch. Esta foi apresentada pelo matemático sueco Helge Von Koch (1870-1924), constituída por um processo iterativo.

3.5.1. Construção da Curva de Koch

Passo 1. Construir um segmento de reta.

Passo 2. Dividir esse segmento em três partes iguais.

Passo 3. Substituir o segmento médio por dois segmentos iguais, de modo que, o segmento médio e os outros dois segmentos construídos formem um triângulo equilátero. Obtendo uma linha poligonal com quatro segmentos de mesma medida.

Passo 4. Recursivamente, repete-se os passos 2 e 3 para cada um dos segmentos obtidos infinitamente.

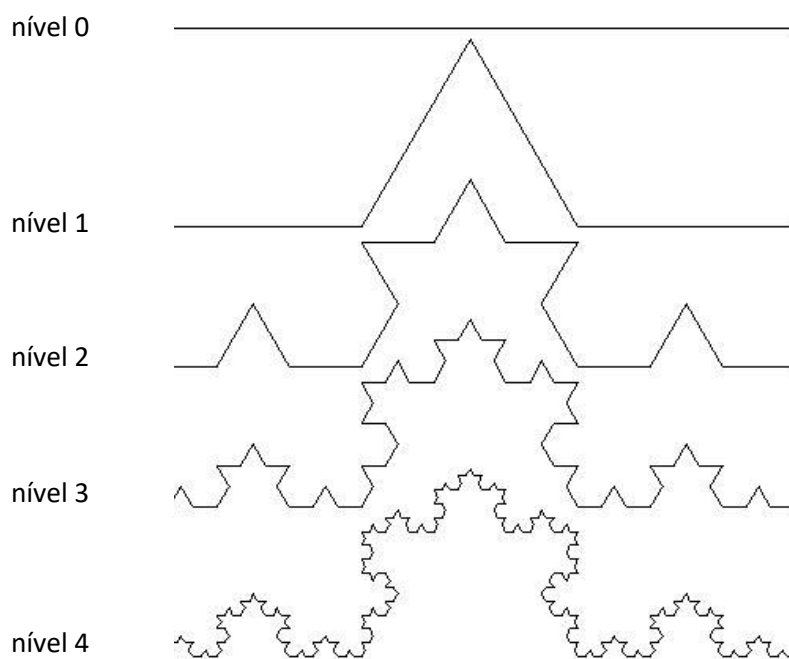


Figura 3. 8: Curva de Koch

Fonte: <<http://www2.ic.uff.br>>, acesso em 26 jul. 2018

3.6. A Ilha de Koch

Conteúdos abordados: sequências, ponto médio, potenciação, área, perímetro.

O matemático sueco Helge Von Koch foi o criador da Curva de Koch, que mais tarde ficou conhecida como “Ilha de Koch” ou “Floco de Neve de Koch”.

É um fato bem conhecido que se pode definir uma curva contínua geometricamente como o limite de uma sequência de linhas poligonais. Esse processo tem sido usado por muitos matemáticos para criar curvas contínuas sem tangentes ou semitangentes em nenhum de seus pontos. O processo de construção da Curva de Koch baseia-se muito no processo de construção por eliminação utilizado do Triângulo de Sierpinski.

Iniciamos então o processo de construção com um triângulo equilátero, com a diferença que a Curva de Koch tem como figura inicial um segmento de reta, enquanto a Ilha de Koch tem como figura inicial um triângulo equilátero.

3.6.1. Construção da Ilha de Koch

Passo 1. Considerar um triângulo equilátero;

Passo 2. Em cada lado do triângulo divida-o em 3 parte iguais, construindo sobre cada segmento médio um novo triângulo equilátero, tal como podemos observar na figura 3.9;

Passo 3. Repetir a etapa 2 em cada um dos 12 segmentos obtidos. Repetindo inicialmente o processo, obtendo a Ilha de Koch.

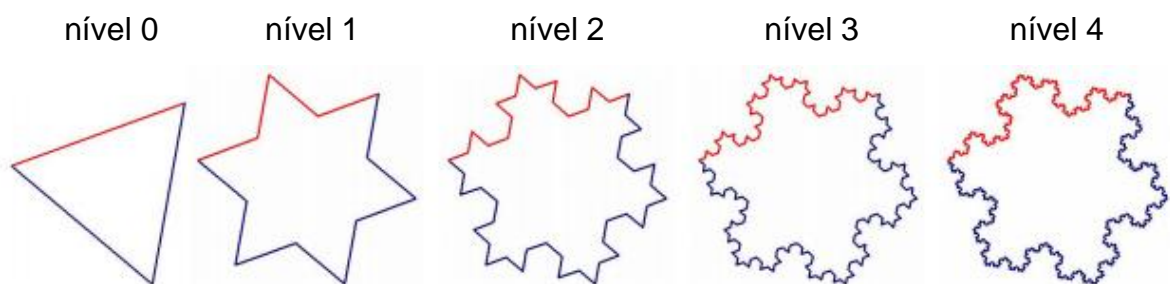


Figura 3. 9: Ilha de Koch

Fonte: <<http://simetrica.esy.es>>, acesso em 23 jul. 2018

Vamos agora estudar alguns aspectos do Floco de Neve de Koch.

3.6.2. Área do fractal “Floco de Neve de Koch”

Consideremos l como medida do lado inicial do triângulo da figura 3.9 (nível 0). Assim sua área será $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

Raciocinamos, relativamente ao que acontece num dos lados, pois a área final bastará multiplicarmos pelo fator 3.

Em cada um dos lados é acrescentado um triângulo equilátero de área que indicamos por Δ (Figura 3.10.a), que é igual a $\frac{1}{9}$ da área de A (Figura 3.10.b). Assim a área no nível 1 ficará

$$\frac{1}{9} \cdot \Delta$$

No nível 2 a área é acrescida de 4 pequenos triângulos equiláteros (ver figura 3.10.c), com áreas iguais a $\frac{1}{9}$ do anterior. Ficamos então, no nível 2, com área igual a

$$\Delta + 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \Delta$$

No nível 3 a área é acrescida de 16 triângulos equiláteros, sendo cada um com área igual a $\frac{1}{9}$ da área de cada um do anterior (nível 2). Assim, no nível 3, ficamos com área igual a

$$\text{Área} = \Delta + 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \Delta + 16 \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \Delta\right)\right]$$

$$\text{Área} = \Delta + \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \Delta + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \Delta$$

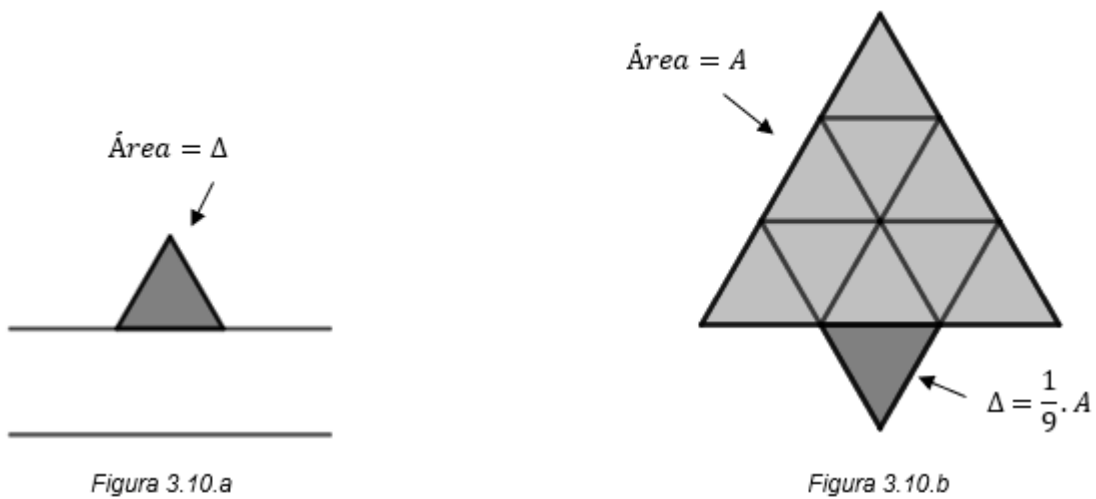


Figura 3.10.a

Figura 3.10.b



Figura 3.10.c

Figura 3.10.d

Figura 3. 10: Esquema de divisão de triângulos equiláteros

Fonte: Próprio autor

Logo, na Figura 3.10.d, temos área igual a

$$\text{Área} = \Delta + \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \Delta + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \Delta + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \cdot \Delta$$

Assim, ao nível n , devemos ter a área dada por:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \Delta + \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \Delta + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdot \Delta + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \cdot \Delta \\ \text{Área} &= \left[\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right] \cdot \Delta \end{aligned}$$

Mas, como aumentamos indefinidamente o nível n , o fator $\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$, por ser uma soma infinita, quando $n \rightarrow \infty$, de uma sucessão geométrica decrescente (PG) e ilimitada, pois $\frac{4}{9} < 1$, então temos a área

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) \cdot \Delta = \frac{9}{5} \cdot \Delta$$

Do resultado anterior, para obtermos a área total do fractal, basta multiplicar pelo fator 3 (lados do triângulo) e acrescentarmos a área inicial A do triângulo equilátero (nível 0).

Portanto, a área total do fractal será dada por

$$\text{Área do Floco de Neve de Koch} = A + 3 \cdot \left(\frac{9}{5} \cdot \Delta \right) = A + 3 \cdot \left[\frac{9}{5} \cdot \left(\frac{1}{9} \cdot \Delta \right) \right] = \frac{8}{5} \cdot A$$

Com isso, concluímos que a área total do fractal é 60% superior que a área inicial.

3.6.3. Perímetro do fractal “Floco de Neve de Koch”

De modo semelhante será tratada a área do Floco de Neve. Será analisado um dos lados e o resultado, será multiplicado pelo fator 3 (lados do triângulo).

Desprezemos o interior da figura e consideremos apenas a fronteira do Floco de Neve. Tendo em conta seu processo de construção, é fácil perceber que à medida que vão ocorrendo transformações o número de lados da curva aumenta, mas o comprimento de cada um deles diminui.

Consideremos como medida inicial, um triângulo equilátero de lado medindo c unidades. Então,

Nível	Número de lados	Comprimento do lado (c)	Perímetros
0	$3 = 3 \cdot 4^0$	c_0	$3 \cdot c$
1	$12 = 3 \cdot 4^1$	$c_1 = \frac{1}{3} \cdot c_0$	$P_1 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot c\right)$
2	$48 = 3 \cdot 4^2$	$c_2 = \frac{1}{3} \cdot c_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot c_0\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot c_0$	$P_2 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot c$
3	$192 = 3 \cdot 4^3$	$c_3 = \frac{1}{3} \cdot c_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot c_0$	$P_3 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot c$
4	$768 = 3 \cdot 4^4$	$c_4 = \frac{1}{3} \cdot c_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot c_0$	$P_4 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot c$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$3 \cdot 4^n$	$c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot c_0$	$P_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot c$

Tabela 3. 3: Comprimento e perímetro do floco de neve de Koch

Logo, como $\frac{1}{3} < 1$ concluímos que quanto mais iterações forem realizadas, isto é, maior for o número de lados, menor será o comprimento do lado, e assim o lado tende a zero.

Por outro lado, o perímetro para um dado nível é $\frac{4}{3}$ do nível anterior, e como $\frac{4}{3} > 1$, segue que o perímetro aumenta $\frac{1}{3}$ do perímetro anterior. Esse aumento se faz em todos os segmentos e em todos os níveis, logo, o perímetro de um nível para o próximo fica ampliado também em $\frac{1}{3}$.

Assim, concluímos que o perímetro do Floco de Neve de Koch é infinito.

3.7. Árvore pitagórica fundamental

Conteúdos abordados: sequências, equações, potenciação, área, perímetro.

A Árvore de Pitágoras corresponde a uma construção que consta dos seguintes passos:

3.7.1. Construção da Árvore Pitagórica

Passo 1. Construir um quadrado;

Passo 2. Usando como base o lado de cima desse quadrado, construir um triângulo retângulo tendo como hipotenusa a base do quadrado inicialmente tomado;

Passo 3. Em seguida, nos dois catetos restantes, construir novos quadrados cujos lados são justamente os catetos do triângulo;

Passo 4. Repetir as etapas 2 e 3 recursivamente.

A figura 3.11 ilustra quatro iterações da árvore pitagórica.



Figura 3. 11: Quatro iterações da Árvore Pitagórica Fundamental

Fonte: <<https://repositorio.bc.ufg.br>>, acesso em 23 jul. 2018

Como proposta de ensino podemos abordar como atividade em sala de aula, alguns elementos dessa figura, como:

1. O número de triângulos;

Passos	Número de triângulos
0	$0 = 1 - 1 = 2^0 - 1$
1	$1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$
3	$7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$

4	$15 = 16 - 1 = 2^4 - 1$
⋮	⋮
n	$2^n - 1$

Tabela 3. 4: Número de triângulos da árvore pitagórica

2. O número de quadrados;

Passos	Número de quadrados
0	$1 = 2 - 1 = 2^1 - 1$
1	$3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$
2	$7 = 8 - 1 = 2^3 - 1$
3	$15 = 16 - 1 = 2^4 - 1$
4	$31 = 32 - 1 = 2^5 - 1$
⋮	⋮
n	$2^{n+1} - 1$

Tabela 3. 5: Número de quadrados da árvore pitagórica

3.8. Dimensão fractal

Desde a antiguidade a Geometria Euclidiana tem servido para a descrição de diversas formas e diferentes fenômenos da natureza. Porém, em alguns estudos da Geometria Euclidiana deparamos com o problema de calcular a dimensão de algumas formas irregulares como: nuvens, montanhas, ramos de árvores, vasos sanguíneos, entre outros, essa geometria tornou-se inadequada e surgiu a necessidade de buscar outras geometrias. Em meados do século XIX foi possível resolver este problema com o surgimento da Geometria fractal. Segundo a mesma, a dimensão de um objeto depende do seu formato e, em geral, representa o espaço que uma estrutura ocupa no espaço métrico em que está inserida. Para entender melhor o conceito de dimensão podemos adotar alguns conceitos da Geometria Euclidiana (largura, comprimento e altura) que são diariamente utilizados para expressar o “tamanho” de um objeto.

3.8.1. Conjuntos auto semelhantes

Dimensão 1: Consideremos um segmento de reta. Vamos dividir cada um dos seus lados em quatro partes geometricamente iguais, isto é, cada parte que nós obtemos na divisão é igual ao segmento original multiplicado por um fator de $\frac{1}{4}$. Ficamos então com 4 partes iguais.



Figura 3. 12: Dimensão do segmento

Fonte: Próprio autor

Dimensão 2: Efetuando o mesmo procedimento para um quadrado, vamos dividir cada um dos lados em quatro partes iguais. Ficamos então com 4^2 partes iguais.

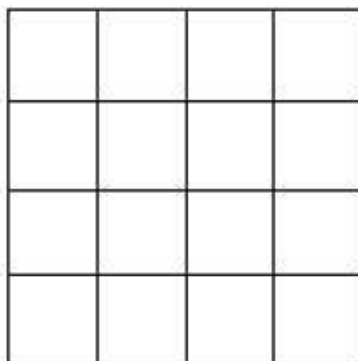


Figura 3. 13: Dimensão do quadrado

Fonte: Próprio autor

Dimensão 3: Procedendo de igual forma par um cubo, obtemos 4^3 partes iguais.

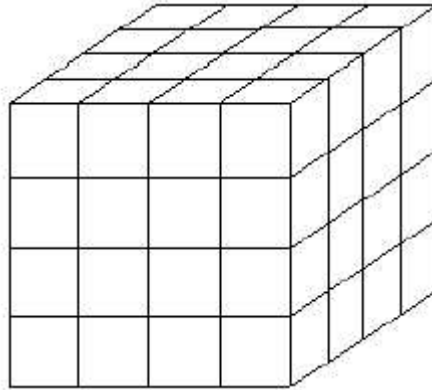


Figura 3. 14: Dimensão do cubo

Fonte: Próprio autor

Poderíamos ter escolhido qualquer outro coeficiente de redução, variando o número de partes que o objeto inicial é dividido. Assim, designando por **N** o número de partes e por **r** o coeficiente de redução, obtemos a igualdade em que a dimensão é o expoente (**D**) que aparece no denominador da fração

$$N = \frac{1}{r^D}$$

o que é equivalente a

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros, segue que,

$$\log N = \log \left(\frac{1}{r}\right)^D = D \cdot \log \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)} \quad (3.1)$$

Vejamos agora a dimensão de alguns conjuntos fractais. Vale destacar que cada um destes objetos são geometricamente auto semelhantes, ou seja, cada uma das suas partes são uma cópia reduzida exata do objeto inicial. Este conceito de

dimensão apenas pode ser considerado na análise de objetos que têm auto semelhança exata.

3.8.2. Conjunto de Cantor

Sabemos que, em cada iteração, ficamos com 2 segmentos ($N = 2$) que serão novamente divididos em três partes iguais, sendo o coeficiente de redução $r = \frac{1}{3}$. Então, a dimensão fractal do conjunto de Cantor é dada por:

$$D = \frac{\log 2}{\log \left(\frac{1}{3} \right)} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong \frac{0,301}{0,477} \cong 0,63.$$

3.8.3. Triângulo de Sierpinski

Sabemos que o coeficiente de redução é dado por $r = \frac{1}{2}$. Assim, o número de partes obtidas em cada segmentos de reta é $N = 3$. Logo,

$$D = \frac{\log 3}{\log \left(\frac{1}{2} \right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong \frac{0,477}{0,301} \cong 1,58.$$

3.8.4. Tapete de Sierpinski

Sabemos que o coeficiente de redução é, agora, $r = \frac{1}{3}$. O número de partes obtidas em cada segmento de reta é $N = 8$. Logo,

$$D = \frac{\log 8}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log 8}{\log 3} \cong \frac{0,903}{0,477} \cong 1,89.$$

3.8.5. Curva de Koch

Em cada iteração, dividimos cada segmentos em três parte iguais, sendo o número de partes obtidas em cada segmento de reta igual a 4. Então, o coeficiente de redução é $r = \frac{1}{3}$ e $N = 4$. Assim,

$$D = \frac{\log 4}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong \frac{0,602}{0,477} \cong 1,26.$$

Em geral, neste capítulo, procuramos elencar os mais diversos conteúdos matemáticos que podem ser explorados com a geometria fractal em atividades na sala de aula. No próximo capítulo, abordaremos alguns desses fractais e destacaremos a experiência e os relatos dos alunos no contexto de “geometria fractal em sala de aula”.

4. CONSTRUINDO FRACTAIS EM SALA DE AULA

Como proposta de ensino, neste capítulo, apresentaremos a construção de alguns fractais realizados com alunos do 9º ano (num total de 21 alunos) do ensino regular de uma escola da cidade de Birigui – SP, no ano de 2018.

Neste trabalho, procuramos encontrar aspectos dos fractais que possam ser abordados em sala de aula, nos ensinos fundamental e médio, como: forma, perímetro, área, semelhança, entre outras. Com essas atividades, cabe mostrar que a matemática está em constante e contínua evolução buscando às novas necessidades surgidas com a ciência contemporânea. Essas atividades podem ser utilizadas para a construção do conhecimento dos alunos, partindo do conhecimento prévio ou até mesmo de algo que eles ainda não conhecem. Além disso, torna-se interessante e útil, a partir do momento em que o aluno percebe que a matemática está em toda parte, principalmente na natureza. Além do mais, percebe que essa disciplina não é isolada, podendo se relacionar com diversas outras áreas como: Biologia, Geografia, História, etc. Conseqüentemente, faz com que o aluno possa valorizar e observar mais a natureza ao seu redor. Também pode ser útil, para que os discentes não visualizem a matemática apenas com algoritmos, números, desenvolvimentos de fórmulas, podendo tornar o estudo dessa ciência mais prazerosa.

Inicialmente, para familiarização do conteúdo, foi solicitado aos alunos que realizassem uma pesquisa sobre o tema “Geometria Fractal”. Após a pesquisa, em sala de aula, realizamos as atividades: “Jogo do Caos” em que os alunos puderam perceber, que mesmo com resultados aleatórios, a desordem leva a ordem e a irregularidade a regularidade. A seguir, destacamos alguns resultados obtidos pelos alunos.

4.1. A pesquisa “Geometria Fractal”

Destacamos algumas respostas dos alunos a respeito da pesquisa sobre fractais.

Aluno "A"

1. Você conhece o termo Fractal? Se a resposta for afirmativa, descreva sucintamente o que se sabe a respeito.

Não.

"Não."

Após analisarmos as respostas dos alunos, verificamos que o termo fractal era desconhecido em 100% dos alunos, conforme ilustramos no gráfico abaixo.

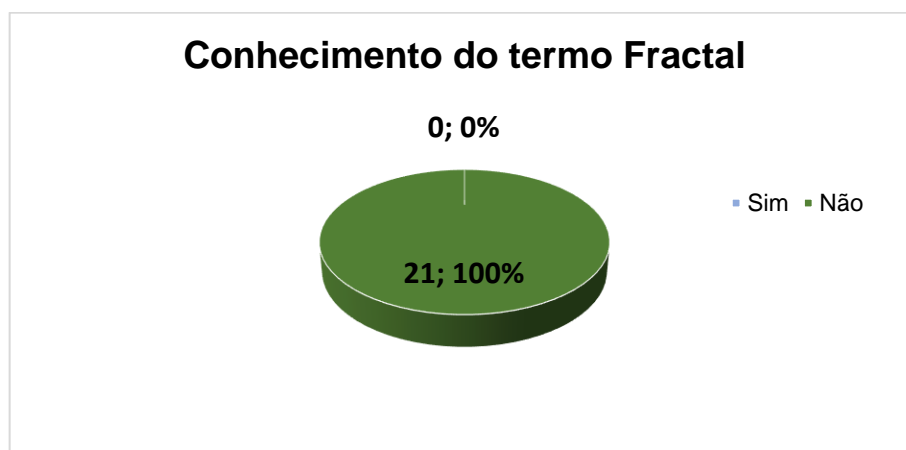


Gráfico 4. 1: Conhecimento do termo Fractal

Aluno "C"

2. Procure em um dicionário uma definição para o termo "fractal" ou "fractais". Cite sua fonte.

Diz-se de, ou forma geométrica que pode ser subdividida indefinidamente em partes, as quais, de certo modo, são cópias reduzidas do todo.

Fonte: Mimi dicionário Puzillo.

"Diz-se de, ou forma geométrica que pode ser subdividida indefinidamente em partes, as quais de certo modo, são cópias reduzidas do todo."

Aluno "H"

3. Pesquise na internet: O que é um fractal? Cite sua fonte.

São figuras geométricas estranhas que são produzidas através de equações matemáticas que podem ser interpretadas como cores e imagens através de programas

Fonte: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/que-sao-fractais>

"São figuras geométricas estranhas que são produzidas através de equações matemáticas que podem ser interpretadas como cores e imagens através de programas."

Aluno "L"

4. Quais são as principais características de um fractal? Cite sua fonte.

Podem, infinitamente, ser divididos em partes, sendo que cada uma delas será semelhante à original. Normalmente são auto similares e não dependem de escalas. São geradas por um padrão repetido

Fonte: estudo pratico.com.br/geometria-fractal-caracteristicas/

"Podem, infinitamente, ser divididos em partes, sendo que cada uma delas será semelhante à original. Normalmente são auto similares e não dependem de escalas. São geradas por um padrão repetido."

Aluno "T"

5. Pesquise na internet: Quem foi Benoit Mandelbrot? Cite sua fonte.

Mandelbrot, forneceu teorias matemáticas para fenômenos de probabilidade estática e métodos de auto semelhança em probabilidades, é conhecido mundialmente como sendo o único responsável pelo enorme interesse nos chamados objetos fractais.

Fonte: Instituto de Educação.com.br

"Mandelbrot forneceu teorias matemáticas para fenômenos da probabilidade estática e métodos de auto semelhança em probabilidades, é conhecido mundialmente como sendo o único responsável pelo enorme interesse nos chamados objetos fractais."

Aluno "M"

6. Onde os fractais podem ser utilizados? Escreva sobre uma de suas aplicações. Cite sua fonte.

As estruturas fractais estão sendo utilizadas em fenômenos da natureza, na Geografia para estudos de erosão, formação das nuvens, distribuição dos afluentes de um rio e também na medicina.

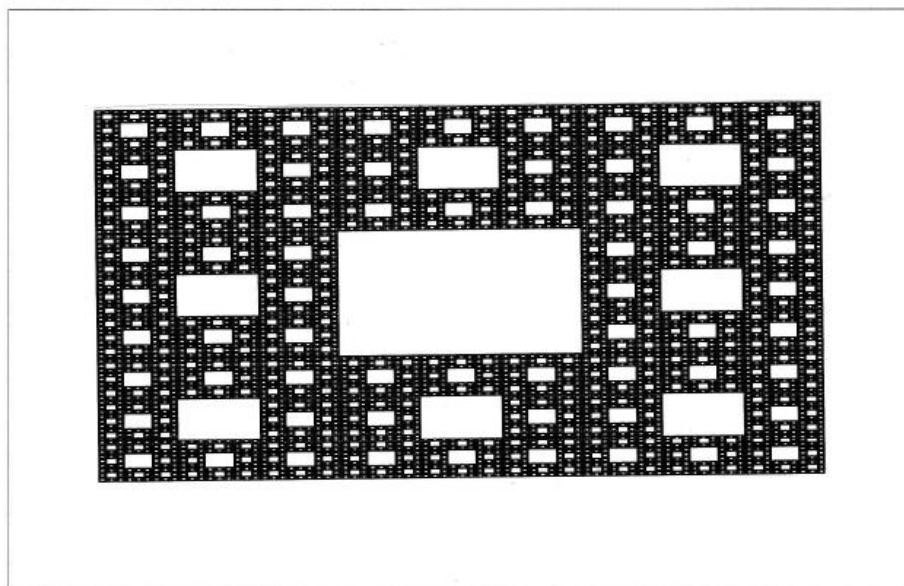
Fonte: www.geocities.ws

"As estruturas fractais estão sendo utilizadas em fenômenos da natureza, na Geografia para estudos de erosão, formação das nuvens, distribuição dos afluentes de um rio e também na medicina."

Aluno "K"

7. Pesquise na internet um dos temas abaixo, selecione uma das imagens exibidas, imprima em cores, recorte e cole no quadro abaixo. Assinale o tema escolhido para pesquisar.

- () Triângulo de Sierpinski (X) Tapete de Sierpinski
() Ilha de Koch () Árvore Pitagórica



Ressaltamos esta questão, pois após analisarmos suas respostas, questionamos os alunos sobre o porquê escolheram tal fractal. A maioria dos alunos, nove deles, escolheram a árvore pitagórica pois queriam saber como seria "Pitágoras" em um "outro tipo de geometria" da qual eles estavam acostumados (triângulos

retângulos) no ensino fundamental. Os demais alunos relataram escolher os outros fractais por curiosidade, pois tinham a ideia de que a árvore pitagórica, pelo nome que tem, envolver triângulos retângulos, o que já é um conhecimento adquirido por eles, então buscaram conhecer outros tipos existentes dos fractais.

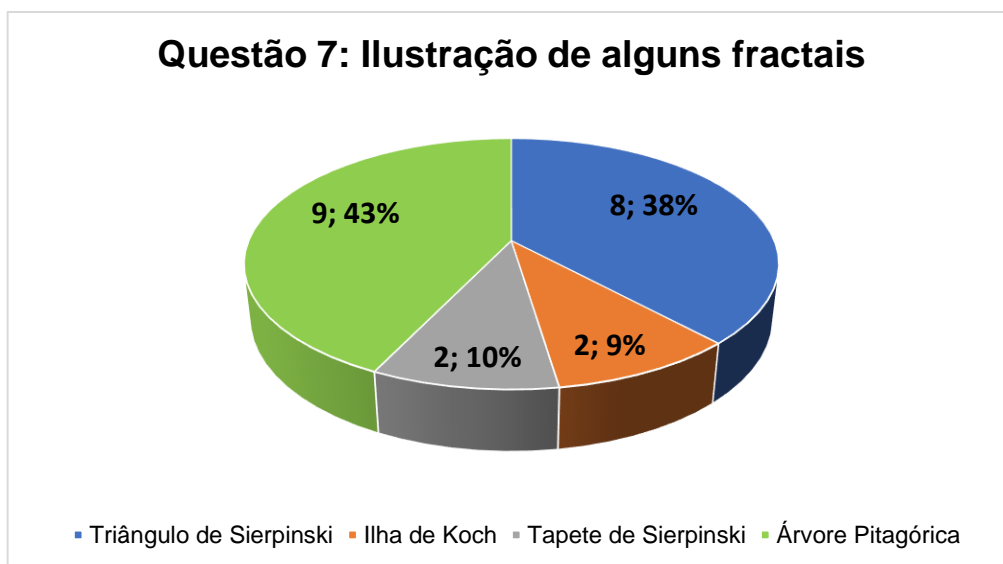


Gráfico 4. 2: Escolha do fractal pelos alunos

Aluno “J”

8. Pesquise na internet o tema abaixo, selecione uma das imagens exibidas, imprima em cores, recorte e cole no quadro abaixo.

Fractais na Natureza



Aluno “F”

9. Pesquise na internet, imagens fractais, selecione uma das imagens exibidas, imprima em cores, recorte e cole no quadro abaixo.

Um Fractal que me chamou a atenção



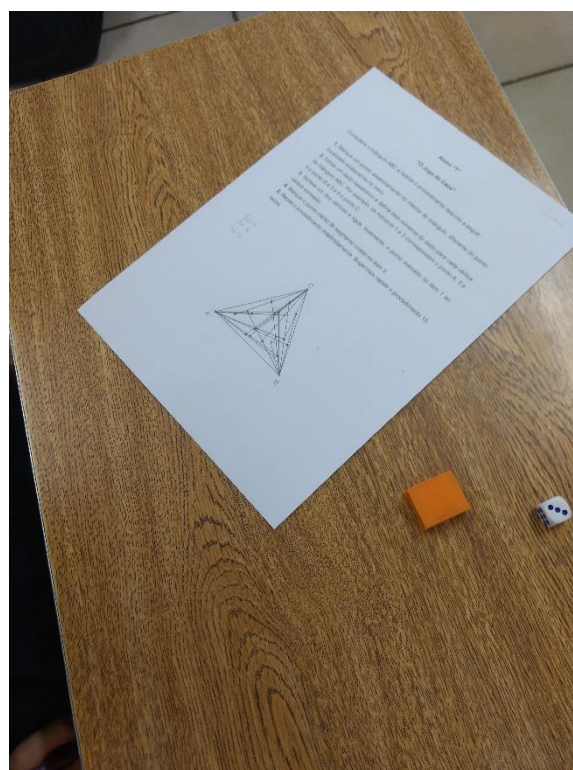
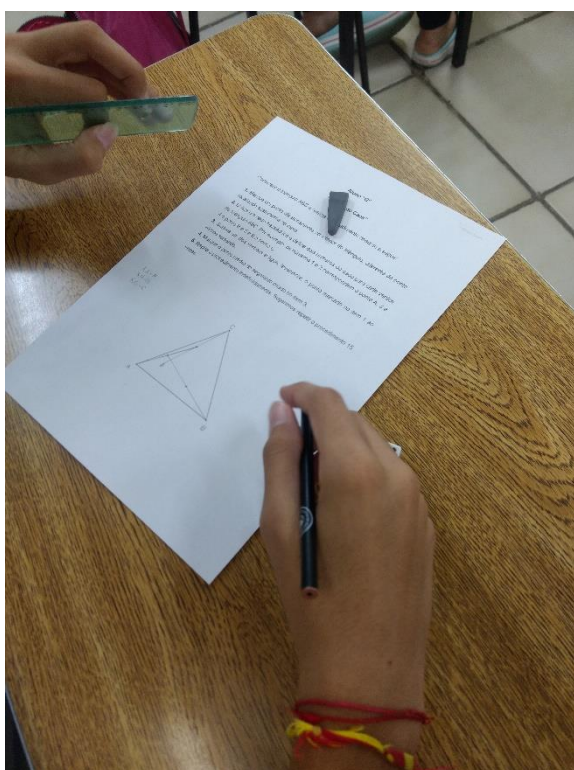
10. O que chamou a sua atenção na imagem fractal que você escolheu livremente? Comente.

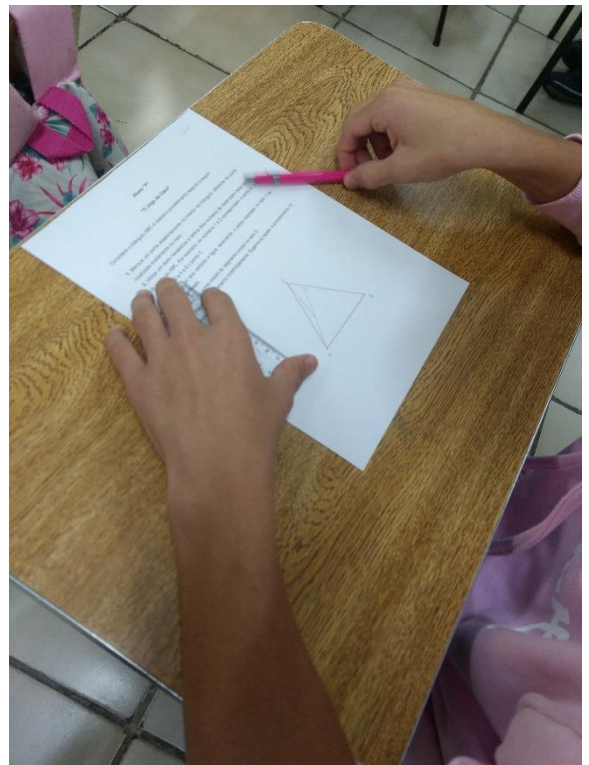
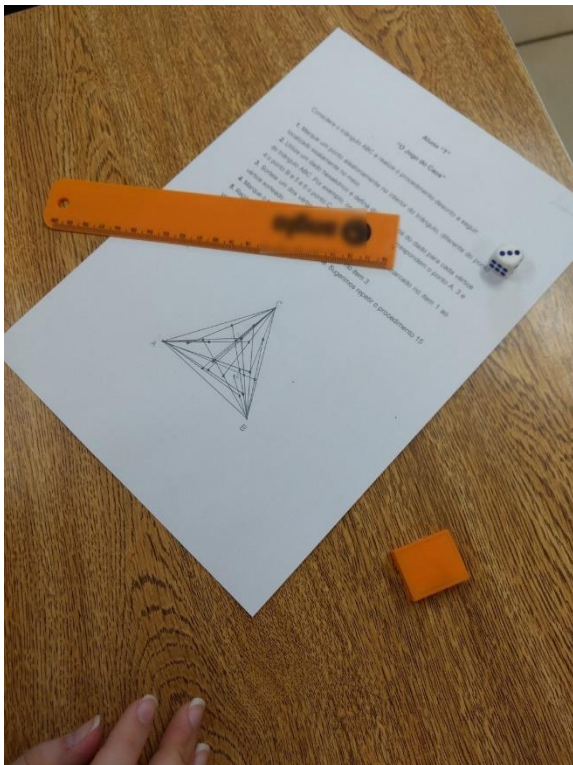
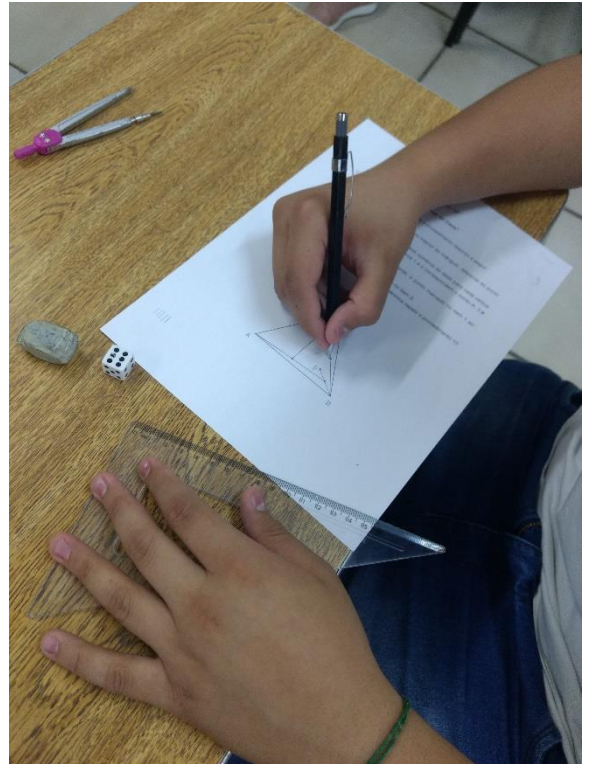
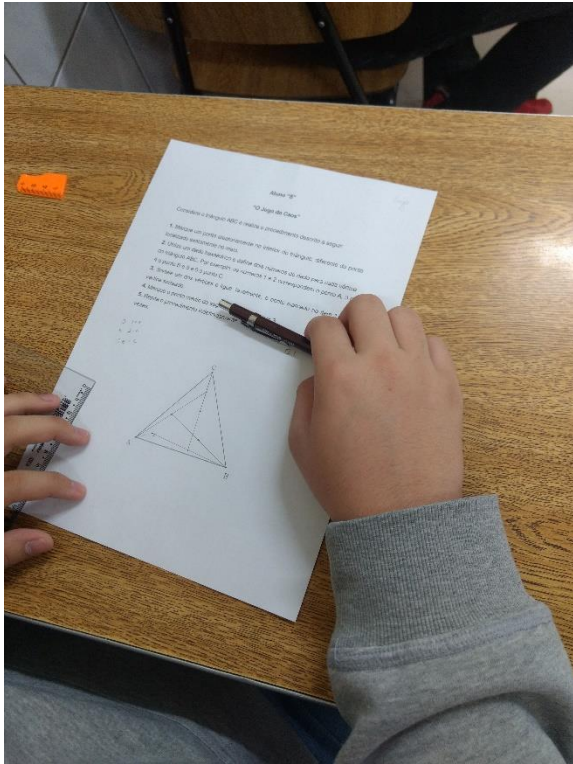
A grande variedade de tonalidade de uma cor (azul) que mostra simplicidade, porém ao mesmo tempo complexidade. As espirais formadas nos fazem prender nossa atenção imediatamente, a mudança de tonalidade pretende em conjunto aos símbolos (em posições variadas) demonstrar as diferenças de perspectiva, pequenas mudanças estragariam.

“A grande variedade de tonalidade de uma cor (azul) que mostra simplicidade, porém ao mesmo tempo complexidade. As espirais formadas nos fazem prender nossa atenção imediatamente, a mudança de tonalidade pretende em conjunto aos símbolos (em posições variadas) demonstrar as diferenças de perspectiva, pequenas mudanças estragariam.”

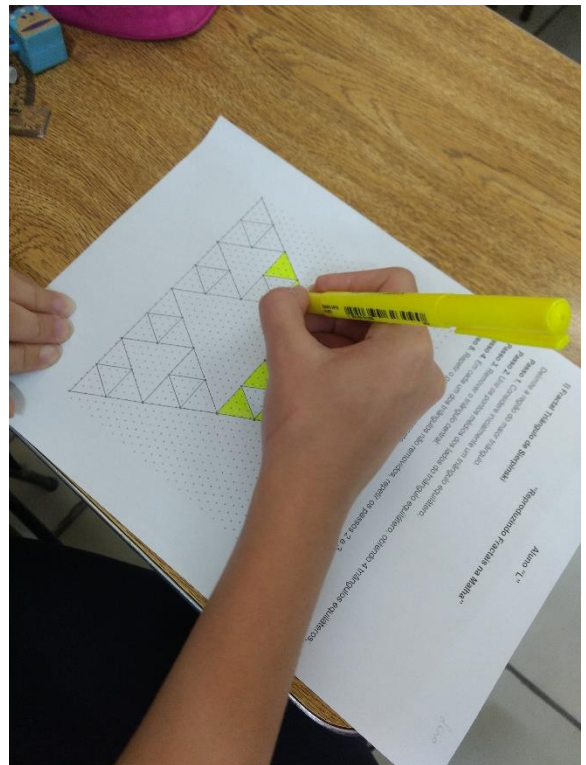
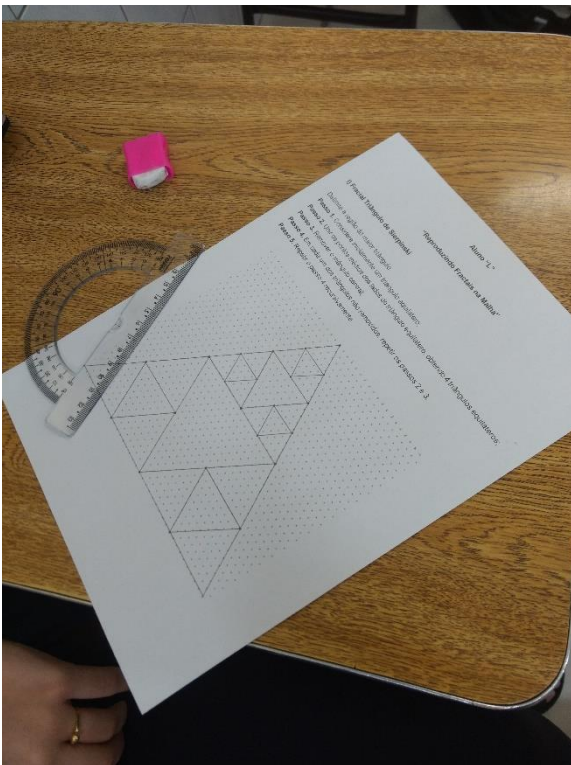
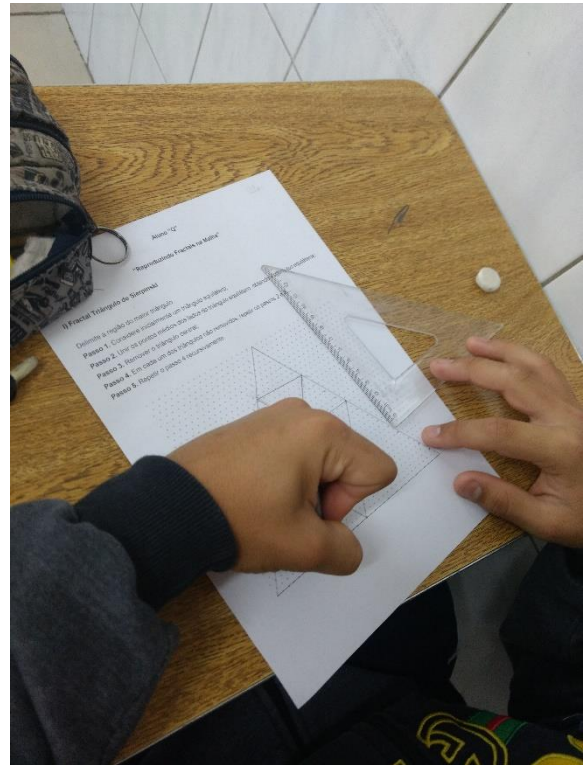
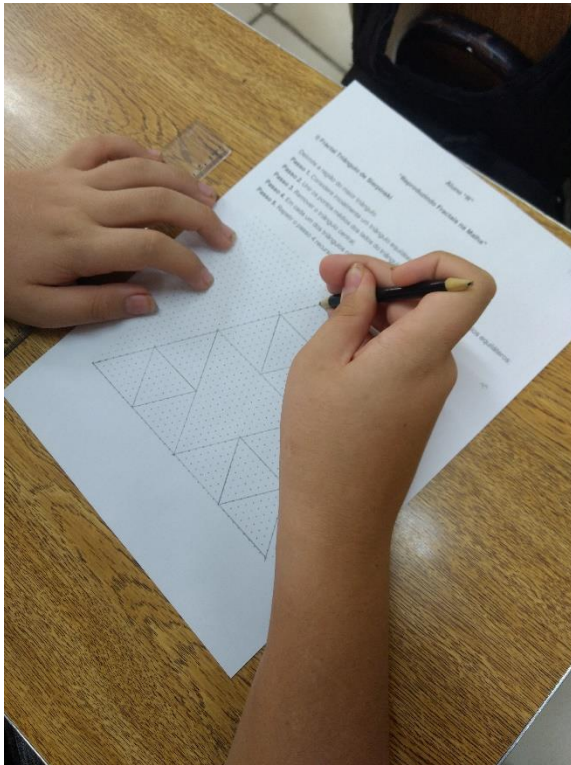
4.2. O Jogo do Caos

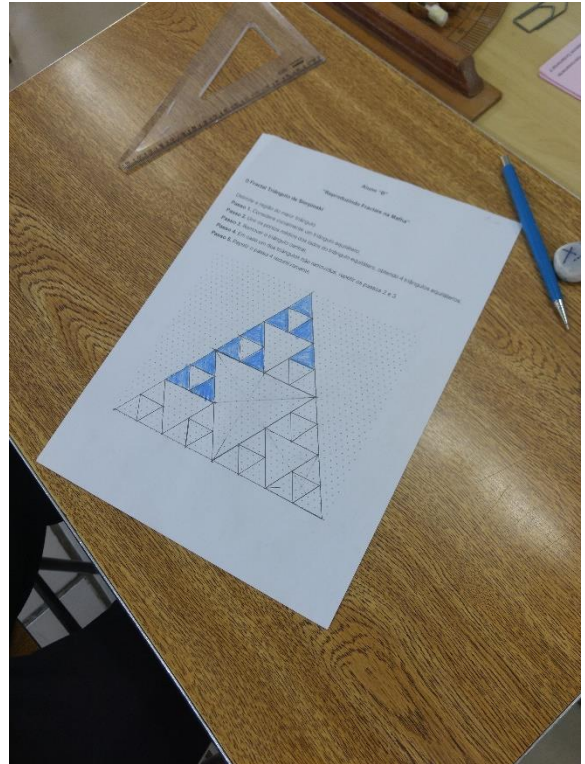
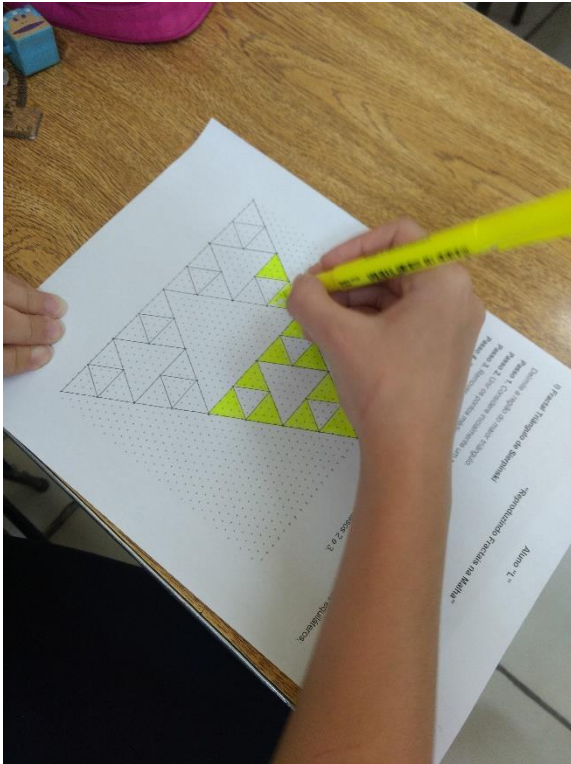
Buscamos, em nossa pesquisa, o estabelecimento do jogo, no sentido lúdico usual, e principalmente como recurso pedagógico para o ensino fundamental ou médio. Este jogo é capaz de desenvolver ou fixar conceitos de direção, proporcionalidade, interior e fronteira de uma região. Tal atividade, foi realizada como pré-requisito para a construção dos fractais “Triângulo de Sierpinski” e “Tapete de Sierpinski”.



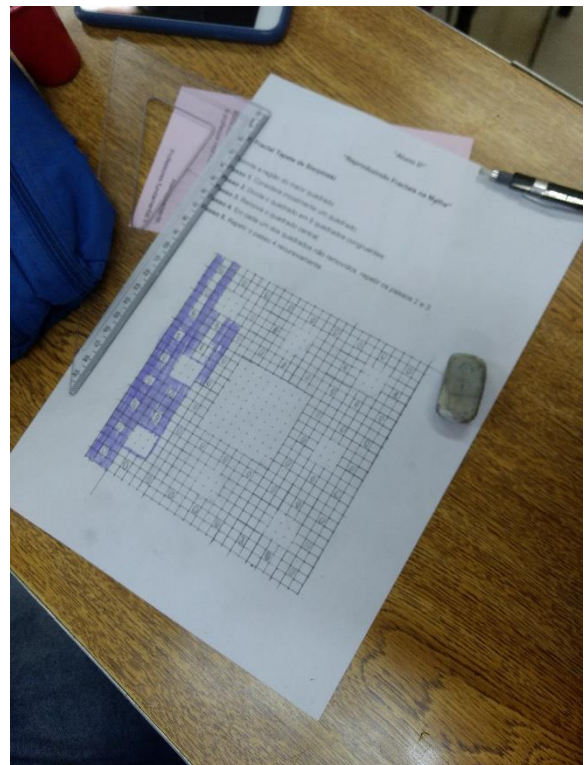
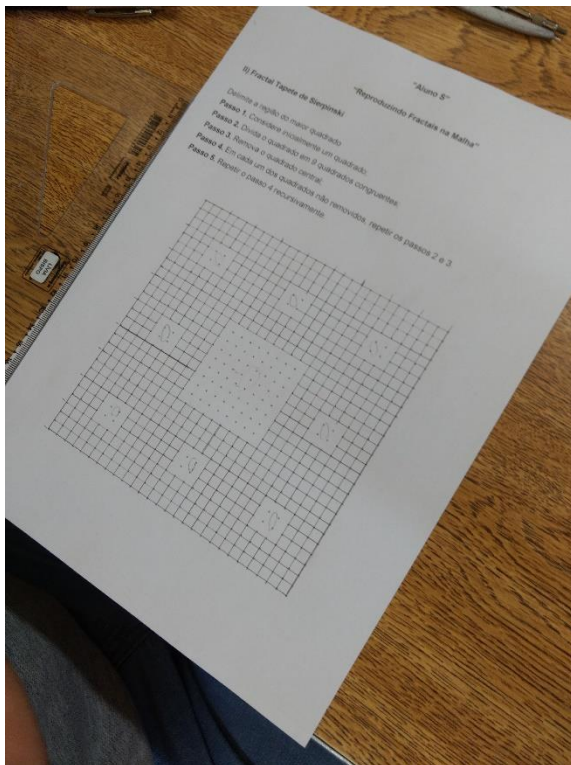


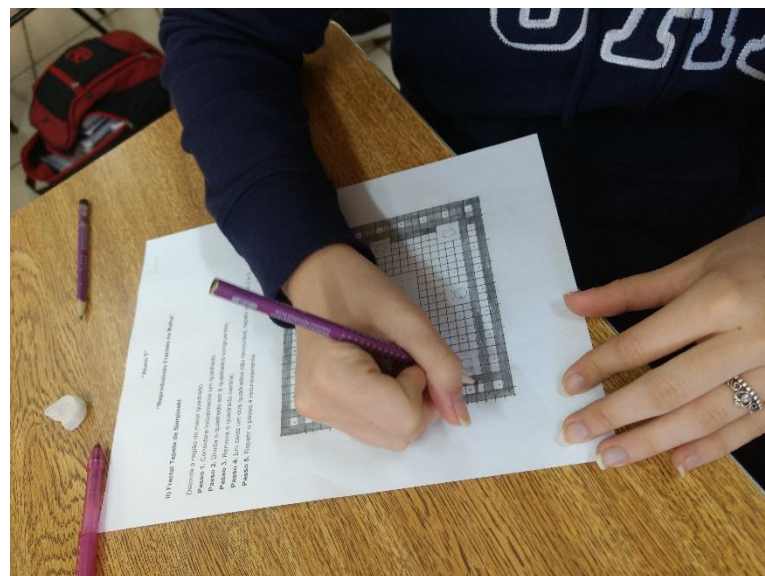
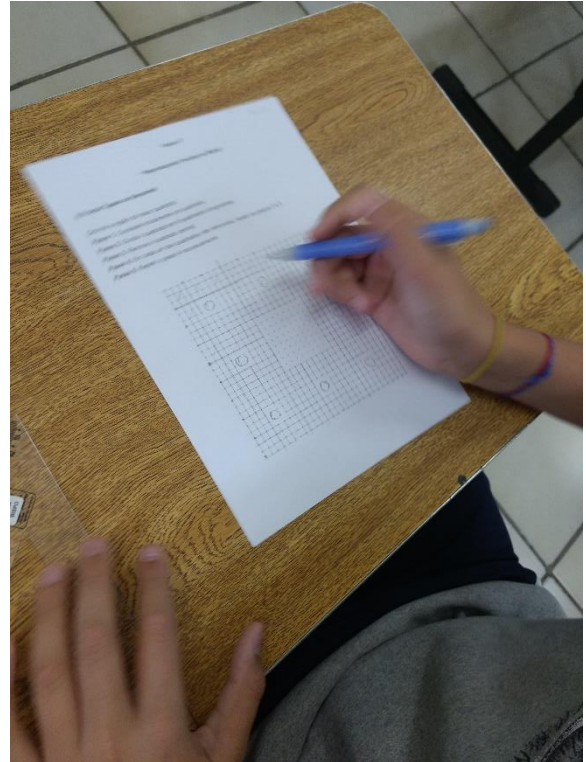
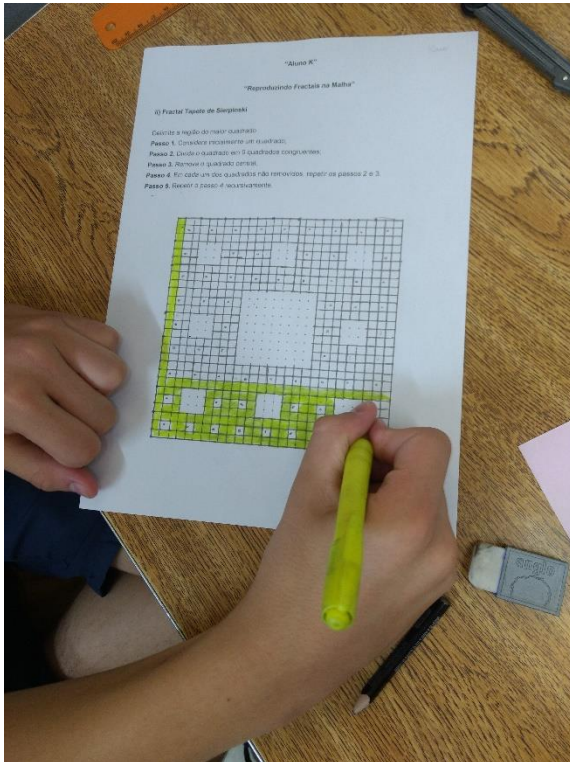
4.3. Triângulo de Sierpinski





4.4. Tapete de Sierpinski





Após as análises das pesquisas, observamos que os alunos desconheciam a existência do termo fractal, mas realizaram a pesquisa com pleno interesse, curiosidade e dedicação ao assunto. Ainda, o trabalhando com exercícios de Geometria Fractal, demonstraram, de forma inequívoca, que o aprendizado de alguns temas da matemática curricular, por exemplo, os conceitos de área e perímetro

tornaram-se muito mais proveitosos e prazerosos, uma vez que os alunos foram os protagonistas da aula, sendo o professor, apenas um mediador, deixando de ser a tal “aula tradicional”, lousa e giz. Trabalhar conteúdos relacionados com a natureza estimula a criatividade, o raciocínio lógico, motiva o aluno e o ajuda na compreensão de conteúdos e conceitos matemáticos.

Deixar de usar apenas o quadro, giz e livro didático, e fazer uso de materiais manipuláveis, faz com que o educando se concentre mais, visualize e compreenda melhor as situações apresentadas.

Quando os alunos “enxergaram” a forma como a matemática poderia ser abordada de forma lúdica, as resistências ao aprendizado, foram sem dúvida, minimizados pela criação de sua realidade cotidiana, pois o “mundo” das fórmulas, teorias e assuntos “sem sentido” para eles, puderam ser percebidos na natureza, no urbanismo, de uma forma mais clara, despertando a curiosidade sobre o assunto.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo dos fractais abre muitas portas no tocante ao ensino de Matemática. A beleza dos fractais serve como incremento para buscar no aluno interesse no estudo da Matemática. BARBOSA (2005) nos lembra que o estudo da Geometria Fractal ajuda tanto na compreensão de conteúdos presentes no currículo escolar como no despertar da existência do belo na natureza e na Matemática, fatores que ajudam substancialmente o aluno a desenvolver de forma mais eficiente conceitos matemáticos "desinteressantes" do ponto de vista de muitos livros didáticos atuais.

A geometria fractal, quando inserida na área curricular da matemática no ensino básico e secundário, é um tema motivador e integrador de vários tópicos matemáticos. A aplicabilidade do estudo dos fractais em áreas como a arte, a ciência e a tecnologia poderá impulsionar o interesse pelo tema. Também, o fato das noções de forma e dimensão estarem muito presentes na natureza, permite uma abordagem simples a esta geometria, em que as propriedades da recursividade e auto semelhança são facilmente entendidas.

O emprego de atividades que envolvam o tema da geometria fractal, permitem ao professor promover as capacidades de investigação matemática do aluno, abordando conceitos de uma forma mais ou menos complexa, de acordo com o nível de escolaridade e de desenvolvimento deste.

A exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.

Vale ressaltar, que em partes os objetivos do trabalho foram atingidos; pois tínhamos que cumprir com o conteúdo programático previsto no currículo de matemática, assim não foi possível a realização de uma "avaliação/atividade" final sobre as atividades realizadas em sala de aula sobre fractais.

Encontramos nestas considerações um campo fértil para debates, que poderiam ser melhor aprofundadas em outro momento mais oportuno. De qualquer forma, independentemente dos caminhos que esta discussão possa levar, o que queríamos explicitar é a constatação, com os resultados de que o ensino atual de Matemática é vista pelos alunos como algo estéril e por vezes longe de suas realidades. O trabalho com as atividades de Geometria Fractal parece ter tornado o aprendizado de alguns tópicos da Matemática curricular mais proveitoso. Partindo da descrição de formas naturais palpáveis aos alunos, pudemos notar durante as aulas o aumento da motivação e interesse em resolver as atividades. O aprendizado tornou-se mais rico e completo na medida em que os conteúdos passam a ter sentido para o aluno.

Concluimos o trabalho na certeza de que o universo dos fractais é capaz de expandir a visão dos alunos sobre as belezas e aventuras no mundo das descobertas que a Matemática pode proporcionar. Encontrar o ponto de equilíbrio entre o desenvolvimento do conteúdo Matemático e sua contextualização é o caminho para uma prática pedagógica mais eficiente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal – para a sala de aula.** 3ª ed.. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br>>. Acesso em 24 jul. 2018.

BRASIL. Ministério de Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC, Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.** São Paulo: SEE, 2010.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. **Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades no ensino de Matemática.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Pará, NPADC. 2005.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

MANDELBROT, Benoit B., **The Fractal Geometry of Nature.** San Francisco: Freeman, 1983.

MINGORANCI, Simone. **A geometria fractal aliada à contextualização, protagonismo juvenil e tecnologias como proposta de melhoria no processo ensino/aprendizagem da matemática na educação básica.** Dissertação de Mestrado Profissional – PROFMAT. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Câmpus Três Lagoas. 2014.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. DAVID, Maria Manuela M. S.. **A formação matemática do professor – licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2005.

PIAGET, Jean e colaboradores. **Abstração Reflexionante: Relações Lógico – Aritméticas e Ordem das Relações Espaciais**. Porto Alegre: Ed. Artes Médicas, 1995.

PONTE, João Pedro da. BROCARD, Joana. OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 1ª ed., 1ª reimp.. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2005.

APÊNDICES – Propostas de atividades

“Pesquisa sobre Fractais”

1. Procure em um dicionário uma definição para o termo “fractal” ou “fractais”. Cite sua fonte.

Fonte: _____

2. Pesquise na internet: O que é um fractal? Cite sua fonte.

Fonte: _____

3. Quais são as principais características de um fractal? Cite sua fonte.

Fonte: _____

4. Pesquise na internet: Quem foi Benoit Mandelbrot? Cite sua fonte.

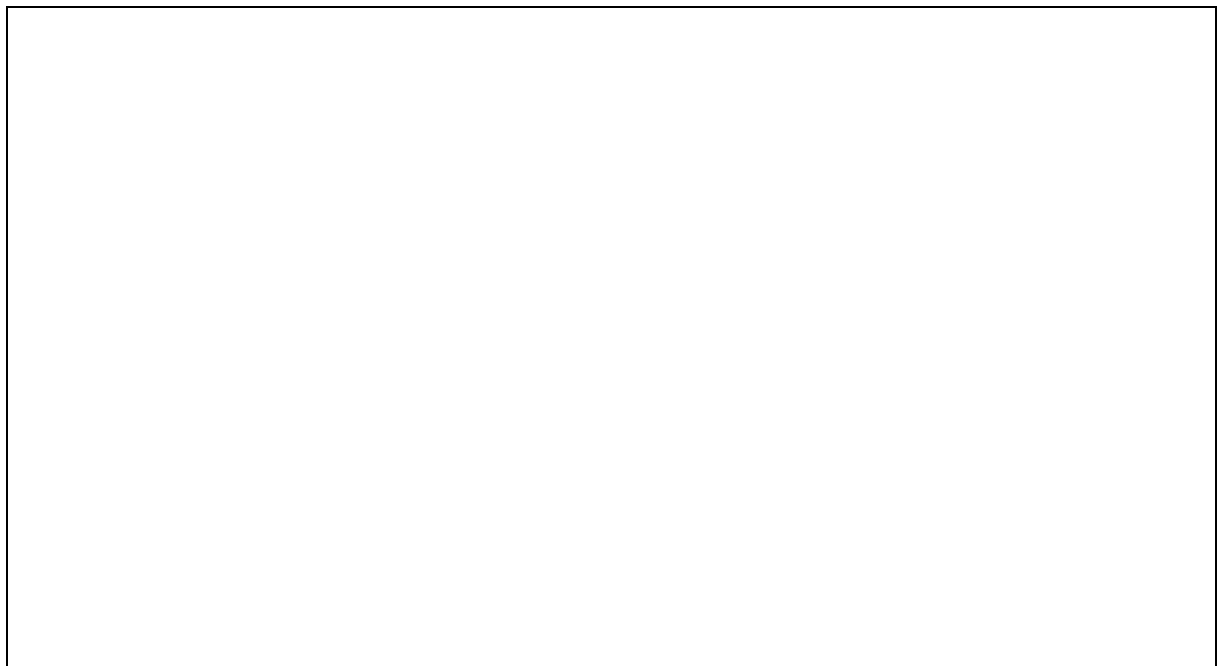
Fonte: _____

5. Onde os fractais podem ser utilizados? Escreva sobre uma de suas aplicações. Cite sua fonte.

Fonte: _____

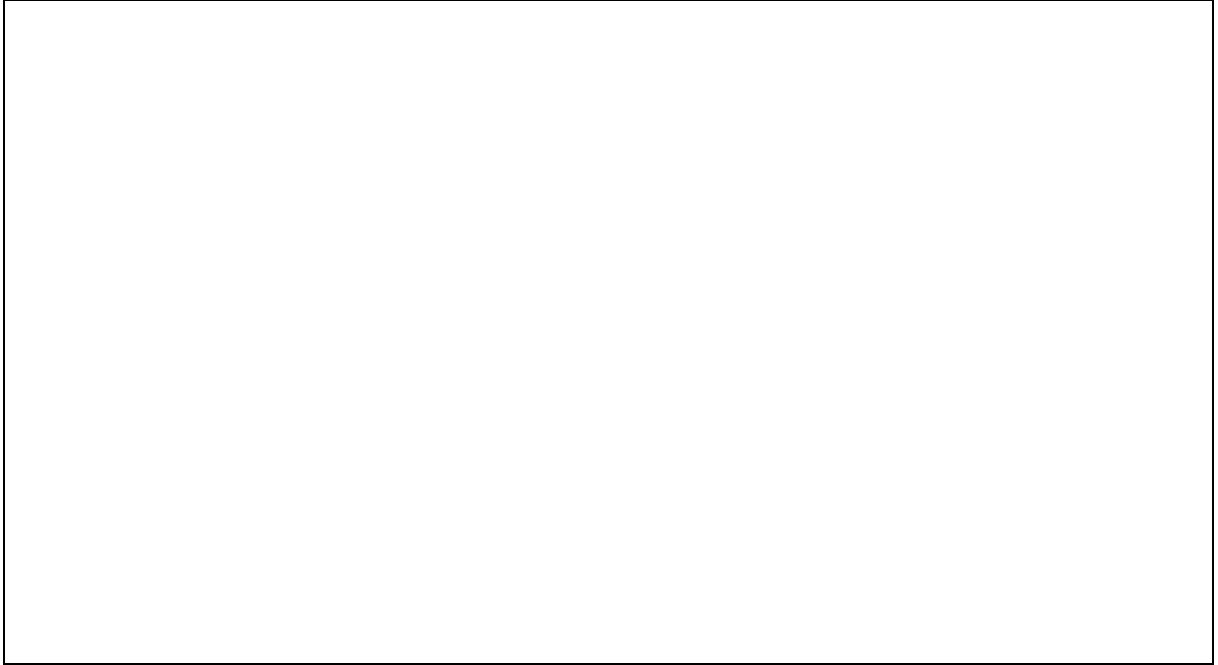
6. Pesquise na internet um dos temas abaixo, selecione uma das imagens exibidas, imprima em cores, recorte e cole no quadro abaixo. Assinale o tema escolhido para pesquisar.

- Triângulo de Sierpinski Tapete de Sierpinski
 Ilha de Koch Árvore Pitagórica



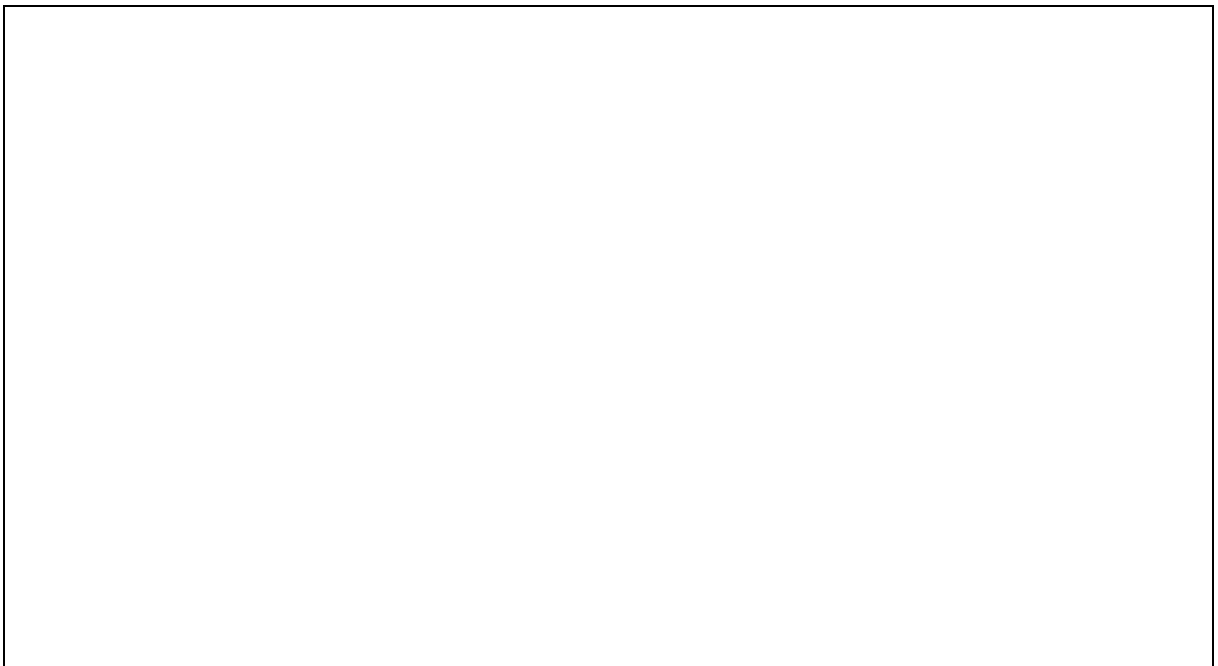
7. Pesquise na internet o tema abaixo, selecione uma das imagens exibidas, imprima em cores, recorte e cole no quadro abaixo.

Fractais na Natureza



8. Pesquise na internet, imagens fractais, selecione uma das imagens exibidas, imprima em cores, recorte e cole no quadro abaixo.

Um Fractal que me chamou a atenção



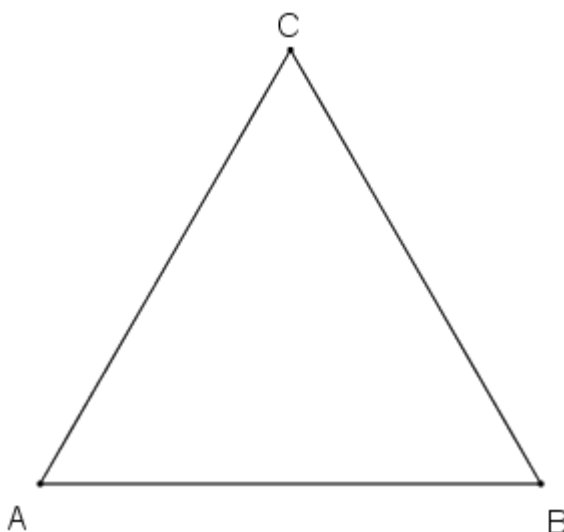
9. O que chamou a sua atenção na imagem fractal que você escolheu livremente?
Comente.

“O Jogo do Caos”

Objetivos: Baseada na proposta de Barbosa (2005), ao final da atividade, o aluno deverá ser capaz de compreender que, analisando os pontos encontrados, eles se agrupam em regiões onde uma espécie de previsão pode ser realizada. Se o processo se estender infinitamente, os pontos formarão o Triângulo de Sierpinski. Isso caracteriza o principal objetivo desta atividade: por trás de um processo aleatório, pode surgir uma ordem subjacente.

Considere o triângulo ABC e realize o procedimento descrito a seguir:

1. Marque um ponto aleatoriamente no interior do triângulo, diferente do ponto localizado exatamente no meio.
2. Utilize um dado hexaédrico e defina dois números do dado para cada vértice do triângulo ABC. Por exemplo, os números 1 e 2 correspondem o ponto A, 3 e 4 o ponto B e 5 e 6 o ponto C.
3. Sorteie um dos vértices e ligue, levemente, o ponto marcado no item 1 ao vértice sorteado.
4. Marque o ponto médio do segmento criado no item 3.
5. Repita o procedimento indefinidamente. Sugerimos repetir o procedimento 30 vezes.

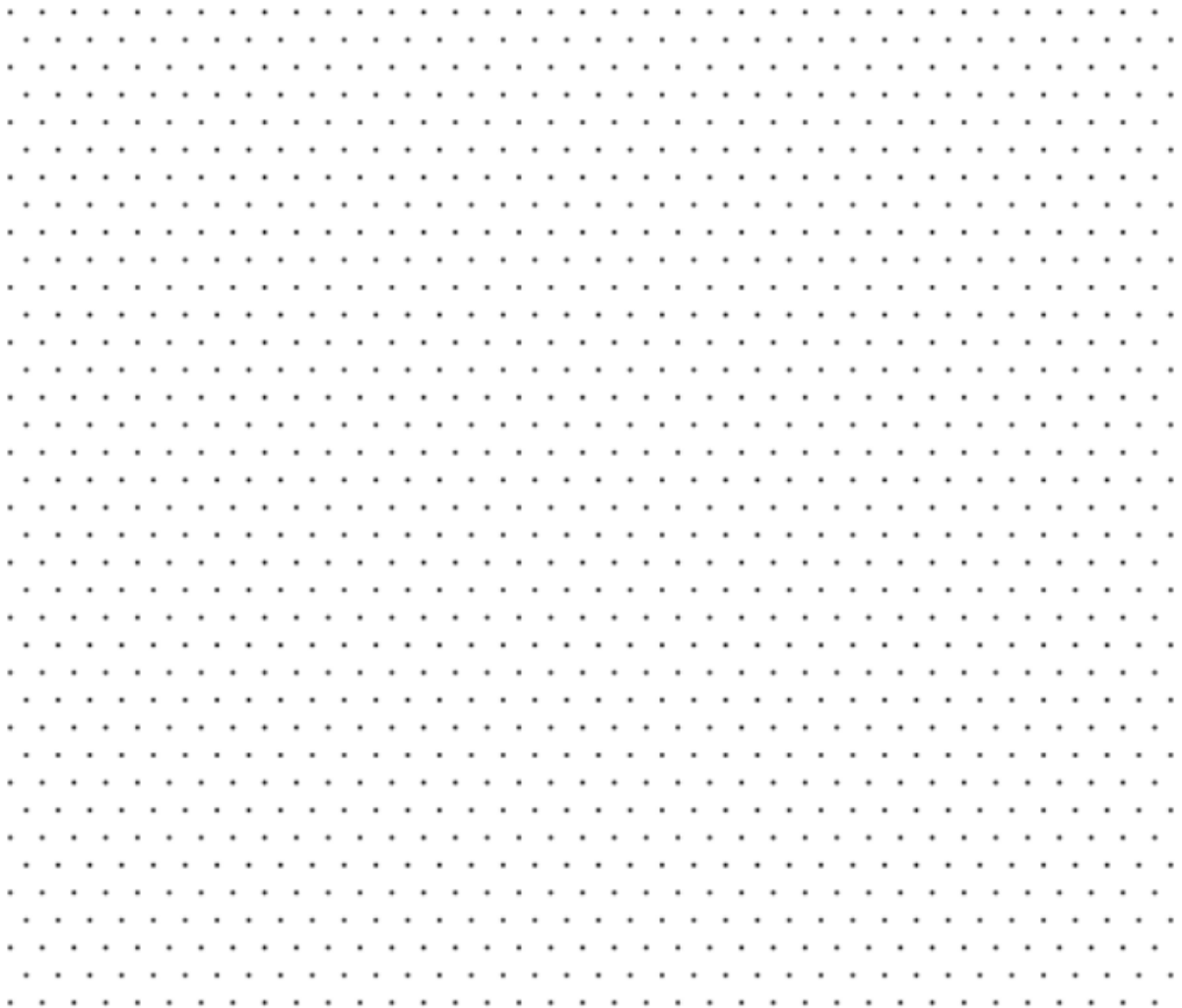


“Reproduzindo Fractais na Malha”

I) Fractal Triângulo de Sierpinski

Delimite a região do maior triângulo.

1. Pinte de azul a região da 1ª iteração (remoção).
2. Pinte de verde a região da 2ª iteração (remoção).
3. Pinte de vermelho a região da 3ª iteração (remoção).
4. Pinte de preto os triângulos restantes.

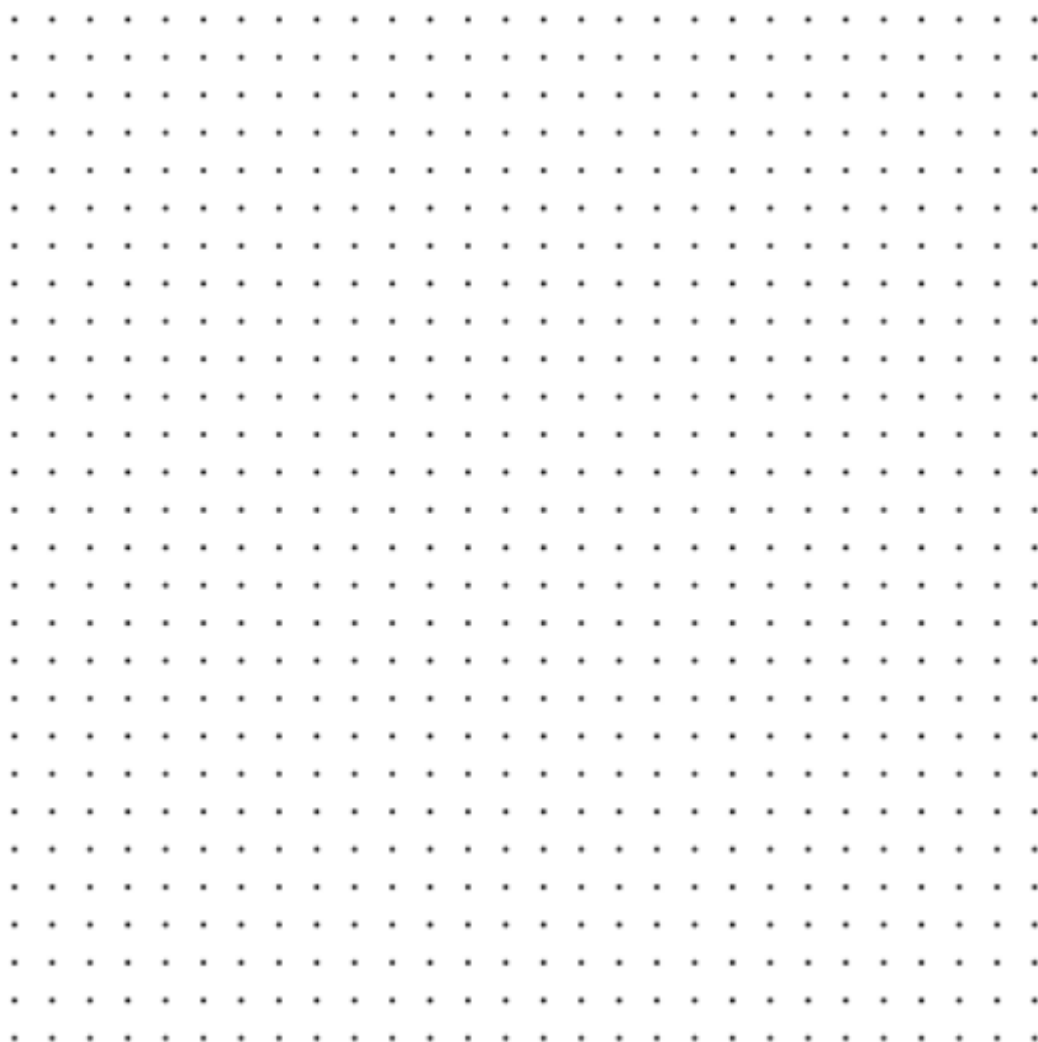


“Reproduzindo Fractais na Malha”

II) Fractal Tapete de Sierpinski

Delimite a região do maior quadrado

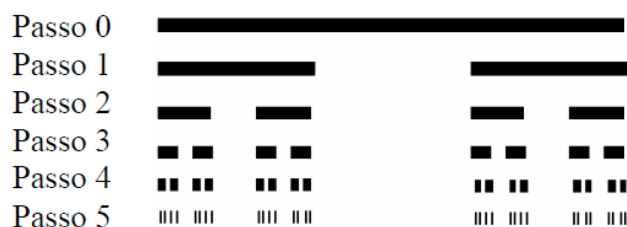
1. Pinte de azul a região da 1ª iteração (remoção).
2. Pinte de verde a região da 2ª iteração (remoção).
3. Pinte de vermelho a região da 3ª iteração (remoção).
4. Pinte de preto os triângulos restantes.



“Poeira de Cantor”

Objetivos: Baseada na proposta de Barbosa (2005), têm por objetivos trabalhar conceitos básicos de geometria euclidiana elementar, familiarizar o aluno com processos de generalização, além de dar noções intuitivas de limite.

1. De acordo com a figura, preencha corretamente os espaços em branco da tabela abaixo, de acordo com cada iteração, sabendo que o segmento inicial tem comprimento igual a 1 e que, a cada nova iteração, sempre é retirado o terço central de cada segmento.



Passos	Comprimento de cada segmento	Número de segmentos	Soma de todos os segmentos
0	1	1	1
1			
2			
3			
4			

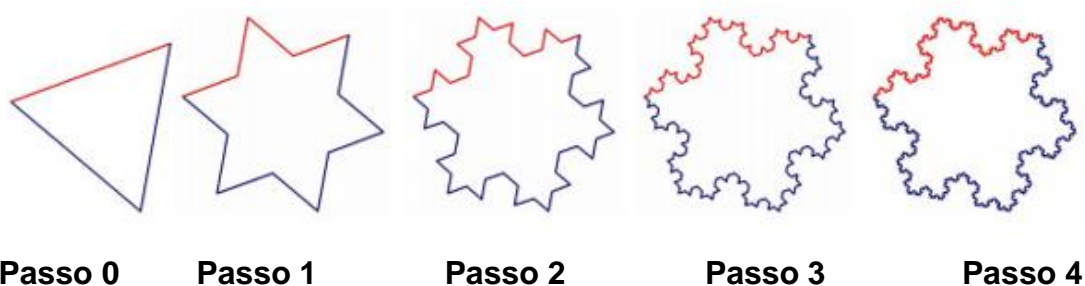
2. Com os resultados obtidos na tabela anterior, encontre a fórmula geral para cada uma das colunas.

Passos	Comprimento de Cada segmento	Número de segmentos	Soma de todos os segmentos
n			

“Floco de Neve de Koch”

Objetivos: Baseada na proposta de Barbosa (2005), a atividade tem os mesmos objetivos da atividade “Poeira de Cantor”, acrescida da abordagem da área de triângulos.

1. De acordo com a figura do floco de neve de Koch, preencha a tabela abaixo sabendo que o lado do triângulo inicial mede 1 e que, a cada nova iteração, todos os segmentos obtidos têm comprimento igual a terça parte do segmento da iteração anterior.



Passos	Comprimento de cada segmento	Número de segmentos	Perímetro
0	1	3	3
1			
2			
3			
4			

2. Com os resultados obtidos na tabela anterior, encontre a fórmula geral para cada uma das colunas.

Passos	Comprimento de cada segmento	Número de segmentos	Perímetro
n			

Construção de um Fractal

“Cartão Fractal”

Objetivos: Trabalhar conceitos básicos de geometria espacial, familiarizar o aluno com processos de generalização, introduzir o conceito de progressão geométrica.

1. Pegue uma folha de tamanho A4.
2. Dobre sua folha ao meio, ao longo de sua altura, como mostra a Figura A.1.

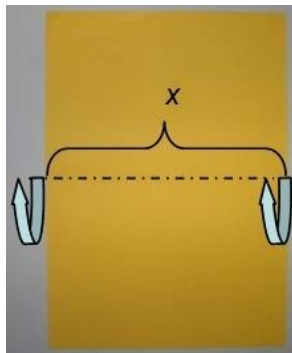


Figura A. 1: Passo 2 – Cartão Fractal

3. Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a uma distância $\frac{x}{4}$ das extremidades da folha, de altura $\frac{a}{2}$, como mostra a Figura A.2.

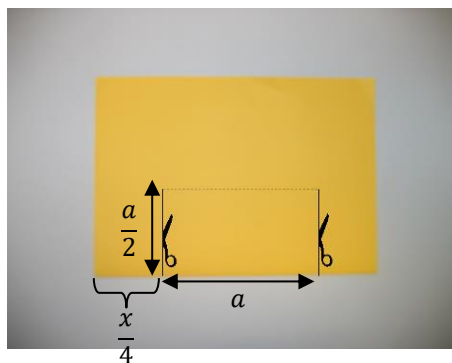


Figura A. 2: Passo 3 – Cartão Fractal

4. Dobre o retângulo formado por cima, fazendo um vinco na dobra.

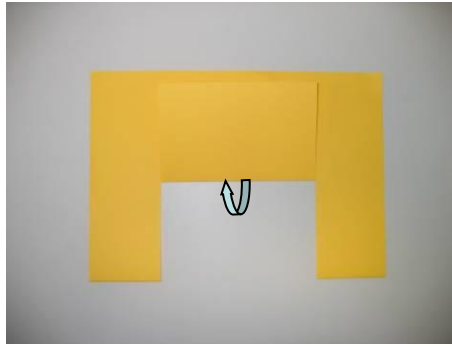


Figura A. 3: Passo 4 – Cartão Fractal

5. Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo. Podemos dizer que esta é a primeira geração do cartão fractal (nível 1).

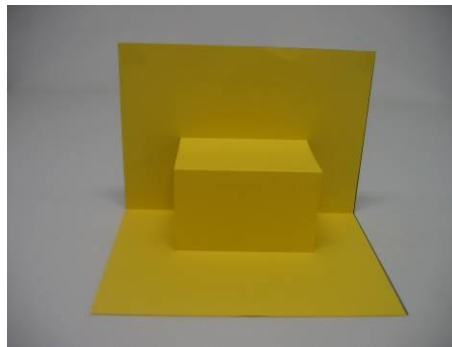


Figura A. 4: Passo 5 – Cartão Fractal

6. Dobre a folha novamente, conforme a Figura A.3 e siga o mesmo procedimento descrito nos passos 3, 4 e 5. A segunda geração (nível 2) do cartão fractal é obtida com o corte mostrado na Figura A.5.

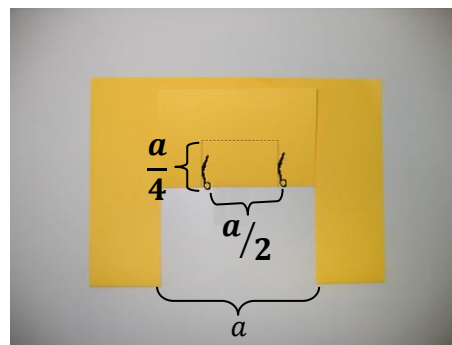


Figura A. 5: Passo 6 – Cartão Fractal

7. Dobre o retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra.

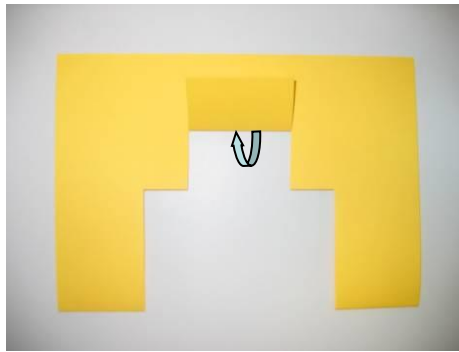


Figura A. 6: Passo 7 – Cartão Fractal

8. Volte o retângulo para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Neste momento, temos a primeira e a segunda geração do cartão fractal.

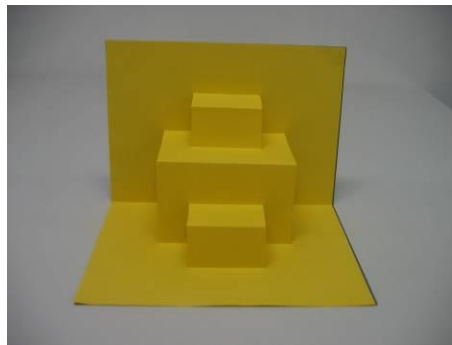


Figura A. 7: Primeira e segunda iteração do cartão fractal

9. Para obter mais gerações, repita esse procedimento enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando a regra do corte estabelecida no passo 3.

Por fim, desdobre todos os recortes e puxe as figuras em relevo. A Figura A.8 mostra um cartão com quatro gerações obtido pelo processo descrito.

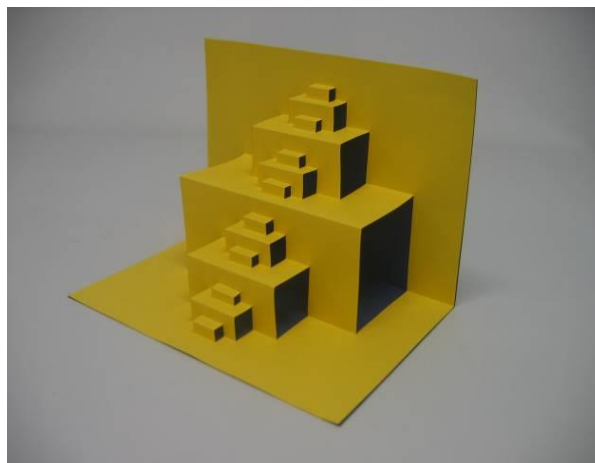


Figura A. 8: Cartão Fractal

Observamos que o cartão da Figura A.8 possui estruturas auto similares.

Com base no processo de construção e na obtenção dos paralelepípedos, complete a tabela abaixo.

Passo (nível)	Quantidade de paralelepípedos	Quantidade de paralelepípedos novos
0	1	1
1		
2		
3		
4		
⋮	⋮	⋮
n	$2^{n+1} - 1$	2^n

Tabela A. 1: Paralelepípedos Cartão Fractal

Notamos que a cada iteração, o número de novos paralelepípedos dobra, com isso podemos concluir que o processo de construção dos paralelepípedos em cada iteração é descrito pela lei 2^n , onde n é o número da iteração.

Atividade Avaliativa

1. Uma das principais características dos fractais é a auto semelhança, que significa:

- (A) que eles são compostos de figuras congruentes, de mesma forma e tamanho, infinitamente.
- (B) que eles são formados de formas aleatórias e finitas.
- (C) que eles contêm, dentro de si, cópias menores deles mesmos. Essas cópias, por sua vez, contêm cópias ainda menores e assim sucessivamente.
- (D) que eles não possuem nenhuma regra de formação e geram imagens distorcidas de si próprios.
- (E) que eles possuem uma regra de formação que gera imagens distorcidas de si próprio.

2. Personalidade que é considerada o pai dos fractais:

- (A) Pitágoras de Samos.
- (B) Waclaw Sierpinski.
- (C) Helge Von Koch.
- (D) Benoit Mandelbrot.
- (E) Karl Menger.

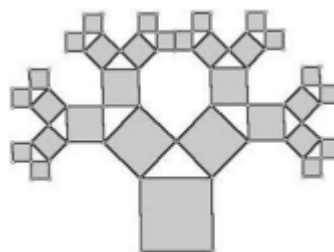
3. Assinale a opção que indica o fractal da imagem:

- (A) Triângulo de Sierpinski.
- (B) Árvore pitagórica.
- (C) Ilha de Koch.
- (D) Conjunto de Julia.
- (E) Conjunto de Mandelbrot.



4. Assinale a opção que indica o fractal da imagem:

- (A) Triângulo de Sierpinski.
- (B) Árvore Pitagórica.
- (C) Ilha de Koch.
- (D) Conjunto de Julia.
- (E) Conjunto de Mandelbrot.



O fractal da figura é denominado Triângulo de Sierpinski. Considere o 1º triângulo da sequência como triângulo de iteração 0, com lados de medida 1 cm. Responda às próximas questões referentes a este fractal.



5. A quantidade de triângulos de cada iteração pode ser calculada multiplicando-se a quantidade de triângulos da iteração anterior por:

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

6. A razão de semelhança entre um dos triângulos da 1ª iteração e o triângulo da iteração 0 é:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{1}{4}$

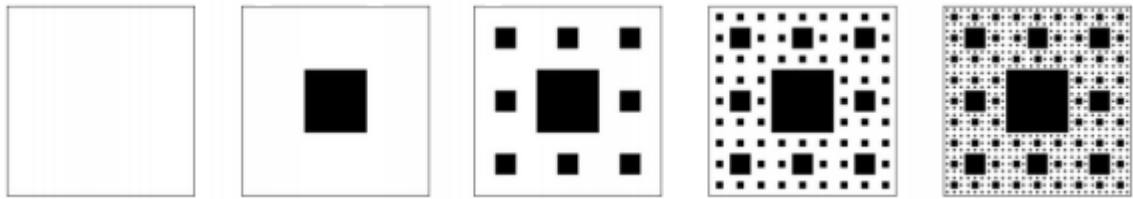
7. A área de um dos triângulos da 1ª iteração pode ser calculada multiplicando-se a área do triângulo inicial (iteração 0) por:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (C) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (D) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ (E) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

8. Assinale a fórmula que pode ser utilizada para se calcular o número de triângulos de determinada iteração do Triângulo de Sierpinski:

- (A) $T = 3^{n+1}$ (B) $T = 3^{n-1}$ (C) $T = 3 \cdot n$
 (D) $T = 3^n$ (E) $T = 2^n$.

O fractal da figura é denominado Tapete de Sierpinski. Considere o 1º quadrado da sequência como quadrado de iteração 0, com lados de medida 1 cm. Responda às próximas questões referentes a este fractal.



9. Os quadrados na cor preta indicam os pedaços removidos do quadrado original, todo branco. A quantidade de novos quadrados removidos de cada iteração pode ser calculada multiplicando-se a quantidade de quadrados removidos da iteração anterior por:

- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16

10. A razão de semelhança entre o quadrado preto da 1ª iteração e o quadrado todo branco inicial, da iteração 0, é:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$ (E) $\frac{1}{4}$

11. A área do quadrado preto da 1ª iteração pode ser calculada multiplicando-se a área do triângulo inicial todo branco (da iteração 0) por:

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (C) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (D) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ (E) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$

12. Assinale a fórmula que pode ser utilizada para se calcular o número de novos quadrados removidos em determinada iteração do Tapete de Sierpinski:

- (A) $Q = 8^{n+1}$ (B) $Q = 8^{n-1}$ (C) $Q = 8 \cdot n$
 (D) $Q = 8^n$ (E) $Q = 8^{2n}$