Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

**Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**
**Coordenação do PROFMAT**

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

**FABIANA SILVA DE MIRANDA**

# *O USO DE VÍDEOS NO AMBIENTE ESCOLAR: EXPLORANDO NÚMEROS E MEDIDAS POR MEIO DE NARRATIVAS*

**Orientador:**
**Humberto José Bortolossi**

NITERÓI
FEVEREIRO/2019

**Fabiana Silva de Miranda**

# *O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Números e Medidas por Meio de Narrativas*

Niterói – RJ

Fevereiro / 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

M672 Miranda, Fabiana Silva de

O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Números e Medidas por Meio de Narrativas / Fabiana Silva de Miranda. – Niterói: [s.n.], 2019.

67 f.

Orientador: Humberto José Bortolossi

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2019.

1. Narrativas. 2. Uso de vídeos. 3. Ensino e Aprendizagem de Matemática. I. Título.

CDD: 510.7

**Fabiana Silva de Miranda**

# *O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Números e Medidas por Meio de Narrativas*

Dissertação apresentada à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Fluminense para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Fevereiro / 2019

Dissertação de Mestrado Profissional sob o título *"O Uso de Vídeos no Ambiente Escolar: Explorando Números e Medidas por Meio de Narrativas"*, defendida por Fabiana Silva de Miranda e aprovada em 14 de fevereiro de 2019, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

---

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

---

Brígida Alexandre Sartini
Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação pela UFRJ

---

Dirce Uesu Pesco
Doutora em Matemática pela PUC-Rio

---

Fabio Luiz Borges Simas
Doutor em Matemática pelo IMPA

*Antes de qualquer um esse trabalho é dedicado a Deus, que em sua infinita bondade transbordou em misericórdia e me permitiu chegar até aqui, aprendendo e concluindo esse trabalho. Dedico ainda aos meus alunos que muito além de aprendizes me foram inspirações importantes para condução e refinamento das questões aplicadas aqui. Dedico esse trabalho também aos grandes colegas de curso – André de Carvalho Rapozo, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas e Rodrigo Pessanha da Cunha – que contribuíram de modo incomensurável para o meu crescimento e para conclusão de um trabalho de excelência.*

# *Agradecimentos*

Agradeço de modo especial primeiramente ao grande professor Humberto José Bortolossi que muito mais que um orientador incomparável, mostrou-se amigo e exemplo a seguir.

Agradeço ainda aos meus filhos, Daniel e Gustavo, e meu marido, Rafael, que tiveram muita paciência e amor em todo o percurso servindo de apoio e porto seguro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

A vida não é um conto de fadas, as pessoas não podem ser divididas em dois grupos – os heróis e os bandidos –, as questões vitais não podem ser respondidas com um simples V ou F. A grande importância da matemática e dos contos de fadas não repousa na aplicabilidade prática direta de seus conteúdos e relações. Tais temas, no entanto, constituem uma importante “preparação espiritual” para o enfrentamento da complexidade da vida.

*(Nilson José Machado)*

# *Resumo*

Nesta última década, ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes e curtas) relacionados com Matemática e Estatística. Com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Esta dissertação contribui, então, para esse projeto oferecendo dois roteiros detalhados para uso em sala de aula de vídeos relacionados com a temática de números e medidas: "Quão Longo é Um Pedaço de Barbante?" e "A Música dos Números Primos". Cada roteiro inclui, entre várias informações, indicações de objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo e, também, uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição de cada vídeo. Mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma. Nosso trabalho apresenta também alguns recortes teóricos que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática e da Estatística.



Palavras-chave: ensino e aprendizagem de Matemática e Estatística, uso de vídeos em sala de aula, narrativa, *storytelling*, números, medidas.

# *Abstract*

In the last decade, there has been a remarkable increase in the production of audiovisual materials (documentaries, animations, films and short films) related to Mathematics and Statistics. With the aim of potentializing the didactic scope beyond the simple exhibition, a group of professors, undergraduate, and graduate students has cataloged the available videos and elaborated support material in the format of guidelines by the Film Society of Mathematics and Statistics Project of the Fluminense Federal University. This dissertation contributes to this project by offering two detailed guidelines for classroom use of videos related to the theme of numbers and measurement: “How Long is A Piece of String?” and “The Music of the Primes”. Each guideline includes, among various information, indications of learning objectives that, in our opinion, can be achieved through the video and, also, suggestions of questions that can be worked out immediately after each video is exhibited. More than a definitive text, it is expected that the guideline serves as a starting point for the teacher to make adaptations and modifications according to the needs and characteristics of his/her class. Our work also presents some theoretical highlights that seek to provide different perspectives on the role of narrative (storytelling) in human society. The goal is to try to frame the reasons why a video (a powerful form of narrative that unites image and sound) constitutes a didactic instrument for the teaching and learning of Mathematics and Statistics.

Keywords: teaching and learning of Mathematics and Statistics, use of videos in the classroom, narrative, storytelling, numbers, measurement.

# *Sumário*

# 1 Introdução

## 1.1 Nossa proposta

Nesta última década ocorreu um aumento notável na produção de materiais audiovisuais (documentários, animações, filmes, curtas) relacionados com Matemática e Estatística: vídeos da TV Escola do Ministério da Educação; documentários da BBC (British Broadcasting Corporation) e PBS (Public Broadcasting Service); episódios da série “Isto é Matemática” apresentada por Rogério Martins; o canal “Numberphile” no YouTube com suporte do MSRI (Mathematical Sciences Research Institute); vídeos educacionais TED-Ed; curtas das séries “Dimensions” e “CHAOS” idealizadas e produzidas por Étienne Ghyz e colaboradores; alguns vídeos de “Os Simpsons”; apenas para mencionar alguns (Figura 1.1).

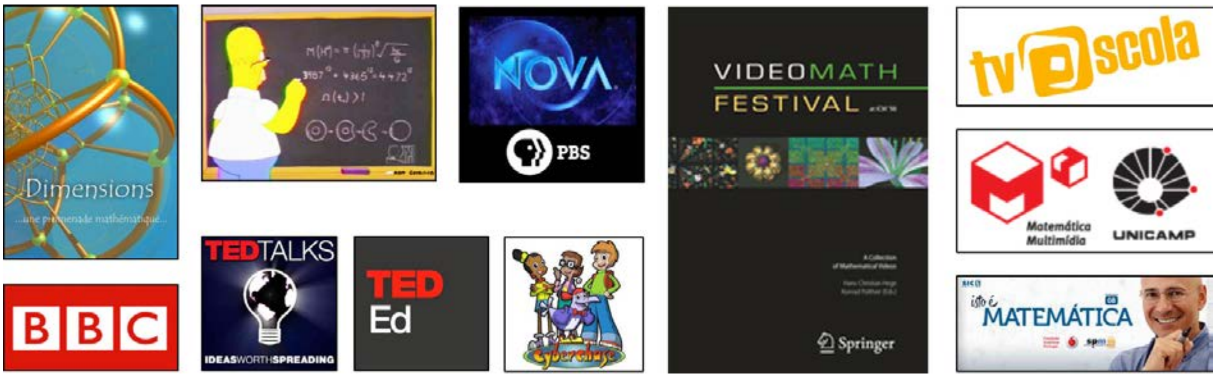



Figura 1.1: Algumas iniciativas na produção de materiais audiovisuais relacionados com Matemática e Estatística.

Nesse contexto, com o objetivo de potencializar o escopo didático para além da simples exibição com ênfase nos aspectos matemáticos e estatísticos, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado os vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Cada roteiro é dividido nas seguintes seções:

- **Ficha catalográfica**: faixa de classificação etária; idioma do áudio e das legendas; título original; gênero; duração; produtora e ano de produção; tópicos matemáticos abordados;

nível escolar sugerido; interdisciplinaridade; marcadores; competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias.

- **Imagens selecionadas**: seis imagens que permitem ao professor, visualmente, ter uma ideia do estilo do vídeo e, também, de seu conteúdo.
- **Sinopse**: uma breve descrição do conteúdo do vídeo sem *spoilers* (isto é, sem informações que poderiam estragar a apreciação do vídeo).
- **Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado**: um parágrafo indicando alguns objetivos de aprendizagem que, em nossa opinião, podem ser alcançados por intermédio do vídeo.
- **Sensibilização**: um texto e uma ou duas imagens que podem ser usadas para confeccionar um cartaz de divulgação do vídeo na escola.
- **Sugestões de questões gerais**: uma proposta de questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição do vídeo.
- **Sugestões de questões específicas**: uma proposta de questões que para serem respondidas, se faz necessário que trechos específicos do vídeo sejam revisitados (os tempos dos trechos são indicados no roteiro).
- **Observações para o professor**: orientações didáticas, desdobramentos, curiosidades, materiais suplementares relacionados com o vídeo.
- **Outras informações**: bibliografia, agradecimentos, créditos.

Cabe ressaltar que, mais do que um texto definitivo, espera-se que os roteiros sirvam como ponto de partida para que o professor faça adaptações e modificações de acordo com as necessidades e características de sua turma.

## 1.2 Vídeos em sala de aula

O uso de vídeos em sala de aula não é uma novidade. Já na época dos antigos videocassetes a questão era considerada[a]. Moran (1995), por exemplo, já apontava para os usos inadequados, observações estas que continuam ainda válidas nos dias de hoje com vídeos *on-line*, em DVD ou *blu-ray* e em formato *streaming*:

- **vídeo tapa-buraco**: colocar vídeo quando há um problema inesperado, como ausência do professor;
- **vídeo enrolação**: exibir um vídeo sem muita ligação com a matéria;
- **vídeo deslumbramento**: o professor que acaba de descobrir o uso do vídeo costuma

[a]Ainda que, nesta época, existisse relativamente pouco material disponível para a área de Matemática.

empolgar-se e passar vídeo em todas as aulas, esquecendo outras dinâmicas mais pertinentes;

- **vídeo perfeição**: existem professores que questionam todos os vídeos possíveis porque possuem falhas de informação ou defeitos estéticos; não obstante, os vídeos que apresentam conceitos problemáticos podem ainda ser usados para, junto com os alunos, descobrir e analisar os erros existentes;
- **só vídeo**: não é didaticamente satisfatório exibir o vídeo sem discuti-lo, sem integrá-lo com o assunto da aula, sem reproduzir trechos com momentos mais importantes.

Outra referência clássica da época dos videocassetes é Ferrés (1996). Neste livro, o autor:

- **propõe uma sistematização para o uso didático de vídeos:** videolição, videoapoio, videoprocesso, programa motivador, programa monoconceitual, vídeo interativo;
- **estabelece critérios para a utlização didática do vídeo:** mudança de estruturas pedagógicas, o papel do professor, a formação do professor frente a este tipo de mídia, a relação didática do vídeo com outras mídias, etc.;
- **categoriza as diversas funções do vídeo no ensino:** função formativa/videodocumento, função motivadora/videoanimação, função expressiva/criatividade e videoarte, função avaliadora/videoespelho, função investigativa, função lúdica/o vídeo como brinquedo, função metalinguística, combinação e interação das funções previamente citadas;
- **dá sugestões práticas e técnicas para a exibição do vídeo:** preparação antecipada do local, disposição dos alunos de acordo com o tamanho da tela do televisor, problemas técnicos frequentes;
- **sugere abordagens pedagógicas após a exibição do vídeo:** comunicação espontânea dos alunos, reflexão crítica, pesquisa final e recapitulação, nuvem de palavras, entrevista com um especialista, gravação de pesquisa de opinião pública, manipulação de objetos, palavras-chave, resumo objetivo, recontar a história em grupo, desenho livre, desenho em quadrinhos, escrever uma carta, comunicação em duplas, interpelação em duplas, expressão corporal, cartazes e trabalhos em grupo, fotografia do ambiente, elaboração de um dossiê, tribunal e julgamento, criação de um mural, realização de uma colagem, Phillips 66, primeira exibição muda (sem som), interrupção da exibição, exibição invertida;
- **sugere várias pautas para avaliação do vídeo sob o ponto de vista didático:** tema, objetivos, formulação didática, estrutura, roteiro didático, formulação audiovisual, imagem como valor técnico, faixa sonora como valor técnico, interação dos elementos.

Desde então, vários trabalhos sobre vídeos no contexto escolar têm sido produzidos. Para o leitor interessado, indicamos: Polster e Ross (2012), Sklar e Sklar (2012), Machado e Mendes (2013), Napolitano (2013, 2015), Muzás (2015), Pellicer (2015), Reiser (2015), Santos (2015), Bulman (2017). Indicamos também quatro páginas *WEB* especializadas na Matemática dos filmes: *Mathematics in Movies* (<http://bit.ly/2OuJOUU>) mantida por Oliver Knill, do Departamento de Matemática da Universidade de Harvard (nos EUA); *Matemáticas en El Cine y en Las Series de T.V.* (<http://bit.ly/2yPI8Aa>), mantida por José María Sorando Muzás (na Espanha); *MMDB–The Mathematical Movie Database* (<https://bit.ly/2HurRY8>) mantida por Burkard Polster (Monash University) e Marty Ross na Austrália; e *Mathematical Fiction* <https://bit.ly/1kcpcAR> mantida por Alex Kasman (College of Charleston) nos Estados Unidos.

Entre as iniciativas governamentais do uso de vídeos em sala de aula, destacamos o projeto “O Cinema Vai À Escola – O Uso da Linguagem Cinematográfica na Educação” da Fundação para o Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo. De acordo com o *site* oficial (<http://bit.ly/2OnYXqT>), o projeto procura subsidiar a rede pública de ensino com materiais, equipamentos e acervos didáticos, fornecendo às escolas de Ensino Médio um conjunto de filmes de diferentes categorias e gêneros, em DVD, acompanhado de materiais de apoio à prática pedagógica. Os vídeos são principalmente produções cinematográficas do circuito comercial e os materiais de apoio incluem roteiros no formato PDF (<http://bit.ly/2F3hPMu>) e, também, vídeos tratando do universo dos vídeos (<http://bit.ly/2OorDA8>). Não obstante, observamos que, neste projeto, temas relacionados com a Matemática estão ausentes.

Por fim, registramos que o Whittier College nos Estados Unidos oferece uma disciplina de graduação, NTD 231 – *Numb3rs in Lett3rs & Fi1ms*, que explora a conexão entre a Matemática e as Artes criativas escritas/teatrais. Segundo o catálogo da instituição (<https://goo.gl/j5wtX4>), nessa disciplina, os alunos leem ficção e assitem a filmes nos quais os conceitos matemáticos fornecem a estrutura ou desempenham um papel central na peça criativa. Os alunos também estudam os tópicos matemáticos relacionados a esses trabalhos para entender melhor a intenção do autor. Detalhes da iniciativa podem ser encontrados no artigo Chabrán & Kozek (2015).

## 1.3 Concepção e divisão deste trabalho

Este texto está dividido da seguinte maneira: no Capítulo 2 descrevemos algumas perspectivas relacionadas com o conceito de narrativa (*storytelling*) na intenção de tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os roteiros de dois vídeos (nos moldes descritos na seção anterior) são apresentados nos Capítulos 3 e 4. Experiências de uso dos vídeos e dos roteiros junto com algumas considerações finais são o tema do Capítulo 5.

Os Capítulos 1, 2 e parte do 5 foram redigidos de forma conjunta a partir de seminários realizados pelos mestrandos que trabalharam com a mesma metodologia acerca do uso didático de vídeos: André de Carvalho Rapozo, Fabiana Silva de Miranda, Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas, Oswaldo dos Santos Azeredo Coutinho e Rodrigo Pessanha da Cunha. Os Capítulos 3, 4 e parte do 5 têm redação individual: mestrandos diferentes trabalharam com assuntos diferentes (Probabilidade e Estatística, Números e Medidas, Linguagem e Lógica Matemática, Fractais e Caos, etc.).

Por fim, indicamos que as respostas das questões propostas nos roteiros podem ser obtidas mediante solicitação para o e-mail <amec7a@gmail.com>.

# 2 *Narrativas: Um Panorama*

Neste capítulo, apresentamos alguns recortes que procuram fornecer perspectivas diferentes sobre o papel da narrativa (*storytelling*) na sociedade humana. O objetivo é tentar enquadrar os motivos pelos quais um vídeo (uma forma poderosa de narrativa que une imagem e som) se constitui em um instrumento didático para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Como aponta Gottschall (2013), *storytelling* é como gravidade: ela é esta força poderosa e abrangente que permeia nossas vidas e que acabamos por não perceber por estarmos tão habituados com ela. Vídeos (tema de nosso trabalho), quadrinhos, contos, piadas, parábolas (incluindo as religiosas), novelas, músicas, peças de teatro e *video games* são, todos, formas de narrativa que nos cercam e nos ensinam.

## 2.1 Narrativas e A História da Humanidade: Harari

Harari em seu livro “Sapiens: Uma Breve História da Humanidade” coloca o papel importante que a narrativa teve na evolução histórica dos seres humanos. De acordo com o autor, foi o surgimento da ficção que permitiu a cooperação humana em grande escala: um grande número de estranhos só pode cooperar de maneira eficaz se acreditar nos mesmos mitos, ou seja, histórias que existem na imaginação coletiva das pessoas. Formigas e abelhas também podem trabalhar juntas em grandes números, mas elas o fazem de uma maneira um tanto rígida, e apenas com parentes próximos. As religiões, as nações, o dinheiro, as leis, as culturas e as marcas são apenas alguns exemplos de realidades imaginadas que foram construídas e fortalecidas baseadas em mitos partilhados. Uma realidade imaginada não é uma mentira. Pelo contrário, é algo em que muitos acreditam e por essa razão, exerce influência sobre o mundo, molda comportamentos e preferências. A imensa diversidade de realidades imaginadas que os *sapiens* inventaram e a diversidade resultante de padrões de comportamento são os principais componentes do que chamamos “culturas”. A partir da Revolução Cognitiva[a], as narrativas históricas

[a]Surgimento de novas formas de pensar e se comunicar, ocorrida entre 70 e 30 mil anos atrás, que pode ter sido causada por mutações genéticas acidentais que mudaram as conexões internas dos *sapiens*, possibilitando que pensassem de uma maneira sem precedentes e se comunicassem usando um tipo de linguagem totalmente novo.

substituem as narrativas biológicas como nosso principal meio de explicar o desenvolvimento do *Homo sapiens*.

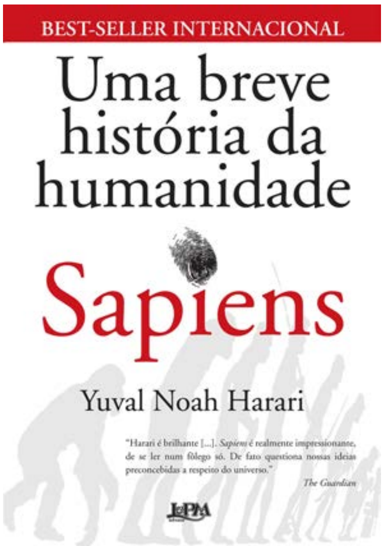



Figura 2.1: Capa do livro de Harari (2015).

## 2.2 Narrativas e A Neurociência: Zak

Uma outra explicação para a afinidade humana com *storytelling* se dá no campo da neurociência com a substância oxitocina[b] (um tipo de hormônio). Um dos principais pesquisadores desta área é o neurocientista americano Paul J. Zak, fundador do campo de estudo “neuroeconomia”.

O estudo do Dr. Zak busca entender um pouco mais sobre os efeitos da oxitocina. O que se sabia deste hormônio é que ele induzia as contrações no parto e a produção de leite na amamentação, além de ser liberado por ambos os sexos durante o ato sexual. Mas as perguntas que ele se fez foram: ”Por que os homens também a produziam?”e ”Qual era exatamente a sua importância?”. Sua busca por respostas resultaram no livro “A Molécula da Moralidade: As Surpreendentes Descobertas sobre A Substância que Desperta O Melhor em Nós”. Ele também tem divulgado seu trabalho por meio de palestras, como o vídeo TED “Confiança, Moralidade – e Oxitocina” (<https://goo.gl/PmzKve>).

[b] Alguns autores escrevem ocitocina no lugar de oxitocina.


Figura 2.2: Zak, seu livro e sua palestra TED sobre a oxitocina (2015).

O laboratório de Paul Zak foi o primeiro a descobrir que a oxitocina neuroquímica é sintetizada no cérebro humano e que essa molécula motiva a reciprocidade, isto é, mesmo sem contato visual, face a face, o hormônio da oxitocina parece sinalizar que o outro é familiar e confiável. Esse pequeno peptídio sintetizado no hipotálamo dos cérebros dos mamíferos pode ser identificado por meio das alterações no exame de sangue que refletem as alterações na produção cerebral.

Em seu trabalho “*Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*” (“Por que Histórias Inspiradoras Nos Fazem Reagir: A Neurociência da Narrativa”, tradução nossa) de 2015, Zak fez experimentos para verificar como o tipo de narrativa de um vídeo se correlaciona com a liberação de oxitocina e como a liberação de oxitocina se correlaciona com o grau de atenção de um indivíduo. A medição do nível de oxitocina foi feita por uma aferição indireta a cada milésimo de segundo via eletrocardiograma no nervo vago (descobriu-se que esse nervo está repleto de receptores de oxitocina). O nível de atenção foi medido pela aceleração do batimento cardíaco e pelo suor proveniente de glândulas écrinas na pele. O vídeo exibido contava uma história com arco dramático envolvente: um pai que aparecia falando de seu filho Ben com câncer terminal e a sua tentativa de superar seus medos e frustrações para conseguir conectar-se ao seu filho e desfrutar de sua companhia pelos meses que ainda tinha. O experimento verificou que a produção de oxitocina e a atenção estão correlacionadas com o grau de dramaticidade. Ao longo dos cem segundos do vídeo, observou-se que o nível de atenção aumentava e diminuia, com o cérebro ficando atento à história para, em seguida, fazer uma rápida pesquisa do restante do ambiente e, então, reorientar para a história à medida que a tensão aumentava. O pico de resposta da atenção ocorreu no clímax do vídeo, quando o pai de Ben revela que seu filho está morrendo.

Paul Zak (2015) conclui: “Narrativas que nos levam a prestar atenção e também nos envolvem emocionalmente são as histórias que nos movem para a ação. Isto é o que um bom documentário faz.” (tradução nossa). Assim, segundo o pesquisador, as narrativas convincentes causam liberação de oxitocina e, portanto, elas têm o poder de afetar nossas atitudes, crenças e comportamentos.

## 2.3 Narrativas, Matemática e A Língua Materna: Machado

Em sua palestra intitulada “A Narrativa em Matemática”, proferida na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da Universidade Federal Fluminense em 2016, o educador Nilson José Machado analisa as correlações entre a Língua Materna (o Português, em nosso caso) e a Matemática, mostrando como uma faz uso da outra a todo momento e o papel das narrativas neste processo. No que se segue, nessa seção, apresentaremos algumas ideias apresentadas pelo autor nessa palestra.

Machado inicia observando que informações soltas, em geral, perdem o seu valor, enquanto narrativas encadeiam informações e criam elos cognitivos que constroem os significados mais marcantes, estabelecendo assim o conhecimento. Segundo Machado, a conexão entre “conhecimento” e “narrativa” é tão profunda que ambas as palavras têm um léxico comum: *gnarus* (em Latim).

A ideia de narrativa, destaca Machado, surge do diálogo entre as ideias de cadeia e de rede. Na rede, tudo está ligado, articulado. O encadeamento é a ideia cartesiana que segue uma linha: “se isso, então aquilo”. Atualmente, continua o autor, as pessoas tendem a dizer que as ideias cartesianas são ultrapassadas e que tudo está em rede, porém temos que pensar que até mesmo para falar precisamos de um encadeamento de ideias; do contrário, não formamos sequer uma frase. Quem conta uma história, encadeia, pois toda narrativa é um encadeamento.

Machado, em seguida, estabelece que o *conhecimento explícito* é aquele que, quando perguntados a respeito, respondemos imediatamente. Este tipo de conhecimento, acrescenta o educador, representa uma parte muito pequena de todo o conhecimento que adquirimos na vida. A maior parte de tudo o que sabemos não conseguimos expressar claramente e este é o *conhecimento tácito*. A narrativa combina os dois tipos de conhecimento: o tácito (que ele chama de “recheio da história”) e o explícito (que é a “moral da história”). Machado prossegue: a informação sem narrativa se perde, é como se fossem cenas isoladas. Informações isoladas de nada valem. O que não vira uma história para contar, morre. É preciso “linkar” as coisas, criar um roteiro, para que elas (as informações) permaneçam na memória.

Machado destaca, então, a importância das metáforas na construção do significado: quando encontramos algo que explica tão bem o que queremos, as coisas tornam-se claras de modo que não precisamos defini-las. De acordo com o pesquisador, há vários tipos de narrativas: binárias (que são as mais simples e polarizadas entre o “bem” e o “mal”), quaternárias (que são as que têm dois eixos) e as multifárias (mais complexas, sem definição explícita de bem e mal, e que são mais parecidas com a realidade).

Machado apresenta, na sequência, vários indícios de um “paralelismo” entre a Matemática e os Contos de Fadas em Língua Materna.

- Contos de Fadas são, em geral, binários, isto é, polarizados (o “bem” contra o “mal”); em Matemática, há também uma polarização: ou uma sentença matemática fechada é “verdadeira” ou ela é “falsa”.
- A palavra “contar” tem, por um lado, na Matemática, a noção de “enumerar” e, por outro, em Português, ela traz a ideia de “narrar” (entre outros significados).
- Os Contos de Fadas começam com “Era uma vez . . . ” e terminam com “E foram felizes para sempre!”; em Matemática, as demonstrações começam com “Seja . . . ” e terminam com “Como queríamos demonstrar!”.
- A Matemática, assim como os Contos de Fadas, fazem forte uso de abstrações. Por exemplo, não existem unicórnios nem círculos no mundo real (ambos são objetos abstratos). Contudo, frequentemente, a abstração na Matemática é vista como algo muito complicado, enquanto que, nos Contos de Fadas, ela é aceita de forma mais natural.
- Os significados, tanto na Matemática, como nos Contos de Fadas, devem passar por narrativas coerentes: é preciso contar bem a história, mesmo sendo ela uma demonstração, com começo, meio e fim.

Existem ainda outros aspectos comuns, complementa Machado: o tempo que tem que ser presente na história, mas que serve a qualquer tempo ou em qualquer época; a micromotivação que gera a macromotivação; a hermenêutica que não exclui a interpretação aberta; o genérico que trata do particular.

Por fim, Machado cita o filósofo britânico Bertrand Russell, ao colocar que o papel principal do professor é evitar duas coisas na mente dos alunos: a primeira são as *narrativas unárias*, aquelas nas quais se acredita que haja uma única verdade e que dão origem a dogmatismos e fanatismos; a segunda são as *narrativas binárias*, que levam aos extremismos ao não permitirem opções alternativas intermediárias (para mais detalhes, ver a referência Russell (2009)).

## 2.4 Narrativas e A Prova Matemática: Doxiadis e Mazur

O livro “Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative”, editado pelos professores Apostolos Doxiadis e Barry Mazur, e publicado pela Princeton University Press, em 2012, tem sua origem em uma conferência Mykonos, na Grécia, em 2005, com a formação do grupo THALES + FRIENDS. O grupo foi criado com o objetivo de transpor “o abismo entre a Matemática e as outras formas de atividades culturais”. A segunda conferência, que ocorreu em Delphis, em 2007, e contou com matemáticos, historiadores, filósofos, professores de Literatura e um romancista especialista em Matemática, focou em estudos sobre Matemática e Narrativa. Os trabalhos desta conferência tornaram-se a base para o referido livro, cujo título remete às palavras “Não perturbe meus círculos!” atribuída a Arquimedes antes de ser assassinado por um soldado romano em Siracusa.

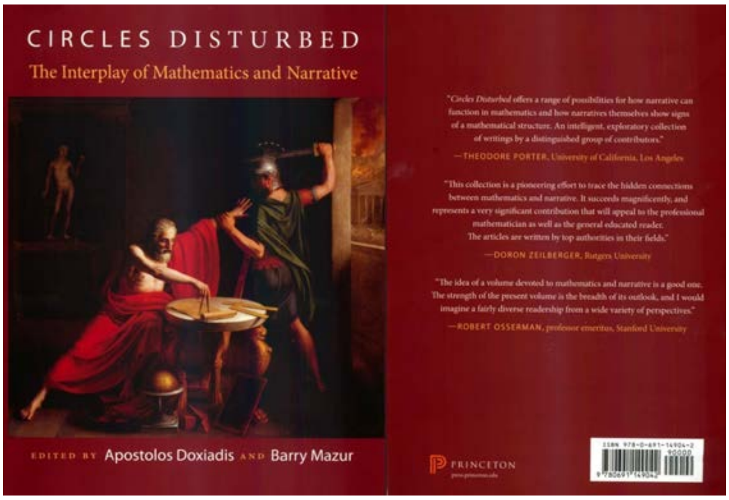



Figura 2.3: Doxiadis, Mazur e a estrutura narrativa da Matemática.

O Capítulo 10 do livro, “A Streetcar Named (among Other Things) Proof: From Storytelling to Geometry, via Poetry and Rhetoric” (“Um Bonde Chamado (entre Outras Coisas) Prova: Da Narrativa à Geometria, via Poesia e Retórica”), escrito por Apostolos Doxiadis, é o capítulo mais longo da obra, ocupando mais de cem páginas. Nele, o autor defende que a origem grega da maneira de se fazer e escrever provas que usamos hoje está relacionada com a narrativa, a narrativa poética e, sobretudo, com a retórica forense. Doxiadis sintetiza as várias conexões em um diagrama, conforme a figura a seguir. No diagrama, a flecha preta sólida denota influência direta e a pontilhada, indireta. A flecha cinza indica influências de domínio específico nos dois domínios em que a prova teve início.

Os termos “narrativa” e “história” são frequentemente usados intercambiavelmente, mas precisamos distingui-los, usando narrativa para denotar algo mais geral, ou seja, todas as históas são narrativas, mas nem todas as narrativas são histórias. O termo narrativa denota um modo de comunicação cujo objetivo é representar uma ação bem como representar uma mediação simbólica entre o mundo das ações e o mundo das representações mentais. De acordo com Zacks, Tversky e Iyer (2001), “narrativas são discursos que descrevem uma série de ações”, um ponto de vista compartilhado por Doxiadis.

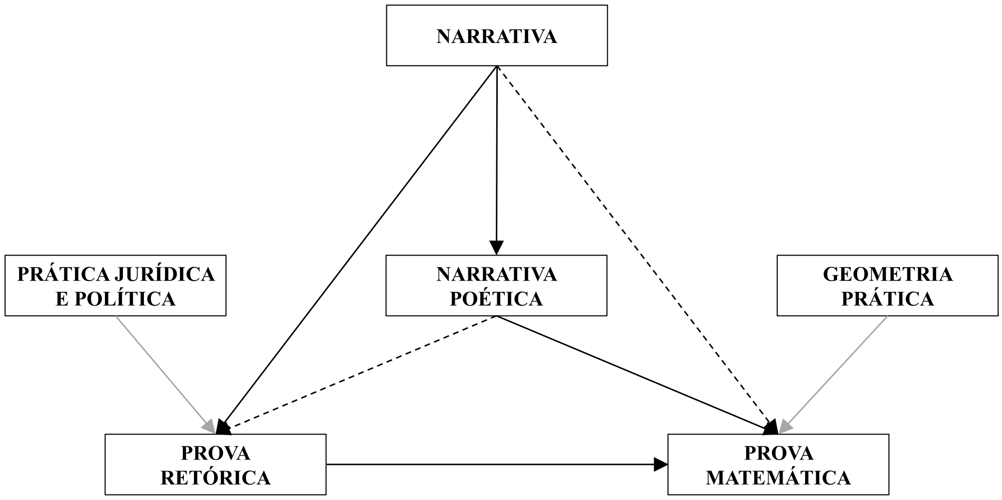



Figura 2.4: relações de práticas culturais que deram origem à prova matemática.

Por narrativa poética, o autor entende como aquela narrativa em prosa e verso desenvolvida na Grécia Antiga nos séculos VI e VII a.C. da qual fazem parte as epopeias de Homero e Hesíodo. Tais formas de narrativa dominaram a cultura grega e suas características serviram para a formação das formas narrativas subsequentes.

De acordo com Doxiadis, o estilo arcaico de narrativa, especialmente aquele encontrado nas epopeias, trabalha com uma combinação de mecanismos cognitivos inatos e os hábitos de uma prática de desenvolvimento cultural, unindo sentenças narrativas curtas com o objetivo de criar uma representação viva na mente do leitor. Na Idade Clássica, surge um novo estilo narrativo, a tragédia, que dá um novo formato à representação da ação por meio do uso da mimese (figura em que o orador imita outrem, na voz, estilo ou gestos, em discurso direto). Doxiadis coloca que “o desenvolvimento conjunto da tragédia e da retórica é parte da história maior das mudanças trazidas na vida das cidades-estados gregas pela transformação política, da tirania à oligarquia, para práticas mais participativas, a mais avançada das quais é a democracia”. Central para essa transformação, continua Doxiadis, são formas de discurso culturalmente desenvolvidas cujo objetivo é a persuasão. A retórica, a arte da persuasão, também usa uma forma de prova, diferente, mas não em sua totalidade, da prova matemática. Existiram três gêneros de retórica na Antiguidade Clássica: cerimonial, política e judicial. A retórica cerimonial é usada em ocasiões festivas ou em exibições oratórias, a retórica política usada em assembleias e a retórica judicial usada pelos litigantes em uma corte judicial.

Por fim, a Geometria Prática é aquela evidenciada na Grécia Antiga, na qual as ferramentas básicas se resumiam à régua e ao compasso. Por volta do ano 900 a.C. podemos perceber a evidência de uma ferramenta semelhante a um compasso. Seria um pincel articulado que foi utilizado para desenhar em ânforas (vasos antigos). Vale ressaltar que muitas vezes uma ferramenta é criada para um determinado propósito, mas seus usuários a tornam mais sofisticada do que para aquilo que fora criada. Esta obra artesanal acabou sendo o mesmo desenho utilizado em muitas provas geométricas realizadas séculos depois.

## 2.5 Narrativas e O Ensino de Matemática: Zazkis e Liljedahl

Rina Zazkis e Peter Liljedahl da Simon Fraser University, no Canadá, escreveram o livro "Teaching Mathematics as Storytelling" que trata especificamente do uso de narrativas (*storytelling*) no ensino da Matemática. O livro apresenta storytelling em Matemática como um meio para se criar uma aula em que a Matemática seja apreciada, entendida e divertida. Os autores mostram como envolver os alunos nas atividades matemáticas por meio da narrativas. O texto apresenta vários tipos de narrativas que podem ser usadas em sala de aula: (1) narrativas que proporcionam uma trama ou plano de fundo para os problemas matemáticos; (2) narrativas que se entrelaçam profundamente com o conteúdo e que explicam conceitos e ideias; (3) narrativas que ajudam a resolver um problema ou a alcançar um melhor entendimento de uma solução; (4) narrativas na forma de problemas que propõem questões. Além disso, os autores apresentam um enquadramento teórico para a criação de novas narrativas, ideias para enriquecer e usar narrativas já existentes, bem como várias técnicas que tornam uma narrativa mais interativa e invocativa para o leitor. O livro é, assim, de interesse para quem ensina Matemática ou para quem forma professores de Matemática.

Ao longo dos seus 12 capítulos, o livro intercala justificativas e ponderações sobre o uso de *storytelling* no contexto escolar. Destacamos os seguintes trechos:

- O valor de uma história para o ensino está precisamente no poder de engajar as emoções dos estudantes e, de forma conjunta, suas imaginações no material curricular.
- O grande poder das histórias está em sua missão dupla: elas comunicam informação de uma forma memorável e delineiam os sentimentos dos ouvintes sobre a informação que está sendo comunicada.
- Contar uma história é estabelecer um significado e estabelecer significado é o fio condutor no ensino da Matemática, uma disciplina que é frequentemente percebido como uma

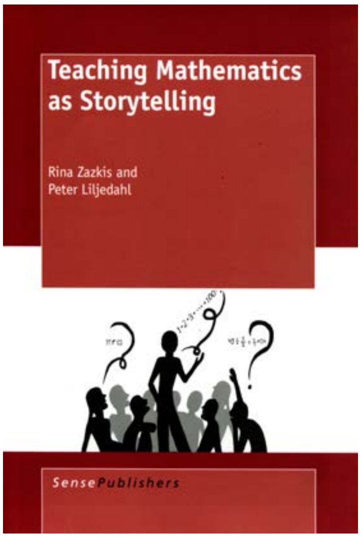



Figura 2.5: Zazkis, Liljedahl e o uso de narrativas no Ensino da Matemática.

mera manipulação de símbolos cujo significado está muitas vezes longe de estar claro para os estudantes.

- Usar histórias em sala de aula pode servir para muitos e diferentes propósitos. Histórias podem despertar interesse, ajudar na memorização e reduzir a ansiedade. Elas podem criar uma atmosfera confortável e de suporte na sala de aula, bem como estabelecer um relacionamento entre o professor e os estudantes.
- As escolas de hoje estão mais acostumadas com os *word problems* (problemas com palavras), primos distantes das boas histórias. Contudo, uma análise mais cuidadosa dos *word problems* revela que esses de fato não são histórias engajantes, pois foram desprovidos dos detalhes e emoções que ajudam a orientar os sentimentos dos ouvintes.

Os autores citam ainda os 10 benefícios enumerados por Haven (2000) sobre o uso de narrativas como ferramenta educacional:

- *Storytelling* é um elemento efetivo e poderoso no esforço de melhorar e desenvolver todas as quatro primeiras habilidades da linguagem (ler, escrever, ouvir e falar).
- Informações (tanto conceitos como fatos) são melhor lembradas e por mais tempo quando apresentadas em forma de narrativa.
- *Storytelling* é uma ferramenta de ensino multidisciplinar efetiva e poderosa que perpassa todo o currículo.
- *Storytelling* motiva positivamente os estudantes para o aprendizado.
- Narrativas focam a atenção e o aprendizado dos alunos e os motiva a procurarem estudar mais.
- *Storytelling* constrói efetivamente a autoconfiança e a autoestima do estudante.

- *Storytelling* envolve e desenvolve as habilidades ligadas à imaginação e à criatividade melhor do que qualquer outra atividade escolar.
- *Storytelling* envolve e entretém.
- *Storytelling* cria empatia e senso de conectividade.
- *Storytelling* melhora as habilidades de análise e resolução de problemas.
- *Storytelling* cria conexões valiosas com a comunidade e com a herança familiar.

## 2.6 Narrativas e Propaganda

Como coloca McSill (2013), desde tempos imemoriais, a estória[c] é utilizada como instrumento para ensinar, informar, entreter, reforçar crenças, dominar e, como se chama hoje, "fidelizar o cliente". Estudiosos da área de *marketing* colocam a narrativa como uma das pedras angulares da boa propaganda: se propaganda é a alma do negócio, então narrativa é a alma da propaganda.

Embora seja um livro destinado ao público de propaganda, Xavier (2015) discute as implicações educacionais de *storytelling*:

> *Pergunte a um professor qual é seu maior problema no exercício do magistério. A resposta mais ouvida certamente será o binômio desinteresse/desatenção. [. . . ] Tudo começa com atenção, sem a qual o restante se inviabiliza. Se logo após a atenção inserirmos algum grau de afetividade (ou, se preferirmos, de emoção), estará aberto o caminho para uma identidade mais profunda entre comunicador e público. [. . . ] A maneira de cumprir esse difícil percurso é contar uma boa história, que prenda a atenção, envolva com emoção, crie laços profundos com o público, una todas as pontas em um relato compreensível, seja apreciada e lembrada.*
>
> (Xavier, 2015)

Neste contexto, Xavier (2015) coloca o papel fundamental da narrativa (*storytelling*) em capturar e conduzir os capitais emocional, cultural e de atenção:

> *As pessoas estão à procura de conexões novas e emocionais. Elas procuram algo para amar [. . . ] Só existe uma forma de prosperar como profissional de marketing na Economia da Atenção: parar de correr atrás de modismos e dedicar-se a estabelecer conexões consistentes e emocionais com os consumidores.*
>
> (Xavier, 2015)

Ao leitor interessado em mais detalhes sobre a questão da narrativa no âmbito da propaganda, recomendamos, portanto, a leitura dos livros Xavier (2015) e McSill (2013).

[c]Aqui, estamos usando "estória" seguindo o uso do próprio McSill (2013), mas o significado é o mesmo de "história". De fato, atualmente, os dois termos têm sido usado como sinônimos.

# 3 Quão Longo é Um Pedaço de Barbante?

Faixa de classificação etária: Livre (IMDb).

Áudio: Inglês.

Legendas: Português.

Título original: *How Long is A Piece of String?*

Gênero: Documentário.

Duração: 55 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: BBC Two-Horizon (2009).

Tópicos matemáticos abordados: Medição; Unidades de Medida; História da Matemática; Progressões Geométricas; Fractais.

Nível escolar sugerido: Ensino Fundamental II; Ensino Médio; Formação de Professores.

Interdisciplinaridade: Física; Biologia; Química e Filosofia.

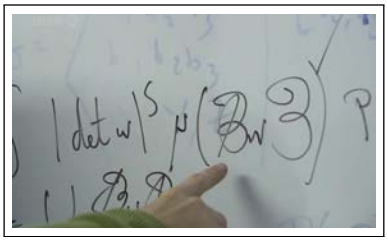
Marcadores: BBC; Medidas; Documentário; Física Quântica; Fotossíntese; Excíton; Fractais; Modelagem.

Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: H10, H12, H14, H15.

Link para o arquivo da legenda: <https://goo.gl/2oC88J>.

Página web oficial: <http://www.bbc.co.uk/programmes/b00p1fpc>.

### Imagens selecionadas


## Sinopse

Tudo começa quando o comediante britânico Alan Davies quer medir o comprimento de um pedaço de barbante. Mas, o que parecia ser uma tarefa simples, logo se torna uma jornada filosófica cheia de surpresas. Com a ajuda de professores de Matemática e de Física, ele acaba descobrindo que medir "exatamente" um pedaço de barbante leva a questões sobre a própria concepção da realidade.

## Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

Esse vídeo pode ser usado para levar os alunos a perceberem os aspectos e as nuances de modelagem que existem na questão de se medir o comprimento de objetos físicos reais: dependendo de como o objeto é modelado de forma abstrata, teorias matemáticas diferentes com suas dificuldades inerentes são necessárias. No caso do barbante, ele pode ser modelado como um segmento de reta, como um fractal, como uma distribuição de probabilidade, ... Para o Ensino Médio, o vídeo também pode ser usado para despertar o interesse pelo campo da Física Quântica.

## Sensibilização (para montar um cartaz)

Você já tentou medir com precisão o comprimento de um pedaço de barbante ou uma linha? Na sua medição, você prestou atenção onde **exatamente** o barbante começa e onde ele termina? Você considerou as reentrâncias do barbante?

No documentário **Quão Longo é Um Pedaço de Barbante?**, da BBC, que apresentaremos, o comediante britânico Alan Davies se depara com estas questões e, para tentar respondê-las, ele embarca em uma jornada filosófica por fractais, física quântica e buracos negros.

## Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

## Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo novo com o vídeo? O quê?
3. Ao longo da primeira parte do documentário, com a companhia do matemático Marcus du Sautoy, o apresentador Alan Davies acaba conhecendo várias unidades de medidas de comprimento: centímetros, polegadas, cúbitos, estádios, jardas, milímetros e metros. Na viagem de trem para o Laboratório Nacional de Física, Marcus diz que, em termos de medidas, é importante ter algo que seja igual para todos. Por que é importante estabelecer um padrão?
4. Ao longo do documentário, Alan Davies vai coletando várias possibilidades para a medida

do seu barbante. Tais possibilidades aparecem como títulos das várias seções que compõem o documentário e elas estão listadas na tabela a seguir. Você é bom de memória? Identifique em que contexto do vídeo (com qual pessoa, qual local, qual situação) a medida indicada apareceu.

| Quão longo é o pedaço de barbante? | Contexto |
|---|---|
| 32 cm | |
| 9 polegadas | |
| 18 dedos | |
| 319,442 mm | |
| infinito | |
| 1 000 000 000 de átomos | |
| Alan Davis | |
| o fim do mundo | |

5. Com quais argumentos o matemático Marcus du Sautoy tenta convencer Alan Davies que o barbante pode ter comprimento infinito?
6. Qual é a principal dificuldade que a professora de Física Becky Parker vê na tarefa de Alan Davies em medir o comprimento de seu barbante com precisão?
7. Qual é a principal dificuldade que o professor de Física Quântica Seth Lloyd vê na tarefa de Alan Davies em medir o comprimento de seu barbante com precisão?
8. Do que você mais gostou no filme?
9. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

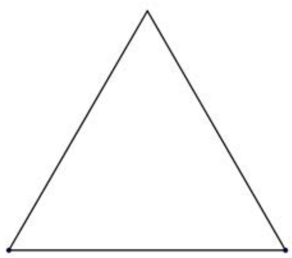
## Sugestões de questões específicas

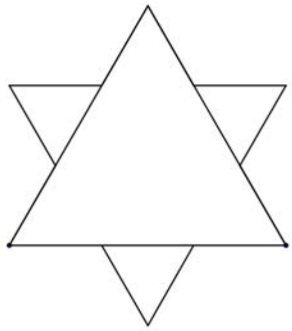
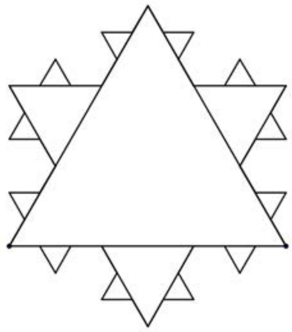
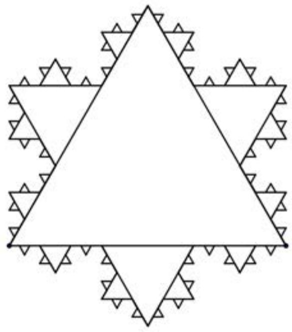
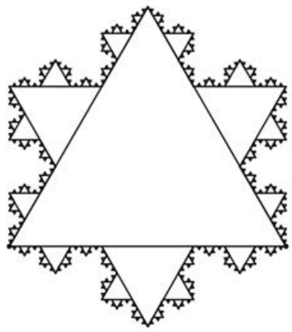
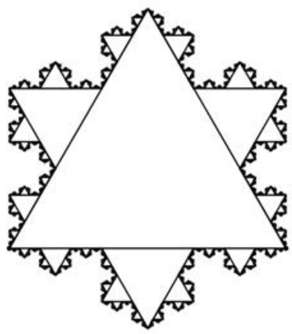
1. Quando o apresentador Alan Davies vai pela primeira vez ao gabinete do matemático Marcus du Sautoy para saber qual é o comprimento do seu barbante, Marcus pergunta se Alan quer a resposta em centímetros, polegadas, cúbitos ou estádios (03:46-03:53). Supondo que o barbante tenha 32 cm de comprimento, converta o seu comprimento para polegadas, cúbitos e estádios admitindo que 1 cúbito = 20,64 polegadas, 1 polegada = 2,54 cm e 1 estádio = 192,3 m.
2. No trem, indo para o Laboratório Nacional de Física, Alan Davies, num tom descontraído, pede ao garçom que use outro recurso de medição, a estimativa: Alan pergunta ao garçom o quanto ele acha que mede o pedaço de barbante e o mesmo responde 9 polegadas. Alan afirma que ele errou e diz que o pedaço mede aproximadamente 12 polegadas (06:22-06:40). Supondo que o barbante tenha 32 cm de comprimento e admitindo que 1 polegada = 2,54

cm, qual foi o erro percentual da estimativa do garçom (9 polegadas)? Qual foi erro percentual da estimativa de Alan (12 polegadas)? Qual foi o erro percentual da estimativa de Alan para o erro percentual do garçom (25%) considerando-se que o barbante tenha 32 cm de comprimento? Lembre-se:

$$\text{erro percentual} = \left| \frac{\text{valor de referência} - \text{estimativa}}{\text{valor de referência}} \right| \cdot 100.$$

3. No Laboratório Nacional de Física, Alan Davies compara o seu “cúbito” com o cúbito guardado no laboratório e Marcus du Sautoy brinca dizendo que Alan é um “homem egípcio” (07:40-07:50). O que ele quer dizer com esta brincadeira?
4. No Laboratório Nacional de Física, Marcus du Sautoy afirma que atualmente o metro não é mais definido por uma barra de liga metálica (09:33-09:50). Segundo o documentário, como o metro é definido atualmente?
5. No Laboratório Nacional de Física, a barra que define a jarda padrão trazia a seguinte inscrição em si: 36 IN. 68°F (36 polegadas a 68 graus Fahrenheit) (07:54-07:57). Converta 68 graus Fahrenheit para graus Celsius. Por que este registro de temperatura na barra é importante?
6. Para explicar no que consiste o floco de neve de Koch, o professor Marcus du Sautoy, na areia, desenha primeiro um triângulo equilátero cujo perímetro é 27 metros. Em seguida, ele divide cada segmento que compõe o perímetro da figura em três segmentos iguais e, sobre os segmentos intermediários, ele desenha novos triângulos equiláteros menores. Ele repete então este procedimento algumas vezes (15:16-19:45). Preencha a tabela a seguir. calculando o perímetro, a área e o número de vértices da figura nas iterações 1, 2, 3, 4 e, de maneira geral, para uma iteração *n* arbitrária. O que acontece com esses valores quando *n* fica arbitrariamente grande?

| Iteração | Figura | Perímetro | Área | Número de Vértices |
|---|---|---|---|---|
| 1 |  | 27 m | $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ m$^2$ | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 |  | | | |
| 3 |  | | | |
| 4 |  | | | |
| 5 |  | | | |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $n$ |  | | | |

7. No final do documentário (quando os créditos finais são exibidos) (58:12-58:18), o famoso barbante do documentário é guardado, com honras, no cofre do Laboratório Nacional de Física junto com o cúbito, "a jarda definitiva" e a barra do metro. Se o barbante for usado como unidade de medida, qual será o seu comprimento nesta unidade?

## Observações para o professor

- Recomendamos que a Questão Geral 4 seja trabalhada de forma coletiva com sua turma pois, assim, os alunos irão se ajudar mutuamente a lembrar dos contextos de cada seção e o professor terá a oportunidade de realizar um pequeno resumo do documentário.
- Após a exibição do filme, sugerimos que se discuta com os alunos os vários aspectos (filosóficos, socioculturais, tecnológicos, históricos, ...) associados ao conceito de medição. Por exemplo, o que significa medir algo? Por que medir é importante para nossa sociedade? Por que é importante ter um padrão de medidas? Outro ponto que deve ser destacado é a questão da modelagem matemática do pedaço de barbante: dependendo de como o pedaço de barbante é modelado (segmento de reta, ou fractal, ou distribuição de probabilidade, como sugerido pelo documentário), teorias matemáticas diferentes (com suas dificuldades inerentes) são necessárias. Para subsidiar e ampliar estas discussões, recomendamos as referências da Silva (2010) e Crease (2013).
- Quase no fim do documentário (57:25-57:53), ao reencontrar Marcus du Satoy, Alan Davies confessa que, depois de sua jornada filosófica, ele não sabe qual é o comprimento do barbante. Seus alunos podem ficar com um sentimento parecido: afinal, como medir e que valor escolher para a medida? Aqui concordamos com o professor da Silva (2010): "Uma boa medida nem sempre é a mais precisa, mas sim a menos precisa que satisfaça a finalidade da medição.".
- No trem, indo para o Laboratório Nacional de Física, Marcus du Sautoy diz a Alan Davies que sua casa de seis cúbitos seria maior do que a dele. Alan então retruca: "Seis cúbitos de altura? Eu não vou ser capaz de chegar à porta.". Entretanto, essa afirmação nos parece equivocada pois, se utilizarmos o cúbito romano (ou mesmo o cúbito de Alan Davies), podemos verificar facilmente que a porta teria, pelo menos, 2,6 m de altura e que uma pessoa passaria sem grandes dificuldades.
- Realmente precisamos de medidas precisas? Segundo o Laboratório Nacional de Física do Reino Unido:

> Medições exatas de comprimento são exigidas em todo o mundo. Grande parte da produção industrial e das modernas tecnologias está baseada em medições de comprimento. Do enroscar de um parafuso numa porca, às peças precisas do motor de um carro até as minúsculas partes de um microchip, tudo requer uma exata escala internacional de comprimentos. Essa necessidade é o que há de mais importante na economia globalizada, como pode

> ser reconhecido no exemplo de uma junta homocinética fabricada no Rio Grande do Sul e usada na fabricação de um carro no Japão. No começo do século XX, 1.207 diferentes combinações de porcas e parafusos que deveriam ser do mesmo tamanho foram testadas, mas somente 8% delas encaixaram-se de forma suficientemente aceitável quando aparafusadas.
>
> (NPL; Bernardes, 2012)

- Existe um ramo da Ciência dedicado à arte de medir e interpretar as medições realizadas: a Metrologia. Segundo da Silva (2010): "[Ela] abrange todos os aspectos teóricos e práticos relativos às medições, qualquer que seja a incerteza, em quaisquer campos da ciência ou da tecnologia.". No exterior, existem cursos de graduação em Metrologia. No Brasil, apenas cursos de pós-graduação (especialização, mestrado e doutorado).
- No documentário, o cúbito (também denominado côvado) foi definido como a medida do cotovelo à ponta do dedo médio (05:37-05:44). Segundo Stone (2014), o termo cúbito é derivado da palavra *cubitus* (cotovelo, em Latim) e, como unidade de medida de comprimento, ele tem sido usado desde a Idade Antiga, passando pela Idade Média, até os tempos atuais (em alguns poucos lugares). Outras definições similares foram usadas (a medida do cotovelo à base da mão, a medida do cotovelo a um ponto entre o polegar e o dedo mínimo em uma mão esticada), o que dificulta uma descrição precisa da medida de um cúbito. De fato, a medida de um cúbito varia com a história e com a região: temos os cúbitos egípcio real e comum, o romano, o grego, o assírio, o sumério, o da Bíblia Cristã, etc. A tabela a seguir, extraída de Stone (2014), lista alguns valores médios de referência para os diferentes cúbitos.

| Cúbito | Polegadas | Metros |
|---|---|---|
| Romano | 17,48 | 0,444 |
| Egípcio (comum) | 17,72 | 0,450 |
| Grego | 18,23 | 0,463 |
| Assírio | 19,45 | 0,494 |
| Sumério | 19,76 | 0,502 |
| Egípcio (real) | 20,62 | 0,524 |
| Talmudista | 21,85 | 0,555 |
| Palestino | 25,24 | 0,641 |

O cúbito real egípcio, cuja medida varia entre 523 mm e 525 mm, é dividido em 7 palmos com 4 dedos cada, totalizando assim 28 dedos. Há ainda, no cúbito, indicações das frações unitárias $1/2$, $1/3$, $\ldots$, $1/16$ de um dedo (figura a seguir). Note que estas subdivisões não são explicadas no documentário e, ainda assim, no trecho (07:43-07:48) há a indicação de que o pedaço de barbante de Alan Davies mede 18 dedos.

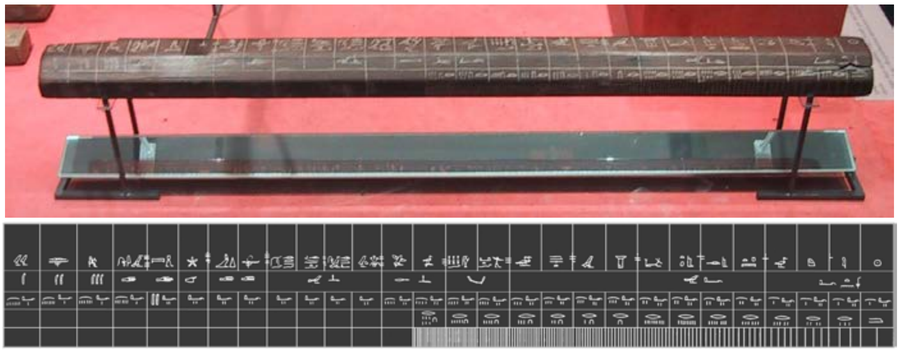


Figura: cúbito egípcio (o cúbito da imagem superior, do Museu do Louvre, pertenceu a Maya, supervisor do tesouro do faraó Tutancâmon).

Fonte: Wikimedia Commons.

O hierógrafo para o cúbito tem a forma de um braço com a palma virada para baixo 𓂣, como podemos ver na fotografia a seguir da peça 1 da Pedra de Palermo.

Figura: peça 1 da Pedra de Parlemo.

Fonte: Wikimedia Commons.

- O floco de neve de Koch foi idealizado pelo matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924) em 1904 para dar um exemplo de uma curva que fosse contínua, mas não diferenciável em ponto algum e cuja construção usasse elementos simples de geometria.

Figura: Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924).

Fonte: Wikimedia Commons.

As propriedades dos fractais, como o floco de neve de Koch, permitem a construção de antenas com um desempenho de bom para excelente na recepção de muitas frequências diferentes simultaneamente.

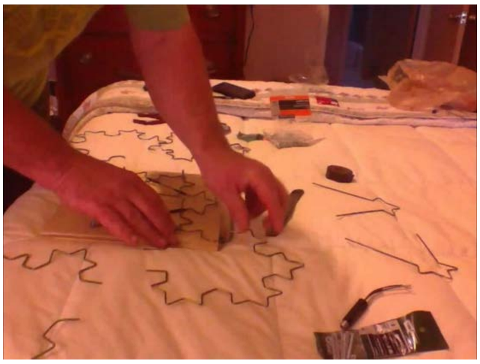


Figura: antena fractal inspirada no floco de neve de Koch.

Fonte: jthoward66@YouTube.

Para uma introdução simples sobre fractais, recomendamos o vídeo "Fractais: Recriando O Universo" da série portuguesa "Isto é Matemática": <https://goo.gl/Jfuwss>. Para uma abordagem mais aprofundada em sala de aula sobre este assunto, recomendamos o livro (Barbosa, 2005).

- O INMETRO traduziu e adaptou um conjunto de 7 cartazes produzidos pelo Laboratório Nacional de Física no Reino Unido (o mesmo que aparece no documentário) que apresentam, de forma resumida, informações relacionadas às grandezas de base do Sistema Internacional de Unidades (SI): comprimento (<http://goo.gl/aAPVGu>), massa (<http://goo.gl/5bNfcw>), eletricidade (<http://goo.gl/oP2EbM>), luz (<http://goo.gl/RLwh3F>), tempo (<http://goo.gl/rFGtxC>), temperatura (<http://goo.gl/LlAj9B>) e incerteza (<http://goo.gl/BshpGw>).
- O experimento realizado no laboratório de física no Imperial College London sob a orientação do Dr. Johnny Hudson é denominado "Experimento de Interferência de Young" (ou "Experimento da Fenda Dupla"). Ele foi usado para demonstrar a natureza ondulatória e quântica da luz e, no documentário, o experimento é usado para convencer Alan Davies que partículas podem estar em vários lugares ao mesmo tempo. Para mais detalhes, recomendamos a leitura dos Capítulos 6 e 10 de Crease (2013), que considera este experimento como um dos 10 mais belos experimentos científicos. No contexto da física quântica, recomendamos a leitura do artigo (Pessoa Jr., 1997) que traz uma introdução conceitual ao assunto e o Capítulo 6 (Probabilidade e Incerteza: A Visão Quântica da Natureza) do livro (Feymann, 2012).
- Apesar do documentário não mencionar, é importante destacar o importante papel que a Teoria das Probabilidades desempenha na física quântica, oferecendo a linguagem e os métodos necessários para descrever a característica "indeterminista" do universo quântico:

> A mecânica quântica era diferente de todas as teorias com que os físicos haviam se deparado antes. A diferença pode ser ilustrada pela comparação do

> comportamento de um corpo grande macroscópico, com o de um muito pequeno. Por exemplo, a posição que a Terra ocupará no espaço em qualquer momento dado pode ser calculada com enorme precisão. Da mesma maneira, se conhecêssemos todas as forças que atuam sobre uma bola de beisebol, poderíamos calcular precisamente seu percurso quando voasse pelo ar. Na mecânica quântica, nada de parecido é possível. Em qualquer momento, haverá certa probabilidade de que um elétron num átomo de hidrogênio, por exemplo, esteja em certo lugar e também certa probabilidade de que esteja em outro. Se um elétron dentro de um átomo é um feixe de probabilidades, o efeito disso é "besuntá-lo" pelo espaço. Na verdade, os físicos falam frequentemente da "nuvem de elétrons" que envolve um átomo.
> [. . . ]
> A mecânica quântica está repleta de probabilidades, e a nuvem de elétrons é apenas um exemplo. A teoria não nos diz quando um elétron fará uma transição de um estado para outro; ela nos dá apenas uma probabilidade. Além disso, pode-se falar da probabilidade de uma partícula subatômica estar neste ou naquele estado. De fato, considera-se em geral que as partículas subatômicas estão numa mistura de estados. Um elétron não só está em muitos lugares diferentes como pode ocupar simultaneamente um número infinito de diferentes estados de energia.
>
> (Morris, 1998)

- Talvez, para o Ensino Fundamental II, a parte que trata de mecânica quântica (36:40-55:52) possa ser omitida, caso você julgue o conteúdo muito avançado para seus alunos.
- Uma atividade que pode ser feita com motivação no documentário é medir os "cúbitos" dos alunos e fazer resumos e gráficos estatísticos (separando por gênero) para se ter uma ideia da variabilidade desta medida antropométrica.
- Sir Francis Galton (1822-1911), em um artigo para a revista Nature em 1907, conta como a média das estimativas em um concurso "adivinhe o peso do boi" em uma feira de aves em Plymouth de fato se aproximou do peso do boi medido por uma balança. Em outras palavras, enquanto que estimativas individuais podem se afastar do peso "correto", a média destas estimativas é uma boa estimativa para o peso. Este tipo de fenômeno é denominado "sabedoria das multidões" (Surowiecki, 2005). Motivado pelo episódio da estimativa dada pelo garçom na viagem de trem para o comprimento do barbante (06:22-06:40), uma atividade que pode ser feita em sala de aula é pegar um pedaço de barbante, pedir para que os alunos façam estimativas e, então, comparar estatísticas destas estimativas com a medida dada por uma régua.
- No documentário, Marcus du Sautoy alerta sobre a importância de se ter um padrão de medidas (03:48-04:25). Esta importância pode ser ilustrada com o episódio da queda de um satélite metereológico em Marte em 1999 por conta de um problema de conversão de unidades: o satélite foi construído pela Lockheed Martin para operar com o sistema imperial britânico de medidas enquanto que o JPL (Jet Propulsion Lab) da NASA estava enviando informações de navegação usando o sistema métrico. A quantia de 125 milhões de dólares foi

perdida por conta de um problema de conversão entre dois sistemas de medidas.

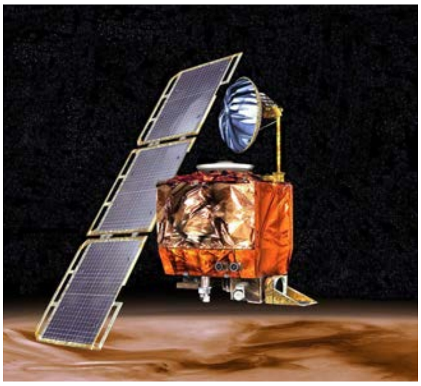


Figura: arte conceitual do satélite metereológico de Marte.
Fonte: NASA.

- O pequeno cilindro que representa o quilograma exibido no documentário (07:26-07:41) é denominado “Protótipo Internacional do Quilograma” (ou, mais simplesmente, “Grande K”). Leach (2014) descreve algumas de suas propriedades:

> O Protótipo Internacional do Quilograma é um cilindro de aproximadamente 39 mm de diâmetro por 39 mm de altura [. . . ]. O design do artefato minimiza a área de sua superfície enquanto que o torna mais fácil de se manusear e fabricar (uma esfera de igual volume teria uma área de superfície menor, mas apresentaria dificuldades de produção e uso). Uma liga de platina e irídio foi escolhida como o material de fabricação por várias razões. Sua alta densidade (aproximadamente 21,5 g $cm^3$) implica que o artefato tem uma pequena área de superfície e, então, a possibilidade contaminação de sua superfície fica minimizada. A natureza relativamente inerte do material também minimiza a contaminação de sua superfície e promove a estabilidade de massa do artefato. [. . . ] A adição de 10% de irídio à platina aumenta sua rigidez e também reduz o desgaste.
>
> (Leach, 2014)

Figura: Protótipo do Quilograma K20 armazenado nos EUA
(a cópia brasileira tem numeração K66).
Fonte: Wikimedia Commons.

O quilograma, até recentemente, era a única grandeza do Sistema Internacional de Unidades que usa um aparato como definição (todas as demais unidades são definidas em termos de fenômenos naturais). O vídeo "O Objeto Mais Redondo do Mundo!" (com legendas em Português) do canal Veritasium no YouTube (<https://goo.gl/elSgHT>) descreve os problemas de se usar um aparato para se definir o quilograma e as tentativas de se conseguir definições alternativas (o Capítulo 12 de Crease (2013) também trata o assunto). No documentário, Alan Davies fica espantado com as dimensões reduzidas do protótipo do quilograma no Laboratório Nacional de Física (07:20 ? 07:41). Não é difícil encontrar alunos que confundem densidade com massa e, assim, o documentário pode ser usado para tratar o assunto.

- A palestra do professor Ledo Vaccaro no programa PAPMEM 2015 do IMPA, além de introduzir a questão da medida e abordar aspectos de erro, apresenta algumas atividades relacionadas que podem ser feitas em sala de aula: <https://goo.gl/EERN7a>.

## Referências relacionadas


- Barbosa, Ruy Madsen. *Descobrindo A Geometria Fractal – Para A Sala de Aula*. Terceira Edição. Editora Autêntica, 2005.
- Brasil. *Matriz de Referência para o ENEM*. Ministério da Educação, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2009. Disponível em: <https://goo.gl/pGfzme>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Bureau International des Poids et Mesures. *The International System of Units (SI)*. Eighth edition. Disponível em: <http://goo.gl/E8dEYR>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Crease, Robert P. *A Medida do Mundo*. Editora Zahar, 2013.
- Crease, Robert P. *Os 10 Mais Belos Experimentos Científicos*. Editora Zahar, 2006.
- da Silva, Irineu. *História dos Pesos e Medidas*. Segunda edição ampliada. EdUFSCar, 2010.
- dos Santos, Carlos Alberto. *Biologia Quântica*. Ciência Hoje, 2013. Disponível em: <http://goo.gl/B6BWkc>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Engels, Donald. *The Length of Eratosthenes' Stade*. The American Journal of Philology, v. 106, n. 3, p. 298-311, 1985.
- Feynman, Richard Phillips. *Sobre As Leis da Física*. Contraponto, Editora PUC-Rio, 2012.
- Freire Jr, Olival; Pessoa Jr, Osvaldo; Bromberg, Joan Lisa. *Teoria Quântica: Estudos Históricos e Implicações Culturais*. EDUEPB; São Paulo: Livraria da Física, 2011. Disponível em: <http://books.scielo.org/id/xwhf5>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Galton, Francis. *Vox Populi*. Nature, v. 75, n. 1949, p. 450-451, 1907.
- Gulbekian, Edward. *The Origin and Value of The Stadion Unit Used by Eratosthenes in The Third Century B.C.*. Archive for History of Exact Sciences, v. 37, n. 4, p. 359-363, 1987.

- Leach, Richard. *Fundamental Principles of Engineering Nanometrology*. Second Edition. Elsevier Inc., 2014.
- Morris, Richard. *Uma Breve História do Infinito*. Jorge Zahar Editora, 1998.
- National Physical Laboratory (NPL); Bernardes, Americo Tristão (tradutor). *Comprimento*. Rio de Janeiro: Inmetro, 2012. Disponível em: <http://goo.gl/eL8Aq1>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Nicholson, Edward. *Men and Measures: A History of Weights and Measures – Ancient and Modern*. Smith, Elder & Co., 1915. Disponível em: <https://goo.gl/JNYzRF>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Pessoa Jr., Osvaldo. *Interferometria, Interpretação e Intuição: Uma Introdução Conceitual À Física Quântica*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 19, n. 1, 1997. Disponível em: <http://goo.gl/Zar1S2>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Stone, Mark H. *The Cubit: A History and Measurement Commentary*. Journal of Anthropology, v. 2014, Article ID 489757, 11 pages. Disponível em: <http://goo.gl/HT9pOk>. Acesso em: 10 de abril de 2016.
- Surowiecki, James. *The Wisdom of Crowds*. Anchor, 2005.

## Referências sobre o uso de vídeos em sala de aula

- Ferrés, Johan. *Vídeo e Educação*. Segunda Edição. Artes Médicas, 1996.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. Editora Contexto, 2003.

## Agradecimentos

Marco Moriconi (UFF), Sergio Roberto Lopes (UFPR), Roberto Franco (UENF).

## Créditos das imagens de sensibilização

knittycent (flickr) e darinaniz (flickr)

## Concepção

Fabiana Silva de Miranda e Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas

## Revisão

Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin,
Rodrigo Pessanha da Cunha

# Supervisão

Humberto José Bortolossi

---

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

# 4 A Música dos Números Primos

Faixa de classificação etária: Livre L (IMDb).

Áudio: Inglês.

Legendas: Português

Título original: *The Music of the Primes*.

Gênero: Documentário.

Duração: 60 minutos, aproximadamente.

Produtora e ano de produção: BBC e The Open University MMV (2005).

Tópicos matemáticos abordados: Números Primos.

Nível escolar sugerido: Ensino Médio; Formação de Professores.

Interdisciplinaridade: Física.

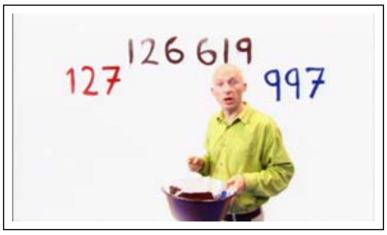
Marcadores: Primos; Criptografia; Gauss; Hipótese de Riemann; Documentário; Problemas do Milênio; BBC.

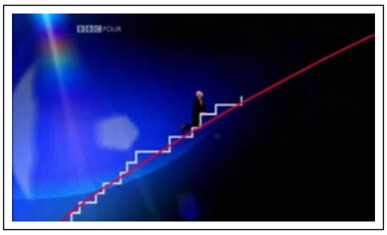
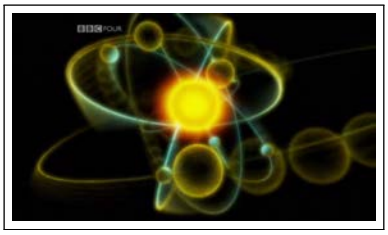
Competências e habilidades do ENEM em Matemática e Suas Tecnologias: H1, H4, H29 e H30.

Link para o arquivo da legenda: <https://goo.gl/ZHycUL>.

Página web oficial: <https://www.bbc.co.uk/programmes/b0074rpp>.

## Imagens selecionadas



## Sinopse

Neste documentário da BBC, Marcus du Sautoy apresenta a história daqueles que tentaram desvendar um dos maiores mistérios da Matemática até hoje não resolvido: o problema do padrão dos números primos. Visitando países como Índia, Inglaterra, Alemanha, Estados Unidos, Grécia e entrevistando importantes matemáticos como Brian Conrey, Barry Mazur, Hugh Montgomery, Jon Keating, Samuel Patterson, du Sautoy nos mostra o encanto dos números primos.

## Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

O documentário pode ser usado para situar os números primos do ponto de vista histórico, apresentar sua importante aplicação em criptografia para o sistema bancário e mostrar que ainda existem problemas abertos em Matemática, isto é, problemas cuja resposta não se conhece, como é o caso da Hipótese de Riemann. O documentário também pode ser usado para discutir a questão da demonstração em Matemática.

## Sensibilização (para montar um cartaz)

Qual a importância dos números primos para o mundo financeiro? Você sabia que há um prêmio de 1 milhão de dólares para quem resolver um problema que envolve números primos?

O professor Marcus duSautoy nos leva a uma viagem na história destes números que conhecemos na Escola Básica e mostra que o futuro ainda reserva grandes surpresas sobre os primos.


“Passará mais de um milhão de anos, no mínimo, antes que entendamos os primos.”

Paul Erdös (1913-1996)

## Orientações metodológicas gerais

- Você, professor, não precisa aplicar todas as questões aqui sugeridas. Dependendo do tempo disponível e da turma, escolhas ou modificações devem ser feitas. Sinta-se livre para fazê-las!
- Parece óbvio, mas vale o conselho: **sempre** assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- Antes de os alunos assistirem ao vídeo, sugerimos que eles leiam as questões que serão trabalhadas.
- Nossa experiência mostra que os alunos ficam sempre mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do sistema de avaliação.
- Dependendo do tempo disponível em sala de aula, apenas partes do vídeo podem ser usadas. Neste caso, contudo, recomendamos fortemente que os alunos assistam ao vídeo inteiro antes (em casa ou no contraturno, por exemplo), pois acreditamos que é muito importante que eles tenham uma percepção global da obra antes que qualquer atividade, discussão ou análise sejam feitas em sala. Outra possibilidade, se o tempo for realmente curto, é deixar que os alunos assistam ao filme e trabalhem com as perguntas em casa para que, depois, em uma parte da aula, discussões, análises e sistematizações sejam feitas.

## Sugestões de questões gerais

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo novo com o vídeo? O quê?
3. Segundo o documentário, por que os números primos são tão importantes?
4. Ainda não conhecemos todos os números primos mas, ainda assim, sabemos que eles são em quantidade infinita. Como?

5. Como o apresentador Marcus du Sautoy descreve o trabalho de um matemático?
6. Este documentário trata de parte da biografia de alguns matemáticos envolvidos com a história dos números primos. Qual dos matemáticos ali apresentados mais chamou sua atenção e por quê?
7. No que consiste a Hipótese de Riemann?
8. “Prova, para um matemático, é tudo!”, afirma du Sautoy em um certo momento no documentário. Por que os matemáticos mostram-se tão obcecados por provas? Por que é importante justificar os resultados?
9. Você concorda com o título “A Música dos Números Primos” dado para o documentário? Justifique sua resposta!
10. Do que você mais gostou no documentário?
11. Se você fosse o diretor deste documentário, você faria algo diferente? O quê?

## Sugestões de questões específicas

1. Em um cenário com crianças brincando no *playground* com blocos gigantes semelhantes ao LEGO, o professor Marcus du Sautoy (1965-) afirma que os números primos são como blocos que formam a Matemática (3:00-3:38). Neste trecho, as crianças dão uma definição para os números primos. Escreva-a e diga se, de acordo com esta definição, o número 1 é primo ou não.
2. O documentário coloca que os matemáticos são grandes fãs dos números primos e alguns deles, no vídeo, dizem quais são os seus números primos favoritos (3:55-4:15). Qual é o seu número primo favorito? Por quê? Qual é o único número primo par?
3. Segundo du Sautoy, há espécies de cigarras que se utilizam de números primos para sua sobrevivência e evolução (4:27-5:37). Como, por exemplo, um ciclo de vida de 17 anos pode ajudar uma cigarra a sobreviver? Explique!
4. De acordo com o documentário, os primeiros a entenderem a importância dos números primos foram os gregos antigos. O documentário afirma ainda que Euclides mostrou que não é possível criar uma lista com todos os números primos (6:43-8:10). Como Euclides mostrou a infinitude dos números primos?
5. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) começou a contar quantos números primos haviam até 10, até 100, até 1000 e assim por diante (15:00-15:39). Com essa contagem, Gauss percebeu uma regularidade sobre probabilidade de encontrarmos números primos. Que regularidade foi essa? A partir de qual potência de 10 tal regularidade começa a ser observada? Usando o método apresentado por Gauss, determine a probabilidade de encontrarmos um número primo contando até 107.

6. Quando Srinivasa Ramanujan (1887-1920) estava internado, Hardy o visitou e conversaram a respeito do número do táxi ser 1729 e que este número era o menor número natural que poderia ser escrito como a soma de dois cubos de duas maneiras diferentes (41:21-41:45). Este número é primo? Em caso negativo, como ele poderia ser fatorado? Procure determinar as duas formas de obtermos o número 1729 como a soma de dois cubos. Sugestão: o site <https://www.wolframalpha.com/> oferece uma poderosa ferramenta educacional que pode ajudá-lo encontrar tal soma. Basta digitar x^3+y^3=1729 no campo de entrada.


7. Atualmente, a busca de novos números primos pelo homem se dá com o auxílio de computadores. O documentário mostra tal realidade quando apresenta parcialmente um primo com cerca de 7,8 milhões de dígitos como o maior número primo conhecido até então (47:42-48:08). Pesquise quantos dígitos tem o maior primo conhecido atualmente. Quando ele foi descoberto?

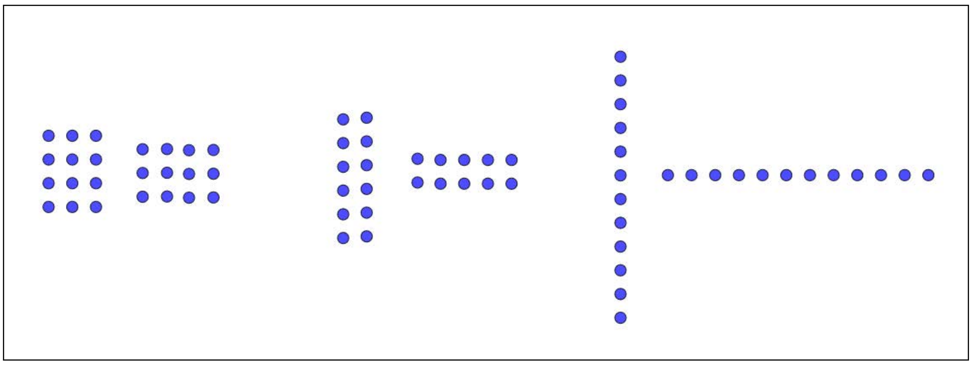
## Observações para o professor

- A palavra *primo*, segundo Schwartzman (1994), tem origem no Latim, *primus*, que significa o primeiro ou o mais antigo. Da raiz Indo-Européia, primo tem vários sentidos, inclusive de "algo excelente", "de primeira classe". Euclides usava o termo *πρῶτος ἀριθμός* (prótos arithmós) o qual, num sentido literal, quer dizer um *primeiro número*, conforme Lo Bello (2013).
- Um método antigo para a determinação de números primos é o chamado Crivo de Eratóstenes. Este método, criado por Eratóstenes três séculos antes de Cristo, funciona assim: digamos que queiramos descobrir quais números em uma lista de 1 a 100 são primos. A ideia é usar números primos, um por vez, como crivos para se descartar os números que não são primos. Iniciando-se com o primo 2, eliminam-se na tabela todos os seus múltiplos com exceção dele mesmo: 4, 6, 8, ..., 100. Repete-se o processo com o primo 3, isto é, eliminam-se todos os seus múltiplos, com exceção do próprio 3: 6, 9, 12, ..., 99. Prosseguindo com o método, como todos os números eliminados são divisíveis por 2, 3, 5, ..., restará no final apenas os números primos.

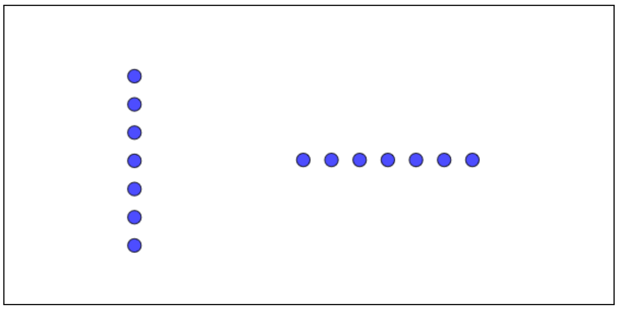
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~1~~ | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ | ~~10~~ |
| 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 | ~~20~~ |
| ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 | ~~30~~ |
| 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ | ~~40~~ |
| 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ | ~~50~~ |
| ~~51~~ | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | ~~55~~ | ~~56~~ | ~~57~~ | ~~58~~ | 59 | ~~60~~ |
| 61 | ~~62~~ | ~~63~~ | ~~64~~ | ~~65~~ | ~~66~~ | 67 | ~~68~~ | ~~69~~ | ~~70~~ |
| 71 | ~~72~~ | 73 | ~~74~~ | ~~75~~ | ~~76~~ | ~~77~~ | ~~78~~ | 79 | ~~80~~ |
| ~~81~~ | ~~82~~ | 83 | ~~84~~ | ~~85~~ | ~~86~~ | ~~87~~ | ~~88~~ | 89 | ~~90~~ |
| ~~91~~ | ~~92~~ | ~~93~~ | ~~94~~ | ~~95~~ | ~~96~~ | 97 | ~~98~~ | ~~99~~ | ~~100~~ |

Uma versão interativa do Crivo de Eratóstenes feita com o GeoGebra está disponível no seguinte endereço: <https://www.geogebra.org/m/QjhyM2kH>.

- Existe uma maneira simples e didática de se visualizar se um determinado número é primo ou não. Considere, por exemplo, o número 12. Podemos arranjar 12 bolinhas dispostas em 3 linhas, com cada linha com 4 bolinhas. Assim, $12 = 3 \times 4$ e, portanto, 12 não é um número primo, pois ele é divisível por 3. Também podemos escrever $12 = 4 \times 3$, $12 = 2 \times 6$, $12 = 6 \times 2$ e, naturalmente, $12 = 12 \times 1$ e $12 = 1 \times 12$.

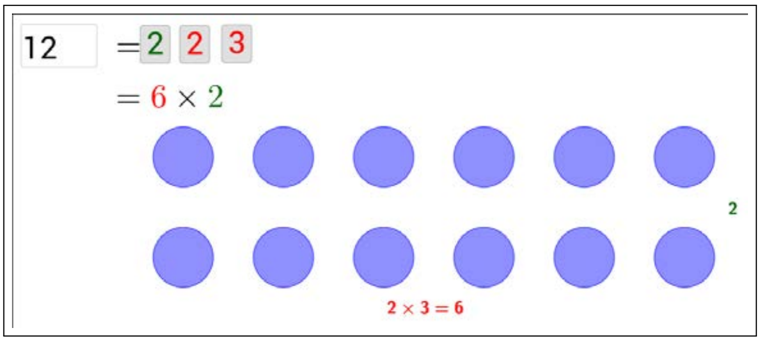


Considere agora o número 7. As únicas maneiras de se dispor 7 bolinhas em um arranjo retangular é com um única linha com 7 bolinhas ($7 = 1 \times 7$) ou 7 linhas com uma bolinha cada ($7 = 7 \times 1$).



Portanto, um número inteiro $p > 1$ é primo se, e somente se, a única maneira de se dispor $p$ bolinhas em um arranjo retangular é apenas com uma única linha com $p$ bolinhas ou $p$

linhas com uma bolinha cada. Você pode usar esta construção interativa do GeoGebra para ilustrar este princípio para seus alunos: <https://goo.gl/H3RUHD> (clique nos botões com os fatores primos para visualizar diferentes arranjos retangulares).



Construção no GeoGebra: <https://goo.gl/H3RUHD>

- A definição do documentário “Um número primo é um número que só divisível por si mesmo e por 1” pode favorecer à dúvida sobre se o 1 é ou não primo. Afinal, 1 é primo ou não? O consenso atual é considerar 1 como não sendo um número primo mas, segundo Caldwell e Xiong (2012), antes do século XX, houve contextos em que os matemáticos consideraram o 1 como o menor primo. Por exemplo, Godfrey Harold Hardy (1877-1947), em diversos textos seus, como em “A Course of Pure Mathematics”, considera o número 1 como primo (Caldwell e Xiong, 2012). Considerar que 1 não é primo permite que proposições sejam mais facilmente enunciadas. Considere, por exemplo, a Proposição 30 de “Os Elementos” que trata da unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos. Se considerarmos 1 como primo, essa unicidade se perde:

$$21 = 3 \times 7, \qquad 21 = 1 \times 3 \times 7, \qquad 21 = 1 \times 1 \times 3 \times 7.$$

  Cabe lembrar que, na Grécia Antiga, 1 não era nem mesmo considerado um número mas, sim, um gerador de números. Historicamente, ele começa a ser considerado um número por volta de 1500, tendo sua primeira definição formal como número em 1679 quando Joseph Moxon (1627-169) publica o primeiro dicionário de Matemática em Inglês. Para saber mais sobre a história do menor número primo, recomendamos Caldwell e Xiong (2012) e Caldwell, Reddick e Xiong (2012).

- Existe uma fórmula para se gerar primos? O matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) mostrou que não existe função algébrica racional (isto é, uma função definida pela divisão de duas funções polinomiais) que sempre forneça números primos. Em 1752, o matemático alemão Christian Goldbach (1690-1764) mostrou que nenhum polinômio não constante com coeficientes inteiros pode gerar só números primos (Weisstein, 2018). Existem, contudo, polinômios $p(n)$ com coeficientes inteiros que geram números primos para

$n = 1, \ldots, m$ (com $m \in \mathbb{N}$ um número escolhido previamente). O exemplo clássico vem do matemático alemão Leonhard Paul Euler (1707-1783),

$$p(n) = n^2 + n + 41,$$

que possui a seguinte característica: $p(n)$ é primo para $n = 1, \ldots, 39$ mas $p(40) = 1681 = 41 \times 41$ não é um número primo. Este polinômio é também um ótimo exemplo para mostrar aos alunos que verificar uma propriedade para alguns valores pode não ser suficiente para mostrar que a propriedade é válida sempre: um aluno desavisado pode verificar que $p(n)$ é primo para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e concluir erroneamente que $p(n)$ é primo para todo natural $n$. Outras expressões que geram primos para $n = 1, \ldots, m$ podem ser encontradas em Weinstein (2018). Em 1976, James P. Jones, Daihachiro Sato, Hideo Wada e Douglas Wiens encontram um polinômio de grau 25 em 26 variáveis cujos valores inteiros positivos são exatamente os números primos, quando se considera as variáveis independentes restritas aos inteiros não negativos:

$$\begin{aligned} P(a,b,\ldots,z) = \quad & (k+2)\big(1 - (wz+h+j-q)^2 \\ & - [(gk+2g+k+1)(h+j)+h-z]^2 \\ & - [2n+p+q+z-e]^2 \\ & - \left[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\right]^2 \\ & - \left[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2\right]^2 \\ & - \left[(a^2-1)y^2+1-x^2\right]^2 \\ & - \left[16r^2y^4\left(a^2-1\right)+1-u^2\right]^2 \\ & - \left[\left(\left(a+u^2\left(u^2-a\right)\right)^2-1\right)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2\right]^2 \\ & - [n+l+v-y]^2 - \left[\left(a^2-1\right)l^2+1-m^2\right]^2 \\ & - [ai+k+1-l-i]^2 \\ & - \left[p+l(a-n-1)+b\left(2an+2a-n^2-2n-2\right)-m\right]^2 \\ & - \left[q+y(a-p-1)+s\left(2ap+2a-p^2-2p-2\right)-x\right]^2 \\ & - \left[z+pl(a-p)+t\left(2ap-p^2-1\right)-pm\right]^2\big). \end{aligned}$$

Não obstante, segundo Moreira e Saldanha (2008):

> Ainda não se conhece nenhuma fórmula simples para gerar primos arbitrariamente grandes. [...] Existem fórmulas que geram números primos, mas que são tão complicadas que não ajudam muito nem a gerar números primos explicitamente nem a responder perguntas teóricas sobre a distribuição dos primos.

Moreira e Saldanha (2008)

Observe que o polinômio de Jones, Sato, Wada e Wiens se enquadra neste caso: afinal, como saber quais são os valores das 26 variáveis que tornam positivos os valores do polinômio descoberto?

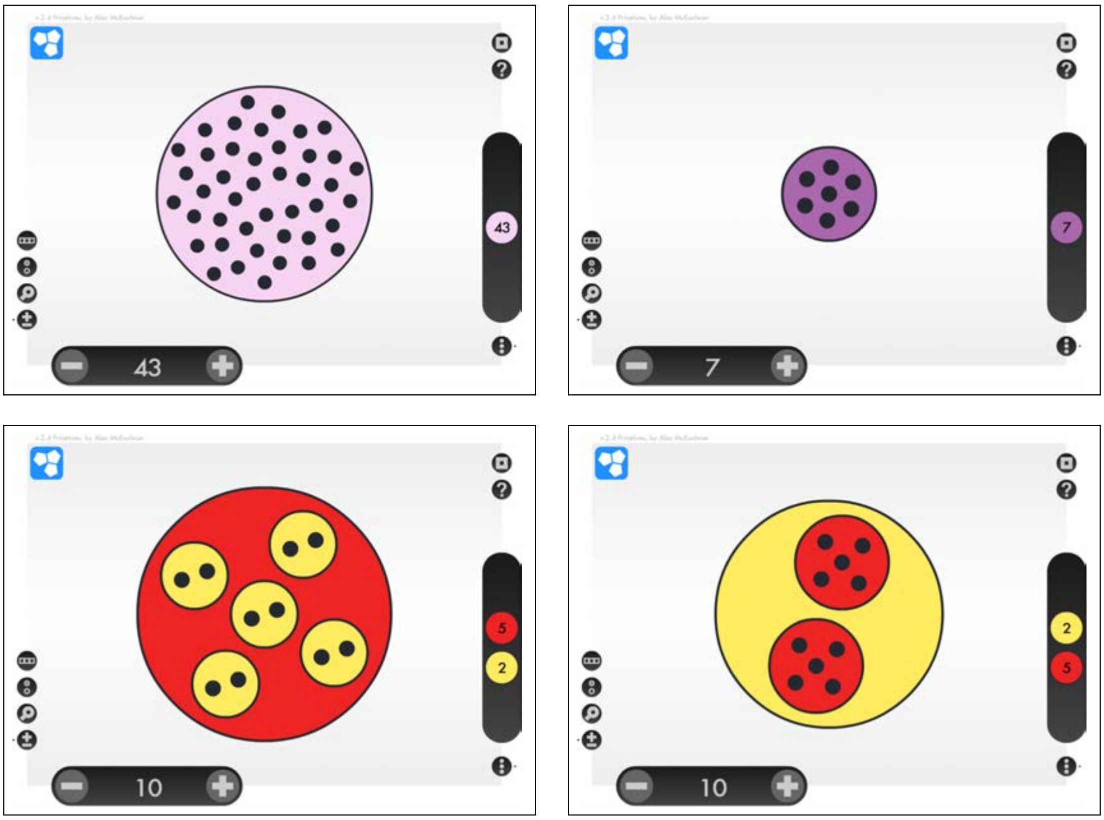
- O documentário trata da curiosa escolha da natureza pelo ciclo de vida de algumas espécies de cigarras, como por exemplo as do gênero *Magicicada*, que passam quase toda a extensão de suas longas vidas no subsolo, alimentando-se de fluidos de xilema das raízes das árvores florestais caducifólias no leste dos Estados Unidos. Na primavera de seu 13º ou 17º ano, ninfas de cigarras maduras emergem na primavera em qualquer localidade, em sincronia e em números tremendos. Após a fase de desenvolvimento prolongada, os adultos ficam ativos por apenas 4 a 6 semanas. Os machos agregam-se em centros de coro e atraem parceiros. Fêmeas acasaladas põem ovos nas hastes de plantas lenhosas. Dois meses após o surgimento original, o ciclo de vida está completo e as cigarras adultas desaparecem por mais 13 ou 17 anos. A curiosa escolha pode ter representado a sobrevivência da espécie já que seu predador (um fungo) também aparece de tempos em tempos. Assim sendo, com um ciclo de vida primo, a cigarra evita o predador por mais tempo. Há ainda um segundo motivo que pode justificar o ciclo de vida da Magicicada: segundo du Sautoy (2007), existem outras espécies de magicicadas que emergem a cada 13 anos. Deste modo, du Sautoy supõe que os ciclos de 13 e 17 anos servem para evitar a competição. Podemos observar que ambas têm um ciclo de vida que diminui a possibilidade de ambas as espécies estarem simultaneamente fora da terra, o que só ocorre a cada 221 anos ($221 = 17 \times 13$). Entretanto, se elas tivessem um ciclo de vida de, por exemplo, 16 e 12 anos elas disputariam espaço a cada M.M.C.(16, 12) = 48 anos.

Figura: *Magicicada sp.*

Fonte: Wikimedia Commons.

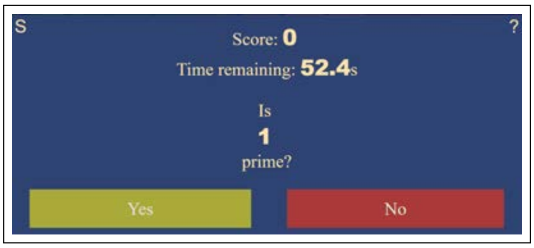
- Para a sala de aula, sugerimos alguns aplicativos que podem ser usados para explorar os números primos.

(a) O aplicativo Primitives (<https://goo.gl/XQWFLT>) permite visualizar interativamente números primos e decomposições de números compostos em fatores primos. O software inicia automaticamente com o número 1. Na barra inferior, os botões circulares "+" e "-" podem ser usados para aumentar ou diminuir em 1 o número analisado. Se preferir, você pode clicar no número exibido entre os botões "+" e "-" e, então, digitar diretamente um outro número. A barra vertical à direita mostrará a decomposição em fatores primos do número sendo analisado. Quando o número for composto, os agrupamentos da decomposição podem ser alterados: basta arrastar um fator primo para baixo ou para cima. Nos casos dos números primos, haverá apenas um único agrupamento.

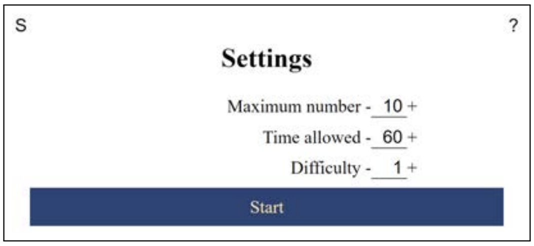



Para rodar o software Primitives, será necessário ter o *plugin* Adobe Flash instalado e habilitado em seu navegador desktop. Existe, contudo, uma versão HTML5 em desenvolvimento que roda inclusive em navegadores de *smartphones* e *tablets*: <https://goo.gl/wkKtqe>.

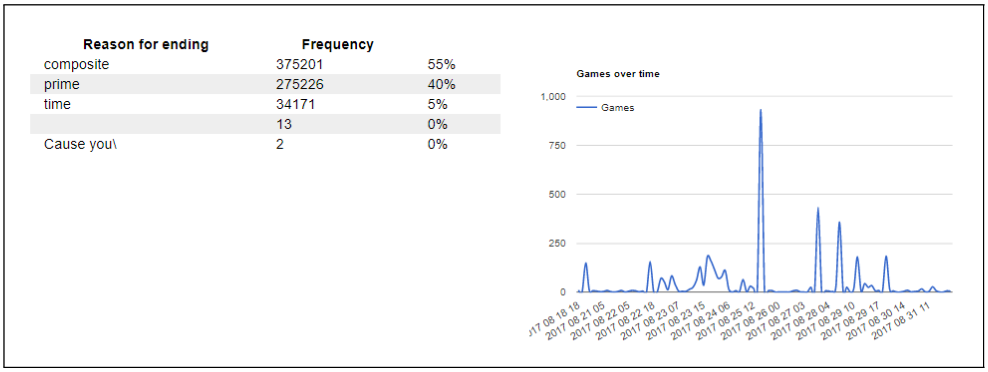
(b) O jogo "Is this prime?" (<https://goo.gl/ENYzdd>) testa a rapidez do jogador em responder se um determinado número é ou não primo. O modo padrão do jogo apresenta aleatoriamente números entre 1 e 100 ao longo de 1 minuto. A cada número exibido, o jogador deve classificá-lo e clicar em "Yes" (Sim em Inglês) se o número for primo e em "No" (Não em Inglês) caso contrário. Ao marcar uma resposta errada, o jogo é interrompido e aparece a pontuação (número de respostas corretas) do jogador. Neste jogo, o número 1 não é considerado primo.


É possível configurar o intervalo em que os números serão sorteados, o tempo do jogo e o nível de dificuldade. Para isto, basta clicar na letra “S” no canto superior esquerdo da tela e preencher os dados na janela que se abrirá. Este recurso é especialmente útil para adequar o uso jogo para uma determinada série escolar.

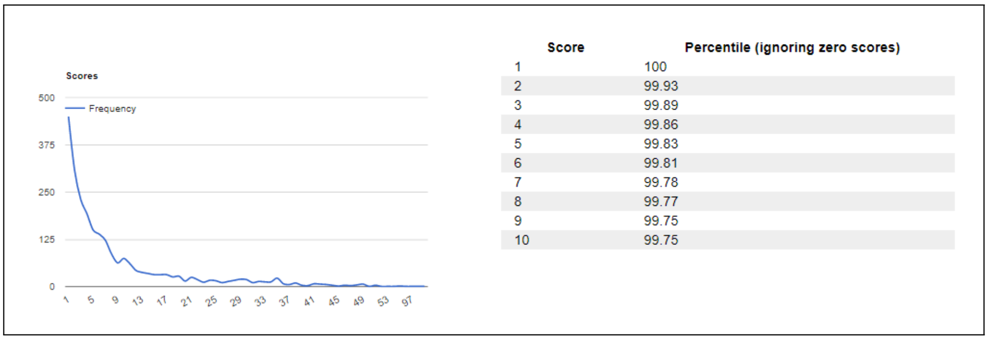



O professor que deseje explorar as estatísticas de todas as partidas recentemente jogadas pode acessá-las no link <https://goo.gl/CHtn7f>.



| Reason for ending | Frequency | |
|---|---|---|
| composite | 375201 | 55% |
| prime | 275226 | 40% |
| time | 34171 | 5% |
| | 13 | 0% |
| Cause you\ | 2 | 0% |






| Score | Percentile (ignoring zero scores) |
|---|---|
| 1 | 100 |
| 2 | 99.93 |
| 3 | 99.89 |
| 4 | 99.86 |
| 5 | 99.83 |
| 6 | 99.81 |
| 7 | 99.78 |
| 8 | 99.77 |
| 9 | 99.75 |
| 10 | 99.75 |

(c) Outra opção de jogo (disponível para navegadores de Internet, inclusive os de celular), muito atual, é o “Number Ninja Factor” (<https://goo.gl/pnTd7E>). Nele, números compostos devem ser fatiados pelo cursor do mouse, isto é, conforme os números vão surgindo na tela, o jogador deve fatiar com o cursor apenas os números compostos para pontuar.

Quando os números compostos são fatiados, uma decomposição aparecerá na tela. Por exemplo, o número 81 quando fatiado será substituído por 3 e 27, de modo que o 27 que é composto poderá ser fatiado novamente e ser substituído por 3 e 9. Da mesma forma, o 9 poderá ser fatiado novamente e tornar-se 3 e 3, até que já não restará número composto a ser fatiado novamente na decomposição do 81. O jogo termina ao fim de 60 segundos ou se o jogador tentar fatiar três vezes um número primo.


- Como saber se um determinado número $n$ é primo ou não e, no caso de $n$ não ser primo, como obter uma decomposição em fatores primos? O estudo destas questões é central em Aritmética e tem aplicações importantes em Criptografia. Existem vários algoritmos propostos para testar a primalidade de um número natural, incluindo testes probabilísticos. Os testes probabilísticos têm a seguinte característica: se um número $n$ não passar no teste, então $n$ com certeza será um número composto (ou seja, não será um número primo); se o número passar no teste, então existe uma certa probabilidade dele ser primo. Para o leitor interessado em testes de primalidade e algoritmos de fatoração, indicamos as referências Bressoud (1989), Rempe-Gillen e Waldecker (2014) e Wagstaff, Jr. (2013). Esta última referência tem um capítulo interessante sobre dispositivos mecânicos inventados para se fatorar números naturais, como a de Carissan apresentada na figura a seguir.

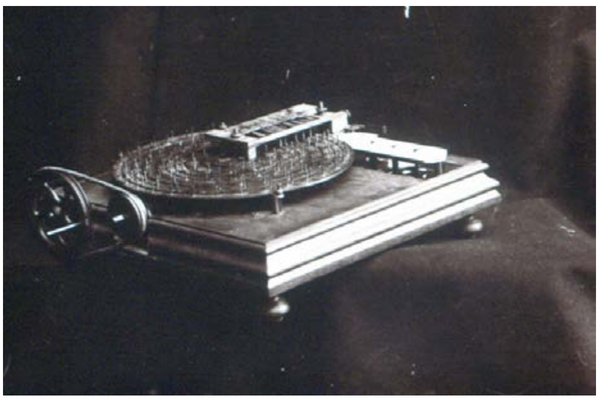


Figura: máquina de fatorar de Carissan.

Fonte: Hugh C. Williams.

- O documentário afirma que existem relações entre a função zeta de Riemann e os números primos, mas não dá detalhes (a função zeta de Riemann nem é mesma definida no documentário). Seguem, portanto, algumas informações adicionais que podem esclarecer o que é afirmado do vídeo. A função zeta de Riemann é a função complexa definida como uma extensão da função dada por:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots, \text{com } s \in \mathbb{C} \text{ e } \mathrm{Re}(z) > 1.$$

A "paisagem tridimensional" exibida várias vezes no documentário nada mais é do que o gráfico do módulo da função zeta de Riemann.

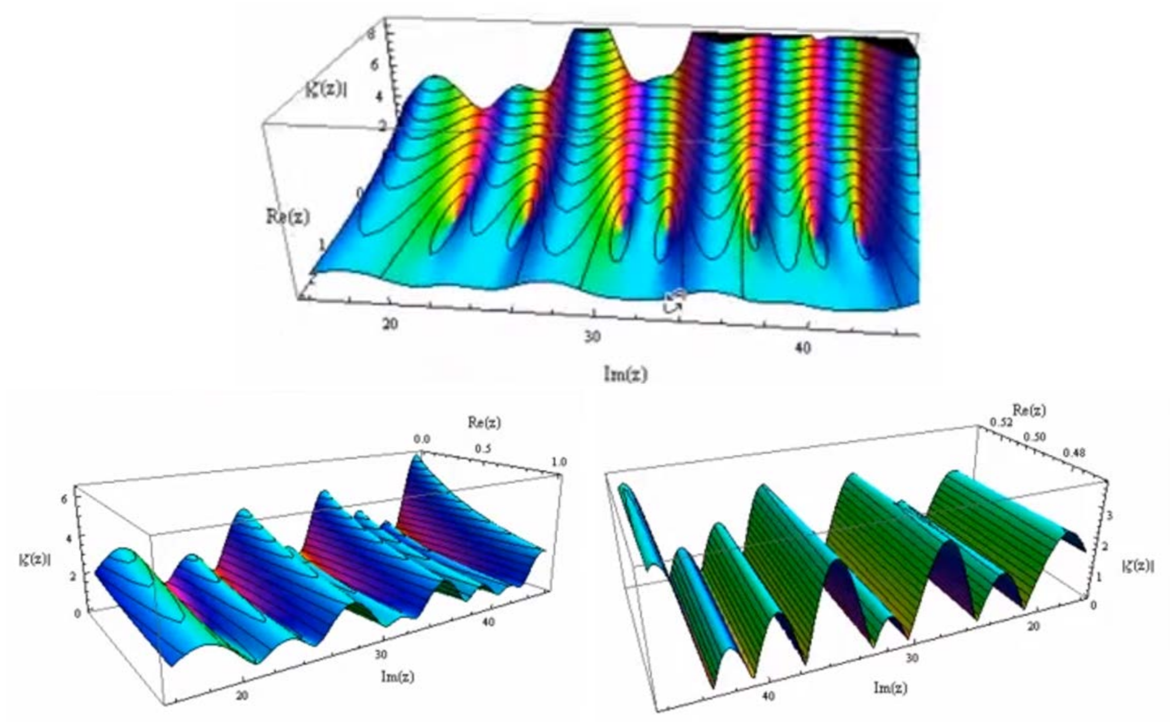



Figura: gráficos do módulo da função zeta de Riemann.

Fonte: Mathematica <https://goo.gl/N1TEJF>.

A conexão entre a função zeta de Riemann e os números primos foi descoberta por Euler, que provou que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \cdots.$$

Riemann conjecturou que os zeros $s$ de sua função zeta são os números inteiros negativos pares ou são tais que $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Essa afirmação é hoje conhecida como a "Hipótese de Riemann". Dada a sua importância, o Instituto Clay de Matemática (<https://goo.gl/ZFS2o7>) inclui a demonstração (ou refutação) da Hipótese de Riemann como um dos Problemas do Milênio (<https://goo.gl/V9rLQg>) e quem resolver este problema ganhará 1 milhão de dólares! Para o leitor interessado em se aprofundar nas conexões entre a função zeta de

Riemann e os números primos, recomendamos o artigo de Voloch (1987).

Leonard Riemann
(1826-1866)

Leonhard Euler
(1707-1783)

Figura: dois personagens na história dos números primos.

Fonte: Wikimedia Commons.

- Existem duas versões deste documentário sobre a Música dos Números Primos. Uma, mais longa, com dublagem em Português pela TV Escola. Outra, mais curta, em Inglês e com legendas em Português. A versão dublada apresenta vários problemas de tradução: (a) em certa parte, diz-se que 2 é "tanto um número par como um número ímpar"; (b) em outro momento, diz-se que a infinitude dos números primos foi estabelecida por Euclides em "300 d.C."; (c)˜em vários momentos, usa-se "números primários", um termo correto, mas pouco comum para fazer referências aos números primos. Por estes motivos, optamos por usar a versão mais curta do documentário neste roteiro.
- O documentário trata da infinitude dos números primos e explica a demonstração de Euclides (06:45-08:10). Entretanto, outros matemáticos após Euclides apresentaram ideias diferentes para realizar esta demonstração, usando topologia, argumentos de contagem, aritmética, a irracionalidade de $\pi$ e sistemas dinâmicos. Para saber mais, sugerimos a referência Granville (2017).
- Um algoritmo muito utilizado para encriptar mensagens (incluindo transações bancárias e de cartões de crédito) é o RSA, cujo princípio de funcionamento está baseado na dificuldade de se decompor em fatores primos números muito grandes. A sigla representa as iniciais dos sobrenomes dos cientistas que o criaram: **R**on Rivest (1947-), Adi **S**hamir (1952-) e Leonard **A**dleman (1945-). Para o leitor interessado nos detalhes matemáticos e o papel dos números primos no algoritmo, recomendamos o livro Coutinho (2010) da OBMEP.
- Stewart (2017) relata que Riemann usou a Teoria das Séries de Fourier para a obtenção de sua fórmula de contagem exata de números primos. As Séries de Fourier são tradicionalmente usadas no estudo de sinais e, em particular, no estudo de sons e música. Provavelmente é esta

conexão, segundo Stewart (2017), que levou du Sautoy a associar os números primos com música em seu livro A Música dos Números Primos (2007). Nesta obra, outras analogias entre Números e Música são apresentadas.

(a) Segundo du Sautoy, Pitágoras foi pioneiro ao perceber que, em um vaso com água, ao se bater com um martelo, uma nota soava, mas se metade da água fosse retirada, a nota produzida era uma oitava acima da primeira. Continuando a retirar $1/3, 1/4, \ldots$ ele percebeu que as notas "soavam em harmonia com a primeira". Qualquer outra quantidade que fosse retirada era dissonante em relação à primeira. Foi a partir daí, também, que alguns matemáticos começaram a se interessar pelas somas infinitas.

(b) du Sautoy também especula que a habilidade musical de Marin Mersenne (1588-1648) foi importante em seus estudos matemáticos. Mersenne observara que para oitavar uma nota à cima, a frequência da nota duplicava, usando assim potências de 2. Talvez isso possa tê-lo ajudado a considerar números primos da forma $2^n - 1$, os assim denominados *Números Primos de Mersenne*. Nas últimas duas décadas, os maiores números primos conhecidos foram justamente primos de Mersenne. Até janeiro de 2018, o maior número primo conhecido é $2^{77\,232\,917} - 1$, o chamado $M_{77232917}$, com mais de 23 249 425 dígitos. Ele foi descoberto em dezembro de 2017 por Jonathan Peace, um dos milhares de voluntários da GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), uma organização fundada em 1996 com a finalidade de descobrir, em escala mundial, os maiores números primos da atualidade. A organização conta atualmente com milhares de voluntários que já baixaram o aplicativo (<http://www.mersenne.org/download/>) e contribuem com a busca pelo próximo maior número primo conhecido. Saiba mais em: <https://goo.gl/3tn8vv>.

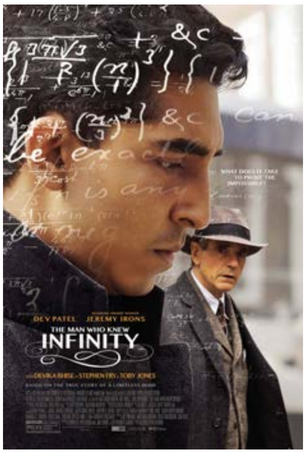
- Os números primos aparecem em várias referências em Arte e Literatura. Aqui estão algumas delas.

(a) o romance *Contato* de Carl Sagan onde cientistas apenas podem identificar vida inteligente fora da terra ao receberem pulsos que formam uma sequência de números primos, já que acreditavam não existir qualquer fenômeno natural que fosse capaz de gerar essa sequência tão especial de números;

(b) o filme *Cubo* onde um grupo de pessoas encontra-se preso em uma estrutura cúbica e a única chance de saírem com vida das armadilhas ali colocadas é usando conhecimentos sobre os números primos.

(c) o compositor e professor Olivier Messiaen (1908-1992) também se inspirava nos números primos ao estruturar suas partituras para piano em semicolcheias "organizadas em números primos sucessivos, como por exemplo, 41, 43, 47 e 53" como afirma Aline Alves no artigo “Sobre tempo e dinâmica na interpretação de Neumes Rythmiques de Olivier Messiaen”, disponível em <https://goo.gl/XiZf3g>.

- Diversos matemáticos famosos são citados no documentário. Entre eles, está Srinivasa Ramanujan (1887-1920), o matemático indiano. Recentemente, Hollywood produziu um filme baseado na biografia de Ramanujan: ‘O Homem Que Viu O infinito”.




O Homem Que Viu o Infinito
(2015)

Srinivasa Ramanujan
(1887-1920)

Figura: filme inspirado na vida de Ramanujan e foto real.

Fonte: IMDb e Wikimedia Commons.

- Uma curiosidade sobre o número 666 relacionada com números primos: para muitos, 666 é considerado o número da besta. Matemáticos que estudaram os números primos perceberam que este número pode ser gerado pela soma dos quadrados dos sete primeiros primos, isto é,

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2.$$

- O documentário faz referência a diferentes formas que um matemático ataca um problema falando de métodos lógicos de demonstração. Em seu livro, du Sautoy (2007) faz um resgate histórico e lúdico desses métodos de prova, como quando relata a prova computadorizada da prova das quatro cores no mapa, que foi proposta por Kenneth Appel (1932-2013) e Wolfgang Haken (1928-) e a discussão sobre o que “abarcava o verdadeiro espírito de uma ‘prova”’.

## Referências relacionadas

- Bressoud, David M. *Factorization and Primality Testing.* Springer-Verlag, 1989.
- Caldwell, Chris K; Xiong, Yeng. *What is The Smallest Prime?* Journal of Integer Sequences, v. 15, article 12.9.7 2012. Disponível em: <https://goo.gl/UD9d4r>. Acesso em: 19 de agosto de 2017.

- Caldwell, Chris K.; Reddick, Angela; Xiong, Yeng. *The History of The Primality of One: A Selection of Sources.* Journal of Integer Sequences, v. 15, article 12.9.8, 2012. Disponível em: <https://goo.gl/Q9pHv9>. Acesso em: 17 de janeiro de 2018.
- Clavier, Christophe; Feix, Benoit; Thierry, Loïc; Paillier, *Pascal. Generating Provable Primes Efficiently On Embedded Devices.* Disponível em: <https://goo.gl/dElE0V>. Acesso em: 19 de agosto de 2017.
- Costa, Celso; Figueiredo, Luiz Manoel. *Introdução À Criptografia.* Volume 1. Fundação CECIERJ, 2010. Disponível em: <https://goo.gl/kkNVuZ>. Acesso em: 13 de maio de 2018.
- Coutinho, Severino. *Criptografia.* IMPA, 2015. Disponível em <https://goo.gl/SEzZcB>. Acesso em: 29 de janeiro de 2018.
- du Sautoy, Marcus. *A Música dos Números Primos: A História de Um problema Não Resolvido na Matemática.* Editora Zahar, 2007.
- GIMPS Project Discovers. *Largest Known Prime Number.* Disponível em: <http://www.mersenne.org>. Último Acesso em: 12 de janeiro de 2018.
- Granville, Andrew. *A Panoply of Proofs that There Are Infinitely Many Primes.* Newsletter of London Mathematical Society, Issue 472, p. 23-27, September, 2017. Disponível em: <https://goo.gl/GoKqBc>. Acesso em 18 de março de 2018.
- Lo Bello, Anthony. *Origins of Mathematical Words : A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek and Arabic Roots.* The Johns Hopkins University Press, 2013.
- Moreira, Carlos Gustavo T. A.; Saldanha, Nicolau C. *Primos de Mersenne (E Outros Primos Muito Grandes).* Terceira Edição. Publicações Matemáticas, IMPA, 2008. Disponível em: <https://goo.gl/oXBj9k>. Acesso em: 15 de janeiro de 2018.
- Rempe-Gillen, Lasse; Waldecker, Rebecca. *Primality Testing for Beginners.* Student Mathematical Library, 70. American Mathematical Society, 2014.
- Schwartzman, Steven. *The Word of Mathematics: An Etymological Dictionary of Mathematical terms Used in English.* The Mathematical Association of America, 1994.
- Stewart, Ian. *Significant Figures: The Lives and Work of Great Mathematicians.* Profile Books Ltd., 2017.
- Voloch, José Felipe. *A Distribuição dos Números Primos.* Revista Matemática Universitária, N.6, IMPA, 1987. Disponível em <https://goo.gl/bDo31e>. Acesso em: 29 de janeiro de 2018.
- Wagstaff, Jr., Samuel S. *The Joy of Factoring.* Student Mathematical Library, 68. American Mathematical Society, 2013.
- Weisstein, Eric W. *Prime-Generating Polynomial.* From MathWorld - A Wolfram Web Re-

source. Disponível em: <https://goo.gl/vt4Euo>, 2018. Acesso em: 15 de janeiro de 2018.

## Referências sobre o uso de vídeos em sala de aula

- Ferrés, Johan. *Vídeo e Educação*. Segunda Edição. Artes Médicas, 1996.
- Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. Editora Contexto, 2003.

## Créditos das imagens de sensibilização

Flickr

## Concepção

Fabiana Silva de Miranda e Luis Edmundo Carlos Pinto Dantas

## Revisão

Hamanda de Aguiar Pereira, Karla Waack Nogueira, Keyla Lins Bruck Thedin, Rodrigo Pessanha da Cunha

## Supervisão

Humberto José Bortolossi

---

Dúvidas? Sugestões? Nós damos suporte! Contacte-nos pelo e-mail: <amec7a@gmail.com>.

# 5 Considerações finais

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho colaborativo, com o propósito de auxiliar nas concepções, nos testes e nos aprimoramentos dos roteiros, promovemos diversas ações de vídeos relacionados com Matemática e Estatística em vários eventos: Semana da Matemática da UFRR (2015), Programa Dá Licença da UFF (2016), Semana da Matemática da UFF (2016), Semana Pedagógica no Colégio Estadual Manuel de Abreu (2016, 2018), Festival da Matemática (2017), Simpósio ANPMat da Região Norte (2017), Semana da Ciência e Tecnologia no IMPA (2017), Semana da Matemática da UFSC em Blumenau (2017), Festival da Matemática do Rio Grande do Sul (2017), Semana Pedagógica no Instituto GayLussac (2017), Semana da Matemática da UFMS (2018), 70ª Reunião da SBPC (2018), Semana Pedagógica no Instituto de Educação Professor Ismael Coutinho (2018).

Figura 5.1: exibições de vídeos.

Entre estes eventos, destacamos o Festival da Matemática, uma iniciativa do IMPA e da SBM, como parte do "Biênio da Matemática 2017-2018 Gomes de Sousa", realizado entre 27 e 30 de abril de 2017 na Escola SESC do Rio de Janeiro. Durante os quatro dias de evento foram realizadas sessões *non-stop* de 30 em 30 minutos. Estima-se que mais de 1600 pessoas (entre alunos, professores e o público em geral) tenham participado. Após a exibição de cada vídeo, voluntários respondiam a algumas questões gerais do roteiro. Um brinde de participação (um chocolate) era dado à pessoa voluntária. Duas sessões foram especiais com as participações do matemático português Rogério Martins (do Programa “Isto é Matemática”) e do matemático francês Étienne Ghys.

Os vídeos também foram exibidos na ação de extensão “Cineclube de Matemática e Estatística” do Projeto “Dá Licença” da Universidade Federal Fluminense. Nestes eventos, filmes mais longos foram apresentados e cada sessão contou com a participação de um convidado especial que, ao final da exibição, fazia comentários e respondia às perguntas da plateia.


Figura 5.2: Exibições de vídeos (continuação).

Nossa proposta de uso didático de vídeos também foi usada em atividades de formação continuada de professores (Simpósio ANPMat da Região Norte e Instituto GayLussac) e, mais recentemente, na formação inicial de professores no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) para o núcleo da Matemática da Universidade Federal Fluminense.

O vídeo “A Música dos Números Primos” foi exibido nas aulas de Matemática na Escola Municipal Menezes Cortes, no Rio de Janeiro, para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Foram realizadas 3 sessões com cerca de 25 alunos em cada. Observamos que essas atividades foram pontuadas por participação. Por conta do tempo disponível, a estratégia adotada foi a seguinte: exibir o vídeo e, ao término, distribuir filipetas com três questões específicas do roteiro, de forma que cada dupla (em alguns casos grupos) de alunos recebia uma pergunta, lia para o grupo e respondia (grupos diferentes tinham questões diferentes). A distribuição das questões entre os grupos foi aleatória. Fizemos modificações no enunciado da Questão Específica 3 para adequá-la para os alunos do sexto ano.

Figura 5.3: exibição do vídeo “A Música dos Números Primos”.

O filme pareceu muito interessante a alguns e para outros alunos nem tanto. Contudo todos se dedicaram para responder da melhor forma às questões que lhes foram propostas. Em uma das turmas, os alunos apresentaram muita dificuldade em responder e, por isso, a parte inicial do filme precisou ser repetida quatro vezes, enquanto nas outras duas turmas uma única exibição foi suficiente. Em uma das turma, tivemos que interromper a exibição antes do final do documentário visto que os alunos não estavam prestando mais atenção. Um dos motivos que contribuíram para isso foi o fato de estarmos em uma sala com muita luminosidade externa o que deixava o ambiente inapropriado. Por todos esses motivos, decidimos excluir o Ensino Fundamental II no Nível Escolar Sugerido no roteiro deste vídeo.

A seguir, indicamos as questões específicas que foram trabalhadas, algumas respostas dos alunos.

1. Em um cenário com crianças brincando no *playground* com blocos gigantes semelhantes

ao LEGO, o professor Marcus du Sautoy (1965-) afirma que os números primos são como blocos que formam a Matemática (3:00-3:38). Neste trecho, as crianças dão uma definição para os números primos. Escreva-a e diga se, de acordo com esta definição, o número 1 é primo ou não.

"*O número 1 não é um número primo.*", "*Os números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, etc.*", "*Sim, ele é primo porque um número é primo quando é divisível por ele mesmo e por 1, então quando dividimos ele conseguimos dividi-lo por ele mesmo e também conseguimos dividi-lo por 1.*".

Provavelmente alguns alunos disseram que 1 (um) não é primo, pois lembram-se de uma aula anterior onde foi estabelecido que 1 não é um número primo e nem um número composto. Na discussão da questão, apresentamos na lousa uma definição que já tinha sido trabalhada em sala de aula "Um número é primo quando possui exatamente dois divisores". Neste momento, os alunos ficaram confusos, pois o 1 só tem um divisor e pensaram em alterar a resposta. Explicamos então que as duas definições são aceitas pelos matemáticos em situações e propostas diferentes, mas que o importante era entender o que cada uma das definições dizia.

2. Segundo o documentário, os matemáticos são grandes fãs dos números primos, alguns deles dizem quais são os seus números primos favoritos (3:55-4:15). Qual seu número primo favorito? Por quê? Qual é o único número primo par?

   "*O nosso número primo favorito é o 7 e o 17. O único número primo par é 2.*", "*Meu número primo favorito é 7.*", "*Meu número primo favorito é 17 e o único primo par é o número 2.*".

   A pergunta do número primo favorito gerou grande empolgação fazendo com que todos os alunos quisessem dar sua resposta, mesmo aqueles que não faziam parte do grupo que estava de posse dessa questão em sua filipeta. Ao serem perguntados sobre o motivo da escolha dos números 7 e 17, um aluno do grupo respondeu que 17 era o dia do seu aniversário e, outro, escolheu 7 porque o seu time de futebol foi campeão da Copa Brasil em 2007. Em geral, os alunos que se manifestaram deram como respostas os primos apresentados no documentário. Uma aluna disse que o seu número primo favorito era o 83 e que ela tinha aprendido esse número primo ao assistir ao vídeo. Quanto ao único número primo par, os grupos todos responderam "O primo par é o 2!".

3. Segundo du Sautoy, há espécies de cigarras que se utilizam de números primos para sua sobrevivência e evolução (4:27-5:37). O ciclo de 17 anos foi útil para a sobrevivência das cigarras. O número 17 é primo ou composto? Qual é o menor múltiplo comum entre 17 e 13? Imaginando que o ciclo de vida de um predador é de 13 anos, como o ciclo de 17 anos foi útil para a sobrevivência das cigarras?

*“O número 17 é um número primo.”*, *“O menor múltiplo comum é 1, pois 17 e 13 são primos.”*, *“As cigarras descobriram que se quisessem um ciclo com 1 número primo desviariam do ciclo do seu predador.”*, *“O M.M.C. entre 17 e 13 é 221.”*, *“Entre 221 anos as cigarras não iriam encontrar o seu predador.”*.

Todos os grupos responderam que 17 é um número primo. Quanto ao menor múltiplo comum, alguns alunos se confundiram e calcularam o maior divisor comum, outros perguntaram o que deveriam fazer e foram lembrados de que o menor múltiplo comum pode ser encontrado a partir dos múltiplos ou da decomposição simultânea. A estratégia de múltiplos foi utilizada por uma das duplas para explicar porque o ciclo de 17 anos foi útil para as cigarras. “[Ele] falou no filme que a cigarra podia fugir do predador, olha aqui ela apareceu (o aluno aponta para o primeiro múltiplo, para o segundo, . . . ), aqui também, aqui também e só aqui (aponta para 221) ela apareceu também. Se o predador aparece a cada 13 anos eles se encontram só em 221.”.

O vídeo “Quão Longo É Um Pedaço de Barbante” foi exibido no Cineclube de Matemática e Estatística pelo Programa Dá Licença da Universidade Federal Fluminense em 2017. Já na entrada do auditório, cada espectador tinha seu “cúbito” (a distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio) medido. O expectador tinha também que estimar o comprimento de um pedaço de barbante que estava sobre uma mesa. Todos esses dados foram registrados em *software* estatístico. Após a exibição, os dados coletados foram apresentados para a plateia na forma de diagramas. A pessoa com o “cúbito” mais próximo do cúbito egípcio ganharia um prêmio, como também aquele cuja estimativa estivesse mais próxima daquela obtida por uma régua para o comprimento do barbante que estava sobre a mesa (Figura 5.4). A sessão contou com um convidado especial, o professor Rubens Amaral do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, que fez comentários e respondeu às dúvidas dos presentes. Pelo formato do evento, foi criado um arquivo PowerPoint para agilizar a dinâmica com as perguntas gerais e algumas imagens retiradas da seção “Observações para o professor” do roteiro do vídeo: <https://goo.gl/XNE4Ed>.

Como trabalho futuro, pretendemos organizar um *blog* para melhor divulgar os roteiros dos vídeos, bem como criar um canal de comunicação com o professor de Matemática e outros profissionais interessados no uso de vídeos como instrumento de ensino e aprendizagem.

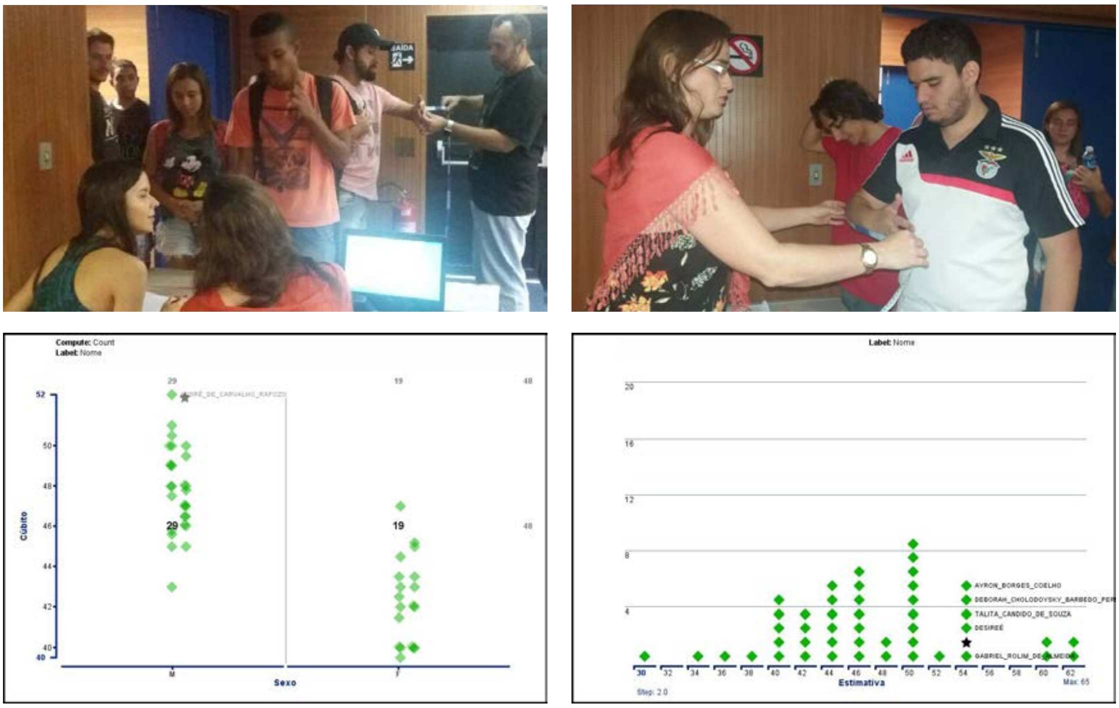



Figura 5.4: coleta dos “cúbitos” dos expectadores e diagramas estatísticos dos dados registrados.

Figura 5.5: o professor Rubens Amaral como convidado especial do evento.

# *Referências Bibliográficas*

Bulman, Jeannie Hill. *Children's Reading of Film and Visual Literacy in The Primary Curriculum: A Progression Framework Model*. This Palgrave Macmillan, 2017

Chabrán, H. Rafael; Kozek, Mark. *Mathematics in Literature and Cinema: An Interdisciplinary Course*. PRIMUS, 2015.

Doxiadis, Apostolos; Mazur, Barry. *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*. Princeton University Press, 2012.

Ferrés, Joan. *Vídeo e Educação*. Editora Artes Médicas, 1996.

Gottschall, Jonathan. *The Storytelling Animal: How Stories Make Us Human*. New York: Harcourt Publishing Company, 2013.

Harari, Yuval Noah. *Sapiens: Uma Breve História da Humanidade*. Porto Alegre: L&PM, 2015.

Haven. K. *Super Simple Storvlelling: A Can-Do Guide for Every Classroom, Every Day*. Englewood, CO: Teacher Ideas Press, 2000.

Machado, Benedito Fialho; Mendes, Iran Abreu. *Vídeos Didáticos de História da Matemática: Produção e Uso na Educação Básica*. História da Matemática para Professores, Sociedade Brasileira da História da Matemática, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

Machado, Nilson José. *A Narrativa em Matemática*. Palestra na VIII Semana da Matemática / I Bienal de Matemática da UFF, Universidade Federal Fluminense, 2016.

McSill, James. *Cinco Lições de Storytelling: Fatos, Ficção e Fantasia*. São Paulo: DVS Editora, 2013.

Moran, José Manuel. *O Vídeo na Sala de Aula*. Comunicação & Educação, v. 2, p. 27-35, 1995.

Muzás, José Maria Sorando. *Aventuras Matemáticas em El Cine*. Editorial Guadalmazán, 2015.

Napolitano, Marcos. *Como Usar O Cinema na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2013.

Napolitano, Marcos. *Como Usar A Televisão na Sala de Aula*. São Paulo: Editora Contexto, 2015.

Pellicer, Pablo Beltrán. *Series y Largometrajes como Recurso Didáctico em Matemáticas en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica, Organización Escolar y Didácticas Especiales, Facultad de Educación, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, 2015.

Polster, Burkaro; Ross, Marty. *Math Goes To The Movies*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2012.

Reiser, Elana. *Teaching Mathematics using Popular Culture: Strategies for Common Core Instruction from Film and Television*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2015.

Russell, Bertrand. The Functions of A Teacher. Em: Egner, Robert E.; Denonn, Lester E.. *The Basic Writings of Bertrand Russell*. Routledge Classics, 2009.

Santos, Rosiane de Jesus. *Uma Taxonomia para O Uso de Vídeos Didáticos para o Ensino da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Universidade de Juiz de Fora, 2015.

Sklar, Jessica K.; Sklar, Elizabeth S. *Mathematics in Popular Culture: Essays On Appearences in Film, Fiction, Games, Television and Other Media*. McFarland & Company, Inc., Publishers, 2012.

Xavier, Adilson. *Storytelling: Histórias Que Deixam Marcas*. Rio de Janeiro: Best*Seller*, 2015.

Zak, Paul J. *Confiança, Moralidade e Ocitocina. TED Global 2011*. Disponível em: <https://goo.gl/tFhoqb>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *A Molécula da Moralidade*. Elsevier, 2012.

Zak, Paul J. *Empathy, Neurochemistry, and The Dramatic Arc*. Future of StoryTelling, 2013. Disponível em: <https://vimeo.com/61266150>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *How Stories Change The Brain*. 17 dezembro de 2013. Disponível em: <https://goo.gl/DgBnnB>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *Why Your Brain Loves Good Storytelling*. HBR 28 de outubro de 2014. Disponível em: <https://goo.gl/BVyRng>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zak, Paul J. *Why Inspiring Stories Make Us React: The Neuroscience of Narrative*. Cerebrum Jan-Feb; 2015. Disponível em: <https://goo.gl/LPFn7P>. Acesso em: 29 de agosto de 2018.

Zacks, J. M.; Tversky, B.; Iyer, G. 2001. *Perceiving, Remembering, and Communicating Structure in Events*. Journal of Experimental Psychology: General, v. 130, p. 29-58, 2001.

Zazkis, Rina; Liljedahl, Peter. *Teaching Mathematics as Storytelling*. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers, 2009.