Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática e Estatística - IME
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Decomposição dos N primeiros naturais, N par, em pares cuja soma é um quadrado perfeito

Ivana Garrido Moreira de Souza

Salvador - Bahia
Maio de 2019

Decomposição dos N primeiros naturais, N par, em pares cuja soma é um quadrado perfeito

Ivana Garrido Moreira de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey.

Salvador - Bahia

Maio de 2019

Decomposição de números inteiros como soma de quadrados

Ivana Garrido Moreira de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 24 de maio de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Joseph Nee Anyah Yartey (Orientador)
UFBA

Profa. Dra. Cláudia Ribeiro Santana
(UESC)

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi
(UFBA)

À minha família por ser o meu suporte e por ter me ensinado a lutar e a superar os obstáculos da vida sempre respeitando o próximo, e em especial a minha mãe Darci pelo apoio constante e amor incondicional e ao meu filho Pedro Henrique que a cada dia me motiva a ser uma pessoa melhor.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que me concedeu o dom da vida e que me guia em todos os momentos, sendo minha fonte de força ao longo dessa jornada.

A minha mãe que sempre foi meu exemplo de fé e determinação e que sempre me apoiou me encorajando a seguir em frente. Ao meu filho o pequeno Pedro Henrique que nasceu durante o trajeto do curso e que me inspirou a prosseguir, mesmo quando o tempo era curto e parecia não ser capaz de da conta. Pra ele todo o meu amor incondicional.

Aos professores Carlos Bahiano, Simone Moraes e Juan Suarez, os quais tive o prazer de conhecer e que contribuíram para me tornar uma profissional melhor, compartilhando os seus saberes matemáticos.

Aos meus colegas de turma pela boa convivência e por muitas vezes serem o alicerce para continuar no curso.

A todos os professores e colaboradores do PGMAT/PROFMAT/UFBA que contribuem para o bom desenvolvimento do programa de mestrado. A equipe do PROFMAT que contribui para o prosseguimento na formação de milhares de professores de matemática pelo Brasil, facilitando assim a qualificação profissional e como consequência uma melhoria do processo de ensino da matemática.

Aos meus amigos e familiares que sempre torceram por mim. E de forma especial, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Joseph Yartey por ter aceitado me orientar, por ter compreendido a minha ausência por conta dos problemas pessoais que tive durante o tempo que deveria esta finalizando a pesquisa e escrita, pelas sugestões que foram dadas para enriquecer esse trabalho. Pela boa convivência ao longo dos meses que estivemos juntos e por sua simpatia. Muito obrigado professor.

"Acreditamos que a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda. Se a nossa opção é progressiva, se estamos a favor da vida e não da morte, da equidade e não da injustiça, do direito e não do arbítrio, da convivência com o diferente e não de sua negação, não temos outro caminho se não viver a nossa opção. Encarná-la, diminuindo, assim, a distância entre o que dizemos e o que fazemos. "

Paulo Freire

Resumo

O presente trabalho é apresentado em três capítulos e uma introdução, onde na introdução faremos uma breve apresentação do surgimento do problema discutido ao longo do trabalho bem como seus objetivos e etapas seguidas.

Na Introdução apresentaremos um pouco sobre a história dos quadrados do arco-íris de Picciotto-Hamilton, no primeiro capitulo definiremos números naturais, números quadrados perfeitos, indução forte e partição regular que serão necessários para o desenvolvimento desse trabalho.

No capitulo dois abordaremos a partição de um conjunto de n elementos, n par, em $\frac{n}{2}$ pares de modo que a soma dos números em cada par seja um número quadrado perfeito, mostraremos os sete valores de n para os quais a partição é impossível e discutiremos os teoremas que garantem que para todo $n \geq 24$, existe a partição. Mostraremos também que para $n = 8$; $n = 14$ e $n = 16$ podemos encontrar uma partição, nestes casos apresentaremos uma partição possível.

No capitulo três apresentaremos algumas atividades propostas para serem desenvolvidas com estudantes do ensino fundamental e médio, envolvendo a teoria da partição de um conjunto com um número par de elementos, em pares cuja soma é um quadrado perfeito, abordado nesse trabalho, e faremos a discussão de cada atividade.

Palavras chave: Partição de um conjunto, soma de pares, quadrado perfeito.

Abstract

The present work is presented in three chapters and an introduction, where in the introduction we will make a brief presentation of the emergence of the problem discussed throughout the work as well as its objectives and steps followed.

In the Introduction we will present a little about the history of the Picciotto-Hamilton rainbow squares, in the first chapter we will define natural numbers, perfect square numbers, strong induction and regular partition that will be necessary for the development of this work.

In Chapter two, we will cover the partitioning of a set of n elements, n even, in $\frac{n}{2}$ pairs so that the sum of the numbers in each pair is a perfect square number, we will present the seven values of n for which the partition is impossible and we will discuss the theorems that guarantee that for every $n \geq 24$, there is a partition. We also show that for $n = 8$, $n = 14$ and $n = 16$ also there is a partition, in these cases we will present a possible partition.

In chapter three, we will present some activities proposed to be developed with elementary and middle school students, involving the theory of partitioning a set with a pair of elements, in pairs whose sum is a perfect square, addressed in this work, and we will make the discussion of each activity.
Keywords: Partition of a set, sum of pairs, perfect square.

Sumário

Introdução

A escolha do tema desse trabalho foi motivado pela leitura de um artigo publicado no New York Times em 06/04/2015 com o título "Picciotto-Hamilton Rainbow Squares" (Quadrados do arco-íris de Picciotto-Hamilton).

O artigo discute um desafio proposto por Henri Picciotto, educador matemático que atua no ensino fundamental e médio e está envolvido na formação de professores com participação em centenas de workshops e apresentações e no desenvolvimento de currículos, ele disponibiliza suas idéias e criações em seu site (www.MathEducationPage.org).

Esse desafio foi inicialmente resolvido por Kiran Kedlaya, professor de matemática da Universidade de Califórnia, San Diego. "Eu o levei para almoçar e coloquei o problema", disse Picciotto recentemente por email. "Ele imediatamente esboçou um plano geral sobre como ele prová-lo,"[2]. Algumas horas depois, ele me enviou a prova.

Após provado Gordon Hamilton, que é membro do Math Pickle que é um site criado por professores de matemática onde podemos encontrar problemas e desafios matemáticos para todos os níveis de ensino, o leitor que tiver interesse pode visitar o endereço eletrônico http://mathpickle.com, então transformou o problema em uma história de Leprechaun e criou as imagens do arco-íris.

Um pouco da historia dos Leprechaun

Há muito, muito tempo, antes que os leprechauns travessos tivessem espirrado tinta em seu primeiro arco-íris propriamente dito, encheram os céus chuvosos de Ulster com arcos de cor helterskelter, comemorando a garoa como se fosse prata líquida. As regras de como eles jogaram eram as seguintes:

Eles primeiro tentaram colocar os números de 1 a 10 no horizonte e depois juntaram os números com grandes arcos de cor. Eles venceriam se todos os pares adicionados através dos arcos fossem um número cuja soma fosse um quadrado perfeito. Os leprechauns acharam este desafio impossível, mas isso não significava que não valeria a pena tentar!

Quando juntaram os pares verificaram que para um par específico não valeria a regra, então foram aumentando o número de elementos , tentaram emparelhar de 1 a 11 que falhou, pois sendo um conjunto com um número ímpar de elementos sobraria 1 elemento sem par. Na verdade, tudo o que eles tentaram falhou até chegarem a 1 a 14, o que funcionou lindamente. Os duendes se alegraram com esta descoberta até que eles se cansaram e começaram a se perguntar sobre outras possibilidades. Eles então tentaram 1 a 6, 1 a 8, 1 a 16, 1 a 18 e 1 a 20. Fica então a pergunta para quais desses valores os leprechauns foram bem sucedidos?

Eles também tentaram de 1 a 26, começando com as seguintes configurações.

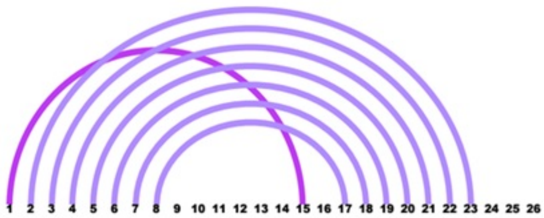

Figura 1

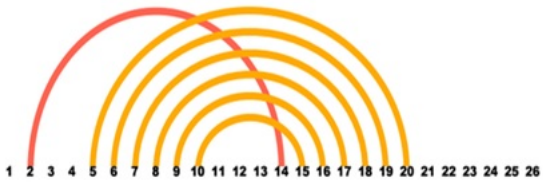

Figura 2

Figura 3

Como eles resolveram cada um deles?

Depois que resolveram o arco iris do conjunto 1 -26, os duendes então tentaram um quebra-cabeça de 1 a 60 o Rainbow Square, mas nunca conseguiram encontrar uma solução, embora houvesse rumores de existir. Aqui eles espalham seus arcos por todo o céu: Norte (1); Leste (15);Sul (31); Oeste (46). Este falhou porque $21 + 22$ não é um quadrado. Como mostra a Figura 4 abaixo.

Como então os leprechauns poderiam completar Rainbow Square usando o conjunto de 1 a 60?

Gordon Hamilton apresentando a solução para o Rainbow Square quebra-cabeças, trouxe que a solução mais elegante é aquela que pode ser realizada utilizando o menor

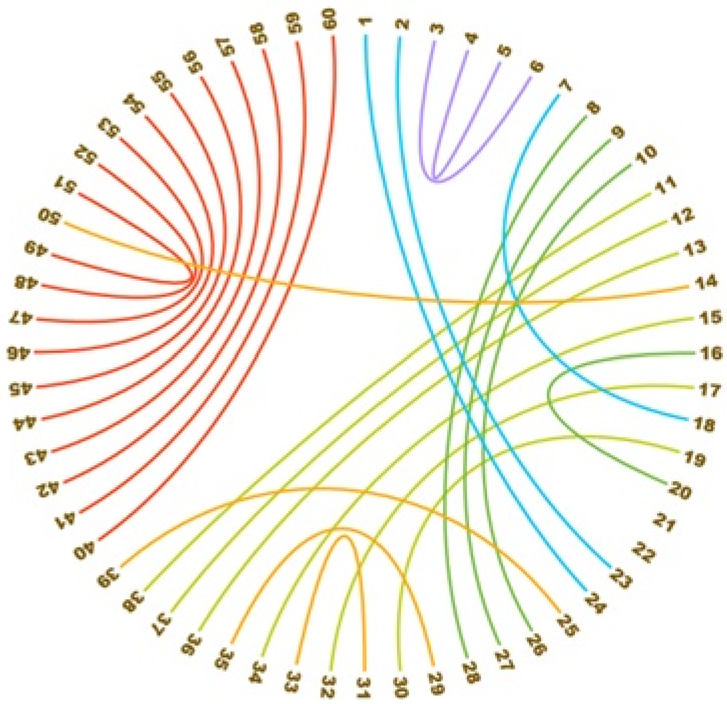

Figura 4

número de quadrados. Isso é importante porque o número de soluções para o quebra-cabeça 1 a 60 passam de 4.000.000 Eventualmente, os leprechauns descobriram uma maneira de criar Rainbow Squares entre 1 e quase qualquer outro número n.

Sendo assim se pegarmos os números de 1 a n e corresponder, quando isso é possível?

Podemos começar testando se para algum valor de n, é possível combinarmos os pares, ao fazer isso iremos observar que para alguns valores pequenos de n não há emparelhamento. Ou seja é impossível formar o arco-íris cuja soma dos números em cada arco é um quadrado perfeito, depois analisaremos para outros valores de n.

Por ser uma ciência experimental iremos pegar os dados, formular as hipóteses e provar os resultados.

No desenvolvimento desse trabalho, estaremos utilizando o conjunto dos números naturais pares, um campo bem delimitado da teoria dos números, e os resultados importantes constam no primeiro capítulo dessa dissertação. Iremos responder as perguntas que foram feitas pelos duendes: Apresentaremos os sete casos para os quais é impossível desenhar o arco iris e generalizaremos através de demonstrações usando Indução matemática que para todos os valores de $n \geq 26$ exceto os 7 casos listados é possível particionar os elementos de um conjunto n, n par, de modo que a soma seja um quadrado perfeito,ou seja sempre existirá o "arco–írís" no horizonte. Apresentaremos os valores de $n \leq 26$ para os quais é possível escrever a partição e também uma solução para o Rainbow Square considerando o conjunto 1 - 60.

Esse problema pode ser aplicado tanto para alunos do Ensino fundamental como para alunos do Ensino Médio ou até mesmo para estudantes do curso de Licenciatura em matemática.

O interesse em desenvolver esse trabalho surge pela oportunidade de trabalhar com os alunos conteúdos matemáticos que são desenvolvidos especialmente no ensino fundamental e por está no campo da álgebra, e sendo o 8^o ano , a série em que o estudante passa a ter um contato mais direto com a álgebra podemos aplicar as atividades que serão apresentadas no corpo desse trabalho nesse seriado. As atividades serão apresentadas através de jogos e material concreto, e tem por objetivo desenvolver o interesse investigativo pela matemática, a abstração, o cálculo mental e o raciocínio lógico.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Resultados Importantes

A teoria dos números é o ramo da matemática pura que estuda propriedades dos números em geral ,e em particular dos números inteiros,e se baseia na resolução de problemas que envolvem esses números. Nesse capitulo apresentaremos resultados importantes para os números inteiros positivos (números naturais) que serão utilizados ao longo desse trabalho para demonstrar nosso objeto de estudo que é a partição de um conjunto com n elementos em $\frac{n}{2}$ pares de modo que a soma em cada par seja um número quadrado perfeito.

1.1.1 Número natural

Lentamente, à medida que se civilizava, a humanidade apoderou-se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro,...) que são os números naturais.

Na história da matemática, a noção intuitiva de número, nascida da contagem foi evoluindo até tornar-se uma construção teórica, desenvolvida com o método axiomático. Podemos, hoje, descrever concisa e precisamente o conjunto N dos números naturais, partindo dos conceitos primitivos de "número" e de "sucessor" e valendo-nos dos axiomas formulados pelo matemático italiano Giuseppe Peano , no limiar do século 20.

A teoria dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados números naturais. A essência da caracterização de N reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando n e n' pertencem a $\mathbb{N}$, dizer que n' é o sucessor de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre eles.

Teorema 1.1.1 (Axiomas de Peano).

1) Todo número natural tem um único sucessor;

2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;

3) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

4) Seja X um conjunto de números naturais. Se 1 pertence a X e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Definição 1.1.1. *Um número natural é um número inteiro não negativo, em alguns contextos, o número é zero como um número inteiro, exceto o zero.*

1.1.2 Números quadrados perfeitos

Definição 1.1.2. *Um número quadrado perfeito é qualquer número natural que pode ser representado pelo quadrado de um número também natural.*
Em linguagem matemática, um número natural n é dito um quadrado perfeito, se, e somente se, existe um número natural a tal que $n = a^2$.
Em símbolos: Seja $n \in \mathbb{N}$, n é um quadrado perfeito se e somente se $\exists\ a \in \mathbb{N}; n = a^2$.

1.1.3 Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma propriedade matemática que depende de uma variável natural n, a qual se torna verdadeira ou falsa quando substituímos n por um número natural dado qualquer.

Exemplo 1.1.1. *(a) $P(n)$: "n é par." é uma propriedade matemática.*
A propriedade $P(1)$ é falsa, pois ela diz que 1 é par; $P(3)$, $P(5)$ e $P(9)$ são falsas, pois afirmam, respectivamente, que 3, 5 e 9 são pares.
Por outro lado, $P(2)$, $P(4)$, $P(8)$ e $P(22)$ são verdadeiras, pois 2, 4, 8 e 22 são pares.

(b) $P(n)$: "n é múltiplo de $5''$ é uma propriedade matemática.
Temos, por exemplo, que $P(1)$, $P(2)$, $P(4)$ e $P(24)$ são falsas, enquanto $P(3)$ e $P(6)$ são verdadeiras.

(c) $P(n)$: "$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}''$ é uma propriedade matemática
$P(1): \ 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$, *que é verdadeira*
$P(3): \ 1 + 2 + 3 = \dfrac{3(3+1)}{2}$, *que é verdadeira*

Uma maneira de provar que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$ é utilizar o chamado **Principio da Indução Finita**, que é um dos axiomas que caraterizam o conjunto dos números naturais.
O Principio da Indução Finita consiste em verificar duas coisas:

Teorema 1.1.2 (Principio da Indução Finita). *Seja $P(n)$ uma propriedade matemática para $n \geq n_0$ tal que*

(1) (Base da Indução): $P(n_0)$ é verdadeira.

(2) (Passo Indutivo): Se $P(k)$ é verdadeira para algum número natural $k \geq n_0$, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

Portanto a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Observação 1.1.1.

- *Na base da indução, verificamos que a propriedade é valida para um valor inicial $n = n_0$.*
- *O passo indutivo consiste em mostrar como utilizar a validade da propriedade para um dado k (chamada hipótese da indução) para provar a validade da mesma propriedade para o inteiro seguinte $k+1$.*
- *Uma vez verificados a base e o passo indutivo, temos uma "cadeia de implicações"*

$$\begin{array}{rcl} P(n_0) \text{ é verdadeira (base)} & \overset{\textit{passo indutivo}}{\Longrightarrow} & P(n_0+1) \text{ é verdadeira} \\ & \overset{\textit{passo indutivo}}{\Longrightarrow} & P(n_0+2) \text{ é verdadeira} \\ & \overset{\textit{passo indutivo}}{\Longrightarrow} & P(n_0+3) \text{ é verdadeira} \\ & \vdots & \end{array}$$

de modo que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq n_0$.

Exemplo 1.1.2. *Prove, por indução em n que*

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

para todo $n \geq 1$.

Resolução: Consideremos a propriedade

$$P(n): \quad 1 + 3 + 5 + 7 \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Pretendemos mostrar que $P(n)$ é válida para todo o número natural $n \geq 1$.

- **Base da indução:** A base corresponde a mostrar que a propriedade vale quando $n = 1$.
  Para $n = 1$ a condição reduz-se a
  $$1 = 1^2,$$
  logo $P(1)$ é verdadeira.

- **Passo Indutivo:**

  Passo 1: Hipótese de indução: Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}$, se tenha que $P(k)$ é verdadeira, isto é,
  $$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

  Passo 2: Pretendemos provar que $P(k + 1)$ também é verdadeira, ou seja
  $$1 + 3 + 5 + 7 \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

  Passo 3: Como usar para Passo 1 para obter Passo 2.
  Somando $(2k + 1)$, que é o próximo número ímpar após $(2k - 1)$, a ambos os lados da igualdade em Passo 1 acima, obtemos a igualdade também verdadeira:
  $$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + 7 \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

  Isso mostra que $P(k + 1)$ é verdadeira, toda vez que $P(k)$ é verdadeira.

Portanto, pelo princípio de indução matemática, a fórmula é válida para todo número natural n.

1.1.4 Indução Matemática Forte

Teorema 1.1.3 (Segundo Princípio da Indução ou Princípio da Indução Forte)**.** *Consideremos uma proposição $P(n)$ e um número natural a. Suponhamos que:*

(1) $P(a)$ é verdadeira

(2) Dado $m \geq a$. Se $P(a)$, $P(a + 1)$, $P(a + 2), \cdots, P(m)$ são todas verdadeiras então $P(m + 1)$ também verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Exemplo 1.1.3. *Sejam* $a_1, a_2, \cdots$ *uma sequência de números reais tal que*

$$a_{i+j} \leq a_i + a_j \quad \textit{para todo} \quad i, j = 1, 2, \cdots .$$

Mostre que

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$

para cada inteiro positivo n.

Resolução:
A inequação é valido para $n = 1$.
Suponha que a inequação é valido para $n = 1, 2, 3, \cdots, k$ para algum inteiro positivo k. Isto é

$$\begin{aligned} a_1 &\geq a_1 \\ a_1 + \frac{a_2}{2} &\geq a_2 \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} &\geq a_3 \\ &\vdots \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k} &\geq a_k \end{aligned}$$

Somando estas inequações temos que

$$ka_1 + (k-1)\frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k} \geq a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k,$$

logo

$$(k+1)\left[a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k}\right] \geq 2(a_1 + a_+ \cdots + a_k) = (a_1 + a_k) + (a_2 + a_{k-1}) + \cdots + (a_k + a_1) \geq ka_{k+1}.$$

Portanto

$$(k+1)\left[a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k}\right] \geq (k+1)a_{k+1}$$

Logo

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k} + \frac{a_{k+1}}{k+1} \geq a_{k+1},$$

que é o resultado para $n = k + 1$. Portanto pelo principio da indução forte, a inequação é valido para todo inteiro positivo n.

1.2 Partição regular

Definição 1.2.1. *Uma partição é dita regular se o intervalo que contém o maior par da partição engloba todos os outros intervalos menores.*

Capítulo 2

Partição de um conjunto em pares cuja soma é um quadrado perfeito

2.1 Decomposição em Pares

Dado um conjunto A, subconjunto dos números naturais, $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ com n par, queremos decompor em $\frac{1}{2}n$ pares tal que a soma dos números em cada par seja um quadrado perfeito. Neste capítulo inicialmente veremos os números para os quais não é possível fazer a partição e generalizaremos para todos os valores de n que a partição existe.

Teorema 2.1.1. *Para $n = 2, 4, 6, 10, 12, 20, 22$ não é possível particionar os inteiros $\{1, 2, ..., n\}$ em pares quadrados, cuja soma é um quadrado perfeito.*

Demonstração. Iremos discutir para cada valor de n.

- Seja $n = 2$, temos o conjunto $A = \{1, 2\}$ cuja o resultado da soma é 3, logo não constitui um quadrado perfeito.

- Seja $n = 4$, temos o conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Ao formar os pares temos o número 1 só pode com o número 3, logo o para $\{1, 3\}$ é forçado, sobra o para $\{2, 4\}$ mas, a soma do par $\{2, 4\}$ não constitui um quadrado perfeito.

- Seja $n = 6$, temos o conjunto $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ao formar os pares temos:

  - 1 so pode ser somado com 3 logo o par $\{1, 3\}$ é forçado.
  - 4 só pode com 5 logo o par $\{4, 5\}$ também é forçado.
  - 6 pode com 3, mas o 3 já foi usado , então sobra o par $\{2, 6\}$ cuja soma não constitui um quadrado perfeito.

- Seja $n = 10$, temos o conjunto $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ analisando os pares, temos:
  - O numero 4 só pode ser somado ao numero 5 logo o par $\{4, 5\}$ é forçado
  - O número 2 pode ser emparelhado apenas com 7, logo o par $\{2, 7\}$ também é forçado.
  - O número 10 pode ser emparelhado apenas com 6, logo o par $\{6, 10\}$ também é forçado.
  - O número 3 pode ser emparelhado apenas com 1 ou 6, como 6 já foi usado, então $\{1, 3\}$ é forçado
  - O número 9 pode ser emparelhado apenas com 7, mas o 7 já foi usado, . Logo a soma com o 9 não constituirá um quadrado perfeito e assim a partição não é possível.

  Uma outra possibilidade de agrupamento seria os

  $$\{\{1, 8\}, \{4, 5\}, \{6, 10\}, \{7, 9\}, \{2, 3\}\}$$

  mas a soma do par $\{2, 3\}$ não constitui um quadrado perfeito. Uma outra possibilidade de agrupamento seria os pares

  $$\{\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{4, 5\}, \{6, 10\}, \{3, 9\}\},$$

  mas nesse caso também sobraria um par cuja soma não resulta um quadrado perfeito. Podemos observar a primeira formação dos pares no arco iris da Figura 2.1.

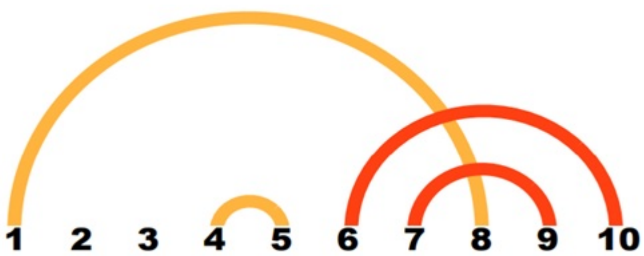

Figura 2.1: Arco-Íris (4)

- Seja $n = 12$, temos o conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e analisando os pares, temos:
  - O numero 9 só pode ser somado ao numero 7 logo o par $\{7, 9\}$ é forçado
  - O número 12 pode ser emparelhado apenas com 4, logo o par $\{12, 4\}$ também é forçado.

- O número 8 pode ser emparelhado apenas com 1, logo o par $\{8, 1\}$ também é forçado.
- O número 2 pode ser emparelhado apenas com 7 , mas o 7 já foi usado, . Logo a soma com o 2 não constituirá um quadrado perfeito e assim a partição não é possível.

• Seja $n = 20$, temos o conjunto

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

observando a representação dos pares apresentada no arco íris da Figura 2.2.

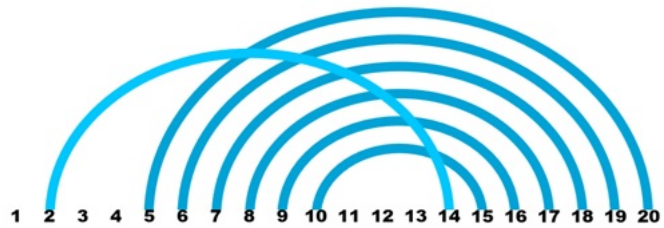

Figura 2.2: Arco-Íris (6)

Além dos pares representados, temos os pares $\{3, 13\}$, $\{4, 12\}$, $\{1, 11\}$, mas a soma do par $\{2, 3\}$ não constitui um quadrado perfeito, poderíamos ainda tentar outras combinações de pares, mas de fato não conseguiríamos escrever uma partição de pares cuja soma é um quadrado, pois:

- O número 18 só pode ser somado ao número 7 logo o par $\{18, 7\}$ é forçado.
- O número 2 pode ser emparelhado apenas com 7 ou 14, o par $\{2, 14\}$ também é forçado.
- O número 11 pode ser emparelhado apenas com 14 ou 5, como 14 já foi usado, então $\{11, 5\}$ também é forçado.
- O número 20 pode ser emparelhado apenas com 5 ou 16, como 5 já foi usado, então $\{20, 16\}$ é forçado.
- O número 9 pode ser emparelhado apenas com 16 ou 7, e ambos ja foram usados. Logo a soma com o 9 não constituirá um quadrado perfeito e assim a partição não é possível.

• Seja $n = 22$, utilizando a mesma análise feita para $n = 20$. Temos que para 22 também não há uma partição possível.

$\square$

Teorema 2.1.2. *[1]*
Seja n um número natural par da forma $n = k^2{-}1$, sendo k ímpar, então o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, pode ser particionado em $\frac{1}{2}n$ pares cuja soma em cada par é um quadrado perfeito, de fato esses pares da forma $(n + 1 - r,\ r)$, com $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$, todos tem como resultado da soma k^2.[1]

Notação 2.1.1. *Devido ao Teorema 2.1.2, vamos adotar a seguinte notação compacta $[1;\ n]$ para representar o conjunto de pares da forma $(n + 1 - r, r)$, onde $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$.*

Veja alguns exemplos:

Exemplo 2.1.1. *Para $n = 8 = 3^2{-}1$, pelo Teorema 2.1.2, existe uma partição da forma*

$$(8 + 1 - r,\ r), \quad 1 \leq r \leq \frac{8}{2} = 4.$$

Isto é

$$(1, 8),\ (2, 7),\ (3, 6)\ e\ (4, 5).$$

E pela notação compacta temos que

$$[1;\ 8] := \{(1, 8),\ (2, 7),\ (3, 6)\ e\ (4, 5)\}.$$

Essa partição está representada pela técnica do arco-íris abaixo, Figura 2.3.

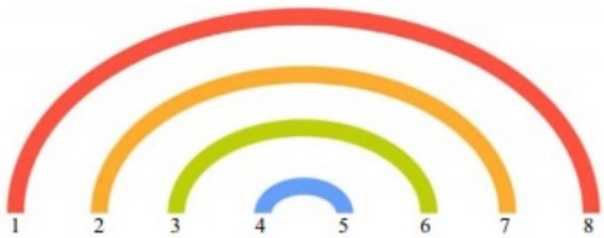

Figura 2.3: Arco-Íris

Neste exemplo podemos perceber que a medida que o número de um extremo da partição vai aumentando uma unidade o número do outro extremo vai diminuindo uma unidade para que assim a soma se mantenha o mesmo quadrado perfeito.

Exemplo 2.1.2. *Para $n = 24 = 5^2{-}1$, pelo Teorema 2.1.2, existe uma partição da forma*

$$(24 + 1 - r,\ r), \quad 1 \leq r \leq \frac{24}{2} = 12.$$

Isto é
$[1;\ 24] := \{(1, 24),\ (2, 23),\ (3, 22),\ (4, 21),\ (5, 20),\ (6, 19),\ (7, 18),\ (8, 17),\ (9, 16),\ (10, 15),$ $(11, 14)\ (12, 13)\}.$
O arco Iris mostra outra partição do número 24 , que pode ser observada na Figura 2.4.

Figura 2.4: Arco-Íris - Exemplo 2.1.2

Teorema 2.1.3. *Dado um natural par* $n = k^2 - 1$, $\quad k$ *ímpar vimos no Teorema 2.1.2 que existe uma partição de* n *da forma* $(n + 1 - r,\ r)$, *com* $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$, *que representamos por* $[1; n]$. *Se* m *é um número natural par tal que*

$$(n+1) + m = \tilde{k}^2, \quad \textit{onde} \ \ \tilde{k} \ \ \textit{é impar}$$

então existe uma partição para m *formado pela partição de* n, $\ [1; n]$, *junto com os pares da forma*

$$(n + 1 + j,\ m - j), \quad 0 \leq j \leq \frac{m-n}{2} - 1,$$

isto é na notação compacta de Notação 2.1.1,

$$[n + 1;\ m].$$

Portanto a partição de m *é a reunião*

$$[1;\ n] \cup [n + 1, m],$$

isto é, os pares

$$(1, n),\ (2, n-1), \cdots, (\frac{n}{2} + 1;\ \frac{n}{2}),\ (n + 1, m),\ (n, m - 1), \cdots, (\frac{m+n}{2},\ \frac{m+n-2}{2})$$

A partição é escrita usando os pares da partição anterior de n *elementos e acrescentando os pares construídos quando fazemos o emparelhamento de* $(n + 1)$ *com* k *de modo que a soma de* $(n + 1)$ *e* k *seja o próximo quadrado perfeito impar.*

Notação 2.1.2. *Vamos usar a notação*

$$n := q, [q + 1; n]$$

para indicar que uma partição para n *pode ser obtida adicionando o conjunto de pares quadrados* $[q + 1; n]$ *para uma solução existente de* q.

Apresentaremos alguns exemplos:

Exemplo 2.1.3.

(i) Considere $n = 16$. *Temos que*

$$9 + 16 = 25 = 5^2.$$

Logo temos que a partição de 16 pode ser feita usando a partição conhecida de 8, isto é, consideramos os pares do 8 que todos resultam no quadrado 9 acrescentando os pares $(9, 16)$, $(10, 15)$, $(11, 14)$ *e* $(12, 13)$ *que resulta no quadrado 25. Portanto a partição de 16 será*

$$\underbrace{(1,8),\ (2,7),\ (3,6),\ (4,5)}_{[1;\ 8]} \cup \underbrace{(9,16),\ (10,15),\ (11,14),(12,13)}_{[9;16]}\ := 8,\ [9;16] := 16.$$

(ii) Usando a partição de $n = 16$, *construirmos a partição para o número* k *tal que*

$$17 + k = 7^2 \Rightarrow 17 + k = 49 \Rightarrow k = 32.$$

Portanto

$$32 := 16, [17; 32].$$

Uma descrição completa de uma possível partição do número 32 pode ser construída da seguinte forma: para $n = 8$ *temos pelo Teorema 2.1.2 que existe a partição, que foi apresentada no Exemplo 2.1.1 e pelo Teorema 2.1.3 temos que a partir dessa partição podemos encontrar novos números pares para os quais é possível, adicionando números pareáveis conforme Exemplo 2.1.3(i), sendo assim temos que a partição do 32 é dada pelo agrupamento das partições de*

$$[1; 8], [9; 16], [17; 32].$$

(iii) Usando a partição de $n = 32$, *construirmos a partição para o número* k *tal que*

$$33 + k = 9^2 \Rightarrow 33 + k = 81 \Rightarrow k = 48.$$

Portanto $48 := 32, [33; 48]$.

(iv) Usando a partição de $n = 48$, *construirmos a partição para o número* k *tal que*

$$49 + k = 11^2 \Rightarrow 49 + k = 121 \Rightarrow k = 72$$

Portanto $72 := 48, [49; 72]$.

(v) *Pelos exemplos acima vemos que outros números possíveis são 48, 72, 96, 128 e assim por diante. Mas nós poderíamos também passar de 16 para 64 pois* $(17 + 64 = 81)$, *depois para 104 pois* $(65 + 104 = 169)$ *e assim por diante, ou de 32 a 88 pois* $(33 + 88 = 121)$ *ou a 136 pois* $(89 + 136 = 225)$ *e assim por diante.*

Observação 2.1.1. *Embora a maioria das partições não tenham as estruturas apresentadas nos Teoremas 2.1.2 e 2.1.3, vamos mostrar adiante (Teorema 2.2.4) uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra.*

Até aqui mostramos que para alguns números pares que satisfazem as condições apresentadas nos teoremas e observações acima é possível apresentar uma partição em pares de modo que a soma de cada par é um número quadrado perfeito, para valores pequenos de n, é relativamente fácil provar se existe ou não uma partição em pares quadrados e existindo escrever a partição. Iremos agora demonstrar por indução forte que : Se para uma sequencia de números pares consecutivos é possível encontrar uma partição então para qualquer número par será possível.

Mostraremos que, se é possível encontrarmos uma partição para todos os valores de n par variando entre 36 e 60, então todos os valores subsequentes de n também são possíveis.

2.2 Encontrando uma solução para $n \geq 24$

Como foi dito anteriormente 24 é possível, pois n é da forma $k^2 - 1$, onde k é ímpar. Agora que já discutimos os casos que não é possível encontrar uma partição, apresentaremos e discutiremos os teoremas que garantem que para todo $n \geq 24$ a partição é possível. Iniciaremos a nossa demonstração descrevendo uma condição suficiente para $n \geq 26$ ser possível.

2.2.1 Partição de números no intervalo $[26, 60]$

Teorema 2.2.1. *[1]*
Seja m *e* r *quaisquer inteiros tais que* $m \geq 4$ *e* $1 \leq r \leq 2m$. *Se existe um partição para* $2m(m-1) - 2r$, *então também existe uma partição para* $n = 2m(m-1) + 2r$ *e essa partição é dada por:*

$$n := 2m(m-1) - 2r, [(2m-1) - n;\ n]. \tag{2.1}$$

Demonstração. Por hipótese $m \geq 4$, logo $2m(m-1) - 2r > 0$.

Observe que se

$$n = 2m(m-1) + 2r, \tag{2.2}$$

com $1 \leq r \leq 2m$, então

$$2m(m-1) < n \leq 2m(m+1). \tag{2.3}$$

Isto implica que

$$2m^2\text{–}2m < n \leq 2m^2 + 2m$$

$$\Rightarrow 4m^2\text{–}4m < 2n \leq 4m^2 + 4m$$

$$\Rightarrow \underbrace{(2m-1)^2 - 1}_{\text{par}} < 2n \leq \underbrace{(2m+1)^2 - 1}_{\text{par}}$$

$$\Rightarrow (2m-1)^2 < 2n < (2m+1)^2$$

de modo que

$$(2m-1)^2 - n < n.$$

Usando (2.2) temos

$$\begin{aligned} (2m-1)^2 - n &= 4m^2 - 4m + 1 - 2m^2 + 2m - 2r \\ &= 2m^2 - 2m - 2r + 1 \\ &= 2m(m-1) - 2r + 1. \end{aligned}$$

Portanto

$$[2m(m-1) - 2r + 1] + n = (2m-1)^2$$

Logo pelo Teorema 2.1.3, o conjunto de números de $2m(m-1) - 2r + 1$ a n inclusivo formam o conjunto de pares quadrados $[(2m-1)^2 - n;\ n]$. Portanto, se $2m(m-1) - 2r$ é possível, então n é possível com uma partição dada por (2.1). □

Observação 2.2.1. *A condição de que $2m(m-1) - 2r + 1$ seja possível é suficiente, mas não necessária para n ser possível. Por exemplo, o caso $n = 60$ seria obtido, usando este método, tomando $m = 5$ e $r = 10$ (desde que $2n < 121$) que então dá $2m(m-1) - 2r = 20$, o que não é possível, pelo Teorema 2.1.1. No entanto, como veremos, há uma partição de 60; mas não é da forma $q, [q+1,\ 60]$.*

Em seguida, mostramos que há uma partição em pares quadrados para todos os n de 24 até 60.

Teorema 2.2.2. *Para $n = 8, 14, 16$ e 18, e todos os n pares entre 24 e 60 e possível escrever uma partição em pares quadrados.*

Demonstração. Partições para $n = 8, 14$ e 16 são dadas no inicio desse capitulo.
Iremos apresentar uma partição para os outros valores de n :
Para $n = 18, 26, 28, 36, 38, 58$ e 60, teremos as seguintes partições

- Partição do 14:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} (1,8) & (2,14) & (3,13) & (4,12) & (5,11) & (6,10) & (7,9) \end{array} \right\}$$

- Partição do 18:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} (1,15) & (2,14) & (3,13) & (4,12) & (5,11) & (6,10) & (7,18) & (8,17) & (9,16) \end{array} \right\}$$

- Partição do 26:
  A partição do 26 apresentaremos através do arco iris

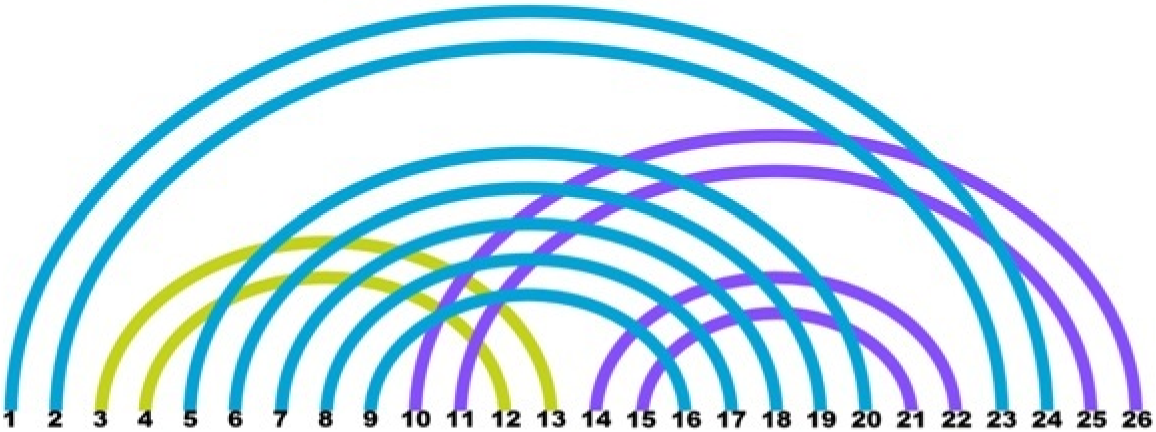

Figura 2.5: Partição para $n = 26$

- Partição do 28:

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} (1,24) & (2,14) & (3,13) & (4,12) & (5,20) & (6,19) & (7,18) & (8,17) \\ (9,16) & (10,15) & (11,25) & (21,28) & (22,27) & (23,26) & & \end{array} \right\}$$

- Partição do 36:

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} (1,8) & (2,7) & (3,33) & (4,5) & (29,20) & (6,10) & (31,18) & (32,17) \\ (9,16) & (15,34) & (14,35) & (24,12) & (22,27) & (23,26) & (21,28) & (11,25) \\ (13,36) & (19,30) & & & & & & \end{array} \right\}$$

- Partição do 38:

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} (1,8) & (2,7) & (3,33) & (4,5) & (29,20) & (6,10) & (31,18) & (32,17) \\ (9,16) & (15,34) & (14,35) & (24,25) & (22,27) & (23,26) & (21,28) & (11,38) \\ (13,36) & (19,30) & (12,37) & & & & & \end{array} \right\}$$

- Partição do 58 : A partição do 58 é dada pela partição do 24 com a modificação do par {1,24}. Adicionando outros pares a partição completa está representada na tabela abaixo

$$\left\{\begin{array}{llllllll} (25,56) & (26,55) & (27,54) & (28,53) & (29,52) & (30,51) & (31,50) & (32,49) \\ (33,48) & (34,47) & (35,46) & (36,45) & (37,44) & (38,43) & (39,10) & (40,41) \\ (57,24) & (2,23) & (3,22) & (4,21) & (5,20) & (6,19) & (7,18) & (8,17) \\ (9,16) & (11,14) & (12,13) & (1,15) & (42,58) & & & \end{array}\right\}$$

- Partição do 60

$$\left\{\begin{array}{llllllll} (25,56) & (26,55) & (27,54) & (28,53) & (29,52) & (30,51) & (31,50) & (32,49) \\ (33,48) & (34,47) & (35,46) & (36,45) & (37,44) & (38,43) & (39,10) & (2,23) \\ (3,22) & (4,21) & (5,20) & (6,19) & (7,18) & (8,17) & (9,16) & (11,14) \\ (12,13) & (41,59) & (1,15) & (42,58) & (57,24) & (60,40) & & \end{array}\right\}$$

$\square$

Outras partições podem ser observadas na tabela abaixo

$$\begin{array}{rcl} 24 & := & [1;24] \\ 32 & := & 16,[17;32] \\ 30 & := & 18,[19;30] \\ 32 & := & 36,[37;44] \\ 40 & := & 8,[9;40] \\ 42 & := & 38,[39;42] \\ 44 & := & 36,[37;44] \\ 46 & := & 34,[35;46] \\ 48 & := & [1;48] \end{array}$$

Podemos perceber que para escrever a partição dos números da tabela acima ou utilizamos o método da complementação de uma partição conhecida , ou aplicamos a propriedade descrita no inicio desse capitulo que ocorre para os valores de n que satisfazem a condição $n = k^2$–1, que analisando a tabela a condição é satisfeita para $n = 24 \ \ (5^2 - 1)$ e $n = 48 \ \ (7^2 - 1)$, entretanto notemos que no caso de 48 podemos escrever a partição de outra maneira $32, [33; 48]$ (de modo que 48 é emparelhado com 33 em vez de 1). Ao longo desse trabalho discutiremos o número de partições distintas que n apresenta.

2.2.2 Partição de um conjunto com n elementos

Teorema 2.2.3. *Todos os números pares n, com exceção dos sete listados no Teorema 2.1.1, podem ser particionados em pares quadrados.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2.1, todos os números $n \leq 60$, com as sete exceções mencionadas, são possíveis.

Se $n \geq 62$, então pelo Teorema 2.2.1 temos que: $m \geq 6$ e $\leq r \leq 2m$. Quando $m = 6$, e $1 \leq r \leq 12$, temos que: $2m(m-1)–2r$ admite os seguintes valores:

- $m = 6$ e $r = 1 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 58$
- $m = 6$ e $r = 2 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 56$
- $m = 6$ e $r = 3 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 54$
- $m = 6$ e $r = 4 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 52$
- $m = 6$ e $r = 5 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 50$
- $m = 6$ e $r = 6 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 48$
- $m = 6$ e $r = 7 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 46$
- $m = 6$ e $r = 8 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 44$
- $m = 6$ e $r = 9 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 42$
- $m = 6$ e $r = 10 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 40$
- $m = 6$ e $r = 11 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 38$
- $m = 6$ e $r = 12 \Rightarrow 2m(m-1)–2r = 36$

De maneira análoga substituindo os valores de r na relação $2m(m-1) + 2r$ encontraremos como resultado os valores $62, 64, \cdots, 84$. Como $36, \cdots, 58$ são possíveis pelo Teorema 2.2.1, temos pelo Teorema 2.2.1 que $62, \cdots, 84$ também são possíveis.

Até aqui já mostramos que todos os números pares até 84 exceto $\{2, 4, 6, 10, 12, 20, 22\}$ apresentam uma partição. Mostraremos agora , por indução, que todos os números subsequentes também são possíveis. Ou seja que todo número natural par, $n \geq 86$ apresentará uma partição de modo que a soma dos termos de cada par é um número quadrado perfeito.

Suponha que $m > 6$ e n seja um inteiro par que satisfaça a condição

$$n = 2m(m-1) + 2r, \quad 1 \leq r \leq 2m.$$

A hipótese de indução é que, para $k = 6, \cdots, m-1$, todos os números pares de 36 (que podemos escrever como $2k(k-1) - 2r$, para $k = 6$ e $r = 12$) a $2m(m-1)$, que podemos escrever como $2k(k-1) + 2r$ com $k = m-1$ e $r = 2m-2$, são possíveis.

Os números $2m(m-1)-2r$, com $r = 1, 2, \cdots, 2m$, são portanto todos menores que $2m(m-1)$, e como $m \geq 6$, temos que no mínimo esse resultado é 36. Assim, pela Hipótese Indutiva, todos esses números possuem uma partição .

Portanto, pelo Teorema 2.2.1, cada valor de $n = 2m(m-1)+2r$, com $r = 1, 2, \cdots, 2m$, também é possível. Sendo assim o menor valor, tomando $r = 1$, é $n = 2m(m-1)+2$, que é o valor imediatamente posterior ao maior valor para o qual o resultado foi provado, enquanto o maior valor tomando $r = 2m$ é

$$\begin{aligned} n &= 2m(m-1)+4m \\ &= 2m(m-1)+4m \\ &= 2m^2+2m \\ &= 2m(m+1) \text{ que pode ser escrito como,} \\ &= 2(m+1)((m+1)-1). \end{aligned}$$

Isto segue, portanto, pelo princípio da indução matemática que todos os valores de n maiores que 36 são possíveis e assim concluímos a demonstração. □

2.2.3 Partições Regulares

Observamos anteriormente que, para alguns valores de n, como 32, é possível encontrar uma partição de n como uma sequência de conjuntos de pares quadrados aninhados, ou seja, n pode ser escrito na forma

$$[1; p_1],\ [p_1+1; p_2], \cdots, [p_r+1; n].$$

Vamos chamar tal partição regular. Por exemplo 8, 16, 24 e 32 têm partições regulares enquanto 18 e 26 não tem. Partições regulares são simplesmente caracterizadas.

Teorema 2.2.4. *Existe uma partição regular para n se e somente se n é um múltiplo de 8*

Demonstração. (⇒:) Em primeiro lugar, suponhamos que n tenha uma partição regular, de modo que a soma de seus inteiros em pares seja um quadrado perfeito. Consideremos as seguintes partições em pares quadrados

$$[p_0+1, p_1],\ [p_1+1, p_2], \cdots, [p_i+1, p_{i+1}], \cdots, [p_r+1, p_{r+1}]$$

onde $p_0 = 0$ e $p_{r+1} = n$.

Considerando os pares aninhados no primeiro bloco, p_1 deve ser par. Portanto, p_1+1 é ímpar e p_2 é par. Continuando desta forma, vemos que cada p_i é par. Dentro de cada bloco, a soma de cada par quadrado é necessariamente ímpar; podemos escrever

$$p_i + 1 + p_{i+1} = (2k–1)^2.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} p_i + p_{i+1} + 1 &= 4k^2 – 4k + 1 \\ \Rightarrow p_i + p_{i+1} &= 4k^2 – 4k + 1 - 1 \\ \Rightarrow p_i + p_{i+1} &= 4k(k-1). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Começando com $p_0 = 0$ e fazendo uso repetido de (2.4), como o produto de dois termos consecutivos é sempre par segue que $4k(k+1)$ é um múltiplo de 8. Em particular temos que para $n = p_{r+1}$, é um múltiplo de 8.

($\Leftarrow$:) Por outro lado, suponha que n seja um múltiplo de 8. Como partições regulares para $n = 8, 16$ e 24 já foram dadas, podemos supor que $n \geq 32$. Assumimos a hipótese indutiva de que todos os múltiplos positivos de 8 que são menores que n têm uma partição regular.

Seja $2m - 1$ o maior número ímpar cujo quadrado é menor que $2n$. Então,

$$(2m-1)^2 < 2n < (2m+1)^2 \tag{2.5}$$

Expandindo e dividindo por 2 temos que

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4m^2 – 4m + 1 < 2n < 4m^2 + 4m + 1 \\ \Rightarrow 4m^2 – 4m < 2n \leq 4m^2 + 4m \\ \Rightarrow 4m(m–1) < 2n \leq 4m(m+1). \\ \Rightarrow 2m(m–1) < n \leq 2m(m+1) \end{aligned}$$

De onde temos que

$$n \leq 2m(m+1) \tag{2.6}$$

Seja $p = (2m-1)^2 – n – 1$, por (2.6) temos que

$$p \geq (2m–1)^2 - 2m(m+1) – 1 = 2m(m-3) \tag{2.7}$$

Como $n \geq 32$, segue-se que $m > 3$ e, a partir de (2.7), que $p > 0$.

A primeira desigualdade em (2.4) mostra que $p < n$. Mas $p = 4m(m-1) - n$, que é um múltiplo de 8. Pela Hipótese Indutiva, p tem uma partição regular. Mas a definição de p garante que $[p+1; n]$ é um conjunto de pares quadrados aninhados e $n = p, [p+1; n]$ é uma partição regular para n, como queiramos provar. $\square$

2.2.4 Números que possuem mais de uma maneira de serem particionado

Observando as duas partições do número 26 abaixo e com base no que foi apresentado podemos observar que para todos os números a partir de 26 existe mais de uma maneira de ser particionado em pares cuja soma é um quadrado perfeito.

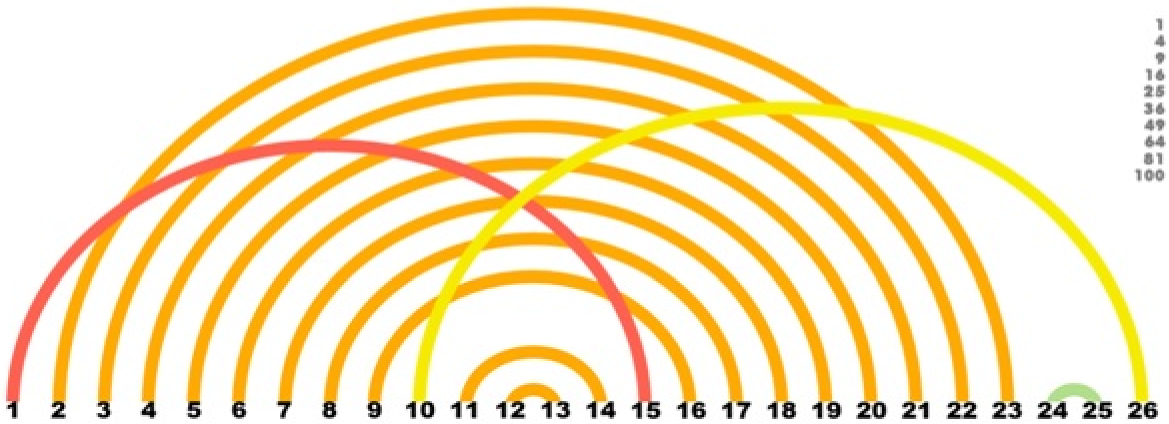

Figura 2.6: Partição para $n = 26$

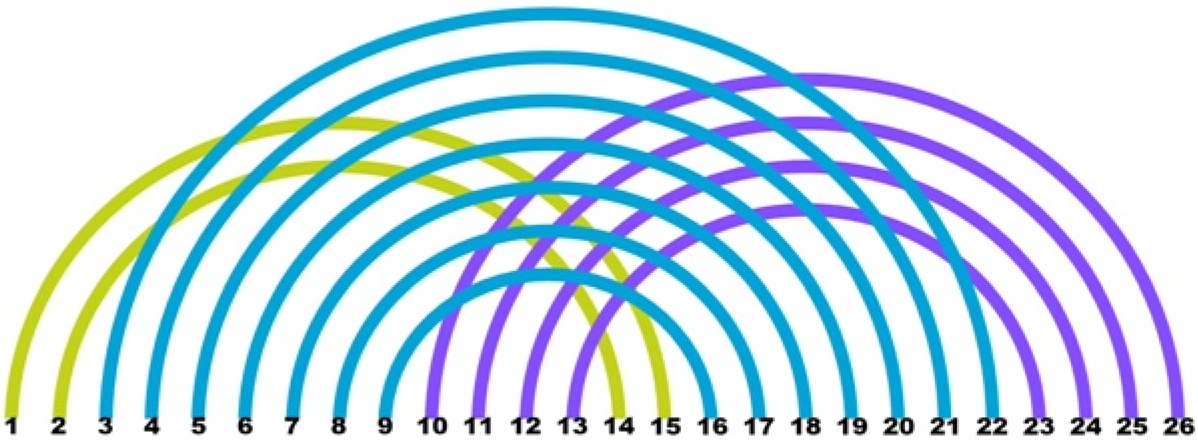

Figura 2.7: Partição para $n = 26$

Abordaremos aqui sobre o número de partições possíveis. O primeiro valor de n para o qual há mais de um partição em pares quadrados é 26, e há seis soluções neste caso. Para n entre 26 e 60, o número de soluções encontradas, usando uma busca por computador é dado na Tabela 1

Pode-se ver porque o número de soluções aumenta rapidamente considerando dois fatores distintos que contribuem para esse fenômeno. O primeiro é que o número de quadrados ímpares entre n e $2n$ é aproximadamente $\frac{1}{5}\sqrt{n}$; [1] assim, por exemplo, quando $n = 1000$, temos as seis soluções a seguir

$$\begin{array}{ll} 88, [89; 1000] & 520, [521; 1000] \\ 224, [225; 1000] & 680, [681; 1000] \\ 368, [369; 1000] & 848, [849; 1000] \end{array}$$

de modo que o número de soluções para 1000 é, pelo menos, a soma do número de soluções para esses seis números menores. Isso por ai só implica que o número de soluções

n	Soluções
26	6
28	18
30	12
32	36
34	156
36	295
38	429
40	755
42	2603
44	7122
46	19232
48	32818
50	54363
52	172374
54	384053
56	933748
58	1639656
60	4366714

Tabela 2.1

irá crescer mais rápido do que qualquer potência polinomial dada.

O segundo fator diz respeito à estrutura das soluções para um dado n. Considere o caso quando $n = 28$. Uma solução contém a cadeia de pares

$$\{1, 24\}, \{12, 13\}, \{23, 26\}, \{10, 15\};$$

se pensarmos nos números $\{1, 2, \cdots, 28\}$ como os vértices de um grafo, (teoria dos grafos), [?], cujas arestas unem vértices que somam um quadrado (cada aresta é um 'par quadrado'), então o gráfico para $n = 28$ contém o mesmo ciclo 1, 24, 12, 13, 23, 26, 10, 15, 1; estes oito vértices podem então ser unidos como dois conjuntos separados de quatro arestas, usando arestas alternadas: $\{1, 24\}, \{12, 13\}, \{23, 26\}, \{10, 15\}$, como acima, ou $\{24, 12\}, \{13, 23\}, \{26, 10\}, \{15, 1\}$. Os outros vinte números podem ser divididos em dez pares quadrados então nós temos duas partições distintas. Outro ciclo desse tipo é 1, 24, 12, 13, 3,22, 27, 9, 16, 20, 5, 4, 21, 15, 1 (de comprimento 14); desde que é novamente possível emparelhar os restantes 14 números, temos mais duas soluções.

Quando n se torna maior, o número de arestas no gráfico correspondente também aumenta e assim faz a probabilidade de encontrar partições que contenham até ciclos do tipo descrito.

A tabela acima mostra que existem mais de 4 milhões de formas de parear os números $\{1, 2, \cdots, 60\}$ em trinta pares quadrados. Pode ser um exercício interessante para ver quanto tempo levaria para sessenta pessoas em uma sala para conseguir uma correspondência! [1].

E assim mostramos que dado um conjunto de cardinalidade par existem apenas 7 números que não podem ser particionados de modo que a soma em cada par seja um quadrado perfeito.

Capítulo 3

Atividades para serem desenvolvidas no ensino fundamental e médio

Ainda hoje se percebe que o ensino da matemática é um desafio para alunos e professores, pois sem perceber a aplicação dos conteúdos na vida cotidiana os alunos não vê a relevância do seu ensino e isso compromete o processo de ensino aprendizagem. Segundo Vitti:

> É muito comum observarmos nos estudantes o desinteresse pela matemática, o medo da avaliação, pode ser contribuído, em alguns casos, por professores e pais para que esse preconceito se acentue. Os professores na maioria dos casos se preocupam muito mais em cumprir um determinado programa de ensino do que em levantar as ideias prévias dos alunos sobre um determinado assunto. Os pais revelam aos filhos a dificuldade que também tinham em aprender matemática, ou até mesmo escolheram uma área para sua formação profissional que não utilizasse matemática. (Vitti, 1999, p.33)
>
> (Vitti, 1999, p.33).

Dessa forma é necessário que a matemática seja ensinada de forma a favorecer o desenvolvendo da capacidade de investigação lógica do estudante. Consequentemente a tarefa básica do professor é o desenvolvimento do raciocínio lógico, do pensamento critico e da criatividade apoiados não só na reflexão sobre os conhecimentos adquiridos pela Ciência em questão, mas também sobre suas aplicações à tecnologia e ao progresso social.

Neste capítulo apresentaremos algumas atividades para estudantes do ensino fundamental, mas que também podem ser desenvolvidas para estudantes do ensino médio, com base na teoria exposta no segundo capítulo e têm por objetivo aprofundar um pouco o estudo sobre partição de um conjunto de elementos pares, em pares cuja soma é um quadrado perfeito, e fazer com que eles compreendam os teoremas que caracterizam os números pares que possuem uma partição em quadrados. Além de perceber que apesar da complexidade da teoria que envolve esses teoremas a sua aplicação pode ser uma atividade simples e assim ir aos poucos desmistificando a ideia da complexidade da matemática para que os alunos percam o medo e passem a estudar essa ciência com mais motivação e prazer.

As atividades propostas nesse trabalho serão desenvolvidas no 8º ano do ensino fundamental após o ensino dos conteúdos: números quadrados perfeitos, produtos notáveis e noções de polinômios. Nesse nível de escolaridade o aluno já deve dominar os conceitos elementares da teoria que envolve os números naturais, conjuntos numéricos, subconjuntos do conjunto dos naturais e conjunto dos números pares, além da ideia de equações polinomiais.

O nosso trabalho esteve direcionado ao conjunto dos números naturais em especial ao subconjunto dos números naturais pares e dos números quadrados perfeitos, logo nossas atividades também contemplarão esses subconjuntos.

O método utilizado inicialmente para resolver as atividades será o conhecimento empírico, que consiste na construção do conhecimento através da observação, baseados na experiência sem necessidade de comprovação cientifica. Através das tentativas ao longo do desenvolvimento das atividades os alunos deverão levantar hipóteses que serão posteriormente discutidas e generalizadas pelo professor possibilitando assim o desenvolvimento do espírito investigativo em matemática.

As atividades estão no campo da álgebra, que é a área da matemática que os alunos mais apresentam dificuldades, pela dificuldade que eles tem em abstrair os conceitos e solucionar problemas não numéricos.

Após a apresentação da proposta de atividade faremos a discussão da solução das mesmas.

A proposta aqui apresentada é a realização de 5 atividades sequenciadas onde o grau de complexidade vai aumentando de acordo com a conclusão da atividade anterior.

O tempo de duração pensado para cada atividade é de 2 horas/aula para a primeira atividade e 3horas / aula para as demais, sendo assim as 5 atividades devem ser concluídos num prazo médio de 2 semanas , o que pode variar de acordo com a resposta da turma.

As atividades serão realizadas em grupos de 4 estudantes, visto que normalmente as turmas possuem de 35 a 40 alunos .

3.1 Atividade Proposta 1

1. Organize os números inteiros de 1 a 18 em pares para que a soma dos números dos pares seja um quadrado perfeito.

3.1.1 Discussão da Atividade Proposta 1

Nesta atividade o aluno deverá organizar os números de 1 a 18 em 9 pares de modo que a soma seja um quadrado perfeito. Esta atividade pode ser desenvolvida tanto para alunos das séries finais do ensino fundamental como para alunos das séries iniciais do ensino médio, pois como não é exigido que os alunos encontrem todos os pares que a soma e quadrado perfeito, então temos uma atividade de baixa complexidade já que os pré-requisitos são mínimos (reconhecimento de quadrados perfeitos e soma de pares) logo é acessível a grande parte dos estudantes.

Apesar da pouca dificuldade a resposta não é óbvia, mas a medida que os alunos vão experimentando a atividade as ideias para resolução vão surgindo. É possível que o aluno resolva parcialmente a atividade, podendo encontrar apenas alguns pares que satisfazem a condição.

Nessa atividade é possível estabelecer entre os alunos uma competição saudável que se desenvolve em torno de encontrar soluções com mais e mais pares, onde o professor pode aproveitar para trabalhar conteúdos atitudinais e procedimentais tais como trabalho em grupo, respeito ao tempo de cada aluno e competição saudável.

Inicialmente o aluno é deixado livre pra ir buscando desenvolver a atividade através do método de tentativas, e acertos e erros serão bastante comuns, devido à falta de conhecimento da teoria que envolve a partição de um conjunto de números e a pouca familiaridade com a matemática é provável que alguns alunos não consigam desenvolver a atividade nesse primeiro momento, mas depois da apresentação da generalização dos resultados ficará mais simples o seu entendimento Após um tempo estabelecido o professor pede que os alunos apresentem os resultados encontrados e pode lançar alguns questionamentos como por exemplo, é melhor começar com pares pequenos, como $\{1,3\}$ ou grandes, como $\{17,8\}$?

Este último é de fato mais eficiente, pois apresenta menos opções do que começando pelo início.

Quando a solução de nove pares for encontrada, ou seja, quando $\{1, 2, ..., 18\}$ tiver sido particionado em pares de soma quadrada, o resultado apresentado deverá ser os 9 pares

$$\{(1, 15); (2, 14); (3, 13); (4, 12); (5, 11); (6, 10); (7, 18), (8, 17); (9, 16)\}$$

é possível que alguns alunos encontrem mais de 9 pares visto que podem utilizar o mesmo número mais de uma vez, cabe ao professor explicar que as somas não precisam resultar no mesmo quadrado , mas que cada número só poderá ser utilizado apenas uma vez, e que a partição estará completa se o número de pares encontrados é a metade da quantidade de elementos do conjunto.

3.2 Atividade Proposta 2

Analisando todos os números pares menores que 24 verifique para quais desses números é possível organizar todos os elementos do conjunto, $\{1, 2, ..., n\}$ em pares de modo que a soma dos números em cada par seja um quadrado perfeito.

3.2.1 Discussão da Atividade Proposta 2

Agora que os alunos ja sabem que o objetivo da atividade é encontrar todos os pares que a soma resulta em um quadrado perfeito e que o número de pares de um conjunto com n elementos é dada por $\frac{n}{2}$, utilizando o método de tentativas, os alunos devem descobrir que essa partição em pares de soma quadrada podem ser feitos, para 8, 14, 16 e 18, mas não para 2, 4, 6, 10, 12, 20 e 22, entretanto acredito que ao desenvolver a atividade parte dos alunos não devem apresentar todos os números que a partição é possivel ou não, pois essa atividade já apresenta um grau de complexidade um pouco maior do que a a atividade 1 pois exige que ele encontre todas os pares visto que a conclusão não pode ser tirada a partir de uma solução parcial.

Entretanto uma exploração sistemática, talvez conduzida por pequenos grupos de estudantes, mostre que a maioria dos pares de números entre 2 e 22 não produzem uma solução. No entanto, os alunos podem se surpreender ao saber que, de fato, uma partição de pares de soma quadrada é possível para todos os números pares maiores que 22. Esse é um forte argumento para ir além da tentativa e erro, como essa experimentação se torna cada vez mais difícil e demorada quando os números aumentam.

Um programa de computador pode ser um complemento útil para facilitar a resolução da atividade, então uma possibilidade seria o professor convidar algum profissional da área de programação para tentar desenvolver com os alunos um programa que forneça todos os pares da partição de um numero $n \geq 24$, podendo inclusive desenvolver a técnica do arco iris, tornando assim a atividade mais dinâmica e prazerosa.

O conjunto $\{1, 2, ..., 8\}$ oferece uma solução particularmente direta:

$$\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}.$$

Isso sugere uma representação visual elegante de "arco-íris"da figura 3.1.

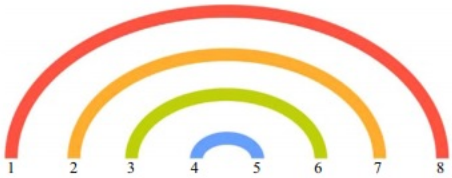

Figura 3.1: Arco-Íris - Atividade 2

As outras partições que serão encontradas pelos alunos já foram discutidas no capítulo 2 desse trabalho. Após a apresentação dos resultados encontrados pelos alunos o professor apresenta os pares da partição de cada valor de n proposto e faz a discussão do Teorema 2.1.1, justificando porque esses 7 números são denominado como "Os Sete Casos Impossíveis".

3.3 Atividade Proposta 3

Complete estas duas partições de pares de soma quadrada do conjunto $\{1, 2, ..., 26\}$.

3.3.1 Discussão da Atividade Proposta 3

Nessa atividade o aluno deverá apresentar os 5 pares que faltam pra completar a primeira e os 11 pares que faltam pra segunda partição do 26, como ele já sabe que para $n = 26$ temos 13 pares, então não terá dificuldades para identificar que faltam 5 pares,e 11 pares respectivamente e quais são esses pares. Os pares encontrados pelos alunos no primeiro par devem ser $\{\{9, 16\}; \{10; 26\}; \{24, 25\}; \{11, 14\}; \{12, 13\}\}$.

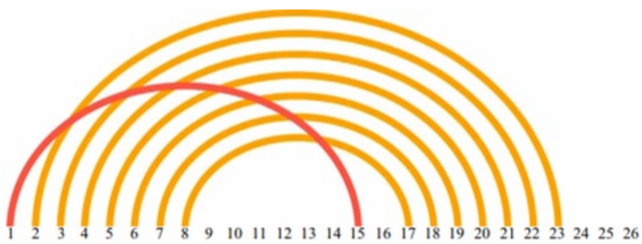

Figura 3.2: Arco-Íris - Atividade 3

Figura 3.3: Arco-Íris - Atividade 3

Em relação a segunda partição os alunos devem apresentar respostas diferentes, pois como o 26 possui 6 partições distintas eles poderão apresentar ate 5 partições diferentes, já que uma já foi usada na primeira partição, essa atividade é uma boa oportunidade para o professor explicar que a partir do número 26 todos os números pares possui varias partições diferentes e inclusive apresentar as tabelas 1 e 2 que estão descritas nesse trabalho.

Para a resolução dessa atividade foi construída o arco- íris em uma base de MDF, forrada com papel contact preto, colocando os números de 1 a 26 em círculos de papal colados na base com arruelas coladas encima de cada número, e os arcos de comprimentos diferentes em cordão grosso cru que foram tingidos de acordo com o resultado do quadrado perfeito a ser encontrado, em cada arco foi colado nas extremidades duas bolinhas na mesma cor do arco com imãs nas pontas para que o aluno possa posicionar o arco nos extremos cuja soma seja um quadrado perfeito. Para endurecer o cordão foi colocado arame dentro.

A proposta do material concreto é o aluno manusear os arcos e encontrar as seis possibilidades de partição do número 26 em pares cuja soma é um quadrado perfeito. A ideia do material concreto é facilitar o entendimento e despertar o interesse dos alunos, caso o professor tenha interesse em construir com os alunos uma proposta seria convidar o professor de artes para participar desse momento e aproveitar para inserir ou relembrar alguns conceitos de geometria plana. A figura abaixo mostra o arco-íris depois de construído.

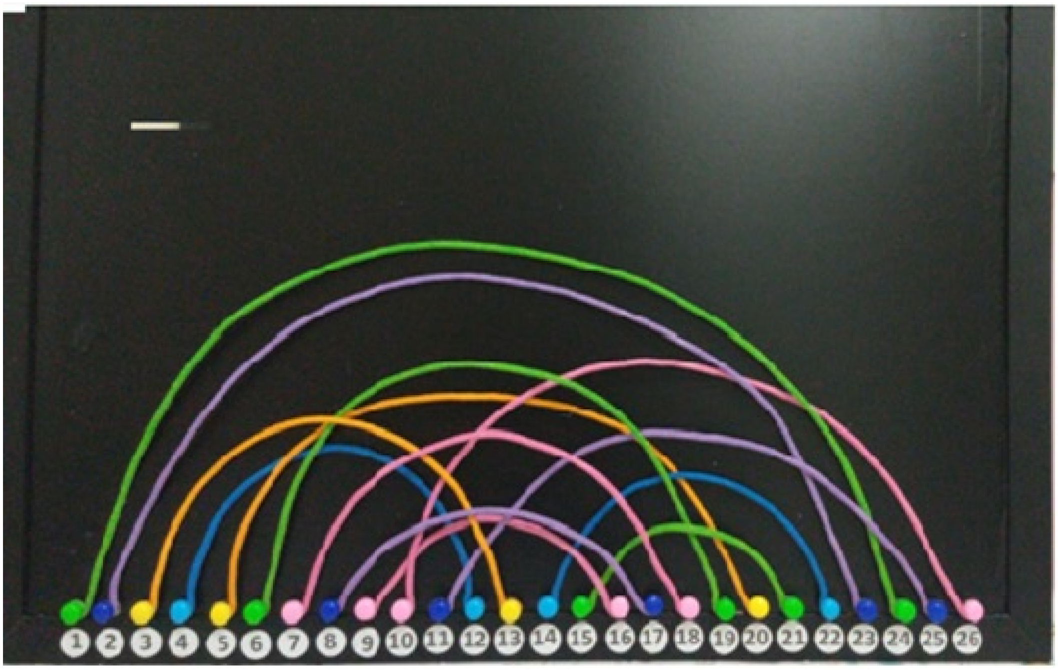

Figura 3.4: Arco-Íris - Atividade 3

3.4 Atividade Proposta 4

Escreva os pares cuja soma resulta em um quadrado para os seguintes valores de n, para

$$n = 8,$$

$$n = 16,$$

$$n = 32.$$

3.4.1 Discussão da Atividade Proposta 4

Nesta atividade o aluno deverá apresentar todos os pares ordenados cuja soma é um quadrado perfeito usando os conjuntos com 8,16 e 32 números como os alunos já estão mais familiarizados com a partição dos conjuntos em pares acredito que não terão muitas dificuldades, até agora o método utilizado para resolver as atividades propostas foi o da tentativa, e nessa também será, mas a partir da apresentação dos pares dessa atividade e dos questionamentos levantados pelos alunos o professor pode generalizar o resultado. Os alunos deverão apresentar os seguintes pares.

$$\begin{aligned}
n = 8: &\quad \{\{\ 1,8\};\{2,7\};\{3,6\};\{4,5\}\} \\
n = 16: &\quad \{\{1,8\};\{2,7\};\{3,6\};\{4,5\};\{9;16\};\{10,15\};\{11,14\};\{12;13\}\} \\
n = 32: &\quad \{\{1,8\};\{2,7\};\{3,6\};\{4,5\};\{9;16\};\{10,15\};\{11,14\};\{12;13\}; \\
&\quad \{17;32\};\{18;31\};\{19;30\};\{20;29\};\{21;28\};\{22;27\};\{23;26\};\{24;25\}
\end{aligned}$$

Após a apresentação dos resultados encontrados pelos alunos o professor deverá discutir com eles que a partição de 8 é possível porque todos os números que podem ser escritos na forma k^2–1 com k ímpar pode ser particionado em pares cuja soma é um quadrado perfeito e 8 pode ser escrito como 3^2–1, além disso a partição de 16 é a partição de 8 acrescentado dos pares $(9;16);(10,15);(11,14);(12;13)$, e eles podem observar que os pares acrescentados todos resultam no quadrado 25 que é a soma do número consecutivo a 8 (9) e o 16 que e valor de n, o mesmo acontece na partição de 32 que e a partição de 16 acrescentado dos pares $(17;32);(18;31);(19;30);(20;29);(21;28);(22;27);(23;26);(24:25)$ e que todos resultam no quadrado 49 que é a soma do número consecutivo ao n da partição anterior e o 32 que e o valor atual de n, sendo assim o professor pode generalizar o resultado da seguinte forma: dado um numero $n = k^2 - 1$ com k impar podemos escrever a partição de n em pares da seguinte forma. $(k^2–r, r)$, com $r = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n}{2}$ e a partir dessa partição podemos escrever todas as outras, adicionando os pares da partição anterior aos pares novos, esses pares devem ser formados usando o número consecutivo da partição anterior ao numero que somado da o próximo quadrado ímpar, ou seja:

$$n = 8$$

$$n + 9 = 25 \leftrightarrow n = 16$$

$$n + 17 = 49 \leftrightarrow n = 32$$

$$n + 33 = 81 \leftrightarrow n = 48$$

e assim por diante.

3.5 Atividade Proposta 5

Explore usando os números naturais de 1 a 32 como alvos. Quatro pares de vizinhos são dados abaixo. Preencha os círculos restantes de forma que todos os números adjacentes somem um quadrado e todos os números de 1 a 32 sejam usados uma vez. (Este é o menor valor para o qual o quebra-cabeça pode ser resolvido).

3.5.1 Discussão da Atividade Proposta 5

Nessa atividade o aluno deve posicionar os números 1 a 32 exceto os que já estão na figura a fim de que a soma de dois números consecutivos seja sempre um quadrado perfeito, nesse momento o aluno já está bem familiarizado com a soma de pares cujo resultado é um quadrado perfeito, então como nosso objetivo também é desenvolver a parte algébrica e o poder de abstração dos alunos, podemos reformular a pergunta lançando pra eles o seguinte desafio:

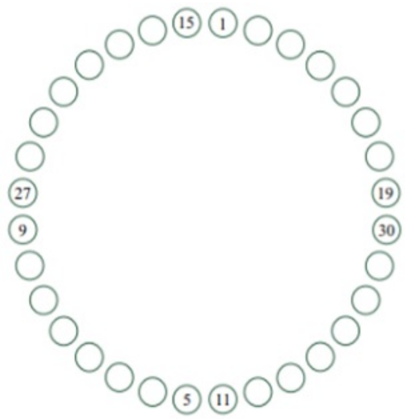

Figura 3.5: Arco-Íris - Atividade 5

"usando os números de 1 a 32 preencha o círculo de modo que os números adjacentes sejam solução da equação $x + y = z^2$."

Nessa atividade os alunos devem apresentar um nível mais elevado de dificuldades, pois além da mudança para uma linguagem matemática mais abstrata, agora estamos trabalhando com pares de números consecutivos de um conjunto com mais elementos, mas apesar da dificuldade a atividade é bastante interessante, pois permite que o professor comece a trabalhar conceitos abstratos que possibilitará ao aluno um melhor entendimento de outros conteúdos matemáticos e por ser semelhante a um jogo será bastante desafiadora.

Pra ficar mais interessante transformamos essa atividade em um jogo de tabuleiro, como o modelo apresentado nesse trabalho, pois fica mais fácil dos alunos manusearem as peças e chegarem com menos dificuldades no resultado outra possibilidade é o professor pedir aos alunos que confeccionem o jogo nas aulas de artes, podendo inclusive aproveitar e trabalhar conceitos de geometria como comprimento do círculo, área, diâmetro.

Esse jogo foi construído em uma base de MDF revestida com papel contact preto, em toda base foram coladas 32 roldanas formando um círculo grande conforme figura abaixo, também foram colocados círculos fixos referentes aos números $\{1, 15, 30, 19, 5, 11, 9, 27\}$ em MDF de 6 cm de diâmetro, forrados com papel contact branco com imãs no fundo e colados nas roldanas,os outros números que são móveis foram colocados em círculos de MDF de 6 cm de diâmetro forrados com contact coloridos com imãs colados no fundo, de modo que durante a realização da atividade o aluno pode manusear as peças até encontrar a solução do problema.

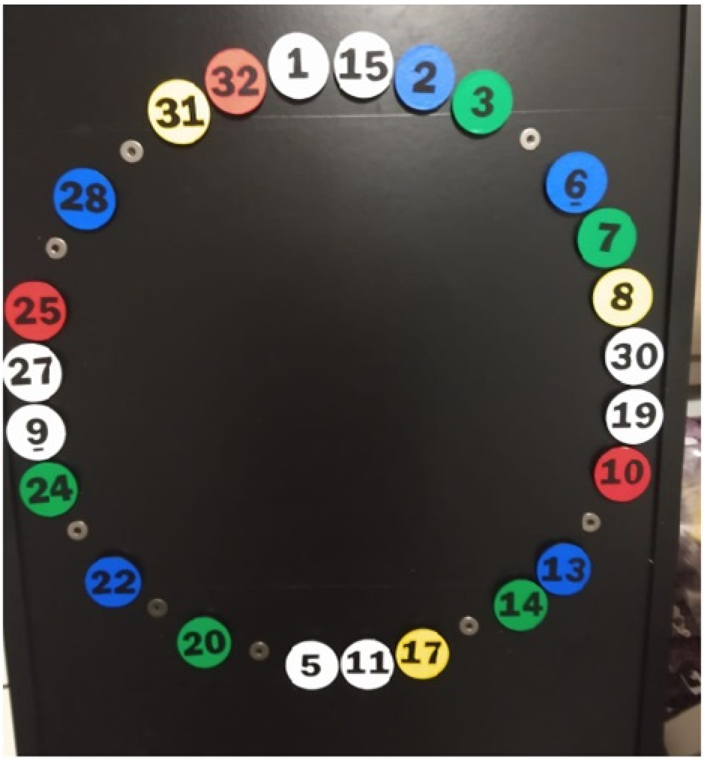

Figura 3.6: Arco-Íris - Atividade 5

Figura 3.7: Arco-Íris - Atividade 5

O objetivo é que nessa fase da atividade os alunos não resolvam mais por tentativas e sim possam desenvolver um caminho matemático a ser seguido, por exemplo é interessante que o aluno perceba que sendo 1 um número fixo no jogo ele só pode usar os números 3, 8, 15, 24 ,pois apenas com esses números ele forma um quadrado perfeito, como o 15 também é fixo então sobra apenas 3,8 e 24 , e assim ele construa o caminho de resolução da atividade, percebendo os conteúdos matemáticos discutidos ao longo desse trabalho.

Ao final da atividade 5 o professor pode comparar os pares encontrados aos pares encontrados pelos alunos na atividade 3 e caso a solução seja diferente o professor pode abordar que alguns números possuem mais de uma maneira de ser particionado em pares cuja soma é um quadrado perfeito.

Ao final da resolução dessas atividades em médio prazo pretende se:
Melhorar o desenvolvimento da resolução algébrica, trabalhar com abstração, despertar o senso investigativo em matemática, favorecer o desenvolvimento do cálculo mental e do raciocínio lógico.

A Curto prazo pretende-se:
Favorecer que o aluno aprofunde os seus conhecimentos sobre conceitos envolvendo números naturais, expanda o estudo sobre números quadrados perfeitos, aplique conceitos de geometria, além de possibilitar o desenvolvimento do raciocínio lógico e do calculo mental. E uma forma de avaliar se as atividades atingiram seus objetivos é verificar se houve um melhor entendimento do conteúdo de expressões algébricas. No campo dos conteúdos conceituais e procedimentais pretende se que o aluno desenvolva a sua capacidade de trabalhar em grupo, desenvolva o espírito da competição saudável alem de respeitar o tempo de aprendizado dos colegas. O problema de partição de pares quadrados e soma e suas variações combinam acesso e desafio em um pacote fácil de apresentar para os alunos, o que faz com que eles achem a atividade envolvente.

Referências Bibliográficas

[1] ANDERSON, J.; WALKER, A. **Partitions into square-pairs** Disponível em: https://www.cambridge.org/core/terms. Acessado em: 31 mar. 2019.

[2] ANTONICK, G.; HAMILTON, P. **Rainbow Squares Soluções.** Disponível em https://wordplay.blogs.nytimes.com/2015/04/06/picciotto-hamilton/. Acessado em: 12 jan. 2019.

[3] **BLOG Clubes de Matemática da OBMEP.** Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/quadrado-perfeito/. Acessado em: 12 dez. 2018.

[4] HAMILTON, G.; KEDLAYA, K. S. e PICCIOTTO, H. **Square-Sum Pair Partitions**. Disponível em http://dar.dvi.org/10.4169/college.math.j.46.2.264. Acessado em: 21 fev. 2019.

[5] HOLANDA, B. **Teoria dos Grafos**. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/Nivel1_grafos_bruno.pdf. Acessado em: 25 fev. 2019.

[6] MILIES, C. P.; COELHO S. P. **Números - Uma introdução á Matemática.** 3 ed. São Paulo: Editora da USP, 2001.

[7] MOREIRA, C. G. T. A. Et. al. **Teoria dos Números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[8] PIRES, C. M. C. **Números Naturais e Operações**. São Paulo: Editora Melhoramentos, 2013.

[9] VITTI, C. M. **Matemática com prazer a partir da história e da geometria.** 2. ed. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1999.