MÁRCIO ROBERTO GOMES

EXPLORANDO O TRATAMENTO MATRICIAL PARA UMA INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

MÁRCIO ROBERTO GOMES

EXPLORANDO O TRATAMENTO MATRICIAL PARA UMA INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 10 de abril de 2013

Ana Cristina Ferreira

Ariane Piovezan Entringer

Kennedy Martins Pedroso
(Orientador)

"Dedico este trabalho a Deus, aos meus filhos Rafael e Fernanda e à minha companheira Alexandra."

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus por me guiar nos estudos e em toda minha vida.

À Universidade Federal de Viçosa por se inscrever no PROFMAT e nos proporcionar um Mestrado Profissional em Matemática de qualidade.

Aos professores do PROFMAT: Alexandre Alves Miranda, Allan de Oliveira Moura, Catarina Mendes de Jesus, Kennedy Martins Pedroso, Lana Mara, Marinês Guerreiro, Merhan Sabeti e Simone Maria de Moraes pela dedicação e empenho durante as aulas das disciplinas.

Ao orientador, Kennedy Martins Pedroso, pela motivação, entusiasmo e dedicação durante a escrita da dissertação, revelando-se um grande professor e acima de tudo um grande amigo.

Às professoras Ariane Piovezan Entringer (UFV) e Ana Cristina Ferreira (UFOP) pela participação na Banca Examinadora

Aos meus colegas do PROFMAT, pela convivência nestes dois anos a qual me proporcionou um grande aprendizado em todos os sentidos.

À Alexandra, minha companheira, mulher virtuosa de presença constante nos momentos de tristeza e alegria, angústia e contentamento.

Aos meus filhos, Rafael e Fernanda, pela paciência e compreensão quanto a minha ausência em alguns momentos durante estes dois anos.

À CAPES e aos brasileiros que pagam impostos, pela bolsa recebida durante os dois anos de Mestrado.

A todos, muito obrigado!!!

Sumário

Lista de Figuras

Resumo

GOMES, Márcio Roberto, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, abril de 2013. **Explorando o tratamento matricial para uma introdução aos números complexos**. Orientador: Kennedy Martins Pedroso.

O objetivo deste trabalho é dar um enfoque mais geométrico na introdução dos números complexos, de forma a torná-los mais compreensíveis e eliminando a ideia de números estranhos e de difícil compreensão.Para alcançar tal objetivo far-se-á um estudo das propriedades operatórias das matrizes 2x2 do tipo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$, chegando ao resultado de que tais matrizes formam um corpo. Em seguida associa-se tais matrizes a pontos do plano $\mathbb{R}^2$. A partir desta associação obtem o resultado que multiplicar um vetor por uma matriz deste tipo corresponde a efetuar um giro e multiplicá-lo por um escalar. A partir daí faz a correspondência biunívoca entre as matrizes e os números complexos de forma que todas as propriedades estudadas no item anterior permanecem verdadeiras. Como resultado desta correspondência obtemos que multiplicar por i^2 corresponde a um giro de 180º , isto é, manter a direção e inverter o sentido o que corresponde a multiplicar por (-1), ou seja que $i^2 = -1$. Desta forma chega-se ao resultado que normalmente é apresentado aos alunos na introdução dos números complexos porém com um significado que outrora não possuía. A seguir fez um estudo da conformidade e deformação das transformações através de funções de variáveis complexas.Com esta abordagem fica facilitada a compreensão por parte dos alunos dos seus conceitos e mesmo a função dos mesmos, para concluir apresentamos uma situação prática em que se utiliza os números complexos.

Abstract

GOMES, Márcio Roberto, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, April, 2013. **Exploring the matrix treatment for an introduction to complex numbers**. Advisor: Kennedy Martins Pedroso.

The objective of this work is to give a more geometric approach in the introduction of complex numbers in order to make them more compreenssíveis and eliminating the idea of strange numbers and difficult to understand. To achieve this far will be a study of the properties of matrices 2x2 operative type $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$,with $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$, reaching the result that these matrices form one body. Then associated with such matrices to points on the plane $\mathbb{R}^2$. From the result of this association gets to multiply a vector by a matrix of this type corresponds to a spin efeturar and multiply it by a scalar. From then makes two-way matching between the matrices and complex numbers so that all properties studied in the previous section remain true. As a result of this correspondence we obtain that multiplying by i^2 corresponds to a spin 180^o , I.e., keep the direction and reverse direction which corresponds to multiplying by (-1), I.e., $i^2 = -1$. Thus one arrives at a result which is usually presented to students in the introduction of complex numbers but with a meaning that once lacked. Then did a study of compliance and deformation of transformations of variables through functions complexas.Com this approach is facilitated understanding by students of their same concepts and the same function, to conclude we present a practical situation in which it uses the complexs numbers.

Introdução

Os números complexos ocupam uma posição singular no ensino de Matemática, não merecendo grande atenção nos cursos de licenciatura em Matemática e no ensino médio são deixados para o final do planejamento e muitas vezes abordado de forma singela. Uma boa parte dos professores do ensino médio os veem como estranhos e de difícil compreensão, além disto consideram-nos inúteis. Sendo tais números abordados inicialmente como imaginários e usando $i = \sqrt{-1}$ como pilar fundamental da sua construção, fica difícil de compreender tal fato pois os alunos por 5 anos, ou seja, desde que se introduz o conceito de número negativo, o que é feito no 7º ano do Ensino Fundamental, até o 3º ano do Ensino Médio, assimilaram o conceito de que não existe raiz quadra de número negativo. Introduzir um novo ente matemático que vai de encontro a conceitos consolidados pelos alunos por anos seguidos se torna uma tarefa árdua e de certa forma quase impossível se não tivermos um argumento convincente.

Para que haja um real aprendizado, ou seja, que o aluno assimele o conteúdo e seja capaz de aplicacá-lo a outras situações, é aconselhável que desde o ínicio crie um argumento forte para a introdução dos números complexos, utilizando para tal conhecimentos adquiridos pelos alunos nas séries anteriores. O estudo das matrizes, feito no 2º ano do Ensino Médio, e a representação de pontos no plano $\mathbb{R}^2$, juntamente com o estudo da representação de vetores se tornam uma ferramenta que propicia o argumento necessário para a introdução dos números complexos.

Esta abordagem usando matrizes e vetores, ao contrário da abordagem usual puramente algébrica e ausente de significado e aplicação, possibilita desde o primeiro momento apresentar os números complexos como pontos ou vetores do plano e as operações entre eles como transformações aparecem como transformações geométricas passíveis de visualizaçoes. Trabalhando desde o ínicio a parte geométrica dos números complexos, e ao mesmo tempo revendo os conteúdos e fazendo a interligação entre eles.

Capítulo 1

Matrizes 2x2 especiais e sua estrutura algébrica

As matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$, possuem uma estrutura algébrica com algumas propriedades especiais. Vamos estudar essas propriedades em relação às operações de adição e subtração.

Para realizarmos este estudo, vamos definir o conjunto $\mathbb{M}$ como sendo o conjunto de todas as matrizes da forma$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$.

1.1 Adição

A matriz soma é obtida adicionando-se os elementos correspondentes das matrizes dadas.

Considere as matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$.

$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$.

Proposição 1. Sejam A_1, $A_2 \, e \, A_3$ matrizes de $\mathbb{M}$, então são válidas as seguintes propriedades para a adição:

i) Fechamento: $(A_1 + A_2) \,\epsilon\, \mathbb{M}$.

ii) Associativa: $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$.

iii) Comutativa: $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$.

iv) Existência de elemento neutro aditivo: $A_1 + A_0 = A_0 + A_1 = A_1$, onde $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz nula.

v) Existência do elemento oposto: $(A_1) + (-A_1) = (-A_1) + (A_1) = A_0$.

Demonstração

Considere as matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$.

i) Fechamento:

Note que a matriz soma $A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}$ é da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ que pertence ao conjunto $\mathbb{M}$.

ii) Associatividade:

$(A_1 + A_2) + A_3 = \left(\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$

$(A_1 + A_2) + A_3 = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$

$(A_1 + A_2) + A_3 = \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & -b_1-b_2-b_3 \\ b_1+b_2+b_3 & a_1+a_2+a_3 \end{bmatrix}$

e

$A_1 + (A_2 + A_3) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix} \right)$

$A_1 + (A_2 + A_3) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+a_3 & -b_2-b_3 \\ b_2+b_3 & a_2+a_3 \end{bmatrix}$

$A_1 + (A_2 + A_3) = \begin{bmatrix} a_1+a_2+a_3 & -b_1-b_2-b_3 \\ b_1+b_2+b_3 & a_1+a_2+a_3 \end{bmatrix}$, logo

$(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)$.

iii) Comutatividade:

$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & -b_1-b_2 \\ b_1+b_2 & a_1+a_2 \end{bmatrix}$ e

$A_2 + A_1 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2+a_1 & -b_2-b_1 \\ b_2+b_1 & a_2+a_1 \end{bmatrix}$, logo

$A_1 + A_2 = A_2 + A_1$.

iv) Existência de elemento neutro:

A matriz $A_0 = \begin{bmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{bmatrix}$, com $a_0 = b_0 = 0$ é o elemento neutro da adição pois,

$A_1 + A_0 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_0 & -b_1-b_0 \\ b_1+b_0 & a_1+a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$ e

$A_0 + A_1 = \begin{bmatrix} a_0 & -b_0 \\ b_0 & a_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0+a_1 & -b_0-b_1 \\ b_0+b_1 & a_0+a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, logo

$A_1 + A_0 = A_0 + A_1 = A_1$.

v) Existência de elemento oposto:

A matriz $(-A_1) = \begin{bmatrix} -a_1 & b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{bmatrix}$ é o elemento neutro da adição pois,

$A_1 + (-A_1) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1-a_1 & -b_1+b_1 \\ b_1-b_1 & a_1-a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(-A_1) + (A_1) = \begin{bmatrix} -a_1 & b_1 \\ -b_1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1+a_1 & b_1-b_1 \\ -b_1+b_1 & -a_1+a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A_1 + (-A_1) = (-A_1) + (A_1) = A_0$.

Multiplicação por um escalar k

$k.A = k \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & -kb \\ kb & ka \end{bmatrix}$ que é da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

1.1.1 Subtração

A subtração entre duas matrizes A_1 e A_2 é dada pela soma da primeira com o oposto da segunda, ou seja, $A_1 + (-A_2)$

$A_1 + A_2 = A_1 + (-A_2) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_2 & b_2 \\ -b_2 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & -b_1 + b_2 \\ b_1 - b_2 & a_1 - a_2 \end{bmatrix}$.

Note que sendo a matriz $(-A) \,\epsilon\, \mathbb{M}$, então todas as propriedades que são válidas para a adição também serão válidas para a subtração.

1.2 Multiplicação

O produto de duas matrizes dos tipos mxn e nxp é a matriz do tipo mxp, tal que cada um de seus elementos é resultado da soma dos produtos dos elementos da linha correspondente da 1ª matriz pelos elementos da coluna correspondentes da 2ª matriz.

$A_1 * A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$.

1.2.1 Propriedades da Multiplicação

Proposição 2.

Sejam $A,\ A_1,\ A_2\, e\, A_3$ matrizes de $\mathbb{M}$, então são válidas as seguintes propriedades para a multiplicação:

i) Fechamento: $(A_1 * A_2) \,\epsilon\, \mathbb{M}$.

ii) Associativa: $(A_1 * A_2) * A_3 = A_1 * (A_2 * A_3)$.

iii) Comutativa: $A_1 * A_2 = A_2 * A_1$.

iv) Existência de elemento neutro multiplicativo: $A_1 * I_2 = I_2 * A_1 = A_1$, onde $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade.

v) Existência do elemento inverso multiplicativo: $(A) * (A^{-1}) = (A^{-1}) * (A_1) = I_2$.

Demonstração

i) Fechamento:

$A_1 * A_2 = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}$ que é da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ que pertence ao conjunto $\mathbb{M}$

Então o conjunto $\mathbb{M}$ das matrizes acima e fechado em relação à multiplicação.

ii) Associatividade:

$$(A_1 * A_2) * A_3 = \left(\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$(A_1 * A_2) * A_3 = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$(A_1 * A_2) * A_3 = \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 & -a_1a_2b_3 + b_1b_2b_3 - a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 \\ b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1b_2b_3 + a_1a_2b_3 & -b_1a_2b_3 - a_1b_2b_3 - b_1b_2a_3 + a_1a_2a_3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 * (A_2 * A_3) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$A_1 * (A_2 * A_3) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2a_3 - b_2b_3 & -a_2b_3 - b_2a_3 \\ b_2a_3 + a_2b_3 & -b_2b_3 + a_2a_3 \end{bmatrix}$$

$$A_1 * (A_2 * A_3) = \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1b_2a_3 - b_1a_2b_3 & -a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 + b_1b_2b_3 - b_1a_2a_3 \\ b_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + a_1a_2b_3 & -b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 + a_1a_2a_3 \end{bmatrix},$$

logo,

$(A_1 * A_2) * A_3 = A_1 * (A_2 * A_3)$.

iii) Comutatividade:

$$A_1 * A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & -a_1b_2 - b_1a_2 \\ b_1a_2 + a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A_2 * A_1 = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2a_1 - b_2b_1 & -a_2b_1 - b_2a_1 \\ b_2a_1 + a_2b_1 & -b_2b_1 + a_2a_1 \end{bmatrix}, \text{ logo,}$$

$A_1 * A_2 = A_2 * A_1$.

iv) Existência de elemento neutro multiplicativo:

Seja $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz identidade de ordem 2, e $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$, temos:

$A_1 * I_2 = I_2 * A_1 = A_1$.

De fato,

$$A_1 * I_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$I_2 * A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}, \text{ logo}$$

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é o elemento neutro da multiplicação.

v) Existência de elemento inverso multiplicativo:

Seja a matriz A^{-1}o inverso multiplicativo da matriz $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

Então $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I_2$ onde I_2 é a matriz identidade de ordem 2.

Seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, então temos:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ax-bz & ay-bw \\ bx+az & by+aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by & -bx+ay \\ az+bw & -bz+aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na igualdade $\begin{bmatrix} ax-bz & ay-bw \\ bx+az & by+aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

devemos ter $\{ a\, x - bz = 1$
$bx + az = 0$ e $\{ a\, y - bw = 0$
$by + aw = 1$.

Resolvendo estes dois sistemas obtemos
$x = \frac{a}{a^2+b^2}$, $z = -\frac{b}{a^2+b^2}$, $y = \frac{b}{a^2+b^2}$ e $w = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Na igualdade $\begin{bmatrix} ax+by & -bx+ay \\ az+bw & -bz+aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

devemos ter $\{ a\, x + by = 1$
$-\, bx + ay = 0$ e $\{ a\, z + bw = 0$
$-\, bz + aw = 1$.

Resolvendo estes dois sistemas obtemos
$x = \frac{a}{a^2+b^2}$, $z = -\frac{b}{a^2+b^2}$, $y = \frac{b}{a^2+b^2}$ e $w = \frac{a}{a^2+b^2}$.

Então a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$ é o inverso multiplicativo da matriz $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Note que a matriz a $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$ é da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

A matriz inversa da matriz A existirá se, e somente se, $(a^2+b^2) \neq 0$, mas sendo a e b números reais então $a^2 \geq 0$ e $b^2 \geq 0$, então teremos
$(a^2+b^2) = 0$, se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$.

O conjunto $\mathbb{M}^* = \mathbb{M} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ das matrizes da forma $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ admite o elemento inverso multiplicativo.

1.2.2 Distributividade da multiplicação em relação à adição:

Proposição 3.

É válida em $\mathbb{M}$ a distributividade da multiplicação em relação à adição, ou seja,
$A_1 * (A_2 + A_3) = A_1 * A_2 + A_1 * A_3$.

Demonstração

$$A_1 * (A_2 + A_3) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix} \right) \text{ por distribuição matricial}$$

$$A_1 * (A_2 + A_3) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Pelo fechamento da multiplicação temos que:

$$\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & -b_4 \\ b_4 & a_4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_3 & -b_3 \\ b_3 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_5 & -b_5 \\ b_5 & a_5 \end{bmatrix}.$$

Mas, pelo fechamento da adição temos que:

$$\begin{bmatrix} a_4 & -b_4 \\ b_4 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_5 & -b_5 \\ b_5 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_6 & -b_6 \\ b_6 & a_6 \end{bmatrix}.$$

Concluímos que vale a distributividade da multiplicação em relação à adição em $\mathbb{M}$ por herança.

1.3 Conceito e definição de Corpo

Um corpo é um conjunto munido de duas operações, adição e multiplicação, que podemos denotar pelos sinais de "+" e ".", respectivamente, possivelmente não as usuais. Se um conjunto $\mathbb{K}$ é munido de uma adição "+" e uma multiplicação ".", a estrutura algébrica correspondente é denotada pela terna $(\mathbb{K}, +, .)$.[7]

Se uma estrutura algébrica é denotada pela terna ordenada $(\mathbb{K}, +, .)$ e são satisfeitos os axiomas de corpo para a adição "+"e a multiplicação ".", então a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, +, .)$ é um corpo.

Os axiomas de corpo são os seguintes:

Adição
Comutatividade: $\forall\, a, b \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a + b = b + a$
Associatividade: $\forall\, a, b, c \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a + (b + c) = (a + b) + c$
Elemento neutro: $\forall\, a \,\epsilon\, \mathbb{K},\ \exists\, 0_K \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a + 0_K = 0_K + a = a$
Existência do elemento simétrico: $\forall\, a \,\epsilon\, \mathbb{K},\ \exists\, -a \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a + (-a) = (-a) + a = 0_K$

Multiplicação
Comutatividade: $\forall\, a, b \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a.b = b.a$
Associatividade: $\forall\, a, b, c \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a.(b.c) = (a.b).c$
Elemento neutro: $\forall\, a \,\epsilon\, \mathbb{K},\ \exists\, 1_K \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a.1_K = 1_K.a = a$
Existência do elemento inverso multiplicativo: $\forall\, a \,\epsilon\, \mathbb{K} - \{0_K\},\ \exists\, a^{-1} \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1_K$
Distributividade da multiplicação a esquerda com respeito a adição: $\forall\, a, b, c \,\epsilon\, \mathbb{K},\ a.(b + c) = a.b + a.c$
Distributividade da multiplicação a direita com respeito a adição: $\forall\, a, b, c \,\epsilon\, \mathbb{K},\ (a + b).c = a.c + b.c$

O conjunto $\mathbb{M}$ das matrizes acima, satisfazendo as propriedades estabelecidas em 1.1, 1.2 e 1.3 acima, fazem de $\mathbb{M}$ um corpo.

1.4 Grupo Abeliano

Um grupo abeliano (ou grupo comutativo) é um grupo $(\mathbb{G}, *)$ em que a operação $*$ é comutativa em $\mathbb{G}$, isto é, $\forall\, x\,,\, y \,\epsilon\, \mathbb{G},\; x * y = y * x$.

O conjunto $\mathbb{M}* = \mathbb{M} - \{matriz\ nula\}$ das matrizes acima, satisfazendo as propriedades estabelecidas em 1.2 acima, fazem de $\mathbb{M}$ um grupo abeliano.

1.5 Representação gráfica das matrizes 2x2 especiais

Vamos associar cada matriz da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, com $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$, com um ponto $P = (x_p, y_p)$ de $\mathbb{R}^2$, onde $x_p = a$ e $y_p = b$. Desta forma, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos de $\mathbb{R}^2$ e as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Podemos então representar as coordenadas cartesianas de um ponto de $\mathbb{R}^2$ por uma matriz do tipo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, ou seja $P = (a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ é a representação de um P ponto de $\mathbb{R}^2$ de abscissa igual a a e ordenada igual a b.

Exemplo

A figura 1.1 a seguir mostra a representação gráfica em $\mathbb{R}^2$ das matrizes

$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

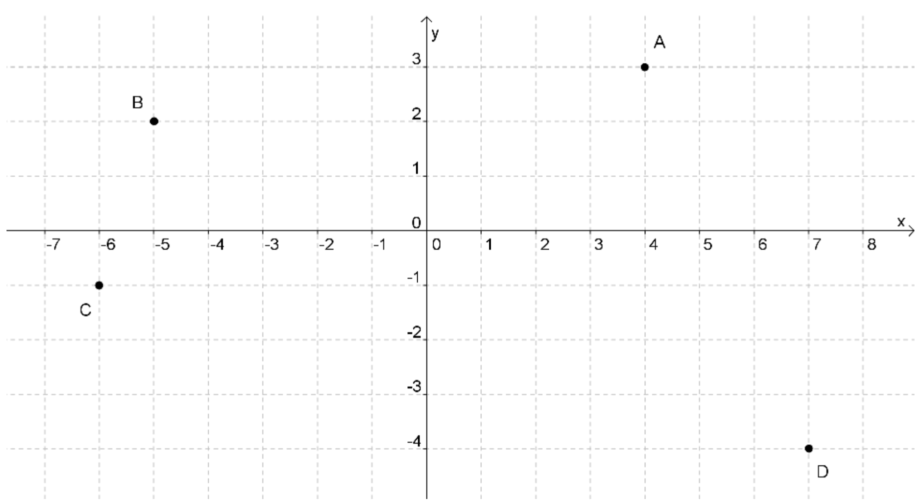

Figura 1.1: Representação gráfica das matrizes A, B, C E D.

1.6 Ação geométrica do grupo $(\mathbb{M}, *)$ sobre os vetores de $\mathbb{R}^2$

Um vetor $v = (v_x, v_y)$ de $\mathbb{R}^2$ é representado por uma matriz $\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$, onde o v_x representa a abscissa e v_y representa a ordenada da representação do vetor em $\mathbb{R}^2$, logo $v = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$ [4, pag.3].

A norma ou "comprimento" de um vetor $v = (v_x, v_y)$ em $\mathbb{R}^2$, denotada por $\|v\|$, é definida como : $\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

O ângulo formado pelo vetor $v = (v_x, v_y)$ em $\mathbb{R}^2$, com o eixo OX é igual a θ , sendo $sen\,\theta = \frac{v_1}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$ e $cos\,\theta = \frac{v_2}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$. Conforme mostra a figura 1.2

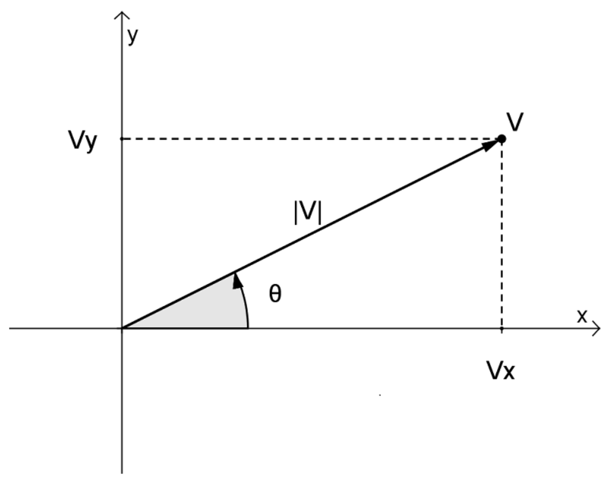

Figura 1.2: Módulo e argumento do vetor V

Proposição 4

O grupo $\mathbb{M}* = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \right\} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ "age" sobre os vetores $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

i) Provoca um giro no sentido positivo igual a um ângulo θ, onde $sen\,\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $cos\,\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

ii) Multiplica a sua norma $\|v\|$ por $\sqrt{a^2+b^2}$.

Demonstração

i) De fato, sabemos da álgebra linear que a matriz $R = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação, ou seja , o seu produto pelo vetor $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, prova um giro no sentido positivo igual ao ângulo θ e não altera a norma de v pois $det\,R = cos^2\theta + sen^2\theta = 1$.

Comparando a matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$com a matriz de rotação $\begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$, [4, pag.44], e fazendo $\theta = arctan\,\frac{b}{a}$ ou seja $\frac{b}{a} = \frac{sen\,\theta}{cos\,\theta}$, podemos determinar λ tal que $b = \lambda.sen\,\theta$ e $a = \lambda.cos\,\theta$.

Então $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda.cos\,\theta & -\lambda.sen\,\theta \\ \lambda.sen\,\theta & \lambda.cos\,\theta \end{bmatrix} = \lambda.\begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$ ou seja

$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda.\begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$(1.6.1)

Logo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ efetua um giro de θ , no sentido positivo, sobre o vetor $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ com $sen\,\theta = \frac{b}{\lambda}$ e $cos\,\theta = \frac{a}{\lambda}$.

ii) Na equação (1.6.1) nota-se que o vetor $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ fica multiplicado por λ, logo a sua norma fica multiplicada por λ.

E na igualdade dos determinantes das matrizes $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda.cos\,\theta & -\lambda.sen\,\theta \\ \lambda.sen\,\theta & \lambda.cos\,\theta \end{bmatrix}$, temos

$a^2 + b^2 = \lambda^2.cos^2\,\theta + \lambda^2.sen^2\,\theta = \lambda^2.(cos^2\,\theta + sen^2\,\theta)$

$a^2 + b^2 = \lambda^2 \Longrightarrow \lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Logo, a norma de $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ fica multiplicada por $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemplo 1

$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

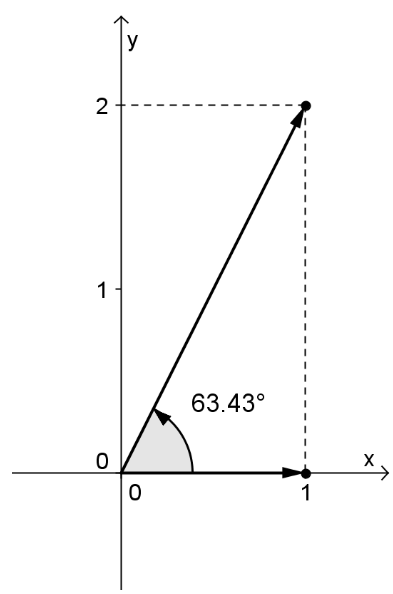

Figura 1.3: Ação da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ no vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Veja a figura 1.3, note que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ agiu sobre o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ girando-o no sentido positivo (anti-horário) de um ângulo igual $arctan\,\frac{2}{1}$ e multiplicando sua norma por $\sqrt{1^2+2^2}$, ou seja, $\sqrt{5}$.

Exemplo 2
$\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$

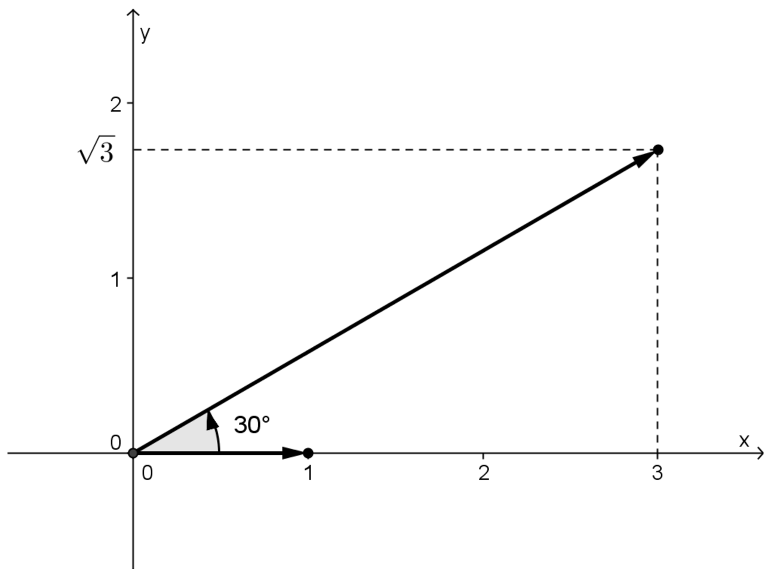

Figura 1.4: Ação da matriz $\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$ no vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Veja a figura 1.4, note que a matriz $\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$ agiu sobre o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ girando-o no sentido positivo (anti-horário) de um ângulo igual $arctan\,\frac{\sqrt{3}}{3} = 30^o$ e multiplicando sua norma por $\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}$, ou seja, $\sqrt{12}$.

Exemplo 3
$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$

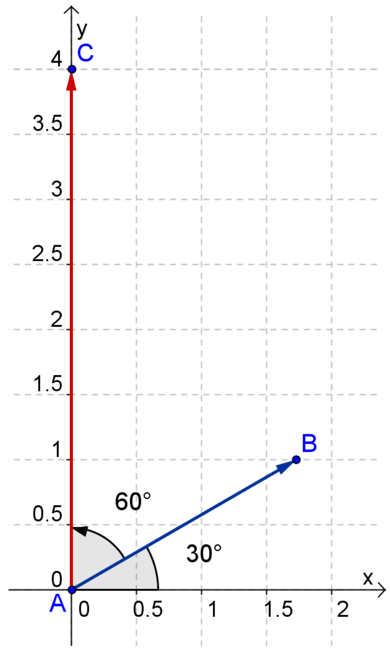

Figura 1.5: ação da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ no vetor $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Veja a figura 1.5, note que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ agiu sobre o vetor $\begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ girando-o no sentido positivo (anti-horário) de um ângulo igual $arctan\sqrt{3}$ e multiplicando sua norma por $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$ ou seja 2.

$\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Capítulo 2

Números Complexos

2.1 Apresentação usual

“O conjunto dos números complexos é definido como sendo o conjunto dos pares ordenados (x,y) para os quais valem as seguintes propriedades:

Igualdade: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentam primeiros termos iguais e segundos termos iguais,ou seja, $(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \ e \ b = d$.

Adição: a soma de dois pares ordenados é igual ao par ordenado cujos primeiro e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros termos e a soma dos segundos termos dos pares ordenados dados, ou seja, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

Multiplicação: O produto de dois pares ordenados é igual ao par ordenado cujo primeiro termo é o produto dos primeiros termos menos o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é igual à soma dos produtos do primeiro termo de cada par pelo segundo termo do outro.

$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + cb)$

Definição adaptada de [1].

2.2 Apresentação usando matrizes

Estudaremos os números complexos da forma $z = a+bi$, apresentando-os na forma de uma matriz quadrada de ordem 2 da forma $z = a.(\,1\,)\,0$
$01 + b.(\,0\,) - 1$
$10 = (\,a\,)\,0$
$0a + (\,0\,) - b$
$b0 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ com $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$, onde a representa a parte real e b representa a parte imaginária [7].

A representação no plano cartesiano é feita por meio de vetores [6, pag.69], que une a origem (0,0) ao ponto correspondente ao número complexo, usando o eixo x para representar a parte real e o eixo y para representar a parte imaginária, conforme mostra a figura abaixo.

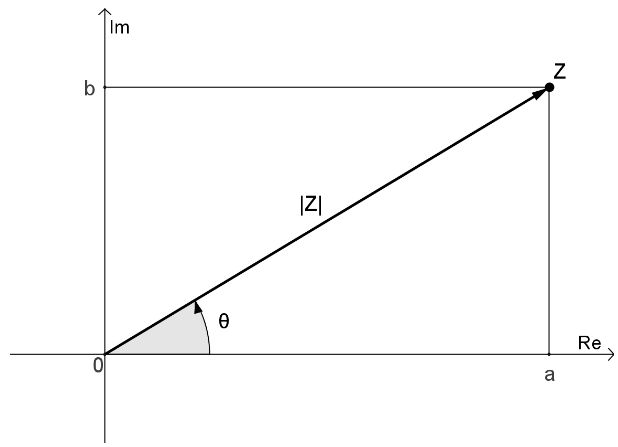

Figura 2.1: Representação do número complexo $z = a + bi$.

As operações matriciais com estas matrizes satisfazem todas as propriedades dos números complexos.

2.2.1 Adição

Para adicionarmos dois números complexos $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, que correspondem a $z = a + bi$ e $w = c + di$, na forma tradicional faríamos $z + w = ((a + c) + (b + d)i$, basta adicionarmos as matrizes:
$z + w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$.

Exemplo:

Efetue a adição dos números complexos $z_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $z_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, note que estes números, em notação usual correspondem a $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 + 1i$,
$z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 & -3+(-1) \\ 3+1 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Esta adição está representada na figura 2.2.

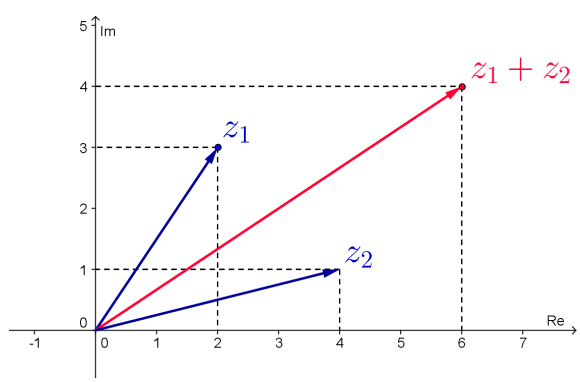

Figura 2.2: Adição de números complexos $z_1 + z_2$.

2.2.2 Subtração

A subtração de dois números complexos $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, corresponde à adição do primeiro com o oposto do segundo ou seja, a adição da primeira matriz com a oposta da segunda:

$z - w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a-c & -b+d \\ b-d & a-c \end{pmatrix}$.

Exemplo:

Efetue a subtração dos números complexos $z_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ e $z_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, note que estes números, em notação usual correspondem a $z_1 = 6 + 2i$ e $z_2 = 2 + 3i$,

$z_1 - z_2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$-$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$z_1 - z_2 = \begin{pmatrix} 6+(-2) & -2+3 \\ 2+(-3) & 6+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Esta subtração está representada na figura 2.3.

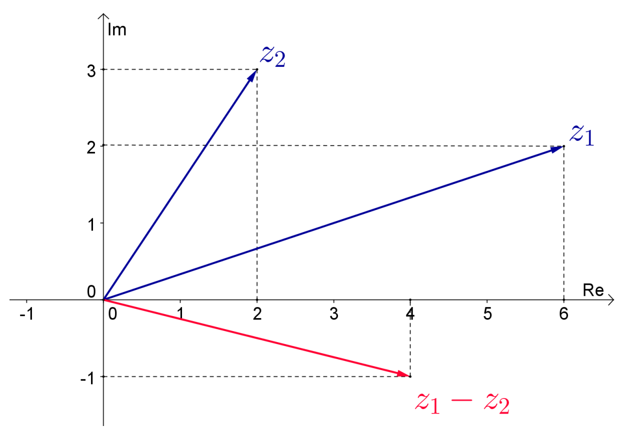

Figura 2.3: Subtração de números complexos $z_1 - z_2$.

2.2.3 Multiplicação

A multiplicação de dois números complexos $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ é dada pela multiplicação de matrizes, ou seja,

$z.w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$.

É interessante analisarmos a multiplicação de números complexos em função da representação geométrica.

Para isto, vamos definir algumos elementos dos números complexos:

Afixo de um número complexo é o ponto do plano, onde representamos no eixo horizontal a parte real e no eixo vertical a parte imaginária.

O módulo de um número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é dado pela distância da origem ao seu afixo (a, b) e indicaremos por $|z|$ ou ρ.

Logo $|z| = \rho_z = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Argumento de um número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é dado pelo ângulo formado eixo real e o pelo vetor definido pelo afixo do número e indicaremos por θ, conforme mostra a figura 2.4.

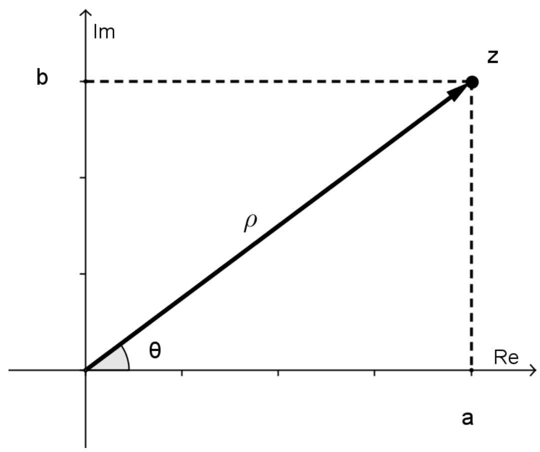

Figura 2.4: Módulo e argumento do número complexo z.

Temos então que o argumento θ é o ângulo com $tg\,\theta = \frac{b}{a}$, ou seja, $sen\,\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $cos\,\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, que devem ser verificados para determinar o quadrante.

Note que $a = |z|.cos\,\theta$ e $b = |z|.sen\,\theta$, ou seja, $z = \begin{pmatrix} |z|.cos\,\theta & -|z|.sen\,\theta \\ |z|.sen\,\theta & |z|.cos\,\theta \end{pmatrix}$.

O módulo do produto $z.w$ é dado pelo produto dos módulos dos fatores, ou seja,

$\rho_{zw} = \rho_z.\rho_w$.

De fato, temos que

$\rho_{zw} = \sqrt{(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2} = \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2bcad + a^2d^2}$

$\rho_{zw} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + b^2c^2 + a^2d^2} = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$

$\rho_{zw} = \sqrt{(a^2 + b^2)}.\sqrt{(c^2 + d^2)}$ logo,

$\rho_{zw} = \rho_z.\rho_w$.

O argumento do produto $z.w$ é dado pela soma dos argumentos dos fatores, ou seja,

$\theta_{zw} = \theta_z + \theta_w$.

De fato, temos:

$tg\,\theta_{zw} = \frac{bc+ad}{ac-bd}$, sendo $ac \neq 0$, podemos dividir ambos os termos da fração por ac,

$tg\,\theta_{zw} = \frac{bc+ad}{ac} : \frac{ac-bd}{ac} = (\frac{b}{a} + \frac{d}{c}) : (1 - \frac{bd}{ac}) = (\frac{b}{a} + \frac{d}{c}) : (1 - \frac{b}{a}.\frac{d}{c})$, mas

$\frac{b}{a} = tg\,\theta_z$ e $\frac{d}{c} = tg\,\theta_w$, então

$tg\,\theta_{zw} = (tg\,\theta_z + tg\,\theta_w) : (1 - tg\,\theta_z\,.\,tg\,\theta_w)$ e pela identidade da tangente da soma de dois arcos [6, pag.45], temos:

$tg\,\theta_{zw} = tg\,(\theta_z + \theta_w)$, ou seja, $\theta_{zw} = \theta_z + \theta_w$

Logo, concluímos que a multiplicação de um número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ por outro $w = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ equivale a multiplicar seus módulos entre si e somar seus argumentos [6, pag.80] , ou seja,

$z.w = \begin{pmatrix} |z|.|w|.cos\,(\theta_z + \theta_w) & -|z|.|w|.sen\,(\theta_z + \theta_w) \\ |z|.|w|.sen\,(\theta_z + \theta_w) & |z|.|w|.cos\,(\theta_z + \theta_w) \end{pmatrix}$

$z.w = |z|.|w|. \begin{pmatrix} cos\,(\theta_z + \theta_w) & -sen\,(\theta_z + \theta_w) \\ sen\,(\theta_z + \theta_w) & cos\,(\theta_z + \theta_w) \end{pmatrix}.$

Exemplo:

O produto de $z = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ por $w = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ é igual a $z.w = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Onde temos:

$|z| = \sqrt{5}$, $\theta_z = arctg\,\frac{1}{2} \cong 26,57^o$, $|w| = \sqrt{5}$, $\theta_w = arctg\,-2 \cong 116,57^o$, $|zw| = 5$ e $\theta_{zw} = arctg\,-\frac{3}{4} \cong 143,14$.

Note que :

$|zw| = |z|.|w|$ e $\theta_{zw} = \theta_z + \theta$.

A figura 2.5 representa este produto.

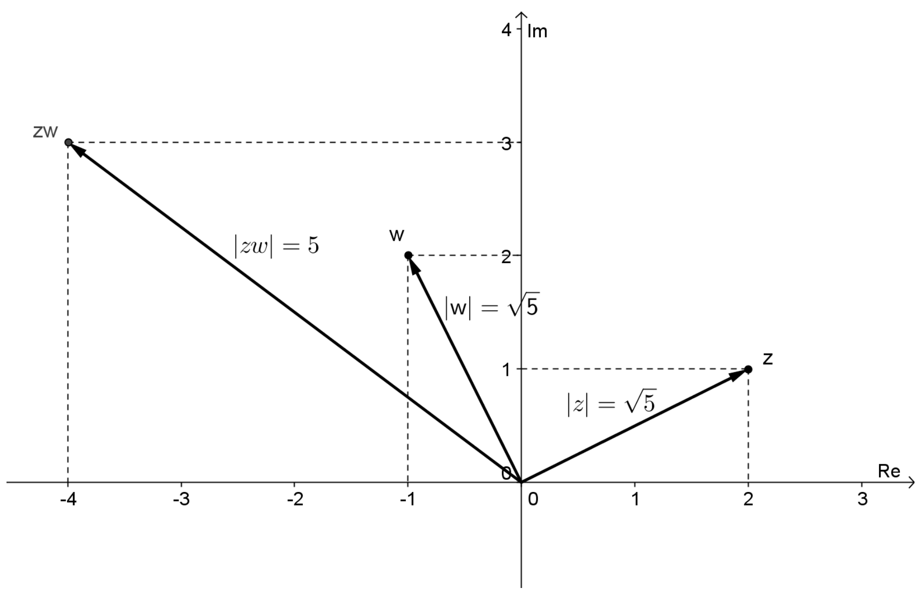

Figura 2.5: Produto de números complexos $z.w$.

2.2.4 Divisão

A divisão de dois números complexos na forma $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ é efetuada multiplicando a primeira matriz pelo inverso da segunda, ou seja;

$z : w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1}.$

Sabendo-se que a inversa de uma matriz quadrada de ordem 2, quando existe, é dada pelo produto do inverso do determinante da matriz pela matriz que se obtem invertendo a ordem dos elementos da diagonal principal e trocando os sinais dos elementos da diagonal secundária da matriz dada.

$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{c^2+d^2} . \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$

Note que no caso da matriz $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ a inversa é dada pelo produto do inverso do determinante pela transposta da mesma.[7]

Então temos:

$z : w = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1},$

$z : w = \frac{1}{c^2+d^2} . \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}.$

Vamos analisar a divisão de números complexos em termos de sua representação geométrica. Para isto, basta lembrarmos que a multiplicação é a operação inversa da multiplicação, logo, o módulo do quociente será igual ao quociente dos módulos do dividendo e do divisor e o argumento do quociente será igual à diferença entre os argumentos do dividendo e do divisor, ou seja :

$|z : w| = |z| : |w|,$

$\theta_{z:w} = \theta_z - \theta_w, \quad \text{logo},$

$z : w = \begin{pmatrix} |z| : |w|.cos\,(\theta_z - \theta_w) & -|z| : |w|.sen\,(\theta_z - \theta_w) \\ |z| : |w|.sen\,(\theta_z - \theta_w) & |z| : |w|.cos\,(\theta_z - \theta_w) \end{pmatrix}$

$z : w = \frac{|z|}{|w|} \begin{pmatrix} cos\,(\theta_z - \theta_w) & -sen\,(\theta_z - \theta_w) \\ sen\,(\theta_z - \theta_w) & cos\,(\theta_z - \theta_w) \end{pmatrix}.$ Veja a figura 2.6

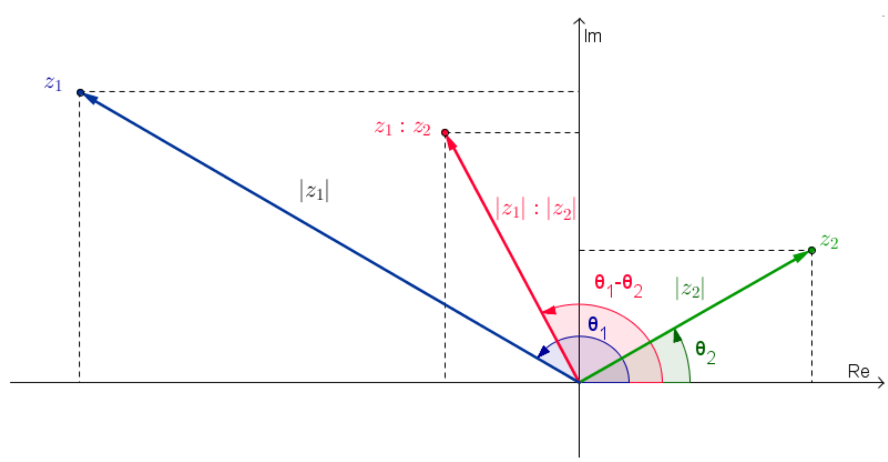

Figura 2.6: Quociente entre números complexos $z_1 : z_2$.

Exemplo:

O quociente entre $z_1 = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ e $z_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

É dado por:

$z_1 : z_2 = \frac{1}{2^2+2^2}.\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & +2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}.\begin{pmatrix} 8 & -24 \\ 24 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Onde temos:

$|z_1| = \sqrt{80}$,$\theta_{z_1} = arctg\,(-2) \cong 116,57^o$,

$|z_2| = \sqrt{8}$, $\theta_{z_2} = arctg\,1 = 45^o$, $|z_1 : z_2| = \sqrt{10}$ e

$\theta_{z_1:z_2} = arctg\,3 \cong 71,57^o$.

A figura 2.7 representa este quociente.

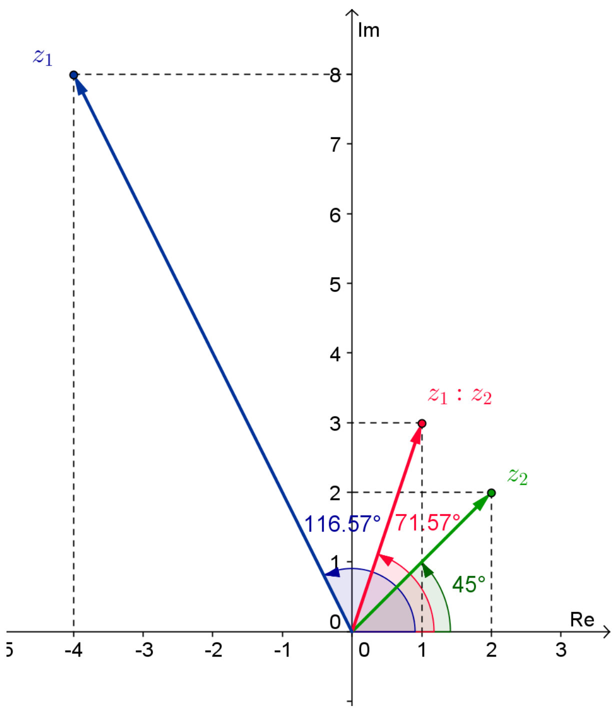

Figura 2.7: Quociente entre números complexos $z_1 : z_2$.

Note que:

$|z_1 : z_2| = |z_1| : |z_2|$ e $\theta_{z_1:z_2} = \theta_{z_1} - \theta_{z_2}$.

2.2.5 Potenciação

Vamos calcular a potência de um número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$ lembrando que a potenciação nada mais é que uma multiplicação de fatores iguais e que a multiplicação consiste em uma soma de parcelas iguais.

Logo determinaremos a potência de um número complexo da seguinte forma:

O módulo da potência será igual à potência do módulo do número dado;

O argumento da potência será igual ao produto do expoente pelo argumento do número dado.

Ou seja,

$|z^n| = |z|^n$ e $\theta_{z^n} = n.\theta_z$.

A potência encontrada será

$z^n = |z^n|.\begin{pmatrix} cos\,\theta_{z^n} & -sen\,\theta_{z^n} \\ sen\,\theta_{z^n} & cos\,\theta_{z^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z^n|.cos\,\theta_{z^n} & -|z^n|.sen\,\theta_{z^n} \\ |z^n|.sen\,\theta_{z^n} & |z^n|.cos\,\theta_{z^n} \end{pmatrix},$

$z^n = \begin{pmatrix} |z|^n.cos\,n.\theta_z & -|z|^n.sen\,n.\theta_z \\ |z|^n.sen\,n.\theta_z & |z|^n.cos\,n.\theta_z \end{pmatrix} = |z|^n.\begin{pmatrix} cos\,n.\theta_z & -sen\,n.\theta_z \\ sen\,n.\theta_z & cos\,n.\theta_z \end{pmatrix}.$

Esta expressão corresponde à formula de “De Moivre” [6][pag.83].

Exemplo 1:

Dado o número complexo $z = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ vamos determinar z^4.

Temos que:

$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ e $sen\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos\,\theta = \frac{1}{2}$, logo $\theta = 60^o$,

$|z|^4 = 2^4 = 16$ e $4.\theta = 4.60^o$ =240^o,

$z^4 = \begin{pmatrix} 16.cos\,240^o & -16.sen\,240^o \\ 16.sen\,240^o & 16.cos\,240^o \end{pmatrix}$

$z^4 = \begin{pmatrix} 16.\left(\frac{-1}{2}\right) & -16.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 16.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & 16.\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$

$z^4 = \begin{pmatrix} -8 & 8\sqrt{3} \\ -8\sqrt{3} & -8 \end{pmatrix}.$

A figura 2.8 mostra a representação de z e z^4.

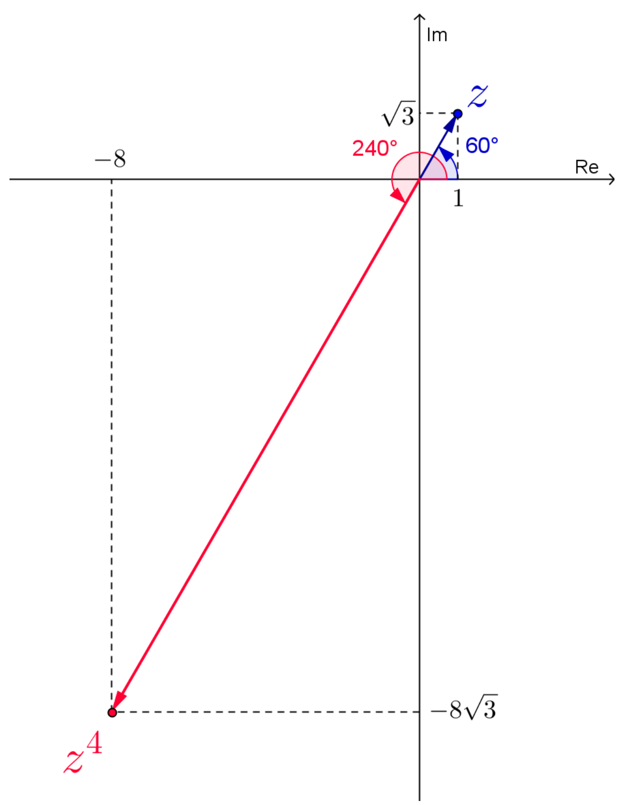

Figura 2.8: Potência de número complexo z^4.

Exemplo 2:

Dado o número complexo $z = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{pmatrix}$ vamos determinar z^5.

$|z| = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $sen\,\theta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $cos\,\theta = 1 : \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $\theta = 30^o$

$|z|^5 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^5 = \frac{32\sqrt{3}}{27}$ e $5.\theta = 5.30^o = 150^o$,

$z^5 = \begin{pmatrix} \frac{32\sqrt{3}}{27}.cos\,150^o & -\frac{32\sqrt{3}}{27}.sen\,150^o \\ \frac{32\sqrt{3}}{27}.sen\,150^o & \frac{32\sqrt{3}}{27}.cos\,150^o \end{pmatrix}$

$z^5 = \begin{pmatrix} \frac{32\sqrt{3}}{27}.\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) & -\frac{32\sqrt{3}}{27}.\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{32\sqrt{3}}{27}.\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \frac{32\sqrt{3}}{27}.\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}$

$z^5 = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & -\frac{16\sqrt{3}}{27} \\ \frac{16\sqrt{3}}{27} & -\frac{16}{9} \end{pmatrix}$.

A figura 2.9 mostra a representação de z e z^5.

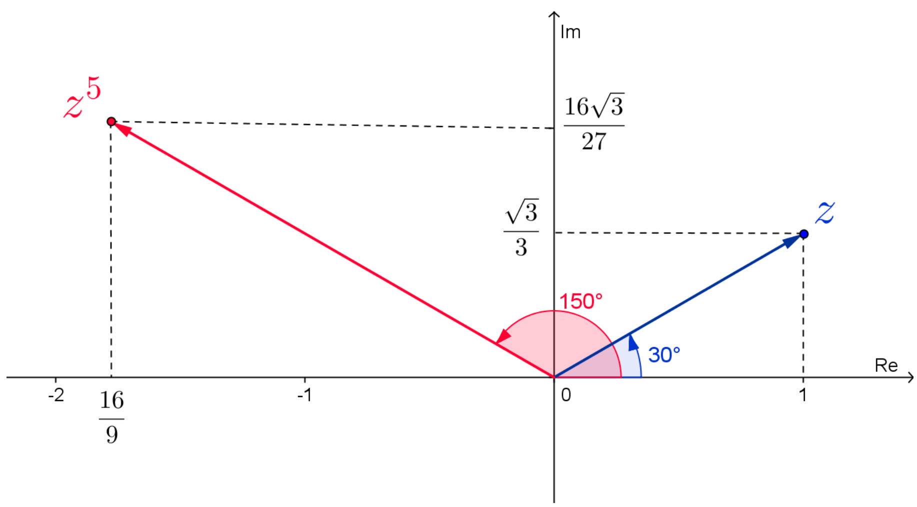

Figura 2.9: Potência de número complexo z^5.

2.2.6 Radiciação

Sendo a Radiciação a operação inversa da potenciação, então, para efetuarmos a radiciação de números complexos devemos proceder de forma inversa à potenciação, a saber:

O módulo resultante será igual à raiz do módulo do número dado,

$|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$.

O argumento resultante será igual ao quociente do argumento do número dado pelo índice da raiz,

$\theta_{\sqrt[n]{z}} = \frac{\theta_z}{n}$.

Seguindo o mesmo raciocinio da potenciação temos que,

A raiz n-ésima de um número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ será dada por:

$\sqrt[n]{z} = \begin{pmatrix} \sqrt[n]{|z|}.cos\,\frac{\theta_z}{n} & -\sqrt[n]{|z|}.sen\,\frac{\theta_z}{n} \\ \sqrt[n]{|z|}.sen\,\frac{\theta_z}{n} & \sqrt[n]{|z|}.cos\,\frac{\theta_z}{n} \end{pmatrix} = \sqrt[n]{|z|} \begin{pmatrix} cos\,\frac{\theta_z}{n} & -sen\,\frac{\theta_z}{n} \\ sen\,\frac{\theta_z}{n} & cos\,\frac{\theta_z}{n} \end{pmatrix}.$

Notas:

1)Sendo $|z| \geq 0$ e $n \geq 2$, sempre será possível determinar $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}$ e $\theta_{\sqrt[n]{z}} = \frac{\theta_z}{n}$ logo podemos concluir que sempre existirá a raiz n-ésima de um número complexo.

2) As funções seno e cosseno são periódicas de período 2π, podemos considerar todos os valores de $\theta_{\sqrt[n]{z}}$ tais que $\frac{\theta_z}{n} \leq \theta_{\sqrt[n]{z}} < \frac{\theta_z+2k\pi}{n}$ com $k\,\epsilon\,\mathbb{R}$ ou seja, $\frac{\theta_z}{n} \leq \theta_{\sqrt[n]{z}} < \frac{\theta_z+2n\pi}{n} + k.\frac{2\pi}{n}$, então fazendo k variar de 0 até $(n-1)$ obtemos n valores, logo todo número complexo possui n raízes n-ésimas complexas.

Exemplo

Determine as raízes cúbicas de $z = \begin{pmatrix} -4\sqrt{3} & -4 \\ 4 & -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Resolução

$|z| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{16.3 + 16} = 8,$

$$\left.\begin{array}{l} sen\,\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \\ cos\,\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \implies \theta = 150^0\ ,$$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}.\begin{pmatrix} cos\,\frac{150^0}{3} + \frac{k}{3}.360^0 & -sen\,\frac{150^0}{3} + \frac{k}{3}.360^0 \\ sen\,\frac{150^0}{3} + \frac{k}{3}.360^0 & cos\,\frac{150^0}{3} + \frac{k}{3}.360^0 \end{pmatrix}$, com $k\,\epsilon\,\{0,1,2\}$.

Temos as seguintes raízes

$2.\begin{pmatrix} cos\,50^0 & -sen\,50^0 \\ sen\,50^0 & cos\,50^0 \end{pmatrix}$, $2.\begin{pmatrix} cos\,170^0 & -sen\,170^0 \\ sen\,170^0 & cos\,170^0 \end{pmatrix}$, $2.\begin{pmatrix} cos\,290^0 & -sen\,290^0 \\ sen\,290^0 & cos\,290^0 \end{pmatrix}$.

2.3 Aplicações a fenômenos físicos

Na eletrônica e na eletricidade, a análise de circuitos de corrente alternada é feita com a ajuda de números complexos. Grandezas como a impedância (em ohms) e a potência aparente (em volt-ampere) são exemplos de quantidades complexas.

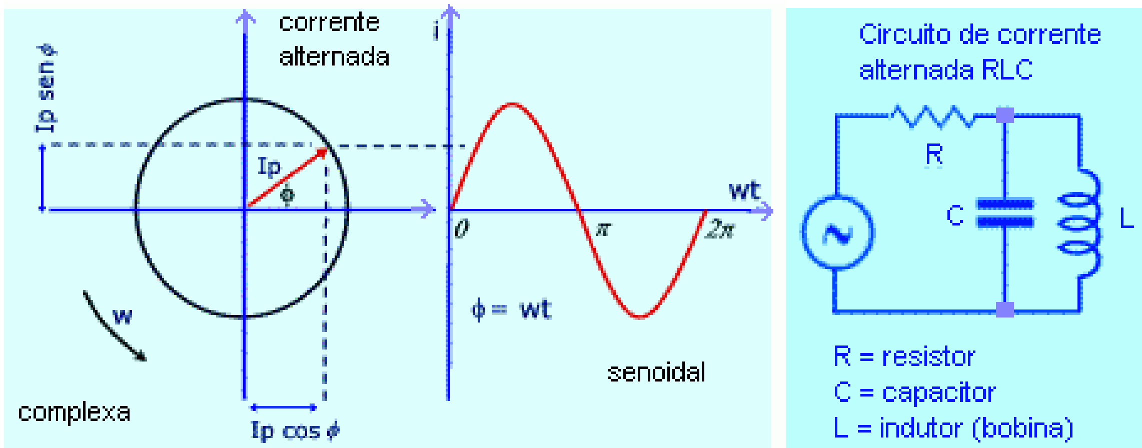

Figura 2.10: Gráfico de corrente alternada em circuito RLC.

A impedância é o número complexo $Z = R + jX$, ou na forma polar $Z = |Z|(cos\, f + j\, sen\, f)$, onde $j^2 = -1$, f é o ângulo (argumento) de defasagem entre a tensão aplicada e a corrente no circuito, $|Z|$ é o módulo, R é a resistência elétrica (em ohm) e X é a resultante (em ohm) das reatâncias indutivas e capacitivas do circuito. Na Física e na Engenharia é usado, como número imaginário, o j no lugar do i para evitar confusão com o i de corrente elétrica.

A potência aparente (em volt-ampere) é o número complexo $P = Pr + jPx$ ou $P = |P(cos\, f + j\, sen\, f)|$, onde $j^2 = -1$, $|P|$ é o módulo, f é o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente, Pr é a potência real ou ativa (em watt), Px é a potência reativa (em volt-ampere reativo). O valor do $cos\, f$ (fator de potência) é importante na determinação do aproveitamento da energia que está sendo gasta.

Capítulo 3

Deformação de figuras planas e conformidade

As funções de uma variável real $f(x)$, são demonstradas graficamente pelo gráfico da função. A equação $y = f(x)$ estabelece uma correspondência entre os pontos x no eixo x e pontos y no eixo y, isto é, leva pontos x em pontos y. Pode-se considerar que cada ponto x do eixo x é levado ao ponto $(x,\, y)$ do plano xy. A curva assim obtida é o gráfico da função $f(x)$. De modo análogo, usamos uma superfície para exibir graficamente uma função real $f(x,\, y)$ das variáveis x e y.

Entretanto quando $w = f(z)$ e as variáveis w e z são complexas, vamos desenhar dois planos complexos separadamente, como em [2], para as variáveis z e w: para cada ponto (x, y) no plano z, existe um ponto (u, v) no plano w, onde $w = u + iv$. Esta correspondência entre pontos nos dois planos se denomina aplicação ou transformação de pontos do plano z em pontos do plano w pela função f. Pontos w são imagens de pontos z. Esse termo também se aplica entre conjuntos como, por exemplo, imagem de uma curva, de uma região, etc.

Para empregarmos termos geométricos tais como translação, rotação e reflexão, é conveniente considerar a aplicação como transformação num só plano. A função $f(z) = z + 5$, pode ser interpretada como uma translação de cada ponto z à posição $w = z + 2$, enquanto que a função $f(z) = \overline{z}$ leva cada ponto z na reflexão $\overline{z}$ desse ponto no eixo real.
Exemplo:

A função $w = f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + iy$ leva os pontos de cada círculo $x^2 + y^2 = c^2$, onde $c \geq 0$, em alguns pontos da reta $u = c$, pois $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mas, para se ter todos os pontos de z no círculo, y deve assumir todos os valores entre $-c$ e c, e como $v = y$, v varia de $-c$ a c. A imagem do círculo, $u = c$, $-c \leq v \leq c$, é o segmento de reta $u = c$ compreendido entre as retas $v = u$ e $v = -u$, conforme mostra a figura 3.1.

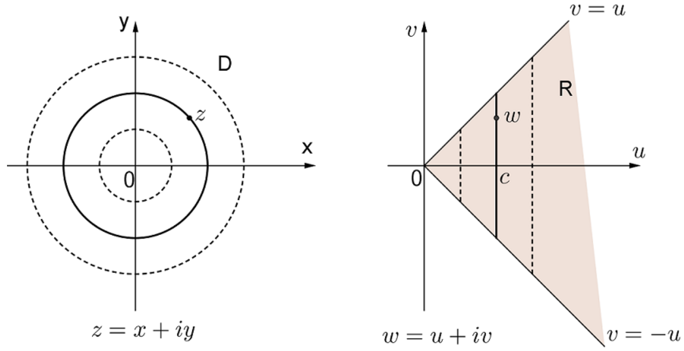

Figura 3.1: Transformação $w = f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} + iy$.

3.1 Transformações por funções elementares

3.1.1 Funções da forma $w = f(z) = z + C$

A transformação através de uma função $w = f(z) = z + C$, sendo C uma constante complexa , consiste na translação de cada ponto z através do vetor que representa C.

De fato, sendo $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$ então $w = \begin{bmatrix} a+e & -b-f \\ b+f & a+e \end{bmatrix}$ que corresponde ao deslocamento e no eixo real e f no eixo imaginário. Se aplicarmos a função $w = f(z)$ a todos os pontos de um figura esta será transladada do vetor que representa C, conforme mostra a figura 3.2.

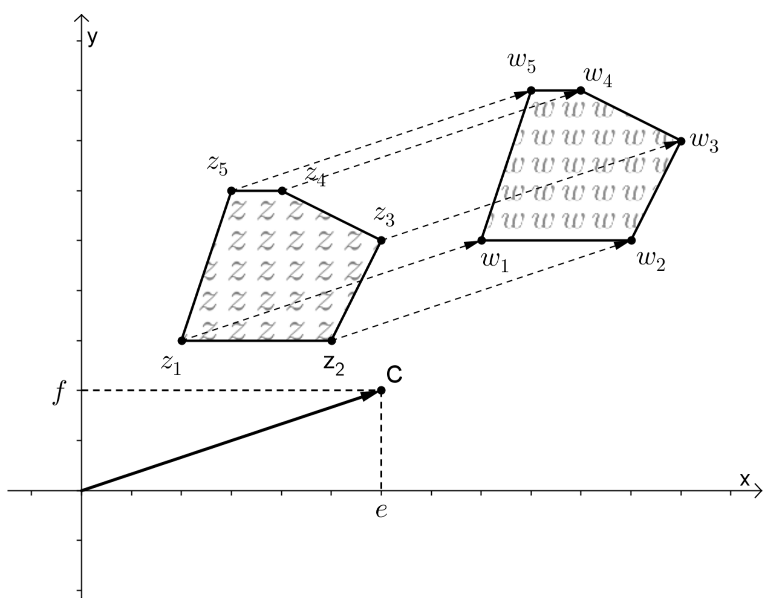

Figura 3.2: Translação $w = f(z) = z + C$.

Desta forma a região obtida em w pela translação da região em z através da função $f(z)$ é congruente à região em z e possui a mesma orientação.

3.1.2 Funções da forma $w = f(z) = Bz$

Agora vamos analisar a transformação $w = f(z) = Bz$, sendo B uma constante complexa. Como demonstrado anteriormente, ao multiplicamos o complexo $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ pela constante complexa $B = \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$ obtemos o complexo $w = \begin{bmatrix} ae - bf & -af - be \\ eb + af & -bf + ae \end{bmatrix}$, cujo módulo é igual ao produto do módulo de z pelo módulo da constante complexa B e, cujo argumento é igual à soma dos argumentos de z e da constante B. Então, tomando todos os números complexos que representam os pontos de uma região e multiplicando-os pela constante complexa B, obtemos uma região semelhante à primeira, porém, rotacionado do argumento de B e dilatada (ou contraída) do módulo de B. Conforme mostra a figura 3.3.

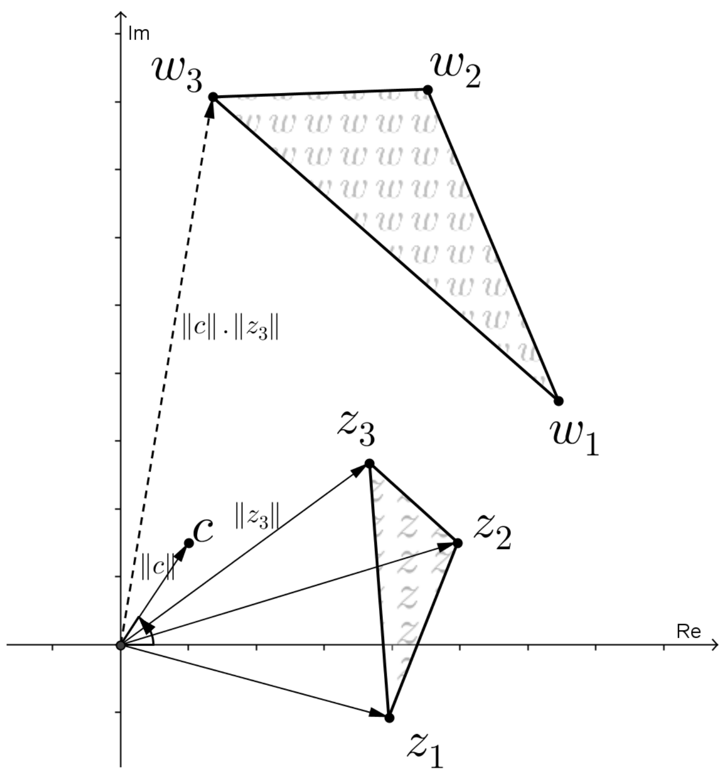

Figura 3.3: Rotação e dilatação da forma $w = f(z) = Bz$.

As funções da forma $w = f(z) = Bz + C$ são uma composição das duas anteriores, logo, se aplicarmos $f(z)$ a uma região de z, a região resultante em w será obtida pela rotação e expansão (contração) de acordo com o argumento e módulo de B e fará uma translação de acordo com a constante C.

3.1.3 Funções da forma $w = f(z) = z^n$.

Vamos analisar inicialmente a funçâo $w = f(z) = z^2$. De acordo com o exposto anteriormente sobre potenciação de números complexos é fácil verificar que se o argumento será multiplicado por 2, então os pontos do primeiro quadrante serão levado no primeiro e segundo quadrante, ou seja a função transforma o primeiro quadrante no semi plano superior, conforme mostra a figura 3.4. De forma semelhante transforma o semi plano superior no plano complexo.
Nessas transformações em que a região de origem não possui pontos no plano inferior, existe um único ponto da região transformada correspondendo a um ponto na região de origem e vice versa. Esta correspondência biunívoca não existe para a região circular uma vez que cada ponto da região transformada é imagem de dois pontos z e $-z$.

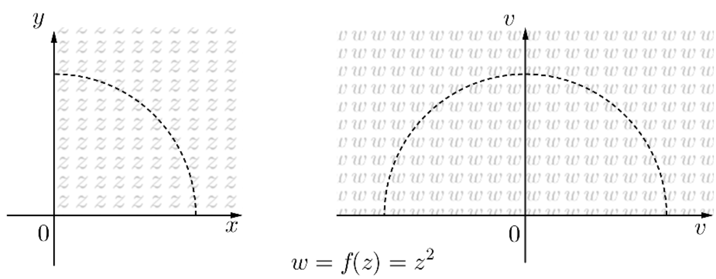

Figura 3.4: Transformação da forma $w = f(z) = z^2$.

Generalizando para a função $w = f(z) = z^n$, como a rotação será igual $n.\theta$ onde θ é o argumento de z, tomando a região compreendida entre 0 e $\theta = \frac{\pi}{n}$, esta região será transformada no semi plano superior pois $n.\theta = n.\frac{\pi}{n} = \pi$, conforme mostra a figura 3.5. Se considerarmos a região compreendida entre 0 e $\theta = \frac{2\pi}{n}$, esta região será transformada no plano complexo. A correspondência entre pontos nos dois casos é biunívoca.

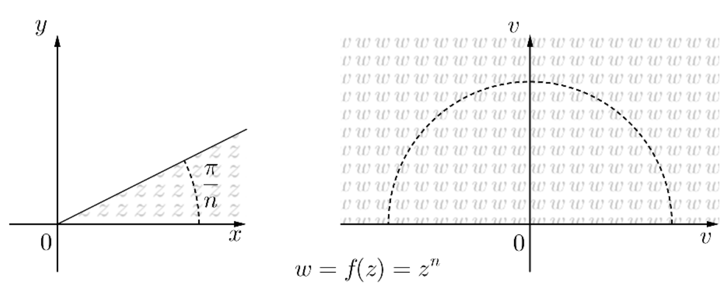

Figura 3.5: Transformação da forma $w = f(z) = z^n$.

3.1.4 Função da forma $w = f(z) = \frac{1}{z}$.

Esta função estabelece uma relação biunívoca entre os pontos de z e os pontos de w, exceto para os pontos $z = 0$ e $w = 0$, visto que não se admite divisão por zero e $w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w}$.
A função $f(z) = \frac{1}{z}$, leva cada ponto de z no seu inverso em w. Sendo $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, então $w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} . \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
Então , analisando $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $w = \frac{1}{a^2+b^2} . \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, verifica-se que o módulo de $w = \frac{1}{a^2+b^2} . \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}$, isto corresponde a uma "inversão" em relação ao círculo unitário de centro na origem. Por outro lado, há uma inversão de sinal dos elementos da diagonal secundária, que corresponde a uma refleção em relação ao eixo real, conforme mostrado na figura 3.6.

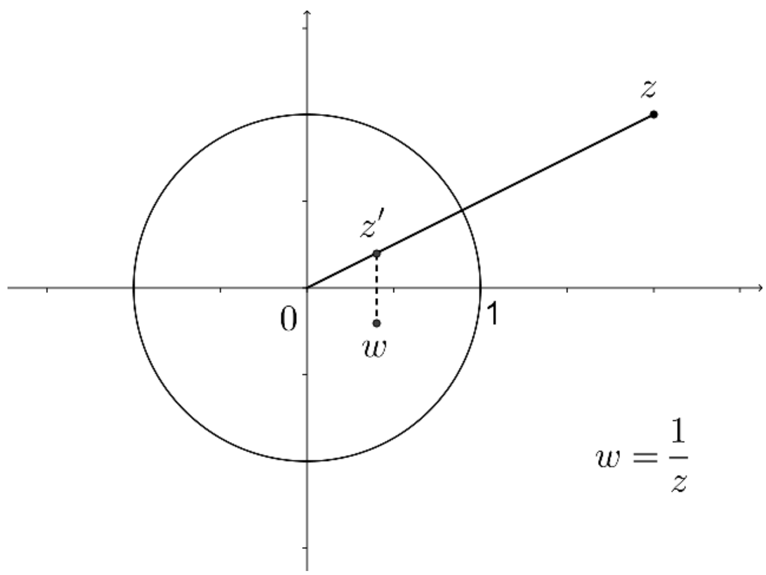

Figura 3.6: Transformação da forma $w = f(z) = \frac{1}{z}$.

Mas, sendo $w = \frac{1}{a^2+b^2} . \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$, onde a e b são as coordenadas de z no sistema XY, logo as coordenadas de w no sistema UV são, respectivamente, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2+y^2}$; e $x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $v = -\frac{v}{u^2+v^2}$.
Se a, b, c e d são números reais, a equação $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ (*), representa um círculo se $a \neq 0$ e se $a = 0$ representa uma reta.

Aplicando a transformação $w = \frac{1}{z}$, a equação (*) se torna:
(**) $d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$
Se u e v são soluções da equação (**), então x e y são soluções da equação (*), portanto, se a e d são distintos de zero, a curva e sua imagem são ambos círculos que não passam pela origem. Em contrapartida, todo círculo que passa pela origem $d = 0$ ou seja $z = 0$ é transformada numa linha reta no w e os círculos que passam pela origem $w = 0$ onde $d = 0$ são imagens de retas no plano z.

Capítulo 4

Proposta de Atividade Educacional

4.1 Revisão sobre matrizes

Público alvo: Estudantes do terceiro ano do ensino médio.

Objetivo: Rever as operações com matrizes, visando a utilização para o estudo dos Números Complexos.

Metodologia: Aula expositiva e interativa com os alunos.

Duração: Dois módulos aula (50 minutos cada).

4.1.1 Definição

Uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ é uma tabela formada de m linhas e n colunas, ou seja,

Exemplo:

$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×3, ou seja, uma matriz que possui duas linhas e três colunas.

4.1.2 Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 7 & p & 5 \\ q & 2^3 & \sqrt{81} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} r & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ são iguais se, e somente se, $p = 3$, $q = 6\, e\, r = 7$.

4.1.3 Operações com matrizes

Adição

A adição de duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ é dada por $C = (c_{ij})_{mxn}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da adição

Sendo A, B e C matrizes de mesma ordem e 0 a matriz nula, valem as seguintes propriedades para a adição de matrizes:

I) Comutativa $\longrightarrow$ A+B=B+A,

II) Associativa $\longrightarrow$ $(A$+$B)$+C=A+$(B$+$C)$,

III) Elemento oposto $\longrightarrow$$A$+(-$A$)=$0$,

III) Elemento neutro $\longrightarrow$$A$+$0$=$A$.

Subtração

A subtração de duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$ é dada pela adição da primeira matriz com o oposto aditivo (elemento simétrico) da segunda matriz, ou seja:

$A - B = A + (-B)$.

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de um número real por uma matriz

O produto de um número real k por uma matriz A é igual à matriz que se obtém fazendo o produto de cada elemento da matriz pelo real k.

Exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.(-2) & 3.5 \\ 3.4 & 3.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 15 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação de matrizes

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ e uma matriz $B = (b_{ij})_{nxp}$, o produto $A.B$ é a matriz $(c_{ij})_{mxp}$ tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos da coluna j da matriz B e somando-se os produtos assim obtidos (o primeiro elemento da linha é multiplicado pelo primeiro elemento da coluna, o segundo elemento da linha é multiplicado pelo segundo elemento da coluna e assim sucessivamente).

Por exemplo,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p}$$

Logo,

$$A.B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p} ,$$

onde $c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + ... + a_{in}.b_{nj}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, 2, 3, ..., p\}$.

Notas:

1ª) O produto de duas matrizes só é definido quando o *número de colunas* da primeira matriz é igual ao *número de linhas* da segunda matriz.

2ª) Na matriz produto, o *número de linhas* é igual ao número de linhas da *primeira matriz* e o *número de colunas* é igual ao número de colunas da *segunda matriz*.

$$A_{m\times n}.B_{n\times p} = (AB)_{m\times p}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes
A multiplicação de matrizes admite as seguintes propriedades:
I) Associativa $\longrightarrow (A.B).C = A.(B.C)$,
II) Distributiva $\longrightarrow$ $(A + B).C = A.C + B.C$ e $C.(A + B) = C.A + C.B$.

Matriz identidade

Chama-se matriz identidade (ou matriz unidade) de ordem n à matriz $I_n = (a_{ij})_{n\mathrm{x}n}$, tal que:

$a_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0, caso contrário, para todo $i, j \epsilon \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Exemplos:

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriz inversa de uma matriz quadrada

Dada a matriz quadradada A, de ordem n, se existir a matriz A^{-1}, tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$, então a matriz A^{-1} é chamada matriz inversa de A.

Se uma matriz A admite inversa ela é dita *invertível*, caso contrário ela é não *invertível*.

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 2

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é dado pela diferença entre, o produto dos elementos de sua diagonal principal e o produto dos elementos de sua diagonal secundária.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, temos que

$Det\, A = ad - bc.$

Inversa de uma matriz quadrada de ordem 2 (regra prática)

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2, a sua inversa A^{-1}, quando existe, é dada pelo produto do inverso do determinante da matriz A pela matriz que se obtem invertendo a ordem dos elementos da diagonal principal e trocando os sinais dos elementos da diagonal secundária da matriz A.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, a sua inversa é:

$A^{-1} = \frac{1}{Det\, A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, ou seja $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Exemplo:

A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ é igual a $A^{-1} = \frac{1}{2.8-3.5}. \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, de fato, temos:

$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8 + 5.(-3) & 2.(-5) + 5.2 \\ 3.8 + 8.(-3) & 3.(-5) + 8.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$

4.1.4 Exercícios

1) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A + B - C$

b) $3.A - 5.B$

c) $A.B$

d) A inversa da matriz C

2) Duas matrizes A e B comutam quando $A.B = B.A$.

Dadas as matrizes $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, determine o valor de x e y de forma que as matrizes comutem.

3) Use a inversão de matrizes para resolver a seguinte equação matricial $A.X = B$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Resolva a equação matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

5) Determine a inversa da matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.2 Números complexos

Público alvo: Estudantes do terceiro ano do ensino médio.

Objetivos: Apropriar os alunos do conhecimento dos números complexos priorizando a sua representação geométrica.

Pré-requisitos: Operações com matrizes, incluindo multiplicação e matriz inversa.

Metodologia: Aula expositiva e interativa com os alunos. É aconselhável o uso do Geogebra para mostrar os números complexos e suas operações.

Duração: Dez módulos aula (50 minutos cada).

4.2.1 Matrizes especiais

As matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, onde os elementos da diagonal principal são iguais e os elementos da diagonal secundária são opostos, estão em correspondência biunívoca com os pontos do plano $\mathbb{R}^2$, ou seja, a cada matriz da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$corresponde um único ponto de $\mathbb{R}^2$ e a cada ponto de $\mathbb{R}^2$ faz se corresponder uma única matriz da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, conforme mostra a figura 4.1.

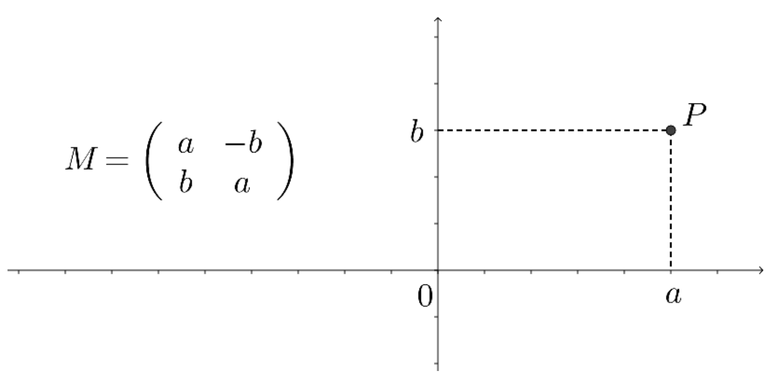

Figura 4.1: Representação de matriz em $\mathbb{R}^2$.

A figura 4.2 mostra a correspondência com os pontos de $\mathbb{R}^2$ de algumas matrizes, elas estão nomeadas de acordo com o quadrante da correspondência. A matriz M_1 corresponde ao ponto P_1 que está no primeiro quadrante, a matriz M_2 corresponde ao ponto P_2 que está no segundo quadrante e asim por diante.

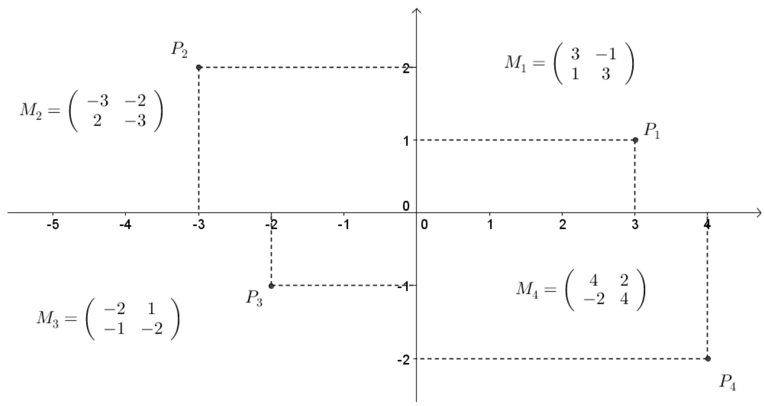

Figura 4.2: Representação das matrizes M_1, M_2, M_3 e M_4 em $\mathbb{R}^2$.

O conjunto das matrizes do tipo $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é fechado em relação às operações de adição, subtração e multiplicação. Isto é, se fizermos estas operações com duas quaisquer matrizes deste tipo o resultado será uma matriz deste tipo, como pode ser visto a seguir.
Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, temos:

$$A + B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & d \\ -d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & -b+d \\ b-d & a-c \end{pmatrix},$$

$$A.B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix}.$$

Além disto admite inversa (inverso multiplicativo) da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, como mostrado a seguir:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}.$$

E comutam, isto é, $A.B = B.A$

É interessante observar o produto da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ por ela mesmo, ou seja

$$A.A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 + (-1).1 & 0.(-1) + (-1).0 \\ 1.0 + 0.1 & 1.(-1) + 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz unidade então temos que $A^2.I = (-1)I$, temos então que "o quadrado de certo elemento é igual a um número negativo".

Se chamarmos a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ de *unidade imaginária* e a representarmos por i , teremos que $i.i = -1$, isto é $i^2 = -1$.

4.2.2 Conjunto dos números complexos

Chama-se *conjunto dos números complexos*, e representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto cujos elementos são as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, com $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$.
Denotaremos os números complexos pela letra z.
$z \,\epsilon\, \mathbb{C} \iff z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $sendo\, a \,\epsilon\, \mathbb{R}\, e\, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$.

Observemos que, dado um número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, temos que:
$z = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, mas sendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ (matriz unidade) e $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i$ (unidade imaginária) , podemos escrever:
$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi$ ou $z = a + bi$, com $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}$.

Vejamos alguns exemplos:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 + 2i$

b) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -3 + i$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = -2 - 4i$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 + 0i = 5$

e) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} = 6 - 4i$

f) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 3i = 3i$

Dessa forma todo número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ pode ser escrito na forma $z = a + bi$, chamada *forma algébrica*. O número real a é chamado parte real de z, enquanto que o número real b é chamado parte imaginária de z. Indica-se por

$$a = Re(z) \qquad \text{e} \qquad b = Im(z).$$

4.2.3 Representação dos números complexos (plano de Argand-Gauss)

Representa-se os números complexos no *plano complexo* ou *plano de Argand-Gauss*, em homenagem aos matemáticos *Jean Robert Argand* (1768-1822) e *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) [3, pag.522], o qual nada mais é que o plano cartesiano onde será usado o eixo das abscissas, eixo horizontal, para representar a parte real que será indicada por Re e o eixo das ordenadas, eixo vertical, para representar a parte imaginária que será indicada por Im. O ponto assim marcado no plano recebe o nome de *afixo* ou *imagem geométrica* de z, conforme mostra a figura 4.3.

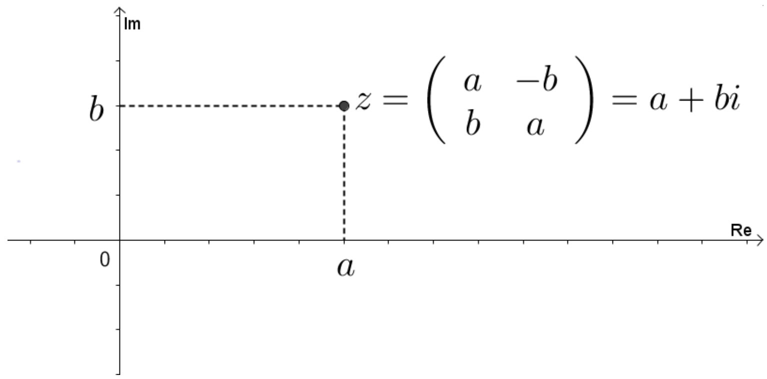

Figura 4.3: Representação do complexo $z = a + bi$.

Observações:
i) Quando $Im(z) = 0$, z é um número real.
Exemplos: $z_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 7$; $z_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = -5$; $z_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3}$.
ii) Quando $Re(z) = 0$ e $Im(z) \neq 0$, z é um númro imaginário puro.
Exemplos: $z_1 = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = 6i$; $z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = -4i$; $z_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{5}i$.

4.2.4 Igualdade entre números complexos

Dados dois números complexos $z_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $z_2 = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, temos $z_1 = z_2$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$, ou seja se as partes reais forem iguais entre si e as partes imaginárias também o forem.

Exemplo: Para que os números complexos $z_1 = \begin{pmatrix} 3x-2 & -7 \\ 7 & 3x-2 \end{pmatrix} = (3x-2) + 7i$ e $z_2 = \begin{pmatrix} 13 & 1-2y \\ 2y-1 & 13 \end{pmatrix} = 13 + (2y-1)i$ sejam iguais devemos ter:

$Re(z_1) = Re(z_2)$ ou seja $3x - 2 = 13 \iff x = 5$, e
$Im(z_1) = Im(z_2)$ ou seja $7 = 2y - 1 \iff y = 4$.

4.2.5 Argumento e módulo de um número complexo

Módulo de um número complexo é igual à distância entre a origem e o seu afixo (ponto que representa o número complexo) e é representado por $|z|$ ou pela letra grega ρ (lê-se: "rô").

O argumento de um número complexo não-nulo é a medida do ângulo θ formado pelo semi-eixo real positivo e a semirreta com origem em (0,0) e que passa pelo afixo de z tomado no sentido positivo (anti-horário), conforme mostra a figura 4.4.

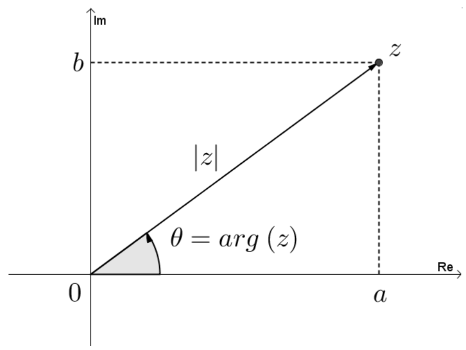

Figura 4.4: Módulo e argumento do número complexo z.

Pelo teorema de Pitágoras temos que :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

O argumento de um número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é determinado através das seguintes relações:
$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} \iff b = |z|\,.sen\,\theta$ e $cos\,\theta = \frac{a}{|z|} \iff a = |z|\,.cos\,\theta$.
Exemplo:
Vamos determinar o módulo e o argumento do número complexo $z = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.
Temos $a = 1$, $b = \sqrt{3}$;
Como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ então $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, temos também $sen\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $cos\,\theta = \frac{1}{2}$, logo $\theta = \frac{\pi}{3}\,rad$
Sendo $a = |z|\,.cos\,\theta$ e $b = |z|\,.sen\,\theta$, substituindo em $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ temos
$z = \begin{pmatrix} |z|\,.cos\,\theta & -|z|\,.sen\,\theta \\ |z|\,.sen\,\theta & |z|\,.cos\,\theta \end{pmatrix} = |z|\,.\begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$, ou seja,
$z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = |z|\,.\begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$.

4.2.6 Operações com números complexos

Adição

Para adicionar dois números complexos, adicionamos as partes reais entre si e as partes imaginárias entre si. Seja $z_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi$ e $z_2 = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = c + di$, então $z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -b-d \\ b+d & a+b \end{pmatrix} = (a+b) + (b+d)i$.

Exemplo:

A figura 4.5 mostra a adição dos complexos $z_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $z_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

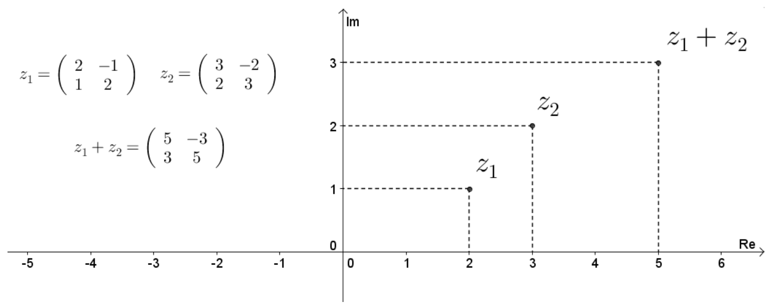

Figura 4.5: Adição de complexos $z_1 + z_2$.

Subtração

Para subtraírmos dois números complexos, procedemos de forma análoga à adição, ou seja, subtraimos as partes reais entre si e as partes imaginárias entre si.
Sendo $z_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi$ e $z_2 = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = c + di$, então a diferença é dada por

$$z_1 - z_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & -b + d \\ b - d & a - b \end{pmatrix} = (a - b) + (b - d)i.$$

Multiplicação

Vamos determinar o produto do número complexo $z_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = |z_1| \,. \begin{pmatrix} cos\,\theta_1 & -sen\,\theta_1 \\ sen\,\theta_1 & cos\,\theta_1 \end{pmatrix}$ pelo número complexo $z_2 = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = |z_2| \,. \begin{pmatrix} cos\,\theta_2 & -sen\,\theta_2 \\ sen\,\theta_2 & cos\,\theta_2 \end{pmatrix}$. Temos:
$z_1.z_2 = |z_1| \,. \begin{pmatrix} cos\,\theta_1 & -sen\,\theta_1 \\ sen\,\theta_1 & cos\,\theta_1 \end{pmatrix} \,.\, |z_2| \,. \begin{pmatrix} cos\,\theta_2 & -sen\,\theta_2 \\ sen\,\theta_2 & cos\,\theta_2 \end{pmatrix}$

$$z_1.z_2 = |z_1| \,.\, |z_2| \,. \begin{pmatrix} cos\,\theta_1.cos\,\theta_2 - sen\,\theta_1.sen\,\theta_2 & -cos\,\theta_1.sen\,\theta_2 - sen\,\theta_1.cos\,\theta_2 \\ sen\,\theta_1.cos\,\theta_2 + cos\,\theta_1.sen\,\theta_2 & -sen\,\theta_1.sen\,\theta_2 + cos\,\theta_1.cos\,\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Mas das fórmulas trigonométricas temos que:
$cos(a + b) = cos\,a \,.\, cos\,b - sen\,a \,.\, sen\,b$ e
$sen(a + b) = sen\,a \,.\, cos\,b + sen\,b \,.\, cos\,a$, então fazendo as substituições chegamos a:

$$z_1.z_2 = |z_1| \,.\, |z_2| \,. \begin{pmatrix} cos\,(\theta_1 + \theta_2) & -sen\,(\theta_1 + \theta_2) \\ sen\,(\theta_1 + \theta_2) & cos\,(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}.$$

Logo o produto de dois números complexos é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e o argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores.
Exemplo:
Vamos determinar o produto dos números complexos $z = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.
Resolução
$z.w = \begin{pmatrix} \sqrt{3}.(-1) + (-1).\sqrt{3} & \sqrt{3}.(-\sqrt{3}) + (-1).(-1) \\ 1.(-1) + \sqrt{3}.\sqrt{3} & 1.(-\sqrt{3}) + \sqrt{3}.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & -2 \\ 2 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Observe que:
$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad |w| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ e
$|z.w| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4 = |z|\,.\,|w|$
Seja $\theta = arg\,(z)$; $\phi = arg\,(w)$ e $\delta = arg\,(z.w)$

$$\begin{matrix} sen\,\theta = \frac{1}{2} \\ cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \theta = 30^0, \qquad \begin{matrix} sen\,\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos\,\phi = \frac{-1}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \phi = 120^0$$

$$\begin{matrix} sen\,\delta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ cos\,\delta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow \delta = 150^0 = \theta + \phi$$

Veja a representação geométrica do produto de z por w na figura 4.6.

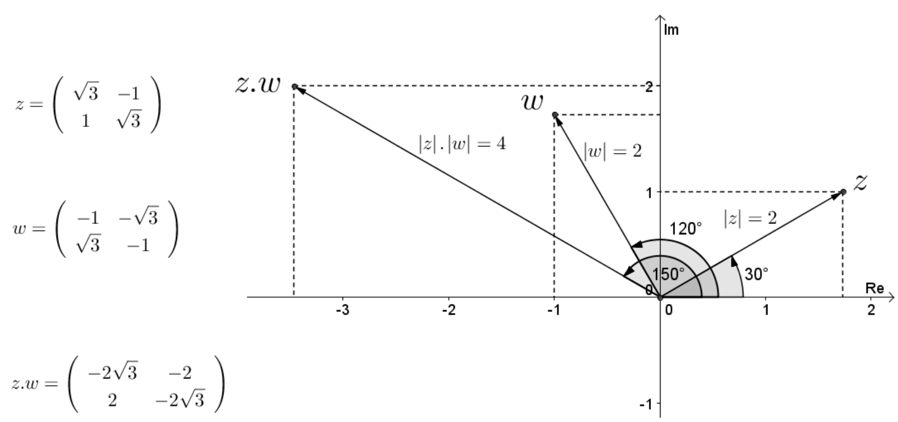

Figura 4.6: Produto de complexos $z.w$.

Na figura 4.7 representamos o produto do número complexo $z = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ pelo número complexo $w = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

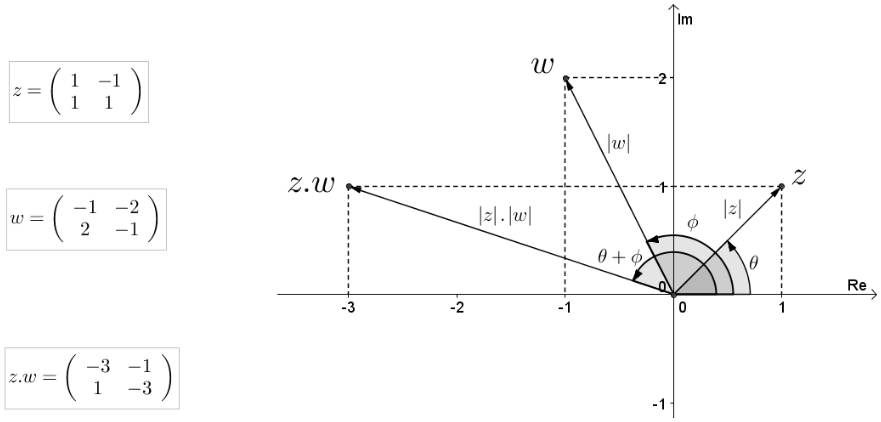

Figura 4.7: Produto de complexos $z.w$.

É interessante ressaltar que multiplicar um número complexo z por um número complexo w é equivalente a:
Rotacionar o vetor (segmento) Oz de um ângulo igual ao argumento de w e multiplicar seu valor (comprimento) pelo módulo de w, ou rotacionar o vetor (segmento) Ow de um ângulo igual ao argumento de z e multiplicar seu valor (comprimento) pelo módulo de z.
Vamos analisar o produto de um número complexo z pelo número complexo $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Temos:
$|i| = 1$ e $\theta = arg\,(i) = 90^0$, logo multiplicar um número complexo por i equivale a efeturar um giro no sentido anti-horário de 90^0 mantendo o seu módulo. A multiplicação por i^2 efetua um giro de 180^0, ou seja, dá como produto o simétrico (em relação à origem) do número complexo z. Isto é $z.i^2 = -z = z.(-1) \Rightarrow i^2 = -1$.

Exemplo

Seja o número complexo $z = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2i$, vamos determinar o produto $z.i$.

$z.i = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 + (-2).1 & 1.(-1) + (-2).0 \\ 2.0 + 1.1 & 2.(-1) + 1.0 \end{pmatrix}$.

$z.i = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2 + i$.

Note que a parte real de $(z.i)$ é igual ao oposto da parte imaginária de z e a parte imaginária de $(z.i)$ é igual à parte real de z. Isto é:

$$Re(z.i) = -Im(z) \ \ e \ \ Im(z.i) = Re(z).$$

Sendo $a = Re(z)$, $b = Im(z) \Rightarrow Re(z.i) = -b$, e $Im(z.i) = a$, $\theta = arg\,z$, $\phi = arg\,(z.i)$, temos que:
$sen\,\theta = \frac{b}{|z|}$, $cos\,\theta = \frac{a}{2}$, $sen\,\phi = \frac{a}{|z|}$, $cos\,\phi = \frac{-b}{|z|}$.

Da trigonometria temos:
$sen\,(\alpha + \frac{\pi}{2}) = cos\,\alpha$ e $\left\{ arraycsen\,\phi = \frac{a}{|z|} cos\,\theta = \frac{a}{2} \right. \Longrightarrow \text{sen}\,\phi = cos\,\theta \Longrightarrow \phi = \theta + \frac{\pi}{2} = \theta + 90^0$,
$cos\,(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -sen\,\alpha$ e $\left\{ arrayccos\,\phi = \frac{-b}{|z|} sen\,\theta = \frac{b}{|z|} \right. \Longrightarrow cos\,\phi = sen\,\theta \Longrightarrow \phi = \theta + \frac{\pi}{2} = \theta + 90^0$.

A figura 4.8 mostra esta multiplicação.

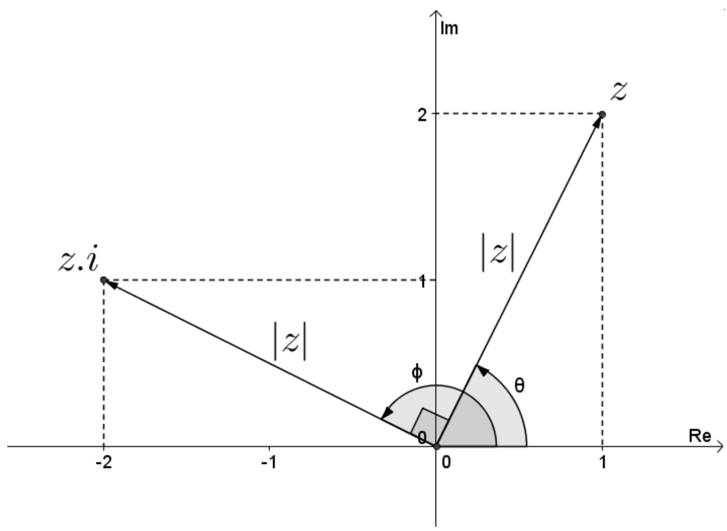

Figura 4.8: Produto $z.i$.

Divisão

Sejam os números complexos $z_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi$ e $z_2 = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = c + di$, o quociente $(z_1 : z_2)$ é igual ao produto de z_1 pelo inverso multiplicativo de z_2, ou seja $z_1 : z_2 = z_1.(z_2)^{-1}$,
onde $(z_2)^{-1} = \frac{1}{c^2+d^2}. \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c^2+d^2} & \frac{b}{c^2+d^2} \\ -\frac{b}{c^2+d^2} & \frac{a}{c^2+d^2} \end{pmatrix}$,
$\frac{z_1}{z_2} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \frac{1}{c^2+d^2} . \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2+d^2} . \begin{pmatrix} ac + bd & ad - bc \\ bc - ad & bd + ac \end{pmatrix}$.

Mas a divisão é a operação inversa da multiplicação, ou seja, dados dois números complexos z_1 e z_2, com z_2 diferente de zero, queremos determinar
z_3 tal que $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Isto corresponde a determinar o número complexo z_3 tal que $z_3.z_2 = z_1$, mas pelo visto na multiplicação temos que:
$|z_1| = |z_2| \,.\, |z_3| \Longrightarrow |z_3| = |z_1| : |z_2|$ e
$arg\,(z_1) = arg\,(z_2) + arg\,(z_3) \Longrightarrow arg\,(z_3) = arg\,(z_1) - arg\,(z_2)$.
Para dividirmos dois números complexos z_1 e z_2, com z_2 diferente, dividimos os seus módulos ente si e subtraímos os seus argumentos entre si.

Sendo $z_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = |z_1| . \begin{pmatrix} cos\,\theta_1 & -sen\,\theta_1 \\ sen\,\theta_1 & cos\,\theta_1 \end{pmatrix}$ e $z_2 = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = |z_2| . \begin{pmatrix} cos\,\theta_2 & -sen\,\theta_2 \\ sen\,\theta_2 & cos\,\theta_2 \end{pmatrix}$,
o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ é dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.\begin{pmatrix} cos\,(\theta_1 - \theta_2) & -sen\,(\theta_1 - \theta_2) \\ sen\,(\theta_1 - \theta_2) & cos\,(\theta_1 + -\theta_2) \end{pmatrix}.$$

Exemplo:

O quociente entre os números complexos $z = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ é dado por:

$z : w = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$

$z : w = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} . \frac{1}{(-2)^2+2^2} . \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

$z : w = \frac{1}{8}.\begin{pmatrix} (-6).(-2) + (-2).(-2) & (-6).2 + (-2).(-2) \\ 2.(-2) + (-6).(-2) & 2.2 + (-6).(-2) \end{pmatrix}$

$z : w = \frac{1}{8}.\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$

A figura 4.9 representa o quociente $(z : w)$.

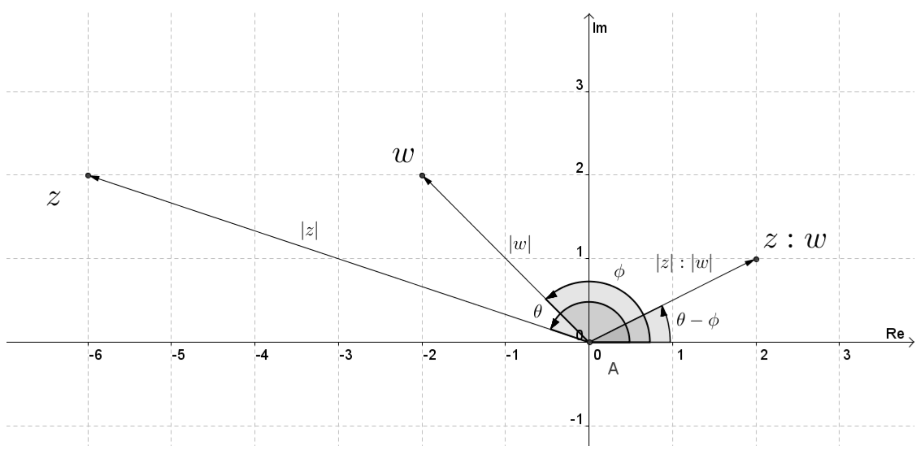

Figura 4.9: Quociente de números complexos $z : w$.

Potenciação

A potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, onde a base é o fator e o expoente indica quantas vezes que este fator é considerado, ou seja

$$z^n = \underbrace{z\,.\,z\,.\,z\,.\,\cdots\,.\,z\,.\,z}_{n\ vezes}$$

Sendo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = |z|\,.\begin{pmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}$ a pontência z^n é determinada da seguinte forma

$$z^n = |z|^n\,.\begin{pmatrix} cos\,n\theta & -sen\,n\theta \\ sen\,n\theta & cos\,n\theta \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1:

Dado o número complexo $z = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{pmatrix}$ vamos determinar z^5.

Resolução

$|z| = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $sen\,\theta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : \left(2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $cos\,\theta = 1 : \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, logo $\theta = 30^o$

$|z|^5 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^5 = \frac{32\sqrt{3}}{27}$ e $5.\theta = 5.30^o = 150^o$

$$z^5 = \begin{pmatrix} \frac{32\sqrt{3}}{27}.cos\,150^o & -\frac{32\sqrt{3}}{27}.sen\,150^o \\ \frac{32\sqrt{3}}{27}.sen\,150^o & \frac{32\sqrt{3}}{27}.cos\,150^o \end{pmatrix}$$

$$z^5 = \begin{pmatrix} \frac{32\sqrt{3}}{27}.\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) & -\frac{32\sqrt{3}}{27}.\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{32\sqrt{3}}{27}.\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \frac{32\sqrt{3}}{27}.\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$z^5 = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & -\frac{16\sqrt{3}}{27} \\ \frac{16\sqrt{3}}{27} & -\frac{16}{9} \end{pmatrix}.$$

A figura 4.10 mostra a representação de z e z^5.

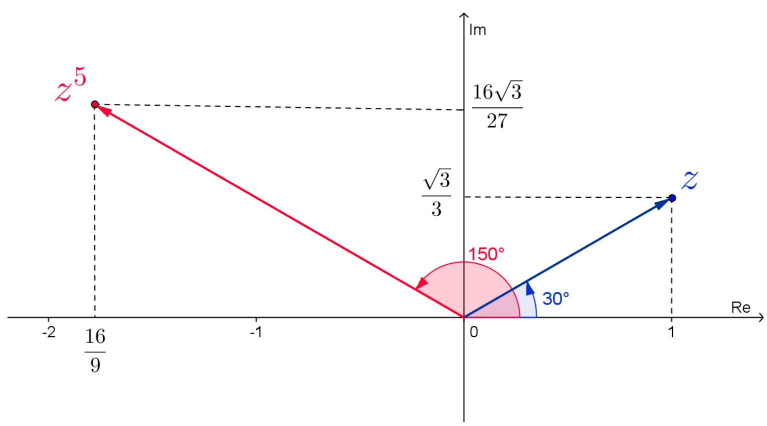

Figura 4.10: Potência de um número complexo z^5.

Exemplo 2:

Vamos determinar o valor de z^4, sendo $z = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Resolução:

$|z|\,\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $\;cos\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\;sen\,\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = 30^0$

$$z = 2.\begin{pmatrix} cos\,30^0 & -sen\,30^0 \\ sen\,30^0 & cos\,30^0 \end{pmatrix}$$

$$z^4 = 2^4.\begin{pmatrix} cos\,(4.30^0) & -sen\,(4.30^0) \\ sen\,(4.30^0) & cos\,(4,30^0) \end{pmatrix} = 16.\begin{pmatrix} cos\,120^0 & -sen\,120^0 \\ sen\,120^0 & cos\,120^0 \end{pmatrix} = 16.\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$z^4 = \begin{pmatrix} -8 & -8\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3} & -8 \end{pmatrix}.$$

A figura 4.11 mostra a representação de z e z^4.

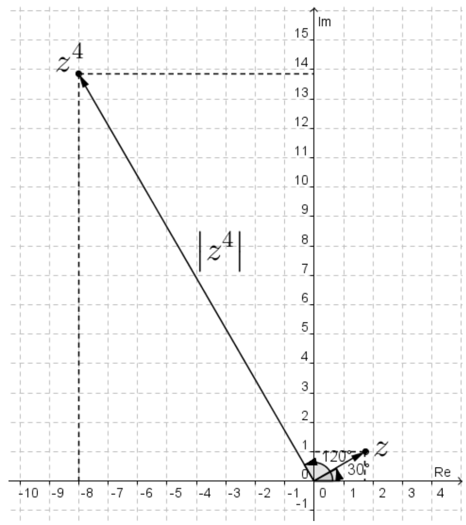

Figura 4.11: Potência de um número complexo z^4.

Radiciação

A radiciação é a operação inversa da potenciação, ou seja, dado um número complexo z, o número complexo z_k é uma raiz enésima de z se, e somente se, $(z_k)^n = z$.

$$z_k = \sqrt[n]{z} \iff (z_k)^n = z.$$

Uma raiz n-ésima de um número complexo z é o número complexo cujo módulo é igual à raiz enésima do módulo de z e cujo argumento é igual à enésima parte do argumento de z.

Uma raiz enésima de um número complexo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ será dada por:

$$z_{0=} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}. \begin{pmatrix} cos\,\frac{\theta_z}{n} & -sen\,\frac{\theta_z}{n} \\ sen\,\frac{\theta_z}{n} & cos\,\frac{\theta_z}{n} \end{pmatrix}$$

As funções seno e cosseno são periódicas de período igual a 2π, logo são raízes de z, todos os complexos da forma

$$z_{k=} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}. \begin{pmatrix} cos\,(\frac{\theta_z}{n} + \frac{k}{n}.2\pi) & -sen\,(\frac{\theta_z}{n} + \frac{k}{n}.2\pi) \\ sen\,(\frac{\theta_z}{n} + \frac{k}{n}.2\pi) & cos\,(\frac{\theta_z}{n} + \frac{k}{n}.2\pi) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 1:

Determine as raízes quintas de $z = \begin{pmatrix} -16\sqrt{3} & -16 \\ 16 & -16\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Resolução

$|z| = \sqrt{(-16\sqrt{3})^2 + 16^2} = \sqrt{256.3 + 256} = 32,$

$cos\,\theta = \frac{-16\sqrt{3}}{32} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\Longrightarrow \theta = 150^0,$

$sen\,\theta = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$

$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{32}.\begin{pmatrix} cos\,(\frac{150^0}{5} + \frac{k}{5}.2\pi) & -sen\,(\frac{150^0}{5} + \frac{k}{5}.2\pi) \\ sen\,(\frac{150^0}{5} + \frac{k}{5}.2\pi) & cos\,(\frac{150^0}{5} + \frac{k}{5}.2\pi) \end{pmatrix}$, com $k\,\epsilon\,\{0, 1, 2, 3, 4\}$, ou seja, as raízes quintas de z são:

$2.\begin{pmatrix} cos\,30^0 & -sen\,30^0 \\ sen\,30^0 & cos\,30^0 \end{pmatrix}$, $2.\begin{pmatrix} cos\,102^0 & -sen\,102^0 \\ sen\,102^0 & cos\,102^0 \end{pmatrix}$, $2.\begin{pmatrix} cos\,174^0 & -sen\,174^0 \\ sen\,174^0 & cos\,174^0 \end{pmatrix}$

$2.\begin{pmatrix} cos\,246^0 & -sen\,246^0 \\ sen\,246^0 & cos\,246^0 \end{pmatrix}$ e $2.\begin{pmatrix} cos\,318^0 & -sen\,318^0 \\ sen\,318^0 & cos\,318^0 \end{pmatrix}$.

A figura 4.12 mostra as cinco raízes quintas de $z = \begin{pmatrix} -16\sqrt{3} & -16 \\ 16 & -16\sqrt{3} \end{pmatrix}$, representadas por $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ e z_5.

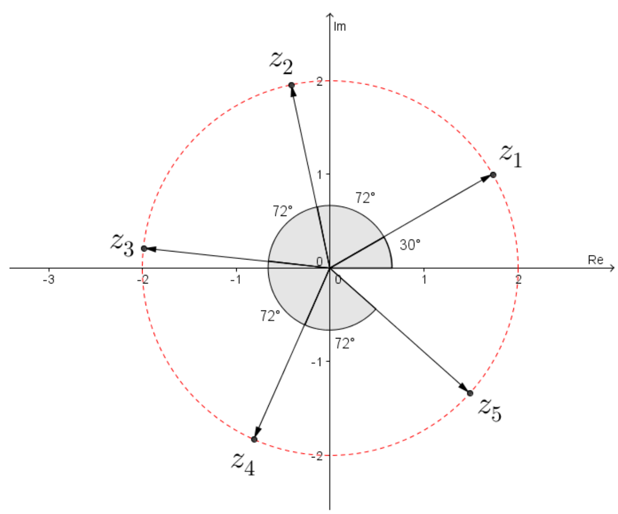

Figura 4.12: Raízes quintas de um número complexo.

Observe que as raízes estão distribuídas igualmente sobre o círculo de raio igual a 2.

Exemplo 2:

Determine todas as raízes cúbicas de -1.

Resolução

Seja $z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} cos\,180^0 & -sen\,180^0 \\ sen\,180^0 & cos\,180^0 \end{pmatrix}$,

$|z| = 1$ e $\theta = 180^0$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}.\begin{pmatrix} cos\,(\frac{180^0}{3} + \frac{k}{3}.2\pi) & -sen\,(\frac{180^0}{3} + \frac{k}{3}.2\pi) \\ sen\,(\frac{180^0}{3} + \frac{k}{3}.2\pi) & cos\,(\frac{180^0}{3} + \frac{k}{3}.2\pi) \end{pmatrix}$, com $k\,\epsilon\,\{0, 1, 2\}$, ou seja, as raízes cúbicas de z são:

$\begin{pmatrix} cos\,60^0 & -sen\,60^0 \\ sen\,60^0 & cos\,60^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} cos\,180^0 & -sen\,180^0 \\ sen\,180^0 & cos\,180^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} cos\,300^0 & -sen\,300^0 \\ sen\,300^0 & cos\,300^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

A figura 4.13 mostra as três raízes cúbicas de -1, representadas por z_1, z_2 e z_3.

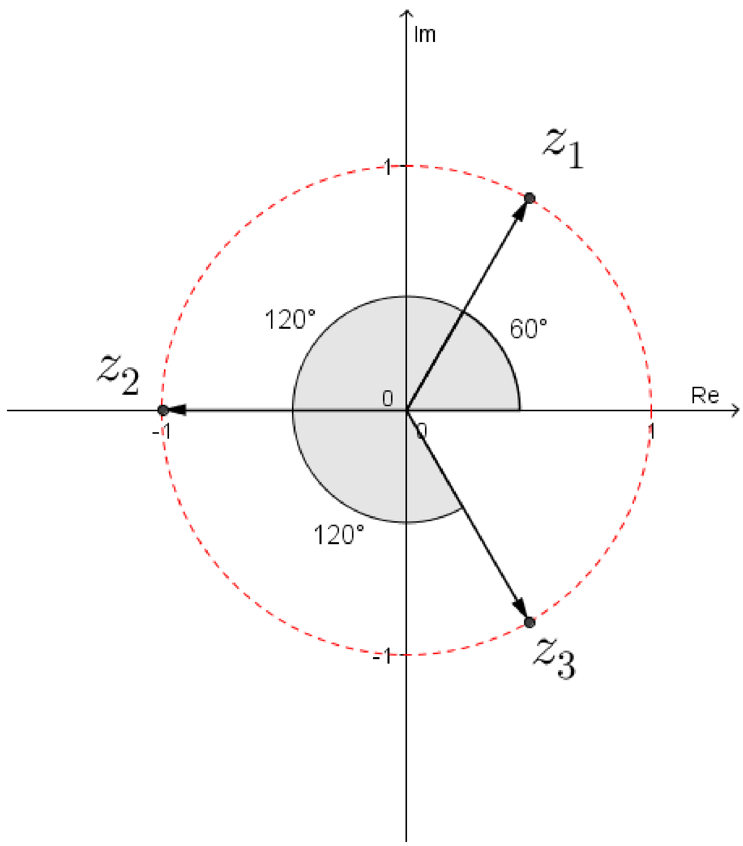

Figura 4.13: Raízes cúbicas de -1.

Observe que as raízes estão distribuídas igualmente sobre o círculo de raio igual a 1.

4.2.7 Exercícios

1) Represente no plano complexo (Plano de Argand-Gauss) os seguintes números complexos:

$$z_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad z_2 = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad z_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad z_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Determine os valores de x e y de modo que os números complexos $z = \begin{pmatrix} 5x-7 & -11 \\ 11 & 5x-7 \end{pmatrix}$

e $w = \begin{pmatrix} 2x+2 & 5-2^y \\ 2^y-5 & 2x+2 \end{pmatrix}$ sejam iguais.

3) Determine o argumento e o módulo dos seguintes números complexos:
$z_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & -4 \\ 4 & 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $z_3 = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $z_4 = \begin{pmatrix} 5\sqrt{3} & 5 \\ -5 & 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

4) Dado o número complexo $z = \begin{pmatrix} 6 & -2x \\ 2x & 6 \end{pmatrix}$, determine o valor de x para que o seu módulo seja igual a 10 e represente-o no plano complexo.

5) Dados os números complexos $z_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ e $z_2 = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$, determine:
a) $z_1 + z_2$ e represente no plano complexo (plano do Argand-Gauss);
b) $z_1 - z_2$ e represente no plano complexo (plano do Argand-Gauss).

6) O conjugado de um número complexo z é o número complexo $\overline{z}$ que se obtém trocando o sinal da parte imaginária de z.
Sendo $z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi$ o seu conjugado é $\overline{z} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a - bi$.
Dado o número complexo $z = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, determine:
a) A representação gráfica de z e $\overline{z}$;
b) $\overline{z}$;
c) $z + \overline{z}$;
d) $z.\overline{z}$.

7) Sendo $z = 2.\begin{pmatrix} cos\,135^0 & -sen\,135^0 \\ sen\,135^0 & cos\,135^0 \end{pmatrix}$, calcule o valor de:
a) z^4;
b) z^6.

8) Sendo $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a unidade imaginária:
a) Determine as potências de i menores ou iguais a 8, ou seja, i^2, i^3, $\ldots i^8$;
b) Qual o padrão de repetição que você observou?
c) Usando o padrão observado determine os valores das seguintes potências i^{20}, i^{201} e i^{2014}.

9)Determine todas as raízes quintas de -32 e represente-as no plano complexo (plano de Argand-Gauss).

10) Geometricamente, o módulo de um número complexo z é dado pela distância da origem O do plano complexo ao ponto imagem de z. Assim, dado o complexo $z = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 + 2i$, considere o triângulo ABO, cujos vértices A e B são os respectivos pontos imagem de z e $z.i$, classifique o triângulo ABO quanto a medida de seus ângulos internos e quanto à medida de seus lados.

Capítulo 5

Conclusão

Uma abordagem geométrica na introdução dos números complexos é uma alternativa que levará a um entendimento melhor destes números tidos então como coisas estranhas e sem utilidade. Esta abordagem leva em consideração os conhecimentos que os alunos adiquiriram no 2º ano do ensino Médio, consolidando desta forma os connhecimentos anteriores, sobre matriz, os quais muitas vezes são esquecidos.

Na apresentação do conteúdo é conveniente a utilização dos Softwares de Geometria Dinâmica que possibilita simular um grande números de situações , facilitando as experimentações e a criação de conjecturas. Dentre os Softwares de Geometria Dinâmica temos o "*GEOGEBRA*", disponível em *http://geogebra.softonic.com.br*. Estes Softwares de Geometria Dinâmica facilitam a visualização das transformações obtidas pelas operações com os números complexos.

O trabalho não termina aqui, a proposta é que esta alternativa seja difundida entre os docentes do Ensino Médio, através da prática pedagógica do Mestrando assim como através de reuniões com os colegas de trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, GELSON et al. Matemática: volume único. 2. ed. São Paulo: Atual, 2002. 660 p.

[2] RUEL, V. CHURCHILL. Variáveis complexas e suas aplicações. São paulo: Macgraw-Hill, 1975. 276 p.

[3] EVES, HOWARD. Introdução à história da matemática. 5. ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011, 848 p.

[4] LIMA, E. LAGES. Álgebra Linear. 3. ed. Rio de Janeiro:IMPA, CNPq, 1998. 357 p.

[5] GONÇALVES, ADILSON. Introdução à Álgebra. Rio de Janeiro: SBM, 2005

[6] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.;WAGNER, EDUARDO. Tritonometria / Números complexos. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

[7] SOARES, M. G. Cálculo em uma variável complexa. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA. 2003