



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO  
(UNIRIO)**

**CENTRO DE CIÊNCIAS E EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)**



**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
(PROFMAT)**

**SÉRGIO NÓBREGA DE OLIVEIRA**

**A GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO**

Teoria e Prática da Geometria Fractal no Ensino Médio

RIO DE JANEIRO - RJ

2019

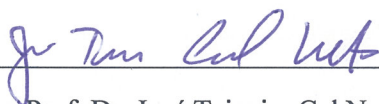
SÉRGIO NÓBREGA DE OLIVEIRA

**A GEOMETRIA FRACTAL NO ENSINO MÉDIO:**  
Teoria e Prática da Geometria Fractal no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa  
de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO,  
como requisito para a obtenção do grau de Mestre em  
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Teixeira Cal Neto

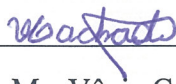
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Teixeira Cal Neto (UNIRIO)



Prof. Dr. Michel Cambrinha de Paula (UNIRIO)



Prof.<sup>a</sup> Ms. Vânia Cristina Machado (UFRRJ)

RIO DE JANEIRO – RJ

2019

À minha esposa Lúcia de Fátima F. Ramalho,  
pelo apoio e incentivo. Postumamente aos meus  
pais a quem tudo devo, pelo carinho e amor que  
sempre me deram.

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar, agradeço à Inteligência Suprema e Causa Primária de Todas as Coisas - Deus, pelo dom da vida e a oportunidade de desfrutar o conhecimento que nosso mundo nos oferece.

Postumamente, aos meus pais: Joaquim Francisco de Oliveira e Clea Nóbrega de Oliveira, minhas maiores referências em dignidade, honestidade, amizade e confiança, pois sempre me apoiaram, por mais que, às vezes, meus caminhos não fossem tão claros a eles.

À minha querida esposa e amiga, Lúcia de Fátima Fernandes Ramalho pelo amor incondicional, pela paciência e por estar junto a mim nos momentos mais difíceis e importantes da minha vida, apoiando-me irrestritamente.

Ao meu orientador, Professor Doutor José Teixeira Cal Neto, por aceitar me auxiliar neste trabalho, pelas contribuições de grande importância e, sobretudo, pela grande amizade que desse convívio de ensino-aprendizagem resultou.

Gostaria de agradecer a todos os componentes da turma Profmat- 2017 pela amizade nesses dois anos de convívio salutar onde encontrei em cada um dos componentes da turma um novo amigo.

Ao meu ex-professor e amigo, professor doutor Silas Fantin pelas excelentes aulas no mestrado e por ser meu grande incentivador enviando-me, constantemente, artigos relacionados à minha dissertação.

Ao meu amigo, Ubirajara Magliano de França, carinhosamente tratado por Bira na turma, pelo seu companheirismo, seus incentivos e espírito de colaboração e ainda pela tolerância para com todos.

É com muito carinho que recordo e agradeço as horas felizes que foram proporcionadas pelas queridas professoras de História da Matemática; as professoras Aline e Bruna

A todos os profissionais da UNIRIO por sua competência e honestidade de seus trabalhos.

*“O caos não tem estátua nem figura e não pode ser imaginado; é um espaço que só pode ser conhecido pelas coisas que nele existem, e ele contém o universo infinito.”*

*FRANCES A. YATES*

## RESUMO

O presente trabalho objetiva, precipuamente, contribuir para uma análise da Geometria do Fractais no Ensino Médio, abordando métodos de ensino da matemática através de artifícios lúdicos, a fim de despertar o interesse dos alunos por meio do uso do referencial teórico da interdisciplinaridade e da contextualização. Além disso, visa-se aqui o desenvolvimento das características dos fractais, sua autossimilaridade, complexidade infinita e suas dimensões não inteiras; para esse fim, foram utilizadas diversas fontes de pesquisa que se apresentam ao longo desse trabalho, porém, tendo como fonte principal o livro “Descobrimo a Geometria Fractal”, do professor Ruy Madsen Barbosa.

**Palavras-chave:** Geometria Fractal; Contextualização, Interdisciplinaridade.

## ABSTRACT

The present work aims, fundamentally, to contribute to an analysis of the Geometry of Fractals at High School level, approaching the subject in a playful manner and using the theoretical reference of interdisciplinarity and contextualization. In addition, we explore the main characteristics of fractals, their self-similarity, infinite complexity and non-integer dimensions; while we used several research sources, the main source is Professor Ruy Madsen Barbosa's book “Descobrimo a Geometria Fractal”.

**Keywords:** Fractal Geometry; Contextualization; Interdisciplinarity.

## SUMÁRIO

<b>Introdução .....</b>	<b>08</b>
<b>1. Contextualização histórica .....</b>	<b>10</b>
<b>2. Artur Ávila .....</b>	<b>12</b>
<b>3. Fractal – definição .....</b>	<b>14</b>
<b>4. Geometria Fractal e suas aplicações .....</b>	<b>18</b>
<b>5. Fractais clássicos .....</b>	<b>24</b>
<b>6. Construção da curva de Koch .....</b>	<b>24</b>
<b>7. Comprimento total da curva de Koch .....</b>	<b>26</b>
<b>8. Floco de neve ou ilha de Koch .....</b>	<b>26</b>
<b>9. Perímetro de um floco de neve .....</b>	<b>28</b>
<b>10. Conjunto de Cantor .....</b>	<b>29</b>
<b>11. Triângulo de Sierpinski .....</b>	<b>30</b>
<b>12. Esponja de Menger .....</b>	<b>32</b>
<b>13. Dimensão de um fractal .....</b>	<b>32</b>
<b>14. Aplicação .....</b>	<b>34</b>
<b>15. Atividades desenvolvidas na forma de estudo dirigido .....</b>	<b>37</b>
<b>16. Proposta de atividades .....</b>	<b>40</b>
<b>17. Atividades sendo realizadas em sala de aula .....</b>	<b>43</b>
<b>Considerações finais .....</b>	<b>45</b>
<b>Referências bibliográficas .....</b>	<b>46</b>

## APÊNDICE

<b>1. Sequência .....</b>	<b>48</b>
<b>2. Progressão Aritmética .....</b>	<b>51</b>
<b>3. Progressão Geométrica .....</b>	<b>53</b>
<b>4. Função Exponencial .....</b>	<b>55</b>
<b>5. Logaritmo .....</b>	<b>58</b>
<b>6. Função Logarítmica .....</b>	<b>59</b>
<b>Glossário .....</b>	<b>61</b>

## INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal, mostra-se como uma excelente alternativa no desenvolvimento de diversos temas abordados no Ensino Médio; para além disso, tais atividades também podem ser adaptadas ao Ensino Fundamental, dependendo, para isso, do objetivo da atividade. Tendo isso em vista, esse trabalho visa apresentar uma proposta de atividades que auxiliem em situações dificilmente alcançadas com os artifícios usados em sala de aula e distantes da realidade. São atividades atraentes e, ao mesmo tempo, eficientes, do ponto de vista didático.

Esse trabalho também visa demonstrar que os fractais estão inseridos em diversos campos, como os científicos, culturais e tecnológicos, além de outros mais, e que, com isso, torna-se possível tratar da introdução contextualizada acerca da Geometria Fractal na vida e no cotidiano do aluno. Porém, de um modo geral, há uma tendência a se considerar que o que não está claramente abordado na Geometria Euclidiana não deve ser apresentado pedagogicamente ao aluno. Na minha opinião, este estado das coisas não é necessariamente perene. Na medida em que se fale mais de fractais, creio que o quadro mude, a favor destes objetos.

Ademais, a Geometria Fractal faculta ao aluno descobrir e relacionar o que visualiza e o que estuda, para que com isso o aluno seja capaz de conceber um vasto campo de aplicação de seus conceitos matemáticos em diversas áreas; tais conceitos serão abordados nos dezessete primeiros capítulos, assim distribuídos:

No Capítulo 1 será apresentado um breve histórico da Geometria Fractal, mostrando que tal geometria não-euclidiana fora desenvolvida por vários matemáticos, porém, a mesma não possuía tal designação. Além disso, serão tratados os estudos e conclusões de Benoît Mandelbrot acerca da análise de formas geométricas que possuíam a infinitude como uma propriedade em comum, bem como a autos semelhança.

No Capítulo 2, como forma de incentivo a futuros estudiosos da Geometria Fractal, será apresentada uma reportagem de cunho internacional do matemático Artur Ávila, carioca que, em 13 de agosto de 2014, recebeu a maior honraria da Matemática: a Medalha Fields.

No Capítulo 3, é introduzido o conceito de fractal, definindo os processos de iteração, autossimilaridade e complexidade infinita, mostrando uma ligação entre fractais e áreas da Física e da Matemática chamadas Sistemas Dinâmicos e Teorias do Caos.

O Capítulo 4 destina-se a mostrar a imensa variedade de aplicações dos fractais nas diversas áreas e situações. Os Capítulos de 5 as 12 visam mostrar os fractais clássicos, tais



como: a Curva de Koch, o floco de neve, o Triângulo de Sierpinski, o Conjunto de Cantor e a Esponja de Menger, bem como suas construções, perímetros, áreas e volumes.

O Capítulo 13 ocupa-se da definição e cálculo da dimensão de um fractal e, no Capítulo 14 os alunos são levados a resolver alguns problemas do livro “Descobrimos a Geometria Fractal” do professor Ruy Madsen Barbosa.

As atividades desenvolvidas e as propostas, se encontram nos Capítulos 15 e 16.

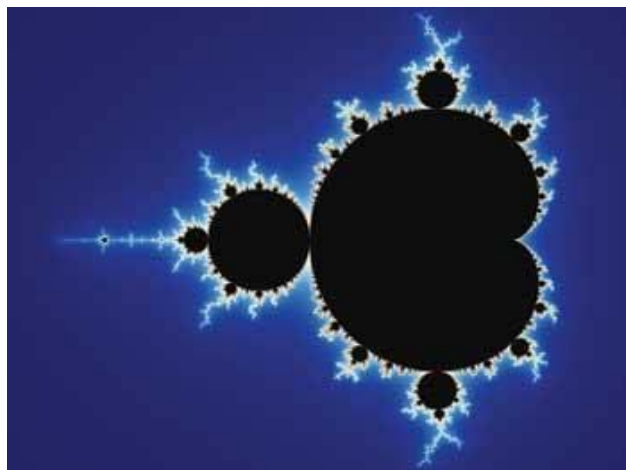
Acrescentamos um apêndice apresentando alguns conceitos teóricos, que serão as ferramentas usadas em sala de aula para a resolução de diversos problemas apresentados na lista de exercícios do último capítulo, tais como: sequência, progressão aritmética, progressão geométrica, função exponencial e função logarítmica.

É oportuno lembrar que, embora a Geometria Fractal ainda não conste na grade curricular do Ensino Médio, a mesma tem sido abordada em alguns vestibulares, tais como o ENEM de 2008 e no vestibular da Universidade Federal do Paraná, assim, demonstrando seu potencial de expansão pedagógica.

## 1. CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA



O nome Benoît Mandelbrot está ligado ao surgimento dos fractais, família de formas geométricas que ele descreveu nos anos 1970 e teve implicações em áreas como a biologia, a física, a astronomia e no sistema financeiro. Em 1975, Mandelbrot cunhou o termo “fractal” para descrever objetos matemáticos fragmentados e irregulares, cuja estrutura se repete em diferentes escalas e tem vínculo com formas encontradas na natureza. A Geometria Fractal é utilizada para modelar sistemas físicos, biológicos e financeiros, e sustenta a física dos sistemas dinâmicos e a teoria do caos. Uma das imagens de fractais mais conhecida chama-se Conjunto de Mandelbrot e foi gerada por computador, mostrando uma estética elaborada de círculos e quase-círculos, ornamentados com extremidades espinhosas, espirais e filamentos que se enrolam em todas as direções ao longo de diversas escalas, numa quantidade infinita de informação.



A Geometria Euclidiana é a geometria que normalmente aprendemos nas escolas, mas existe uma grande quantidade de fenômenos na natureza que não podem ser descritos por essa geometria.

A maior parte das formas apresentadas pela natureza não são regulares e nem suaves, pelo contrário, são extremamente complexas, recortadas e irregulares. Isso se expressa na seguinte frase de Mandelbrot:

“Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, tronco de árvores não são suaves e nem o relâmpago viaja em linha reta.”<sup>1</sup>

Ao longo do tempo, vários modelos de fractais foram construídos por matemáticos, mas não possuíam essa designação, geralmente, eram figuras que não se encaixavam nas geometrias tradicionais. Esses objetos ficaram conhecidos como “monstros matemáticos” e apesar de existirem há muito tempo, ninguém ainda tinha lhes atribuído um nome.

Foi em 1978 que Benoît Mandelbrot, quando escrevia sua primeira obra sobre os chamados “monstros”, sentiu necessidade de atribuir-lhes um nome, chamando-os de Fractais, por isso ficou conhecido como “o pai dos fractais”. Para criar o nome, ele se fundamentou no adjetivo latino *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar.

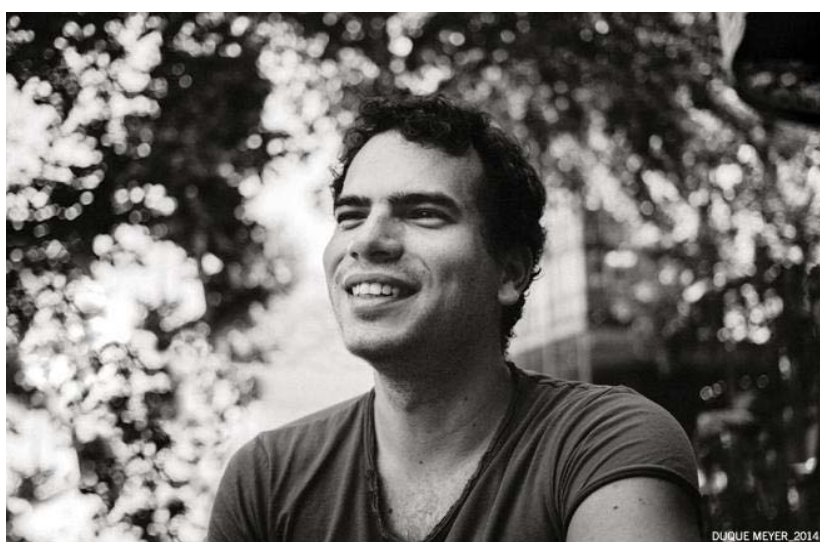
Mandelbrot estabeleceu uma estruturação na qual a Geometria Fractal, ou Geometria dos Fractais, pode ser entendida como uma área da Matemática que estuda as características e o comportamento dos fractais, que são abstratas formas geométricas que seguem um mesmo modelo de maneira infinita, ainda que limitados a uma área finita.

---

<sup>1</sup> MANDELBROT, Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

Com a Geometria Fractal torna-se possível a criação de modelos mais próximos da realidade. A Geometria Fractal fornece algoritmos para construção de formas idênticas às naturais e também ferramentas para o estudo das mesmas. Essa geometria vem se consolidando nos últimos anos com o desenvolvimento da tecnologia computacional e com auxílio de novas teorias nas áreas da física, biologia, astronomia e matemática.

## 2. ARTUR ÁVILA



A revista PIAUÍ, de janeiro de 2018, iniciou uma reportagem de Bernardo Esteves com o título **“BRASIL CHEGA À ELITE DA MATEMÁTICA MUNDIAL** “Promoção reconhece momento da disciplina no país, coroado com a Medalha Fields de Artur Ávila.

“Não é todo dia que o Brasil pode sacar louvores superlativos do armário. A data de 13 de agosto de 2014 será lembrada como uma dessas ocasiões, e não apenas porque nesse dia, em Seul, na Coreia do Sul, um carioca de 35 anos protagonizou o feito mais importante da história da ciência brasileira. Ao receber a Medalha Fields, maior honraria da matemática, Artur Ávila era a expressão luminosa de um projeto de pouco mais de meio século: o de criar entre nós, no âmbito público, um ambiente intelectual em que a pesquisa científica de alta qualidade pudesse prosperar.” Disse Marcelo Viana, diretor-geral do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, o Impa.

### **Sobre Artur Ávila na reportagem de 25 de janeiro de 2018 a revista piauí publicou:**

A Matemática brasileira vai entrar para a elite mundial da disciplina. A União Matemática Internacional (ou IMU, na sigla em inglês), que classifica os países-membros em função da qualidade da pesquisa que fazem, decidiu promover o Brasil para o grupo que reúne as maiores potências do campo. O país se juntará a Alemanha, Canadá, China, Estados Unidos, França, Israel, Itália, Japão, Reino Unido e Rússia.

“Entrar nesse grupo é o equivalente a se tornar adulto na matemática”, comparou [Marcelo Viana](#), diretor-geral do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, o Impa. “A decisão reflete o nível de maturidade atingido pela comunidade de pesquisadores brasileiros”, completou Viana, que recebeu **piauí** para uma entrevista na véspera do anúncio, feito na manhã desta quinta-feira, 25 de janeiro, na sede do Impa.

Uma forma de medir a maturidade da comunidade é pelo volume de suas publicações. Nos últimos dez anos, o número de artigos publicados por matemáticos brasileiros praticamente dobrou, passando de 1 043 *papers* em 2006 para 2 076 em 2016. Trinta anos atrás, em 1986, os pesquisadores do país respondiam por 0,7% dos artigos matemáticos publicados no mundo. Em 2016, o percentual havia pulado para 2,35%. “É um salto extraordinário”, avaliou Viana.

A promoção do Brasil coroa uma boa fase cujo ápice foi a Medalha Fields conquistada em 2014 por [Artur Ávila](#), pesquisador do Impa e do CNRS (Centro Nacional da Pesquisa Científica, em português), na França (o prêmio – [o mais importante da disciplina](#) – foi tema de uma [edição especial da piauí](#)). “A decisão é um reconhecimento da qualidade da pesquisa que vem sendo realizada há algum tempo no país”, disse Ávila. “Ela deve servir para que nossa sociedade compreenda que podemos e devemos fazer ciência de qualidade no Brasil, num momento em que a ciência é tratada como um luxo dispensável em momentos de crise.”  
(**BERNARDO ESTEVES**– revista Piauí -25jan2018\_12h00)

Artur Ávila, umas das representações ímpares do universo matemático em desenvolvimento no Brasil, reflete não apenas a emergências dos países sul americanos na matemática, mas também expressa a profunda necessidade da criação de uma tradição científica, que possua como fundamento para seu desenvolvimento bases escolares universais, que incitem o anseio pela pesquisa e pelo estudo, começando pelo principal: despertar a curiosidade dos alunos por meio do contato com novas formas de ver matemática além da tradicional euclidiana, associando esses fenômenos à situações e aplicações de seus cotidianos.

“A União Internacional de Matemática, entidade que atribui a Fields, classifica o Brasil no nível 4 de uma escala em que o quinto nível corresponde à elite dos países produtores de matemática. É um indicador de que a ciência já dispõe aqui de massa crítica. Nesse conjunto de pesquisadores, existem alguns que, a exemplo de Ávila, têm publicado resultados excepcionais.”<sup>2</sup>

Levando em consideração a análise do cenário matemático brasileiro, bem como sua colocação diante de outros países, pergunta-se se o Brasil já havia conquistado seu lugar no protagonismo mundial, porém, como disse Marcelo Viana, somos apenas recém-chegados: “estamos aprendendo a jogar o jogo. Quando, a cada quatro anos, com regularidade, formos cogitados para a Medalha, aí, sim, será o ápice”

### **3. FRACTAL: DEFINIÇÃO**

A definição mais simples é a de que fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo (iteração/recursão), apresentando autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal.

Os fractais estão ligados à área da Física e da Matemática chamadas Sistemas Dinâmicos e Teorias do Caos, porque suas equações são usadas para descrever fenômenos que, apesar de parecerem aleatórios, obedecem a certas regras – o fluxo dos rios; porém, vale ressaltar que elas não são explicadas pela Geometria Euclidiana, pois possuem dimensão fracionária. Essa fração está relacionada com a quantidade e a escala de ampliação das cópias da figura contidas dentro dela mesma. Outra característica é que possuem complexidade infinita, levando que com um zoom em detalhe da imagem, se revelam outros novos detalhes.

---

<sup>2</sup> SALLES, João Moreira; “Chegada, Edição especial: Modo de Usar.”; *Revista Piauí. São Paulo/ vol 95, ago.2014*

### 3.1 AUTOSSIMILARIDADE

Na Geometria Fractal, a autossimilaridade baseia-se no fato de um fractal apresentar cópias de si mesmo, invariância da forma em seu interior, que independe da escala de ampliação. Essa propriedade se encontra presente em várias formas naturais, tais como: nas linhas costeiras, nas nuvens, nas árvores e em outros sistemas.

Essa autossimilaridade, como hoje conhecida, pode ocorrer na natureza de dois modos distintos: a autossimilaridade exata e a autossimilaridade estatística; apesar de se originarem do mesmo conceito geométrico, é possível observar que as mesmas apresentam suas divergências, a serem exemplificadas a seguir.

#### 3.1.1 AUTOSSIMILARIDADE EXATA:

Essa autossimilaridade, geralmente, é apresentada por fractais gerados por sistemas de funções exatas, entes matemáticos. É possível, também, observar que a exatidão sempre é presente em suas cópias, não importando a escala da ampliação, conforme podemos observar na figura 3.1.1. a, denominada Curva de Koch e que mais adiante iremos definir.



Figura 3.1.1. a

### 3.1.2 AUTOSSIMILARIDADE ESTATÍSTICA:

Nessa autossimilaridade, O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas, porém, já não apresentam repetição dos padrões com exatidão. Estamos falando aqui de objetos do mundo físico. Não há como se esperar autossimilaridade ou zooms arbitrários.

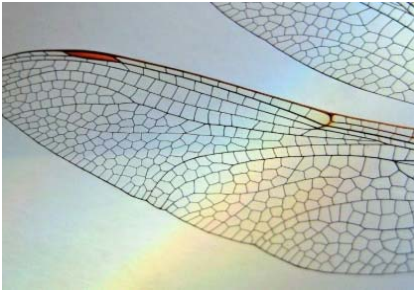


Figura 3.1.2.a

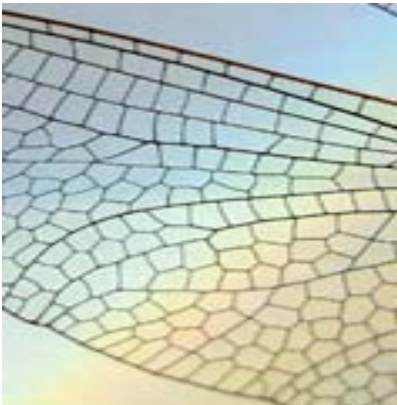


Figura 3.1.2.b

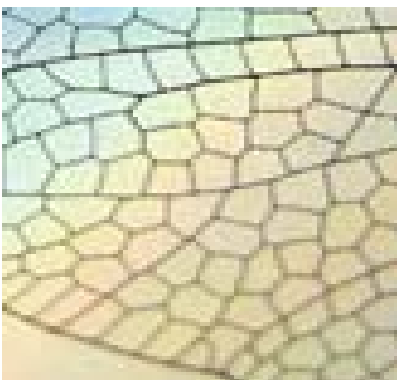


Figura 3.1.2.c



### 3.2 COMPLEXIDADE INFINITA -CARACTERÍSTICAS FRACTAIS

A complexidade infinita se refere ao fato de que, quanto maior for o número de iterações, mais detalhes podemos perceber e, assim, nunca obteremos uma “imagem final” do fractal; A ideia aqui é que, zooms sucessivos (e ad infinitum) revelam sempre complexidade, ainda que a figura mude de forma.



Figura 3.2.a



Figura 3.2.b



Figura 3.2.c

## 4. GEOMETRIA FRACTAL E SUAS APLICAÇÕES

### 4.1. NA NATUREZA

Os contornos das montanhas, a superfície dos pulmões humanos, a trajetória das gotículas de água quando penetram na terra - existe uma infinidade de fenômenos na natureza que não podem ser descritos pela geometria tradicional toda ao certo. É preciso apelar para complicados cálculos que resultam nas chamadas dimensões.

Os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente e, Mandelbrot constatou que todas estas formas e padrões possuíam algumas características comuns, e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza em estruturas vegetais ou animais (cristais, nuvens, sistemas radiculares, etc.), ou podem ser produzidos artificialmente em computador através de um algoritmo matemático, criando arte.



Figura 4.a

Porém, hoje em dia, a Arte Fractal libertou-se da simples geração de imagens fractais em computadores para invadir o espaço tradicional de pintores e outros artistas plásticos, além de ter seus princípios adaptados para a criação de músicas, esculturas e obras literárias.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Disponível em: <[http://lounge.obviousmag.org/por\\_tras\\_do\\_espelho/2012/07/os-fractais-da-natureza---a-perfeicao-no-caos.html#ixzz5bSQOrIXZ](http://lounge.obviousmag.org/por_tras_do_espelho/2012/07/os-fractais-da-natureza---a-perfeicao-no-caos.html#ixzz5bSQOrIXZ)>

## 4.2 DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO

No desenvolvimento de tecnologia, é possível citar a utilização de antenas fractais usadas na telefonia celular, na transmissão wireless, na TV digital (HDTV), entre outras. Essas ligações tecnológicas e fractais podem ser aproveitadas de forma interativa e lúdica nas aulas teóricas, bem como práticas, por exemplo, nas aulas de física e geometria nas escolas.

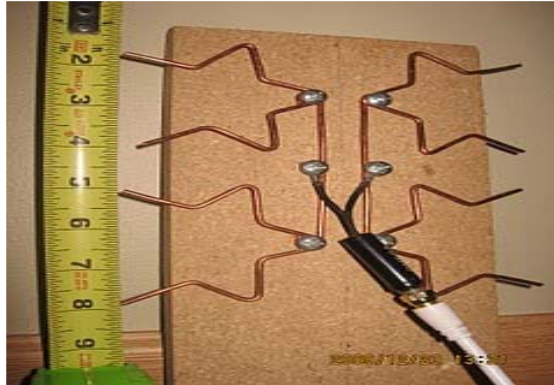


Figura 4.1.a

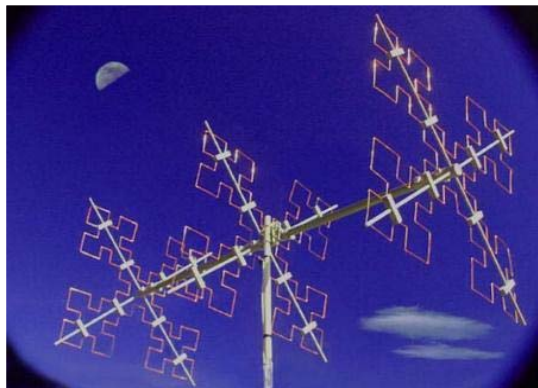


Figura 4.1.b

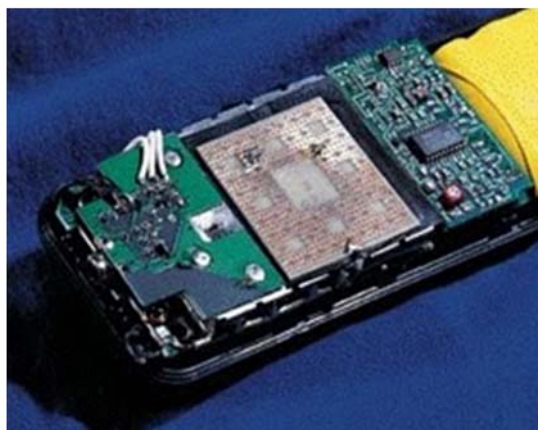


Figura 4.1.c

### 4.3 NA AGRICULTURA

Na agricultura, a Geometria Fractal se expressa na análise de solos, na nebulosidade da área, movimentos dos rios, além do fato de a estrutura de vários cristais apresentarem a modelação expressa e formada por fractais; por seu teor, principalmente, geográfico e biológico, a presença da Geometria Fractal na agricultura abre um leque de opções de assuntos a serem tratados, em conjunto com a geometria aqui apresentada.



Figura 4.1.a

### 4.4 NA MINERALOGIA

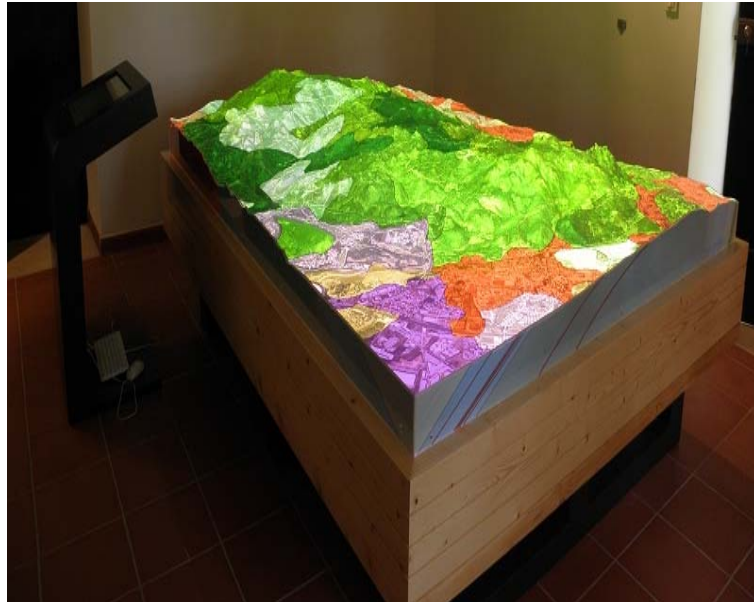
Quanto à mineralogia, nela, a Geometria Fractal se expressa, majoritariamente, no âmbito geográfico-físico, como na medição da densidade dos minerais, na evolução dos terrenos e na descontinuidade das rochas.



Figura 4.1.2.b

#### 4.5 NA COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Os fractais ajudam na confecção e projeção computadorizada de cenários naturais, como rios, conjuntos montanhosos e plantas.



## 4.6 NA GERAÇÃO DE EFEITOS ESPECIAIS

Na computação gráfica, os fractais são comumente utilizados na criação de imagens realista e complexas, prática abordada na composição de imagens cinematográficas



Figura 4.1.4.a

Além disso, os fractais também podem ser usados em recriações geo-representativas como explosões e lavas de vulcões, baseados na representação natural e fractal desses fenômenos.



Figura 4.1.4.b

#### 4.7 NAS CIÊNCIAS MÉDICAS E BIOLÓGICAS

Nas ciências médicas e áreas biológicas, a geometria fractal se apresenta nas composições fisionômicas dos corpos e dos seres vivos em geral. Nessa área, encontram-se diversos exemplos que podem ser modelados através da geometria fractal; as ramificações pulmonares, veias e artérias; análise de imagens no diagnóstico precoce de câncer pode ser feita através de modelagem utilizando-se os fractais.



Figura 4.7.a



Figura 4.7.b

## 5. FRACTAIS CLÁSSICOS

Alguns fractais assumem papel relevante dentro da Geometria Fractal, pois apresentam características próprias e por serem pioneiros nos estudos desta Geometria. São eles: a Curva de Koch, o Floco de Neve ou Ilha de Von Koch, o Triângulo de Sierpiski, a Esponja de Menger e outros.

## 6. CONSTRUÇÃO DA CURVA DE KOCH

Para construir a curva de Koch (ou von Koch), deve-se dividir um segmento de reta AB em três partes iguais.



Figura 17

Em seguida, substitui-se o segmento médio por dois segmentos iguais medindo, cada um desses dois segmentos,  $\frac{1}{3}$  do segmento AB.

É possível observar que a figura 18 tem uma curva que vai do ponto A ao ponto B, formada por 4 segmentos de mesmo comprimento, igual a  $\frac{1}{3}$  do segmento AB.



Figura 18



Repetindo o procedimento descrito em cada um dos 4 segmentos da figura 18, obtemos uma figura (fig. 19) com 16 segmentos de reta ainda menores, sempre seguindo a proporção usada na figura 18, ou seja, cada novo segmento de reta mede  $\frac{1}{3}$  do segmento suporte.



A construção da curva de Koch nos mostra que, a cada passo, o número total de segmentos é multiplicado por 4, enquanto o comprimento de cada um é dividido por 3. Ou seja, o comprimento da curva aumenta e o fator de aumento é  $\frac{4}{3}$ . Como  $\frac{4}{3} > 1$ , vemos que o comprimento tende a infinito, na medida em que o número de iterações cresce. Observa-se, também, que a curva de Koch é auto similar, pois em cada estágio da sua construção vemos a cópia fiel do estágio anterior em uma escala  $\frac{1}{3}$  da figura original. Temos aqui um caso de autossimilaridade exata.

## 7. COMPRIMENTO TOTAL DA CURVA DE KOCH

A seguir, demonstra-se a construção de uma tabela com algumas iterações, a fim de obter-se o comprimento total da curva de Koch.

NÍVEIS	QUANTIDADE DE SEGMENTOS	COMPRIMENTO DO SEGMENTO	COMPRIMENTO TOTAL
INICIAL	1	C	1. C = C
1ª ITERAÇÃO	$4=4^1$	$\frac{1}{3}C$	$4^1 \cdot \frac{1}{3}C$
2ª ITERAÇÃO	$16 = 4^2$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}C = \left(\frac{1}{3}\right)^2 C$	$4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot C$
3ª ITERAÇÃO	$64=4^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 C$	$4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot C$
...	...	...	...
n-ÉSIMA ITERAÇÃO	$4^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n C$	$4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot C$

Tabela I

## 8. FLOCO DE NEVE DE KOCH OU ILHA DE VON KOCH

Para se construir o floco de neve de Koch, devem-se lembrar que, dados três pontos não colineares  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  podemos construir um polígono formado por eles. Assim  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$ , serão lados do polígono se os três pontos forem distintos dois a dois. O polígono assim formado é um triângulo de vértices  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ ; caso os lados sejam iguais, o polígono será um triângulo equilátero. Convém lembrar que um polígono será regular se, e somente se, for equilátero e equiângulo.

O processo de construção do Floco de neve de Koch se inicia a partir da figura de um triângulo equilátero. Na primeira iteração da construção, se divide cada lado do triângulo em três partes iguais e construindo, sobre cada um dos segmentos do meio, um novo triângulo equilátero, sem a base. Assim, pode-se obter a segunda figura conhecida como “Estrela de Davi” com 12 lados.



Repete-se o mesmo processo para cada um dos 12 segmentos obtidos na figura anterior e, repetindo indefinidamente o processo, se obterá, no limite deste processo recursivo, o floco de neve de Koch, conforme a figura abaixo.

O número de lados ( $L_n$ ) de cada figura em função do número de iterações é dado por uma PG de razão  $q_m = \frac{1}{3}$ , supondo que cada lado do triângulo inicial mede uma unidade, ou seja, se  $M_0 = 1$ , podemos definir  $L_n$  e  $M_n$  por recorrência ou através de um termo geral.

Iteração	Nº de lados ( $L_n$ )	Medida dos lados ( $M_n$ )
0	3	1
1	$3 \cdot 4 = 12$	$\frac{1}{3}$
2	$3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2 = 48$	$\frac{1}{9}$
3	$3 \cdot 4^2 \cdot 4 = 3 \cdot 4^3 = 192$	$\frac{1}{27}$
...	...	...
N	$3 \cdot 4^n$	$\frac{1}{3^n}$

Tabela II

Percebe-se que, através das iterações, formamos uma sequência monótona crescente do número de lados à medida que o número de iterações se aproxima do infinito, ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $L_n \rightarrow +\infty$ . Percebe-se também que, através das iterações, formamos uma sequência monótona decrescente da medida dos lados à medida que o número de iterações se aproxima do infinito, ou seja, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $M_n \rightarrow 0$ .

Desta forma, temos que o perímetro da figura é infinito. Com relação a área da figura, fazendo a 1ª iteração e traçando um hexágono na figura encontrada em “Estrela de Davi”, podemos constatar que a figura da 2ª iteração ainda está contida no hexágono, e torna-se perceptível que isso segue ocorrendo em todas as iterações.

Assim, pode-se concluir que a área do Floco de neve de Koch é inferior a área do hexágono, que é igual ao dobro da área do triângulo equilátero inicial, que será denotada por A. Logo, tem-se que a área da região delimitada pelo Floco de neve estará compreendida entre a área do triângulo equilátero (A) e a área do hexágono (2A, conclui-se que, assim, embora o perímetro seja infinito (ilimitado superiormente), a área tem um limite finito e está dentro do intervalo  $[A, 2A)$ .

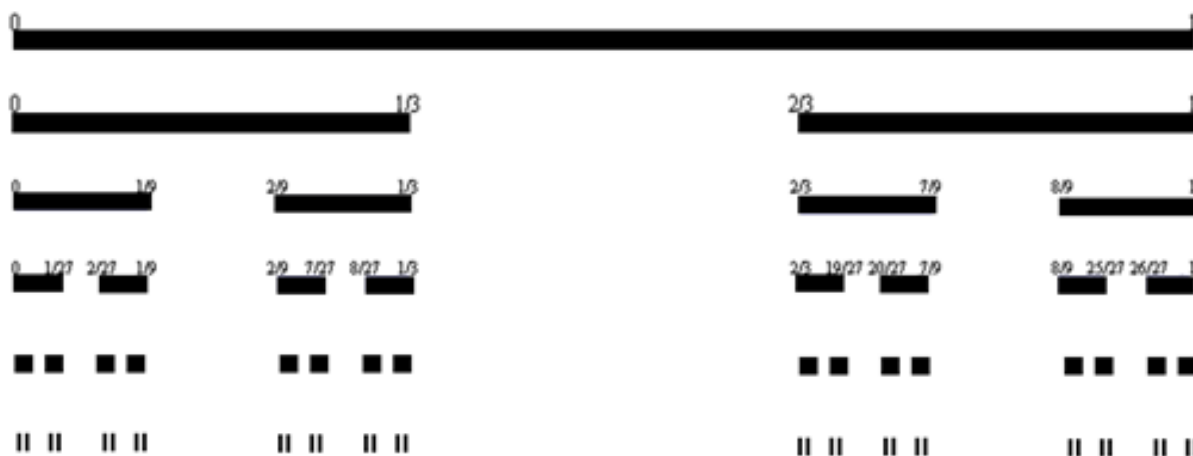
## 9. PERÍMETRO DE UM FLOCO DE NEVE

Para calcularmos o perímetro do floco de neve, devemos multiplicar o comprimento total obtido na tabela anterior (tabela I) por 3, uma vez que iniciamos com o triângulo equilátero.

NÍVEIS	QUANTIDADE DE SEGMENTOS	COMPRIMENTO DO SEGMENTO	PERÍMETRO
INICIAL	1	C	$3 \cdot 1 \cdot C = 3C$
1ª ITERAÇÃO	$4=4^1$	$\frac{1}{3}C$	$3 \cdot 4^1 \cdot \frac{1}{3}C = 3 \cdot \frac{4}{3}C$
2ª ITERAÇÃO	$16 = 4^2$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}C = \left(\frac{1}{3}\right)^2 C$	$3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot C = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot C$
3ª ITERAÇÃO	$64=4^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 C$	$3 \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot C = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot C$
...	...	...	...
n-ÉSIMA ITERAÇÃO	$4^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot C$	$3 \cdot 4^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot C = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot C$

Tabela III

## 10. CONJUNTO DE CANTOR



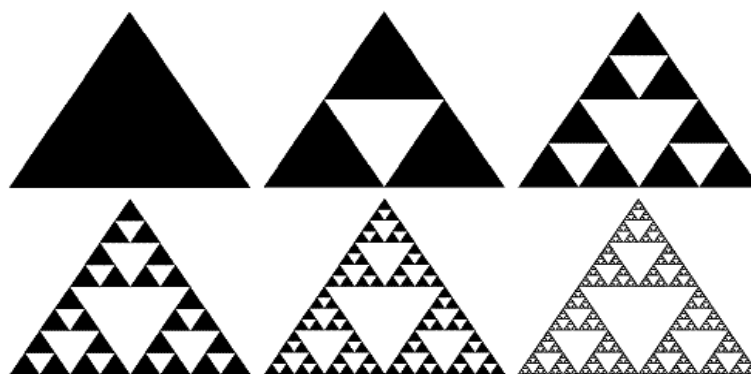
O conjunto de Cantor é um subconjunto fechado do intervalo  $[0,1]$ , obtido por sucessivas retiradas de intervalos centrais. Denotando o intervalo inicial por  $F_0=[0,1]$ , o próximo conjunto é obtido retirando o terço central  $(1/3,2/3)$ ; ou seja,  $F_1=[0,1/3] \cup [2/3,1]$ . Esse processo é repetido, então, em cada um dos segmentos ainda pertencentes ao conjunto em questão. A tabela abaixo mostra o número de intervalos e seu comprimento a cada iteração:

Iteração	Nº de intervalos ( $I_n$ )	Comprimento de cada intervalo ( $C_n$ )
0	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$
2	4	$\frac{1}{9}$
3	8	$\frac{1}{27}$
...	...	...
n	$2^n$	$\frac{1}{3^n}$

Tabela IV

O Conjunto de Cantor é o conjunto formado por todos os pontos não retirados. Equivalentemente, é a interseção de todos os conjuntos obtidos a cada iteração. Na  $n$ -ésima iteração da construção, temos  $2^n$  intervalos disjuntos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$  cada, portanto, o comprimento (a rigor, a soma dos comprimentos de cada intervalo) de  $F_n$  é  $2^n \cdot \frac{1}{3^n}$ . Logo, pode-se observar que para  $n \rightarrow \infty$ , o comprimento se expressa como  $F_n \rightarrow 0$ .

## 11. TRIÂNGULO DE SIERPINSKI



O Triângulo de Sierpinski pode ser encarado como uma versão bidimensional do Conjunto de Cantor. Enquanto no conjunto de Cantor, retirávamos o terço central a cada iteração, aqui retiramos o “quarto central”: a partir de um triângulo equilátero (1ª figura), formamos um outro triângulo equilátero, unindo os pontos médios de cada lado. Retiramos, então, esse novo triângulo, obtendo o próximo passo na construção. O Triângulo de Sierpinski é a figura obtida ao se repetir esse processo indefinidamente, para cada um dos subtriângulos obtidos a cada passo. Abaixo vemos uma tabela com valores da área e do perímetro das figuras intermediárias:

Iteração	Área ( $A_n$ )	Perímetro ( $P_n$ )
0	A	P
1	$\frac{3}{4}A$	$\frac{3}{2}P$
2	$\frac{3}{4}A \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A$	$\frac{3}{2}P \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 P$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 A \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 P \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 P$
...	...	...
N	$\left(\frac{3}{4}\right)^n A$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n P$

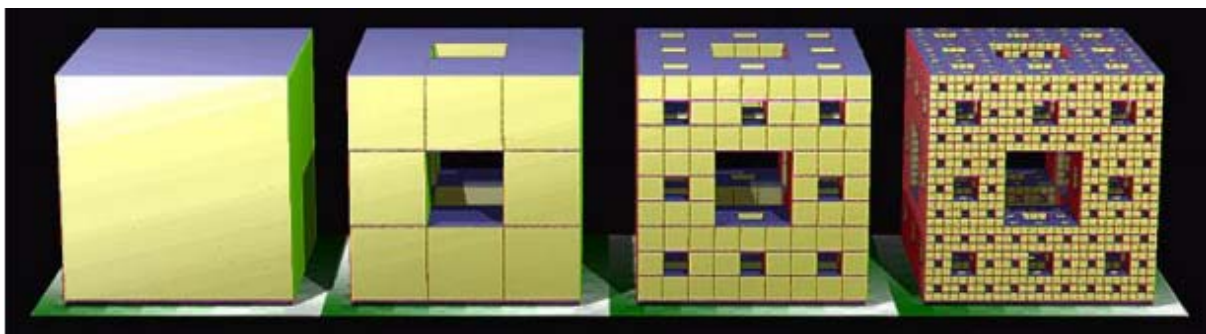
Tabela V

Podemos observar que, à medida que repetimos as iterações, a área do triângulo vai diminuindo e formando uma **sequência monótona decrescente**, na forma de uma PG de razão  $q = \frac{3}{4}$  e quando o número de iterações se aproxima do infinito, a área ( $A_n$ ) tende a ser zero, ou seja, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $A_n \rightarrow 0$ .

Com relação ao perímetro, observa-se que o perímetro aumenta conforme são feitas as iterações. Desta forma, tem-se uma **sequência monótona crescente** na forma de uma PG de razão  $q_p = \frac{3}{2}$ , e quando o número de iterações se aproxima do infinito, o perímetro ( $P_n$ ) é infinito, ou seja, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $P_n \rightarrow +\infty$ .

## 12. ESPONJA DE MENGER

A construção da Esponja de Menger se baseia no mesmo princípio usado na construção do Triângulo de Sierpinski: a partir de um cubo de lado 1, obtemos a próxima figura dividindo-o em 27 cubos de lado  $1/3$ . A partir daí, retiramos os 7 cubos centrais, como ilustrado na figura abaixo. Esse processo é repetido sucessivamente em cada um dos subcubos obtidos na iteração.



## 13. DIMENSÃO DE UM FRACTAL

A dimensão de um fractal diz respeito à uma das características desse fenômeno matemático, nela, pode-se afirmar que a dimensão fractal de um conjunto é um valor que diz o quão densamente um conjunto ocupa o espaço métrico no qual ele existe.

### CÁLCULO DA DIMENSÃO DE UM FRACTAL

*O conceito de dimensão da Geometria Euclidiana está relacionado a conceitos de medida, altura, largura e comprimento a quais estão relacionadas aos objetos ditos “perfeitos”, já na Geometria Fractal o conceito de dimensão está associado ao formato do objeto em questão que corresponde ao grau de irregularidade em diferentes escalas, aspereza e fragmentação, o que explica o fato de terem dimensão fracionária e serem ditos objetos “imperfeitos”. (MOREIRA, Vanessa da Silva Sá Sampaio-2017)*

O método de cálculo da dimensão de Hausdorff permite calcular a dimensão de objetos ditos “perfeitos” e dos fractais naturais que, com o aumento da escala, percebe-se que em seu interior existem partes que não são exatamente auto-semelhantes a todo o conjunto



fractal. Usando a Geometria Euclidiana, vamos dar alguns exemplos até chegar na fórmula para se calcular a dimensão fractal.

Como um primeiro exemplo, vamos considerar um objeto não fractal: a diagonal de um quadrado de lado  $L$ . O comprimento do objeto em função do lado do quadrado é, como sabemos,

$$c(L) = \sqrt{2}L.$$

Multiplicando o lado  $L$  por uma constante  $k > 0$ , temos

$$c(kL) = \sqrt{2}(kL) = k^1 c(L) = k^d c(L)$$

O número  $d$  acima é a dimensão do objeto. Como se tratava de um objeto euclidiano, a dimensão é 1 (um segmento unidimensional).

Esse raciocínio pode ser aplicado também a dimensões maiores. Por exemplo, a área  $A(L)$  de um quadrado de lado  $L$  satisfaz a

$$A(kL) = k^2 A(L),$$

Enquanto o volume do cubo correspondente satisfaz a

$$V(kL) = k^3 V(L)$$

A dimensão fractal,  $d$ , é o número que generaliza essa relação. Por exemplo, no caso de um objeto 'linear', esperamos algo como  $c(kL) = k^d c(L)$ , com  $d$  um número entre 1 e 2.

No caso da curva de Koch, começamos com um segmento de lado  $L$  originalmente. O comprimento inicial é simplesmente  $c(L) = L$ . Para entendermos a nova situação, vamos multiplicar esse lado por 3 e iterar uma vez nossa construção. Agora temos

$$c(3L) = 4L,$$

como já explicado.

A ideia agora é supor que vale uma fórmula como  $c(kL) = k^d c(L)$ . O número  $d$  é a *dimensão fractal* do objeto. Fazendo as contas, temos:

$$c(3L) = 3^d c(L)$$

$$4L = 3^d L$$

$$4 = 3^d \Rightarrow d = \log(4)/\log(3) \cong 1,2618.$$

Portanto, a Curva de Koch tem dimensão não inteira, não sendo unidimensional nem bidimensional.

## 14. APLICAÇÃO

O professor Ruy Madsen Barbosa, em seu livro intitulado “Descobrimo a Geometria Fractal”, sugere um exercício para os alunos do Ensino Médio para o cálculo de perímetro de um Floco de Neve. Considere o seguinte problema:

**Exemplo 1.** “Sendo o comprimento inicial de 1m, quantas iterações teriam que ser realizadas para que o comprimento seja igual a 90 metros?”

Observando a fórmula do comprimento na tabela acima para  $n$  iterações obtém-se:  $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n C=90 \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^n 1 = 30$ . Aplicando o logaritmo decimal aos dois membros da igualdade obtém-se:

$$\log \left(\frac{4}{3}\right)^n = \log 30 \Rightarrow n \cdot \log \left(\frac{4}{3}\right) = \log(3 \cdot 10)$$

$$\Rightarrow n \cdot (\log 4 - \log 3) = \log 3 + \log 10$$

$$n = \frac{\log 3 + \log 10}{2 \cdot \log 2 - \log 3}$$

$$\Rightarrow n = \frac{0,47712+1}{0,60206-0,47712}$$

$$= \frac{1,47712}{0,12494}$$

$$= 11,826 \dots$$

Seriam necessárias aproximadamente 12 iterações para que o comprimento seja igual a 90 metros.

**Exemplo 2.** Vamos repetir o processo do problema anterior para sabermos quantas iterações seriam necessárias para obtermos um comprimento de 900 metros.

$$3. \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot C = 900$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 1 = 300$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \log 300$$

$$n. (\log 4 - \log 3) = (\log 3 + \log 100)$$

$$n. (\log 2^2 - \log 3) = \log 3 + \log 100$$

$$n. (2\log 2 - \log 3) = \log 3 + \log 100$$

$$n. (2 \cdot 0,30103 - 0,47712) = 0,47712 + 2$$

$$n = \frac{2,47712}{0,60206 - 0,47712}$$

$$n = \frac{0,47712 + 2}{0,12494}$$

$$n = \frac{2,47712}{0,12494}$$

$$n = 19,826 \dots$$

Portanto, seriam necessárias aproximadamente 20 iterações para que o comprimento seja igual a 900 metros.

**Exemplo 3.** Vamos calcular quantas iterações seriam necessárias para que o comprimento seja de 9.000 metros.

$$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot C = 9000$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 1 = 3000$$

$$\log\left(\frac{4}{3}\right)^n = \log 3000$$

$$n \cdot \log\left(\frac{4}{3}\right) = \log(3 \cdot 1000)$$

$$n \cdot (\log 4 - \log 3) = \log 3 + \log 1000$$

$$n \cdot (2\log 2 - \log 3) = \log 3 + \log 1000$$

$$n \cdot (2 \cdot 0,30103 - 0,47712) = 0,47712 + 3$$

$$n = \frac{3,47712}{0,60206 - 0,47712}$$

$$n = \frac{3,47712}{0,12494}$$

$$n = \frac{3,47712}{0,12494}$$

$$n = 27,830 \dots$$

Portanto, seriam necessárias aproximadamente 28 iterações para que o comprimento seja igual a 9000 metros.

## 15. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NA FORMA DE ESTUDO DIRIGIDO COM OS ALUNOS DO TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

### ATIVIDADE 1

**Prove que o volume da Esponja de Menger tende para zero, quando o número de níveis de iterações tende para o infinito.**

Resolução:

Sejam  $V$  e  $V_n$  os volumes do cubo inicial e o volume do  $n$ -ésimo nível de construção, respectivamente:

No nível 1, dividimos cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo o cubo inicial fica subdividido em 27 cubos menores, com volume igual a  $\frac{1}{27}V$  cada um, quando então, são retirados 7 desses cubos. Assim, o volume obtido após essa operação é:

$$V_1 = V - 7 \cdot \frac{1}{27}V \Rightarrow V_1 = \frac{20}{27}V$$

No nível 2, serão retirados  $7 \times 20$  cubos, tendo cada um deles volume igual a  $\frac{1}{27} \left( \frac{1}{27}V \right)$ , portanto:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 - 7 \cdot 20 \left( \frac{1}{27} \right) V \\ \Rightarrow V_2 &= \frac{20}{27}V - 7 \cdot 20 \left( \frac{1}{27} \right)^2 V \\ \Rightarrow V_2 &= \left( \frac{20}{27} \right)^2 V \end{aligned}$$

Repetindo esse raciocínio, no nível  $n$ , retiramos  $7 \times 20^{n-1}$  cubos, cada um deles tendo o volume igual a  $\left(\frac{1}{27}\right)^n V$ . Logo, o volume total no nível  $n$  é:

$$\begin{aligned} V_n &= \left(\frac{20}{27}\right)^{n-1} V - 7 \cdot 20^{n-1} \left(\frac{1}{27}\right)^n V \\ \Rightarrow V_n &= \frac{20^{n-1}}{27^{n-1}} V - 7 \cdot 20^{n-1} \cdot \frac{1}{27^n} V \\ \Rightarrow V_n &= \frac{20^{n-1} \cdot 27V - 7 \cdot 20^{n-1} V}{27^n} \\ \Rightarrow V_n &= \frac{20^{n-1}(27V - 7V)}{27^n} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_n &= \frac{20^{n-1} \cdot 20V}{27^n} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_n &= \frac{20^n}{27^n} V \\ \Rightarrow V_n &= \left(\frac{20}{27}\right)^n V \end{aligned}$$

Calculando o limite de  $V_n$  quando  $n$  tende para o infinito, obtemos:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n V \\ \Rightarrow &\left(\lim_{n \rightarrow \infty} V\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n\right) = V \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, o volume da Esponja de Menger tende para zero, quando o número de níveis de iteração tende para o infinito.

### **ATIVIDADE 2 - Atividade proposta para a turma**

**Prove que a área da superfície da Esponja de Menger tende para o infinito à medida em que o número de iterações tende para o infinito.**

Observação sobre a aprendizagem dos alunos com relação a atividade proposta: 60% dos alunos da turma realizaram a atividade com bom grau de compreensão e os outros 40% necessitaram de mais um acompanhamento específico.

### ATIVIDADE 3

Para se determinar a dimensão fractal da Esponja de Menger para um certo nível  $n$  de iterações, deve-se observar as etapas na seguinte tabela abaixo.

etapas	0	1	2	3	...	$n$	$n+1$
$n$	1	20	400	8000	...	$20^n$	$20^{n+1}$
$a$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	...	$3^{-n}$	$3^{-(n+1)}$

Tabela VI

Onde no primeiro nível observamos que não há iterações, logo:

$$20^0 = 1$$

O número de cubos aumenta  $20^n$ , sendo  $n$  o número de iterações. O cálculo da dimensão de um fractal é feito se baseando na prova de HAUSDORFF, que pela Geometria convencional admite que:  $N = \left(\frac{L}{n}\right)^d$ , onde  $L$  é o comprimento da linha,  $n$  é o número de partes em que a linha pode ser dividida numa iteração e  $N$  é o comprimento do segmento na iteração  $p$ , com  $p \in \mathbb{N}$  e  $d$  é a dimensão fractal. Assim:

$$d = \frac{\log 20^{n+1} - \log 20^n}{\log 3^{n+1} - \log 3^n} \Rightarrow d = \frac{(n+1) \log 20 - n \log 20}{(n+1) \log 3 - n \log 3}$$

$$\Rightarrow d = \frac{n \log 20 + \log 20 - n \log 20}{n \log 3 + \log 3 - n \log 3}$$

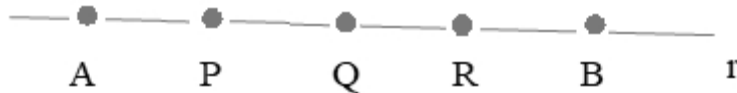
$$d = \frac{\log 2 + \log 10}{\log 3} \Rightarrow d = \frac{0,30103 + 1}{0,47712} \Rightarrow d = \frac{1,30103}{0,47712} \Rightarrow d \cong 2,7268$$

Com a correção da atividade 2 em sala de aula e com a demonstração feita na atividade 3, também na forma de estudo dirigido, as dúvidas foram sanadas.

## 16. PROPOSTA DE ATIVIDADES

A geometria fractal possui um vasto campo de aplicação dos conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial, sequências, progressões, logaritmos etc. Para inserirmos este tema nas aulas, é necessário adequar a atividade ao conteúdo e ao nível de escolaridade dos alunos. As atividades que serão propostas poderão ser aplicadas em turmas do Ensino Médio.

**Exercício 1.** Divide-se um segmento inicial  $AB$  de uma reta suporte  $r$  em 3 pontos internos, resultando em 4 pedaços autossimilares, pois:  $AP = PQ = QR = RB$



Qual é a dimensão desse fractal?



## Exercício 2: ENEM – Questão 54

(ENEM) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares de geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

- I. Comece com um triângulo equilátero (figura 1);
- II. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
- III. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
- IV. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).



De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é:



Fonte de pesquisa: ENEM 2008.

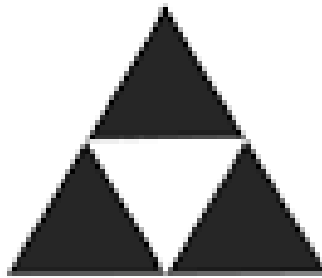
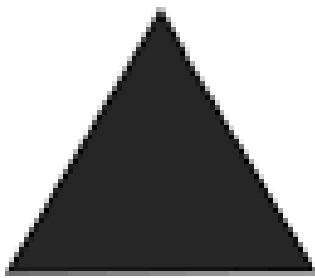
## Exercício 3: Simulado ENEM\*<sup>4</sup> – Questão 155 do caderno azul

Inspirada nos chamados Triângulos de Sierpinski, uma artesã deseja construir um azulejo triangular de cerâmica e, por isso, faz um esboço de como deve ficar a peça pronta.

Para a construção do esboço, a partir de um triângulo equilátero de lado 4 cm, ela ligou, dois a dois, os pontos médios dos lados, gerando quatro triângulos das extremidades (isso é, os triângulos que não foram pintados de branco no passo anterior), gerando, em cada um deles, quatro triângulos menores, onde, novamente, pintou de branco o triângulo central de cada região, como mostra a figura.

Para estimar os custos da obra, a ceramista precisa determinar a área do azulejo pronto a ser pintada de cada cor com base na área do esboço.

<sup>4</sup> Exame Nacional de Ensino Médio

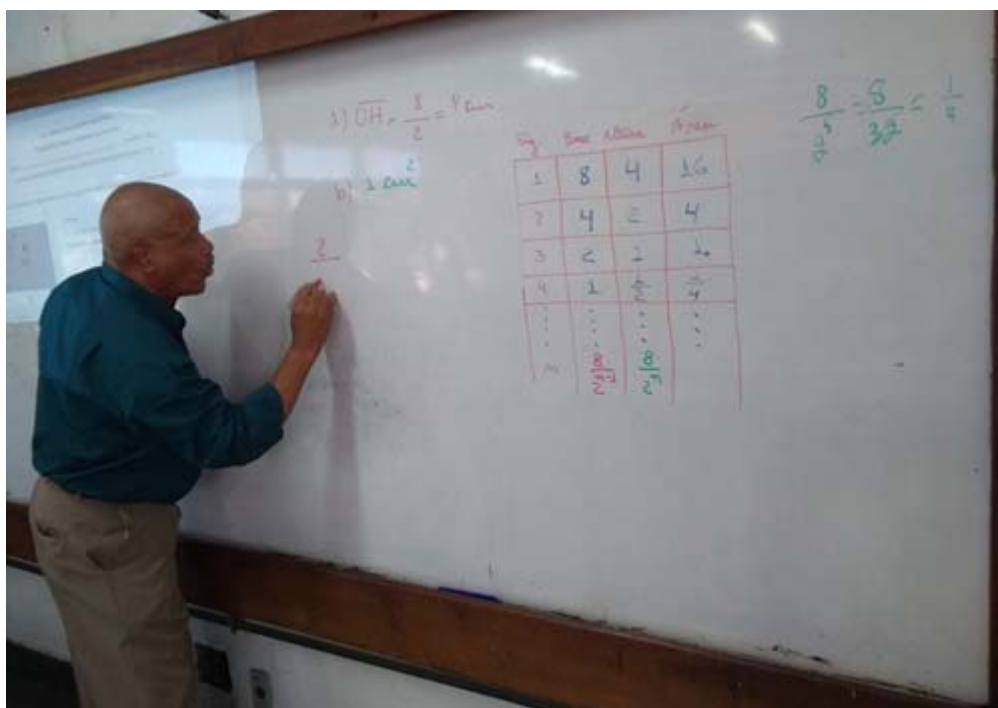


Fonte: Simulado Nacional ENEM Evolucionar 2019

Qual é a área a ser pintada de preto, em  $\text{cm}^2$ , no esboço?

- a.  $7\sqrt{3}$
- b.  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
- c.  $\frac{13\sqrt{3}}{4}$
- d.  $3\sqrt{3}$
- e.  $4\sqrt{3}$

## 17. ATIVIDADES SENDO REALIZADAS EM SALA DE AULA





## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo da aplicação do ensino de fractais foi plenamente alcançado uma vez que despertou o interesse e motivou os alunos sobre o tema chamando atenção por ser novidade e pela dinâmica que foi aplicada ao conteúdo. A análise sobre os fractais, embora breve, foi suficiente para despertar ainda mais o interesse pela beleza dessa Geometria.

Os alunos perceberam que a Matemática é uma Ciência viva e que a abordagem do tema proposto nessa geometria não Euclidiana desperta cada vez mais a atenção dos pesquisadores devido à variedade de aplicações nos diversos campos, tais como: na Medicina, na Música, na Arquitetura, na Biologia, nas Artes, etc.

Ficou bastante claro que após o estudo de fractais os alunos entenderam o porquê de certos conceitos matemáticos que até então eles não tinham conhecimento de como usá-los, tais como: as propriedades dos logaritmos, as sequências, os conceitos de limite, a aplicação do limite da soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada etc.

Ainda há um longo caminho a ser percorrido para que haja uma ampla aceitação da Geometria Fractal por parte dos docentes. Afinal, são muitos anos trabalhando com a Geometria Euclidiana.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2002.
- COLLI, Eduardo. Professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. (IME – USP).
- CÔRTEZ, Ivana Resende da Costa. *Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática*. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, 2014.
- FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática / Revista do Professor de Matemática, 3º quadrimestre, 2005.
- Galeria de Fractal deSoler. Disponível em: <<http://soler7.com/Fractals/FractalsSite.html>>
- Galeria de Fractais. Disponível em: <<http://illusions.hu/index.php?lang=15&task=16&type=1&category=0>>
- Galeria de Fractais. Disponível em: <<http://www.faemalia.net/Fractals/>>
- LAURENÇO, Adriana de Carvalho. *Investigação matemática por meio de fractais*. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista, 2017.
- MOREIRA, Vanessa da Silva Sá Sampaio. *Geometria fractal na Educação Básica*. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, 2017.

- MÚSICA FRACTAL. Disponível em: [http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/musica\\_fractal.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/musica_fractal.htm)  
Acesso em 29 de janeiro de 2018.
- MANIFESTO DA ARTE FRACTAL. Disponível em: <http://www.geocities.com/artefractal/> Acesso em: 01 de fevereiro de 2019.
- O MUNDO DOS FRACTAIS. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/> Acesso em: 08 de fevereiro de 2019.
- RICIERI, Aguinaldo Prandini. Fractais e Caos - A Matemática de Hoje. São Paulo: Editora Parma Ltda, 1990.
- SIMULADOR JANELAS PARA O INFINITO – EXPOSIÇÃO DE FRACTAIS. Disponível em: <http://www.fractarte.com.br/> Acesso em 29 de janeiro de 2018.

## APÊNDICE

### 1. SEQUÊNCIA

A ideia de sequência ou sucessão aparece em muitas situações diariamente. Quando se assiste a uma corrida de Fórmula 1, por exemplo, verifica-se que os carros têm uma numeração. Suponha-se que ao final da corrida, apareça a ordem de chegada dos carros, como a dada pela tabela abaixo:

CLASSIFICAÇÃO	NÚMERO DO CARRO
1º LUGAR	3
2º LUGAR	8
3º LUGAR	1
4º LUGAR	11
5º LUGAR	2
6º LUGAR	6
7º LUGAR	4
8º LUGAR	10
9º LUGAR	7
10º LUGAR	9

Tabela VII

Esse acontecimento pode ser descrito da seguinte maneira:

(3, 8, 1, 11, 2, 6, 4, 10, 7, 9)

Ao observar a sequência acima, fica fácil identificar o primeiro colocado, ou seja, o carro de número 3. Da mesma forma, o carro de número 11 foi o quarto colocado. Os números de uma sucessão são chamados termos, por exemplo:

- **Primeiro termo: 3**
- **Segundo termo: 8**
- **Quinto termo: 2**

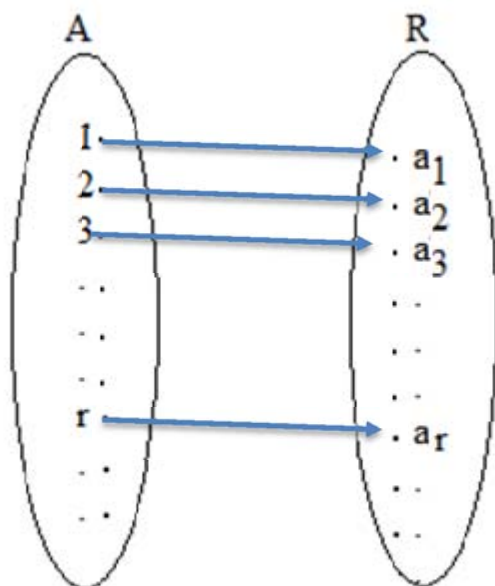


Representamos, geralmente, uma sucessão como segue:

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ , onde  $a_1$  é o primeiro termo da sequência;  $a_2$  representa o segundo termo da sequência;  $a_n$  representa o  $n$ -ésimo termo da sequência.

## SUCESSÃO FINITA

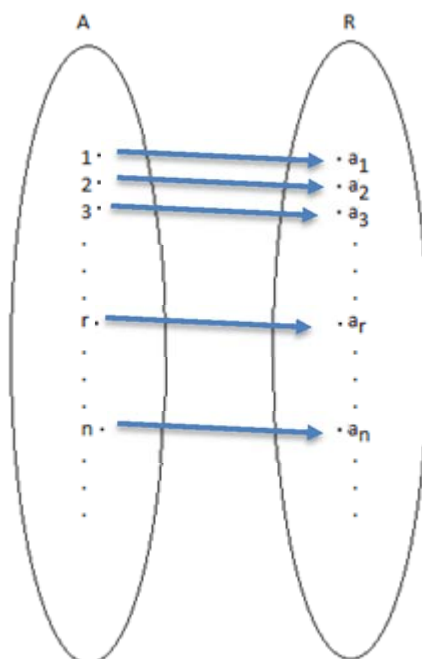
A sucessão finita se refere à toda função  $f$  do conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  em  $R$ . Assim sendo, em toda sequência finita, cada número natural  $r$  ( $1 \leq r \leq n$ ) está associado a um número real  $a_r$ .



Tem-se portanto, a função  $f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots (r, a_r), \dots (n, a_n)\}$ , cujo domínio é o conjunto  $A = \{1, 2, 3, \dots, r, \dots, n\}$ , o contradomínio é o conjunto  $R$  e a imagem é o conjunto formado pelos termos da sequência.

## SEQUÊNCIA INFINITA

Chama-se sequência infinita toda função  $f$  de  $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$  em  $R$ . Então, em toda sequência infinita, cada  $r \in N^*$  está associado um número real  $a_r$ .



$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots (r, a_r), \dots\}$$

Portanto, a sequência infinita é uma função cujo domínio é  $N^* = \{1, 2, 3, \dots, r, \dots\}$ , o contradomínio é  $R$  e a imagem é o conjunto formado pelos termos da sequência.

## LEI DE FORMAÇÃO

A lei de formação se fundamenta em um conjunto de informações capazes de determinar todos os termos de uma sequência, e a ordem em que se apresentam é chamada lei de formação da sequência.

## 2. PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Essa progressão se expressa como uma sequência de números denominados termos, tais que, a partir do segundo, a diferença entre cada termo e o seu precedente é um valor constante denominado razão. Pode-se definir uma progressão aritmética, também, através da fórmula de recorrência:

$$\begin{aligned} \mathbf{a_1} &= \mathbf{a}, & \mathbf{a} &\in \mathbf{R} \\ \mathbf{a_n} &= \mathbf{a_{n-1}} + \mathbf{r}, & \forall \mathbf{n} \in \mathbf{N^*} \text{ e } \mathbf{n} \geq \mathbf{2} \end{aligned}$$

Onde:

$\mathbf{a_1}$  – primeiro termo da PA;

$\mathbf{a_n}$  – n-ésimo termo da PA;

$\mathbf{n}$  – número de termos da PA;

$\mathbf{r}$  – razão da PA.

### CLASSIFICAÇÃO

- As progressões aritméticas podem ser classificadas em:

**Finitas** – possuem um número determinado de termos.

**Infinitas** – possuem um número indeterminado de termos.

**Crescentes** – cada termo é maior que o anterior. Neste caso  $\mathbf{r} > 0$ .

**Decrescentes** – cada termo é menor que o anterior. Neste caso  $\mathbf{r} < 0$ .

**Estacionárias** – cada termo é igual ao anterior. Isso ocorre quando  $\mathbf{r} = 0$ .

### FÓRMULA DO TERMO GERAL

Agora, será expressada a forma de encontrar uma expressão que permita obter um termo qualquer da PA, sendo conhecidos apenas o 1º termo e a razão. Seja uma PA:  $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \dots, \mathbf{a_n}, \dots)$  de razão  $\mathbf{r}$ . Da definição, vem:

$$\mathbf{a_2} - \mathbf{a_1} = \mathbf{r} \quad \mathbf{a_3} - \mathbf{a_2} = \mathbf{r} \dots \mathbf{a_n} - \mathbf{a_{n-1}} = \mathbf{r} \quad \mathbf{(n - 1)} \text{ igualdades.}$$

Somando-se, membro a membro, vem:  $\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)r}$ .

A expressão  $a_n = a_1 + (n - 1)r$  é conhecida como termo geral da PA, e nos permite conhecer qualquer termo da PA em função do 1º termo e da razão.

## INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Interpolar ou inserir  $m$  meios aritméticos entre dois números A e B, é formar uma PA com  $(m + 2)$  termos, cujos extremos são A e B.

## PROPRIEDADES

$P_1$  – Em toda PA, qualquer termo é média aritmética entre dois outros termos que são dele equidistantes.

$P_2$  – Em toda PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

## SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A

Seja  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  uma PA é desejado conhecer uma expressão para a soma dos seus  $n$  primeiros termos, a saber:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + \dots \quad (1)$$

Usando a propriedade comutativa da adição, pode-se escrever:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + \dots \quad (2)$$

Somando-se membro a membro (1) e (2), vem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + 1)$$

Como a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos, temos:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

### 3. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

A progressão geométrica é toda sucessão numérica em, a partir do segundo, cada termo é igual ao produto do termo precedente por uma constante  $q$  denominada razão.

#### CLASSIFICAÇÃO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS:

**Crescentes** – quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o antecedente. Para que isso ocorra é necessário e suficiente que  $a_1 > 0$  e  $q > 1$  ou  $a_1 < 0$  e  $0 < q < 1$ .

**Decrescentes** – quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o antecedente. Para que isso ocorra é necessário e suficiente que  $a_1 > 0$  e  $0 < q < 1$  ou  $a_1 < 0$  e  $q > 1$ .

**Constantes** – quando todos os seus termos são iguais. Para que isso ocorra é necessário e suficiente que sua razão seja 1 ou que todos os seus termos sejam nulos.

**Oscilantes** – quando todos os seus termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos. Para que isso ocorra é necessário e suficiente que  $a_1 \neq 0$  e  $q < 0$ .

#### FÓRMULA DO TERMO GERAL

Agora, será demonstrado como encontrar uma expressão que permita obter um termo qualquer da progressão geométrica, sendo conhecendo apenas o 1º termo e a razão. Seja a PG  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  de razão  $q$ . De acordo com a definição podemos escrever:

$$\frac{a_2}{a_1} = q \quad \frac{a_3}{a_2} = q \quad \frac{a_4}{a_3} = q \dots \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad \text{\} (n - 1) \text{ igualdades}$$

Multiplicando-se membro a membro, vem:

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1}$$

## INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolair ou inserir  $m$  meios geométricos entre dois números  $A$  e  $B$  é formar uma PG com  $(m + 2)$  termos, cujos extremos são  $A$  e  $B$ .

### PROPRIEDADES

$P_1$  – Em toda PG, qualquer termo é a média geométrica entre dois outros dele equidistantes.

$P_2$  – Em toda PG finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos termos extremos.

### SOMA DOS $n$ PRIMEIROS TERMOS DE UMA PG

Seja a PG  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ . Da definição, vem:

$$a_2 = a_1q, a_3 = a_2q, \dots, a_n = a_{n-1}q \} (n - 1) \text{ igualdades}$$

Somando-se membro a membro dessas igualdades, e representado por  $S_n$  a soma dos  $n$  primeiros termos da PG, vem:

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1})$$

$$S_n - a_1 = q(S_n - a_n) \Rightarrow S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}, q \neq 1.$$

Como  $a_n = a_1 q^{n-1}$ , podemos escrever:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$$

## SOMA DOS INFINITOS TERMOS DE UMA PG

Seja a PG  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  de razão  $q$ . Tenha em vista que a soma dos  $n$  primeiros termos é dada pela fórmula:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

Se  $0 < |q| < 1$ , então  $q^n$  tende para zero quando  $n$  cresce indefinidamente, ou seja,  $q^n$  vai diminuindo demasiadamente quando o número de termos aumenta cada vez mais. Diz-se, então, que a soma  $S_n$  tende para  $\frac{a_1}{1 - q}$ , quando  $n$  se torna arbitrariamente grande. Portanto, temos que:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

## 4. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere um número  $a \in \mathbf{R}_+^* - \{1\}$ , isto é,  $a > 0$  e  $a \neq 1$ . Chamamos função exponencial toda função  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ , definida por  $f(x) = a^x$ .

### GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Como a imagem da função exponencial é  $\mathbf{R}_+^*$ , a curva representativa está situada acima do eixo das abscissas. Além disso, se  $x = 0$ , então  $f(0) = a^0 = 1$  e, portanto, a curva corta o eixo das ordenadas no ponto  $(0, 1)$ . Admitamos que  $a > 1$ . Sabe-se que, se:

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Isto mostra que a função  $f(x) = a^x$  é estritamente crescente quando  $a > 1$ . Graficamente, temos:

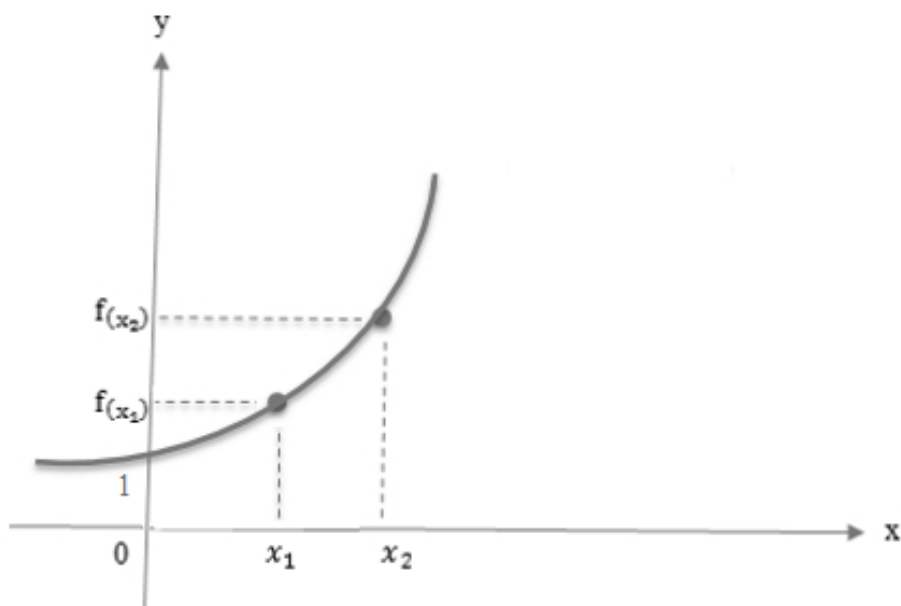


Figura 14.1.a

Admitamos  $0 < a < 1$ . Sabe-se que, se:  $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ . Isto mostra que a função  $f(x) = a^x$  é estritamente decrescente quando  $0 < a < 1$ . Graficamente, temos:

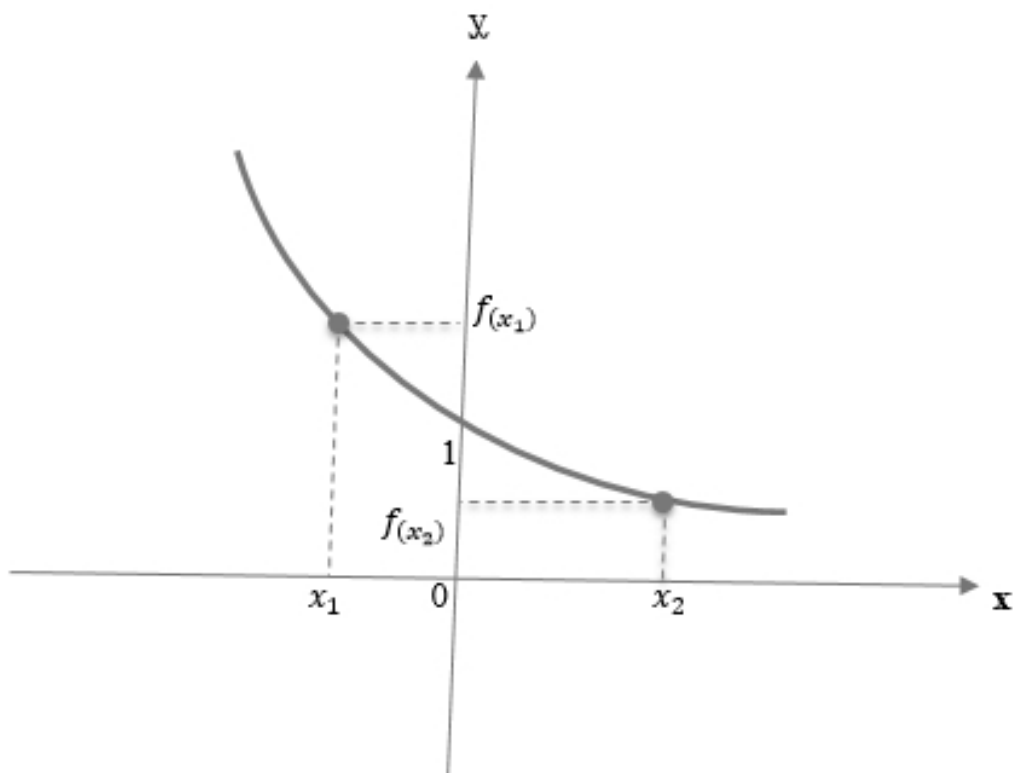


Figura 14.1.b



## EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

São equações que possuem uma incógnita em expoente. Vale ressaltar o fato de que não existe um método geral de resolução de equações exponenciais.

### PRIMEIRO TIPO

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Nas equações deste tipo, reduzem-se ambos os membros à potências de mesma base, o que permite igualar os expoentes, resolvendo-se a equação algébrica resultante.

### SEGUNDO TIPO

$$ah^{2x} + bh^x + c = 0$$

Estas equações são redutíveis a equações do 2º grau mediante uma mudança de variável, isto é,  $y = h^x$ .

### TERCEIRO TIPO

$$a^{bx+c} + a^{bx+d} + a^{bx+e} + \dots + a^{bx+m} = k$$

Geralmente, estas equações são resolvidas colocando-se inicialmente em evidência o termo de menor expoente.

## 5. LOGARITMO

Sejam  $a$  e  $b$  números reais tais que  $b > 0$  e  $0 < a \neq 1$ . Chama-se logaritmo de  $b$  na base  $a$  o expoente  $x$  tal que  $a^x = b$  e escrevemos:  $\log_a b = x$ .

Nomenclatura:

$b$  –Logaritmando

$a$  –Base do sistema de logaritmos

$x$  –Logaritmo

### DECORRÊNCIAS DA DEFINIÇÃO

- 1) O número zero e os números negativos não têm logaritmo real.
- 2)  $\log_a 1 = 0$
- 3)  $\log_a a = 1$
- 4)  $\log_a a^n = n$
- 5) Sendo  $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$
- 6)  $a^{\log_a b} = b$

## PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

- ii) O logaritmo de um produto de fatores reais positivos é a soma dos logaritmos desses fatores.

$$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$$

- iii) O logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual ao logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor.

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

- iv) O logaritmo de uma potência de base positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a A^m = m \cdot \log_a A$$

- v) O logaritmo da raiz de um número real positivo é igual ao produto do inverso do índice da raiz pelo logaritmo do radicando.

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \cdot \log_a A$$

## MUDANÇA DE BASE

Há situações onde se torna necessário transformar o logaritmo de um real positivo de uma base para outra base mais conveniente.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

## 6. FUNÇÃO LOGARITMICA

Denominamos função logarítmica toda função:

$$\boxed{f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = \log_a x \text{ (} 0 < a \neq 1 \text{ e } x > 0 \text{)}}$$

## GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

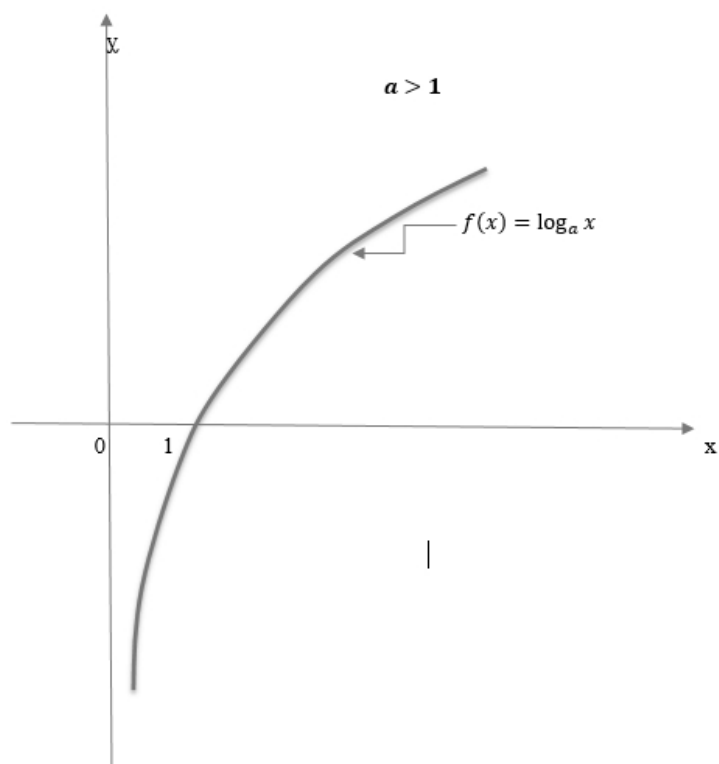


Figura 16.5.a

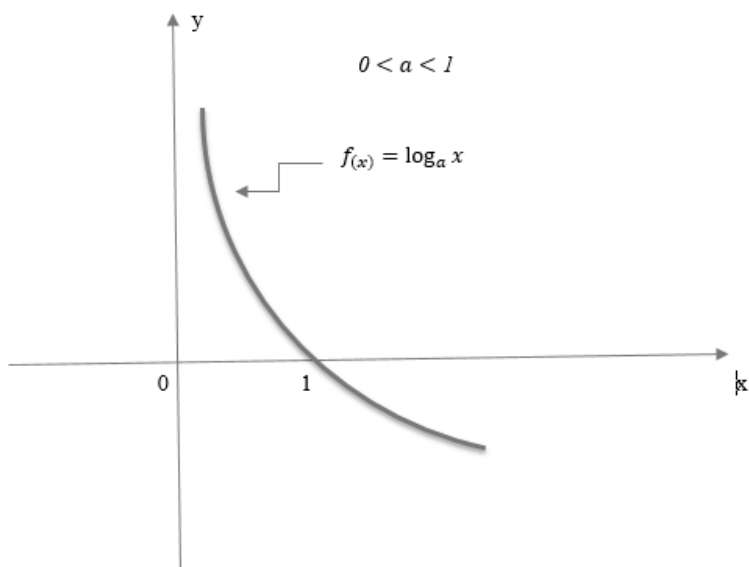


Figura 16.5.b

## GLOSSÁRIO

Algoritmo	sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas.
Autossimilaridade	Semelhança exata ou aproximada a uma parte de si mesmo.
Domínio	Região do universo matemático em que a função pode ser definida.
Interpolação	construção de um novo conjunto de dados feito a partir de um conjunto discreto de dados pontuais previamente conhecidos
Iteração	Resolução da operação equacional onde, sucessivamente, o objeto de cada uma é o resultado da que a precede.
Recorrência	Técnica do cálculo de qualquer termo em função do(s) seu(s) antecessor(es).
Recursão	Ação de recorrer; recurso.