UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO (UNIRIO)

CENTRO DE CIÊNCIAS E EXATAS E TECNOLOGIA (CCET)

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

UBIRAJÁRA MAGLIANO DE FRANÇA

FRACTAIS

Uma Abordagem no Ensino Fundamental

RIO DE JANEIRO - RJ
2019

UBIRAJÁRA MAGLIANO DE FRANÇA

UBIRAJARA MAGLIANO DE FRANÇA

FRACTAIS:

Uma abordagem no Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: José Teixeira Cal Neto
Doutor em Matemática - UFRJ

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Teixeira Call Neto (UNIRIO)

Prof. Dr. Michel Cambrainha de Paula (UNIRIO)

Profª. Vânia Cristina Machado (UFRRJ)

RIO DE JANEIRO – RJ

2019

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a três pessoas muito especiais, sem a vontade e o brilho delas nenhuma linha seria possível, pessoas que por muitas vezes deixaram de ter para me dar, que por tantas vezes não me deixaram saber dos esforços que faziam para que meus sonhos se tornassem possíveis.

Minha mãe, Gilda Magliano de França.

Meu pai, Joaquim Edson Carneiro de França.

Minha avó, Severina Carneiro de França.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Ti Senhor.

Pela oportunidade de realizar o sonho de completar o Mestrado Profissional em Matemática numa Instituição de referência, na Universidade Federal do estado do Rio de Janeiro, a UNIRIO, ter colocado em meu caminho pessoas tão especiais, que tanto me ajudaram nesse percurso de forma direta, estando em contato por todo tempo do curso ou aquelas que mesmo não estando fisicamente em contato sempre me enviaram suas energias positivas, meus familiares e amigos.

Pela presença constante, incansável e fundamental da minha esposa, Adriana, que por todo período abdicou de muitos programas e compreendeu a importância de estar ao meu lado. Por muitas vezes a vi preocupada quando eu saía para estudar e chegava fora do horário.

Pela turma, por todos os alunos, cada um que se dedicava a me ajudar quando surgiam dúvidas, que não eram poucas. Em especial, ao amigo Sérgio Nóbrega de Oliveira pela incansável dedicação e companheirismo.

Pelos meus mestres, seus esforços em ministrar as aulas da forma mais clara possível, por muitas vezes repetirem as explicações por causa das minhas dúvidas.

Foram bem mais que professores, elevaram o nível de seres humanos e me ensinaram a rever a posição de cada um dos meus alunos em sala de aula. Em ordem de semestres estudados foram eles: José Teixeira Cal Neto, Michel Cambrainha, Silas Fantin, Fábio Simas, Gladson Antunes, Bruna Mustafá e Aline Bernardes. Também no curso de verão: Fábio Xavier e Amâncio.

Pelo meu orientador, o Doutor José Teixeira Cal Neto, que por tantas vezes solicitei pelas suas orientações e que sempre se fez presente com suas indicações de leituras, exercícios, vídeos e formatações.

Por todas essas vitórias, agradeço a Ti Senhor!

"Das leis mais simples nascem infinitas maravilhas que se repetem indefinidamente."

Mandelbrot, Benoît.

Resumo: Esse trabalho visa, principalmente, discutir o ensino da teoria fractal nas no conteúdo programático do Ensino Fundamental, bem como tratar das relações da vida cotidiana dos alunos com a teoria fractal, a fim de evidenciar a as formas de inserção do assunto nas aulas de maneira prática e lúdica, quando necessário ou possível. O material apresentado foi produzido a partir de um plano de uma semana, na Escola Municipal Jornalista Sandro Moreyra, que inclui aulas diárias de matemática formuladas a partir da teoria fractal, apresentando seu conceito, suas propriedades e, por fim, realizando atividades práticas acerca do tema, os quais foram expostos na escola. Ao fim, será exposta uma série de exercícios sobre o tema, que foram utilizados no plano de aulas, a fim de avaliar a aprendizagem do conteúdo por parte dos alunos.

Palavras-chave: Geometria Fractal; Contextualização; Interdisciplinaridade.

Abstract: This work aims, mainly, to discuss the teaching of the fractal theory in the programmatic content of Elementary School, as well as to deal with the relations of students' daily life with fractal theory, which should pave the way to introduce the subject in the classroom in a practical and playful manner, whenever possible. The material presented was based on a one-week plan at the Municipal School Jornalista Sandro Moreyra, which includes daily mathematics classes based on fractal theory, discussions about the concept of a fractal, its properties and, finally, practical activities, which were also carried through in the classroom. Finally, a series of problems will be presented, which were used in the lesson plan, to assess the student’s understanding of the subject.

Keywords: Fractal Geometry; Contextualization; Interdisciplinarity.

SUMÁRIO

1. **INTRODUÇÃO 8**

2. **DEFINIÇÃO DO TERMO 10**

3. **HISTORIOGRAFIA FRACTAL 10**

3.1 **Bernoit Mandelbrot 12**

3.2 **REPRESENTAÇÃO FEMININA..13**

3.3 **REPRESENTAÇÃO NACIONAL 15**

4. **PRIEDADES FRACTAIS 16**

5. **FRACTAIS NA NATUREZA 18**

6. **GEOMETRIA DE FRACTAIS DETERMINÍSTICOS 21**

7. **FRACTAIS CLÁSSICOS..22**

8. **CURVA DE KOCH 23**

8.1 **Processo de construção da Curva de Koch 23**

8.2 **Analisando a medida da Curva de Koch 24**

10. **FLOCO DE NEVE DE KOCH OU ILHA DE VAN KOCH 24**

10.1 **Processo de construção do Floco de neve de Koch ou ilha de Von Koch 24**

10.2 **Perímetro do floco de neve de Koch 25**

10.3 **Cálculo da medida da área do Floco de Neve de Koch 26**

11. **A ESPONJA DE MENGER 27**

12. **INTRODUÇÃO DO TEMA EM AULA 30**

13. **PROPOSTA DE ATIVIDADES 31**

13.1 **Atividade 1 ....41**

13.2 **Atividade 2 ....43**

13.3 **Atividade 3 ....45**

13.4 **Atividade 4 ....48**

14.LISTA DE EXERCÍCIOS...49

16. **CONCLUSÃO 50**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 52

1.INTRODUÇÃO

A elaboração do tema do trabalho a seguir, bem como sua escolha, se deu durante o quarto período do curso de mestrado Profmat no ano de 2018, na disciplina de *Fundamentos de Cálculo*, com a orientação do professor Gladson Antunes, de quem partiu a sugestão da realização de um trabalho, que valeria como uma de suas avaliações. Ao meu grupo fora sugerido trabalhar com o tema “Fractais”, o qual, para mim, era desconhecido até então. Durante as pesquisas e a elaboração do trabalho, cheguei à conclusão de que poderia explorar o assunto em sala, durante as aulas do 9º ano do ensino fundamental.

O trabalho apresentado no ano de 2018 foi reconhecido pela Secretaria Municipal de Educação da Cidade do Rio de Janeiro e, no final do ano, foi reconhecido com uma Moção de Louvor e Reconhecimento pelo trabalho desenvolvido em sala de aula, além do convite para a realização de uma palestra para os professores da referida rede municipal de ensino.

A Geometria Euclidiana é a geometria que normalmente aprendemos nas escolas. Entretanto, existe uma infinidade de fenômenos na natureza que não podem ser descritos por essa geometria. A maior parte das formas apresentadas pela Natureza, não são regulares e nem suaves, pelo contrário, são extremamente complexas, recortadas e irregulares.

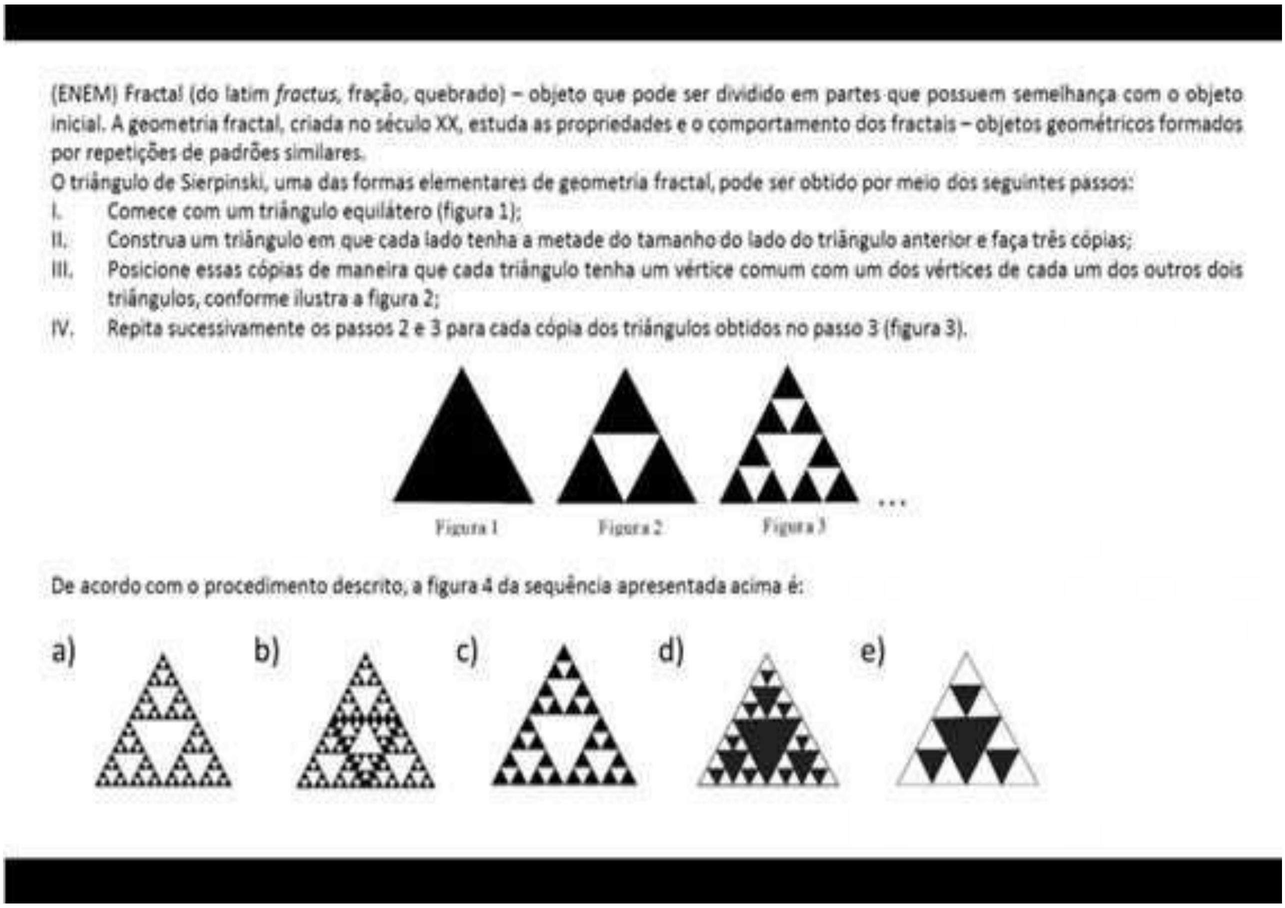
A apresentação deste trabalho tem por objetivo mostrar aos alunos que a Matemática é uma ciência dinâmica. A Geometria Fractal é pouco abordada, tanto no ensino médio quanto no ensino fundamental, não sendo considerado em alguns cursos de licenciatura em Matemática, aparecendo em alguns livros didáticos apenas como tema decorativo.

Tendo em vista que a Geometria Fractal é um assunto pouco abordado, alguns professores não se sentem confortáveis em falar sobre isso em sala de aula, a intenção deste trabalho é ajudar na divulgação do assunto, tornando-o mais aprazível inclusive, compartilhar o ensino com as outras disciplinas como: Artes Plásticas, Biologia, Física, Química, Tecnologia.

Como o assunto será abordado visando o estudo no Ensino Fundamental, não serão tratados cálculos com alta complexidade, mas sim os fractais clássicos e suas construções, passo a passo, e, mais tarde, será trabalhado em sala de aula, incentivando os alunos nas criações de outros modelos como uma forma de brincadeira, usando a Geometria Euclidiana e, dessa maneira, observar que a Geometria Fractal amplia os conhecimentos adquiridos nos estudos de Geometria Euclidiana.

O tema Geometria Fractal já tem sido explorado em alguns concursos de universidades federais e até mesmo no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), usando-se textos e figuras. Se tal assunto fosse abordado em sala de aula, os alunos sentiriam mais segurança nas resoluções das questões, já que teriam conhecimento prévio. Em alguns estados como Paraná e Santa Catarina as respectivas secretarias de educação já iniciaram a inclusão do estudo da geometria fractal na grade curricular.

É possível demonstrar exemplos em que o tema fora introduzido nas provas de vestibulares federais, como é o caso da questão apresentada a seguir, no ENEM do ano de 2008.



(ENEM) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares de geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

I. Comece com um triângulo equilátero (figura 1);
II. Construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
III. Posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
IV. Repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

Figura 1 Figura 2 Figura 3 ...

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é:

a) b) c) d) e)

Fonte de pesquisa: ENEM 2008.

2. DEFINIÇÃO DO TERMO

Não há uma definição e em contextos diferentes essa palavra assume acepções específicas. Porém, podemos destacar de forma mais simples que fractais são objetos ou formas geométricas abstratas, geradas pela repetição de um processo (iteração /recursão), apresentando autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fractal.

3. HISTORIOGRAFIA FRACTAL

Segundo Mandelbrot (1983, The Fractal Geometry of Nature): "Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, tronco de árvores não são suaves e nem o relâmpago viaja em linha reta. "

O termo fractal foi usado pela primeira vez no ano de 1975 por Benoît Mandelbrot, que o usou para denominação da classe especial de curvas definidas recursivamente que produziam imagens reais e surreais. O termo vem do termo latino *fractus,* do verbo *frangere*, que significa quebrar. A partir disso, foi desenvolvida a geometria fractal, que visa o estudo dos subconjuntos complexos de espaços métricos. A ideia de extensão infinita de um limite fractal pode ser demonstrada considerando-se uma fronteira ou um litoral geográfico, naturalmente irregular. Dependendo do comprimento da unidade-padrão de medida (regular) utilizada pela pessoa que mede, pode-se demonstrar que, ao se reduzir a unidade de medição, o comprimento da fronteira ou do litoral aumentará sem limite.

Extensão Infinita dos Limites numa Fronteira Irregular (Adaptação da Fronteira entre Portugal e Espanha).

Esse ramo da matemática é responsável por estudar as propriedades e comportamentos dos fractais, descrevendo situações que, só com a geometria clássica, não poderiam ser explicadas. Estas situações aparecem nos estudos relacionados a diversas áreas do conhecimento, especialmente de ciências, tecnologia e arte em que o uso de simulações feitas em computador são uma importante ferramenta.

Fonte: https://www.tapeciarnia.pl/tapeta-na-telefon-kolorowe-wzory-w-grafice-fraktal

Alguns cientistas, em seus trabalhos, entre os anos de 1857 e 1913, desenvolveram o conhecimento de alguns objetos que até então eram catalogados como demônios matemáticos. Muitos outros trabalhos estiveram relacionados à essa ideia do fractal, mas somente nos anos 60, quando a computação surgiu, seu desenvolvimento se deu. Mandelbrot, o criador do termo fractal e responsável pela descoberta do conjunto de Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos, foi um dos pioneiros a fazer uso dessa técnica para desenvolver seus estudos.

3.1 Benoît Mandelbrot

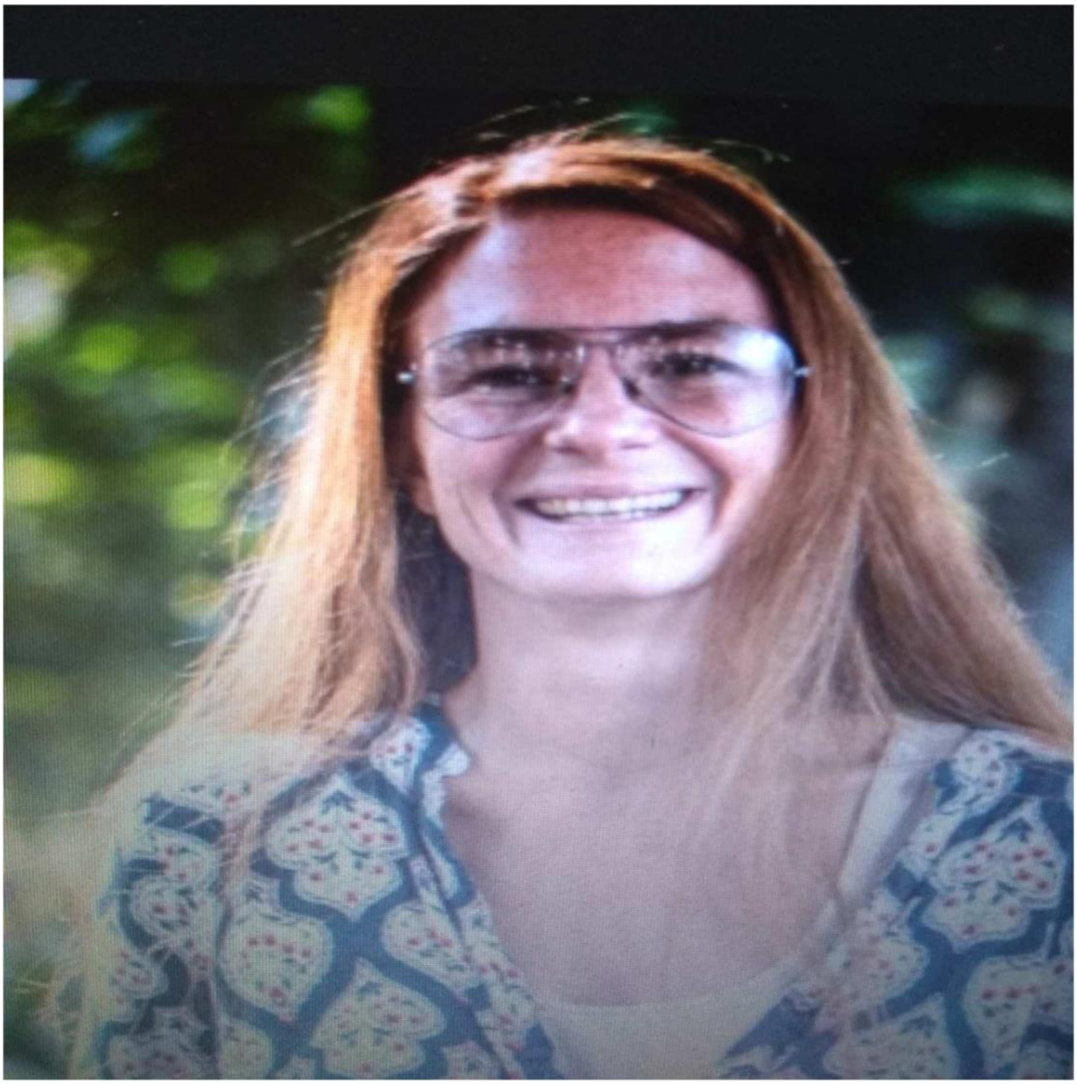
Mandelbrot fora um matemático francês formado em Yale e orientado por Paul Pierre Lévy, dono de diversos prêmios e honrarias devido à suas contribuições matemáticas, principalmente no campo da geometria fractal; sendo o termo criado pelo próprio matemático. Em sua trajetória, Mandelbrot acabou por juntar-se ao IBM - International Business Machine em 1958, uma antiga e renomada empresa focada na área de tecnologia da informação, onde ele ficou por 35 anos.

Tendo em vista que as pesquisas e teorias matemáticas acerca dos fractais de Mandelbrot ainda estavam sendo desenvolvidas, seu posto na IBM foi um grande diferencial para seu estudo; seu acesso aos computadores tecnologicamente avançados do instituto, ele foi capaz de gerar imagens geométricas a partir de regras simples, usando a computação gráfica.

Ao fim de sua carreira, o matemático fora condecorado como Sterling Professor de Ciências Matemáticas na Universidade de Yale permanentemente, o mais alto nível acadêmico da instituição, concedido apenas a integrantes do corpo docente considerados uns dos melhores em seu campo.

MANDELBROT, Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1983

3.2 Luna Lomonaco

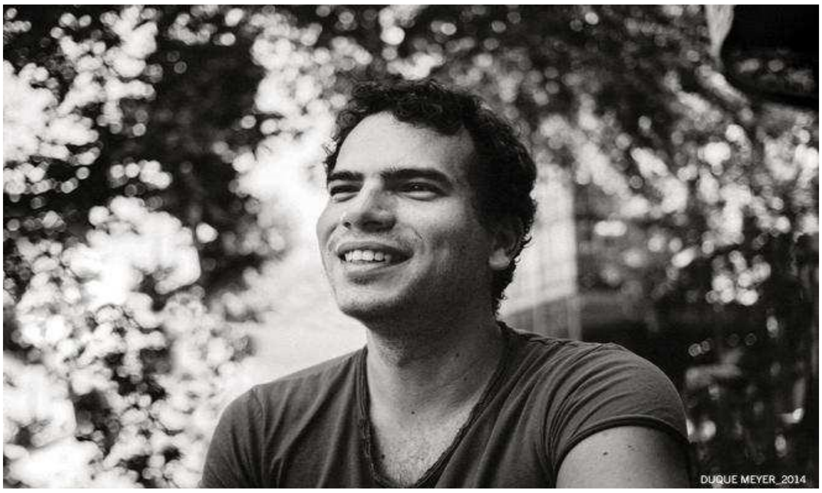


Luna Lomonaco é apoiada pelo Instituto Serrapilheira e dá aulas no IME-USP (Foto: Reprodução Instituto Serrapilheira)

A italiana Luna Lomonaco se tornou a primeira mulher a ganhar o Prêmio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), que reconhece o melhor trabalho original de pesquisa desse campo do conhecimento. A honra se deu graças a um artigo sobre Sistemas Dinâmicos. Na publicação, a pesquisadora discorre sobre o conjunto de Mandelbrot, que é um tipo de fractal, nome dado às formas geométricas determinadas por fórmulas matemáticas e que conseguem dar sentido a eventos aparentemente aleatórios.

Concedido a cada dois anos, o Prêmio reconheceu a importância da pesquisa de Lomonaco em dar luz a um tema notavelmente complexo. Engana-se, entretanto, quem pensa que a pesquisadora italiana era uma apaixonada por resolver equações e problemas matemáticos nos tempos da escola. “Fiz uma escola bem focada nas Ciências Humanas. Estudei grego, latim e filosofia, área pela qual me apaixonei", afirma em entrevista à **GALILEU**. E foi por conta da filosofia que ela resolveu estudar Exatas: para a especialista, os estudos matemáticos também oferecem a oportunidade para realizar importantes reflexões.

3.3. REPRESENTAÇÃO NACIONAL



Segundo a matéria publicada na revista Piauí na edição de agosto de 2014 “O conjunto de Mandelbrot – objeto inesgotável gerado a partir de uma recursão de grande simplicidade, $Z \rightarrow Z^2 + C$ – lembra um besourinho. É com um enxame desses fractais que Ávila se diverte na capa da revista, numa ilustração quase factual, pois é assim mesmo que ele costuma fazer matemática: deitado na cama, girando objetos na cabeça e achando tudo muito bonito. Por licença poética, a equação de que tanto gosta foi bordada no lençol. Idem para as divisas da Medalha Fields que enfeitam o travesseiro. O texto acima se trata de um editorial da revista Piauí, acerca de Arthur Ávila, um jovem brasileiro que foi premiado com a Medalha Fields em Seul, Coreia do Sul, no ano de 2014. Apesar de ser um tema relativamente novo na matemática, a teoria fractal já demonstra grande potencial por parte dos matemáticos brasileiros, em especial, pelos novos talentos buscando inovações e descobertas na área da matemática, um dos motivos pelo qual o ensino do tema nas escolas se faz proveitoso, pois traz aos alunos o contato com um universo matemático não só cotidiano, mas a par de sua atualidade.

De acordo com a publicação feita pela revista Piauí na edição de agosto de 2014 “A União Internacional de Matemática, entidade que atribui a Fields, classifica o Brasil no nível 4 de uma escala em que o quinto nível corresponde à elite dos países produtores de matemática. É um indicador de que a ciência já dispõe aqui de massa crítica. ” Além da paridade temporal de pesquisa e desenvolvimento matemático, o ensino da teoria fractal no ensino fundamental encontra um terreno novo e fértil a ser explorado na educação brasileira, tendo em vista seu potencial de produção matemática; a inserção do interesse pela ciência é uma das formas de manter o caráter crescente dessa produção, além de lhe agregar qualidade de conteúdo base ao tornar disseminada novas formas e visões matemáticas que não a euclidiana, a qual é predominante no conteúdo programático das escolas.

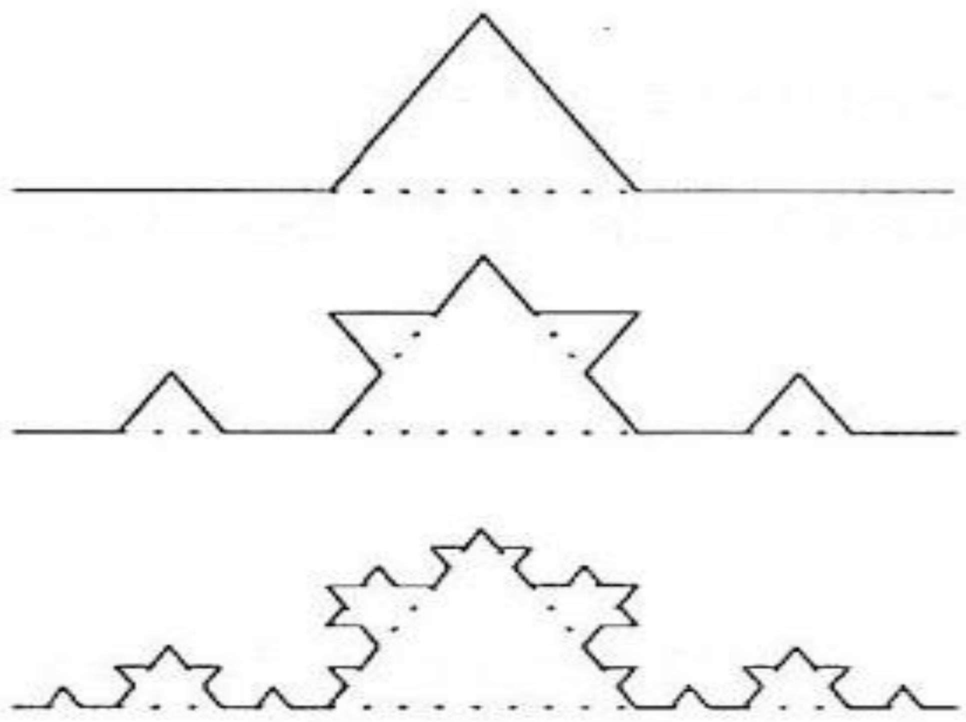
4. PROPRIEDADES FRACTAIS

Quanto à suas propriedades, os fractais apresentam características específicas e distintas entre si, a serem descritas e ilustradas a seguir:

- **Autossimilaridade -** baseia-se no fato de um fractal apresentar cópias de si mesmo em seu interior em diferentes escalas.

- **Autossimilaridade Exata -** A cópia é exata independente da escala de ampliação. Ocorre nos fractais formados com as leis da Geometria Euclidiana usando leis de recursão, muito usada em obras de arte e nas tarefas em sala de aula.

CURVA DE KOCH



- **Estatística -** a repetição do padrão não se dá com exatidão, contudo as qualidades estatísticas se diferenciam dos padrões. Ocorre principalmente na natureza onde não obedece a nenhuma lei de recursão ou da Geometria Euclidiana.

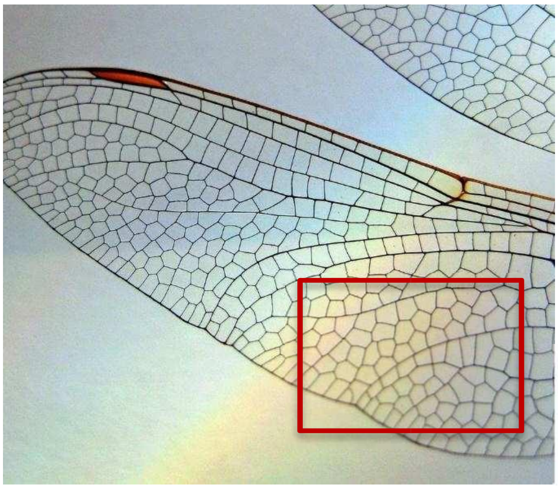


Fig 6.1..d

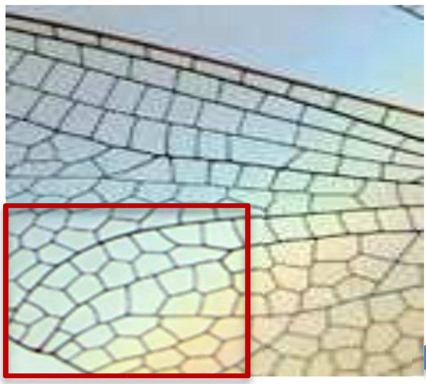


Fig 6.1.e

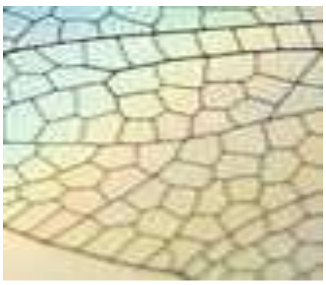


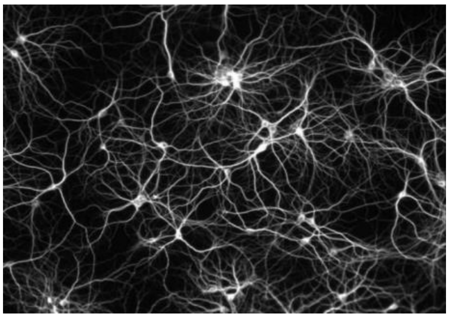
Fig 6.1.f

5. FRACTAIS NA NATUREZA

Na natureza, são encontradas diversas formas geométricas, algumas das quais a Geometria Euclidiana tradicional não é capaz de descrever completamente. Para isso se tornar possível, seria necessário o uso de certos cálculos mais complicados a fim de serem calculadas as suas dimensões. Seguem, abaixo, alguns exemplos da presença da geometria fractal na natureza:

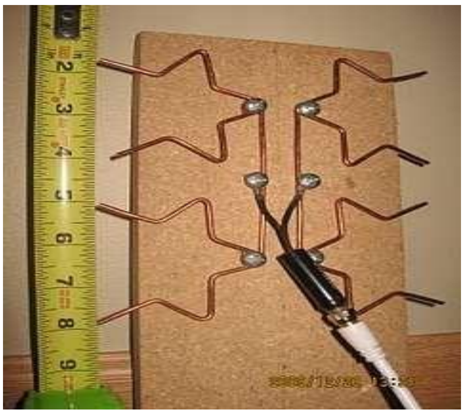
Neurônios

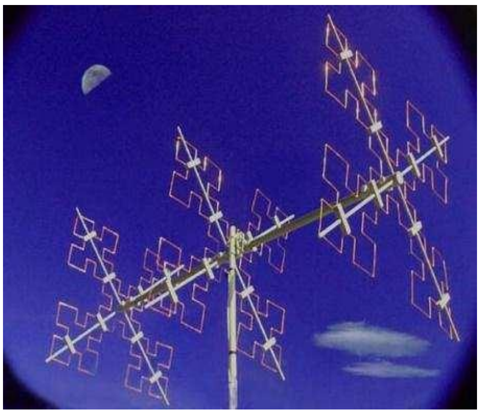
A expressão da Geometria Fractal é visível em algumas expressões estruturais biológicas que, apesar de serem vistas como construções caóticas, são estruturas matematicamente padronizáveis que apresentam características próprias de reprodução.



Nas Áreas Tecnológicas

No uso e no desenvolvimento tecnológico, é possível citar a utilização de antenas utilizadas na telefonia celular, na transmissão wireless, na TV digital (HDTV), entre outras.





Na Agricultura

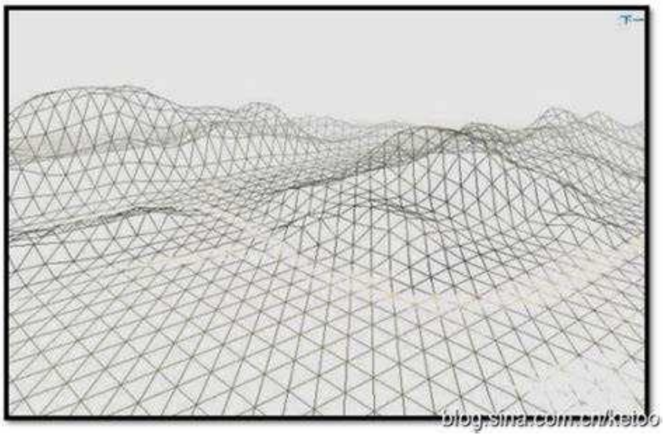
A presença da geometria fractal na agricultura pode se expressar na prática da análise de solos, na nebulosidade da área, movimentos periódicos dos rios e estrutura de vários cristais podem ser modelados por fractais.

Na Mineralogia

Na mineralogia, a geometria fractal é utilizada na medição da densidade dos minerais, na evolução de terrenos e na descontinuidade das rochas, a partir do uso de padrões de continuidade e outras características fractais.

Na Computação Gráfica

Pode-se utilizar a geometria fractal nas criações de cenários naturais, como rios, conjuntos montanhosos e plantas, além do seu uso em programas de criação de arte digital, dos básicos aos mais avançados, provendo diferentes tipos de criações baseadas em repetições ou cópias, como ramificações e mandalas, ao clique de uma simples seleção de pincel.



Na Medicina

Na área das ciências biomédicas, a teoria, bem como a geometria fractal, foram introduzidas de forma proveitosa em diversas áreas; dentre elas, é possível citar a participação da geometria fractal na análise de amostras de tumores ou células cancerígenas, ajudando a entender, prever e reduzir seu crescimento, bem como seu processo de desenvolvimento.

Na Indústria

No setor industrial, os fractais são utilizados, principalmente, na confecção de estamparia de tecidos padronizadas, desde formas geométricas à mandalas.

6. GEOMETRIA DE FRACTAIS DETERMINÍSTICOS

Essa geometria se refere aos subconjuntos que são gerados por transformações geométricas simples que acontecem do objeto nele mesmo, ou seja, quando o objeto é formado por ele mesmo em formas reduzidas. Com este tipo de fractal podemos fazer a representação em sala de aula usando materiais simples, bastando, para isso, que seja feita a repetição dos processos de forma indefinida.

7. FRACTAIS CLÁSSICOS

Alguns fractais assumem papel relevante dentro da geometria fractal, pois apresentam características próprias e são pioneiros nos estudos desta geometria. Seguem alguns deles como exemplos:

1. Curva de Koch, iniciando com uma dimensão.
2. Floco de neve de Koch, iniciando com duas dimensões.
3. Esponja de Menger, inicialmente com 3 dimensões.

Observação: será usado o Conjunto de Cantor como um dos exercícios que serão aplicados para a fixação da matéria.

8. CURVA DE KOCH

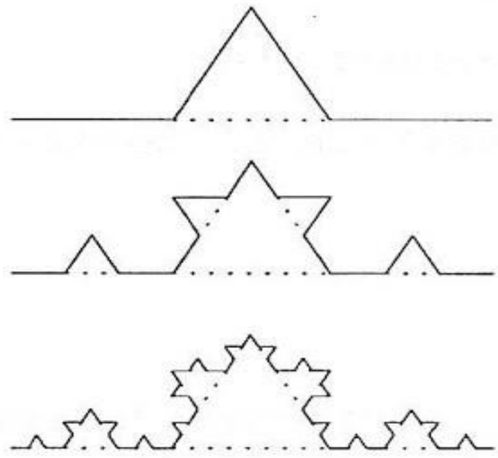


Fig. 10.a

8.1 Processo de construção da Curva de Koch

1. Dado um segmento de reta, dividir em três segmentos iguais.
2. Retirar o segmento do meio.
3. Traçar dois segmentos congruentes adjacentes entre si, com a mesma medida do segmento retirado e adjacentes aos outros dois **Curva de Koch** segmentos, referentes ao primeiro traçado.

Dessa maneira será observado que o comprimento da curva de Koch aumenta à medida em que aumenta o número de iterações sofridas – cada trecho tem o comprimento multiplicado por 4/3 em uma iteração. Logo, quando o número de iterações se aproxima do infinito, o comprimento da curva de Koch também se aproxima do infinito.

8.2. Analisando a medida da Curva de Koch

Com o objetivo de facilitar o estudo do comprimento da curva de Koch, será criada uma tabela e será feito o estudo do ocorrido em cada uma das iterações.

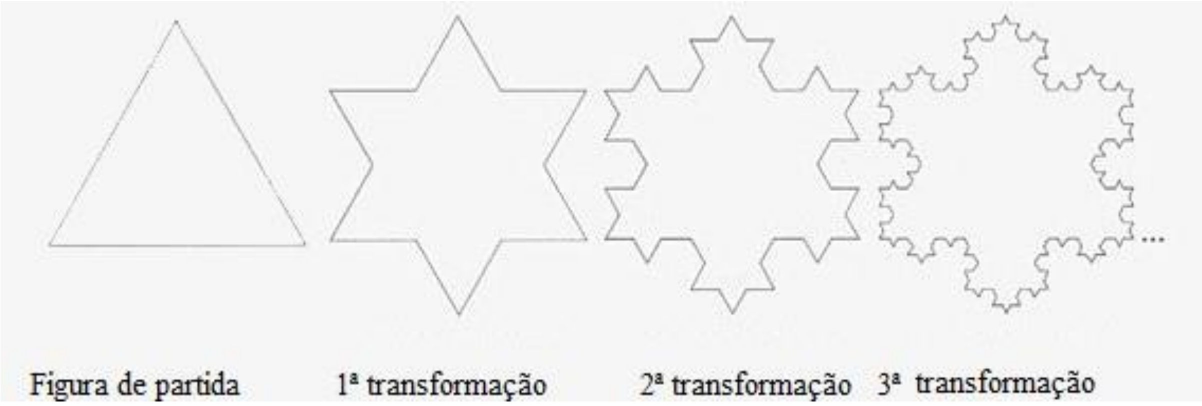
Nível de iteração	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento da curva
inicial	1	L	L
1° iteração	$4 = 4^1$	$\frac{L}{3^1}$	$4.\frac{L}{3^1}$
2° iteração	$16 = 4^2$	$\frac{L}{3^2}$	$4^2.\frac{L}{3^2}$
3° iteração	$64 = 4^3$	$\frac{L}{3^3}$	$4^3.\frac{L}{3^3}$
...	...	...	...
n-ésima iteração	4^n	$\frac{L}{3^n}$	$4^n.\frac{L}{3^n}$

9. FLOCO DE NEVE DE KOCH OU ILHA DE VAN KOCH

9.1 Processo de construção do Floco de neve de Koch ou ilha de Von Koch

1. Construir um triângulo equilátero.
2. Dividir cada um dos lados do triângulo em três partes iguais.
3. Retirar, de cada lado do triângulo, o segmento do meio.
4. Traçar dois segmentos congruentes adjacentes entre si e adjacentes aos outros dois segmentos, referentes aos lados do primeiro triângulo equilátero formado.

Observação: repetem-se os passos dados indefinidamente, em cada um dos lados formados na nova figura obtida.



9.2 Perímetro do floco de neve de Koch

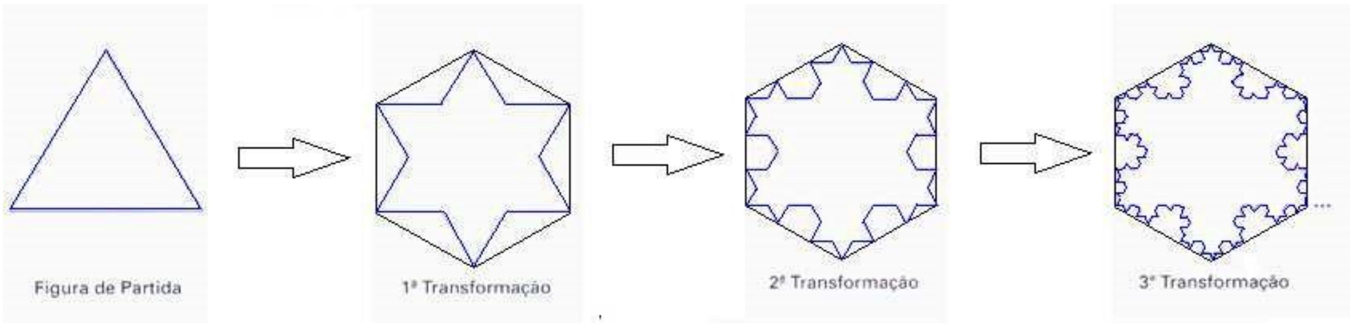
Para se obter o perímetro do floco de neve de Koch, constrói-se uma tabela e, à cada iteração, será analisada a quantidade e as medidas dos segmentos obtidos na nova figura formada.

Observação: tomar para medida dos lados 1, para facilitar os cálculos.

Iteração	N° de lados	Medida do lado	Perímetro
Figura inicial	3	1	3
1ª iteração	3 . 4 = 12	$\frac{1}{3}$	$\frac{3\ .\ 4}{3} = 4$
2ª iteração	$3\ .\ 4^2 = 48$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{3\ .\ 4^2}{3^2} = 5,333...$
3ª iteração	$3\ .\ 4^3 = 192$	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{3\ .\ 4^3}{3^3} = 7,111...$
...	...	...	...
Nª iteração	$3\ .\ 4^n$	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{3\ .\ 4^n}{3^n} = \frac{4^n}{3^{n-1}}$

9.3 ESTIMATIVA DA MEDIDA DA ÁREA DO FLOCO DE NEVE DE KOCH

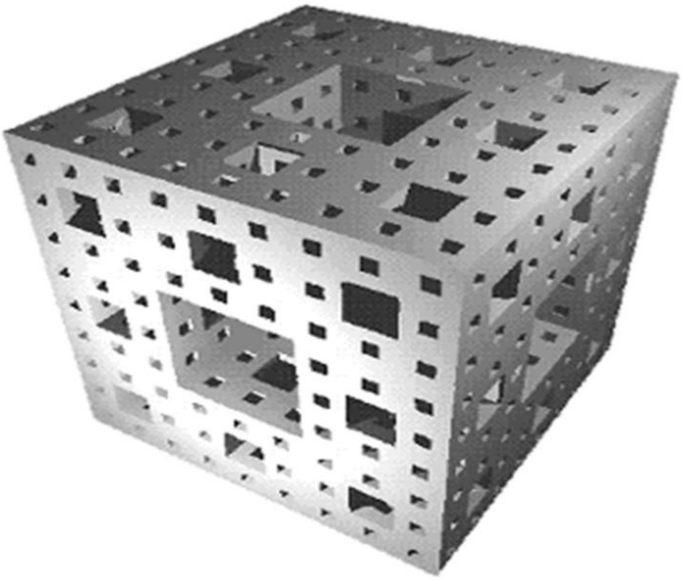
Vamos, agora, estimar a área do floco de neve de Koch em função da medida da área do triângulo dado inicial, que vamos supor igual a 1.



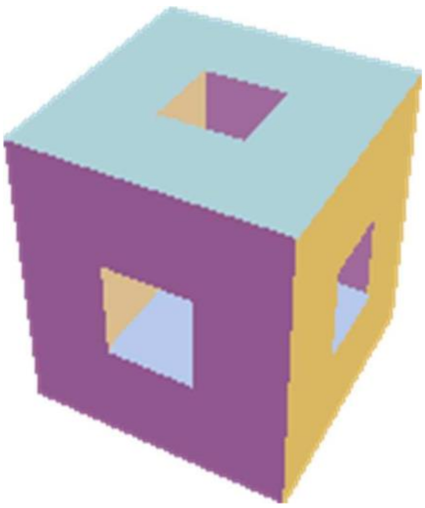
Dessa maneira, é possível observar que a área do floco de neve de Koch será limitada, por maior que seja o número de iterações, pois a figura nunca ultrapassa o bordo do hexágono que circunscreve a figura após a primeira iteração; já o seu perímetro, sempre aumenta para cada nova iteração ocorrida. Sendo assim, quando o número de iteração tender ao infinito o seu perímetro também tenderá para o infinito.

Sendo assim podemos observar que quando o perímetro do floco de neve de Koch tende ao infinito a área é sempre majorada por 2**,** já que a área do hexágono regular que limita o floco de neve de Koch é igual ao dobro da área do triângulo equilátero de partida. A título de curiosidade, pode-se mostrar que, no caso da área unitária do triângulo, a área tende a 1,6.

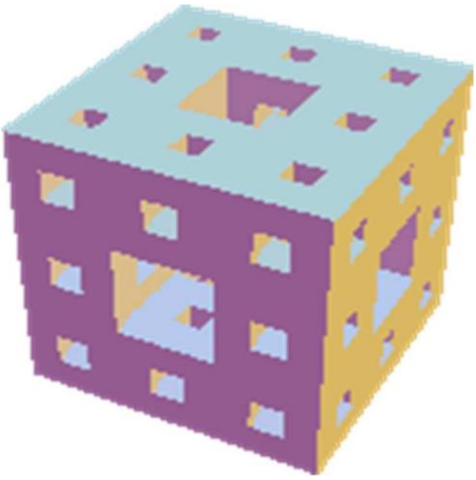
10. A ESPONJA DE MENGER



A esponja de Menger, cujo nome faz referência ao matemático que a inventou, o austríaco Karl Menger (1902-1985), é criada dividindo-se um cubo de aresta unitária em 27 cubinhos de arestas 1/3 do valor das arestas originais, e removendo-se a peça central e cada cubo localizado no centro de cada face (ou seja, 7 cubos são removidos). Na primeira iteração a esponja está assim:



Este processo é repetido infinitamente com os todos os cubos restantes, sempre os dividindo em 27 outros com 1/3 da aresta dos anteriores e removendo a peça central e cada cubo central das faces. Na segunda iteração a esponja está assim:



Na terceira, ele ficará está assim:

O volume da esponja pode ser calculado como $V= (20/27)^n$ onde n é o número de iterações feitas. Veja porquê:

Na primeira retirada, o volume da esponja é o de 20 cubinhos (dos 27 que aparecem na primeira iteração, 7 são retirados) cada um com volume 1/27. Na segunda interação, em cada um dos 20 cubinhos anteriores aparecem mais 27, dos quais 7 são retirados, cada um com volume $1/27^2$.

Assim, na enésima iteração, terão 20^n cubinhos, cada um com volume $1/27^n$. Volume total: $V=(20/27)^n$

Note que o volume da esponja tende a zero, quando as interações tendem ao infinito. Pode-se mostrar também que a área aumenta infinitamente. Ou seja, a esponja de Menger tem volume zero e área infinita...

- Iterações feitas

Nível	Cubos removidos	Cubos restantes	Volume
Nível inicial	0	27	1
1ª iteração	7	20	$\frac{20}{27}$
2ª iteração	7 . 20 = 140	20 .20 = 400	$\left(\frac{20}{27}\right)^2$
3ª iteração	7 . 400 =2800	20 x 400 =8000	$\left(\frac{20}{27}\right)^3$
...	...	...	...
Nª iteração	$7 \cdot 20^{n-1}$	20^n	$\left(\frac{20}{27}\right)^n$

11. INTRODUÇÃO DO TEMA EM AULA

Antes de fazer a apresentação para os alunos, será feita a revisão de toda a matéria para que que as turmas possam acompanhar o tema com interesse e compreensão. No primeiro dia de aula, será feita a revisão de operações com frações, transformação de frações em números decimais e operações com números decimais com exercícios de revisão, a serem corrigindo em sala de aula. No segundo dia de aula, será feita uma revisão de semelhança, com observação na similaridade nas formas, com exercícios de semelhança de triângulos. No terceiro dia, será estudada a noção intuitiva de limite e de infinito. Isso será feito usando principalmente as dízimas com parte decimal 0,9999… Ex: 1,999999.... =2

3,99999... =4

Fazendo o cálculo de geratriz.

Ex: $\frac{8}{16} = 0{,}5$

$\frac{8}{8} = 1$

$\frac{8}{4} = 2$

$\frac{8}{2} = 4$

$\frac{8}{1} = 1$

$\frac{8}{0{,}5} = 16$

$\frac{8}{0{,}1} = 80$

$\frac{8}{x}$ = L (usando a calculadora do celular podemos concluir que à medida que o denominador (x) vai diminuindo o resultado aumenta).

No terceiro dia será feita a apresentação propriamente dita, nele todos os alunos poderão levar celulares, tablets, ou qualquer outro aparelho eletrônico que possa registrar a aula, que será ministrada com o uso de data-show, com o uso de slides e filmes mostrando várias formas de fractais, na forma natural e também construídos.

Depois da apresentação, as turmas serão separadas em grupos de quatro alunos para desenvolverem os trabalhos que ajudaram na avaliação da aprendizagem. Todas as atividades de sala de aula serão acompanhadas pelo professor, os alunos deverão construir um fractal determinístico em casa, e será dada a orientação para que façam isso e levem para que seja feita uma exposição no quadro-mural da escola.

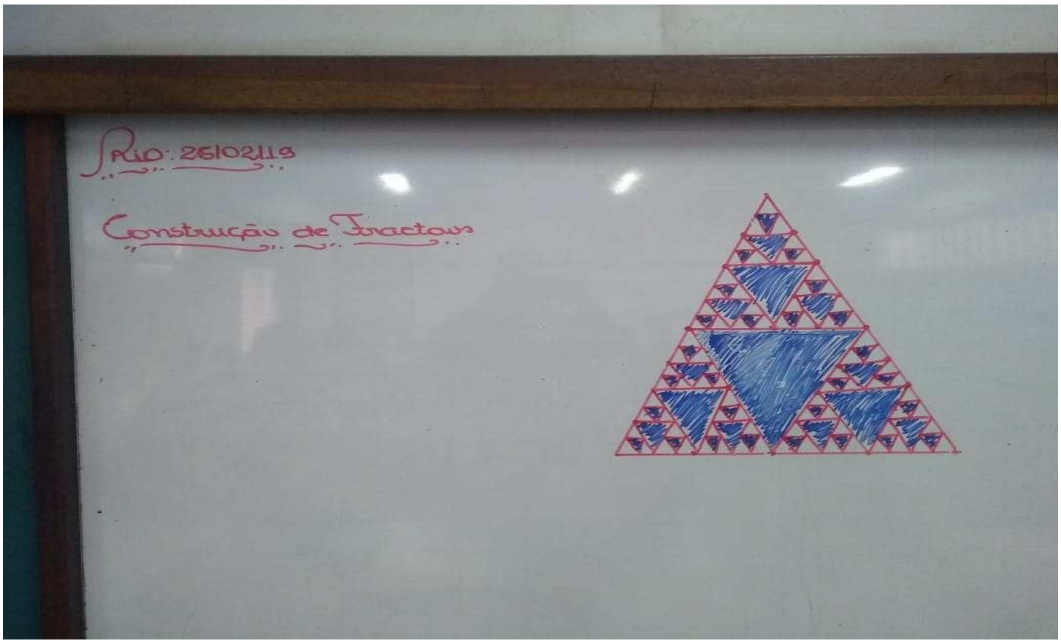
12. PROPOSTA DE ATIVIDADES

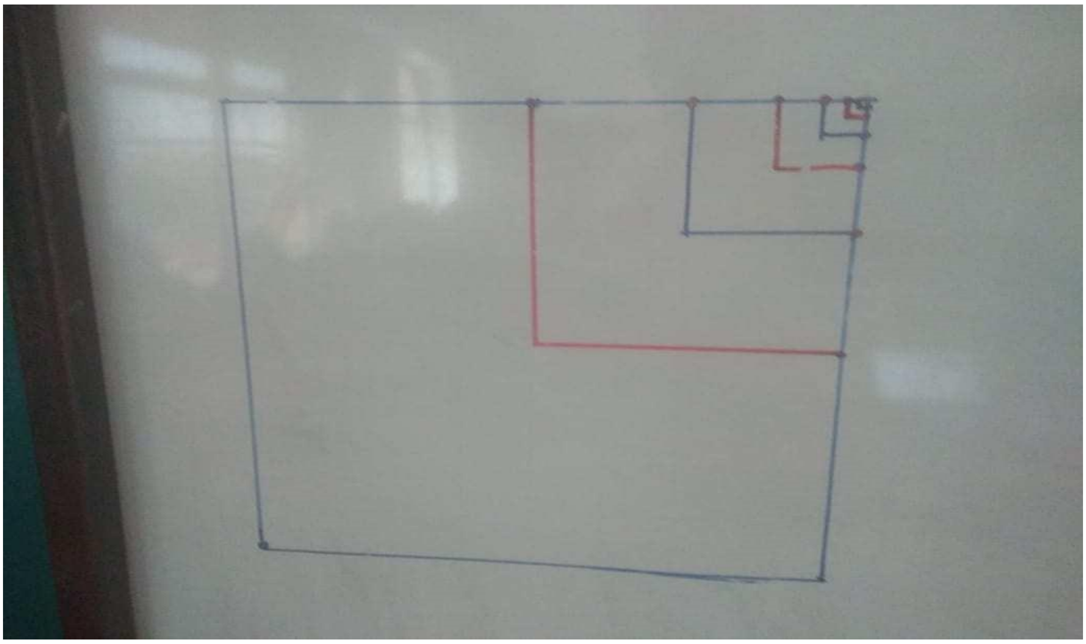
Pode-se aplicar os conhecimentos de Geometria Fractal em um vasto campo de em suas diversas áreas, tais como álgebra, geometria plana e espacial, sequências, progressões. A fim de que as aulas sejam enriquecidas e possa ser inserido este tema durante as aulas, deve-se adequar as atividades ao conteúdo e ao nível de escolaridade.

Levando isso em consideração, foram propostas atividades práticas em grupo sob minha orientação durante as aulas, utilizando material próprio da Geometria Euclidiana. Seguem abaixo algumas fotos que demonstram o trabalho feito em sala de aula.

Posteriormente à construção dos fractais por parte dos alunos como tarefa, fiz uma demonstração no quadro, passo a passo, para que eles pudessem construir suas tarefas de acordo com o desejado. Este processo foi altamente satisfatório, dessa maneira, eles conseguiram realizar as tarefas de maneira proveitosa.

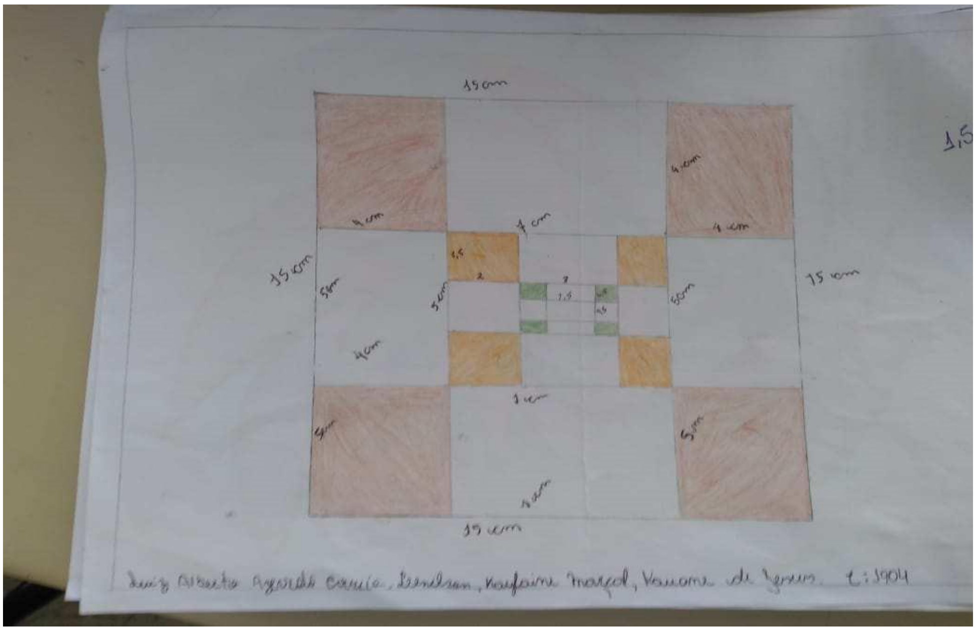
Exemplos feitos no quadro como demonstração na construção de fractais para alunos

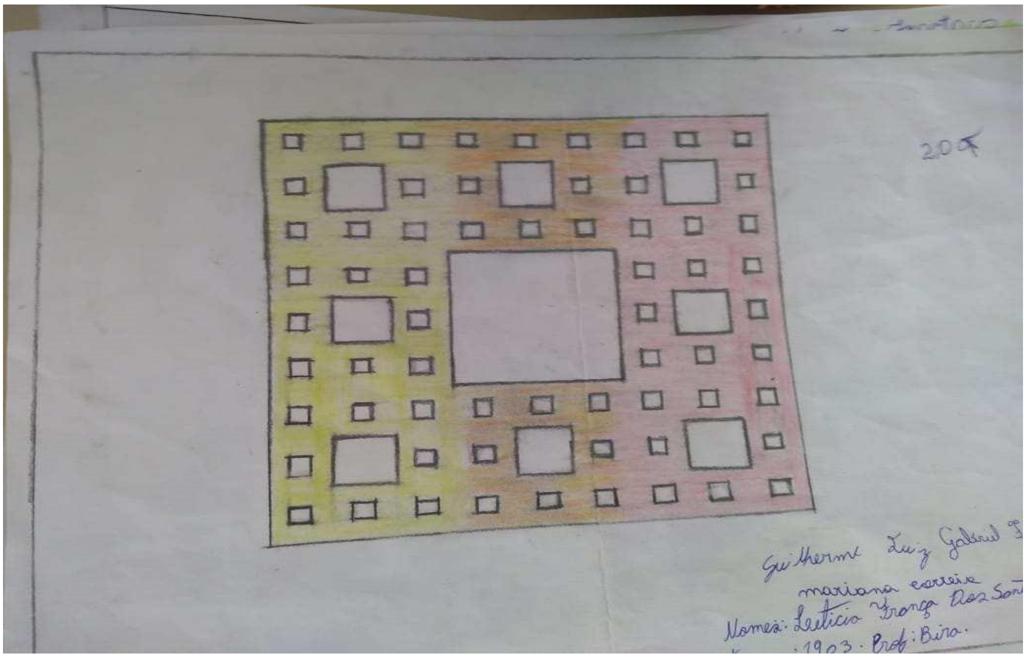


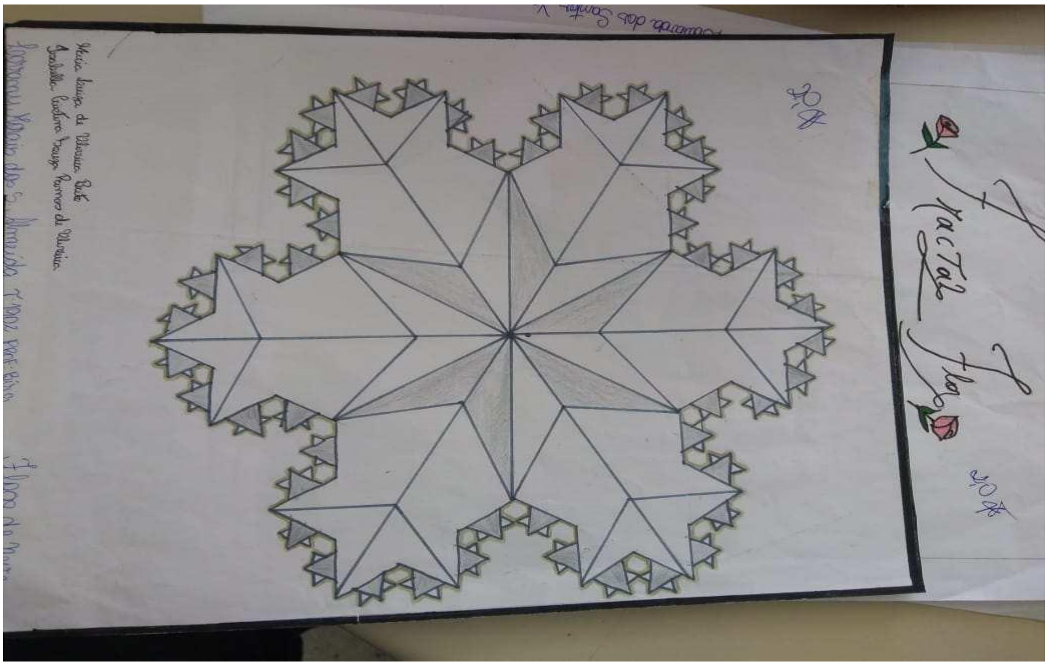


Alunos construindo seus próprios fractais

Alguns trabalhos realizados pelos alunos:







Exposição no pátio da Escola Municipal Jornalista Sandro Moreyra, apresentando aos demais alunos e professores da escola os trabalhos feitos sobre o tema fractal durante as aulas ministradas.

Palestra ministrada para professores da Secretaria Municipal do Rio de Janeiro:

Moção de Louvor e Reconhecimento concedida pela Câmara de Vereadores do Município da Cidade do Rio de Janeiro pelo trabalho realizado em sala de aula durante o ano de 2018.

Esse trabalho teve como diferencial o ensino de Fractais de forma lúdica junto com a disciplina de Artes.

Foi visto como inovador pela Secretaria Municipal de Educação e considerado entre os dois trabalhos inovadores realizados em sala de aula durante o ano de 2018.

Certificado pela palestra ministrada aos professores, convite feito pela Secretaria Municipal de Educação da cidade do Rio de Janeiro, pelo trabalho realizado em sala de aula durante o primeiro período de 2019.

8ª CRE
EM DIÁLOGOS

CERTIFICADO

Conferimos ao Professor Ubirajara Magliano de França, matrícula 10/173.780-8 , o presente certificado pela palestra " Estudo de fractais no ensino básico" para professores de matemática do 9° ano da 8ª Coordenadoria Regional de Educação, no projeto 8ª CRE em Diálogos, com duração de 4h/a.

Rio de Janeiro, 17 de junho de 2019

Uelton de Mendonça Souza
Assistente II – E/8ªCRE/GED
12/290.560-2

RIO PREFEITURA
EDUCAÇÃO

12.1 ATIVIDADE 1: Construindo um fractal

i) **Nível de ensino**: Ensino Fundamental II.

ii) **Objetivo**: Apresentar as imagens dos fractais e fazer a caracterização dos mesmos. iii) **Conteúdos que podem ser desenvolvidos**:

Segmento de reta/construção;
Divisão;
Sequência;
Funções;
Característica dos fractais;
Operações com números decimais;
Operações com frações;
Noção intuitiva de limite;
Noção intuitiva de infinito

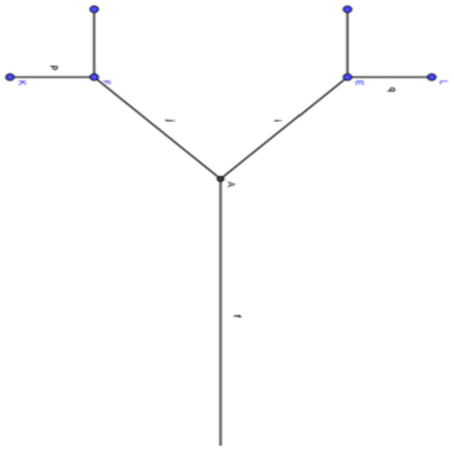
A arte milenar oriental de cultivo de bonsai, árvores em miniatura, que mantém todas as características de uma árvore com tamanho normal, é plantada e a partir da germinação da semente. No seu primeiro ano, o caule cresce 12cm, e a cada ano surgem dois novos galhos bifurcados em forma de "V" com a metade do comprimento do galho anterior de onde surgiram. Completemos a tabela e construamos um esboço usando régua e lápis, levando-se em consideração que cada nível de iteração corresponde a um ano de vida do bonsai.

1ª iteração - Desenhe um segmento de 12 cm, na folha A4, de forma que a base do segmento coincida com o ponto médio do menor lado da folha, perpendicular ao lado da folha.

2ª iteração – Na extremidade livre do segmento desenhe outros dois, em forma de "V", com comprimento igual a metade do segmento anterior. Repita essa iteração por pelo menos duas vezes.

Utilizando o material entregue ao grupo, siga as etapas para a construção de um fractal. A regra que você teve que obedecer foi sempre a mesma? Nesta construção, pode ser observado algum padrão?

RESOLUÇÃO:



Iteração	Quantidade de segmentos	Perímetro
1	1	12
2	3	12 + 12
3	7	12 + 12 + 12
4	15	12 + 12 + 12 + 12
...	...	...
n	n^2 - 1	12.n

12.2 ATIVIDADE 2: Sequência inspirada em fractais.

i) **Nível de ensino**: Ensino fundamental.

ii) **Objetivo**: utilizar o conhecimento das características dos fractais para trabalhar os conteúdos matemáticos. iii) **Conteúdos que podem ser desenvolvidos**:

Sequências;

Funções;

Áreas;

Recorrência;

Tabelas;

Operações com frações;

Noção intuitiva de limite;

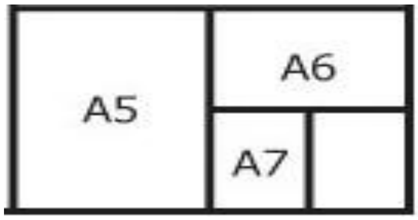
Noção intuitiva de infinito

1) Em Copabacana, um reino na Sérvia, o soberano Sérvio decidiu dividir seu reino entre seus filhos da seguinte maneira: O Primeiro filho receberia a metade do reino, e caso ele tivesse mais filhos, O filho que nascesse receberia metade das terras restantes e assim sucessivamente. Considere que o soberano Sérvio teve 7 filhos e representando o reino por uma folha de papel A4 e fazendo a reconstrução deste reino com o material disponibilizado, vamos completar a tabela com os dados observados nesta reconstrução.

Filho	**Formato da folha**	**Área**
1º	A5	$\frac{1}{2}$
2º	A6	$\frac{1}{4}$
3º	A7	$\frac{1}{8}$
4º	A8	$\frac{1}{16}$
5º	A9	$\frac{1}{32}$
6º	A10	$\frac{1}{64}$
7º	A11	$\frac{1}{128}$

Observação: será usada uma folha de papel A4 com área igual 1.

2)Por que o soberano Sérvio não conseguiu distribuir todo o reino entre seus filhos? Quantos filhos seriam necessários para que todo o reino fosse distribuído?



Mostrar que a soma das áreas é sempre menor que 1, que é a medida do formato A4 equivalente a todo o reino.

12.3 ATIVIDADE 3:

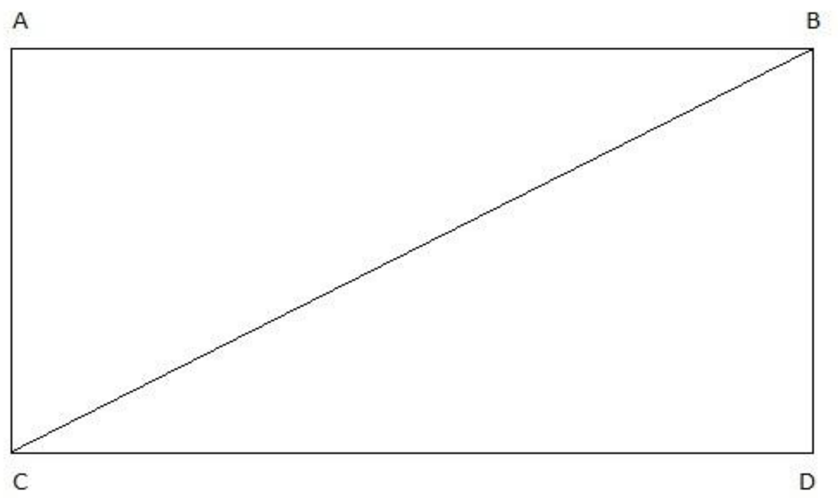
Nível de ensino: Ensino fundamental.

Objetivo: utilizar o conhecimento das características dos fractais para trabalhar os conteúdos matemáticos.

Conteúdos que podem ser desenvolvidos:

Sequências;
Recorrência;
Operações com frações;
Noções intuitiva de limite; Noção intuitiva de infinito; Operações com frações.

Usando régua e esquadro, constrói-se um retângulo ABCD de lados AB=CD=16cm e lados AC=BD=12cm. Traça-se a diagonal BC, como a figura abaixo:



- Usando a régua, faça a medida da diagonal BC.

Qual a medida encontrada para a diagonal BC? R: 20 cm

Agora vamos fazer algumas iterações usando os conhecimentos de fractais aprendido nas aulas anteriores.

- 1°Iteração=> no ponto médio M do lado AB traçamos um segmento de reta paralelo ao lado BC até encontrar a diagonal BD no ponto médio N, do ponto médio N, da diagonal BD, trace um segmento de reta paralelo ao lado AB até encontrar o lado AD o ponto médio P.

  Qual a medida da " escadinha" BMNPD?

- 2° iteração=> divide-se o lado AB e a diagonal BD em três segmentos iguais, da seguinte maneira:

BM'= , BN'=N'Q=QD=__ e RD=__, estando R em AD.

Traçam-se os segmentos BM'=N'P'=QR paralelos a AB e os segmentos M'N'=N'Q=QD.

Qual a medida da "escadinha" BM'N'P'QRD?

3° Iteração => Repete-se o mesmo processo, porém, dividindo-se o lado AB e a diagonal BD em 4 partes iguais e calcula-se a medida da nova escadinha formada.

O que podemos concluir com as medidas encontradas em todas as escadinhas formadas usando esta recursão?

À cada iteração que diminuímos as medidas dos degraus das escadinhas eles vão se aproximando da linha reta formada pela diagonal até que toda a escadinha se coloque muito próximo com a diagonal. Será que em algum momento a medida da "escadinha" ficará igual a medida da diagonal? Porquê?

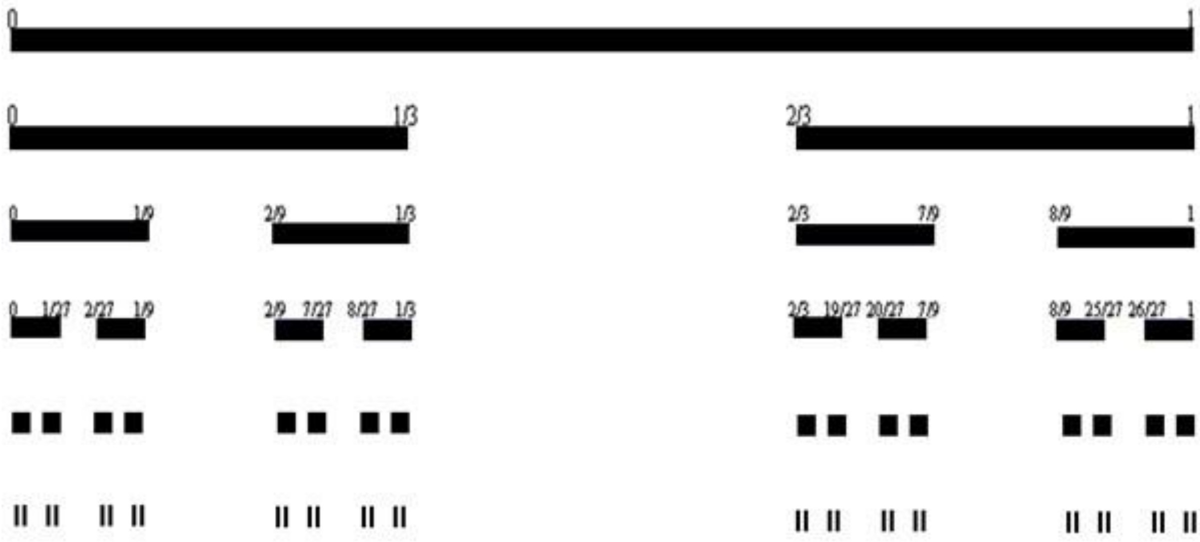
Completemos a tabela dada abaixo:

Nível de Iteração	Medida de cada segmento horizontal	Medida de cada segmento vertical	Medida do comprimento da escada
Nível 1	8	6	28
Nível 2	4	3	28
Nível 3	2	1,5	28
Nível 4	1	0,75	28
Nível 5	0,5	0,375	28
...	...	...	...
Nível n	$\frac{8}{2^{n-1}}$	$\frac{6}{2^{n-1}}$	28

12.4 ATIVIDADE 4: Construção do Conjunto de Cantor.

1° => Para construirmos o Conjunto de Cantor vamos considerar o intervalo formado pelo subconjunto dos números Reais compreendido entre o 0 e o 1, incluindo os dois limites no conjunto.
;
2° => Dividiremos o segmento em 3 partes iguais e retiraremos o intervalo do meio.

3°=> Repetimos, em cada um dos segmentos, os dois passos anteriores indefinidamente.



Nível de Iteração	N° de intervalos	Comprimento de Cada Intervalo	Comprimento Total do Conjunto
0	1	1	1
1	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	4	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{2^2}{3^2}$
3	8	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{2^3}{3^3}$
...	...	...	...
n	2^n	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{2^n}{3^n}$

LISTA DE EXERCÍCIOS

Esta lista foi criada com o objetivo de familiarizá-los com exercícios de concursos das escolas federais, todos os exercícios foram retirados de provas de concursos do colégio Pedro II. Tinha como objetivo a aplicação dos conhecimentos adquiridos em fractais.

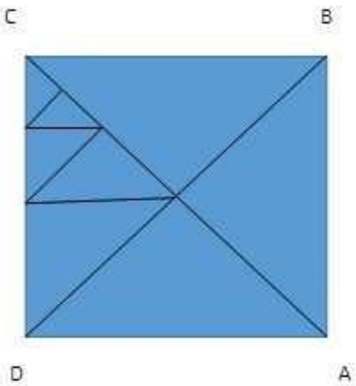
E.M. JORNALISTA SANDRO MOREYRA

PROFESSOR: BIRA

ALUN_: ____ TURMA: 190__

AULA ESPECIAL DE MATEMÁTICA (CORREÇÃO DE EXERCÍCIOS DO C.P.II)

01) Observe a construção a seguir feita a partir do quadrado ABCD, de centro O, cujo lado mede 8 cm.



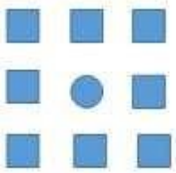
Calcule:

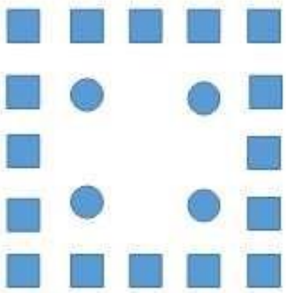
(a) Calcule a medida do segmento HO:

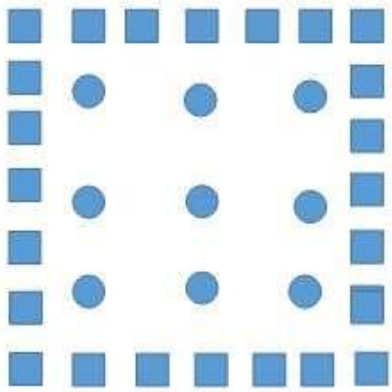
(b) Cacule a área do triângulo EFG.

triângulo	base	altura	área
1			
2			
3			
4			
...	...	...	...
n			

02) Considere a sequencia de figuras formadas por círculos e quadrados:







Assim por diante.

(a) Complete a tabela:

figura	Total de círculos	Total de quadrados	Total de figuras geométricas
1			
2			
3			
4			
5			
...			
n			

13. CONCLUSÃO

Tendo em vista os resultados positivos alcançados durante os exercícios aplicados em sala de aula, observamos que é possível a aplicação do ensino de fractais no Ensino Fundamental.

Antes de iniciar os estudos com as turmas, foi feita uma reunião com os responsáveis dos alunos com o objetivo de pedir permissão para utilizar suas imagens, todos foram avisados de que seria para efeito de um trabalho acadêmico e nenhum responsável ou aluno se opôs.

As aulas foram aplicadas durante uma semana, com seis tempos de aula, dois tempos consecutivos para cada dia em três dias da semana e, na semana seguinte foram feitas avaliações com exercícios dirigidos e trabalhos em grupo.

1° dia; foi feito revisão de operações com números decimais, divisão, multiplicação, adição e subtração; valor numérico de uma expressão algébrica; identificação de uma sequência de 1° e 2°graus; perímetro e áreas de triângulos e quadriláteros. Este momento não foi difícil porque as turmas já tinham conhecimentos prévios e, como dou aula na escola, acompanho as turmas de 8° ano durante o ano letivo anterior para melhor dar prosseguimento aos seus estudos no 9° ano.

2° dia; entramos nos estudos de fractais propriamente ditos. Usei o contexto histórico falando dos principais personagens, descobertas e observações na natureza, fractais clássicos e construções dos fractais determinísticos e da evolução do estudo de Matemática no Brasil, com pessoas e instituições mundialmente reconhecidas. Construímos alguns fractais e fizermos alguns exercícios em sala de aula. Ficou como exercício de casa que os alunos, em grupos de quatro, fizessem pesquisas na internet e construíssem ou copiassem um fractal que mais julgassem interessante.

3° dia; corrigimos em sala de aula os exercícios que ficaram para casa usando tabelas que ajudavam na resolução dos problemas, principalmente quando queríamos descobrir o valor do perímetro ou da área do fractal em questão. Durante esse momento foi explicada a noção intuitiva de limite e de infinito, o que me surpreendeu bastante pela facilidade com que eles aprenderam. Isso vai ajudá-los bastante quando estiverem cursando o 2° grau e tiverem pela frente uma sequência de infinitos termos de razão maior que -1 e menor que 1. Fizemos a separação das turmas em grupos de quatro alunos e deixei claro que cada grupo, realizasse o trabalho sem a minha interferência, porém, para que ganhassem tempo, deixei que usassem calculadora eletrônica, e isso valeu para que resolvessem as operações mais rápido, já que sabiam fazer os cálculos. Durante esse processo eles puderam usar material como: régua, compasso e esquadro, para que cada grupo criasse o seu próprio fractal. Os trabalhos foram expostos no mural do corredor da escola. A Equipe Pedagógica pediu que fossem mostrados na Secretaria Municipal de Educação, o que deixou os alunos bastante envaidecidos.

No final do período observei que as médias das quatro turmas foram maiores que as médias das turmas dos anos anteriores e, durante o segundo período ocorreram as Olímpiadas de Matemáticas das Escolas Públicas e os resultados foram melhores do que os resultados dos anos anteriores.

Com os resultados obtidos fui convidado a fazer uma palestra para professores da rede Municipal da cidade do Rio de Janeiro, com ótimo resultado, muitos professores me pediram material para aplicarem em sala de aula.

Alguns alunos que fazem preparatórios para concursos de escolas técnicas federais declararam que os seus professores dos cursos se surpreenderam com o conhecimento que eles tinham de fractais quando eles resolviam algumas questões que envolviam funções, semelhança se polígonos com áreas e perímetros.

Sendo assim, reitero que com os resultados obtidos, ficou claro que é plenamente possível a introdução dessa matéria no Ensino Fundamental.

Referências Bibliográficas:

- CÔRTES, Ivana Resende da Costa. *Geometria Fractal no Ensino Médio: Teoria e Prática*. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade do Estado do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Rio de Janeiro, 2014.

- NETO, Eloy Machado. Compilação de conteúdo disponibilizado em : http://www.astro.virginia.edu/~eww6n/math/MengerSponge.html. Domínio: www.Geocities.ws.

- NETO, Eloy Machado. Compilação de conteúdo disponibilizado em: http://www.mhri.edu.au/~pdb/fractals/gasket/. Domínio: www.Geocities.ws.

- LAURENÇO, Adriana de Carvalho. *Investigação matemática por meio de fractais*. 2017.Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Vitória da Conquista, 2017.

- MOREIRA, Vanessa da Silva Sá Sampaio. *Geometria fractal na Educação Básica*. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, 2017.